Matek A3x

Nguyen Xuan Ky

jegyzet: Farkas Miklósné: Közönséges Differenciál egyenletek } elmélet
Csoszár Ákosné: Vektoranalízis
Pach-Zs. Pálné: Komplex függvénytan
Bolzsonyi -: Matematikai feladatgyűjtemény II és III kötet 3 gyakorlat

követelmény: egyetemi honlapon http://math.bme.hu/~nxk/

aláírás: 1 zh. (10. hét) 30% + pótzh 14. hét + pótzh pótlási hét
→ 40% → érvényes jegy!

vizsga: írásbeli + honlap

Tematika: Diffegyenletek
Vektoranalízis
komplex fv.-tan

2007.02.12. hétfő

I. Előadás (1. hét)

Közönséges differenciálegyenletek (DE)

Differenciálegyenletek fogalma: olyan egyenlet, mely tartalmazza az ismeretlen fv.-t és annak deriváltjait

pl. $y(x) = ?$ keressük, amelyre $y(x) + y'(x) = 0$ (1. rendű) $\left(y(x) = e^{-x}\right)$

- ha ismeretlen fv. egy ismeretlenes ⇒ közönséges diffegyenlet (default)
- ha — " — több — " — ⇒ parciális diffegyenlet

Diffegyenlet rendje:

- 1. vagy n-edrendű egyenletrendszer: 1, amennyiben az ismeretlen fv. deriváltjai között a legmagasabb rendje 1 vagy n

pl.: $y''(x) + 3y(x)y'(x) = 0$ ⇒ 2. rendű DE

DE vizsgálata

- van-e egy adott egyenletnek megoldása

⇒ 1. Egzisztencia-probléma

2. Hány megoldás? (unicitás-probléma)

3. Megoldás módszere (mi a megoldás?)

4., közelítő megoldás

Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek

Ált. alak (explicit alak) default

(1) $y' = f(x,y)$ $(x,y) \in \Omega \in \mathbb{R}^2$ (tartomány síkban)

$y = y(x)$

pl Ha $f(x,y) = x+y$

$y' = x+y$ $(y'(x) = x + y(x))$

(implicit alak):

~~[illegible]~~ $F(x,y,y') = 0$

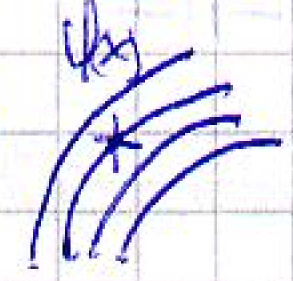
pl $F=(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 x_3 \Rightarrow x \cdot y(x) \cdot y'(x) = 0$

(1) egyenlet megoldása olyan $\varphi(x)$ fv., amely diffható $I=(\alpha,\beta)$-ban

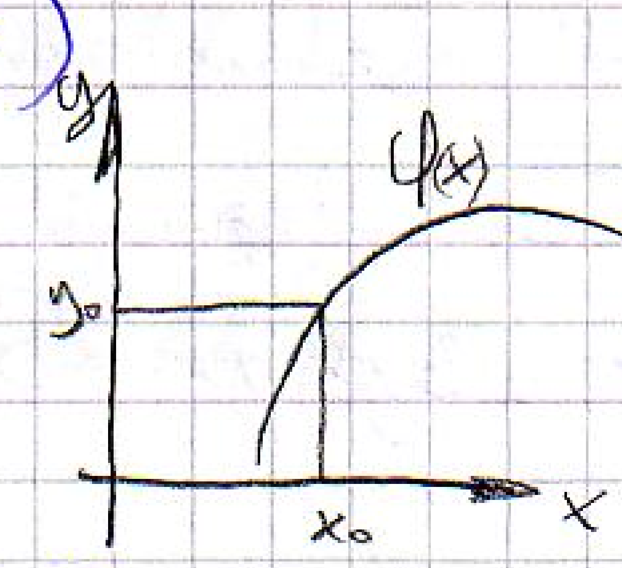
$(x, \varphi(x)) \in \Omega \quad (x \in (\alpha,\beta)) \; : \; \varphi'(x) = f(x,\varphi(x)) \quad (x \in (\alpha,\beta))$

$\varphi(x)$ grafikonja: (fizikában: pálya) megoldási görbe (ált. több megold.)

⇒ több megold. → görbesereg



Kezdeti érték feladat (KÉF)



$y(x)$ (1) megoldása

$y(x_0) = y_0$

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ y(x_0) = y_0 & (x_0,y_0) \in \Omega \end{cases}$$

Partikuláris megoldás

(1) DE-nek egy konkrét megold

Általános megoldás:

megoldások halmaza (összes mo. halmaza)

Kezdeti érték feladat egyértelműen megoldható:

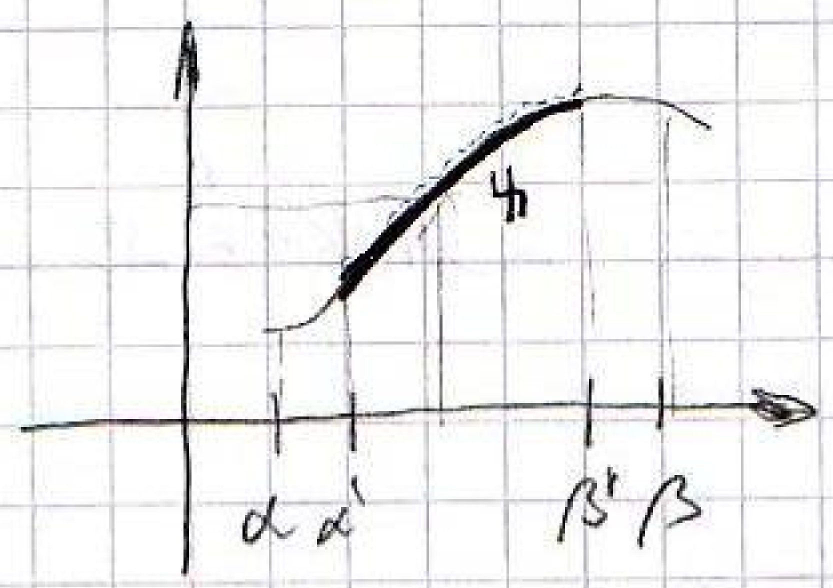
ha $\exists$ olyan $\varphi(x)$ megold (teljes megoldás), amelyre igaz, hogy

ha ψ egy másik megold $\Rightarrow$ ψ: φ-nek leszűkítése

Ha $\varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$, $\psi(x)$ $x \in (\alpha', \beta')$ $(\alpha', \beta') \subset (\alpha, \beta)$:

: $\varphi(x) = \psi(x)$ $x \in (\alpha', \beta')$ TELJES MEGOLD

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Szétválasztható változójú diffegyenletek (szeparábilisak)

$y' = \underbrace{g(x)h(y)}_{f(x,y)}$ $x \in I_1$, $y \in I_2$ (I_1, I_2 intervallumok)

példa $y' = xe^{-y}$

ált. megold:
$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

$g \in C(I_1)$, $h \in C(I_2)$ $h(y) \neq 0$ $y \in I_2$

$\Rightarrow$ megold implicit alakja

$$\frac{d}{dx}\left(\int \frac{dy}{h(y)}\right) = \frac{d}{dx}\int g(x)dx$$

$$\frac{1}{h(y)} \cdot y'(x) = g(x)$$

pl $y' = xe^{-y}$ $\Rightarrow$ szeparábilis $\Rightarrow$ megnézük hol értelmezett

$g(x) = x$ $h(y) = e^{-y}$

$x \in \mathbb{R}$
$y \in \mathbb{R}$ $h(y) = e^{-y} \neq 0$

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \Rightarrow \int e^y dy = \int x dx$$

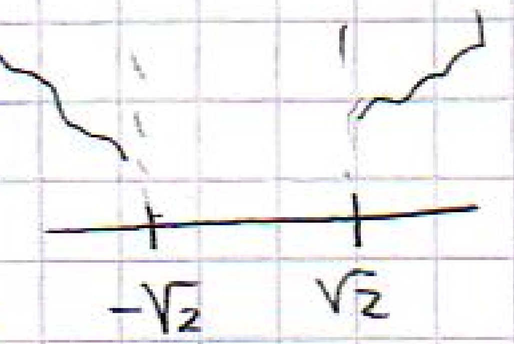
$$e^y = \frac{x^2}{2} + c \quad \text{(implicit alak)}$$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \quad \text{(explicit alak)}$$

ha $c=1$ $\quad y(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2}+1\right) \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

ha $c=-1$ $\quad y = \ln\left(\frac{x^2}{2}-1\right)$

$\frac{x^2}{2} - 1 > 0 \quad x^2 > 2$



$x > \sqrt{2}$

$x < -\sqrt{2}$

ért tartomány c-paramétertől függ $\Rightarrow$ EGYPARAMÉTERES GÖRBESEREG

$y' = g(x)h(y) \qquad x \in I_1$

$y(x_0) = y_0 \qquad y \in I_2$

$x_0 \in I_1, y_0 \in I_2$

legyen $y(x)$ általános megoldás

$y(x_0) = y_0 \Rightarrow$ konstans értéke

$y' = xe^{-y}$

$$\left\{\begin{array}{l} y(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2}+c\right) \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \overset{x=0}{=} \ln c \Rightarrow c = e$$

Szétválasztható változójú DE-re visszavezethető egyenletek

a) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0)$

pl $f(t) = t$ (új vált) $u(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow y(x) = u(x) \cdot x$

$y' = \frac{y}{x} \qquad y'(x) = u'(x)x + u(x) \Rightarrow$ behelyettesítjük eredeti egyenletbe

$u'(x)x + u(x) = f(u(x)) \Rightarrow u' = \frac{f(u)-u}{x}$

u ismeretlen fv-re vezethető szétválasztható változójú fv

$\Rightarrow$ u-ra megoldjuk $\Rightarrow$ $y(x) = U(x) \cdot x$

Pl (b)

$$y' = f(Ax + By + C) \quad B \neq 0 \quad A, C \in \mathbb{R}$$

pl $f(t) = 3t \quad A = 5,\ B = 10,\ C = 2$

$$y' = 3(5x + 10y + 2)$$

ált megold: $u = u(x) = Ax + By(x) + C$

$$y(x) = \frac{u(x) - Ax - C}{B} \Rightarrow y'(x) = \frac{u'(x) - A}{B}$$

$$\frac{u'(x) - A}{B} = f(u(x)) \Rightarrow u' = B\, f(u) + A$$

u-ra szétválasztható vált-ú d.egyenlet

Elsőrendű lineáris d.egyenletek

Ált alak: (I) $y' + g(x)y = f(x)$ $\quad g$ és f adott fv-ek

($f \neq 0 \Rightarrow$ INHOMOGÉN)

LINEÁRIS: $\forall$ két megoldás összege is megoldás

egy megold. számszorosa is megoldás

(H) $y' + g(x)y = 0$ ($\Rightarrow$ HOMOGÉN)

a) (H) de. ált. megold

$g \in C(\alpha, \beta)$

$y' = -g(x)y$ (y-ra szétválaszt. vált. fv.)

$y > 0$ $\quad \int \frac{dy}{y} = -\int g(x)\,dx$

$\ln y + c = -\int g(x)\,dx \Rightarrow \ln c_1 y = -\int g(x)\,dx \Rightarrow c_1 y = e^{-\int g(x)dx} \Rightarrow$

$c = \ln c_1$ ($c_1 > 0$)

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{c_1} e^{-\int g(x)dx} \quad \text{ÁLT MEGOLD (H) DE-RE}}$ $\quad \frac{1}{c_1} = c$ ($c > 0$)

$c < 0$

teljesül is megold $\Rightarrow$ ($y < 0$-ra)

$+c = 0 \Rightarrow$ megold $= 0$

$$y_H(x) = c\,e^{-\int g(x)\,dx} \qquad c \in \mathbb{R}$$

HOMOGÉN DE ÁLT MEGOLD