2007.03.26 hétfő :) VII Előadás (7. hét)

Integrálredukciós tételek

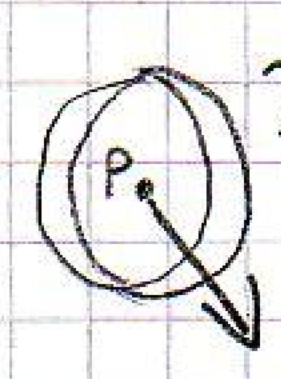
Gradiens

$$u(\underline{r}) = u(x,y,z) : \left[\text{grad}\right]_{P(x,y,z)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Divergencia

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ mérhetőek ($\exists$ felszíne)

irányíthatók: V_n



$$\mathcal{F}_n \qquad \underline{v}(\underline{r}) \Rightarrow \left[\text{div}\ \underline{v}(\underline{r})\right]_P = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{\mathcal{F}_n} \underline{v}(\underline{r})\, dF}{V_n}$$

Kiszámítás:

$$\underline{v}(\underline{r}) = X(x,y,z)\,\underline{i} + Y(x,y,z)\,\underline{j} + Z(x,y,z)\,\underline{k}$$

$$\left[\text{div}(\underline{r})\right]_{P_0(x_0,y_0,z_0)} = \left.\frac{\partial X}{\partial x}\right|_{P_0} + \left.\frac{\partial Y}{\partial y}\right|_{P_0} + \left.\frac{\partial Z}{\partial z}\right|_{P_0}$$

$\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial z}$ $\qquad \exists$ egy P_0 pont környezetében, folytonosak ebben a pontban

Fizikai jelentés

(felületi integrál)

$\int_{\mathcal{F}_n} \underline{v}(\underline{r})\, dF$ egységnyi idő alatt az áramló folyadék térfogati mérőszáma (kifele folyó menny. − befele folyó menny.) $\approx$> FORRÁS

divergencia = forráserősség sűrűsége

Rotáció

Szimbolikus vektor

zsilli

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$$

$$u(\underline{r}) = u(x,y,z)$$

$$\nabla \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\underline{k} = \text{grad } u$$

$$\underline{v}(\underline{r}) = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}$$

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = \nabla \times \underline{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}\right)\left(X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}\right) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} =$$

$\boxed{\text{felt}}$ parc deriváltak $\exists$, folytonosak

$$= \underline{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \underline{j}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + \underline{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

Vektorpotenciál:

$\underline{v}(\underline{r})$

Ha $\exists\, \underline{u}(\underline{r})$ rot $\underline{u}(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r})$: $\underline{u}(\underline{r})$ a $\underline{v}(\underline{r})$ vektorpotenciálja

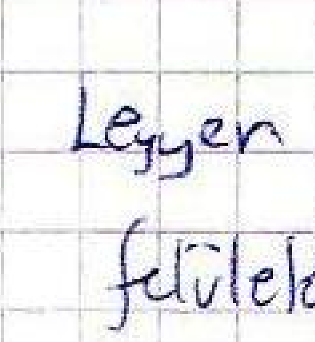
div rot $\underline{v}(\underline{r}) = 0$ ($\underline{v}(\underline{r})$ kétszer difható)

$\underline{v}(\underline{r}) = \text{rot } \underline{u}(\underline{r})$

div $\underline{v}(\underline{r})$ = div rot $\underline{u}(\underline{r}) = 0$ (ha $\exists$ $\underline{u}(\underline{r})$-nek rot-ja $\Rightarrow$ div rot-ja $= 0$)

Gauss – Osztrogradszkij – tétel

Legyen V egy térbeli tartomány, amelynek a határa egy $\mathcal{F}$ folytonos difható felületdarabokból áll ($\mathcal{F}$ kifelé irányítható)

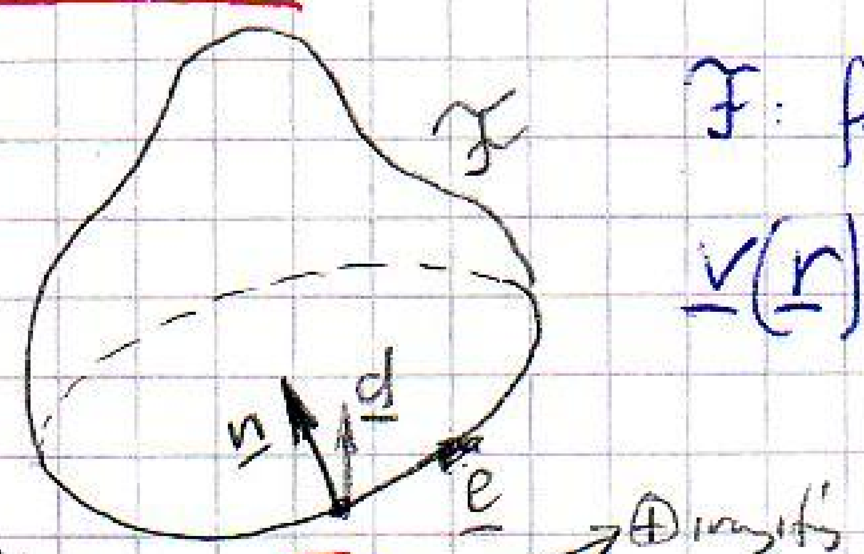


$\underline{v}(\underline{r})$ folytonos vektor-vektor fv. a határon is folyt

parc deriváltja $\exists$-k és folytonosak V-ben

$$\iint_{\mathcal{F}} \underline{v}(\underline{r})\, d\mathcal{F} = \iiint_V \underbrace{\text{div } \underline{v}(\underline{r})}_{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}}\, dx\,dy\,dz$$

Stokes-tétel



$\mathcal{F}$: folyt. diff.ható felület, határa egy L zárt rekt. fikálható

$\underline{v}(\underline{r})$ rekt-rekt fv. folyt. diff.ható $\mathcal{F}$-en és L-en is

$\underline{e}$: irányvektor,
$\underline{n}$: felületnormális

$\underline{d} = (\underline{n} \times \underline{e})$

$$\left[\int_{\mathcal{F}} \text{rot } \underline{v}(\underline{r}) d\mathcal{F} = \oint_{L} \underline{v}(\underline{r}) d\underline{r}\right]$$

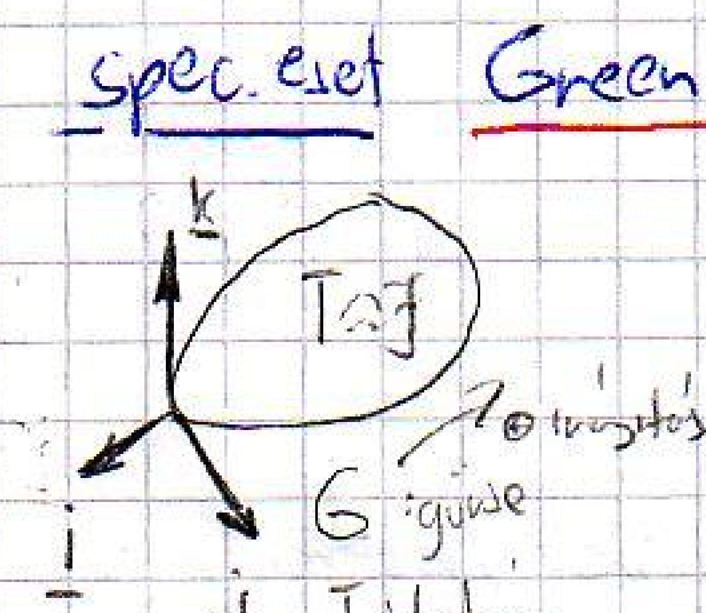
Irányítást is mondani kell!:

$(\underline{n}, \underline{e}, \underline{d})$ jobbsodrású rendszert alkot $\mathcal{F}$ pozitív irányítással (felvett $\underline{e}$-vel)

zárt görbementi integrál $= 0$, ha a rotációja 0 $\quad (\text{rot } \underline{v}(\underline{r}) = 0)$

köv.
$\Rightarrow$ vektortér skalárpotenciály. $\Leftrightarrow$ rotációja 0 (rot ~~merks~~)

spec. eset **Green-tétel** (síkbeli Stokes-tétel)



x, y koord. rsz-ben legyen egy G zárt görbe, ami határolja egy egyszeresen összefüggő T tartományt, és legyen köv. fv.-ek adottak:

$V_1(x,y)$, $V_2(x,y)$, melyeknek parc. deriváltjai folytonosak (a határon is)

$$\left[\iint_T \underbrace{\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)}_{\text{rot } \underline{v}(\underline{r})} \partial x \partial y = \int_G \underbrace{(V_1 \underline{i} + V_2 \underline{j})}_{\underline{V}(\underline{r})} d\underline{r}\right]$$

következmény |

síktart. területe: $|T| = \iint_T 1 \, dx dy$

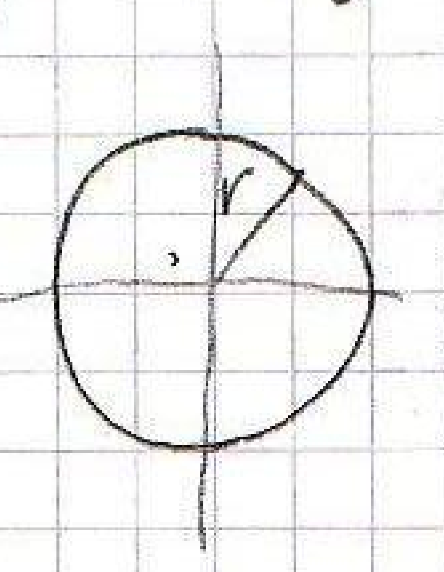
Spec vektor fv

$$\left.\begin{aligned} &\text{ha } v_2(x,y) = x \\ &v_1(x,y) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |T| = \oint_G x\underline{j} \, d\underline{r} = \oint_G -y\underline{i} \, d\underline{r}$$

$v_2(x,y) = 0$

$v_1(x,y) = -y$

pl: r-sugarú kör területe



$$K_r: \ \underline{r}(t) = r\cos t\,\underline{i} + r\sin t\,\underline{j} \quad (0 \le t \le 2\pi) \Rightarrow \dot{\underline{r}}(t) = -r\sin t\,\underline{i} + r\cos t\,\underline{j}$$

$$|K_r| = \int_{K_r} x\,\underline{j}\,d\underline{r} = \int_0^{2\pi} r\cos t\,\underline{j} \cdot \left(r\sin t\,\underline{i} + r\cos t\,\underline{j}\right) dt =$$

(görbementi: most: területmenti)

$$= \int_0^{2\pi} r^2\cos^2 t\,dt = r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = r^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos t}{2}\,dt = \underline{\underline{\pi r^2}}$$

Ért: Tenzor

(homogén) lin. vektor-vektor függvény (továbbiakban: v.v. fv) (lin = hom + add)

$$\left.\begin{aligned} &\underline{v}(c\,\underline{r}) = c\,\underline{v}(\underline{r}) \quad (c \text{ állandó}) \\ &\underline{v}(\underline{r}_1 + \underline{r}_2) = \underline{v}(\underline{r}_1) + \underline{v}(\underline{r}_2) \end{aligned}\right\} \text{lin}$$

pl $\underline{v}(\underline{r}) = \lambda\,\underline{r}$

$\underline{v}(\underline{r}) = \underline{c} \times \underline{r}$ ($\underline{c}$ adott vektor)

$\underline{v}(\underline{r}) = \text{grad}\,\underline{r}^2$ önmagával vett skalárszor.

Tenzor megadása:

Bázis: $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$

$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

$\underline{A}(\underline{r})$ tenzor: $\underline{A}(\underline{r}) = x\,\underline{A}(\underline{i}) + y\,\underline{A}(\underline{j}) + z\,\underline{A}(\underline{k})$

$$\underline{A}(\underline{i}) = a_{11}\,\underline{i} + a_{21}\,\underline{j} + a_{31}\,\underline{k} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}(\underline{j}) = a_{12}\,\underline{i} + a_{22}\,\underline{j} + a_{32}\,\underline{k} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}(\underline{k}) = a_{13}\,\underline{i} + a_{23}\,\underline{j} + a_{33}\,\underline{k} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

$$\underline{A}(\underline{r}) = x\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

A: az $\underline{A}$ tenzor mátrixa

Értelmezés $\underline{A} \Rightarrow A$ mátrix

a_{11} a_{22} a_{33} $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ = A mátrix nyoma =

$\underline{A}$ tenzor skalár invariánsa, mert tenzor egyben adott

A mátrix függ adott bázistól (választott bázis választás A mátrix)

INVARIÁNS = nyomá független bázis megválasztásától

Ha $A = A^T$: szimmetrikus mátrix $\Rightarrow$ $\underline{A}$ tenzor szimmetrikus

$\left(\text{pl } \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 0 & 1\\3 & 1 & 1\end{pmatrix} \text{ szimm}\right)$ ha $A = -A^T$: ANTISZIMMETRIKUS $\Rightarrow$ tenzor is antiszimm

Ha $\underline{A}$ (ill A) antiszimm $\Rightarrow$ $\underline{A}(\underline{r}) = \underline{a} \times \underline{\mathbf{r}}$ ($\underline{a}$ adott)

$\underline{a}$ vektor az $\underline{A}$ tenzor vektor-invariánsa

$$A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{A_1} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{A_2} = A_1 + A_2$$

$\Rightarrow A_1$: szimm ($A_1 = A_1^T$) A_2 antiszimm $A_2 = -A_2^T$

$\approx>$ tenzor is felbontható egy szimm és antiszimm tenzor összegére

$\underline{A}_2$ antiszimm tenzor, van vektor-invariánsa

$\underline{A}$ vektor-invariánsának is nevezzük