2007.04.16. hétfő IX. Előadás (10. hét)

ZH-n: haszn.

- A/4-es papír integrál + derivált tábla / Laplace
- számológép

Komplex elemi függvények

① Hatvány függvény:

$$z^n = \overbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}^{n\text{-szer}} \qquad (n \geq 1 \text{ egész})$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$z^0 = 1 \quad (z \in \mathbb{C}) \; (D \in \mathbb{C})$$

komplex polinomok

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_1$$

$$(a_k \in \mathbb{C} \,;\; k = 0 \ldots n)$$

$a_n \neq 0 \Rightarrow$ n-edfokú

② Gyökfüggvény: $n \geq 1$

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \ldots, n)$$

$$z = re^{i\varphi}$$

$$k = 0 \Rightarrow w = \sqrt[n]{z} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \qquad (D \in \mathbb{C})$$

③ Exponenciális függvény

$$z = x + iy$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{i\varphi} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$(D \in \mathbb{C})$

4. Logaritmus függvény (exponenciális inverz)

$W = \ln z$, ha $z = e^W$

$z = r \cdot e^{i\varphi}$; $W = A + iB \Rightarrow e^W = e^A(\cos B + i\sin B) = z = r\cdot e^{i\varphi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^A = r$ és $B = \varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Legyen $K = 0$, $A = \ln r$

$B = \varphi$

$z = re^{i\varphi}$

$\boxed{\ln z = \ln r + i\varphi} \qquad D \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

5. Trigonometrikus függvények

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (D \in \mathbb{C})$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (D \in \mathbb{C})$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \cdot \frac{1}{i} \quad (D \in ?) \quad (\cos z \text{ valós})$$

! ↳ gyakorló feladat lesz rá!

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \cdot i \quad (D \in ?) \quad (\sin z \text{ valós})$$

!

6. Hiperbolikus függvények

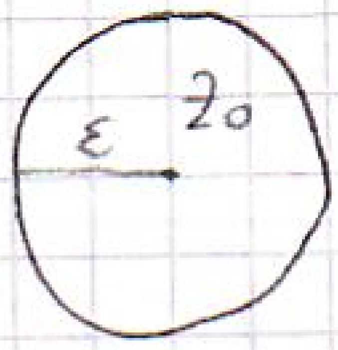
$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

Komplex határérték és folytonosság

Átszúrt környezet:

$z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$



(emiatt átszúrt, egyébként sima körny. def.)

$$K^*_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

$f(z)$, $z \in K^*_\varepsilon(z_0)$

végesben vett véges határérték:

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ $(A \in \mathbb{C})$, ha $\forall$ $z_n \in K^*_\varepsilon(z_0)$, és amely $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$
$\Rightarrow f(z_n) \to A$ $(n \to \infty)$

végtelenben vett véges határérték

$\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A$ $\quad \forall\, z_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ $\Rightarrow f(z_n) \to A$

véges pontban végtelen határérték

$\lim\limits_{z_n \to z_0} f(z) = \infty$ ha $\forall\, z_n \in K^*_\varepsilon(z_0)$ $z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to \infty$

végtelen pontban vett végtelen határérték

$\lim\limits_{z_n \to \infty} f(z) = \infty$, ha $\forall\, z_n \to \infty \Rightarrow f(z_n) \to \infty$

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ $\quad (z = x + iy)$

$z_0 = x_0 + i y_0$, $\quad A = M + iN$

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = M$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = N$

Folytonosság:

már nem of szokat !!!

$f(z)$, $z \in K_\varepsilon(z_0)$

folytonos z_0-ban, ha $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$z_0 = x_0 + iy_0$ pontban folytonos $\Leftrightarrow$ u és v folyt. (x_0, y_0)-ban

Összetett függvény:

$f \circ g(z) = f(g(z))$

$g(z)$ folyt. z_0-ban, f folyt. $A = g(z_0)$-ban $\Rightarrow$ $f \circ g$ folyt. z_0-ban

Inverz függvény:

$f(z)$ folyt z_0-ban és $\exists f^{-1}$ fv. $\Rightarrow$ f^{-1} folyt $f(z_0)$-ban

Egyenletes folytonosság:

$D \subseteq \mathbb{C}$ $f(z)$ $(z \in D)$ egyenletesen folytonos D-n, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz

$\exists \delta = \delta(\varepsilon)$

$|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$

Kapcsolat a folytonosság és egyenletesen folyt. között

Egy Nyílt tartományban egyenletesen folyt. fv. folytonos $\forall$ pontjában

Adott zárt korl. tartomány $\forall$ pontjában folyt. fv. egyenletesen folyt is azon a halmazon

Felsorolt elemi fv-ek folyt.-ak az értelmezési tartományuk $\forall$ pontjában

Differenciálhatóság

Értelmezés:

$f(z)$, $z \in K_\varepsilon(z_0)$

$f(z_0+h) - f(z_0)$ fv differencia ($h \in \mathbb{C}$)

$\dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ fv differenciahányados ($h = z - z_0$)

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$ fv differenciálhányadosa / derivált

Cauchy-Riemann-differenciálegyenlet rendszer:

$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ ($z = x + iy$)

$z_0 = x_0 + i y_0$

Tétel Vizsgán tipikus!!!

$f(z)$ diffható z_0-ban $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$, és $v(x,y)$ (kétvált valós fv.ek) teljesen diffhatóak az x_0, y_0-ban, és fennáll a C-R DE egyenl.rsz

$$\left.\begin{aligned} u'_x(x_0,y_0) &= v'_y(x_0,y_0) \\ u'_y(x_0,y_0) &= -v'_x(x_0,y_0) \end{aligned}\right\} \text{ és akkor } f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + i\, v'_x(x_0,y_0)$$

Szüks feltétel: ha $f(z)$ diffható z_0-ban $\Rightarrow \exists$ (parc deriváltak) u'_x, u'_y, v'_x, v'_y (x_0,y_0) ban $\Rightarrow$ $\exists$ C-R DE egyenlrsz fennáll.

Elégséges feltétel: Ha $u(x,y)$, $v(x,y)$ $\exists$, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y folytonosak (x_0,y_0)-ban és (x_0,y_0)-ban fennáll C-R DE egyenl.rsz. $\Rightarrow$ $f(z) = u + iv$ diffható $(x_0 + iy_0)$-ban példa: $f(z)=z \Rightarrow (z)'=1$

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{z_0+h-z_0}{h}=1 \to 1 \quad (h\to 0)$$

példa: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $\quad (z=x+iy)$

$$f(z)=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)=\underbrace{e^x\cos y}_{u(x,y)}+i\underbrace{e^x\sin y}_{v(x,y)}$$

$$\left.\begin{array}{l} u'_x=e^x\cos y=v'_y=e^x\cos y \\ u'_y=-e^x\sin y=-v_x=e^x\sin y \end{array}\right\} \checkmark \Rightarrow \text{egész számsíkban diffható}$$

$$f'(z)=u'_x+iv'_x=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z \quad \boxed{\Rightarrow (e^z)'=e^z}$$

példa: (megold C-R) kérdés hol diffható?

$$f(z)=|z|=\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{u(x,y)}+i\underbrace{0}_{v(x,y)}$$

$$u'_x=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1\cdot 2x}{(x^2+y^2)^{1/2}}=\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}} \Rightarrow (x_0,y_0)\neq(0,0)$$

$$u'_y=\ldots \quad \ldots=\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \Rightarrow (x_0,y_0)\neq(0,0)$$

$\boxed{\text{C-R}}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}=0 \\[2ex] \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}=0 \end{array}\right\} \quad \text{Ha } (x,y)\neq(0,0) \Rightarrow \text{sehol sem teljesül CR der.}$$

$\boxed{z_0 = (0,0) \text{ vizsgálata}}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\nexists$$

$\Rightarrow$ sehol sem diffható