GYAKORLAT

2007. 05. 17.
CSÜTÖRTÖK

Komplex fv-tan folytatása, a múlt gyak. ⊥ maradására:

SZINGULÁRIS HELYEK:

$f(z)$ z_0 szinguláris helye, ha nem reguláris.

① → megszüntethető szingularitás: /megszüntethető szakadás/

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$$

} Laurent-sor = Taylor sor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

② → pólus z_0-ban

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \pm\infty$$

→ a) n-edrendű pólus, ha létezik $n \in \mathbb{N}^+$

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^n f(z) = A \neq \infty$$

} ⇔ Laurent-sora

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

azaz n db negatív kitevőjű tag

ha $f(z)$-nek z_0 n-edrendű pólusa
⇕
$\frac{1}{f(z)}$-nek z_0 n. szeres zérushelye

→ b) lényeges szingularitás z_0-ban, ha ∄ ilyen n

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \quad \nexists$$

} = Laurent-sora végtelen negatív kitev. tag
⇕
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Példa: **1** polinomos regulárisak

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)} = \frac{z+i}{z^3(z+j)(z-j)}$$

szinguláris helyek:

$z_1 = 0$
$z_2 = -j$
$z_3 = j$

$z = 0$ esetén

$$\lim_{z \to 0} \frac{z+j}{z^3(z+j)(z-j)} = \infty$$

$$\lim_{z \to 0} z^3 \cdot f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z+j}{(z+j)(z-j)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z-j} = \frac{1}{-j} \neq \infty$$

$= j \neq \infty$

tehát $n = 3$-ra véges

$\Rightarrow z = 0$ harmadrendű pólus!

/ 3 negatív kitevőjű tagja van /

$z = -j$ esetén

$$\lim_{z \to -j} \frac{z+j}{z^3(z+j)(z-j)} = \lim_{z \to -j} \frac{1}{z^3(z-j)} = \frac{1}{(-j)^3(-2j)} \neq \infty$$

tehát megszüntethető szingularitás $z = -j$-ben

(Taylor sorba fejthető)

$z = j$ esetén

$$\lim_{z \to j} f(z) = \lim_{z \to j} \frac{z+j}{z^3(z+j)(z-j)} = \lim_{z \to j} \frac{1}{z^3(z-j)} = \infty$$

tehát pólus

$$\lim_{z \to j} (z-j) \frac{z+j}{z^3(z+j)(z-j)} = \frac{1}{j^3} \quad \text{véges} \neq \infty$$

$z = j$-ben elsőrendű pólus

(1db neg. kitevőjű L. sor)

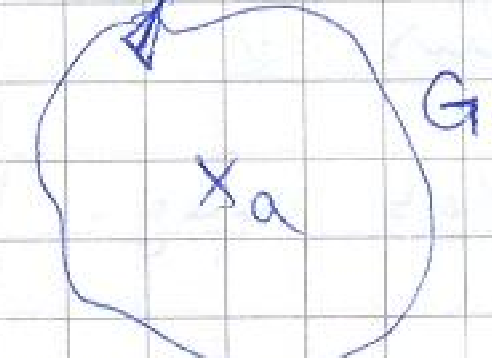
Residuum fogalma

$f(z)$ $z=a$ körüli L sora:

$$f(z) = \sum_k c_k (z-a)^k$$

$$\operatorname*{Res}_{z=a}(f(z)) = c_{-1} \quad \text{(együttható)}$$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_G f(z)\, dz$$



(1) a-ban megszüntethető szakadás, vagy reguláris

$\Rightarrow$ $c_1 = 0$

(2) $z=a$ elsőrendű pólus

$\Rightarrow$ a) $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} \left[(z-a) f(z) \right]$

b) spec. eset

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

- ahol $g(z)$, $h(z)$ reguláris a-ban
- $g(a) \neq 0$
- $h(a) = 0$, de $h'(a) \neq 0$

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

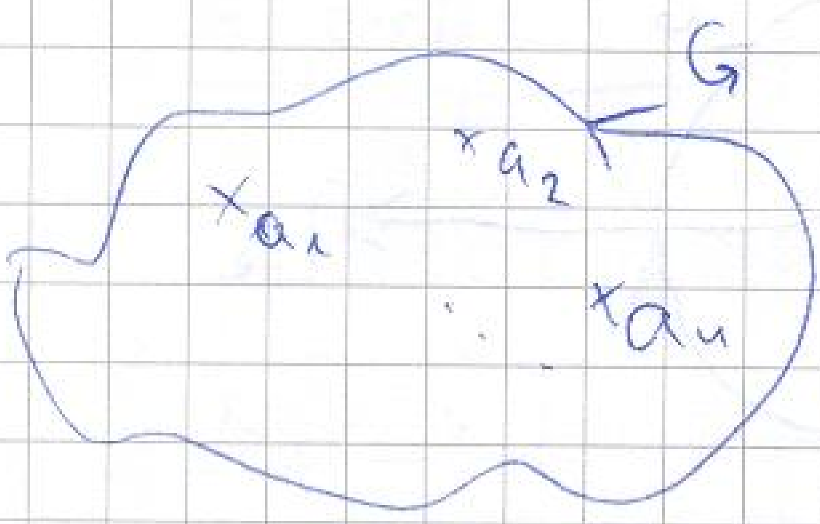
$z = a$

③ n-edrendű pólus esetén

$\Rightarrow$

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z) \right]$$

Minden általánosítható:



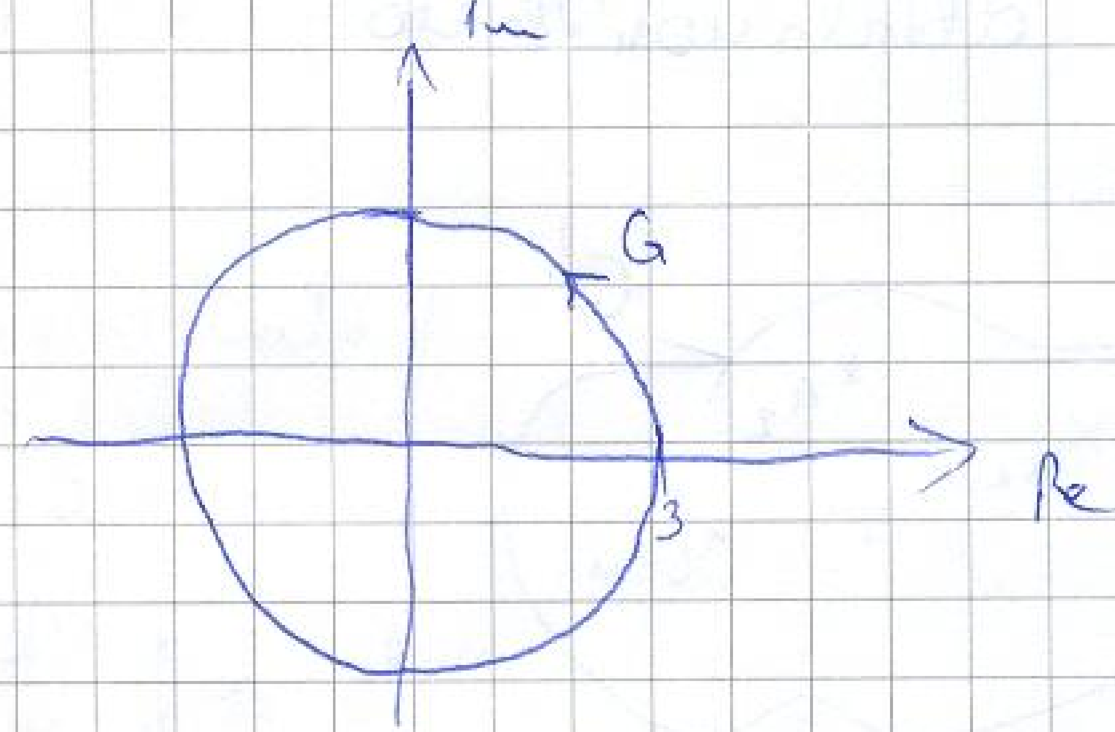
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ szinguláris helyek

$$\oint_G f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z)$$

Példák

(1) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z^2+3z-4)} dz$

$I = \oint_G f(z) dz$



$G: |z| = 3$

a) szinguláris helyek → 0-val osztás: sing

$e^z - 1$ → reg

$\frac{e^z - 1}{z(z^2+3z-4)}$

$z(z^2+3z-4)$ → reg

$z = 0$

$z^2 + 3z - 4 = 0 \quad / (z+4)(z-1) = 0$

$z = -4$
$z = 1$
$z = 0$

$z = \emptyset$ esetén

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z(z^2+3z-4)} = \frac{0}{0} \overset{\text{alakú}}{\underset{\text{L'Hospital}}{=}} \lim_{z \to 0} \frac{e^z}{(z^2+3z-4) + z(2z+3)} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{e^z}{3z^2+6z-4} = -\frac{1}{4} \quad \text{véges!}$$

$z = \emptyset$ -ban megszüntethető

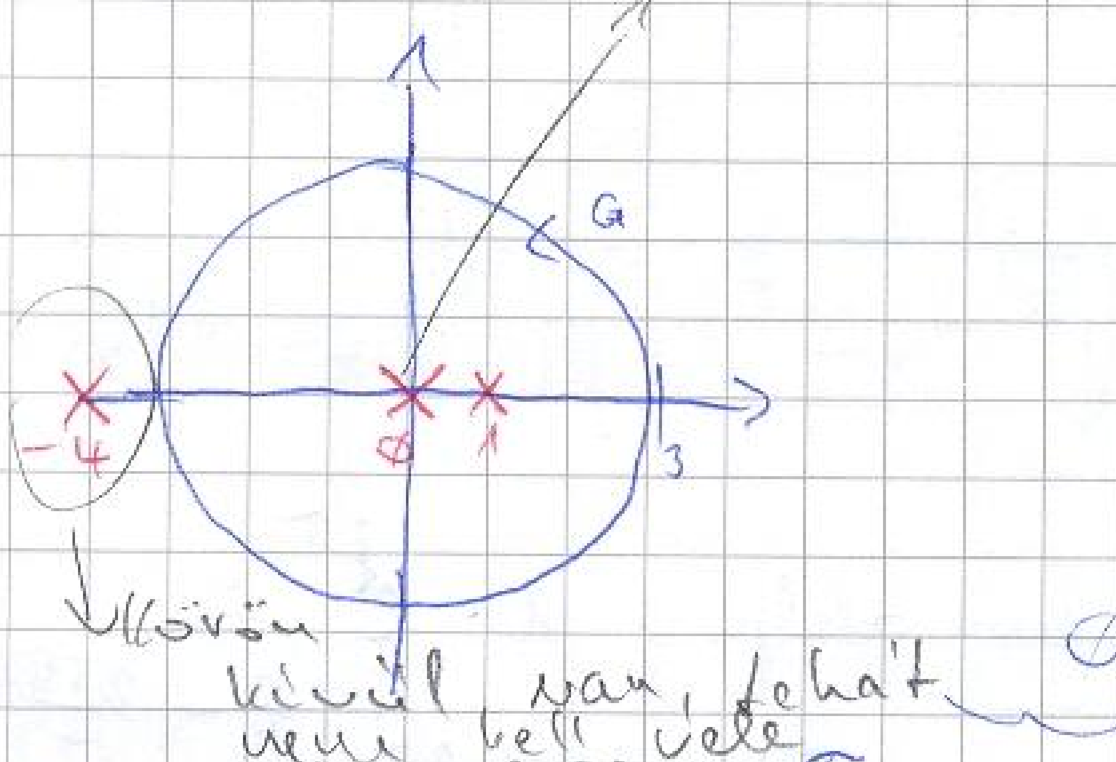
$z = -4$ esetén

pólus van, méghozzá elsőrendű

$z = 1$ esetén

elsőrendű pólus

megszüntethető szakadás Res $= \emptyset$



$$I = \oint_{|z|=3} f(z)\,dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1} f(z) \right]$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1} (z-1) \left[\frac{e^z - 1}{z(z+4)(z-1)} \right] = \frac{e-1}{5}$$

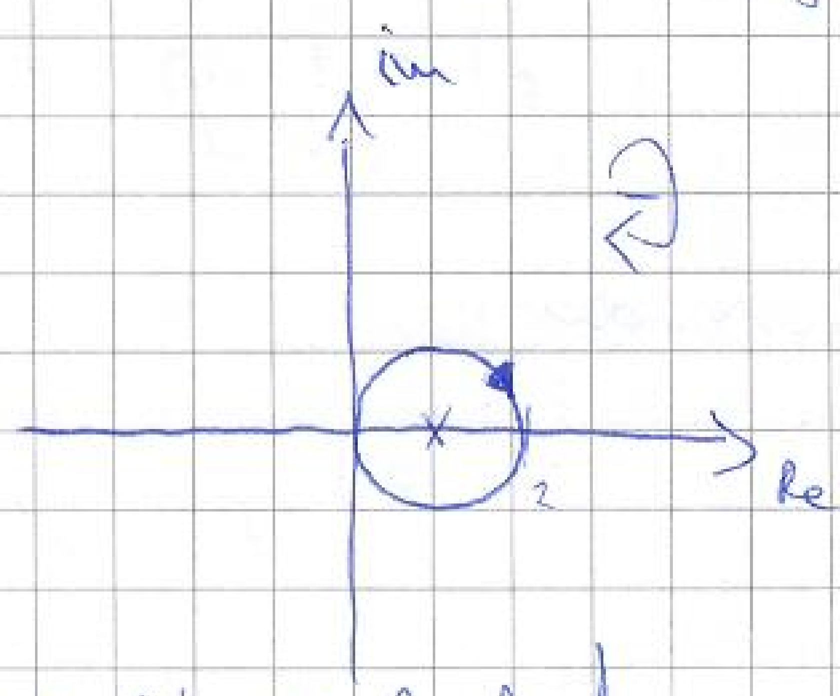
Tehát

$$I = \oint_{|z|=3} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\frac{e-1}{5} \right)$$

(2)

$$\oint_G \frac{1}{z^4+1}\, dz =$$

G : $|z-1| = 1$ negatív irányítással

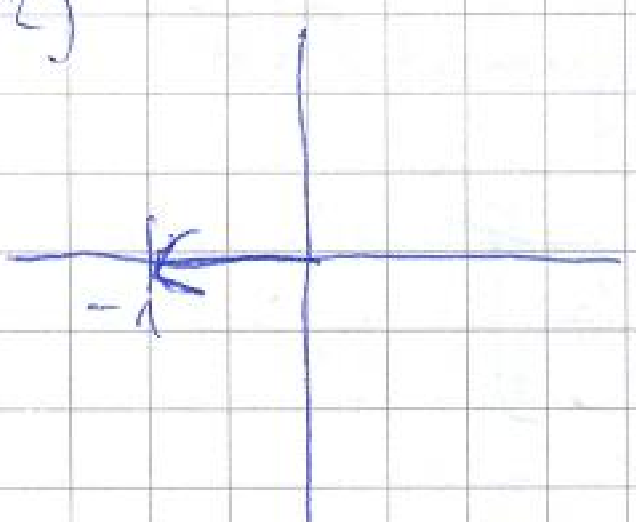


a) szinguláris hely

$z^4 = -1$

1) $z^2 = j$, $-j$

2)



-1 euler alakja: $1 \cdot e^{j\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_k = e^{j\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)}$ $k = 0,1,2,3$

szinguláris helyek:

$z_1 = e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$z_2 = e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{j\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

$z_3 = e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = e^{j\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

$z_4 = e^{j\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$

Általánosan: $z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot e^{i(\varphi + 2k\pi)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ $k = 0,1,\dots,n-1$

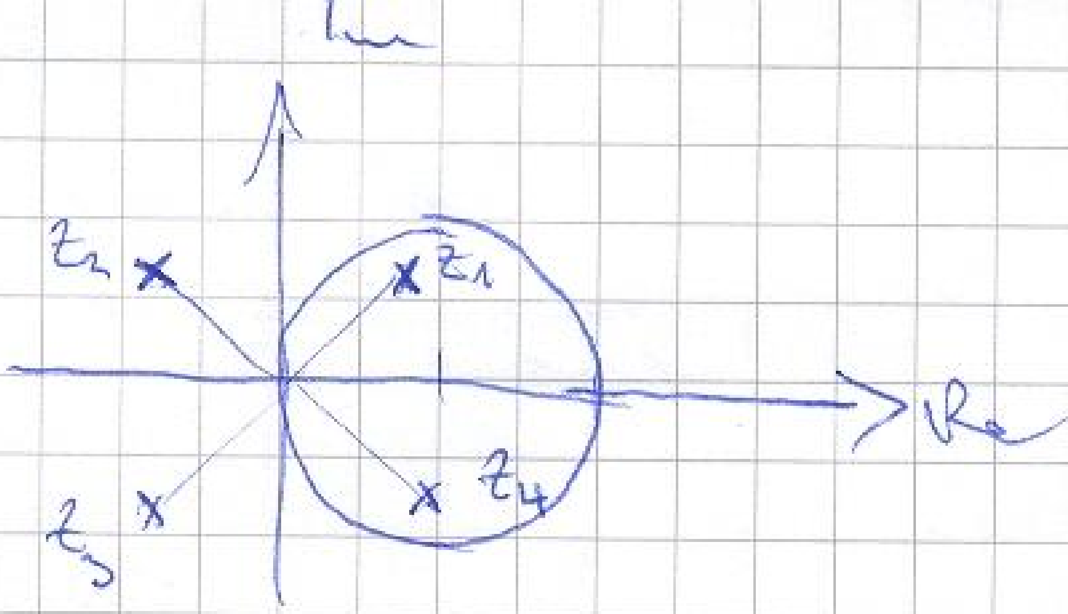
z^4+1 : negyedfokú pol.

(4 zérushely, mind különböző! (1 multiplicitású)

$\frac{1}{z^4+1}$-nek 4 db 1x pólusa van

↓

egyszeres



2 dly Res

$$\operatorname*{res}_{z=e^{j\frac{\pi}{4}}} f(z) =$$

$$= \lim_{z\to e^{j\frac{\pi}{4}}} \left(z - e^{j\frac{\pi}{4}}\right) \frac{1}{\underbrace{z^4+1}_{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}} = \lim_{z\to e^{j\frac{\pi}{4}}} (z-z_2)(z-z_3)(z-z_4) =$$

$$= \lim_{z\to e^{j\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{\left(z-e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z-e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)\left(z-e^{j\frac{7\pi}{4}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(e^{j\frac{\pi}{4}}-e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(e^{j\frac{\pi}{4}}-e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)\left(e^{j\frac{\pi}{4}}-e^{j\frac{7\pi}{4}}\right)} = A$$

$$\operatorname*{res}_{z=e^{j\frac{7\pi}{4}}} f(z) = \frac{1}{\left(e^{j\frac{7\pi}{4}}-e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(e^{j\frac{7\pi}{4}}-e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)\left(e^{j\frac{7\pi}{4}}-e^{j\frac{\pi}{4}}\right)} = B$$

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4+1}\,dz = -2\pi i\,(A+B)$$

(3)

$$\oint_G \frac{e^z}{z^2-1}\,dz =$$

$|z = x + iy|$

$G: |z-\sqrt{3}| + |z+\sqrt{3}| = 4$

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2} + \sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2} = 4$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2} = 4 - \sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2}$$

$$(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 16 - 8\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2} + (x+\sqrt{3})^2 + y^2$$

$$(x-\sqrt{3})^2 - (x+\sqrt{3})^2 - 16 = -8\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2}$$

$$((x-\sqrt{3})+(x+\sqrt{3}))((x-\sqrt{3})+(x+\sqrt{3})) - 16 = -\text{''}-$$

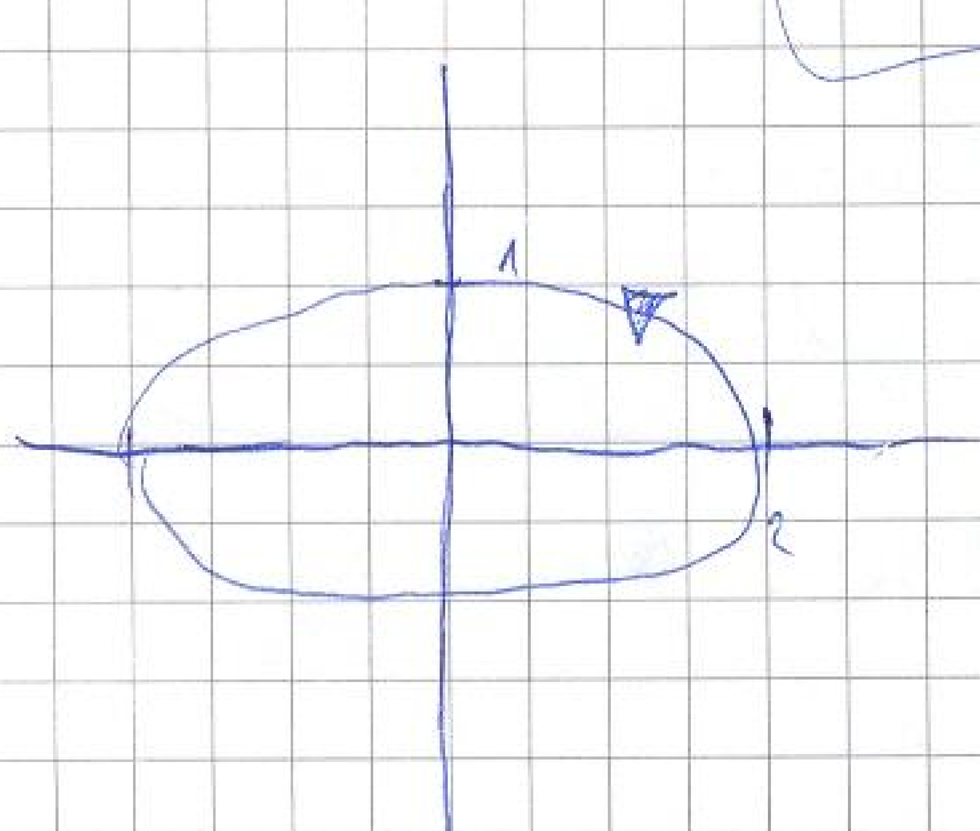
$$(2x)(2\sqrt{3}) - 16 = -\text{''}-$$

$$4x\sqrt{3} - 16 = -8\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2}$$

$$64\left((x+\sqrt{3})^2+y^2\right) = 256 + 128x\sqrt{3} + 48x^2$$

$$4x^2 + 8\sqrt{3}x + 12 + 4y^2 = 16 + 8\sqrt{3}x + 3x^2$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \quad \text{elipsis}$$



$$\frac{e^z}{z^2-1} = \frac{e^z}{(z-1)(z+1)}$$

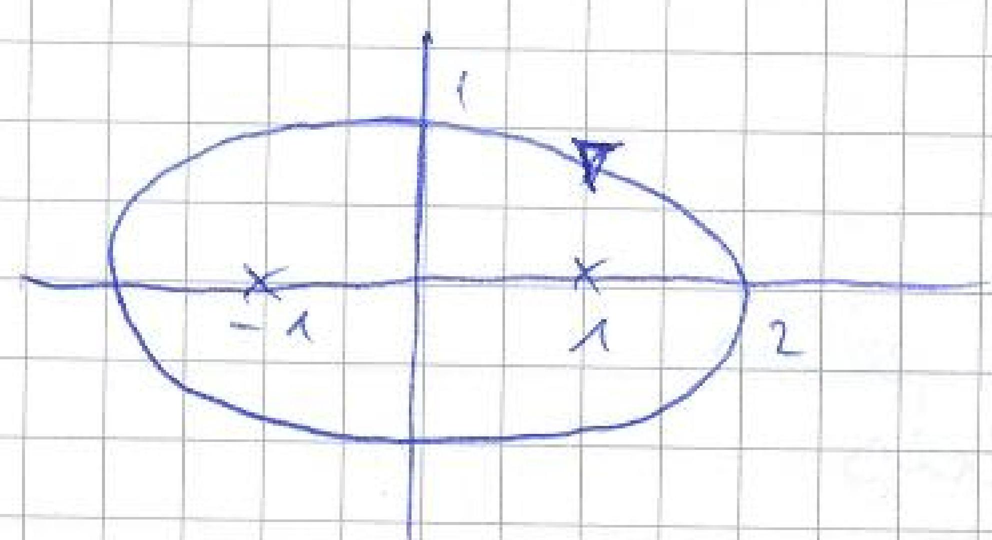
szinguláris helyek

$z = 1$ elsőrendű pólus ✓

$z = -1$ —"— —"— ✓

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} (z-1)\frac{e^z}{(z-1)(z+1)} = \frac{e}{2}$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1} (z+1)\frac{e^z}{(z-1)(z+1)} = \frac{e^{-1}}{-2} = -\frac{e^{-1}}{2} = -\frac{1}{2e}$$



$$\oint_G \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}\right)$$

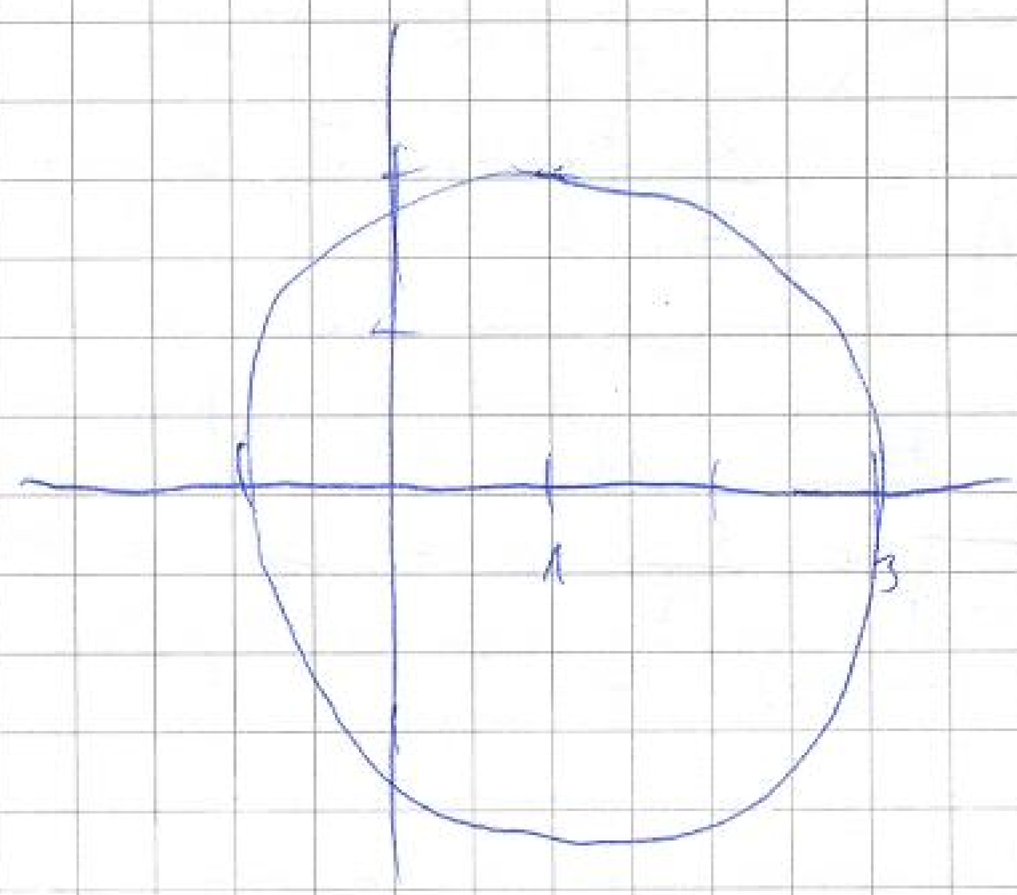
$G: \left|z-\sqrt{3}\right| + \left|z+\sqrt{3}\right| = 4$

(4)

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}$$

$$\oint_G f(z)\,dz$$

$G: |z-1| = 2$



$z=0 \to$ harmadrendű pólus

$z=1 \to$ elsőrendű pólus

$$\frac{e^z}{z^3(z-1)}$$

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left((z-0)^3 f(z)\right) =$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z-1}\right) =$$

$$\left(\frac{e^z}{z-1}\right)' = \frac{e^z(z-1) - e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^z(z-2)}{(z-1)^2}$$

$$\left(\frac{e^z}{z-1}\right)'' = \frac{\left(e^z(z-2) + e^z\right)(z-1)^2 - e^z(z-2)(2(z-1))}{(z-1)^4}$$

$$= e^z\frac{(z-1)^2 - 2(z-2)}{(z-1)^3}$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{e^z(z-1)^2 - 2(z-2)}{(z-1)^3} = \frac{5}{-1} = -5$$

$\operatorname{res}_{z=0} f(z)$:

$$\frac{1}{2!} \cdot 5 = -\frac{5}{2}$$

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{e^z}{z^3(z-1)} = e$$

végeredmény

$$\oint_G f(z)\,dz = 2\pi i \left(-\frac{5}{2} + e\right)$$