2007. 02. 19. hétfő — II Előadás (2. hét)

Elsőrendű DE

Ált alak

(I) $y' + g(x)y = f(x) \quad x \in (\alpha, \beta)$

(H) $y' + g(x)y = 0$

a) (H) ált. megoldása

$$y_H(x) = c \cdot e^{-\int g(x)dx} \quad (c \in \mathbb{R})$$

pl

$$c = 1 \Rightarrow y_h(x) = e^{-\int g(x)dx}$$

b) (I) ált megoldása (konst-variálás módszere)

$$y(x) = C(x) y_h(x) = C(x) e^{-\int g(x)dx}$$

$C(x) = ?$

$y'(x) = C'(x) \cdot y_h(x) + C(x) \cdot y_h'(x) \Rightarrow$ behelyettesítés (I) helyébe

$$C'(x) \cdot y_h(x) + \underbrace{C(x) \cdot y_h'(x) + g(x) \cdot C(x) y_h(x)}_{C(x)\left[\underbrace{y_h'(x) + g(x) y_h(x)}_{=0}\right]} = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x) y_h(x) = f(x) \Rightarrow C(x) = \int \frac{f(x)}{y_h(x)} dx$$

c) (I) – kezdeti érték feladat megold.

$$\begin{cases} y' + g(x)y = f(x) & x \in (\alpha, \beta) \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in (\alpha, \beta) \\ & y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$y(x)$ az (I) ált.

$y(x_0) = y_0 \Rightarrow$ konst értéke

példa

$$\begin{cases} y' - \frac{2}{x}y = x^2 + 1 & (I) \quad x \in (0, \infty) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

a) H $\quad y' - \frac{2}{x}y = 0$ $\quad g(x)$

$$y_H(x) = C \cdot e^{-\int g(x)dx} = Ce^{\int \frac{2}{x}dx} = C \cdot e^{\ln x^2} = Cx^2 \quad (C \in \mathbb{R})$$

$C = 1 \Rightarrow y_H(x) = x^2$

b) (I) ált megold $\quad y(x) = C(x)\, x^2 \Rightarrow$

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{y_H(x)} dx = \int \frac{x^2+1}{x^2} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - \frac{1}{x} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow y(x) = \left(x - \frac{1}{x} + k\right) x^2 = x^3 + kx^2 - x$$

c) (I) kezdeti érték feladat

$y(x_0) = y_0$

$y(1) = k = 2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - x$

Egzakt diffegyenletek

Értelmezés

$$(1)\quad P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0 \qquad (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

EGZAKT, ha $\exists$ olyan kétváltozós $u(x,y)$ fv: $u'_x(x,y) = P(x,y)$, $u'_y(x,y) = Q(x,y)$ $\big((x,y) \in \Omega\big)$

Elnevezés:

u fv. a P és Q fv-pár primitív fv-e (POTENCIÁLJA)

ha (1) egzakt $\Rightarrow$ ált. megoldása:

$$\boxed{u(x,y) = c \quad (c \in \mathbb{R})}$$

IMPLICIT MEGOLD

$$\frac{d}{dx} u(x, y(x)) = \frac{d}{dx} c = 0$$

$$u'_x + u'_y \cdot y'(x) = 0$$

$$P(x,y) + Q(x,y)\,y'(x) = 0$$

$$\begin{cases} P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0 & (x,y) \in \Omega \\ y(x_0) = y_0 & (x_0,y_0) \in \Omega \end{cases}$$

!-s megold:

$$u(x,y) = u(x_0,y_0)$$

Tétel

$$(1)\quad P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0 \qquad (x,y) \in \Omega$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$: egyszeresen öf (határa síktartomány), $\exists$! P'_y és Q'_x folyt Ω-n

(1) egzakt $\Leftrightarrow$

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y) \quad \big((x,y) \in \Omega\big)$$

példa

$$(2x + 2\sin y) + \underbrace{(2x\cos y - \sin y)}\, y' = 0$$

$$P_{(x,y)} \quad + \quad Q(x,y)\, y' \quad = 0$$

van MO, ha egzakt $\Rightarrow$ egzakt ? $\Rightarrow$ $P'_y = Q'_x$

$$P'_y(x,y) = 2\cos y$$
$$Q'_x(x,y) = 2\cos y \quad \Rightarrow \text{ az egyenlet } \underline{\text{egzakt}}$$

$u(x,y) = ?$

$$U'_x = P(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)\,dx = \int (2x + 2\sin y)\,dx = x^2 + 2x\sin y + C(y)$$

$$\Rightarrow u'_y = Q(x,y) \Rightarrow C(y) = ?$$

$$u'_y = 2x\cos y + C'(y) = Q(x,y) = 2x\cos y - \sin y$$
$$C'(y) = -\sin y \Rightarrow C(y) = \cos y + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$u(x,y) = x^2 + 2x\cos y + \cos y + k \qquad (k=0)$$
$$u(x,y) = c \text{ ált } (c \in \mathbb{R}) \Rightarrow \underline{\underline{x^2 + 2x\sin y + \cos y = c}} \quad c \in \mathbb{R}$$

ez most IMP-et jött ki, de az EXP-et jobb szeretnénk

Integráló tényező (multiplikátor)

nem egzakt $\Rightarrow$ egzakt

$$g(x,y) + h(x,y)\,y' = 0 \qquad (1) \text{ nem egzakt}$$

hogy $\mu(x,y)$ (INTEGRÁLÓ TÉNYEZŐ)

Ha $\underbrace{\mu(x,y)\cdot g(x,y)}_{P(x,y)} + \underbrace{\mu(x,y)\cdot h(x,y)}_{Q(x,y)}\, y' = 0$ (2) már egzakt

$\underline{\mu \text{ meghatározása}}$

μ meghatározása:

$$P'_y = Q'_x$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(\mu g)} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu h)$$

$$M'_y g + M g'_y = M'_x h + M h'_x \quad \begin{pmatrix} M(x,y) = ? \\ M\text{-re parc DE mo} \end{pmatrix}$$

$$\text{ha } \mu(x,y) = \mu(x) \Rightarrow = \mu(y)$$

Egzisztencia- és unicitástétel

Probléma:

$$y' = f(x,y) \quad (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$y(x_0) = y_0 \quad (x_0,y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

Lokális Lipshitz-feltétel: $f(x,y)$ folyt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ tart-ban y-változóban kielégíti a lok. Lipshitz-felt-t, ha:

- ha tartomány $\forall$ pontjában $\exists$ K körny és $L > 0$ állandó

$$(x,y_1),(x,y_2) \in K \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

elnevezés: L: lok. Lipshitz-konst

K: lok. Lipshitz környezet

példa: $f(x,y)$ folyt. Ω-n

f'_y is folyt. Ω-n

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \overset{\text{Lagr. tét}}{=} |(y_1 - y_2)\underbrace{f'_y(x,\xi)}_{\text{folyt} \Rightarrow \text{korl}}|$$

$$\leq |y_1 - y_2| \underbrace{\max\{f'_y(x,\xi)\}}_{L}$$

Cauchy-Lipschitz-féle egz. és unic. tétel

Legyen $f(x,y)$ lok Lips. feltétel $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$-n

$(x_0,y_0) \in \Omega \Rightarrow$

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & (x_0,y_0) \in \Omega \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

K.é.f. egyértelműen megoldható (kl. megold)

a megold SZUBSZCESSZÍV APPROXIMÁCIÓVAL

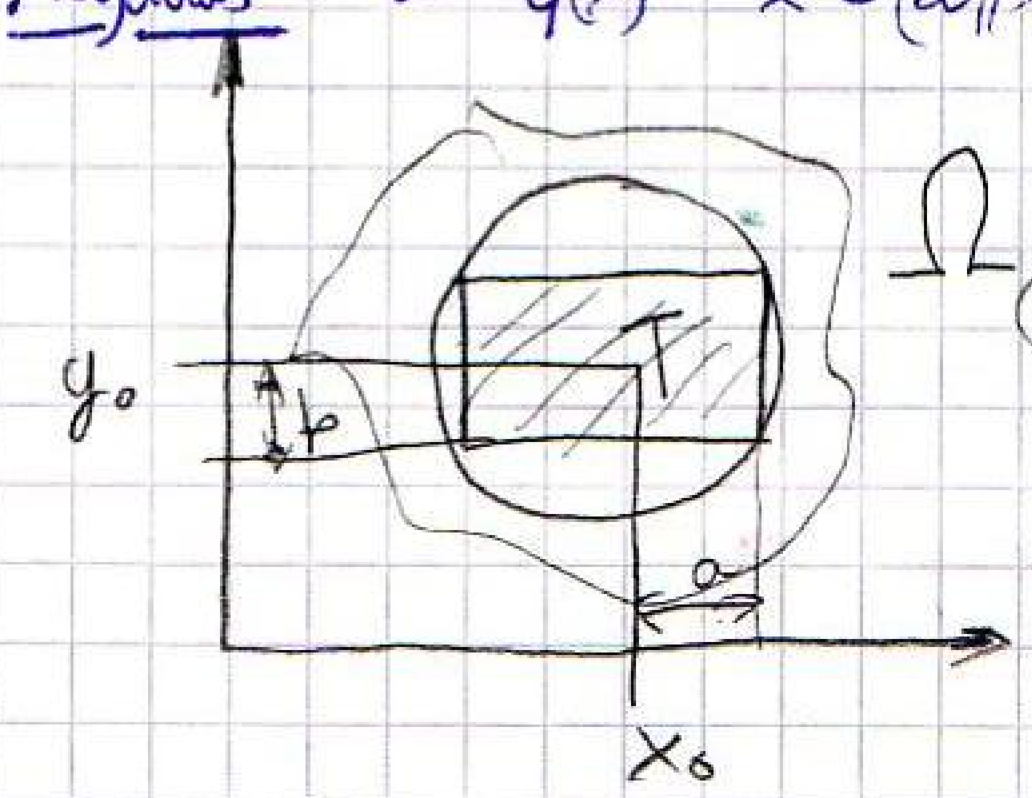
$$\varphi_0(x) = y_0$$

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\,dt \quad (n = 1, 2 \dots)$$

↳ fv sorozat

rekurzív formulával $\Rightarrow \varphi_n(x) \Rightarrow \varphi(x) \quad x \in (\alpha, \beta)$

Megoldás: a $\varphi(x)$ $x \in (\alpha, \beta)$ értelmezési tartományáról



$\Omega_{(x_0,y_0)} \Rightarrow K$ (Lips...)

$T = \{(x,y) : \begin{matrix} |x - x_0| < a \\ |y - y_0| < b \end{matrix}$

$\gamma = \min\left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ $\quad M = \max\{ |f(x,y)| \} \quad f(x,y) \in T$

$(\alpha, \beta) \supseteq (x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$