2007.02.26. hétfő — III Előadás (3. hét)

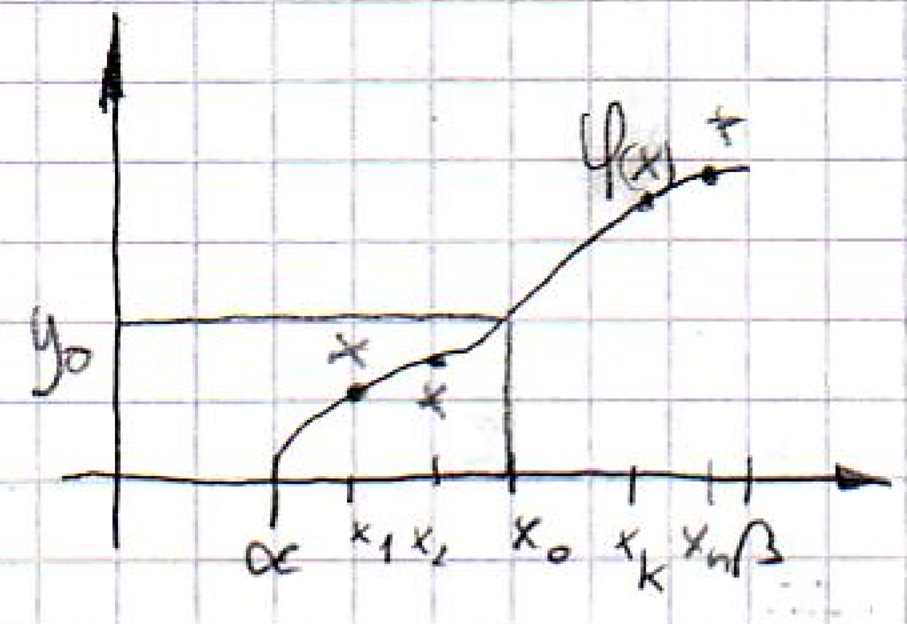
Euler-módszer

Probléma:

$y' = f(x,y)$

$y(x_0) = y_0$

Tudjuk, hogy $\exists$ teljes megoldás.

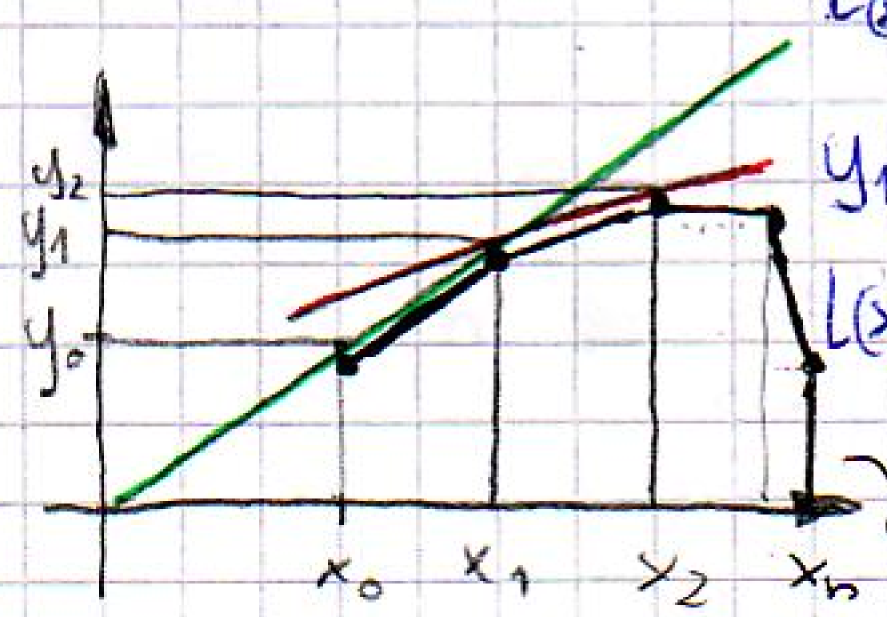


$\alpha < x_0 < x_1 < \dots < x_n < \beta$

$y_k \sim \varphi(x_k) \qquad (k=0,\dots,n)$

$(y_0, y_1, \dots, y_n)$: diszkrét fv. közelítő megoldása

Euler-módszer



$l(x) = y_0 + f(x_0,y_0)(x-x_0)$

$y_1 := l(x_1)$

$l(x) = y_1 + f(x_1,y_1)(x-x_1)$

$l(x) = y_{k-1} + f(x_{k-1},y_{k-1})(x-x_{k-1}) \qquad k=0,\dots,n$

$\boxed{y_k = l(x_k)}$

n-edrendű differenciálegyenletek

Általános alak:

(1) $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ $\quad f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (Ω-n n+1-es tartomány

$y = y(x) = ?$

Megold:

$\varphi(x) \quad x \in (\alpha, \beta) \quad$ n-szer diffható

$\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)\right) \in \Omega \quad \left(x \in (\alpha, \beta)\right)$

$\varphi^{(n)}(x) = f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)\right) \quad \left(x \in (\alpha, \beta)\right)$

kezdeti érték feltétel:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) & \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ y^{(k)}(x_0) = y_0^k & \end{cases}$$

$\leftarrow$ ez nem k-adik derivált, hanem csak egy index!

$(k = 0, \dots, (n-1)) \Rightarrow$ n db feltétel

$\left(x_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}\right) \in \Omega$

n-edrendű diffegyenlet $\equiv$ 1-rendű diffegyenlet rendszerrel !

Elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer

$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \qquad t \in (\alpha, \beta)$

$$(2) \begin{cases} x_1'(t) = f_1\left(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right) \\ x_2'(t) = f_2\left(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n\left(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right) \end{cases}$$

$f_1, f_2, \dots f_n$ előre adott (n+1) változós fv-ek

$\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$x_1, x_2, \dots, x_n$: a rendszer megoldása

(α, β) : a megold. értelmezési tartománya

Vektor-alak:

$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \underline{x}' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$

$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

$(2) \Rightarrow \boxed{\underline{x}' = \underline{f}(t, \underline{x})}$

kezdeti érték feladat:

t_0

$x_1(t_0) = x_1^0$ $\qquad \underline{x}(t_0) = \underline{x_0} = (x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$

$x_2(t_0) = x_2^0$

$\vdots$

$x_n(t_0) = x_n^0$

Átviteli elv

Egy n-szer diffható $y(t)$ fv. $t \in (\alpha, \beta)$ akkor és csak akkor van megold:

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} &= f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y^{(k)}(t_0) &= y_0^k \quad (k = 0, \dots, n-1) \end{aligned}\right\} \text{ ha: } \underline{x}(t) = (\overbrace{y(t)}^{x_1}, \overbrace{y'(t)}^{x_2}, \dots, \overbrace{y^{(n-1)}(t)}^{x_n})$$

megoldása a köv. rendszernek:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_4 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

és $\underline{x}(t_0) = (y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n)$

kérdés: magasabb fokú diffegyenlet megold. írható 1.-rendű diffegyenlet rendszerként ~~k~~ könnyebb megoldani?

$\Rightarrow$ egyenlettől függ

n-edrendű egyenletet nem mindig lehet elemi úton megoldani (csak akkor ha lineáris)

n-edrendű lineáris diff. egyenletek megoldásának szerkezete

n-edrendű lin. de. ált. alak:

(3) $y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\, y = f(t) \qquad t \in (\alpha, \beta)$

$y = y(t) = ? \qquad a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ adottak

Tétel

Ha az $a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$, $f(t)$ (együttható fv-ek) folytonosak (α,β)-n

$\Rightarrow$ (3) $y^k(t_0) = y_0^k \ (k=0,\dots,n-1)$, $(t_0 \in (\alpha,\beta))$, $y_0^k \in \mathbb{R} \ (k=0,\dots,n-1)$

egyértelműen megoldható

(3)-nak homogén egyenlete:

(H) $y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\, y = 0$

(H) általános megold:

Lineárisan függetlenség (csak triviális kombináció adja a 0-t)

$y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ függv rendszer lin. független (α,β)-ban, ha

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t) = 0 \quad \forall t \in (\alpha,\beta) \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

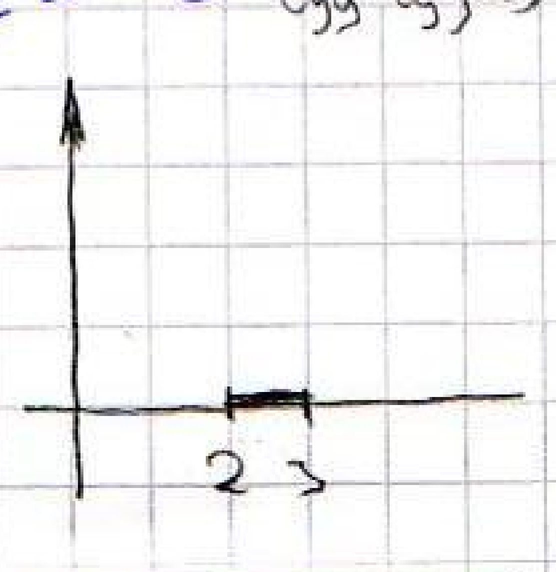
példa

$y_1(t) = 1$

$y_2(t) = t \qquad (\alpha,\beta) = (2,3)$

$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0 \qquad (t \in (2,3))$

$c_1 + c_2 t = 0$ egy egyenes egyenl. $(t \in (2,3))$



$c_1 = c_2 = 0$

$\Uparrow$

fv = abcissza

Wronski-féle determináns:

$y_1(t), \dots, y_n(t)$ $(n-1)$-szer diffható (α,β)-ban

$$W(t) = W[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n t \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & \dots & y_n''(t) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

($n \times n$-ed rendű mátrix)

Wronszki-féle det

Tétel

Ha $W(t) \not\equiv 0$ (α,β)-ban (azaz $\exists\, t_0 \in (\alpha,\beta)$: $W(t_0) \neq 0$)

$\Rightarrow (y_1, \dots, y_n)$ függetlenek (α,β)-ban

1) (H)-egyenlet alaprendszere:

n db független megoldása vmely (α,β)-ban

($\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\} = \Phi$ függetlenek)

$\Rightarrow$ (H)-egyenlet ált. megold:

$$\varphi_H(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) \quad (c_k \in \mathbb{R}\ ;\ k = 1, \dots, n)$$

2) (IH)-egyenlet egy partikuláris megoldása:

(3) $y^n + a_{n-1}(t)^{n-1} + \dots + a_0(t) y = f(t)$ (IH)

$y_p(t)$ $t \in (\alpha,\beta)$ (partikuláris megold)

(3) (IH)-ált megold

$$\boxed{y(t) = y_p(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)}$$

(IH) ált megold = part megold + H-ált megold

Másodrendű konstans-együtthatós lineáris diff=egyenletek.

(IH) $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t)$ $\quad$ a_1, a_2 konstans

(H) $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$ $\quad$ $f(t)$ folyt. (α,β)-ban

$y = y(t) = ?$

1) (H)-egyenlet ált. megold.:

$\varphi(t) = e^{\lambda t}$ $\quad (\lambda = ?)$

$\dot{\varphi}(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$\ddot{\varphi}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

(H)-ba behely.: $\lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$

$\boxed{\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0}$ KARAKTERISZTIKUS EGYENLET

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$ $\quad \Rightarrow$ 3 eset: $\lambda_1 = \lambda_2$ valós
λ_1, λ_2 valós
λ_1, λ_2 komplex (konj)

Karakterisztikus-egyenlet megoldása	Homogén egyenlet alaprendszere
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ valósak	$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ ($\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ független rsz. $\Rightarrow$ alaprsz.) (H) ált megold: $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ valós	$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}$ $\varphi_2(t) = t e^{\lambda t}$ (H) ált megold: $c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$
$\lambda_1 = \overset{\lambda}{\alpha + i\beta}$, $\lambda_2 = \overset{\overline{\lambda}}{\alpha - i\beta}$ $(\beta \neq 0)$	$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(t) = \mathrm{Re}\{e^{\lambda t}\} = e^{\alpha t}\cos\beta t \\ \varphi_2(t) = \mathrm{Im}\{e^{\lambda t}\} = e^{\alpha t}\sin\beta t\end{array}\right\}$ alaprendszer (H) ált megold: $e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2 \sin\beta t)$

2) (IH)-egyenlet partikuláris megold

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t)$$

$f(t) = e^{\alpha t}\left(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t\right)$ $P_1(t), P_2(t)$ legf. l-edfokú polinom

a) Ha $\alpha + i\beta$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y_p(t) = e^{\alpha t}\left(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t\right)$ alakban keresendő

Q_1, Q_2 is legf l-edfokú polinomok

számítsuk ki $\ddot{y}_p$ $\Rightarrow$ behely (IH)-ba $\Rightarrow$ meghapjuk Q_1, Q_2-t

b) $\alpha + i\beta$ m-szeres gyöke karakterisztikus egyenletnek $(m = 1,2)$

$$y_p(t) = t^m e^{\alpha t}\left(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2\sin\beta t\right)$$

számítsuk ki $\ddot{y}_p$ $\Rightarrow$ behely (IH)-ba $\Rightarrow$ Q_1, Q_2 meghapható

$\Rightarrow$ PRÓBAFÜGGVÉNY MÓDSZERE

(IH)-ra kezdeti érték feladat:

$\dot{y}(t_0) = y_0^0$
$y(t_0) = y_0^1$

(IH) ált megold $\Rightarrow$ tartalmazó a két szabad konst-t. konstansok meghatározására alkalmazzuk a kezd. ért. felt.-t (mint 1. rendű esetén)