2007. Okt. 23 hétfő — XI. Előadás (11. hét)

Konform leképezés

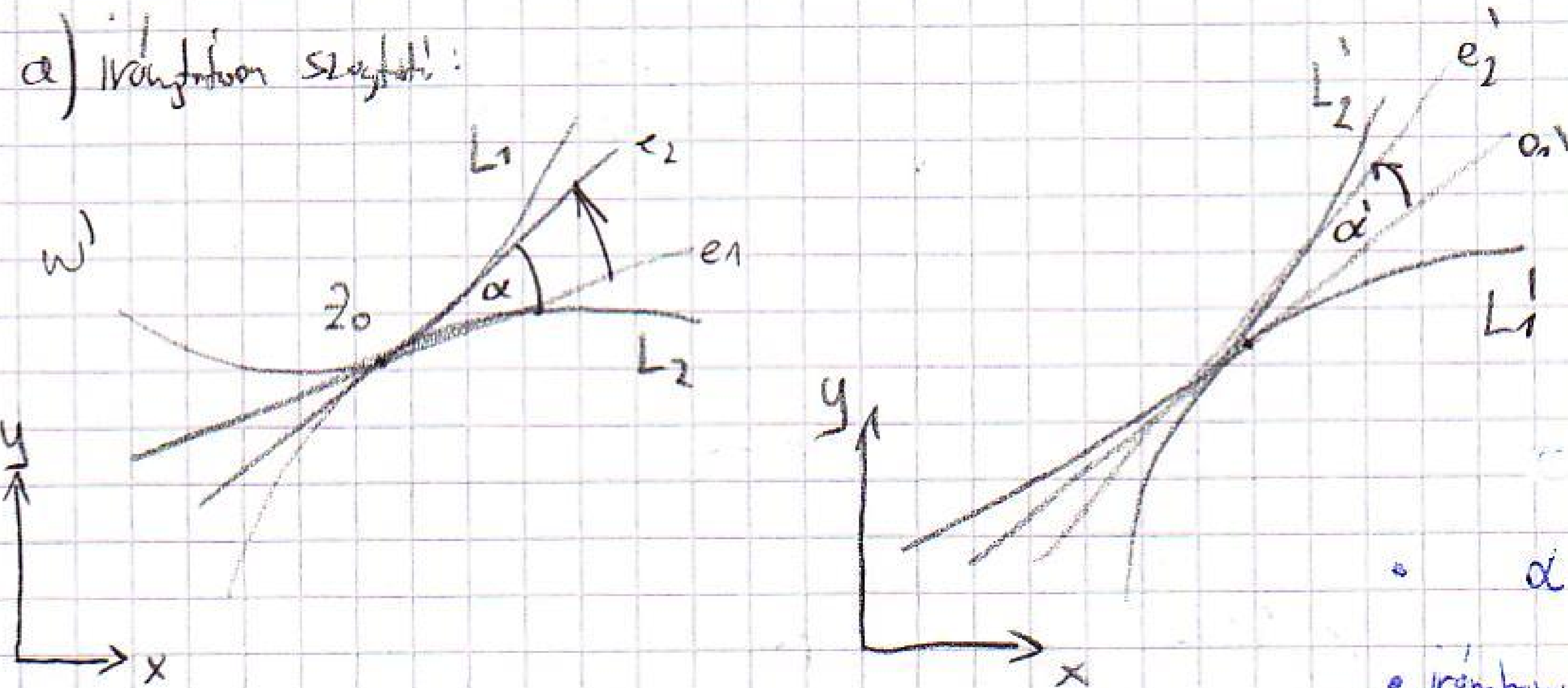
Lokális konformitás:

$w = f(z)$, $(z \mapsto w)$, $z \in K(z_0)$ **konform** z_0-ban, ha

a) iránytartóan szögtartó

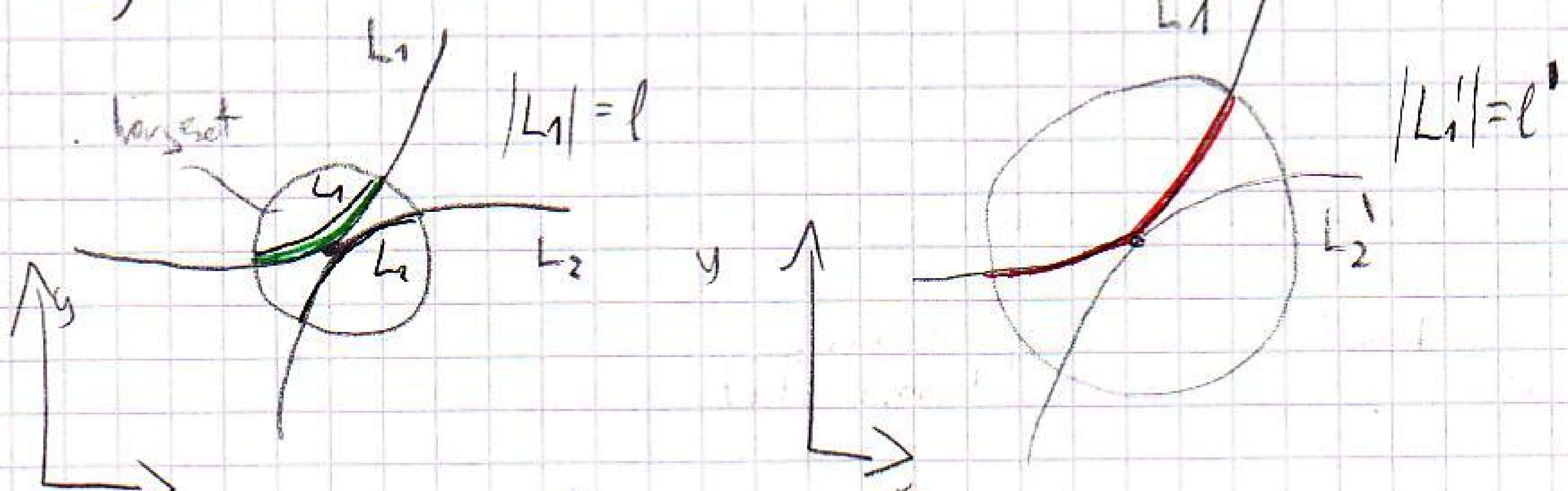
b) kisméretekben aránytartó!

a) iránytartóan szögtartó:



- $\alpha = \alpha'$
- irányban is azonos (e_2, e_2' feljebb e_1, e_1'-nél)

b) kisméretekben aránytartó



$$l' = Al + \varepsilon(l) \cdot l$$

$A > 0$ konstans : nyújtás-együttható

$\varepsilon(l) \to 0$ (ha $l \to 0$)

$\boxed{l' \approx Al}$ (kisméretekben arányosak)

ha $A > 1$: képének hossza nagyobb, mint alaphalmaz $\Rightarrow$ a leképezés megnyúlik

ha $A < 1$: —‖— kisebb —‖— a leképezés zsugorodik

Tétel $w=f(z)$ z_0-ban reguláris fv. $\Rightarrow$ konform z_0-ban $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $f'(z_0)\neq 0$ és $A=\left|f'(z_0)\right|$

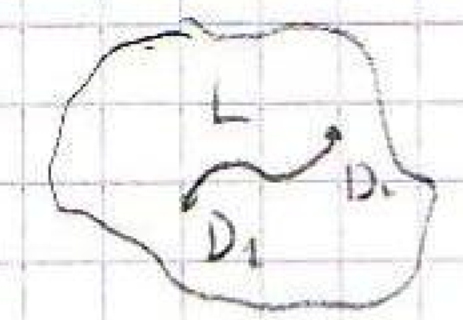
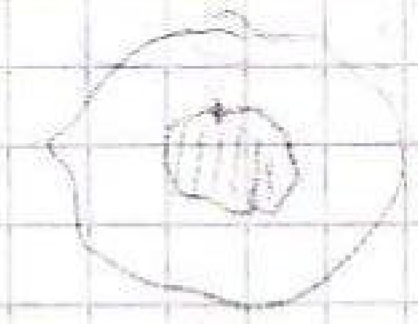
Komplex vonalintegrál

Síkbeli tartomány

nyílt halmazt tekintünk

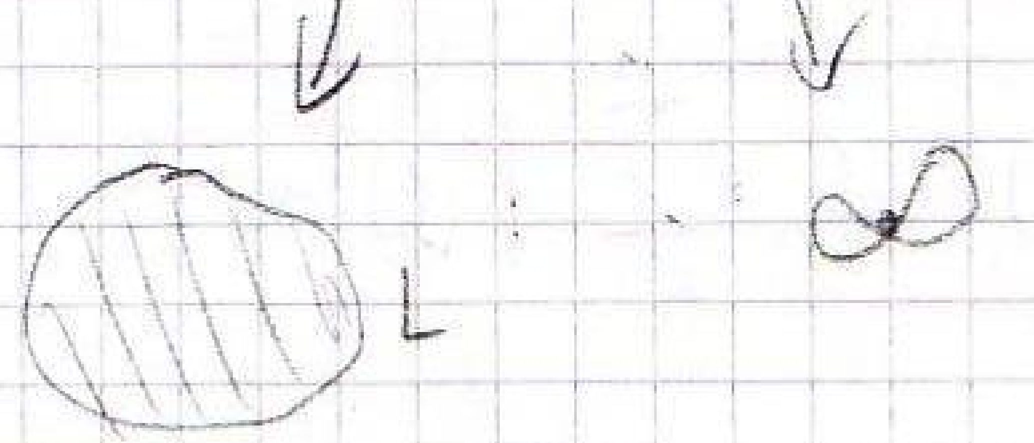
Összefüggő

ha tartomány $\forall$ két pontja összeköthető a tartományban haladó két görbével:

pl  vagy 

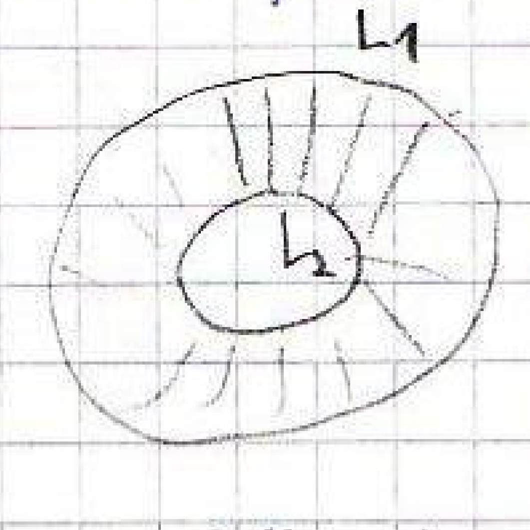
Egyszeresen öf:

- olyan tart, mely egyetlen zárt kettős pont nélküli görbe határol



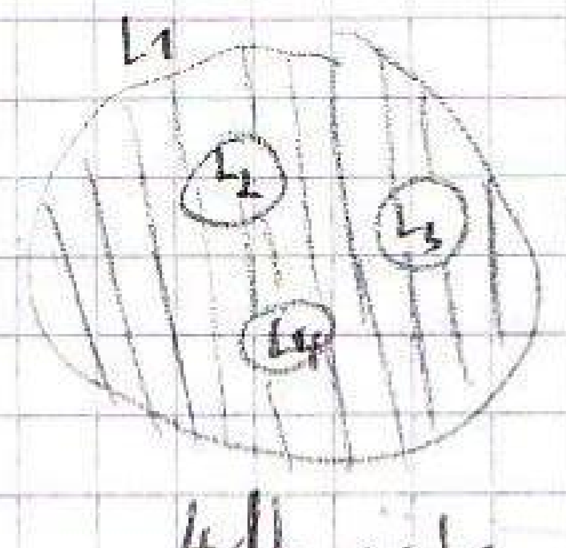
n-szeresen öf:

- ha öf, és határa n db diszjunkt görbéből áll



2db görbe

$\Rightarrow$ 2x-en öf

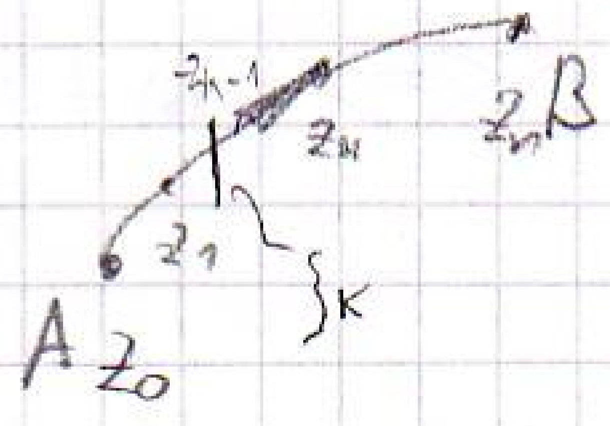


4db görbe

$\Rightarrow$ 4x-en öf

Komplex vonalintegrál értelmezése:

$L = \widehat{AB}$ egy irányított, rektifikált görbeszakasz



Felosztás: $T_n: A = z_0, z_1, \dots, z_k, \dots z_n = B$

n minél nagyobb ⇒ annál több osztópont

$\underbrace{\{T_n\}_{n=1}^{\infty}}_{\text{felosztássorozat}}$ ∀ határon finomodó felosztássorozat, ha:

$$\left[\max_{1 \le k \le n} \{z_k - z_{k-1}\} \to 0 \quad (n \to \infty)\right]$$

$f(z)$, $z \in L$ (görbén értelmezve)

$\xi_k \in \widehat{z_{k-1}, z_k} \qquad (k = 1, \dots, n)$

Integrál közelítő összeg (komplex): $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$

$\boxed{\text{Def}}$ ha ∃ ∀ bármely $\{T_n\}$ felosztássorozat és tetszőleges választott ξ_k pontok esetén a köv. H.É. teljesül

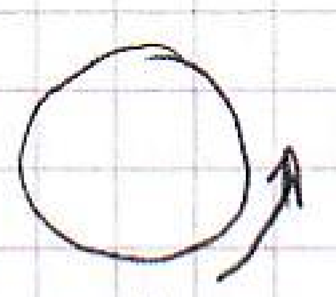
$$\lim_{n \to \infty} S_n = I$$

és I H.É. független a felbontássorozattól és a használt ξ_k pontoktól ⇒

⇒ f fv. a görbén integrálható

$$I = \int_L f(z)dz = \int_{\widehat{AB}} f(z)dz$$

Ha L zárt: $\oint_{L^+} f(z)dz$:



L

Integrálhatóság elégséges feltétele

a) ha $f(z)$ minden pontjában folytonos, vagy b) (korlátos)

b) $f(z)$ a L görbe véges sok pontja kivételével folyt. és $|f(z)| \le K$ $(z \in L)$

Integrál kiszámítása :)

Tétel (kapcsolat a valós görbe menti integrállal)

Ha $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ L-rektifikálható görbén folyt. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_L f(z) = \int_L (u\,dx - v\,dy) + i \int_L (v\,dx + u\,dy)$$

$$\left.\begin{array}{l} z = x + iy \\ z_k = x_k + iy_k \\ \xi_k = a_k + i b_k \end{array}\right\} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum \left[u(a_k,b_k) + i v(a_k,b_k)\right]\left(\underset{\overset{\|}{x_k - x_{k-1}}}{\Delta x_k} + i \underset{\overset{\|}{y_k - y_{k-1}}}{\Delta y_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[u(a_k,b_k)\Delta x_k - v(a_k,b_k)\Delta y_k\right] + i \sum_{k=1}^{n}\left[v(a_k,b_k)\Delta x_k + u(a_k,b_k)\Delta y_k\right]$$

$$\searrow \int (u\,dx - v\,dy) \qquad \searrow \int_L (v\,dx + u\,dy)$$

Tétel (kapcsolat Riemann-integrállal)

$L: z(t) = x(t) + i y(t) \quad \alpha \le t \le \beta$ sima görbe: $x'(t), y'(t)$ folyt (α,β)-n

$$f(z) \text{ folyt } L\text{-en} \Rightarrow \int_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)\,dt$$

$$z'(t) = x'(t) + i y'(t)$$

Biz: $\displaystyle\int_L f(z)dz = \int_L (u\,dx - v\,dy) + i\int_L (v\,dx + u\,dy) = \int_\alpha^\beta \left[u(x(t),y(t))\cdot x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)\right]dt +$

$$+ i\int_\alpha^\beta \left[v(x(t),y(t))\,x'(t) + u(x(t),y(t))\,y'(t)\right]dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \underbrace{\left[u(x(t),y(t)) + i v(x(t),y(t))\right]}_{f(z(t))}\underbrace{\left[x'(t) + i y'(t)\right]}_{z'(t)} dt$$

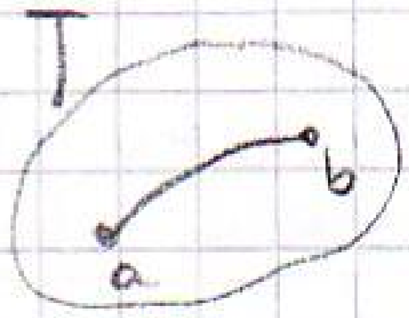
Primitív fv

$$F'(z) = f(z),\ z \in T \qquad \left(f(z)\ \text{prim fv-e } F(z) \right)$$

Tétel (Newton–Leibniz formula)

Ha $f(z)$-nek van $F(z)$ prim fv-e T-ben $\Rightarrow$

$$\int_L f(z)\,dt = F(b) - F(a)$$



(T-ban rektifikálható görbe van)

Biz $f = u + iv \qquad F = U + iV$

$$F'(z) = f(z) \qquad F'(z) = \underbrace{U'_x}_{u} + i\underbrace{V'_x}_{v} = \underbrace{V'_y}_{u} - i\,\underbrace{U_y}_{-v}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} U = [u, -v]$$
$$\operatorname{grad} V = [v, u]$$

$$\int_L f(z) = \int_{\overset{\frown}{ab}} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{\overset{\frown}{ab}} (v\,dx + u\,dy) = \int_{\overset{\frown}{ab}} [u, -v]\,d\underline{r} + i \int_{\overset{\frown}{ab}} [v, u]\,d\underline{r} =$$

$$= \big(U(b) - U(a)\big) + i\,\big(V(b) - V(a)\big) = F(b) - F(a)$$

Mikor melyiket? $\Rightarrow$ ha könnyű a prim fv-t meghatározni $\Rightarrow$ N-L formula

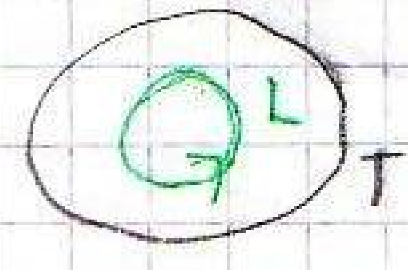
pl

$$\int_1^i e^{-z}\,dz = \left[-e^{-z}\right]_1^i = \underline{\underline{-e^{-i} + e^{-1}}}$$

Tétel Cauchy-integrál tétel

Ha $f(z)$ reguláris és egyszeresen öf tart-ban $\Rightarrow$ $\forall$ T-ben fekvő rektifikálható zárt görbén vett integrálja 0.

$$\int_L f(z)\,dz = 0$$



Biz $$\int_L f(z)dz = \int_L [u,-v]\,d\underline{r} + i\int_L [v,u]\,d\underline{r}$$

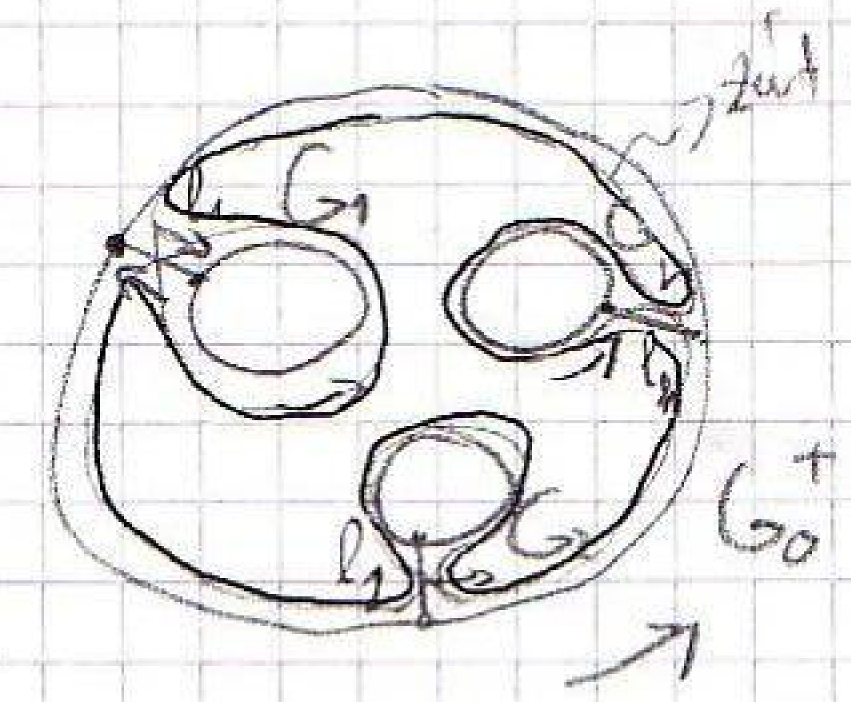
ha $\operatorname{rot}[u,-v]=0$
ha $\operatorname{rot}[v,u]=0$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ integrál is 0. $\Rightarrow$ HF biz

Általánosított Cauchy-integrál tétel

Ha $f(z)$ reguláris $(n+1)$-szeresen öf T-ben és $G_0, G_1, \dots, G_n$ határgörbéken (is)

$$\oint_{G_0^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{G_k^+} f(z)dz$$

Biz $$\int_{L^+} f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz$$



$$G = G_0^+ + \bigcup_{k=1}^{n} l_k^+ + \bigcup_{k=1}^{n} l_k^- + \bigcup_{k=1}^{n} G_k^-$$

G zárt T-ben $\Rightarrow$

$$\int_G f(z)\,dz = 0 \quad \text{Cauchy int}$$

Cauchy int: $$\int_G f(z)dz = 0 = \int_{G_0^+} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{G_k^+} f(z)dz = 0$$