2007. 03. 01. csütörtök III Gyakorlat 3. hét

Szubszcesszív approximáció (Picard)

példa (1)

$y' = 2xy - 2x^2 + 1$ $y(0)=2$ $y_0 = y(0)$

$y_0 = 2$ $y_n = y_0 + \int_0^x y'\big|_{y=y_{n-1}} dx$

$$y_1 = 2 + \int_0^x (2x \cdot 2 - 2x^2 + 1)dx =$$

$$= 2 + 2x^2 - 2\frac{x^3}{3} + x = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + x + 2$$

$$y_2 = 2 + \int_0^x \Big[\underbrace{2x\left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + x + 2\right)} - 2x^2 + 1\Big]dx =$$

$$-\frac{4}{3}x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 + 1$$

$$= 2 - \frac{4}{15}x^5 + x^4 + 2x^2 + 1 = -\frac{4}{15}x^5 + x^4 + 2x^2 + 3$$

példa (2)

$$y' = xy \qquad y(0) = 1 \qquad y_0 = 1$$

$$y_1 = 1 + \int_0^x x\,dx = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x x\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)dx = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x x\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right)dx = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48}$$

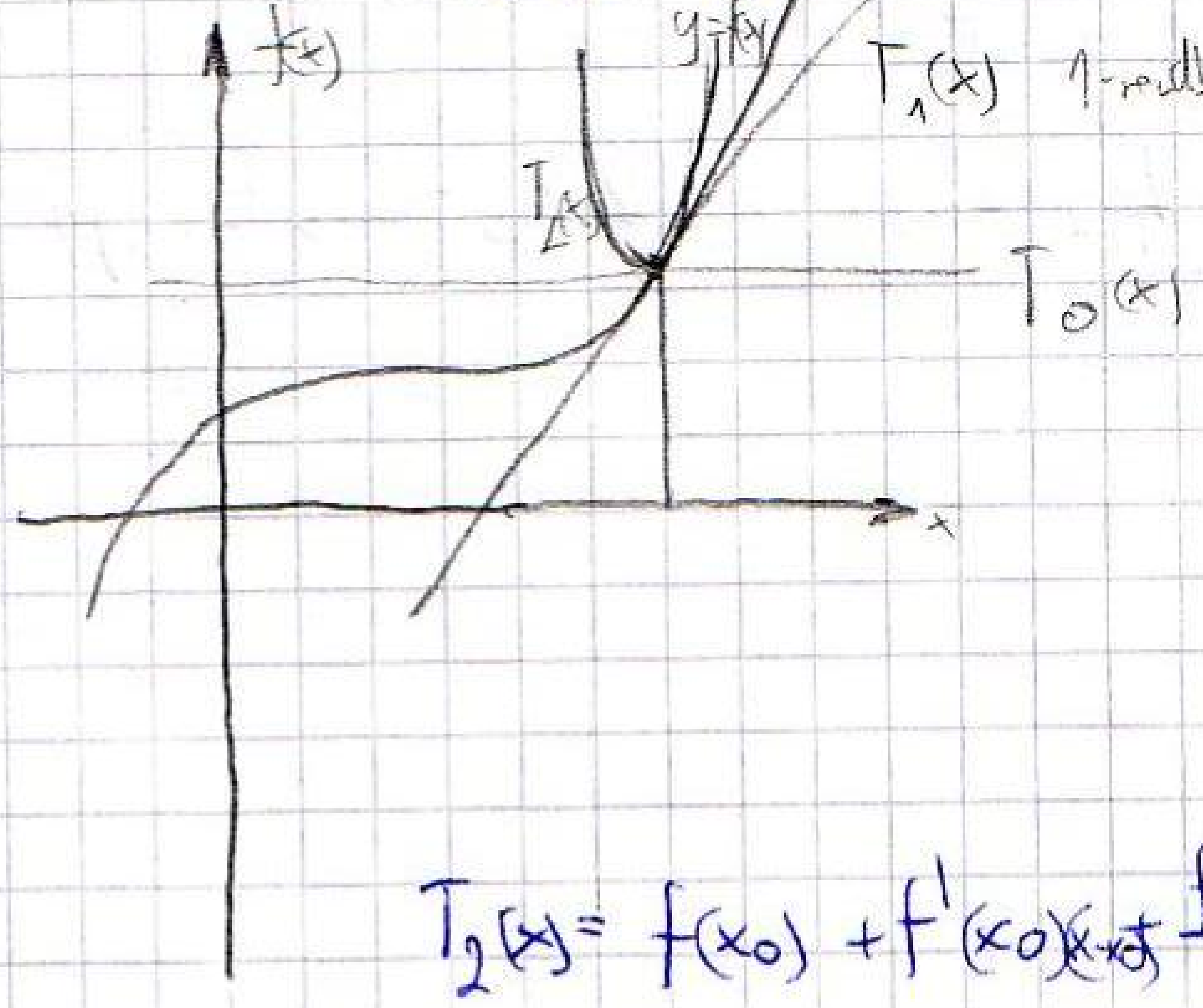
Megoldás Taylor sorral:

$y = f(x)$ x_0 körüli Taylor-sor

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

n-edfokú Taylor polinom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$



1-rendben illeszkedik : deriváltja = Tox

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

$T_2(x_0) = f(x_0)$ $\qquad$ $T_2'' \cancel{(x)} = f''(x_0)$

$T_2'(x_0) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)$ $\qquad$ $T_2''(x_0) = f''(x_0)$

$T_2'(x_0) = f'(x_0)$

példa (3) (elsőrendű diff. egyenlet)

$y' = x^2 + y \qquad y(0) = 1 \qquad x_0 = 0$ körüli Taylor sor

$y'(0) = 1$

$x = 0$
$y = 1$

$y'' = 2x + y' \Rightarrow y''(0) = 1$

$y''' = 2 + y'' \Rightarrow y'''(0) = 3$

$y^{(4)} = y''' \Rightarrow y^{(4)}(0) = 3$

$\vdots$

$y^{(n)}(0) = 3 \qquad n \geq 3$

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \dots =$$

példa (4)

$y'' - 2xy' + 2y = 0$

$\boxed{x_0 = 0 \text{ körüli}}$

$$\boxed{y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3$$

$$(2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \dots) - 2c_1 x - 4c_2 x^2 - 6c_3 x^3 - 8c_4 x^4 - 10c_5 x^5 \dots \} +$$
$$+ 2c_0 + 2c_1 x + 2c_2 x^2 + 2c_3 x^3 + 2c_4 x^4 + 2c_5 x^5$$

$$(2c_0 + 2c_2) x(6c_3 - 2c_1 + 2c_1) + x^2(12c_4 - 4c_2 + 2c_2) + x^3(20c_5 - 6c_3 + 2c_3) + \dots = 0$$

$c_0 = c_2$	Tfh $c_0 = c$
$c_3 = 0$	$c_1 = 0$
$6c_4 = c_2$	$y = c - cx^2 - \frac{c}{6}x^4 \dots$
$c_5 = 0$	$y = c\left(1 - x^2 - \frac{x^4}{6} \dots\right)$
$\vdots$	

n-ed rendű lin. állandó együtthatós DE

együtthatós konst

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = h(x)$$

$a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \ldots, n-1$

megold

1. (H)-egyenlet megold: $h(x) = 0 \Rightarrow y_H$ (ált megold: n db konstanst tartalmaz)
2. (IH)-egyenlet partikuláris megoldásának keresése $\Rightarrow y_{ip}$

$\Rightarrow$ általános megold: $\boxed{y_{ált} = y_H + y_{ip}}$

1. Homogén egyenlet megold

$$y^{n} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$y = e^{\lambda x}$

$y' = \lambda e^{\lambda x}$

$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x} \Rightarrow$ pozitív

$$\boxed{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a\lambda + a_0 = 0}$$ KARAKTERISZTIKUS EGYENLET

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ 1x-es gyök $\Rightarrow ce^{\lambda x}$
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ $\alpha \pm i\beta$ 1x-es gyök $\Rightarrow e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$
3. $\lambda \in \mathbb{R}$ mx-es gyök (belső rezonancia) $\Rightarrow e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_m x^{m-1})$
4. $\lambda = \alpha \pm i\beta$ mx-es gyök $\Rightarrow e^{\alpha x}\left(\cos\beta x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_m x^{m-1}) + \sin\beta x((c_{m+1} + c_{m+2}x + \ldots + c_{2m}x^{m-1})\right)$

példa(5)

$y''' + 2y'' + y' = 0$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$

$\lambda(\lambda+1)^2 = 0$

$\lambda = 0$ egyszeres $\Rightarrow c_1 e^{0x} = c_1$

$\lambda = -1$ kétszeres $\Rightarrow e^{-x}(c_2 + c_3 x)$

$$\boxed{y_H = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}}$$

példa (6)

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0$$

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 52 = -36$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm 6j}{2} = -2 \pm 3j$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow c_1$$

$$\lambda = -2 \pm 3j \Rightarrow e^{-2x}(c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x)$$

$$\boxed{y_H = c_1 + c_2 \cos 3x \cdot e^{-2x} + c_3 \sin 3x \, e^{-2x}}$$

példa(7) Mi van ha megold. ismerjük és kell a diff egyenlet? ⇒ Ekkor kezdjük a ④-es egyél alapján

megoldás: a) $7x$, $\sin 5x$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix}\alpha = 0 \\ \beta = 5 \\ m = 1\end{matrix}\right\}$ $\lambda = \pm 5$: 1x-es gyök

(elsőrű legkisebb kell)

$7x \downarrow$ $\left.\begin{matrix}\alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ m = 2\end{matrix}\right\}$ $\lambda = 0$: 2x-es gyök

$$\lambda^2(\lambda - i5)(\lambda + i5) = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^2 + 25) = 0$$

$$\lambda^4 + 25\lambda^2 = 0$$

$$\underline{\underline{y^{(4)} + 25y'' = 0}}$$

Inhomogén eset

• ~~[illegible]~~ próba fv. módszer

$$y'' - 5y' + 6y = 2\sin 2x$$

(gerj)

(H) $y'' - 5y' + 6y = 0$ $\lambda = 2$ $1\times$ gyök $= c_1 e^{2x}$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ $\lambda = 3$ $-''-$ $= c_2 e^{3x}$

$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$$\boxed{y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}$$

(nincs külső rezonancia $2\sin 2x$-len [illegible])

(IH) $y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$!

$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$

$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$

$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 10A\cos 2x + 10B\sin 2x + 6A\sin 2x + 6B\cos 2x = 2\sin 2x$

$\sin 2x$: $\begin{cases} 2A + 10B = 2 \\ 2B - 10A = 0 \end{cases}$ $A = \frac{1}{26}$

$\cos 2x$: $2B - 10A = 0$ $\Rightarrow B = 5A = \frac{5}{26}$

$$y_{ip} = \frac{1}{26}\sin 2x + \frac{5}{26}\cos 2x$$