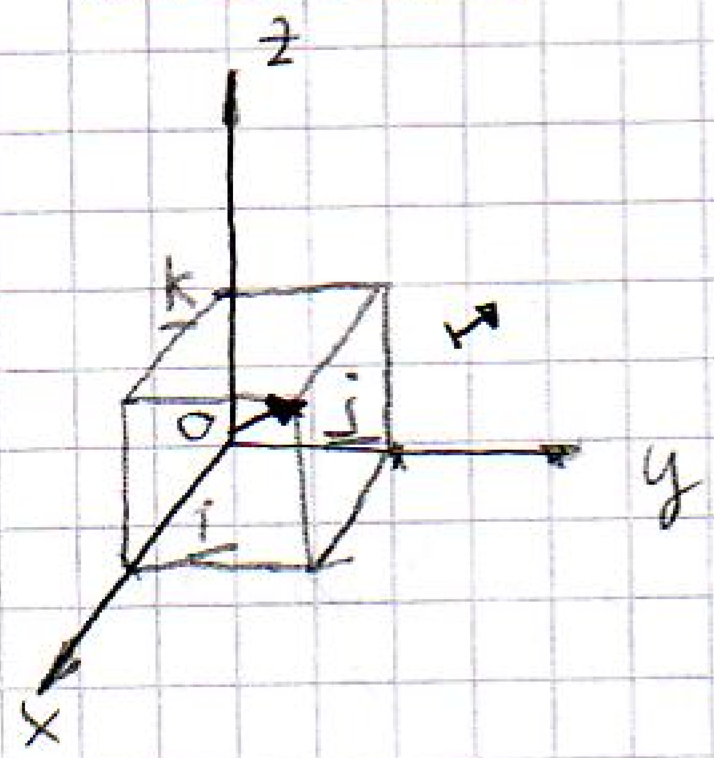
2007.03.12 hétfő

V. Előadás (5. hét)

Vektoranalízis

Vektor fv. görbementi integrálja

Térbeli vektorok V_3 jelölése: $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$, $\overrightarrow{AB}$



Ortonormált bázis (ONB)

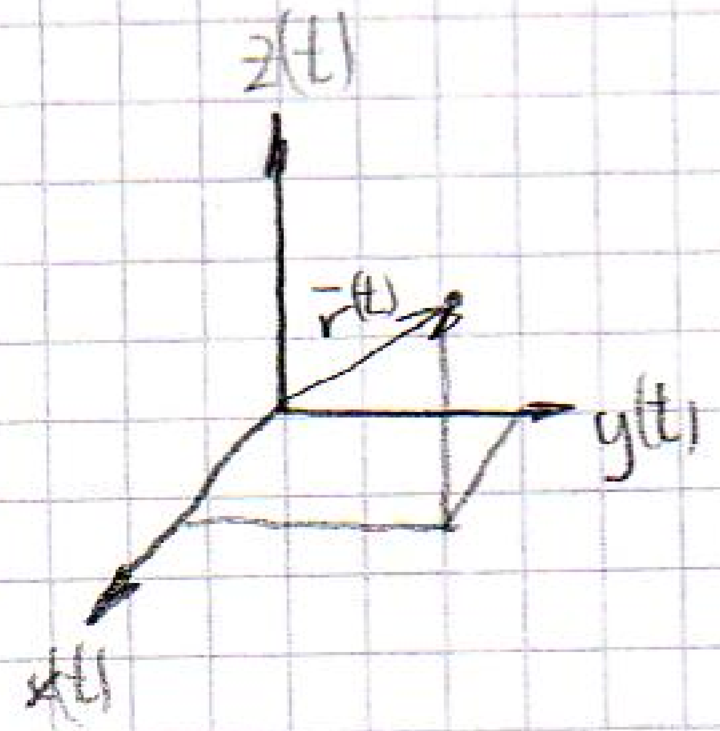
$$\underline{x} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}$$

$$\underline{x} = \underline{x}(x, y, z)$$

Térbeli görbe (egyparaméteres vektor-skalár fv.)

Síkbeli görbe : $y = f(x)$

térbeli görbe : $\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{matrix}\right\}$ $t \in [\alpha, \beta]$ (térbeli görbe paraméteres egyenletrendszere)

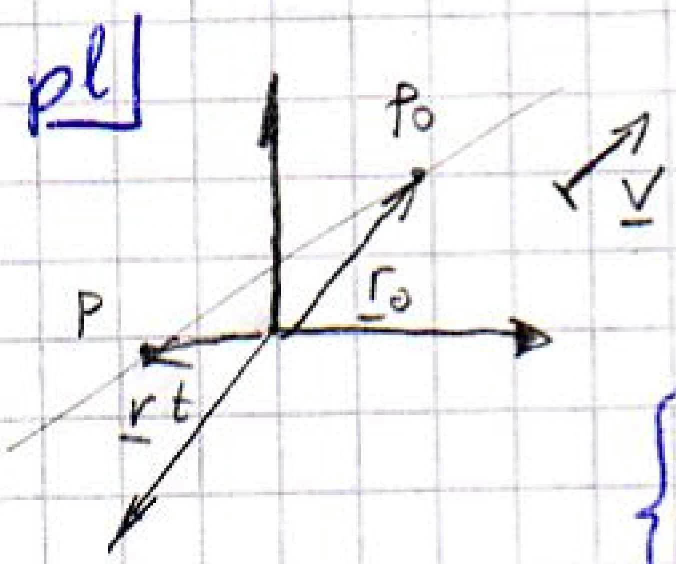


$$\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j} + z(t)\,\underline{k}$$

$$\forall t \in [a, b] \longmapsto \underline{r}(t)$$ (paraméteres vektor skalár fv.)

értelmezés: Térbeli görbe: egy paraméteres vektorskalár fv., melyhez tartozó helyzetvektorok végpontjaiból álló halmaz, a térbeli görbe

pl)



$$\boxed{\underline{r}(t) = \underline{r_0} + t\,\underline{v}}$$

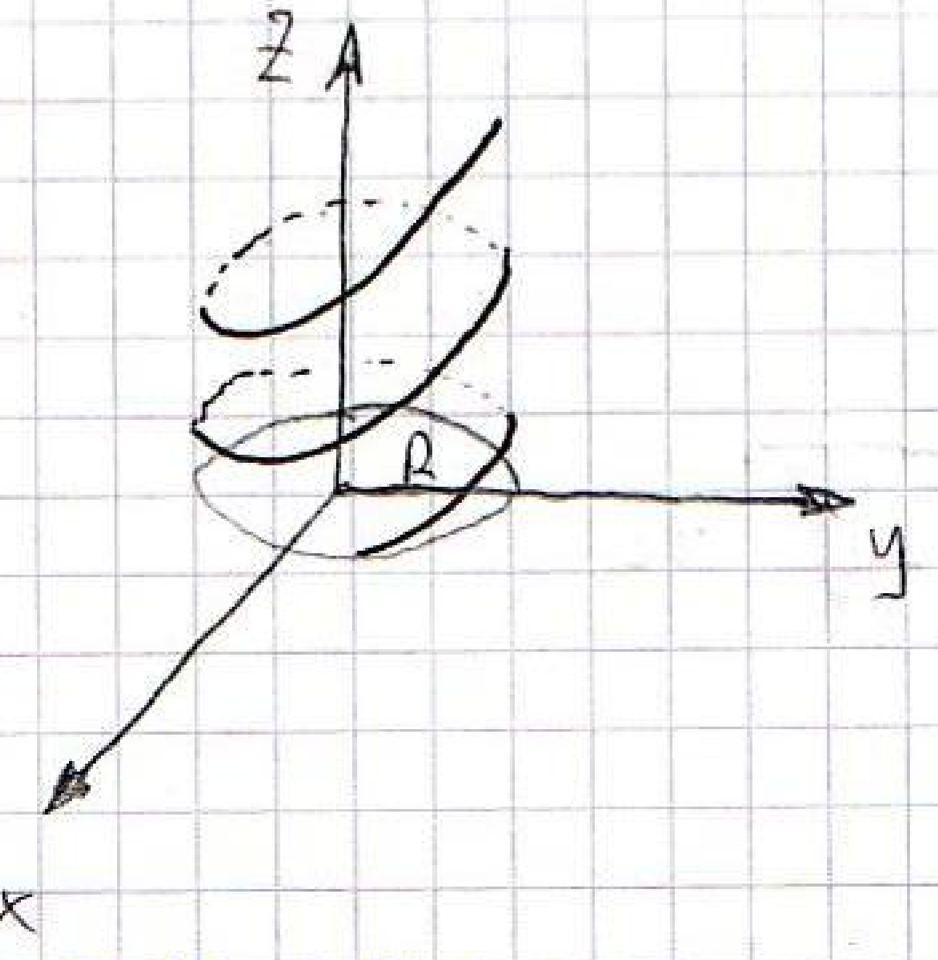
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases}$$

$\underline{v}\ (v_1, v_2, v_3)$
$\underline{r_0}\ (x_0, y_0, z_0)$

$$x = x(t) = x_0 + t \cdot v_1$$
$$y = y(t) = y_0 + t \cdot v_2$$
$$z = z(t) = z_0 + t \cdot v_3$$

• Közönséges csavarvonal

$x = R \cdot \cos t$
$y = R \sin t$ $\qquad t \in (-\infty, \infty)$
$z = c \cdot t$ $\qquad$ (c: adott konst, $\neq 0$)



$y(t) = R\cos t\, \underline{i} + R \sin \underline{j} + c \cdot t \cdot \underline{k}$

További fogalmak:

• $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k} \qquad t \in [\alpha, \beta]$

folytonos t_0-ban, ha $x(t), y(t), z(t)$ folytonosak t_0-ban

$\underline{r}(t)$ folytonos intervallumon, ha folytonos $\forall$ pontjában

• $\underline{r}(t)$ differenciálható t_0-pontban ha $\exists$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\underline{r}(t_0+h) - \underline{r}(t_0)}{h} = \dot{\underline{r}}\, t_0$$

$$\left[\left| \frac{\underline{r}(t_0+h) - \underline{r}(t_0)}{h} - \dot{\underline{r}}(t_0) \right| \to 0 \quad (h \to 0) \right]$$

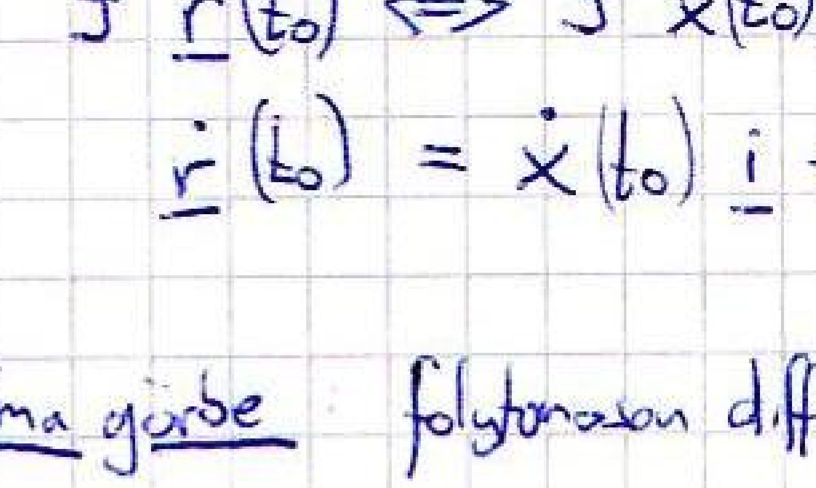
$\exists\ \dot{\underline{r}}(t_0) \iff \exists\ \dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)$

$\dot{\underline{r}}(t_0) = \dot{x}(t_0)\,\underline{i} + \dot{y}(t_0)\,\underline{j} + \dot{z}(t_0)\,\underline{k}$ $\qquad$ derivált fv. vektor

• Sima görbe: folytonosan diffható $t \in [\alpha, \beta]$-ban, azaz $\exists\ \dot{\underline{r}}(t)$ és a t folytonos $[\alpha, \beta]$-ban

• Rektifikálható görbe

$\underline{r}(t)$ folytonos $[\alpha, \beta]$-n



törött vonal hosszúsága

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} |\underline{r}_i - \underline{r}_{i-1}|$$

<u>Értelmezés:</u> $\underline{r}(t)$ rektifikálható, ha folytonos és $S_n \le K$ bármely felbontás esetén

ha a görbe rektifikálható, akkor

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (\text{bármely } S_n \text{ finomodó felbontás esetén})$$

$\downarrow$

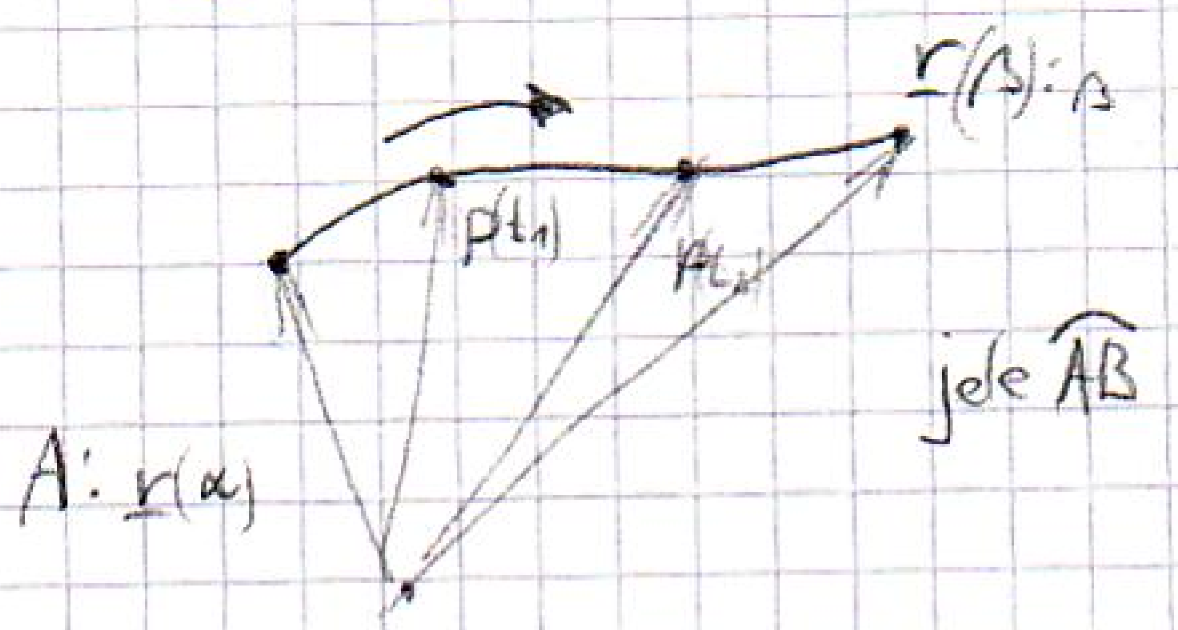
görbe <u>ÍVHOSSZA</u> nevezzük

ha $\underline{r}(t)$ sima $\Rightarrow$ rektifikálható és

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\underline{r}}(t)|\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\,dt$$

- <u>Irányított görbe</u>

egyszerű görbe $\underline{r}(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$ irányított, ha meg van szabva a görbén egy irány



pozitív irányítású

$p(t_1)$ megelőzi $p(t_2)$-t, ha $t_1 < t_2$

negatív irányítású

$p(t_1)$ megelőzi $p(t_2)$-t, ha $t_1 > t_2$

- <u>Vektor - vektor függvény</u> (fizikában: vektormező)

$\underline{r} \mapsto \underline{v}$: $\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$, $\underline{r} \in \Omega \subseteq V^3$

változó $\rightarrow$ függvény

(vektorhoz rendelünk vektort)

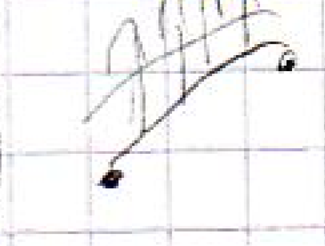
$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

$\underline{v} = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}$ $\quad X = X(x,y,z)$, $Y = Y(x,y,z)$, $Z = Z(x,y,z)$

(nagybetű: fv ($\underline{v}$) koordinátái)

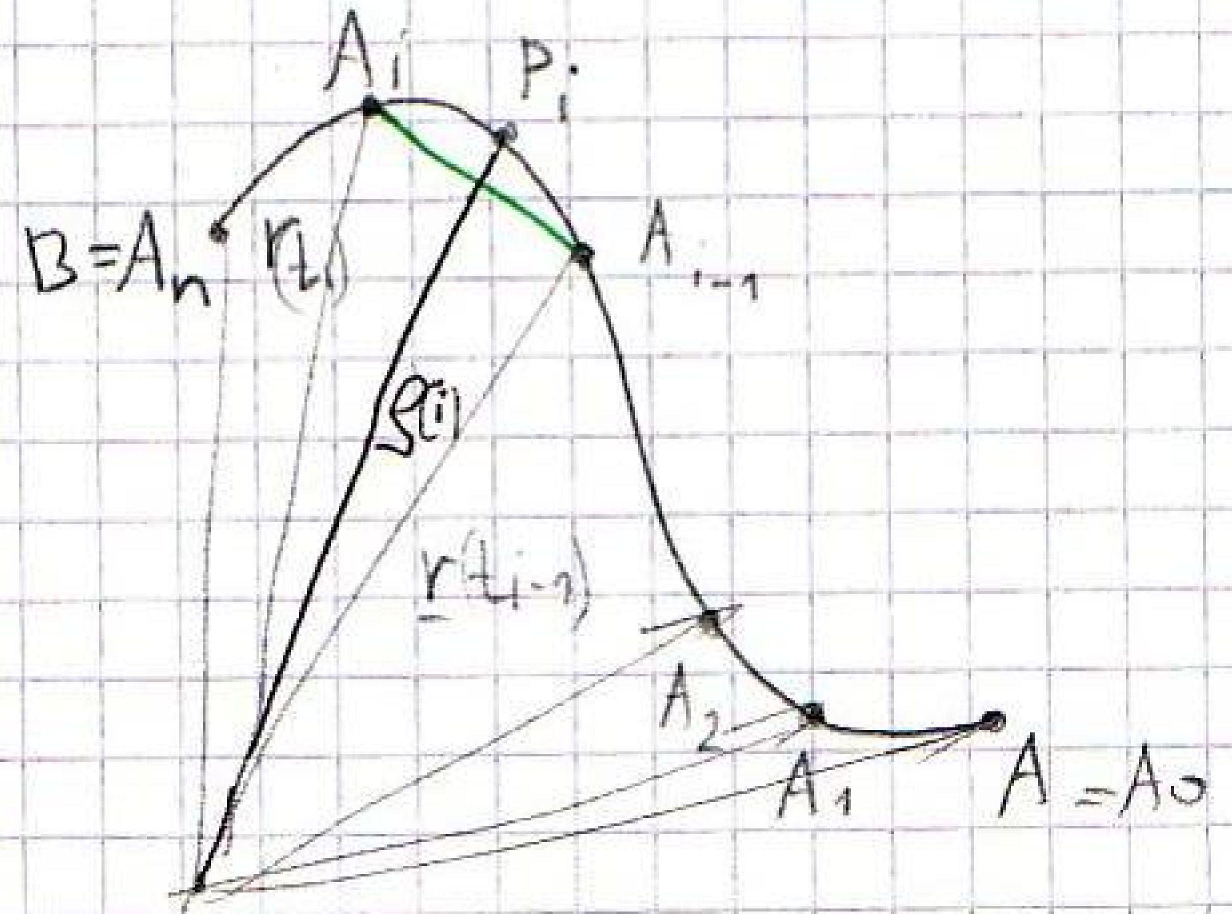
(kisbetű: változó ($\underline{r}$) koordinátái)

Pl fizikai erőtér



Vektor - vektorfv. görbementi integrálja

adott $\underline{r}(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$ rektifikálható és irányított $\widehat{AB}$



Def: FELOSZTÁS $\quad T_n$ felosztás: $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_n = B$

T_n finomodó, ha $\max\limits_{1 \le i \le n} \{ r(t_i) - r(t_{i-1}) \} \Rightarrow 0$ ha $(n \Rightarrow \infty)$

- Vektor-vektorfüggvény, amely görbére van értelmezve:

$\underline{v} = \underline{v}(\underline{r})$ a görbén van értelmezve.

$P_i \in \widehat{A_{i-1}, A_i} \quad (i = 1 \dots, n)$

- Integrál közelítő összeg

$$S_n \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\underline{v}(\underline{g}_i) \cdot \Delta \underline{r}_i}_{\text{skaláris szorzat (valós szám)}} \qquad (\text{ahol } \Delta \underline{r}_i = \underline{r}_i - \underline{r}_{i-1})$$

értelmezés: Ha $\exists \lim\limits_{n \Rightarrow \infty} S_n = S$ minden $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ finomodó felosztás sorozat esetén és a határérték független a felosztássorozattól és közbelső P_i pontoktól, akkor $\underline{v}(\underline{r})$ fv. adott görbe mentén integrálható.

És integrálja:

$$S = \int_L \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_{\widehat{AB}} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r}$$

Ha L egy zárt görbe pozitív irányítással ($\oplus$ ↺)

$$\oint_{L^+} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r}$$

Ha L zárt görbe negatív irányítással

$$\oint_{L^-} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r}$$

Fizikai jelentés: a $\underline{v}(\underline{r})$ mint erő(tér) hatása alatt az $\widehat{AB}$ pályán mozgó tömegpont által végzett munka az integrálérték

<u>Elemi tulajdonságok:</u>

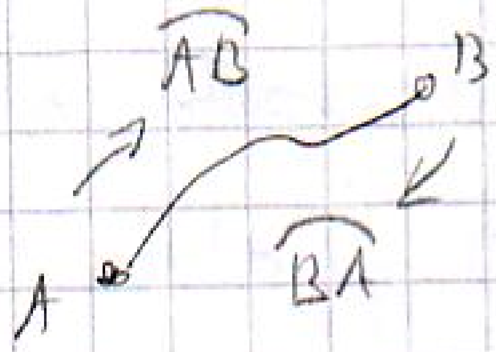
- <u>Integrál Elemi Tulajdonságai</u>

1° $$\int_{\widehat{AB}} \left[\underline{v}_1(\underline{r}) \pm \underline{v}_2(\underline{r})\right] d\underline{r} = \int_{\widehat{AB}} \underline{v}_1(\underline{r})\, d\underline{r} \pm \int_{\widehat{AB}} \underline{v}_2(\underline{r})\, d\underline{r}$$ (additív)

3° $$\int_{\widehat{AB}} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_{\widehat{AC}} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} + \int_{\widehat{CB}} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r}$$

2° $$\int_{\widehat{AB}} \lambda\, \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = \lambda \int_{\widehat{AB}} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$ (homogén)

4° $$\int_{\widehat{BA}} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} = -\int_{\widehat{AB}} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r}$$



- Integrál kiszámítása:

① kapcsolat a Riemann-integrállal

$L=\widehat{AB}$: $\underline{r}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ sima görbe (folyt. diff.ható)

$\underline{v}(\underline{r})$ folytonos vektor-vektor fv. a görbén

$$\underline{v}(\underline{r}) = X(x,y,z)\,\underline{i} + Y(x,y,z)\,\underline{j} + Z(x,y,z)\,\underline{k}$$

(ahol $\underline{r} = x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$)

akkor

$$\int_{\widehat{AB}} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_\alpha^\beta \underbrace{\underbrace{\underline{v}(\underline{r}(t))}_{\substack{\text{a fv. értéke} \\ \text{(helyi érték)}}}\ \underbrace{\dot{\underline{r}}(t)}_{\text{görbe deriváltja}}}_{\text{skaláris szorzat (valós szám)}}dt =$$

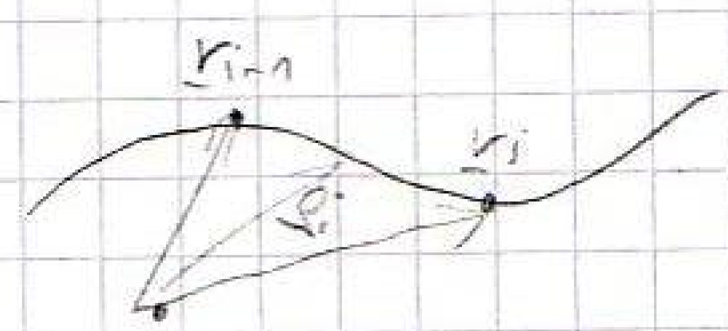
$$= \int_\alpha^\beta \left[X(x(t),y(t),z(t))\cdot\dot{x}(t) + Y(x(t),y(t),z(t))\cdot\dot{y}(t) + Z(x(t),y(t),z(t))\,\dot{z}(t)\right]dt =$$

$$\overset{\text{alt. jelölés}}{=} \int_\alpha^\beta (X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z})\,dt = \int_{\widehat{AB}} X\,dx\ Y\,dy\ Z\,dz$$

Bizonyítás :)

(zsó-i!)

$$S_n = \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{\rho}_i)\,\Delta\underline{r}_i \approx \sum_{i=1}^n \underline{v}(\underline{r}_{i-1})\,\dot{\underline{r}}_{i-1}\,\Delta t_i =$$



$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{\underline{v}(\underline{r}(t_{i-1}))\,\dot{\underline{r}}(t_{i-1})}_{\underline{v}(\underline{r}(t))\cdot\dot{\underline{r}}(t)}(t_i - t_{i-1})$$

valós fv integrál közelítő összeg $[\alpha,\beta]$-n

Példa: egy görbe (közönséges csavar egy szakasza)

$$L = \underline{r}(t) = \cos \underline{i} + \sin \underline{j} + \frac{t}{2\pi} \underline{k} \quad \text{, ahol } (0 \le t \le 2\pi)$$

$$\underline{v}(\underline{r}) = 2\underline{r} = 2x\underline{i} + 2y\underline{j} + 2z\underline{k}$$

$$X_{(x,y,z)} \cdot Y_{(x,y,z)} \; Z_{(x,y,z)}$$

$$\int_{L^+} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{v}(\underline{r}(t)) \, \dot{\underline{r}}(t) dt$$

$\dot{\underline{r}}(t)$ kiszámítása

$$\dot{\underline{r}}(t) = -\sin \underline{i} + \cos \underline{j} + \frac{1}{2\pi} \underline{k}$$

helyettesítés a görbén

$$\underline{v}(\underline{r}(t)) = 2\cos t \, \underline{i} + 2 \sin t \, \underline{j} + \frac{t}{\pi} \underline{k}$$

skaláris szorzatok

$$\underline{v}(\underline{r}(t)) \, \dot{\underline{r}}(t) = -2 \sin t \cos t + 2 \cos t \sin t + \frac{t}{2\pi^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \underline{v}(\underline{r}(t)) \, \dot{\underline{r}}(t) = \int_0^{2\pi} \frac{t}{2\pi^2} dt = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} t dt \ldots$$