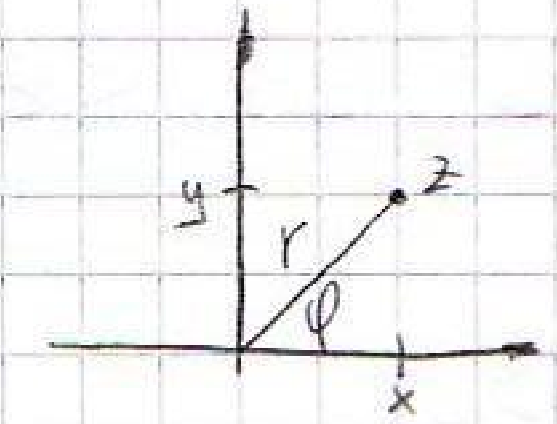
2007.04.02 hétfő — VIII. Előadás (8. hét)

Komplex függvénytan

komplex számok:

$$\mathbb{C} = \{ z = x + iy \; : x, y \in \mathbb{R} \}$$



műveletek:

- $z_1 \pm z_2$ (algebrai alakban: $z = x + iy$)
- $z_1 \cdot z_2$ (trigonometrikus alakban: $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$
- $\dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ vagy exponenciális alakban $z = r \cdot e^{i\varphi}$)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \mathrm{arctg}\, \dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0)$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

φ: argumentum főértéke

Kybővített komplex számhalmaz:

$$\mathbb{C}^b = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$z \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{ll} z + \infty = \infty + z = \infty & \dfrac{\infty}{z} = \infty \\ z \cdot \infty = \infty \quad (z \neq 0) & \\ \dfrac{z}{\infty} = 0 \quad (z \neq \infty) & \dfrac{z}{0} = \infty \end{array}\right\} \text{határozott alak}$$

határozatlan alak

$0 \cdot \infty$

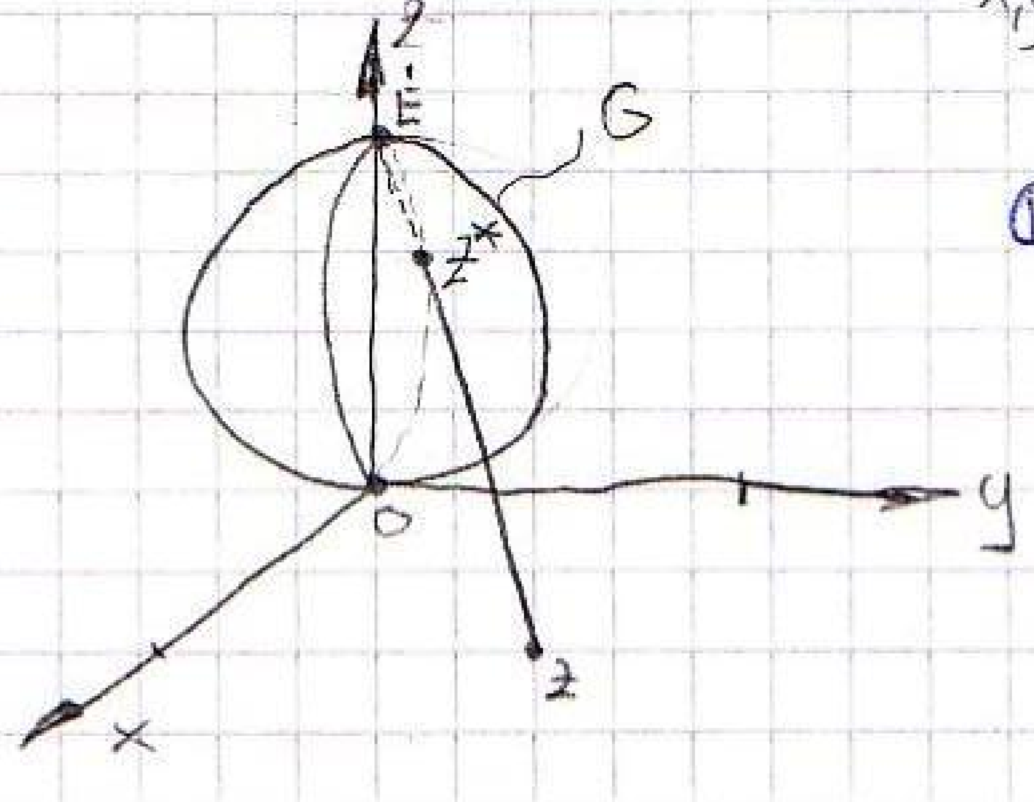
$\dfrac{\infty}{\infty}$

$\infty \pm \infty$

$\dfrac{0}{0}$

komplexszámgömb (Riemann-számgömb)

x, y kompl. számsík



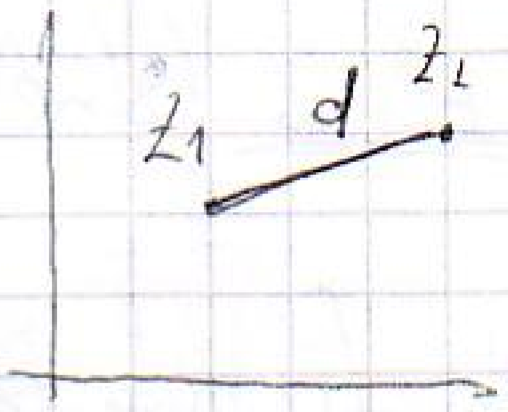
$$\mathbb{C} \ni z \mapsto z^* \subset G$$

$$\infty \mapsto É$$

$$\boxed{\mathbb{C}^b \Leftrightarrow G_{ömb}}$$

Távolság:

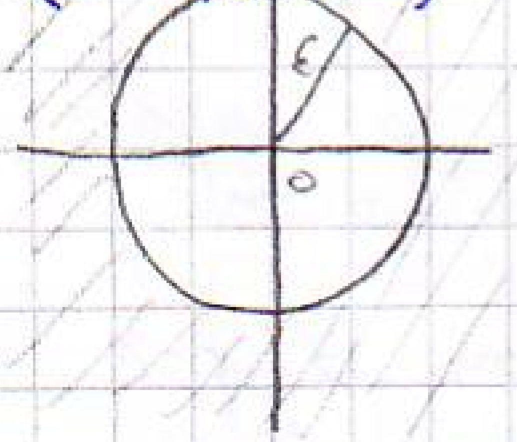
$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$



Környezet

$$z_0 : K_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon \}$$

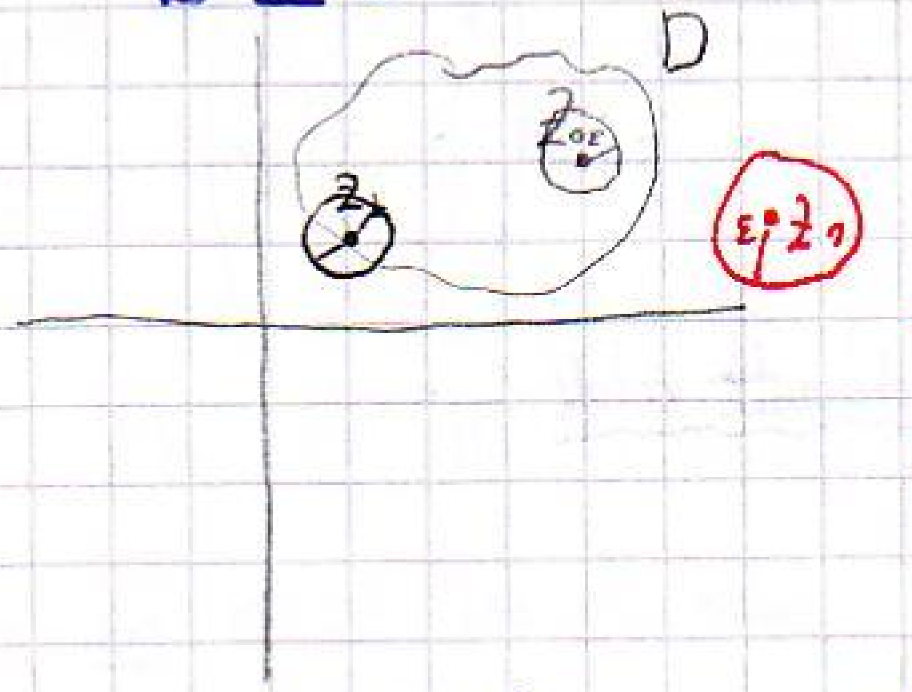
$$K_\varepsilon(\infty) = \{ z : |z| > \varepsilon \}$$



határ nem tartozik!!!

belső, külső, határpontok:

$D \subseteq \mathbb{C}$



z_0 belső pontja D-nek, ha $\exists$ olyan $K_\varepsilon(z_0)$ környezet, ami $K_\varepsilon(z_0) \subset D$

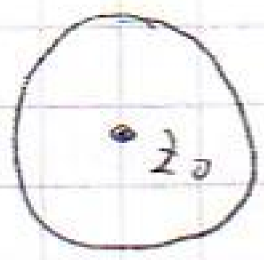
z_1 külső pontja, ha $\exists$ $K_\varepsilon(z_1)$, $D \cap K_\varepsilon(z_1) = \emptyset$

z_2 határpont, ha $\forall$ $K_\varepsilon(z_3)$-ban $\exists$ belső és külső pont

Tartomány: (nyílt halmaz)

$T \subseteq \mathbb{C}$ nyílt, ha $\forall$ pontja belső-pont

pl: tetsz pont tetsz körny-e $K_\varepsilon(z_0)$



$S \subseteq \mathbb{C}$ zárt, ha komplementere $\mathbb{C} \setminus S$ nyílt halmaz

pl $K = \{ z : |z| \leq 1 \}$

kör zárt

komplementere nyílt

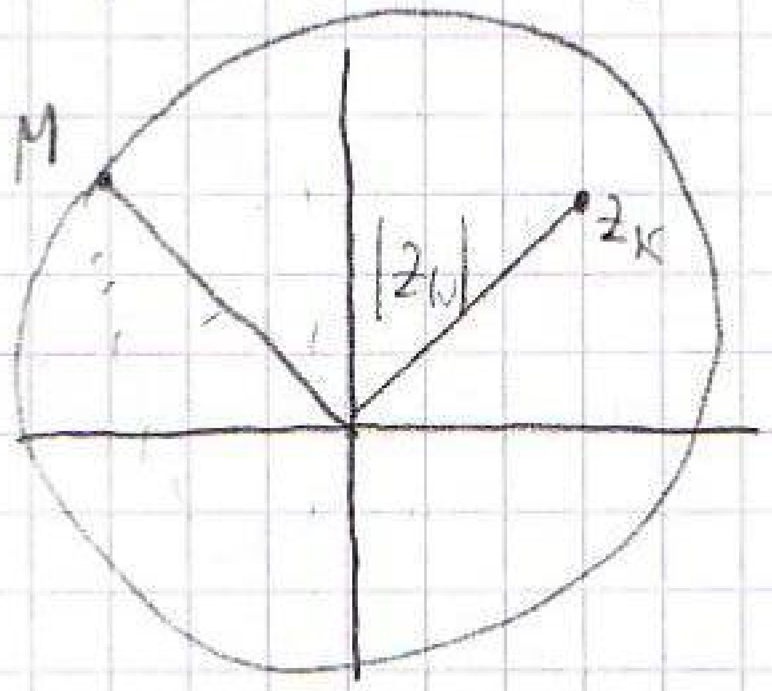
Komplex számsorozat

$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \qquad (z_k \in \mathbb{C},\ k = 1,2\dots)$

$\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \qquad \{z_k\}_{k=0}^{\infty}$

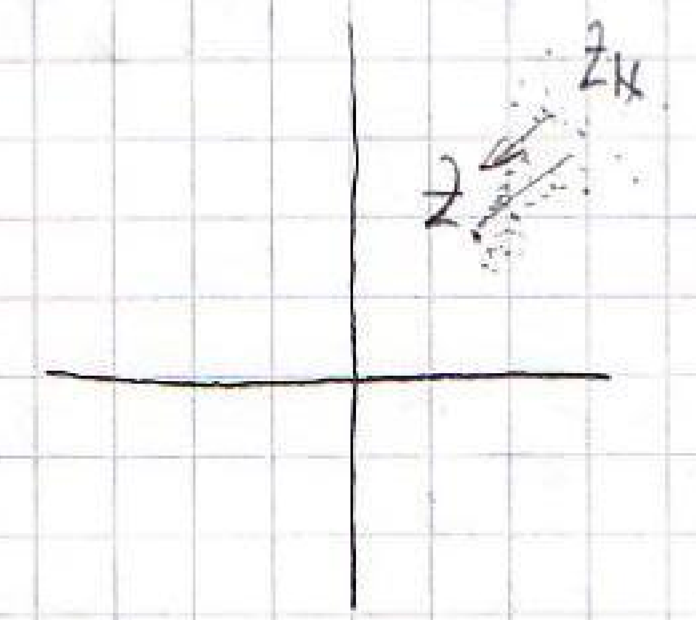
korlátos sorozat

$|z_k| < M \qquad (k = 1,2\dots)$

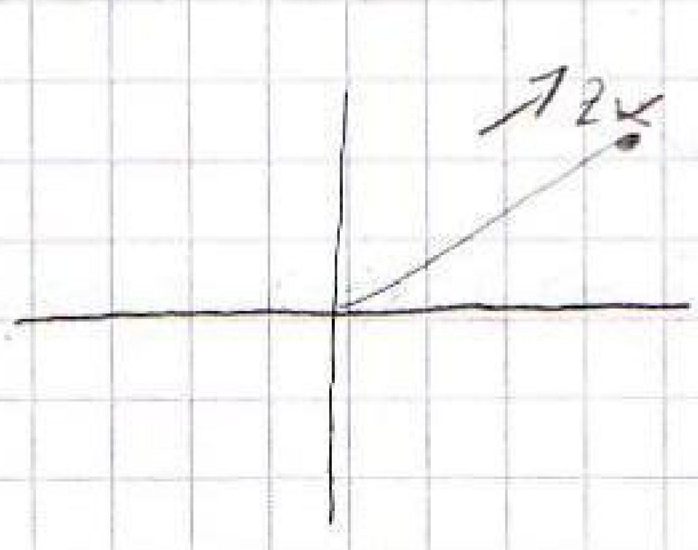


$\lim_{k\to\infty} z_k = z \qquad (z \in \mathbb{C})$

ha $\lim_{k\to\infty} \underbrace{|z - z_k|}_{\text{valós}} = 0$



$\lim_{k\to\infty} z_k = \infty \quad$; ha $\lim_{k\to\infty} |z_k| = \infty$



pl| $z_k = k + i$

$|z_k| = \sqrt{k^2+1} \to \infty \quad (k\to\infty)$

$z_k \to \infty \quad (k\to\infty)$

pl| $z_k = \frac{1}{k} + \frac{i}{k^2}$

$z_k \to 0 \quad (k\to\infty)$

$|z_k - 0| = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4}} \to 0 \quad (k\to\infty)$

$\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat konvergens $\to 0 \quad (k\to\infty)$

$\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat divergens, ha nem konvergens ($\nexists$ HÉ, vagy HÉ $= \infty$)

(terminológia: vmi divergál ∞-hez, nem pedig konvergál!)

Tétel

$z_k = x_k + i y_k$

$z = x + iy$

komplex számsorozat csak akkor és csakis akkor konvergál, ha reális és imag. részsorozatai is konvergál.

a) $z_k \to z \quad (k \to \infty) \iff \begin{matrix} x_k \to x \\ y_k \to y \end{matrix} \quad (k \to \infty)$

a) **Biz**

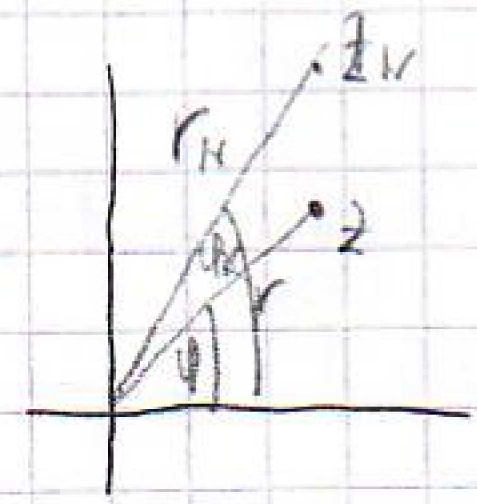
$$\underset{\downarrow \atop 0}{|z - z_k|} = \sqrt{\underset{\downarrow \atop 0}{(x - x_k)^2} + \underset{\downarrow \atop 0}{(y - y_k)^2}}$$

$0 \iff 0 \quad 0$

b)
$z_k = r_k e^{i\varphi_k} \qquad (0 \le \varphi_k < 2\pi)$

$z = r e^{i\varphi} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi)$

Akkor:



(A) $r \neq 0$) $z_k \to z \iff r_k \to r$, $\varphi_k \to \varphi$

(B) $r = 0$ $(z = 0)$

$z_k \to 0 \iff r_k \to 0 \quad (\varphi_k$ tetszőleges$)$

Cauchy-sorozat:

$z_k = x_k + i y_k$ Cauchy sorozat

Ha $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : n, m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$

példa +5 pont ZH-ra

konv-e?

$\{z_n\} = \{e^{in}\}_{n=1}^{\infty} \quad (5 m.o.)$

Komplex számsorok

$$z_1 + z_2 + \dots + z_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \quad (z_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2, \dots)$$

részletösszeg

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

Értelmezés

Ha $S_n \to S$ $(n \to \infty)$ $(S \in \mathbb{C})$ $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = S$ sorösszeg

Tétel $z_k = x_k + i y_k$, $S = a + ib$

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = S \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k = a, \ \sum_{k=1}^{\infty} y_k = b$$

1. Ha $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergens (van véges összege) $\Rightarrow$ $z_k \to 0$ $(k \to \infty)$
2. Ha $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ konvergens $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ is konv $\Rightarrow$ absz. konvergens
3. Tfh $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ konv-e $\Rightarrow$ valós sorok kritériumait is huszn (gyök, hányados stb)
4. Műveletek

$$\sum z_k = A \quad \sum z'_k = A' \Rightarrow \begin{cases} \sum z_k \pm \sum z'_k = \sum z_k \pm z'_k = A + A' \\ c \sum z_k = \sum c z_k = cA \\ \left(\sum z_k\right)\left(\sum z'_k\right) ; \ \underbrace{\left(\sum z_k\right) \otimes \left(\sum z'_k\right)}_{\text{Cauchy-szorzat}} \end{cases}$$

- ha két komplex számsor konv $\Rightarrow$ közönséges szorzata is konv
  összeg lesz az összegek szorzata
- ha két komplex számsor konv, és legalább egyik absz konv $\Rightarrow$ Cauchy-szorzatuk is konv, összeg is a két összeg szorzata

Komplex függvények

Értelmezés:

$D \subseteq \mathbb{C}$

$z \in D : z \mapsto w \quad (w \in \mathbb{C})$ (ez hozzárendelés megad egy kompl. fv)

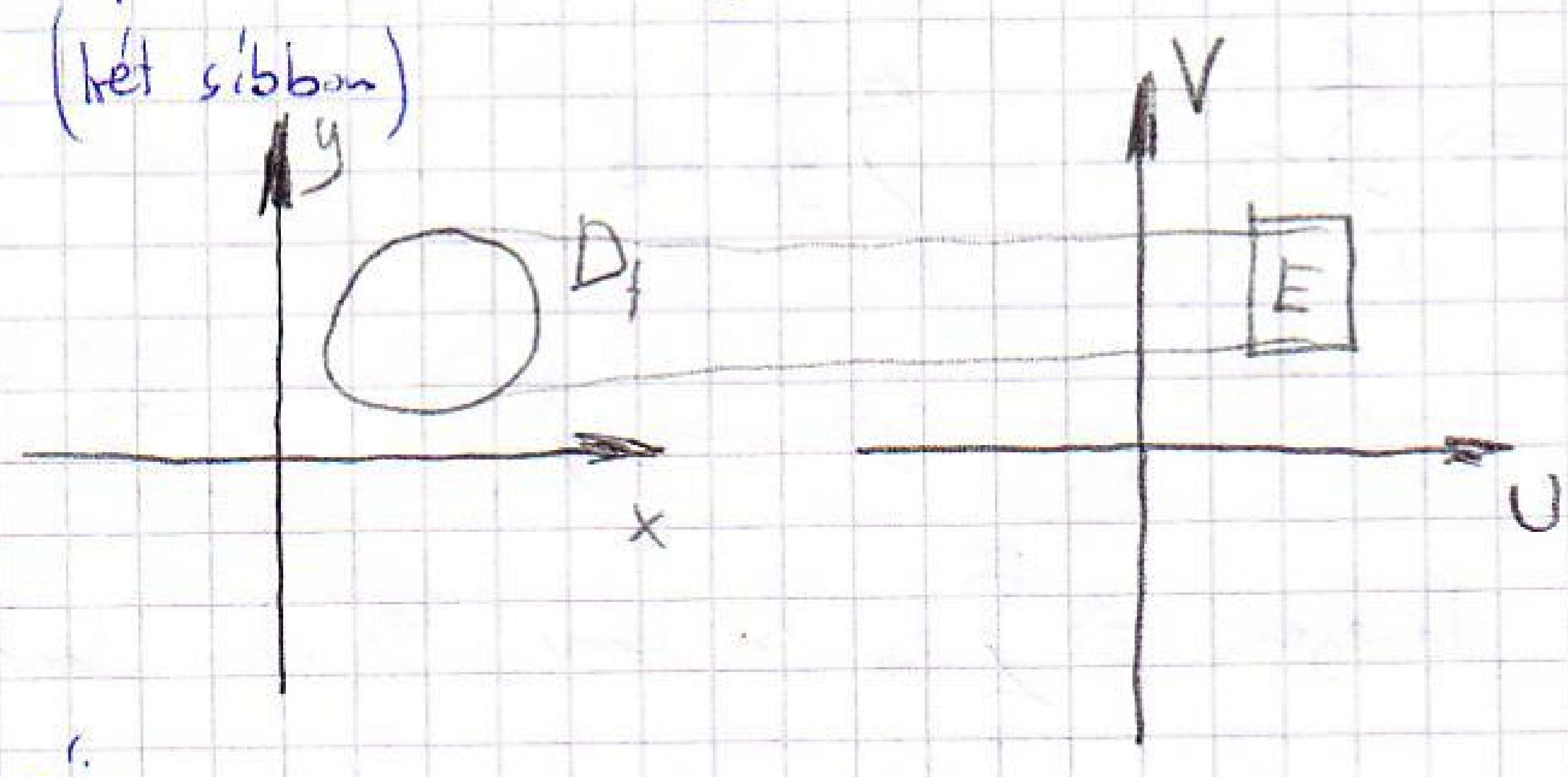
$w = f(z)$ w: fv értéke, z: fv változója   (megadható képlet, táblázat stb)

pl] $f(z) = z^2$

$D = D_f$ (ért. tart.)   (z tárgy D-ben van)

E_f (ért. készl.) $= \{ w = f(z) : z \in D \}$

ábrázolás (két síkban)



megadás formája

a) explicit alak: $w = f(z)$ pl]: z^2

b) valós és képzetes résszel (algebrai alakban): $z = x + iy$, $w = U + iV$

$$w = U(x,y) + iV(x,y)$$

pl] $w = f(z) = z^2$

$z = x + iy$

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{U(x,y)} + i\underbrace{(2xy)}_{V(x,y)}$$

c) trigonometrikus

$z = x + iy$

$w = r \cdot e^{i\varphi}$

$r = r(x,y)$

$\varphi = \varphi(x,y)$

d) $z = re^{i\varphi}$

$w = Re^{i\Phi}$

$R = R(r,\varphi)$

$\Phi = \Phi(r,\varphi)$

Műveletek függvényekkel

Algebrai műveletek:

$$f(z) \pm g(z) = (f \pm g)(z)$$
$$f(z) \cdot g(z) = (fg)(z)$$
$$\frac{f(z)}{g(z)} = \left(\frac{f}{g}\right)(z) \quad (g(z) \neq 0)$$

Konjugálás: $z = x + iy$

$f(z)$ $\quad \bar{z} = x - iy$

$$\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$$

összetett függvény

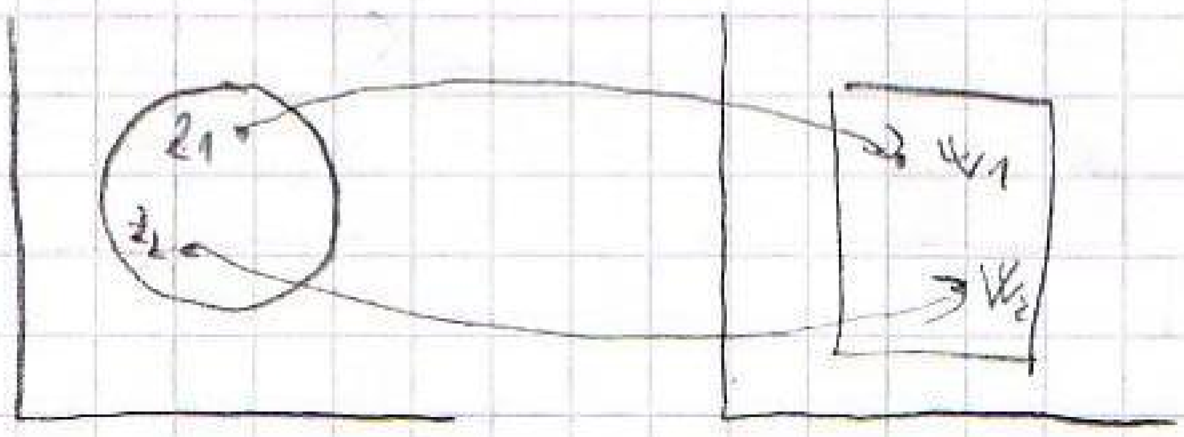
$$(f \circ g)(z) = f(g(z))$$

pl: $g(z) = z^2$, $f(z) = z^3$

$$(f \circ g)(z) = f(z^2) = (z^2)^3 = z^6$$

inverz függvény:

$$f : D \mapsto E$$



kölcs egyért leképezés:

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow w_1 \neq w_2$$

inverz fv $\exists$, ha kölcs egyért. leképz $\exists$.

$$f^{-1}(w) = z$$
$$f^{-1}(f(z)) = z$$