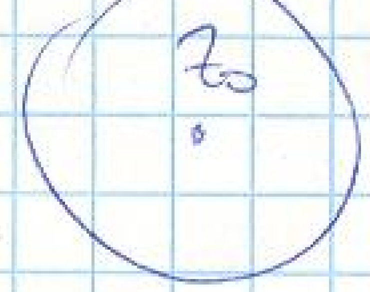
2007. 05. 07.
HÉTFŐ

# ELŐADÁS

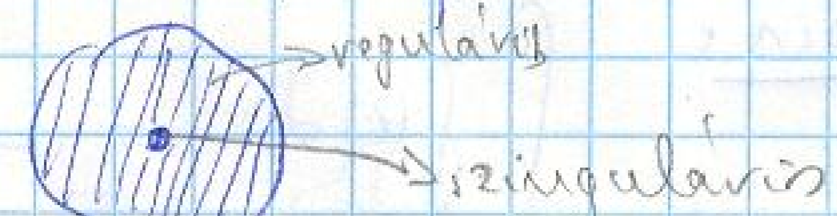
**Reguláris pont:**

$f(z)$: 

$K_\varepsilon(z_0)$ – ben diffható.

**Szinguláris pont**: $z_0$ nem reguláris.

**Izolált szinguláris pont**: Szinguláris de $\exists K_\varepsilon(z_0)$ : $z \neq z_0$ és $z \in K_\varepsilon(z)$ $z$-ben reguláris.



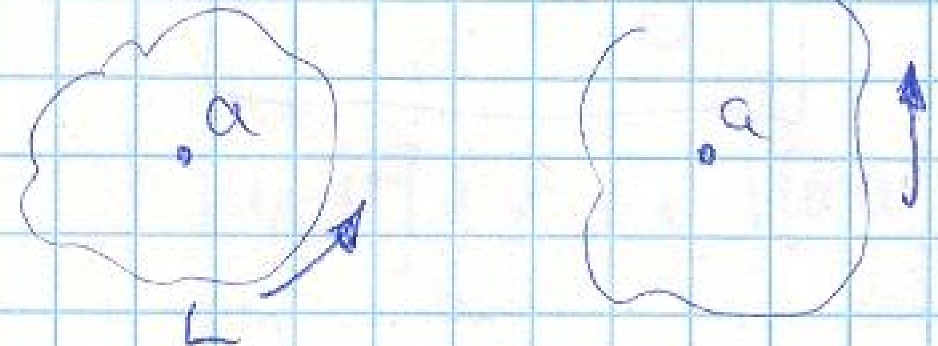

Pl.: $f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$

$z_0 = 0$ : $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, $f(z)$ nem folyt. $0$-ban $\Rightarrow$ nem diffható

ha $z \neq 0 \Rightarrow z$-ben reguláris. Tehát $0$ izolált szinguláris pont.

$\boxed{\int_L f(z)\,dz}$

**FONTOS INTEGRÁLÁS: $(z-a)^n$ integrálása**

$\oint_{L^+} \underbrace{(z-a)^n}_{f(z)} dz$ 


/a görbétől független lesz, ha
– zárt
– körbeveszi $a$-t/

a) $n \geq 0 \rightarrow f(z) = (z-a)^n$ reguláris $\mathbb{C}$-ben $\rightarrow$ zárt görbementi integrálja C-miatt $0$

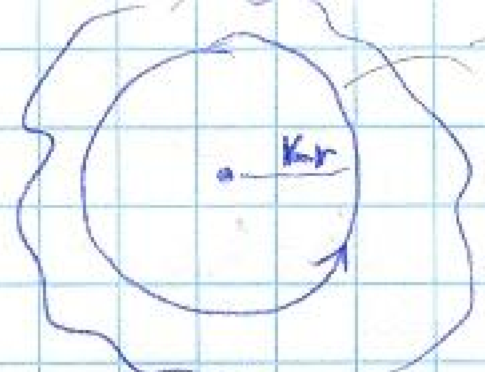
$$\int_{L^+} (z-a)^n dz = 0$$

b) $n < -1$ : $f(z) = (z-a)^n$ $\quad F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$

$$\oint_{L^+} f(z) = F(b) - F(a) = 0$$

/$a = b$/

c) $n=-1$



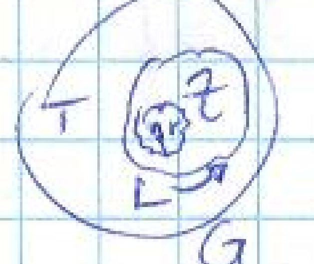
$$z(t)=a+r\cdot e^{it}$$
$$0\le t\le 2\pi$$

$$\oint_{L^+=K_r}\frac{1}{(z-a)}\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{r\cdot e^{it}}\,r\cdot i\cdot e^{it}\,dt=i\cdot\int_0^{2\pi}dt=\underline{2\pi i}$$

Összefoglalva:
$$\boxed{\oint_{L^+}(z-a)^n\,dz=\begin{cases}0 & \text{ha } n\neq -1\\ 2\pi i & \text{ha } n=-1\end{cases}}$$

# Cauchy-integrál-formula

Tétel: Ha $f(z)$ reg. egyszeresen összefüggő $T$-ben és határán ($G$-n).



$\Rightarrow$

$\forall z\in T$:
$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi}$$

Biz: $f(z)$ $z$-ben folytonos $\Rightarrow \forall\varepsilon>0:\exists K_r(z):|f(\xi)-f(z)|<\varepsilon$ // $\xi\in K_r$

$$\int_{G^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\int_{K_r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\oint_{K_r^+}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,d\xi+\oint_{K_r^+}\frac{f(z)}{\xi-z}\,d\xi$$

körön

$$\left|\oint_{K_r}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,d\xi\right|\le\left|\oint_{K_r}\frac{|f(\xi)-f(z)|}{|\xi-z|}\,d\xi\right|+f(z)\cdot\underbrace{\int_{K_r^+}\frac{1}{\xi-z}\,d\xi}_{2\pi i}$$

$$\le\left|\oint_{K_r}\frac{\varepsilon}{r}\right|=\varepsilon\cdot 2\pi\to 0$$

TÉTEL /ÁLTALÁNOSÍTOTT CAUCHY-INTEGRÁL FORMULA/

Ha $f$ reguláris egyszeresen összefüggő $T$-ben és $G$ határán, ha ($\varepsilon\to 0$) akkor
$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{G^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi\quad(n=1,2\ldots)$$

# Komplex függvénysorok!

(1) $f_1(z) + f_2(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$

$$S_m(z) = \sum_{n=1}^{m} f_n(z)$$

Értelmezés: (1) sor egy adott $z_0$-ban konvergens, ha $S_m(z_0) \to S(z_0)$:

pontban konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0) = S(z_0)$

(1) sor T tartományban konvergens: ha konvergens T $\forall$ pontjában

Konvergencia-tartomány: olyan pontok halmaza, ahol a sor konvergens
jele: KT

Összegfüggvény: $z \in KT$: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = S(z)$

(1) sor adott $z_0$-pontban abszolút konvergens: ha $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z_0)|$ konvergens

Ha egy sor absz. konvergens $\Rightarrow$ konvergens is.

Egyenletes konvergencia: (1)-sor D-n egyenletesen konvergál S(z)-hez, ha $\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) : |f_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ ($n \geq N$ és $z \in D$)

abszolut egyenletes konvergencia: (1)-sor D-n absz. egyenletesen konvergens ha:

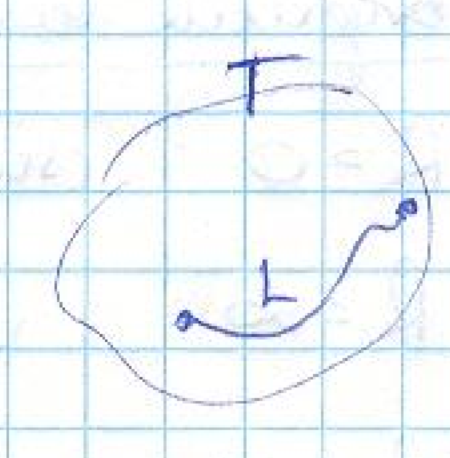
$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ egyenletesen konvergens D-n.

## Összegfüggvény tulajdonságai

1. Tétel: /folytonosság/

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ (egyenletes T-ben) és ha $f_n(z)$ folytonosak T-ben $(\underbrace{n = 1, 2, \dots}_{\forall n\text{-re}}) \Rightarrow f(z)$ folytonos T-ben.

2) Tétel: (Integrálhatóság)




$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z) \quad \text{(egyenletes } T\text{-ben)}$$

$f_n(z)$ folytonosak egy adott rektifikálható $L$-n $(n=1\dots)$

akkor: $$\boxed{\int_L f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(z)\,dz}$$ tagonként integrálható

3) Tétel: (diffhatóság)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z) \quad /\text{egyenletes } T\text{-ben}/$$

Ha $f_n(z)$ reguláris $T$-ben $(n=1,2,\dots)$ $\Rightarrow$ $f(z)$ is reguláris $T$-ben és tagonként deriválható: $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$

és $$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1} f_n^{(k)}(z)$$

# Hatványsorok

## Pozitív kitevőjű hatványsorok:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Konvergencia-sugár:

gyök-krit. $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ hányados-krit. $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$

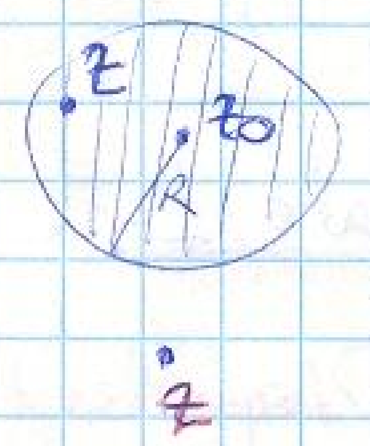
feltéve, hogy a nevezőben lévő határértékek léteznek és nem $0$

Konvergencia tart (KT)

a) $R=0$: csak $z_0$-ban konvergens $KT=\{z_0\}$

b) $R=\infty$ minden pontban konvergens $KT=\mathbb{C}$

c) $0<R<\infty$:

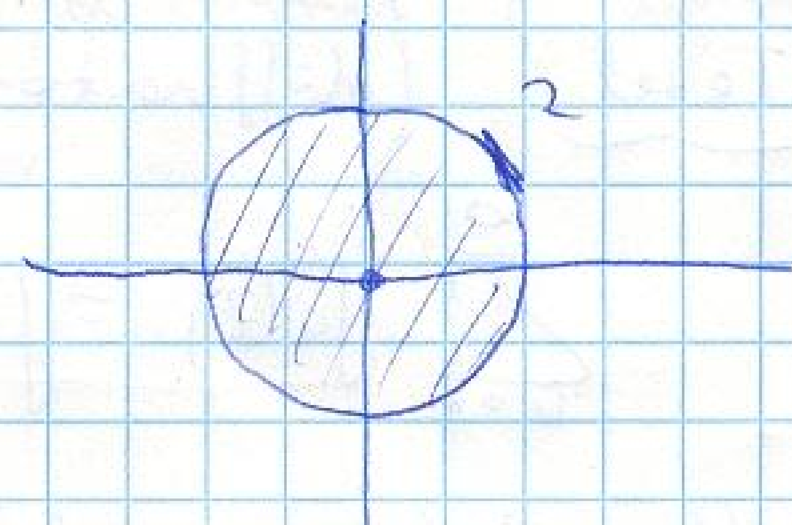


$|z-z_0|<R$ konvergens

$|z-z_0|>R$ divergens

$|z-z_0|=R$ ? /Nem tudjuk/ /csak úgy kell vizsgálni/

pl: $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot \frac{1}{2^n}$



$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}}=2$$

# Negatív kitevőjű hatványsorok /reciprok-sorok/

Negatív kitevőjű hatványsorok (reciprok-sor)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z-z_0)^n}=\sum_{k=-1}^{-\infty} b_{-k}(z-z_0)^k \qquad (k=-n)$$

Konvergencia-sugár:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}} \qquad \left(R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{|b_n|}{|b_{n+1}|}}\right)$$

$$r=\frac{1}{R}$$

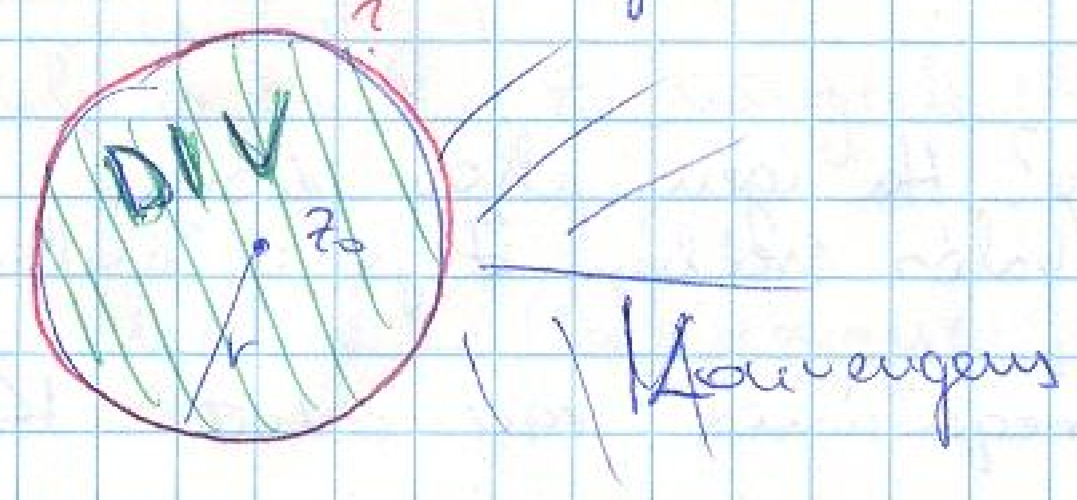
# Konvergencia - tart (KT)

r konvergencia sugár

a) $r = 0$ $z \neq z_0$ pontban konvergens

b) $r = \infty$ sehol sem konvergens

c) $0 < r < \infty$ :




konvergens : körön kívül
divergens : —"— belül
? : körön

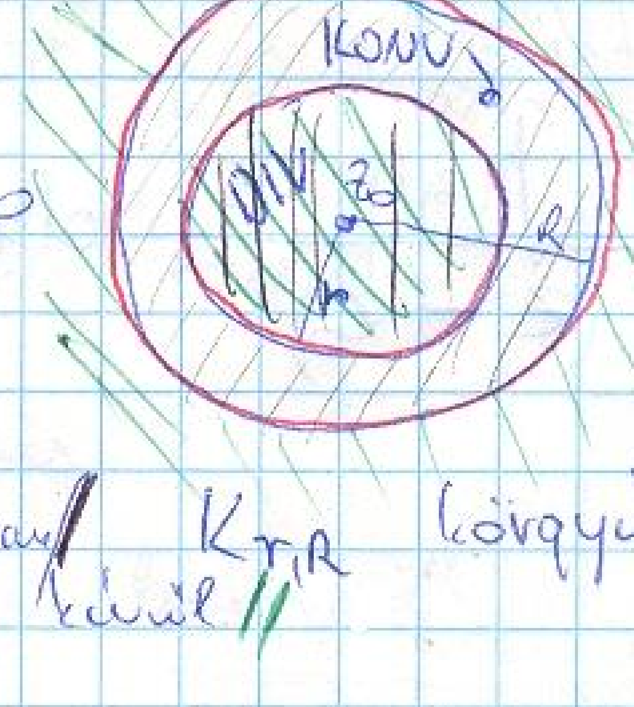
# Kombinált sor:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \underset{a_n}{c_n} (z-z_0)^n}_{\text{poz. kitevőjű hatványsor}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \underset{b_n}{c_{-n}} \frac{1}{(z-z_0)^n}}_{\text{neg. kitevőjű hatványsor}}$$

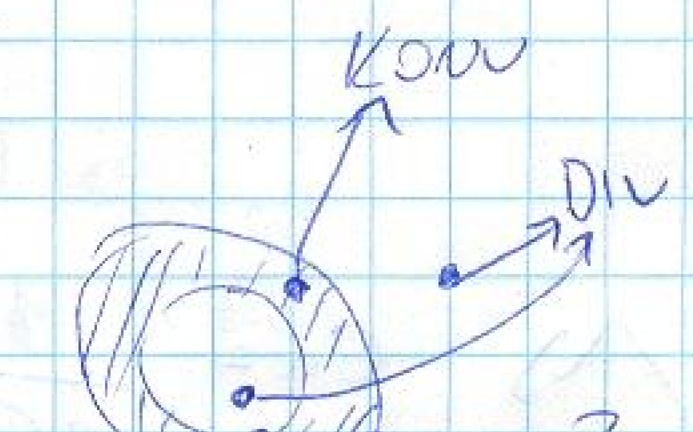
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \downarrow R \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z-z_0)^n} \downarrow r$$

KT :

a) $0 \leq r \leq R \leq \infty$




=




konvergens : $z \in K_{r,R}$ /gyűrűn belül van/ $K_{r,R}$ körgyűrű
divergens : z körgyűrűn kívül //
? : határon //

b) $r = R$ körön : kérdéses ?
többi pontban divergens !

c) $r > R$ : sehol sem konvergens

# TAYLOR - sor

**Ért:** Legyen $f(z)$ reg. $z_0$-pontban:

$\rightsquigarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$ az $f$ fv $z_0$-pont körüli Taylor-sora

**Kérdés:** Konvergens-e? Ha igen, akkor hova?

/Valós esetben $\exists$ fv: Taylor sora nem konvergens/

**TÉTEL:** Ha $f(z)$ reguláris egy adott $K_R(z_0)$-ban, akkor /Taylor-sorba fejthető/


$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

# Laurent - sor /csak komplex fv-ban/

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = f(z) \Bigg/ \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad z \in K_{r,R}(z_0)$$


$f(z)$ benne a körgyűrűben

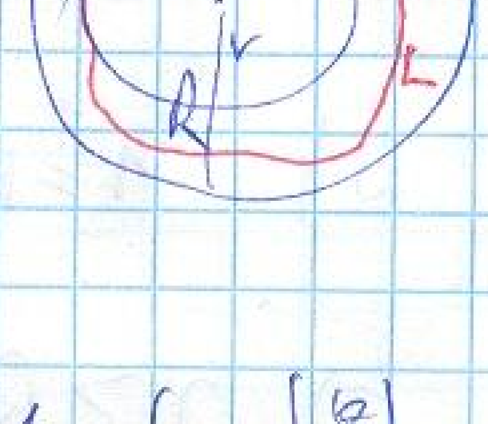
L: gyűrűben haladó zárt, rektifikálható görbe

$c_n = ?$

$\Big/ \int$

$\rightsquigarrow$ $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

**Fordítva:** $f(z)$ : reguláris $K_{r,R}(z_0)$-ban




$\rightsquigarrow$ igazolható, hogy „köv. sorba kifejthető"

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \quad (1) \quad \text{ahol} \quad c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz \quad (2)$$

Laurent sor