FOLYTATÁS ...

2007. 05. 14.
HÉTFŐ

ELŐADÁS

ismétlés

$f(z)$ differenciálható egy pontban (ill. tartományban)
reguláris 1 pontban (ill. tartományban)
szinguláris (nem reg.)
izolált szinguláris pont: z_0 szinguláris, $\exists K_\varepsilon(z_0)$, ha $z \in K_\varepsilon(z_0)$ és $z \neq z_0$

z_0 pont körüli Taylor sor
$f(z)$ analitikus z_0-ban ha $\exists K_\varepsilon(z_0)$ ugyanaz, mint reguláris z_0-ban

IZOLÁLT SZINGULÁRIS PONTOK OSZTÁLYOZÁSA

z_0 egy $f(z)$ fv. izolált szinguláris pontja:

a) megszüntethető: ha $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = A$ $(A \in \mathbb{C})$, de nem folytonos z_0-[ban]

pl: $f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & \text{ha } z \neq 0 \\ 0, & \text{ha } z = 0 \end{cases}$, $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq f(0)$

$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$: z_0 megszüntethető izolált szing pontja $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Laurent sora nem tartalmaz negatív kitevőjű tagokat

b) z_0: pólus ha $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

Pólusok rendje: $n = 1, 2 \dots$

z_0: n-edrendű pólus: ha pólus $\left(\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty\right)$ és

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \quad (A \in \mathbb{C}, A \neq 0)$$

pl: $f(z) = \frac{1}{z-1}$ $z_0 = 1$ pólus

$(z-1) f(z) = 1$ véges határérték $z_0 = 1$-ben, tehát elsőrendű pólus

Laurent sorából el lehet dönteni, hányadrendű:

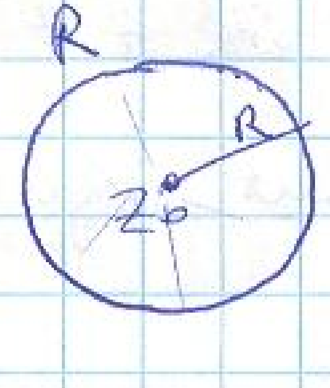
$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (c_{-n} \neq 0)$$

c) Lényeges szinguláris pont: ha $\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$ / se véges, se végtelen /

$\Leftrightarrow$ L-sora tart. végtelen sok negatív kitevőjű tagokat tartalmaz

RESIDUM.

z_0: izolált sing. pontja $f(z)$-nek, lehát $\exists$ R sugarú kör (körgyűrű $K_{0,R}(z_0)$)



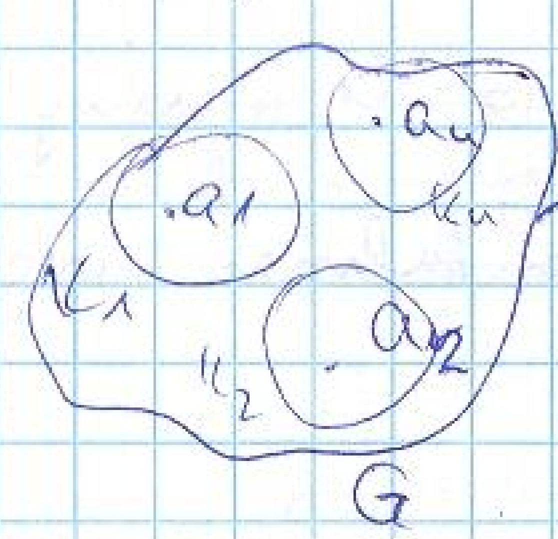
$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$$

$(k = 0, \pm 1, \dots)$

Érť: $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz = \operatorname{Res} f(z_0) = \operatorname{Res} f\Big|_{z=z_0} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$

Mire használjuk? Residuum-tétel

Ha $f(z)$ reguláris egy G zárt, rektifikálható görbén és belsejében véges sok $a_1, \dots, a_n$ izolálásos sing. pont kivételével



$\Rightarrow \oint_{G^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(a_k)$

ÁLTALÁNOS CAUCHY TÉTEL

$$\oint_{G^+} f(z)\,dz = \sum_{l=1}^{n} \oint_{K_l^+} f(z)\,dz = \sum_{l=1}^{n} 2\pi i \operatorname{Res} f(a_k)$$

RESIDUUMOK KISZÁMÍTÁSA:

a) Ha a elsőrendű pólus $\Rightarrow \operatorname{Res} f(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$

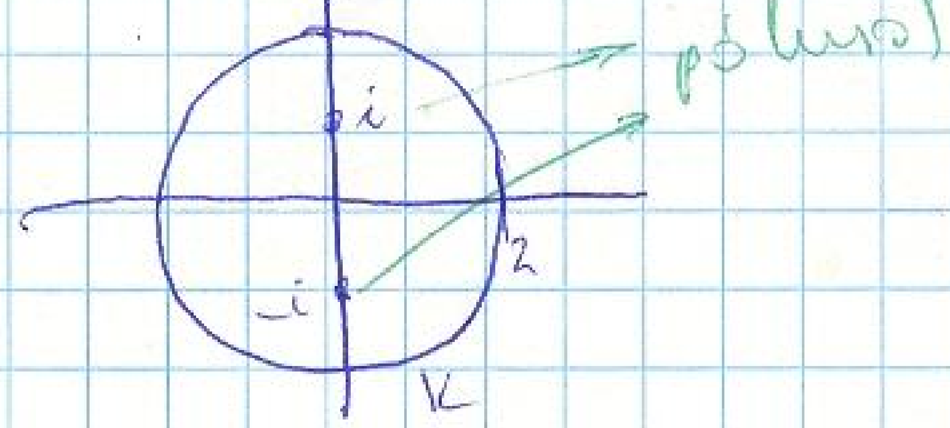
$f(z) = c_{-1}(z-a) + c_0 (z-a)^0 + c_1 (z-a)^1 \dots \quad / (z-a)$

$\lim (z-z_0) f(z) = a_{-1}$

▶1) „a" n-edrendű pólus:

$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z) \right]$$

$$\oint \overbrace{\frac{1}{z^2+1}}^{f(z)} dz =$$



$K_2(0) = K$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

$$= 2\pi i \left(\operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(-i) \right)$$

$$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

$$\operatorname{Res} f(-i) = \lim_{z \to -i} \underbrace{(z-(-i))}_{z+i} f(z) = \frac{1}{-2i}$$

$$= 2\pi i \left(\operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(-i) \right) = \emptyset$$

TANAGYAG :) VÉGE !! 17^{54}

Rizsa: $\underbrace{\text{ZH, PÓTZH, GYAK IV, PÓT 7}}_{\text{ALÁÍRÁS}}$

VIZSGA: írásb. és szóbeli