$z_0 = (0, 0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \quad \nexists$$

/10. hét/ **ELŐADÁS** 2007.04.21. SZOMBAT

KOMPLEX FV-EK DIFFHATÓSÁGA

$f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y) \qquad (z = x + iy)$

$z_0 = x_0 + i y_0 \qquad f(z)$ diffható z_0-ban $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$ és $v(x,y)$ az (x_0, y_0)-ban totálisan diffható, és fennáll C-R d.e.v (x_0, y_0)-ban:

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0),$$

$$u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0)$$

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + i \cdot v'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) - i u'_y(x_0, y_0)$$

Biz: (gondolata)

a) szükségesség: $\exists\ f'(z_0)$: $h = \Delta z = z - z_0$

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = D\, \Delta z + \varepsilon(\Delta z)\, \Delta z$$

$$D = f'(z_0) \quad | \quad \varepsilon(\Delta z) \to 0 \ (\Delta z \to 0)$$

jelölés: $\Delta z = \Delta x + i \Delta y \qquad \begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = y - y_0 \end{cases}$

$\searrow$

$D = D_1 + i D_2$

$\mathcal{E} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$

$$\underbrace{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}_{\Delta u + i\cdot \Delta v} = (D_1 + D_2)(\Delta x + i\cdot \Delta y) + (\varepsilon_1 + i\,\varepsilon_2)(\Delta x + \Delta y)$$

$\curvearrowright$ $\Delta u = D_1 \Delta x - D_2 \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x - \varepsilon_2 \cdot \Delta y \curvearrowright u$ tot. diffható (x_0, y_0)-ban

$\Delta v = D_2 \cdot \Delta x + D_1 \cdot \Delta y + \varepsilon_2 \cdot \Delta x + \varepsilon_1 \cdot \Delta y \curvearrowright v$ tot. diffható (x_0, y_0)-ban

köv. köv.

és $D_1 = u'_x(x_0, y_0)$ $\qquad D_1 = v'_y(x_0, y_0)$

$D_2 = -u'_y(x_0, y_0)$ $\qquad D_2 = v'_x(x_0, y_0)$

$C_{\text{auchy}}-R_{\text{iemann}}$ d.e.r fennáll

b) elégségesség: u és v tot. diffható (x_0, y_0)-ban és C-R d.e.r.

$\curvearrowright \exists f'(z_0)$:

„totvalt. fv. tot. diffhatóság értelmezése"

$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) =$

$= u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0,\ \Delta x$ és $\Delta y \to 0)$

$\Delta v =$ ugyanaz, csak v $=$

$= v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + \eta_1 \Delta x + \eta_2 \Delta y$

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta u + i \cdot \Delta v \overset{\text{behely}}{=} = \text{átcsoportosít} =$$

$$= (u_x' + i \cdot v_x')\Delta x + (-v_y' + i \cdot u_y')\Delta y + \delta$$

egy kis mennyiség

ELEMI FV-EK DERIVÁLTJAIK

/elemi fv-ek diffható-k az értelmezési tartományukon/

/a képletek ugyanazok, mint valós esetben/

$$(z^n)' = n \cdot z^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{n} \cdot z^{\frac{1}{n}-1}$$

$$(e^z)' = e^z$$

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

$$(\cos z)' = -\sin z$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$$

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$$

MŰVELETEK:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(c \cdot f(z))' = c \cdot f'(z)$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad /g(z) \neq 0 \text{ esetén}/$$

INVERZ FV. DERIVÁLTJA

Ha $f(z)$ diffható egy z_0 környezetében ($K(z_0)$-ben) és

$\exists f^{-1}(f(z_0))$ és $f'(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \left[f^{-1}\right]'_{f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

ÖSSZETETT FV

$$\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

MAGASABBRENDŰ DIFF. HÁNYADOS

$$f''(z) = \left(f'(z)\right)'$$

Mi a picsa? Ná ne má!

$$f^{(n)}(z) = \left(f^{(n-1)}(z)\right)'$$

TÉTEL: Ha $f(z)$ egyszer diffható $K(z_0)$-ben

$\Rightarrow$ ott akárhányszor differenciálható

/ez csak komplex fv-ekre teljesül/

— B12

NÉHÁNY ALKALMAZÁS: /pontosan 1db :)/

L'Hospital - szabály:

Ha $f(z)$, $g(z)$ $K(z_0)$-ban diffható és z_0-ban: $f(z_0) = g(z_0) = 0$

és $g'(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

pl: $\lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z}$ L'Hospital: $\lim_{z \to 0} \frac{\cos(z)}{1} = \cos 0 = \underline{\underline{1}}$

új fogalom:

REGULARITÁS:

a) $f(z)$ reguláris z_0-ban ha diffható valamely $K(z_0)$-ban.

b) $f(z)$ reguláris T-ban, ha reguláris $\forall$ pontjában

pl: $f(z) = e^z$ $\mathbb{C}$-ban reguláris

$f(z) = z \cdot |z|$ /csak 0-ban diffható/

Házi feladat (bizonyítani, hogy sehol sem reguláris :)

sehol sem reguláris

HARMONIKUS, VALÓS FV-EK

Ért: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\quad (x_1, \dots, x_n) \in T \subseteq \mathbb{R}^n$

harmonikus T-ben: ha kétszer folyt. diffható T-ben, és fennáll az ún. Laplace egyenlet:

Laplace $\curvearrowleft$ $\Delta f(x_1, \dots, x_n) = f''_{x_1^2}(x_1, \dots, x_n) + \dots + f''_{x_n^2}(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$

/két 2 vált. fv/

$f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$

TÉTEL: T nyílt halmazban /Tartományban/ reguláris $f(z)$ fv valós és képzetes részei (azaz $u(x,y)$ és $v(x,y)$) harmonikusak.

/azaz $\Delta u = \Delta v \equiv 0$ /

Biz: $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$

Mivel $f(z)$ diffható $\Rightarrow$ fennáll C-R d.e.r.

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} u'_x = v'_y \\ v'_y = -v'_x \end{array}\right\}$ és $f'(z) = \underbrace{u'_x}_{U} + i \cdot \underbrace{v'_x}_{V}$

$\left.\begin{array}{l} U'_x = V'_y \\ U'_y = -V_x \end{array}\right\}$ /mivel $2x$ is diffható és akkor C-R der/

$\left.\begin{array}{l} u''_{x^2} = v'_{yx} \\ u''_{y^2} = -v'_{xy} = -v'_{yx} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{u''_{x^2} + u''_{y^2} \equiv 0}$

V-re hasonló az állítás. /Azt nem írjuk le/

/Ha egy $\mathbb{C}$ fv diffható, akkor Re$\{\}$ és Im$\{\}$ is harmónikus/

„EGY HARMÓNIKUS TÁRS" ...

Harmonikus Társ:

$u(x,y)$ harmonikus T-ban:

$v(x,y)$ az $u(x,y)$ harmonikus társa,

Ha $v(x,y)$ is harmonikus és

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= v'_y \\ u'_y &= -v'_x \end{aligned}\right\} \text{ C-R d.e.r fennáll között } T\text{-ben}$$

f^l: $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ és $f(z)$ diffható T-ben, akkor u és v harmonikus társak.

fordítva is igaz:

Tétel u, v harmonikus társak T-ben

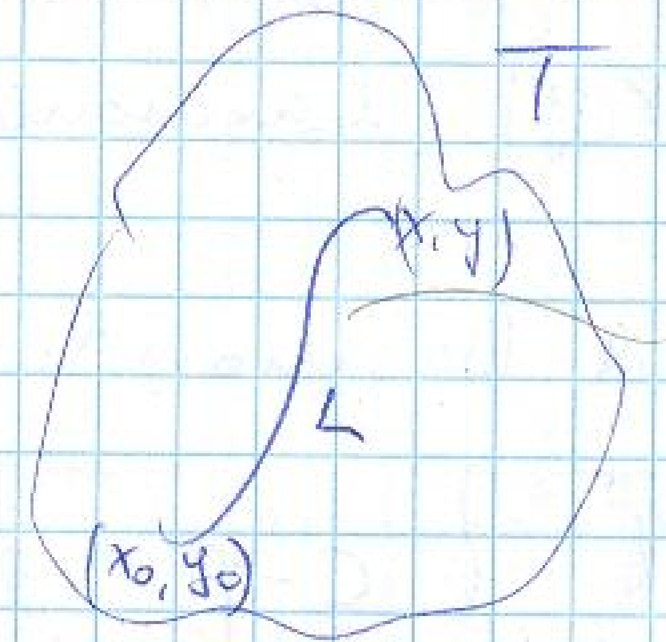
$\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &a)\ f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y) \\ &b)\ g(z) = v(x,y) - i\cdot u(x,y) \end{aligned}\right\} \text{ diffhatók } T\text{-ben}$$

Tehát harmonikus társakból képezhetünk diffható komplex fv-eket

TÉTEL: Egyszeresen összefüggő T-ben harmonikus $u(x,y)$ fv-hez található /additív konstanstól eltekintve/ harmonikus társa: $v(x,y)$

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(-u'_y\,dx + u'_x\,dy\right)$$ görbementi integrál



rektifikálható görbe

Pl) $u(x,y) = e^x \cdot \sin y$

harmonikus-e? /hol harmonikus?/
ha igen, akkor mi a harmonikus társa?

$$u'_x = e^x \cdot \sin y$$
$$u''_{x^2} = e^x \cdot \sin y$$
$$u'_y = e^x \cos y$$
$$u''_{y^2} = -e^x \sin y$$

$\rightsquigarrow u''_{x^2} + u''_{y^2} = \emptyset$
Tehát u harm. $\mathbb{R}$-en
$\hookrightarrow$ van harmonikus társa.

$u'_x = v'_y$
$u'_y = -v'_x$
C-R def.

parciális integrálás

$$v(x,y) = \int u'_x(x,y)\,dy = \int e^x \sin y\,dy = -e^x \cos y + C(x)$$

$C(x) = ?$

$$u'_y: \quad -e^x \cos y = -\left(+e^x \cos y + C'(x)\right) \Rightarrow \quad C'(x) = \emptyset \rightsquigarrow C(x) = K$$

$$\boxed{v(x,y) = -e^x \cdot \cos y + K}$$