2007.03.05 hétfő   IV.Előadás (4. hét)

n-edrendű lineáris diffegyenl.-rendszerek

$\dot{y} + a(t)y = f(t)$

$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}(t)) \quad n \times n$

$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \dot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$

$\boxed{\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(t) + \underline{b}(t)} \qquad t \in (\alpha, \beta)$

kezdeti érték feltétel:

$\underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$

$t_0 \in (\alpha, \beta) \quad x_k^0 \in \mathbb{R} \ (k: 1..n)$

(H) egyenlet:

$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(t)$

H-alapmátrix:

n db megoldás, függetlenek (α, β)-n:

$\{\underline{\varphi}^1(t), \varphi^2 t, \ldots, \varphi^n(t)\} = \underline{\underline{\phi}}(t)$ (H-alapmátrix)

(H)-egyenlet általános megoldása:

$$\underline{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \underline{\varphi}^k(t) \quad (c_k \in \mathbb{R})$$

(I) inhomogén egyenlet:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{b}(t)$$ part. megold.

$$\underline{\varphi}_p(t) = \underline{\underline{\phi}}(t)\cdot\underline{P}(t) \qquad (\underline{P}(t) = ?)$$

$$\Rightarrow \text{behelyett. (I)-be} \Rightarrow \underline{P}(t) = \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{\phi}}^{-1}(\tau)\cdot\underline{b}(\tau)\,d\tau \qquad t_0 \in (\alpha,\beta)$$

→ inhomogén partikuláris megold.

(I) ált megold:

$$\underline{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \underline{\varphi}^k(t) + \underline{\varphi}_p(t)$$

kezdeti értékeket behelyettesítve megkapjuk a c_k együtthatókat (ndb c_k ⇒ ndb egy.)

Konst-együtthatós lin. diff.egyenletrendszerek

$$\underline{\underline{A}}\,\dot{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t) + \underline{b}(t)$$

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) \qquad (a_{ij}\ \text{konstansok})$$

$$(H):\quad \underline{\underline{A}}\,\dot{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t)$$

Mátrixfüggvény:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots \qquad (E: n\times n)$$

$$S_N = \underbrace{E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^N}{N!}}_{n\times n} \qquad (N = 0,1,\dots)$$

$$S_N \to (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n} \qquad (N\to\infty)$$

egy mátrix sorozat tart egy mátrixhoz, elemeiből álló sorozatok konvergálnak a megfelelő elemekhez

$$(t_{ij}^{(N)}) \to (t_{ij}) \ (N\to\infty), \text{ ha } t_{ij}^{N} \to t_{ij} \quad (N\to\infty;\ i,j = 1,\dots,n)$$

Tulajdonságai

1) Ha $AB = BA \Rightarrow e^A \cdot e^B = e^B e^A = e^{A+B}$

2) $e^A \cdot e^{-A} = E$

3) $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$

Tétel

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}(t)$$

alapmátrixa: $\underline{\underline{\Phi}}(t) = e^{\underline{\underline{A}}t}$

Biz: $\frac{d}{dx} \Phi(t) = \frac{d}{dx} e^{\underline{\underline{A}}t} = \underline{\underline{A}} e^{\underline{\underline{A}}t} = \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{\Phi}}(t)$

$f(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n +$

$\varrho > 0 \quad |\lambda| < \varrho$

$f(A) = a_0 E + a_1 A + \dots + a_n A^n + \dots$ (mátrix-fv)

$A = (a_{ij})$

Tétel: Ha A mátrix összes sajátértéke az f fv-sor konvergencia tart-ban van ($|\lambda_k| < \varrho$, $k = 1, \dots, n$) $\Rightarrow$ a mátrix sor konv.

f(A) mátrix fv-ek kiszámítása

1) A sajátértékek különbözőek

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (n db)

Lagrange-féle interpolációs polinom

$P_{n-1}(\lambda) = P(\lambda)$ $(n-1)$-edfokú

$P(\lambda_k) = f(\lambda_k)$ $(k = 1, \dots, n)$

egy polinom egy $(n-1)$ fokú $\Rightarrow$ n db együtthatója van és feltétel.

$\lambda_k = p$: n db feltétel

$f(A) = P(A) = a_0 E + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1}$

$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

2) nem különbözőek

~~[illegible]~~

$\lambda_1, \dots \lambda_\ell$ különböző sajátértéke van $(\ell < n)$

$m_1, \dots m_\ell$ multiplicitással

Hermite-féle interpolációs polinom

$h(\lambda)$ $(n-1)$-edfokú polinom

$h^{(i)}(\lambda_k) = f^{(i)}(\lambda_k) \quad k = 1, \dots, \ell$

$(i = 0, \dots, m_k - 1)$

n db együttható meghatározása $\Rightarrow$ n db együtthatós ismeretlenes lin egyenletrsz megold.

$f(A) = h(A)$

$f(\lambda) = e^{\lambda t}$ (t valós paraméter)

(λ komplex változó)

ez kell: e^{At}

a) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ különbözőek

$P(\lambda, t) = a_0(t) + a_1(t)\lambda + \dots + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1}$ (interpol pol.)

$P(\lambda, t) = e^{At}$

$\underline{A}$ 2×2

a) $\underline{A}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sajátért

$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix}$ $\underline{s}_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix}$ $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ függetlenek

(H) - alaprendszer ált megold: $\underline{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix}$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\underline{y}(t) = c_1 t e^{\lambda t} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

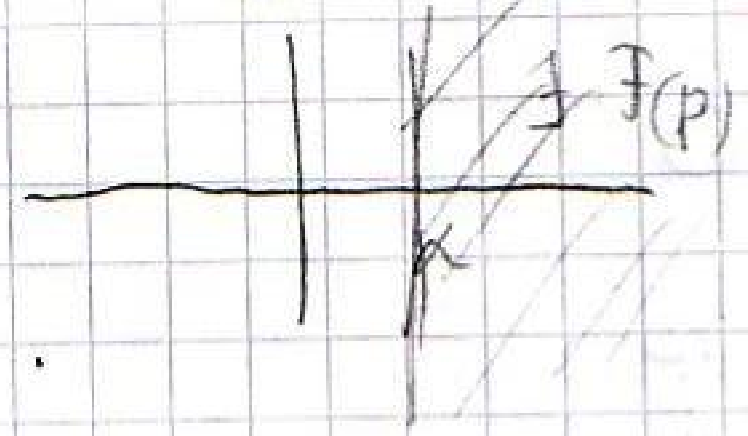
Laplace - transzformáció

Értelmezés:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = F(p)$$

$$|f(t)| \leq K e^{\alpha t} \quad [\alpha > 0,\ t \geq 0 \ (f(t) = 0,\ t < 0)]$$

$\exists\ F(p) \quad \mathrm{Re}\{p\} > \alpha$



$f(t)$ tárgy fv

$F(p)$ kép fv

$F(p)$ analitikus $\mathrm{Re}\{p\} > \alpha$

Elemi tulajdonságok:

1) $\mathcal{L}\{\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\} = \lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p)$

2) Hasonlósági tétel $\quad \mathcal{L}\{f(at)\}(p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \quad (a > 0)$

$\mathcal{L}\{$

3) Eltolási tétel $\quad \mathcal{L}\{f(t-a)\}(p) = e^{-ap} F(p) \quad (a > 0)$

$$\mathcal{L}\{f(t+a)\}(p) = e^{ap} \left\{ F(p) - \int_0^a e^{-pt} f(t)\,dt \right.$$

4) csillapítási tétel $(a > 0)$

$$\mathcal{L}\{e^{-bt} f(t)\}_p = F(p+b)$$

5) $\exists\ f'(t), f''(t), \dots f^{n}(t)$ és $f^{(n)}(t)$-nek van képe $\Rightarrow f(t), f'(t), \dots f^{(n-1)}(t)$

-nek is vannak képei

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) = pF(p) - f(+0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(p) = p^2 F(p) - f(+0)p - f'(+0)$$

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\}p = p^n F(p) - f(+0)p^{n-1} - \dots - f^{(n-1)}(+0)$$

$$F(p) = \frac{f(+0)}{p} + \frac{f'(+0)}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^n}\mathcal{L}\{f^n(t)\}(p)$$

6) képtartomány való deriv.

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(p) = (-1)^n F^{(n)}(p) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

	$F(p)$	$f(t)$
1	0	0
2.	$1/p$	1
3.	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ $(n \geq 2)$
4	$\frac{1}{(p-\alpha)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t}$
5.	$\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$	$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$
6.	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$	$\sin \alpha t$
7.	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$	$\cos \alpha t$
8.	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{sh} \alpha t$
9.	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{ch} \alpha t$

Alkalmazás:

(állandó együtthatós lin. egyenletek megoldására)

$$y^{(n)}(t) + c_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \dots + c_0\, y(t) = f(t)$$

$y(0) = y_0$

$y'(0) = y_0'$

$\vdots$

$y^{(n-1)}(0) = y_0^{n-1}$

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(p) = Y(p)$$

határozzuk meg mindkét oldal $\mathcal{L}$-tr-ját, egy egyenletet kapunk $Y(p)$-re

megold $\mathcal{L}$-tr.-ja

$Y(p) \Rightarrow y(t)$ $\mathcal{L}$-tr inverze

Megold $\quad y'(t) + c_0 y(t) = e^t \qquad \mathcal{L}(e^t) = F(p) = \frac{1}{p-1}$

$y(0) = y_0 = 1$

$c_0 = 1$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = F(p)$$

$$(p + c_0)\, Y(p) - y_0 = F(p)$$

$$Y(p) = \frac{F(p) + y_0}{p + c_0} = \frac{\frac{1}{p-1} + 1}{p+1}$$