2007.03.19. hétfő   VI Előadás (6. hét)

Vektor-vektor fv. görbementi integrálja

Potenciál (skalár potenciál)

Skalár-tér (skalár-vektor fv.)

$$\underline{r} \Rightarrow \phi(\underline{r})$$

$$\underline{r}(x,y,z) \quad \phi(\underline{r}) = \phi(x,y,z)$$

pl.) $\underline{r} \mapsto |\underline{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Gradiens:

$$\operatorname{grad} \phi(\underline{r}) = \operatorname{grad} \phi(x,y,z) \Big|_{\underbrace{x_0,y_0,z_0}_{P_0}} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{P_0}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\Big|_{P_0}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\Big|_{P_0} \right)$$

$$v(\underline{r}) = X(x,y,z)\,\underline{i} + Y(x,y,z)\,\underline{j} + Z(x,y,z)\,\underline{k}$$

$\phi(\underline{r})$ a $\underline{v}(\underline{r})$ potenciálja:

$$\operatorname{grad}\left(-\phi(\underline{r})\right) = \underline{v}(\underline{r}) \quad \text{adott } T \text{ tartományban:}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \phi}{\partial x} = X(x,y,z)$$

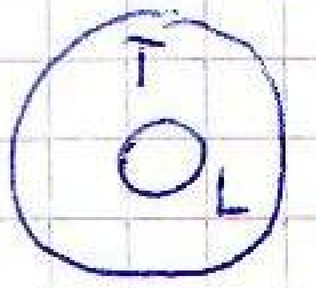
$$-\frac{\partial \phi}{\partial y} = Y(x,y,z) \qquad (x,y,z) \in T$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} = Z(x,y,z)$$

- ha van potenciálja $\Rightarrow$ potenciális

Tétel)

egy $v(\underline{r})$ vektortér egy adott egyszeresen összefüggő T tartományban potenciálos (van potenciálja) $\Longleftrightarrow$ ha T-ben futó bármely zárt rektifikálható görbe mentén vett integrálja 0.



$$\oint_L \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = 0$$

Ekkor potenciál kiszámolható: $-\phi(\underline{r}) = u(\underline{r}) = \int_{\underline{a}}^{\underline{r}} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} + C$

r: futó vekt. $C \in \mathbb{R}$

Tétel | Newton-Leibniz-formula

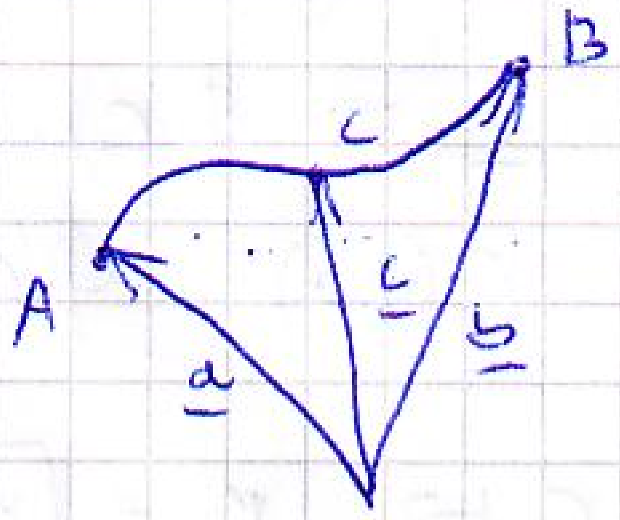
$L = \widehat{AB} \cdot \underline{v}(r)$ integrálható L-en

Ha $\underline{v}(\underline{r})$-nek van $\phi(\underline{r})$ potenciálja

$$\Rightarrow \int_{\widehat{AB}} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \phi(\underline{a}) - \phi(\underline{b})$$

Biz |

$$\int_{\widehat{AB}} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \underbrace{\int_C^B \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r}}_{\phi(\underline{a})} - \underbrace{\int_C^A \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r}}_{\phi(\underline{b})}$$



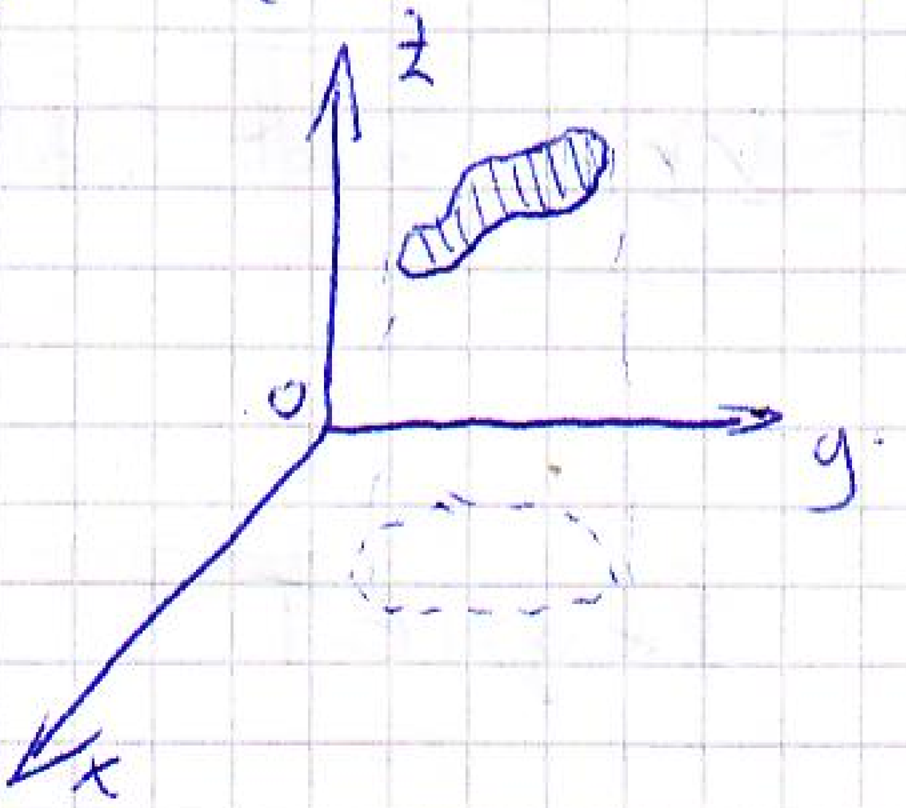
Akkor a vektorokra alkalmazható, ahol nem ismert a potenciál

Felületi integrál

Felület:

a) $z = z(x,y)$ $\quad (x,y) \in D$ $\quad$ pl: $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$

(explicit)



b) $F(x,y,z) = 0$ $\quad$ (2 vált. fv. implicit)

(implicit)

c) vektoregyenlet

Paraméteres egyenletrendszer

$x = x(u,v)$ $\quad (u,v) \in D$

$y = y(u,v)$ $\quad$ /egy felület paraméteres egyenlete/

$z = z(u,v)$

$\underline{r} = \underline{r}(x, y, z)$

$\underline{r} = x(u,v)\,\underline{i} + y(u,v)\,\underline{j} + z(u,v)\,\underline{k}$: paraméteres egyenletrendszer vektor alak

másképp írva

$\Rightarrow$ $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$: kétparaméteres vektor-skalár fv.

Értelmezés : FELÜLET

Egy adott 2 paraméteres vektor-skalár fv grafikonja

Felület NORMÁLISA és ÉRINTŐSÍKJA

$\underline{r} = \underline{r}(u,v) \quad (u,v) \in D$

2 paraméteres vektor-skalár fv.

$= x(u,v)\,\underline{i} + y(u,v)\,\underline{j} + z(u,v)\,\underline{k}$

$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\underline{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\underline{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\underline{k}$ feltételezzük, hogy léteznek ezek a parciális deriváltak

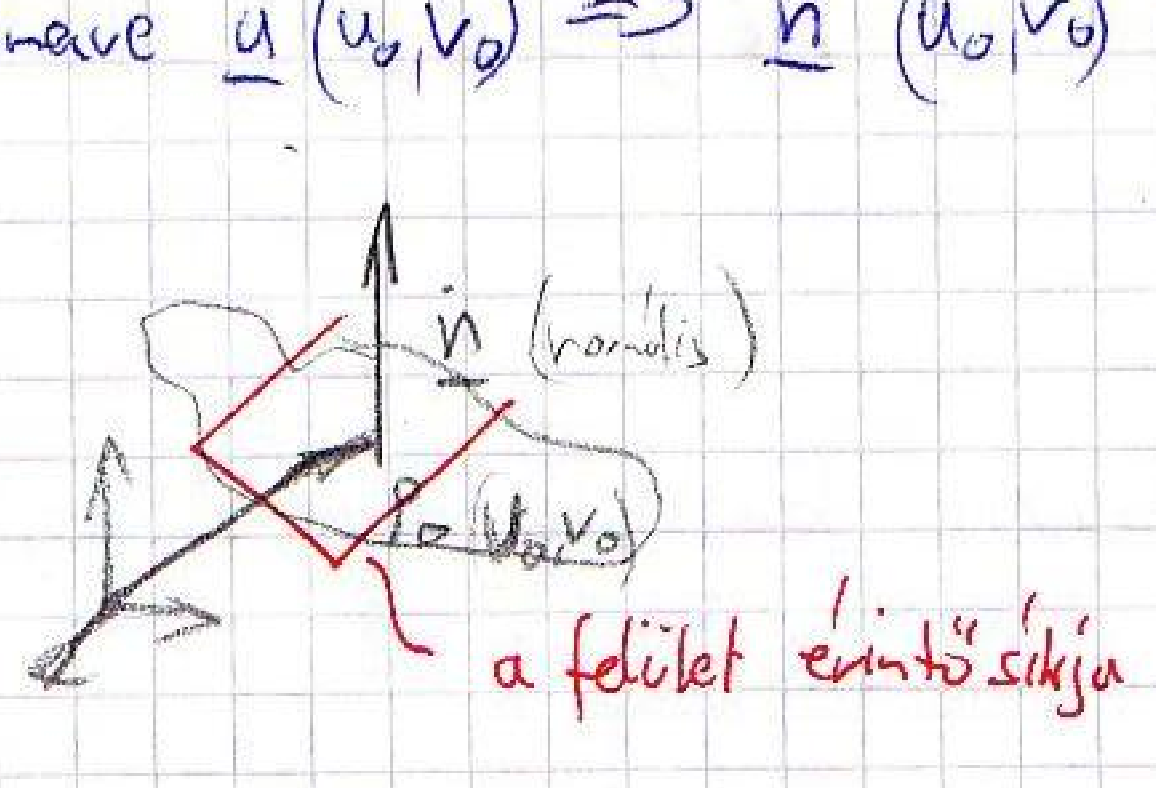
Pontban vagy tartományban léteznek ezek a parc. deriváltak

$\underline{r} = \underline{r}(u_0, v_0) - \frac{\partial \underline{r}(u_0,v_0)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u_0,v_0)}{\partial v}$

Felület reguláris pontja

feltéve, hogy $\frac{\partial \underline{r}(u_0,v_0)}{\partial u} \nparallel \frac{\partial \underline{r}(u_0,v_0)}{\partial v} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ van értelmezve $\underline{u}(u_0,v_0) \Rightarrow \underline{n}(u_0,v_0) = P(u_0,v_0)$ reguláris pont



Felületdarab felszíne:

$\underline{r} = \underline{r}(u,v)$ $\big((u,v) \in D\big)$ D korlátos és zárt

legyen a felület $\forall$ pontja reguláris (létezik $\forall$ pontban normális vektora)

és feltesszük, hogy a $\underline{n}(u,v)$ $\exists$ és folyt. fv.

$$A = \underbrace{\iint_D \underbrace{|\underline{n}(u,v)|}_{\substack{\text{kétváltozós} \\ \text{fv} \leq \text{absz. jel}}} du\,dv}_{\text{felszín felület}}$$

Speciális esetek

a) $z = z(x,y)$

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x(x,y) + z'^2_y(x,y)}\, dx\,dy$$

b) $z = f(x,y,z) = 0$ $\big((x,y) \in D\big)$

$$A = \iint \frac{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}}{|f'_z|}\, dx\,dy$$

Felületi integrál

$\exists$ felületdarab diffható, amelynek egyenlete:

$$\underline{r} = \underline{r}(u,v) \quad \big((u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2\big)$$

- folytonosan diffható

  $\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ koordinátáinak elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak (6 db fv)

- minden pontban reguláris, azaz $\exists\, \underline{n}(u,v)$ $\forall$ pontban

· $\mathcal{F}$ irányítható, ha $\underline{n}(u,v)$ (u,v)-nek folytonos fv-je

kétféle irányítás:

· pozitív irányítás 

$\forall$ ponthoz rendelünk egy irányt, a normálissal egyező irányba

· negatív irányítás

$\forall$ ponthoz $-\underline{n}(u,v)$ irányú

pl. Gömbfelület

$\underline{r}(u,v) = \sin u \cdot \cos v \cdot \underline{i} + \sin u \cdot \sin v \, \underline{j} + \cos u \, \underline{k}$

$0 \le u,v \le 2\pi$

$\Rightarrow$ majd gyakran folyt.

Integrál kieg.:

$\mathcal{F}$: felületdarab

$\underline{r} = \underline{r}(u,v) \quad (u,v) \in D$

a) D korl. és zárt

b) $\underline{r}$ folytonosan diffható D-n

c) $\exists \, \underline{n}(u,v)$ (reguláris)

d) $\mathcal{F}^+$: pozitív irányítású felület

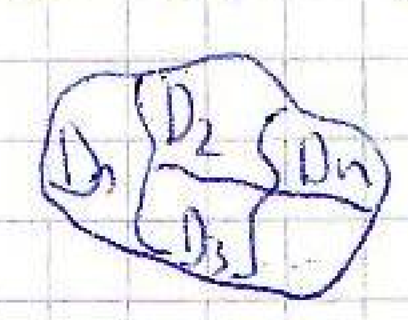
ezen a felületen legyen értelmezve egy vektor-vektor fv

$\underline{v}(\underline{r})$ és definiáljuk a felület menti integrálját

Felbontás:

D-n egy felbontás

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \ldots \cup D_n$

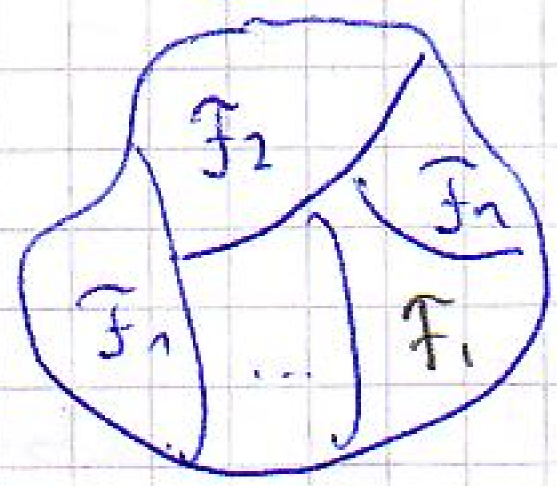


Legfeljebb közös határuk van, egymásba nem nyúlnak

Továbbá $\forall$ kisdarabnak van felszíne, tehát D-nek is van felszíne

Ez jelenti a felbontást. $\Rightarrow$ folyt.

$\mathcal{F}$



u_i, v_i tetsz.

$(u_i, v_i) \in D$

Integrál közelítő összeg

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\underline{v}(\underline{\rho}_i)\, \underline{n}_i \, |\mathcal{F}_i|}_{\text{skalár szorzat}} \to \mathcal{F}_i \text{ db felszíne}$$

$\underline{n}_i = \underline{n}^\circ(u_i, v_i)$ normális vektor egys. vektora $\quad \underline{n}^\circ := \frac{\underline{n}_i}{|\underline{n}_i|}$

$\underline{\rho}_i = \underline{r}(u_i, v_i)$

Értelmezés Ha $\exists \lim\limits_{n \to \infty} S_n = I$

$$\underbrace{\left(\max_{1 \le i \le n} |D_i| \to 0\right)}$$

független u_i, v_i -től és a felosztástól

$$I = \int_{\mathcal{F}^{+}} \overbrace{\underline{v}(\underline{r})}^{\text{felületen ért. vekt-vekt fv}} d\mathcal{F} \to \text{felületi integrál}$$

$+$ poz irányítás

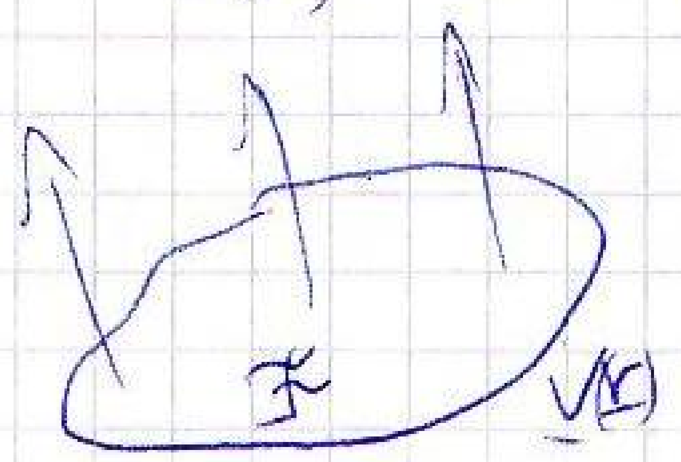
$\mathcal{F}$ felület

$\int \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} \to$ görbementi integrál

$$\int_{\mathcal{F}^-} \underline{v}(\underline{r})\, d\mathcal{F} = -\int_{\mathcal{F}^+} \underline{v}(\underline{r})\, d\mathcal{F}$$

Fizikai jelentés

$\underline{v}(\underline{r})$: áramló folyadék vektortere



Δt idő intervallumon mennyi folyadék folyik át az F felületen

$$F : \underline{r} = \underline{r}(u,v) \quad (u,v) \in D$$

Kiszámítás :)

$$\int_{F^+} \underline{v}(\underline{r})\, dF = \iint_{D_{u,v}} \overbrace{\underbrace{\underline{v}(\underline{r}(u,v))}_{\text{vekt. tér felület hely. értéke}} \underbrace{\underline{n}(u,v)}_{\text{norm vekt}}}^{\text{skalár szorz}} du\,dv$$

folytonos vektor

kétvált. folyt. fv.

F pedig folyt. diffható