Gyakorlatvezető: Pitrik József pitrik@math.bme.hu H 301: 10^{00}–11^{00}

I. Gyakorlat

2007.02.15.

Differenciál egyenletek:

$$F\left(y(x)^{n}; y(x)^{n-1}; \ldots; y'(x), y(x), x\right) = 0$$

$y(x)^n$ ⇒ n-edrendű DE

∄ x-nek fv-e ⇒ HOMOGÉN DE

∃ x-nek fv-e ⇒ INHOMOGÉN DE

$y(x)$ fv. megoldás, ha behelyettesítve azonosságot kapunk

n-edrendű ⇒ $y(x)$ tartalmazhat n db konstanst ⇒ általános megold.

$$\left.\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_1) &= y_1 \end{aligned}\right\} \text{ kezdeti feltételek}$$

ha az összes elő van írva, akkor partikuláris megoldást kapunk

Szétválasztható változójú diffegyenletek:

① $y' = \frac{x}{y} e^{2x-3y^2}$ $y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} e^{2x} \cdot e^{-3y^2}$$

$y = y(t)$, $x = x(t)$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$$\int e^{3y^2} y\, dy = \int x e^{2x} dx$$

$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{1}{6} e^{3y^2} = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

$$\int e^{3y^2} y\, dy = \frac{1}{6} \int 6y e^{3y^2} dy = \frac{1}{6} e^{3y^2} + C$$

$$\left(e^{3y^2}\right)' = e^{3y^2} \cdot 6y$$

$$\int x e^{2x} dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

$u = x$ $\quad u' = 1$

$v' = e^{2x}$ $\quad v = \frac{e^{2x}}{2}$

példa(2) A radium bomlási sebessége egyenesen arányos a pill-i radium mennyiségével. A Ra felezési ideje $T_{1/2} = 1600$ év
A kiindulási anyag hány %-a bomlik le 100 év alatt?

Ra mennyisége t időpillanatban $R(t) \geq 0$ $k > 0$

$$\frac{dR}{dt} = -k R(t)$$ (lineáris, hiányos 1-es tag)

bomlási együttható

$t = 0$ $R(0) = R_0$

$$\int \frac{dR}{R} = \int -k\,dt$$

(k>0) $\ln R = -kt + \ln C$

$R(t) = C e^{-kt}$ (ált megold)

$t = 0 \Rightarrow R(0) = C e^{-k \cdot 0} \Rightarrow \boxed{C = R_0}$

$\boxed{R_{(t)} = R_0 \cdot e^{-kt}}$ partikuláris megold

$t = 1600$ $R(1600) = \frac{R_0}{2} = R_0 \cdot e^{-k\,1600}$

$2 = e^{k\,1600} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\ln 2}{1600}}$

$\boxed{R_{(t)} = R_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{1600} t}}$

$t = 100$ $R(100) = R_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{16}} = R_0 \cdot e^{-0{,}0433}$

$\frac{R(100)}{R_0} = e^{-0{,}04333} = 0{,}958 \Rightarrow$ 4,2% bomlik le példa (3)

$$y^2-1=(2y+xy)y'$$

$$y^2-1=y(2+x)\frac{dy}{dx}$$

$$\left[\int\frac{f'}{f}=\ln|f|+C\right]$$

$$\int\frac{1}{2+x}dx=\int\frac{y}{y^2-1}dy \implies \int\frac{y}{y^2-1}dy=\frac{1}{2}\int\frac{2y}{y^2-1}=\frac{1}{2}\ln|y^2-1|+c$$

$$\ln|2+x|=\frac{1}{2}\ln|y^2-1|+\ln c$$

$$2+x=c\sqrt{y^2-1}$$

példa (4)

$$xy'+y=y^2 \qquad y(2)=-3$$

$$x\frac{dy}{dx}=y^2-y$$

$$\int\frac{dy}{y^2-y}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y^2-y}=\int\frac{dy}{y(y-1)}=\int\left(-\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}\right)dy=$$

$$\frac{1}{y(y-1)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y-1}=\frac{A(y-1)+By}{y(y-1)}=$$

$$=\frac{y(A+B)-A}{y(y-1)} \qquad \left.\begin{matrix}A+B=0\\ -A=1\end{matrix}\right\}=\boxed{\begin{matrix}A=-1\\ B=1\end{matrix}}$$

$$=-\ln|y|+\ln|y-1|+\ln C=\boxed{\ln C\cdot\frac{y-1}{y}}$$

$$\ln C\cdot\frac{y-1}{y}=\ln x$$

$$\boxed{C\frac{y-1}{y}=x} \qquad \left.\begin{matrix}x=2\\ y=-3\end{matrix}\right\} C\frac{-3-1}{-3}=2$$

$$\boxed{C=\frac{6}{4}}$$

partikuláris megold.: $\underline{\underline{\frac{3}{2}\cdot\frac{y-1}{y}=x}}$

példa (5)

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{y-2}{xy} \qquad \begin{matrix}x\neq 0\\ y\neq 0\end{matrix}$$

a) $y(1)=2$
b) $y(1)=3$
c) $y(-1)=-3$

1) $y=2$ megold.

2) $\int\frac{y}{y-2}dy=\int\frac{dx}{x}$ $\qquad y\neq 2$

$$\int\frac{y-2+2}{y-2}dy=\int\left(1+\frac{2}{y-2}\right)dy=y+2\ln(y-2)+C$$

$$\boxed{y+2\ln|y-2|+C=\ln|x|}$$ (ált. megold.)

a) $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{y=2}}$

b) $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=3 \end{matrix}\right\} \quad 3+2\ln|3-2|+c=\ln 1$

$$\boxed{c=-3}$$

$$\underline{\underline{y+2\ln|y-2|-3=\ln|x|}}$$

c) $\left.\begin{matrix} x=-1 \\ y=-3 \end{matrix}\right\} \quad -3+2\ln|-3-2|+c=\ln|-1|$

$$c=3-2\ln 5$$

$\hookrightarrow$ behely...

<u>Szétválasztható változójúra visszavezethető DE:</u>

<u>Elm. ~~[illegible]~~</u>

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \quad x\neq 0$$

$$z:=\frac{y(x)}{x}$$

$$y=zx$$

$$y'=z'x+z$$

$$z'x+z=f(z)$$

$$\frac{dz}{dx}x=f(z)-z$$

$$\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}$$

<u>példa (6)</u>

$$2x^2y'=x=x^2+2xy-y^2 \quad y(1)=2$$

$x\neq 0.$

$$2y'=1+2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$z=\frac{y}{x} \Rightarrow y'=z'x+z$$

$$2z'x+2z=1+2z-z^2$$

$$\int\frac{2}{1-z^2}\,dz=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|$$

$$\int\frac{2}{1-z^2}dz=\int\frac{2}{(1-z)(1+z)}\,dz \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{(1+z)(1-z)}=\frac{A}{1-z}+\frac{B}{1+z}=\frac{A(1+z)+B(1-z)}{(1-z)(1+z)}$$

$$\begin{matrix} z=-1 & 2=2B & \Rightarrow A=1 \\ z=1 & 2=2A & \Rightarrow B=1 \end{matrix}$$

$$\ominus \int\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)dz = -\ln|1-z| + \ln|1+z| + \ln C = \ln C\frac{1+z}{1-z}$$

$$x = C\frac{1+z}{1-z} \quad \boxed{\Rightarrow x = C\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}} \qquad \left.\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}\right\} \quad 1 = C\frac{1+2}{1-2} \quad \boxed{C = -\frac{1}{3}}$$

példa (7)

$$2xyy' = y^2 - x^2 \qquad \begin{matrix} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix}$$

$$2\frac{y}{x}y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1$$

$$2y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{\frac{y}{x}}$$

$$y' = z'x + z$$

$$2z'x + 2z = z - \frac{1}{z}$$

$$2\frac{dz}{dx}x = -z - \frac{1}{z} = -\frac{z^2+1}{z}$$

$$\int \frac{2z}{z^2+1}dz = \int \frac{-dx}{x}$$

$$\ln(z^2+1) + \ln C = -\ln|x|$$

$$C(z^2+1) = \frac{1}{x}$$

$$\underline{\underline{C\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right) = \frac{1}{x}}}$$

Elm.

$$y' = f(Ax+By+C)$$

$$z = Ax+By+C$$

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{z}{B} - \frac{C}{B}$$

$$y' = -\frac{A}{B} + \frac{z'}{B}$$

$$-\frac{A}{B} + \frac{z'}{B} = f(z) \quad \text{szétvál.}$$

példa (8)

$$y' = (y+x-1)^2$$

$$z = (y+x+1)$$

$$y = z - x + 1$$

$$y = z - x - 1$$

$$y' = z' - 1$$

$$z' - 1 = z^2$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$$

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx$$

$$\operatorname{arctg} z + C = x$$

$$z = \operatorname{tg}(x+c)$$

$$\underline{\underline{y = \operatorname{tg}(x+C) - x - 1}}$$