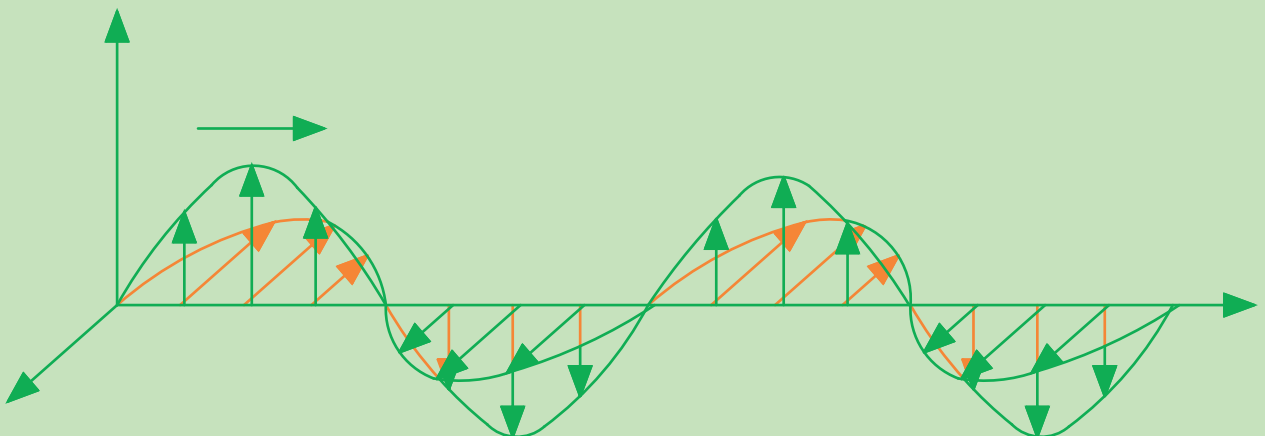
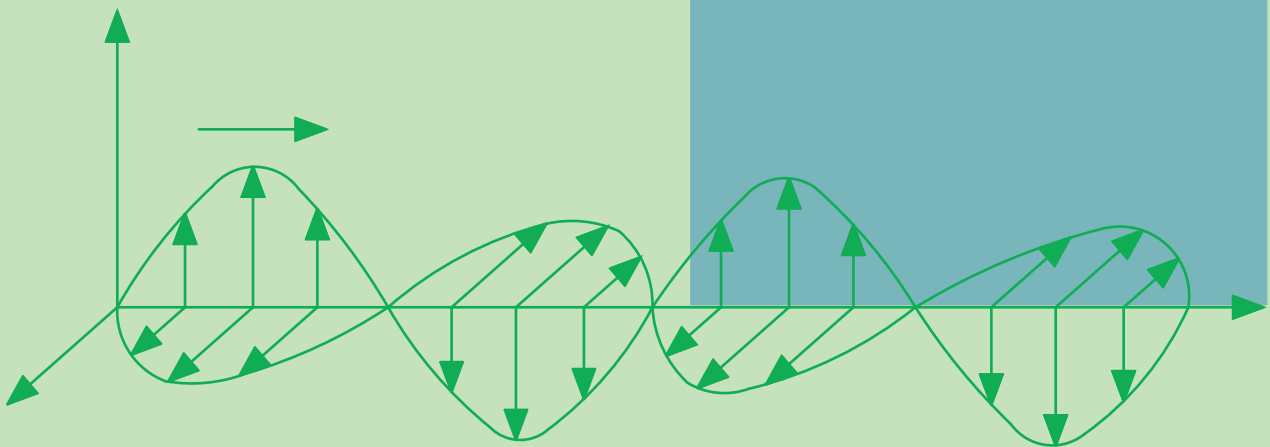


# ELEKTRO- MÁGNESES TEREK

 Műszaki Kiadó  
Wolters Kluwer csoport

Dr. Zombory László





Műszaki Kiadó  
Wolters Kluwer csoport

DR. ZOMBORY  
LÁSZLÓ

# ELEKTROMÁGNESES TEREK

Lektor: Dr. Veszely Gyula

*A kiadvány A Korszerű Mérnökért Alapítvány támogatásával készült,  
a „Tankönyv, Szakkönyv, Jegyzet” projekt keretén belül.*

© Dr. Zombory László

© Hungarian edition Műszaki Könyvkiadó Kft., 2006

A kiadvány támogatója:



# TARTALOM

## ELŐSZÓ

<b>1. fejezet</b>	<b>AZ ELEKTROMÁGNESES TEREK ALAPVETŐ ÖSSZEFÜGGÉSEI</b> .....	1
	Az elektromos áram .....	1
	És a töltés? .....	3
	A töltés különböző megjelenési formái .....	5
	Intenzitásvektorok .....	6
	Az intenzitásvektorok integráljai .....	7
	Az elektromos térerősség vonalintegrálja, a skalárpotenciál .....	7
	Az elektromos és mágneses térerősség felületi integrálja. A fluxus .....	9
	Gerjesztett vektorok .....	10
	Faraday indukciótörvénye .....	10
	Az elektromágneses tér egyenletei vákuumban .....	11
<b>2. fejezet</b>	<b>AZ ELEKTROMÁGNESES TÉR ÉS KÖZEG KÖLCSÖNHATÁSA</b> .....	12
	Mi hiányzik az egyenletekből? .....	12
	Egy kis kitérő: a dipólus .....	12
	A közegek befolyása a térre általános esetben .....	18
	Térjellemző vektorok viselkedése közegek határán .....	20
	A térvektorokra vonatkozó töréstörvények .....	24
<b>3. fejezet</b>	<b>A MAXWELL-EGYENLETEK</b> .....	25
	Az elektromágneses tér egyenletei vákuumban .....	25
	Mit is mondanak a Maxwell-egyenletek? .....	28
	Energiasűrűség és energiaáramlás .....	29
	A Maxwell-egyenletek egyértelmű megoldhatósága .....	31
	Az elektrodinamika felosztása a Maxwell-egyenletek alapján .....	33
	A Maxwell-egyenletek tiszta szinuszos időbeli változás esetén .....	34
	A Poynting-vektor szinuszos időfüggés esetén .....	35
<b>4. fejezet</b>	<b>ELEKTROSZTATIKA ÉS STACIONÁRIUS ÁRAMLÁSI TÉR</b> .....	36
	Adott töltéselrendezés tere .....	36
	A gyakorlati elektrosztatika kérdései .....	39
	Az elektrosztatika egyenleteinek egyértelmű megoldása .....	39
	Kondenzátor .....	44

	Részkapacitások .....	45
	Stacionárius áramlási tér .....	47
<b>5. fejezet</b>	<b>STACIONÁRIUS ÁRAM MÁGNESES TERE</b> .....	49
	Vonalszerű vezetékben folyó áram tere .....	51
	Mágneses skalárpotenciál .....	53
	A mágneses tér energiája; az ön- és kölcsönös induktivitás .....	55
	Kölcsönös indukció; önindukció .....	56
	Maxwell-egyenletek – Kirchhoff-egyenletek .....	58
	Egyenáramú hálózatok .....	58
	Tetszőleges időfüggésű hálózatok.....	61
<b>6. fejezet</b>	<b>SZTATIKUS, STACIONÁRIUS FELADATOK MEGOLDÁSI MÓDSZEREI</b> .....	63
	Az elektrosztatika megoldási módszerei .....	63
	Analitikus megoldási módszerek .....	63
	A helyettesítő töltések módszere .....	63
	Az integrálegyenletek módszere .....	64
	Parciális differenciálegyenletek.....	69
	Megoldás a változók szétválasztásával .....	69
	Variációs formalizmus.....	72
	Numerikus módszerek .....	74
	A véges differenciák módszere .....	75
	A véges elemek módszere .....	76
	Momentum módszer.	
	Integrálegyenletek numerikus megoldása .....	79
	Összefoglalás .....	82
<b>7. fejezet</b>	<b>TÁVVEZETÉKEK</b> .....	83
	Bevezető .....	83
	A táviróegyenletek megoldása szinuszos gerjesztés esetén .....	88
	Speciális távvezeték.....	93
	Fázis- és csoportsebesség .....	95
	Lezárt távvezeték.....	97
	Különleges lezárások.....	101
	Ideális vezeték szakasz .....	102
	Összetett vezeték hálózatok .....	104
	Ideális vezeték speciális lezárással .....	105
	Távvezeték illesztése .....	108
	Illesztő kétkapuk .....	109
	Távvezeték-rezgőkör .....	112
	Távvezeték időtartománybeli vizsgálata .....	114
	A menetdiagramok módszere .....	120
	Általános tranziensek.....	121
<b>8. fejezet</b>	<b>ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK KELTÉSE</b> .....	123
	A dipólusantenna sugárzása.	
	Hertz-dipólus .....	128
	A Hertz-dipólus távoli tere .....	131

	A kisugárzott teljesítmény .....	133
	A föld befolyása a tér kialakulására .....	135
	Középen táplált egyenes huzalantennák tere .....	137
<b>9. fejezet</b>	<b>ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK TERJEDÉSE .....</b>	<b>140</b>
	Síkhullámok .....	140
	A síkhullámok távvezetékmodellje .....	145
	Síkhullám vezető közegben .....	149
<b>10. fejezet</b>	<b>CSŐTÁPVONALAK, ÜREGREZONÁTOROK .....</b>	<b>153</b>
	Fázissebesség, diszperzió, határfrekvencia .....	158
	A módusfüggvények .....	159
	A csőtápvonalban haladó teljesítmény .....	162
	Csőhullámok téglalap keresztmetszetű csövekben .....	162
	Nyitott hullámvezetők .....	165
	Üregrezonátorok .....	168
	Dielektromos rezonátorok .....	170
<b>11. fejezet</b>	<b>FÜGGELÉK .....</b>	<b>172</b>
	Vektorok deriváltjai.	
	Többszörös deriváltak .....	172
	Integráltételek .....	173
	<b>IRODALOM .....</b>	<b>174</b>
	<b>TÁRGYMUTATÓ .....</b>	<b>175</b>

# ELŐSZÓ

A bolognai folyamat átalakította a felsőoktatási tantervek szerkezetét. A lineáris oktatásban az alapképzés tárgyait át kell formálni a képzés megváltozott céljának és időtartamának megfelelően.

Ennek érdekében kellett átgondolni a villamosmérnöki alapképzés „Elektromágneses terek” tárgyát is. Ezt a tárgyat Simonyi Károly professzor alakította ki a villamosmérnökök számára. A tárgy feladatát egyszerre definiálta diszciplinárisnak és metodikainak. A bevezető fizikai tárgyon túlmutató ismeretet kívánt adni az elektrodinamika mérnöki vonatkozásairól és ugyanakkor eszköztárat az elektrodinamikai feladatok megoldására.

Ez a célkitűzés ma, a megváltozott körülmények között is érvényes. Az informatikai háttér ma számos területen átveszi a feladatok megoldásának terhét. A feladatok helyes célkitűzése és azok fogalmi megalapozása azonban ma is szükségessé teszi az egyetemi bevezető fizika vagy villamosságtan tárgyaknak részletesebb és mélyebb mérnöki elektrodinamika tanulmányozását.

Ezt a kettős feladatot kívánja segíteni ez az elektronikus jegyzet. Az anyag tanulmányozása feltételezi a vektoranalízis elemeinek ismeretét. Ugyancsak feltételezi a bevezető fizika tárgyak anyagának ismeretét a Maxwell-egyenletek integrális alakjáig. A sztatikus és stacionárius tereket magasabb szinten ismerteti. A hullámtan főleg az elektromágneses hullámok keltése, ill. a vezetett hullámok területén jelentősen meghaladja a bevezető szintet. Minden területen igyekeztem kihangsúlyozni a fizikai alapokat, megalapozva ezzel a szemléletet. Ugyanakkor ügyeltem a matematikai szigorúságra, még ha a matematikai eszköztárat a tárgy méretének csökkenése folytán csak kisebb mértékben lehet alkalmazni.

Az anyag egy féléves, heti 3 óra előadást tartalmazó tantárgy tankönyveként használható, mérnökhallgatók számára.

A jegyzet elkészítése során számos segítséget kaptam a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék ok-

tatóitól. Külön köszönet illeti Dr. Veszely Gyula professzort a kézirat igen alapos átnézéséért, társszerzőséggel felérő szakmai tanácsaiért. Köszönöm Dr. Iványiné dr. Szakács Amália professzor folyamatos segítségét.

A jegyzet gondozását a Műszaki Könyvkiadó vállalta. Gondos munkájuk nélkül nem született volna meg a munka. Különös hálával tartozom Rét Annának, akinek az anyag végső formáját köszönheti.

A kiadvány A Korszerű Mérnökért Alapítvány támogatásával készült, a „Tankönyv, Szakkönyv, Jegyzet” projekt keretén belül.

*A kiadvány támogatója a Pannon GSM Távközlési Zrt.*

Budapest, 2006. december

*Dr. Zombory László*

# AZ ELEKTROMÁGNESES TEREK ALAPVETŐ ÖSSZEFÜGGÉSEI

<sup>1</sup> A magyar nyelvben viszonylag későn kialakult terminológia miatt ugyanazt a „tér” szót használjuk a geometriai (konfigurációs) tér és az erőtér megnevezésére. Ha megkülönböztetést akarunk tenni, utóbbit a „mező” kifejezéssel jelöljük. Angol nyelvben a megkülönböztetés a „space” és „field”, német nyelvben a „Raum” és „Feld” szavakkal történik.

Az elektromágneses tér fizikai erőtér.<sup>1</sup> Elektromágneses térben elektromosan töltött részecskére erő hat. Az erőt a *Lorentz-törvény* írja le:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.1)$$

ahol

$Q$  a kisméretű (pontszerű) töltés nagysága;

$\mathbf{E}$  az elektromos térerősség vektora;

$\mathbf{v}$  a töltött részecske sebessége;

$\mathbf{B}$  a mágneses tér indukcióvektora.

A mértékegységek megválasztásával később foglalkozunk.

Az (1.1) képletből két dolog nyilvánvaló. Egyik az, hogy az elektromágneses tér vektortér és két vektorral ( $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$ ) jellemezhető. A másik az, hogy az elektromágneses erőtér olyan anyagra (közegre, részecskére) hat, amelynek különleges tulajdonsága van: az elektromos töltés.

Az elektromos töltés nemcsak a tér jelenlétének indikátora, hanem a tér forrása is. Az elektromágneses tér bemutatását ezért általában a *nyugvó töltésekkel* és azok egymásra hatásával szokás kezdeni, annak ellenére, hogy az elektromos töltések és primer hatásaik észlelése kívül esik a mindennapos gyakorlaton. Simonyi Károly professzor mutatott rá *Villamosságtan* c. könyvében, hogy a közvetlen tapasztalat a *mozgó töltések* által létrehozott elektromos áram tulajdonságait ismeri. Gyakorlati életünk során találkozunk az árammal. Az áram hőhatása és az ebből származó fény, a gáztöltésű csövek fénye éppúgy életünk mindennapjaihoz tartozik, mint az elektromos áram hatására létrejövő mechanikai mozgás háztartási gépeinkben. Ezért az elektromágneses tér forrásai közül először az áramról lesz szó.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Megjegyezzük, hogy az egységes nemzetközi mértékegység-rendszerben (SI) az elektromos alapegység nem a töltés egysége, hanem a sokkal könnyebben mérhető áramé, az amper (A).

## AZ ELEKTROMOS ÁRAM

Az elektromos áram jelenlétét a vezetékben az áramok egymásra hatása jelzi. A  $\mathbf{B}$  mágneses indukcióvektor és az áram közötti kapcsolatot, majd később a vezetékben folyó áramok közötti erőhatás törvényét először *Biot* és *Savart* állapították meg kísérletileg, 1820-ban. Egyszerű elrendezéseik után *Ampère* hosszú kísérlet-sorozatban (1820–1825), bonyolult vezetékgeometriák esetén általános erőtörvényt

alkotott. Ez alakilag különbözik a következőkben bemutatott törvénytől, de tartalmilag megegyezik vele.

Két, párhuzamosan fekvő vezetékben folyó áram vonzza egymást, ha irányuk megegyezik, ellenkező esetben taszítja. Ez a kölcsönhatás teszi lehetővé az áram mértékegységének definícióját.

Két, egymással párhuzamos, igen kis keresztmetszetű (elvben végtelen hosszú) egyenes vezetéken folyó áram adott szakasza közötti erőhatás vákuumban:

$$|\mathbf{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{|I_1||I_2|l}{d}, \quad (1.2)$$

ahol

$l$  a vizsgált vezeték hossza;

$d$  a vezetékek távolsága.

A  $\mu_0$ -t a szabad tér (vákuum) permeabilitásának nevezzük. Értékét úgy választják meg, hogy egymástól 1 m távolságra elhelyezkedő, 1 m hosszúságú vezetékcszakaszokra egységnyi (1 A) áram esetén  $2 \cdot 10^{-7}$  N erő hasson. Ezzel:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}.$$

A képletben szereplő szokatlan mértékegységet az elektrodinamikában használatosabb alakba írjuk. Az elektrodinamikában az A mellett a feszültség egységének a *voltot* (V) definiáljuk úgy, hogy a  $VA = W$  összefüggés kösse a mechanikus mértékegységekhez.

Mivel  $N = \frac{V \cdot A \cdot s}{m}$  a newton helyett a  $V \cdot A \cdot s/m$  mértékegységet használjuk.

Ezzel

$$N = \frac{W \cdot s}{m} = \frac{V \cdot A \cdot s}{m},$$

tehát

$$\mu_0 = \pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$$

Ne feledjük: a vákuum permeabilitása *definiált mennyiség*, nem természeti állandó!

Az eddig tárgyalt vonalszerű áramok mellett térben, illetve felületen eloszló áramok is elképzelhetők. A térbeli áram sűrűségét az egységnyi felületen (merőlegesen) áthaladó áram értékével határozzuk meg:

$$dI = \mathbf{J} d\mathbf{A}, \quad (1.3)$$

ahol

$d\mathbf{A}$  a felületelem vektora (az elemi kicsi felülettel arányos, arra merőleges vektor),

$\mathbf{J} \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$  a térbeli áram (felületi) sűrűsége.

Hasonlóan adódik a felületen folyó áram sűrűségére:

$$dI = \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (1.4)$$

ahol

$\mathbf{n}$  egy a felületen fekvő  $ds$  ívelemre merőleges, szintén a felületen fekvő vektor

$\mathbf{K} \frac{\text{A}}{\text{m}}$  a felületi áram sűrűsége.

## ÉS A TÖLTÉS?

Kézenfekvőnek tűnik: ha egy vezeték nem ágazik el és nem szakad meg sehol, a rajta folyó áram nem változik.<sup>3</sup> Más szóval: zárt felületen átfolyó áram összességében zérus. Ha az áramvezető nem metszi a felületet, ez nyilvánvaló. Ha metszi, akkor mindig páros alkalommal. A metszése egyik felén be-, a másik felén kifolyik ugyanaz az áram. A kifolyót pozitívnak, a befolyót negatívnak tekintve az eredő áram zérus.

<sup>3</sup> Időben igen gyorsan változó áram esetén az állítás nem feltétlenül igaz. Erre később vizsgatérünk.

Zárt felületen átfolyó áram az (1.3) képlet alapján:

$$I = \oint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}, \quad (1.5)$$

ahol

a zárt felület kifelé mutató normális vektora pozitív. A felületen átfolyó áramok nemcsak térbeli, hanem felületi és koncentrált, vonalszerű áramok is lehetnek. Az ezekből származó járulékot – hacsak nem hangsúlyozzuk az ellenkezőjét – mindig beleértjük az (1.5) típusú kifejezéssel megadott áramba.

Az előző, (1.5) állítás felhasználásával:

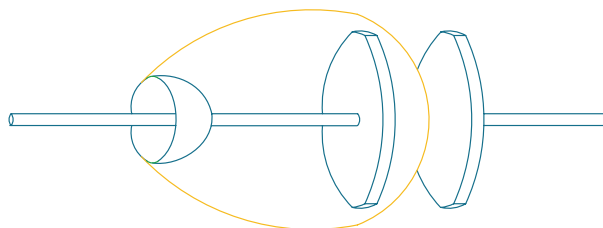
$$\oint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (1.6)$$

Más a helyzet, ha a vezeték megszakad, pl. egy kondenzátor egyik fegyverzeténél (1.1. ábra). Ekkor a zárt felületen átfolyó áram zérustól eltérő értékű. Ha egy zárt felület belsejébe befolyó áram nagyobb, mint a kifolyó, a felület által határolt térfogatban *töltés* halmozódik fel. A felhalmozódott töltés arányos az áram intenzitásával és a vizsgált időtartammal:

$$dQ = -I \, dt, \quad Q = A \cdot s = C, \quad (1.7)$$

ahol a negatív előjel jelentése:

ha kifelé folyik az áram a térfogtból, a töltés csökken.



**1.1. ábra**  
A gerjesztési törvény alkalmazása nyitott vezeték esetén nem ad egyértelmű eredményt

*Megjegyzés:* az SI-ben számos származtatott egység van, ilyen a *Coulomb*, a töltés fenti egysége. Mi a továbbiakban mindent alapegységekkel fejezünk ki.

A fenti kifejezésből:

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad (1.8)$$

és felhasználva a töltés  $\rho$  térfogati sűrűségét:

$$dQ = \rho dV, \quad \rho = \frac{A \cdot s}{m^3}. \quad (1.9)$$

(1.8) a következő alakba írható:

$$\oint_A \mathbf{J} \, d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = 0, \quad (1.10)$$

ahol  $A$  a  $V$  térfogatot határoló zárt felület.

*Emlékeztető:*

A  $\mathbf{v}$  vektortér divergenciája (forrása):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_A \mathbf{v} \, d\mathbf{A},$$

miközben az  $A$  felülettel körülzárt  $V$  térfogat legnagyobb lineáris mérete is zérushoz tart.

A divergenciára vonatkozik a matematika Gauss-tétele:

$$\oint_A \mathbf{v} \, d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV.$$

<sup>4</sup> Az (1.10) egyenletben az idő szerinti deriválást és a helykoordináták szerinti integrálást felcseréljük. Ennek feltétele, hogy az integrálási tartomány, azaz az adott térfogat koordinátái időtől függetlenek.

A Gauss-tétel alkalmazásával<sup>4</sup>:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = 0. \quad (1.11)$$

Miután az állítás tetszés szerinti térfogatra igaz, maga az integrandus zérus kell, hogy legyen:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.12)$$

Az (1.10) a *folytonossági egyenlet* integrálformája, (1.12) a differenciális forma.

Melyik állítás mond többet? Melyik állítás erősebb?

Az erősebb állítás mindig a differenciális formula. A differenciálhányadosok definícióját ismerve a differenciális formula azt jelenti, hogy az állítás a vizsgált térfogatban valamennyi pont kicsiny környezetére igaz. Ebből mindig következik, hogy az állítás a térfogat egészére is igaz.

A folytonossági egyenlet más szavakkal a *töltésmegmaradás elvét* fejezi ki matematikai formában. Az állítás bővebben: ha egy kicsiny térfogatban töltés halmozódik fel, ott a folyó áram egy része eltűnik (negatív divergencia, nyelő).

Érdeemes figyelni a folytonossági egyenlet alakjára: egy fizikai mennyiség sűrűségének időbeli megváltozása és a mennyiség áramának forráserőssége összegezve zérus. Az (1.12) egyenlet *homogén* egyenlet. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált pont környezetében az adott fizikai mennyiség nem keletkezik vagy szűnik meg. Esetünkben az állítás: elektromos töltés nem születik és nem semmisül meg.

Eddig nem vizsgáltuk az áram és töltés kapcsolatának leírását. Ha ismerjük a töltések  $\mathbf{v}$  átlagsebességét, akár közegben (fémek, elektrolitok, ionizált gázok), akár szabad térben az áram sűrűsége:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.13)$$

A fémekben, ill. szabad térben általában egyfajta töltés hozza létre az áramot. Elektrolitokban, ionizált gázokban, ill. félvezetőkben azonban kétféle, különböző előjelű (pozitív és negatív) töltés mozog, mindkettő más átlagsebességgel. Ilyenkor az áramsűrűség kifejezése:

$$\mathbf{J} = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-. \quad (1.14)$$

## A TÖLTÉS KÜLÖNBÖZŐ MEGJELENÉSI FORMÁI

Az előzőekben a térben elosztott töltésekkel foglalkoztunk. A töltések elhelyezkedhetnek felületen és vonal mentén elosztva ill. izolált pontokban. Az egyes töltéstípusok jellemzőit az 1.1. táblázat foglalja össze.

1.1. táblázat

A töltés típusa	Töltéssűrűség	Összes töltés
Térfogati	$\rho \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^3}$	$Q = \int_V \rho \, dV$
Felületi	$\sigma \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$	$Q = \int_A \sigma \, dA$
Vonal	$q \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}}$	$Q = \int_L q \, dl$
Pont	$QA \cdot \text{s}$	–

A töltések kölcsönhatásban vannak egymással. Nyugvó, pontszerű töltések erőt fejtenek ki egymásra, ezt az erőt *Coulomb törvénye* írja le, amelynek alakja szabad térben:

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1||Q_2|}{r_{12}^2}, \quad (1.15)$$

ahol az erőt N-ban mérjük;

$Q_1, Q_2$  a töltések nagysága,

As;  $r_{12}$  a pontszerű töltések távolsága, m;

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \text{ a vákuum permittivitása; } c \text{ a fénysebesség.} \quad (1.16)$$

Ezt a formulát csak jóval később tudjuk megmagyarázni. Említésre méltó, hogy ez a mennyiség származtatott és nem természeti állandó.

Számértéke:

$$\epsilon_0 = 8,856 \cdot 10^{-12} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$

A töltések közötti erő vonzóerő, ha a töltések azonos előjelűek, és taszítóerő ellenkező esetben.

A Coulomb-törvény kísérleti igazolása és így az egységnyi töltés meghatározása is sokkal nehezebb, mint az áramok kölcsönhatásának mérése. Közvetett kísérlettel először *Cavendish* igazolta az inverz négyzetes erőtvényt 1772-ben. Sajnos eredményeiből semmit nem publikált, így a törvény *Coulomb* francia hadmérnökről kapta a nevét, aki azt 1785-ben publikálta. *Coulomb* torziós ingával végezte méréseit.

Az előzőekben elmondtuk, hogy az áramok közötti erőhatás mérése egyszerűbb, mint a töltések közöttié. Hogyan lehetséges, hogy az utóbbi mégis évtizedekkel megelőzte az előbbi? A válasz egyszerű. Bár legkésőbb a századforduló óta sejtették, hogy létezik összefüggés az elektromos és mágneses jelenségek között, ennek kvalitatív kísérleti igazolása csak 1819-ben sikerült *Ørsted* dán fizikusnak, aki ezt 1820-ban publikálta. Még ebben az évben megszületett *Biot* és *Savart* törvénye!

Mai tudásunk szerint a természetben létezik legkisebb elektromos töltés. Ez az elektron töltése, az úgynevezett *elemi töltés*, amelynek értéke:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}.$$

Az elektron töltése negatív. Ugyanekkora abszolút értékű pozitív töltése van a protonnak. Ez olyan kicsi töltés, hogy a gyakorlatban szereplő töltésértékek sokszoros nagyságrenddel nagyobbak. Ezért gyakorlati elektromágneses feladatokban nem kell figyelembe vennünk a töltés kvantáltóságát. Jelentős szerepe van azonban ingadozási (zaj) és mikrofizikai jelenségekben.

## INTENZITÁSVÉKTOROK

Az (1.1) összefüggésben szereplő vektorok a tér erőhatásával kapcsolatos mennyiségek. Definíciójuk is az erőhatással kapcsolódik. Ezért célszerűen térerősségvektoroknak nevezhetnénk őket. A hagyományok szerint azonban csak az elektromos teret jellemző **E** vektor neve *elektromos térerősség*, a **B** vektort *mágneses indukciónak*, vagy *mágneses fluxussűrűségnek* nevezzük. Összefoglaló nevük: *intenzitásvektorok*.

Az elektromos térerősség (1.1) alapján az egységnyi töltésre ható elektromos erő:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{Q} \mathbf{F}. \quad (1.17)$$

Az összefüggések alapján a térerősség egysége:

$$E = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}} \times \frac{1}{\text{A} \cdot \text{s}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

A mágneses indukcióvektor definíciója a Lorentz-erőn és az áramsűrűség (1.13) definícióján alapul.  $l$  hosszúságú,  $A$  keresztmetszetű egyenes vezetékszakas összes elektromos töltése  $\rho Al$ , ahol  $\rho$  a vezetékben lévő töltések sűrűsége. Ezzel (1.1) alapján:

$$\mathbf{F} = \rho (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) Al. \quad (1.18)$$

(1.13) és (1.3) felhasználásával:

$$\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (1.19)$$

ahol

$\mathbf{l}$  vektor, és az áram irányába mutat. Amennyiben a vezeték igen rövid, akkor:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (1.20)$$

A fentiek alapján:

$$B = \frac{F}{Il} = \frac{V \cdot A \cdot s}{m} \frac{1}{A \cdot m} = \frac{V \cdot s}{m^2}.$$

A fizika ezzel egyenértékű definíciója egy kisméretű,  $A$  felületű köráramra ható  $\mathbf{T}$  forgatónyomaték

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}; \quad \mathbf{m} = \mu_0 I A \mathbf{n}, \quad (1.21)$$

ahol

$\mathbf{m}$  a köráram momentuma,

$I$  az áramerősség,

$\mathbf{n}$  a felület normálisa, ami az árammal a jobbcsavarszabály szerint van összerendelve.

## AZ INTENZITÁSVEKTOROK INTEGRÁLJAI

Mindkét intenzitásvektor integrálható alkalmasan választott vonal mentén, illetve felületen. A vonal- és felületelemek vektorok, így ezek az integrálok skalárértékűek.

Persze, az integrálok kiszámítgatása öncélú játékká válik, ha az eredménynek nincsen fizikai jelentése. Ezért megvizsgáljuk a szóba jövő négy integrált.

## AZ ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG VONALINTEGRÁLJA, A SKALÁRPOTENCIÁL

Ahogy az (1.17) formulával kapcsolatban megállapítottuk: az  $\mathbf{E}$  térerősség az egységnyi töltésre ható elektromos erő. Az erőnek a vonal menti integrálja a vonal mentén végzett munkája. A térerősség vonalintegrálja tehát az elektromos tér egységnyi töltésen végzett munkája:

$$U = \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.22)$$

Az integrált a vonal mentén (a két végpont között) mérhető *feszültségnek* nevezük, mértékegysége a volt (V). (1.22) felhasználásával tetszőleges töltésen végzett munka egyszerűen kifejezhető:

$$W = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_l Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = QU, \quad (1.23)$$

azaz a munka a töltés és a vonal mentén mért feszültség szorzata. Ellenőrizzük a mértékegységet:  $QU = A \cdot s \cdot V = W \cdot s = J = W$ , azaz a munka SI-egysége.

Sajnos a feszültség értéke általában nemcsak a vonal végpontjaitól, hanem a vonal alakjától is függ. Vajon mi a feltétele, hogy a feszültség csak az út végpontjaitól függjön, az alakjától ne? Belátható, hogy ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy tetszés szerinti zárt  $L$  görbére a térerősség vonalintegrálja zérus legyen:

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0. \quad (1.24)$$

A feltétel mindig fennáll, ha az elektromos és mágneses tér időben nem változik. Ekkor rögzített végpont esetén a feszültség értéke csak az (1.22) integrál kezdőpontjának függvénye.

Ezt a függvényt *skalárpotenciálnak* nevezzük. A  $\varphi(\mathbf{r})$  skalárpotenciál definíciója tehát:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{r_0} \mathbf{E} \, d\mathbf{l}. \quad (1.25)$$

A skalárpotenciál egy konstans erejéig határozatlan. Ha ugyanis megváltoztatjuk az integrálás végpontját  $\mathbf{r}_{\text{alt}}$ -ra, akkor a potenciál kifejezése:

$$\varphi_{\text{alt}}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{r_{\text{alt}}} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{r}}^{r_0} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} + \int_{r_0}^{r_{\text{alt}}} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \varphi(\mathbf{r}) + \text{konst.} \quad (1.26)$$

Ez az állítás egyenértékű azzal, hogy a potenciál nullahelyét tetszés szerint választhatjuk meg. Ez a választás nem befolyásolja azt a tényt, hogy a feszültség az út kezdő- és végpontja potenciáljának különbsége:

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_0} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} + \int_{r_0}^{r_2} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_0} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} - \int_{r_2}^{r_0} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2). \quad (1.27)$$

Még egy megjegyzés: Az (1.25) és (1.26)-ból látszik, hogy az  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  vektorfüggvény és a  $\varphi(\mathbf{r})$  skalárfüggvény kölcsönösen meghatározzák egymást. A vektorteret *konzervatívnak* nevezzük, ha zárt görbére vett integrálja (1.24)-hez hasonlóan zérus. Ha ez a vektortér erőter, a rögzített munka és így az energiaváltozás a zárt görbe körüljárása során zérus, ez az elnevezés magyarázata.

(1.25)-ből következik, hogy a potenciál változása elemi kicsi szakaszon:

$$d\varphi = -\mathbf{E} \, d\mathbf{l}. \quad (1.28)$$

A matematikában a  $\varphi$  skalárfüggvény változását elemi kicsi  $d\mathbf{l}$  szakaszon a gradiens vektorfüggvény írja le:

$$d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l}.$$

Derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (1.29)$$

ahol  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  és  $\mathbf{k}$  az egymásra merőleges egységvektorok.

(1.28) és (1.29) összevetéséből az elektromos térerősség a skalárpotenciál negatív gradiense:

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi. \quad (1.31)$$

Ez az összefüggés az (1.24)-hez fűzött megjegyzés értelmében csak időben változatlan terek esetén egyértelmű.

## AZ ELEKTROMOS ÉS MÁGNESES TÉRERŐSSÉG FELÜLETI INTEGRÁLJA. A FLUXUS

Vektortér skalárértékű felületi integráljához definiálnunk kell a felületelem  $d\mathbf{A}$  vektorát. Ez a vektor merőleges a felületre és abszolút értéke megegyezik a felületelem felszínével. Az integrálás során a vektor a felület minden pontjában skalárisan szorozódik a felületelem vektorával. Ez más szóval azt jelenti, hogy a vektornak minden pontban csak a felületre merőleges komponense vesz részt az integrál képzésében. A felületi vektor irányítása nyílt felület esetén tetszőleges, zárt felület esetén megállapodás szerint a felület által határolt térfogathoz kifelé mutat. Az alábbi

$$\Theta = \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.32)$$

<sup>5</sup> Az (1.5) összefüggés értelmében zárt felületen az áram-sűrűség fluxusa a felülettel határolt térfogathoz kifolyó áramot adja meg.

integrált a  $\mathbf{v}$  vektortér  $A$  felületre vett *fluxusának* nevezzük.<sup>5</sup> Az elektromos tér-intenzitás nyílt felületre vett fluxusához nem kapcsolódik fizikai fogalom. A zárt felületre vett fluxushoz azonban fizikai törvény kapcsolódik: a térre vonatkozó elektromos *Gauss-törvény*:

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \times \text{m}^2 = \text{V} \cdot \text{m} = \frac{1}{\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}} \text{A} \cdot \text{s}. \quad (1.33)$$

A törvény állítása: zárt felületen az elektromos fluxus arányos a felület belsejében elhelyezkedő elektromos töltéssel. Az arányossági tényező (aligha véletlenül) megegyezik a Coulomb-törvényben szereplő (1.16) vákuum-permittivitással. (Pontosabban: annak reciprokával.)

A mágneses indukció fluxusa, röviden *mágneses fluxus*:

$$\Phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \times \text{m}^2 = \text{V} \cdot \text{s}, \quad (1.34)$$

<sup>6</sup> Az (1.34) összefüggés alapján  $\mathbf{B}$ -t sokan, különösen az angol szakirodalomban mágneses fluxussűrűségnek nevezik.

az eddig tárgyalt időtől független terek esetén nem játszik fizikai szerepet<sup>6</sup>. Zárt felület fluxusára azonban a mágneses Gauss-törvény érvényes:

$$\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (1.35)$$

A törvény nem kevesebbet állít, mint azt a tapasztalati tény, hogy *önálló mágneses töltés* (mágneses monopólus) *nem létezik*.

A skalárértékű integrálok közül nem vizsgáltuk még a mágneses indukcióvektor vonalintegrálját. Ennek az integrálnak fizikai jelentést zárt integrálási út esetén tudunk adni.

7 Szokás ezt a törvényt Ampère gerjesztési törvényének nevezni. Ez helytelen, Ampère soha nem írt fel ehhez hasonló összefüggést.

Ekkor, időben változatlan mennyiségek esetén érvényes a *gerjesztési törvény*<sup>7</sup>:

$$\oint_l \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (1.36)$$

ahol

$I$  az integrálás  $l$  útja által kifizített  $A$  felületen keresztülfolyó áram.

## GERJESZTETT VEKTOROK

Hangsúlyozzuk: az integrál-összefüggések szabad térben (elméletileg vákuumban, gyakorlatilag levegőben) érvényesek. Alapvetően esztétikai okokból szokás ezeket a törvényeket olyan alakra hozni, hogy ne szerepeljenek bennük állandók. Ebből a célból bevezetik a  $\mathbf{D}$  *eltolási vektort* (villamos fluxussűrűséget):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \quad (1.37)$$

és a  $\mathbf{H}$  *mágneses térerősséget*:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad \frac{\text{A}}{\text{m}}. \quad (1.38)$$

Az (1.33), (1.36–38) felhasználásával a Gauss-törvény és a gerjesztési törvény az alábbi egyszerű alakba írható:

$$\oint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \int_V \rho \, dV, \quad \oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J} \, d\mathbf{A}, \quad (1.39–1.40)$$

ahol a gerjesztőmennyiségeket (a töltést és az áramot) a sűrűségükkel jellemeztük.

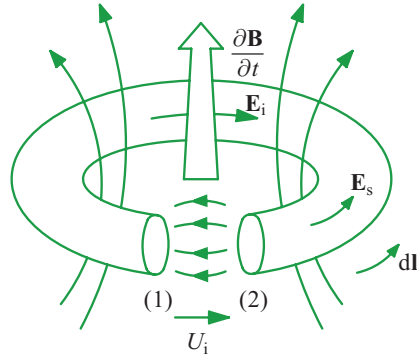
A fenti két egyenlet az elektromágneses tér két újabb jellemző vektorát tartalmazza és ezen egyenletek alapján joggal nevezzük őket *gerjesztett vektoroknak*. Közeg jelenléte nélkül, szabad térben  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{D}$ , illetve  $\mathbf{B}$  és  $\mathbf{H}$  csak egy skalár szorzóban különböznek, ezért fizikai tartalmuk azonos. Az intenzitásvektorok és a gerjesztett vektorok eltérő fizikai tartalmat csak közegek jelenléte esetén hordoznak.

## FARADAY INDUKCIÓTÖRVÉNYE

Visszatérve a  $\Phi$  mágneses fluxushoz, tapasztalati tényként fogadjuk el az indukciótörvényt, ami azt állítja, hogy ha bármely vezető által körülfogott fluxus az időben változik, akkor ebben a vezetőben a fluxusváltozás sebességével arányos feszültség keletkezik:

$$U_i = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (1.41)$$

A térerősséget a majdnem zárt vezető oly módon „integrálja” (1.2. ábra), hogy az indukált térerősség addig mozgatja el a töltéseket, amíg az eredő térerősség (az  $E_i$  indukált és az  $E_s$  sztatikus tér összege) a vezetőben zérus nem lesz. A vezeték végpontjaiban felhalmozódott töltés csak a légrétegben hoz létre teret.



1.2. ábra  
Faraday indukciótörvénye

$$U_i = \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad \left( \cong \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} \right). \quad (1.42)$$

A negatív előjel *Lenz törvényét* fejezi ki: az indukált feszültség által létrehozott áram mágneses tere csökkenti az indukáló teret.

Jól jegyezzük meg: az indukált térerősség kialakulásához nincs szükség vezetőhurokra. Az időben változó mágneses tér elektromos teret hoz létre, és a (geometriai) térben bármely  $A$  felületre és az azt határoló  $L$  görbére igaz az (1.42) állítás. A felület normálisa és a peremgörbe körüljárása a jobbszavar-szabály szerint vannak egymáshoz rendelve.

## AZ ELEKTROMÁGNES TÉR EGYENLETEI VÁKUUMBAN

Az eddigiek alapján a következő egyenletek írják le a tér viselkedését:

<i>Gerjesztési törvény</i>	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$	(1.43)
<i>Indukciótörvény</i>	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$	(1.44)
<i>Mágneses Gauss-törvény</i>	$\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$	(1.45)
<i>Elektromos Gauss-törvény</i>	$\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \rho \cdot dV$	(1.46)
<i>Közegjellemző törvények</i>	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} ; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$	(1.47)

Az (1.43–1.47) egyenletek természetesen nem írják le a tér viselkedését közegben. Teljes egészében tükrözik azonban a Maxwell előtti elektrodinamikát. Tükrözik abban is, hogy integrál-összefüggések, míg ma mérnöki szinten differenciálegyenletekkel dolgozunk. A fenti integrál-összefüggések csak néhány különleges geometriájú elrendezés esetén teszik lehetővé a tér számítását, még numerikus eljárások felhasználásával is.

Ezért majd áttérünk a differenciálegyenletek formalizmusára. Azzal a formalizmussal fogjuk megmutatni a fenti egyenletrendszer egyetlen hiányosságát és annak kijavítását is. Előtte a közegekkel és az elektromágneses térrel történő kölcsönhatásokkal foglalkozunk.

# AZ ELEKTROMÁGNESES TÉR ÉS KÖZEG KÖLCSÖNHATÁSA

## MI HIÁNYZIK AZ EGYENLETEKBŐL?

Miután az egyenleteket vákuumra írtuk fel, hiányzik belőlük a közeg hatása. Ez azonban nem vonatkozik az első négy egyenletre. Már említettük: a közegek hatása a kiegészítő egyenleteken keresztül jelenik meg az egyenletrendszerben.

A legegyszerűbb esetben a következő összefüggésekkel számolhatunk:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b), \quad (2.1)$$

ahol

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  a közeg permittivitása és  $\varepsilon_r$  a (dimenzió nélküli) relatív permittivitás. Hasonlóan,  $\mu = \mu_r \mu_0$  a közeg permeabilitása,  $\mu_r$  relatív permeabilitással. Végezetül  $\sigma$  a közeg vezetőképessége, mértékegysége  $\text{A}/\text{V} \cdot \text{m} = 1/\Omega \cdot \text{m}$ .  $\mathbf{E}_b$  a nem elektromos hatásokat reprezentáló *beiktatott térerősség*. Ettől eltekintve a  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  a differenciális Ohm-törvény.

Véges,  $A$  keresztmetszetű,  $l$  hosszúságú egyenes vezetéken az áram értéke

$$I = JA = \frac{\sigma A}{l} El = \frac{1}{R} U.$$

Az áram ezen (konduktív) alakján kívül konvektív áram (1.13) és (1.14) is megjelenhet a harmadik egyenletben.

Ezen kiegészítő egyenletek a *közegegyenletek* vagy *konstitutív relációk*.

A konstitutív relációk fenti alakja semmit nem mond azokról a folyamatokról, amelynek során a közeg összekapcsolja az intenzitásvektorokat a gerjesztett mennyiségekkel. Mielőtt a téregyenleteket tovább vizsgálánánk, ismerkedjünk meg ezekkel a folyamatokkal.

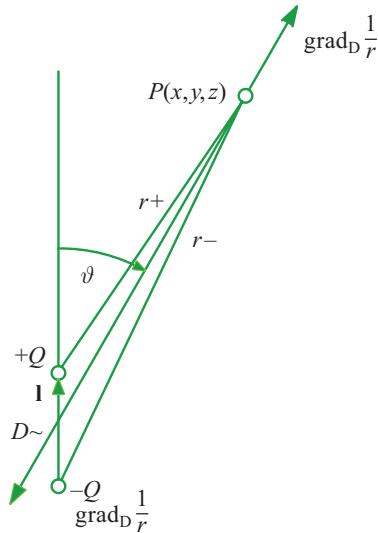
## EGY KIS KITÉRŐ: A DIPÓLUS

A mágneses tér alapegyenleteiből következik, hogy mágneses töltés nem létezik<sup>8</sup>. Az anyagok mikrostruktúrájának ismeretében tudjuk, hogy az elektromos töltés is igen kiegyensúlyozott, hiszen egy atom össztöltése zérus. Ezért a (nemionizált) atom kifelé nem hoz létre a Coulomb-potenciálnak megfelelő teret.

Felmerül a kérdés: létezik-e zérus össztöltésű elemi töltéselrendezés, amely zérustól eltérő teret és potenciált hoz létre? Ha ilyen nem létezne, a permanens mágnesek viselkedését a Maxwell-egyenletek alapján nem tudjuk leírni.

<sup>8</sup> A kvantumelektrodinamika nem tiltja mágneses töltés létezését, sőt értékét is meg tudja becsülni. A felfedezésére irányuló nagyszámú kísérlet ellenére kimutatni 2006-ig egyszer sem sikerült. Ezért a továbbiakban elfogadjuk ténynek, hogy nem létezik.

Szerencsére van ilyen töltéselrendezés, ez a *dipólus*. A dipólus két, egymástól igen kis távolságra elhelyezkedő, azonos abszolút értékű, de ellentétes előjelű töltés együttese. A dipólus szerkezete olyan, hogy a töltéseket nem engedi a Coulomb-erő hatására elmozdulni. Helyezzük a két töltést egymástól  $l$  távolságra az origó közelébe (2.1. ábra  $D$  pont).



2.1. ábra  
A dipólus potenciáljának  
levezetéséhez

A töltéselrendezés által létrehozott potenciál a  $P$  pontban:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r_+} - \frac{Q}{r_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_- + \mathbf{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_-|} \right). \quad (2.2)$$

Ha az  $l$  távolsága  $r$ -nél sokkal kisebb, a zárójelben álló kifejezés közelíthető az alábbi módon:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_- + \mathbf{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_-|} \approx l \operatorname{grad}_D \frac{1}{r}, \quad (2.3)$$

ahol jelöltük, hogy a differenciálást a  $D$  pont koordinátái szerint végezzük. Ezzel a közelítéssel:

$$\varphi(P) \approx \frac{Q\mathbf{l}}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{grad}_D \frac{1}{r}. \quad (2.4)$$

Az elemi dipólust úgy származtatjuk, hogy a két töltést minden határon túl közelítjük egymáshoz, miközben a  $Q\mathbf{l} = \mathbf{p}$  szorzat állandó marad. Ekkor  $\mathbf{p}$  elnevezése: *dipólusnyomaték* vagy *dipólusmomentum*, mértékegysége:  $A \cdot s \cdot m$ . A (2.4) egyre kisebb hibával adja meg a töltéselrendezés potenciálját, míg határesetben:

$$\varphi(P) = \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{grad}_D \frac{1}{r}. \quad (2.5)$$

<sup>9</sup> Aki a Dirac- $\delta$ -t ismeri, látja, hogy a pontszerű töltés sűrűségfüggvénye egy térbeli (háromdimenziós) Dirac- $\delta$ . A dipólus sűrűsége nem egyéb mint a  $\delta$  deriváltja.

**Kérdés:** létezik-e elemi dipól? **Válasz:** nem! De adott töltéeloszlás tere igen jól közelíthető vele. Az absztrakció ugyanolyan jellegű, mint a pontszerű töltésnél. Tudjuk, hogy közelítés, de elfogadjuk és számolunk vele<sup>9</sup>.

A számítások során általában a  $P$  pont koordinátái szerinti deriváltakkal számolunk. (Gondoljunk csak a tér kiszámításra a potenciálból.) Ezért (2.5)-ben is áttérünk a  $P$  pont koordinátái szerinti deriválásra. Miután

$$r = \sqrt{(x_D - x_P)^2 + (y_D - y_P)^2 + (z_D - z_P)^2},$$

nyilvánvaló, hogy a  $P$  és  $D$  szerinti deriváltak csak előjelben különböznek. Ezért:

$$\varphi(P) = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_P \frac{1}{r}. \quad (2.6)$$

Megállapodás szerint a  $\mathbf{p}$  dipólnyomaték a negatív töltéstől a pozitív töltés irányába mutat. A potenciál másik kifejezése:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}_0}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2}, \quad (2.7)$$

ahol

$\mathbf{r}_0$  az  $\mathbf{r}$  irányba mutató egységvektor,  
 $\vartheta$  pedig a  $\mathbf{p}$  és  $\mathbf{r}$  által bezárt szög.

Némi számolással igazolható, hogy a térerősség kifejezése:

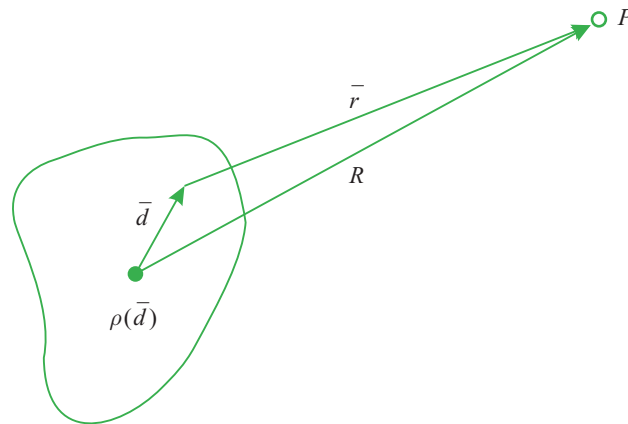
$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r}_0)}{r^3} \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]. \quad (2.8)$$

A pontszerű töltés  $1/r^2$  távolságfüggésénél a dipólus tere a végtelenben gyorsabban,  $1/r^3$ -mal arányosan tűnik el.

A dipólus alkalmazására két példát mutatunk be:

Adott töltéseloszlás terét csak viszonylag pontosan akarjuk számítani. Határozzuk meg azt az egyszerű eloszlást, amelynek potenciálja jól közelíti a töltéseloszlását!

Ha a távolság elegendően nagy, és a tér finomabb részletére nem vagyunk kíváncsiak, a töltéseloszlás helyettesíthető egyetlen ponttöltéssel (2.2. ábra).



2.2. ábra  
 Helyettesítő  
 töltéselrendezés  
 számítása

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \int_V \rho dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}, \quad (2.9)$$

ahol az  $r \approx R$  az egész töltéselrendezésre közelítéssel éltünk. A közelítés azonban semleges ( $Q = 0$ ) töltéselrendezésnél nem ad értékelhető eredményt.

Ez a helyzet nem olyan ritka, mint gondolnánk, hiszen mint említettük, az atomok és az azokból felépülő struktúrák pozitív és negatív össztöltése alaphelyzetben azonos. De a közelítés mindenképpen romlik, ha az  $R$  távolság annyira lecsökken, hogy a tér nem tekinthető gömbszimmetrikusnak.

Éljünk ekkor az alábbi közelítéssel: a  $\mathbf{d}$  helyvektorral rendelkező  $dV$  térfogat  $r$  távolságát a  $P$  ponttól határozzuk meg úgy, hogy a  $\mathbf{d}$  vektor  $\mathbf{R}$  helyvektorra vett vetületét kivonjuk a helyvektorból, azaz

$$r \approx R - \mathbf{d} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (2.10)$$

ahol  $\mathbf{r}_0$  az  $\mathbf{R}$  irányú egységvektor. Ha a  $P$  pont távolsága elegendően nagy, a két vektor közel párhuzamos, a (2.10) közelítés hibája igen kicsi.

A potenciál kifejezésébe helyettesítendő  $\frac{1}{r}$  közelítése ezek után:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{d}} = \frac{1}{R} \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{d}}{R}\right)} \approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{d}}{R}\right) \quad (2.11)$$

ahol a (2.11) sor  $1/R$ -ben magasabb rendű tagjait elhanyagoltuk.

A potenciálfüggvény ezek után:

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{R} \left(1 + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}_0}{R}\right) dV = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \int_V \rho dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_0}{R^2} \int_V \rho \mathbf{d} dV \end{aligned} \quad (2.12)$$

A fenti kifejezés

$$\int_V \rho dV = Q \quad \text{és} \quad \int_V \rho \mathbf{d} dV = \mathbf{p} \quad (2.13)$$

jelöléssel:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0}{R^2} \quad (2.14)$$

alakba írható. Látható, hogy a térbeli töltéeloszlás egy ponttöltéssel és egy  $\mathbf{p}$  dipól-nyomatékú dipólussal helyettesíthető, ahol  $Q$  és  $\mathbf{p}$  az eloszlásból (2.13) alapján számítható.

*Megjegyzések:*

1. A potenciál (2.14) formulája egyértelműen a függvény  $\frac{1}{R}$  hatványai sorának első két tagja.

A sor természetesen folytatható. A magasabb rendű tagok ún. *multipólusok* potenciáljai, a sor a potenciál sorfejtése multipólus-potenciálok szerint. A magasabb rendű tagok együtthatóinak számítása azonban egyre bonyolultabb.

Mikor van rá szükség? Olyan esetben, ha a szimmetria miatt a dipólusmomentum zérus. Ilyen tulajdonsága van pl. a  $\text{CO}_2$ -molekulának.

2. Ha az össztöltés nem zérus, definiálható a „töltésközéppont” a tömegközépponthez hasonlóan. A töltés középpontjának definíciója:

$$\int_V \rho \mathbf{d} dV - \mathbf{r}_{\text{tk}} \int_V \rho dV = 0, \quad (2.15)$$

azaz

$$\mathbf{r}_{\text{tk}} = \frac{\int_V \rho \mathbf{d}V}{\int_V \rho dV} = \frac{\mathbf{p}}{Q}, \quad (2.16)$$

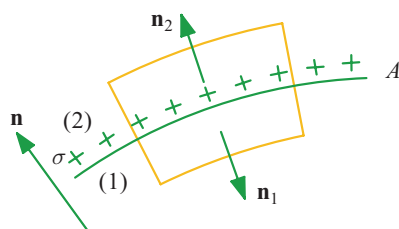
az önkényesen felvett  $D$  origóból mérve. A fenti képletből is következik, hogy ha az origót a töltésközéppontba vesszük fel, arra a pontra vonatkozóan a töltéselrendezésnek nincsen dipólusmomentuma, a tér finom szerkezete csak magasabb rendű multipólusokkal közelíthető.

A másik felhasználási példa elvi jelentőségű. Ismerjük a felületi töltést és potenciálját:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma dA}{r}. \quad (2.17)$$

Ezen a felületi töltésen a potenciál folytonos, azaz azonos a felület két oldalán. A potenciál normális irányú deriváltja azonban változik (2.3. ábra).

2.3. ábra  
A felületi töltés  
potenciáljának  
meghatározásához



A Gauss-tételt alkalmazva az ábrán látható felületre és a bezárt térfogatra:

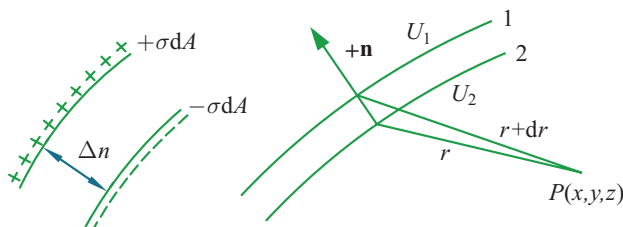
$$\sigma dA = -\epsilon_0 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} \right) = -\epsilon_0 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 \right] dA,$$

ahonnan

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 \quad (2.18)$$

Képzeljünk el ezek után azt a dipólus analógiájára kialakított helyzetet, hogy két azonos abszolút értékű, de ellenkező előjelű felületi töltéssűrűséggel ellátott réteget igen közel helyezünk el egymáshoz! Ezt az elrendezést *kettősrétegnek* nevezzük (2.4. ábra).

2.4. ábra  
Kettősréteg potenciálja



A kettősréteg voltaképpen  $\sigma dA \cdot \Delta n \cdot \mathbf{n}$  nyomatékú dipólusok folytonos elosztása a felületen. Itt  $\Delta n$  a két felület távolsága,  $\mathbf{n}$  a negatív töltésű felülettől a pozitív töltésű felé irányított, a felületre merőleges egységvektor. Ha a felületek közötti

távolság úgy csökken, hogy a  $\sigma \Delta n$  szorzat állandó marad, az ideális kettősréteget kapjuk. Ennek jellemzője a

$$\nu = \sigma \Delta n n, \quad \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}} \quad (2.19)$$

a kettősréteg felületi nyomatéka.

A kettősréteg  $dA$  felületeleme egy elemi dipólusnak tekinthető  $\nu dA$  dipólusnyomatékkal. Ennek hozzájárulása a kettősréteg potenciáljához (2.4) alapján:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nu \text{grad} \frac{1}{r} dA. \quad (2.20)$$

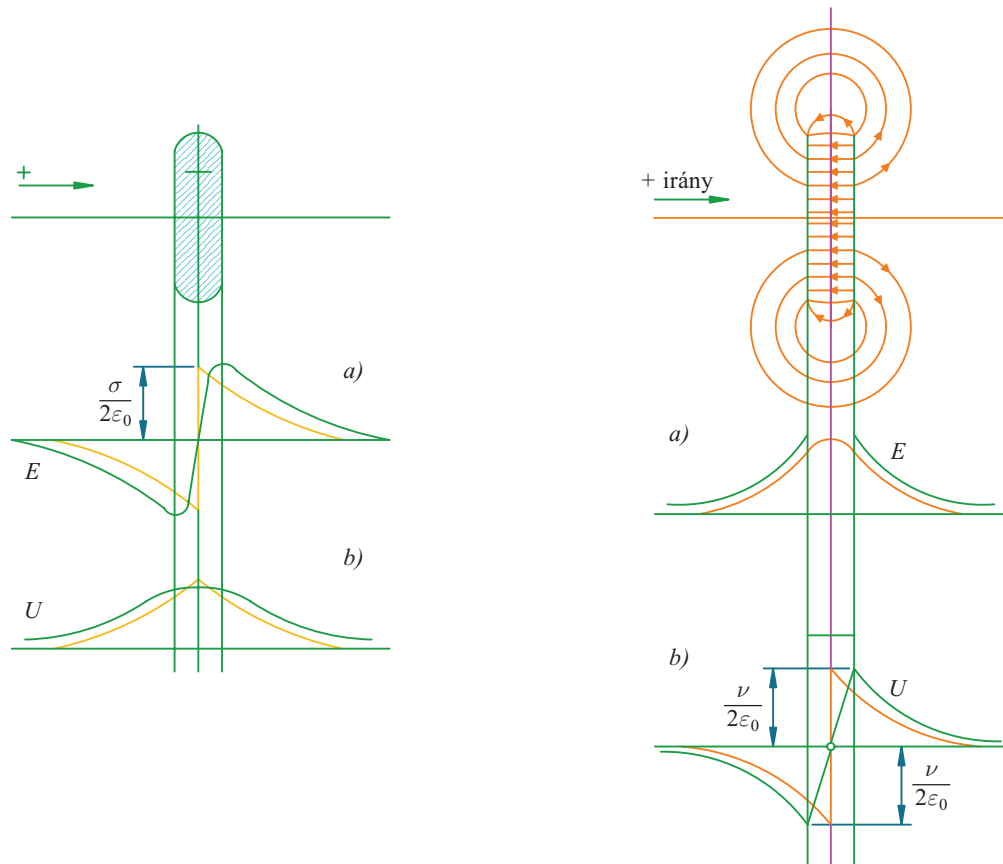
A teljes kettősréteg potenciálja a sok elemi dipólus potenciáljának összegzésével kapható:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \nu \text{grad} \frac{1}{r} dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \nu \text{grad} \frac{1}{r} d\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \nu \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dA. \quad (2.21)$$

A kettősrétegen a potenciál normális irányú deriváltja folyamatosan halad át, viszont a potenciál ugrik, eltérő értékű a kettősréteg két oldalán. Igazolható, hogy

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \nu / \epsilon_0. \quad (2.22)$$

A felületi töltés és a kettősréteg potenciálja és térerőssége a véges vastagságú elrendezések tulajdonságának határértékeként értelmezhető (2.5. és 2.6. ábra).



**2.5. ábra**  
A térerősség ugrásának szemléletes értelmezése felületi töltések esetén

**2.6. ábra**  
A potenciál ugrásának szemléletes értelmezése kettősréteg esetén

A kettősréteg elvi jelentősége abban áll, hogy a természetben fellépő struktúrák igen jó modellje lehet. Csak egyetlen példa: az élő szervezetek sejtfalának két oldalán ellentétes töltés halmozódik fel és potenciálkülönbség lép fel. A sejtfal modellje elektromos szempontból a kettősréteg.

## A KÖZEGEK BEFOLYÁSA A TÉRRE ÁLTALÁNOS ESETBEN

A (2.1) anyagegyenletekben a lehető legegyszerűbb feltételezéssel élünk: az intenzitásvektorok és a gerjesztett vektorok között homogén, lineáris és izotróp összefüggés áll fenn. A mező kölcsönhatása a közeggel ennél bonyolultabb összefüggéseket is teremthet.

A közegekben tér hatására dipólusok alakulnak ki. (Egyes esetekben, például ferromágneses közegekben a dipólusok a tértől függetlenül, állandóan léteznek.)

A további megfontolásokat elektromos dipólus esetében tesszük. Az alapösszefüggések mágneses dipólus esetében lényegében azonosak.

A dielektrikumokat a bennük elhelyezkedő dipólusok sűrűsége jellemzi. Legyen  $N$  az egységnyi térfogatban elhelyezkedő dipólusok száma. Ekkor a dipólussűrűséget a közegben a polarizáció vektora adja meg:

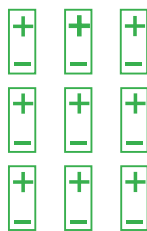
$$\mathbf{P} = N\mathbf{Ql} = N\mathbf{p} \frac{1}{m^3} \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}. \quad (2.23)$$

A dipólussűrűség mértékegysége és dimenziója megegyezik az eltolásvektoréval (és a felületi töltéssűrűségével). Ez lehet véletlen, de aligha az.

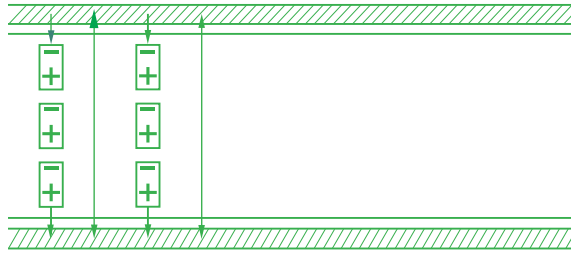
A dipólussűrűség hatásának vizsgálata előtt nézzük meg, miért is alakulnak ki a dipólusok. Előre kell bocsátani, hogy a közegek elektromosan általában semlegesek, a pozitív és negatív töltések összege megegyezik, és így egészében semlegesítik egymást. Ez áll az anyag kisebb részeire, atomokra és molekulákra is. Az elektromos tér hat az atomok és molekulák töltött részecskéire, és igyekszik azokat elmozdítani. A pozitív és negatív részecskék ellenkező irányba mozdulnak el. Elszakadni egymástól azonban nem tudnak, mert az atomot, ill. molekulát összetartó erők ezt megakadályozzák. A deformálódott anyagrészecske pozitív és negatív töltéseinek középpontja többé nem esik egybe, és ez mindaddig fennáll, amíg a külső elektromos tér hat. A tér jelenlétében tehát a közeg meghatározott dipólussűrűséggel rendelkezik.

Tételezzük fel, hogy a tér hatására kialakult dipólussűrűség egyenletes eloszlású. Ekkor a közeg belsejében a szembeforduló pozitív és negatív töltések semlegesítik egymást. Más a helyzet a dielektrikum felületén (2.7. ábra). A felületen a töltéssűrűség éppen a kompenzálatlan polarizációs töltés

$$\sigma_{\text{pol}} = P. \quad (2.24)$$



2.7. ábra  
Dipólusok a közegben



2.8. ábra

Tételezzük fel, hogy a dielektrikum egy síkkondenzátor lemezei közt helyezkedik el (2.8. ábra). A kondenzátor fegyverzetén helyezkedjék el a teret – és így a polarizációt is – létrehozó  $\sigma_{\text{szab}}$  valódi töltéssűrűség. A Gauss-tételt alkalmazva a dielektrikumon belüli teret a teljes felületi töltéssűrűség hozza létre:

$$E = \frac{\sigma_{\text{szab}} - \sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0}, \quad (2.25)$$

ahonnan (2.24) felhasználásával

$$D = \sigma = \epsilon_0 E + P. \quad (2.26)$$

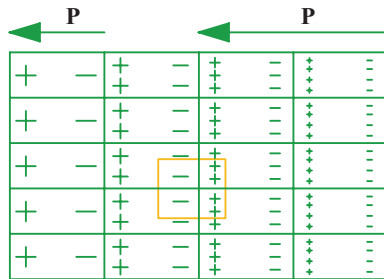
Általánosságban (2.26) vektoriális megfelelőjét használjuk:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.27)$$

Előrebocsátva az (1.46) egyenlet differenciális megfelelője a  $\text{div} \bar{D} = \rho$  egyenlet (2.27) behelyettesítésével és némi rendezés után kapjuk, hogy

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \text{div} \mathbf{P}), \quad (2.28)$$

amit (2.25)-tel összehasonlítva látjuk, hogy a polarizációs töltés általánosságban a dipólussűrűség negatív divergenciája (2.9. ábra).



2.9. ábra

Ha  $\mathbf{P}$  polarizációvektor divergenciája különbözik zérustól, tértöltés lép fel

(2.27)-nek az egyenletek felírása szempontjából akkor van jelentősége, ha ismerjük a  $\mathbf{P}$  és  $\mathbf{E}$  közötti kapcsolatot. Kis térerősség esetén a mennyiségek arányosak és egy irányba mutatnak:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (2.29)$$

ahol  $\chi_e (> 0)$  az elektromos szuszceptibilitás. Ezzel (2.27)-ből:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (2.30)$$

ahol az  $\epsilon_r$  relatív permittivitás definícióját is megadtuk.

A mágneses térben a  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  állítás alapján a tér létrehozásában a mágneses töltés *nem, csak* mágneses dipólusok játszhatnak szerepet. A  $\mathbf{B}$  és  $\mathbf{H}$  közötti kapcsolat (2.30)-cal teljes analógiában

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (2.31)$$

alakba írható, ahol  $\mathbf{M}$  a mágneses polarizáció, a mágneses dipólsűrűség vektora.

Lineáris esetben

$$\mathbf{M} = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}, \quad (2.32)$$

ahol  $\chi_m$  a mágneses szuszceptibilitás. Ezzel

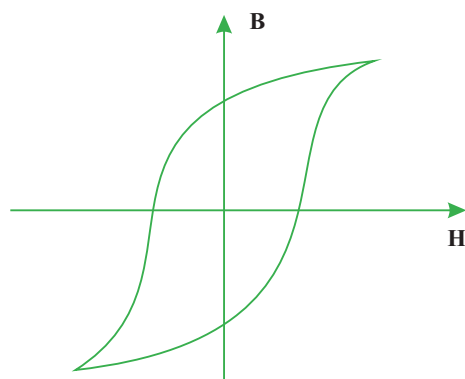
$$\mu = (1 + \chi_m) \mu_0 = \mu_r \mu_0 \quad (2.33)$$

Ismét teljes analógiában az elektromos jelenségekkel.

Az alapvető különbség  $\chi_e$  és  $\chi_m$  nagyságrendjében van. Amíg az elektromos szuszceptibilitás értéke általában 1 és 20 között van, bár ennél nagyobb értékek is előfordulnak, a mágneses szuszceptibilitás értéke nem ferromágneses anyagokra  $-10^{-2} < \chi_m < 10^{-4}$  nagyságrendbe esik. A nem ferromágneses anyagok tehát a teret gyakorlatilag nem befolyásolják. Ferromágneses anyagokra azonban  $\chi_m$  akár a  $10^6$ -t is elérhetik. Ferromágneses anyagoknál azonban illuziórikus a lineáris modellel számolni. Ilyenkor a konstitutív reláció nemlineáris:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}(\mathbf{H}). \quad (2.34)$$

Ez a nemlineáris kapcsolat a 2.10. ábrán látható.



2.10. ábra  
Mágneses hiszterézis

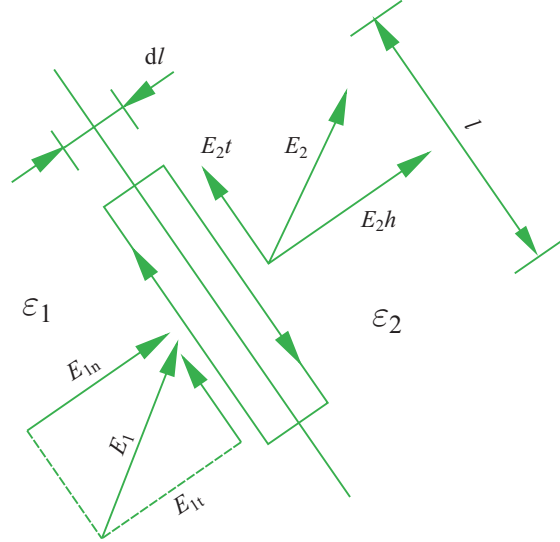
A legszembevetőbb, hogy a függvény nem egyértékű.  $\mathbf{B}$  aktuális értéke az előleltől függ. Lineáris összefüggést csak kezeletlen anyagok és igen kis terek esetén kapunk.  $\mu_r$  értéke ilyenkor 10 és  $10^4$  közé esik.

## TÉRJELLEMZŐ VEKTOROK VISELKEDÉSE KÖZEGEK HATÁRÁN

A vizsgált térrészekben a közegek inhomogének lehetnek. Ennek leggyakoribb formája, hogy előírt felületeken az  $\varepsilon$ ,  $\mu$  és  $\sigma$  közegjellemzők hirtelen változnak. Az ugrásszerű változás következtében a térjellemző vektorok is ugrásszerűen változni fognak. Ennek az ugrásnak a meghatározása a következő célkitűzés.

Mint az elektrodinamika valamennyi feladatát, ezt is az alapegyenletek felhasználásával oldjuk meg.

Az elektromos térerősség vizsgálatához a határfelület közelében vegyünk fel egy kis hurkot (2.11. ábra) a felület mentén.



2.11. ábra  
Elektromos térerősség  
közegek határán

Az (1.44) egyenletből:

$$\oint_l \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{A}, \quad (2.35)$$

amit az adott geometriára alkalmazva:

$$E_{1t}l - E_{2t}l = - \frac{\partial B}{\partial t} l h. \quad (2.36)$$

Zsugorítsuk a hurkot a felületre, azaz  $dl \rightarrow 0$ . Ekkor (2.36) jobb oldala eltűnik, mivel  $\frac{\partial B}{\partial t}$  nem tart a végtelenhez. Ezek után kapjuk, hogy

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad (2.37)$$

azaz a felület két oldalán az elektromos térerősség tangenciális komponense azonos, a tangenciális komponens folytonos.

Ez az összefüggés vektoriális formában  $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$  alakba írható, ahol  $\mathbf{n}$  a határfelületre merőleges, az 1 jelű közegből a 2 jelű közegbe mutató egységvektor.

Fontos speciális esetet kapunk, ha az egyik közeg ideális vezető. Ideális vezetőben  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $1/\sigma \rightarrow 0$ . Ebben a közegben a térerősség, és így tangenciális komponense is zérus, mivel tetszőleges áramsűrűség esetén  $E = J/\sigma = 0$ . Ennek megfelelően ideális fémfelületen a térerősség tangenciális komponense zérus

$$E_t = 0. \quad (2.38)$$

Más szavakkal: *ideális fém felületére az elektromos térerősség mindig merőleges.*

Hasonlóan a mágneses térerősségre az (1.43) egyenletből

$$\oint_l \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J} \, d\mathbf{A}. \quad (2.39)$$

Később látni fogjuk, hogy ez az egyenlet általánosságban még egy taggal bővül, de ez a jelenlegi megfontolásokat nem érinti.

A 2.1. ábrán látható hurokra, ill. az általa körülvevett felületre integrálva:

$$H_{1t}l - H_{2t}l = J l dl. \quad (2.40)$$

Van létjogosultsága azt feltételezni, hogy  $J dl$  állandó marad a határátmenet során. Ekkor beszélünk felületi áramról, amelynek sűrűsége:

$$\lim_{dl \rightarrow 0} \mathbf{J} dl = \mathbf{K} \frac{\text{A}}{\text{m}}. \quad (2.41)$$

Ezzel a felületi áramsűrűséggel:

$$H_{1t} - H_{2t} = K, \quad (2.42)$$

azaz a felületen a mágneses térerősség tangenciális komponense a felületi áram sűrűségnek megfelelő értékkel *ugrik*. (2.42) a  $\mathbf{K}$  vektor  $H_{1t} - H_{2t}$ -re *merőleges* komponensére érvényes. Ezért vektoriálisan az

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (2.43)$$

összefüggés érvényes.

Felületi áramsűrűség hiányában a mágneses térerősség tangenciális komponense folytonos.

Ferromágneses közegben  $\mu \rightarrow \infty$ , ezért  $H = B/\mu = 0$ , a mágneses térerősség zérus. Ezért a közeg felszínén nem lehet tangenciális térerősség komponens és így a külső térben is

$$H_t = 0, \quad (2.44)$$

azaz ferromágneses közeg felszínén a mágneses térerősség *merőleges*.

Ideális vezető felszínén elenyésző vékony szabad töltésréteg tud kialakulni. Ez nem tévesztendő össze a szigetelők felszínén kialakuló polarizációs töltéssel. Az ugyanis a dipólusok kompenzálatlan töltésének eredménye és helyhez kötött.

A vezető felszínén kialakuló töltésekre természetesen hat a Lorentz-erő, a töltések felületi áramot hoznak létre. Miután végtelen jó vezetőben az elektromos térerősség eltűnik, az (1.44) egyenlet értelmében a mágneses indukció is eltűnik és így a mágneses térerősség is zérus, feltéve, hogy a közeg permeabilitása véges. Ezért az így kialakuló felületi áram megegyezik a mágneses tér tangenciális komponensével:

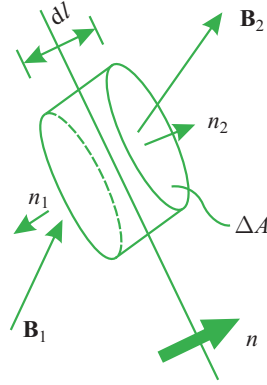
$$H_{2t} = K, \quad (2.45)$$

vektoriális formában:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{K}. \quad (2.46)$$

A további két térvektor eltérően viselkedik. Ennek oka, hogy amíg az  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{H}$  vektorok *rotációjára* vonatkozik Maxwell-egyenlet, addig a  $\mathbf{D}$  és  $\mathbf{B}$  vektorok *divergenciájáról* kapunk felvilágosítást.

A mágneses indukcióra vonatkozó határfeltétel megállapításához helyezzünk egy lapos hengert a határfelületre (2.12. ábra) oly módon, hogy a határfelület normális vektora és az  $A$  felületek normális vektora egy irányba mutasson.



2.12. ábra  
Mágneses indukcióvektor  
közegek határán

A henger felületére a

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = \oint_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = B_{2n} \Delta A - B_{1n} \Delta A + d\Phi, \quad (2.47)$$

ahol Gauss-tételt alkalmazva kapjuk, hogy  $V$ , ahol  $d\Phi$  a henger palástján fellépő fluxus.

Zsugorítsuk most a hengert a felületre oly módon, hogy  $dl$  és így  $d\Phi$  is tartson zérushoz. Végezetül kapjuk, hogy

$$B_{2n} \Delta A - B_{1n} \Delta A = 0, \quad (2.48)$$

ahonnan

$$B_{2n} = B_{1n}. \quad (2.49)$$

Tehát a felületen a mágneses indukcióvektor normális komponense folytonos. Vektorjelöléssel

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \mathbf{n} = 0. \quad (2.50)$$

Hasonló gondolatmenettel az eltolás vektorra:

$$\int_N \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV \Rightarrow \rho dl \Delta A = (D_{2n} - D_{1n}) \Delta A + d\psi, \quad (2.51)$$

ahol  $d\psi$  most az eltolási vektor fluxusa a henger palástján. Ez a mennyiség  $dl$  csökkenésével a nullához tart. Nem ez a helyzet a  $\rho dl \Delta A$  töltéssel, ha a határon felületi töltés helyezkedik el. Ekkor

$$\lim \rho dl = \sigma, \quad (2.52)$$

$$dl \rightarrow 0$$

és végül

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (2.53)$$

Ez azt jelenti, hogy az eltolási vektor normális komponense ugrik, ha a közeghatáron felületi töltés helyezkedik el. Ellenkező esetben az eltolási vektor normális komponense folytonos.

Vektoriális formában

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)\mathbf{n} = \sigma. \quad (2.54)$$

Ha az egyik közeg ideális vezető, abban  $E = 0$  és így  $D = 0$  is igaz ( $\varepsilon \neq \infty$ ). Ekkor  $E$  és  $D$  is merőleges a határfelületre, és

$$D = \sigma; \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (2.55)$$

Az áramsűrűsége a folytonossági egyenlet alapján az előzőekhez hasonló gondolatmenettel a következő egyenlet írható fel:

$$J_{2n} - J_{1n} + \operatorname{div}_F \mathbf{K} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (2.56)$$

Ez tulajdonképpen a felületi töltéssűrűsége érvényes folytonossági egyenlet. A benne szereplő  $\operatorname{div}_F$  a felületi áram divergenciája. A felületi töltés a térfogati áramok nélkül is változhat, ha felületi áram formájában folyik.

## A TÉRVEKTOROKRA VONATKOZÓ TÖRÉSTÖRVÉNYEK

Az előzőekben láttuk, hogy a térjellemező vektoroknak csak egyik komponense folytonos. A másik komponens értéke az anyagjellemzőktől függ.

A 2.13. ábrán láthatjuk a villamos térvektorok viselkedését egy határfelületen, ha ott nincs felületi töltés. A felületre merőleges iránnyal bezárt szögekre:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{1t} / E_{1n}}{E_{2t} / E_{2n}} = \frac{D_{1t} / D_{1n}}{D_{2t} / D_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (2.57)$$

Érdeemes megvizsgálnunk azt a helyzetet, amikor az egyik permittivitásérték jóval nagyobb, mint a másik.  $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$  esetén  $\operatorname{tg} \alpha_2 \rightarrow 0$ , azaz a térerősség közeledik a felületre merőleges állapothoz. Ilyenkor  $\operatorname{tg} \alpha_1 \gg \operatorname{tg} \alpha_2$ ; azaz  $\alpha_1 \gg \alpha_2$ ;  $\alpha_1 \rightarrow 90^\circ$ . A térerősség vektora a felülethez hajlik a nagy permittivitású közegben. A tér mintegy „besűrűsödik” a felület közelében.

Mágneses térjellemezőkre is a (2.57) alkalmazható, *mutatis mutandis*.  $\mathbf{E}$  helyére  $\mathbf{H}$ -t,  $\mathbf{D}$  helyére  $\mathbf{B}$ -t és  $\varepsilon$  helyére  $\mu$ -t helyettesítve a formula és a megfontolások érvényben maradnak.

Stacionárius, időben változatlan esetben az áram vektorára az analógiák alapján (2.57) változatlanul érvényes,  $\mathbf{D}$  helyébe  $\mathbf{J}$ -t és  $\varepsilon$  helyébe  $\sigma$ -t helyettesítve.

Általános esetben ilyenkor a két közeg felületén töltés keletkezik, és  $\mathbf{D}$  merőleges komponense nem megy át a folytonos felületen. A felületi töltéssűrűség:

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \left( \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \right) J_n \quad (2.58)$$

ami csak az  $\varepsilon_2 / \sigma_2 = \varepsilon_1 / \sigma_1$  speciális esetben zérus.

Az előzőekben láttuk, hogy ezek a megfontolások időben változó terek esetén nem érvényesek.

## AZ ELEKTROMÁGNESES TÉR EGYENLETEI VÁKUUMBAN

Az 1. fejezet alapján a következő egyenletek írják le az elektromágneses tér viselkedését:

<i>Gerjesztési törvény</i>	$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J} \, d\mathbf{A},$	(3.1)
<i>Indukciótörvény</i>	$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A},$	(3.2)
<i>Mágneses Gauss-törvény</i>	$\oint_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0,$	(3.3)
<i>Elektromos Gauss-törvény</i>	$\oint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \int_V \rho \, dV,$	(3.4)
<i>Közegjellemző törvények</i>	$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_b).$	(3.5)

A (3.1)–(3.6) egyenletek teljes egészében tükrözik a Maxwell előtti elektrodinamikát. Tükrözik abban is, hogy integrál-összefüggések. A fenti integrál-összefüggések csak néhány különleges geometriájú elrendezés esetén teszik lehetővé a tér számítását, még numerikus eljárások felhasználásával is.

Ezért majd áttérünk a differenciálegyenletek formalizmusára. Azzal a formalizmussal fogjuk megmutatni a fenti egyenletrendszer egyetlen hiányosságát és annak kijavítását is.

Alkalmazzuk a Stokes-tételt (3.1) bal oldalára:

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \int_A \text{rot } \mathbf{H} \, d\mathbf{A} = \int_A \mathbf{J} \, d\mathbf{A}. \quad (3.6)$$

A két felületi integrál tartománya tetszés szerinti lehet.

Ha két integrál tetszés szerinti tartományon azonos, ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a két integrandusz a tartomány minden pontjában azonos, tehát

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (3.7)$$

Mindkét oldal divergenciáját véve a

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 = \operatorname{div} \mathbf{J} \quad (3.8)$$

egyenlőséglánchoz jutunk, ahol az első egyenlőség a kétszeres vektorderiváltak egyik azonossága. Az ebből következő második egyenlőség azonban triviálisan nem igaz. Az (1.12) folytonossági egyenlet értelmében az áram csak időben változatlan töltés esetében divergenciamentes. Ez a helyzet zárt köráramok esetén. Ha azonban az áram bárhol megszakad, ott töltés halmozódik fel, vagy csökken.

Ezért a gerjesztési törvényt (differenciális formában is) ki kell egészíteni oly módon, hogy a folytonossági egyenlet ne sérüljön. Más szóval a (3.7) egyenlet jobb oldalán az áram sűrűségét olyan taggal kell kiegészíteni, amellyel együtt divergenciamentes. Ezt előállítani használjuk fel a matematika Gauss-tételét. Ennek segítségével (3.4)-et átalakítva kapjuk az alábbi egyenlőségláncot:

$$\oint_A \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV = \int_V \rho \, dV, \quad (3.9)$$

ahol a második egyenlőségből a

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (3.10)$$

parciális differenciálegyenlet következik. Jobbról balra olvasva ez a töltéssűrűség definíciója, amely felhasználható az (1.12) folytonossági egyenletben. Behelyettesítve kapjuk:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (3.11)$$

Felcserélve a második tagban a hely és idő szerinti deriválást:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.12)$$

Megkaptuk tehát az áramsűrűségnek azt a kiterjesztését, amelyik mindig divergenciamentes, ezért ez a tag szerepelhet a differenciális gerjesztési törvényben:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (3.13)$$

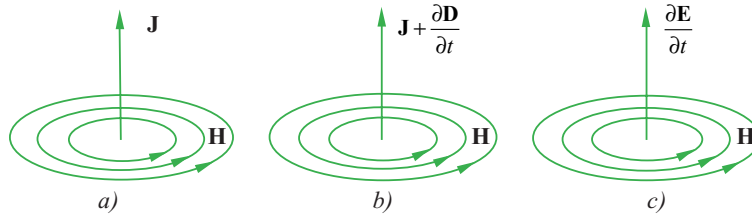
A  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  áramsűrűség  $\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$  mértékegységű mennyiség, elnevezése: *eltolási áramsűrűség*. Az eltolási áramsűrűséget önálló fizikai mennyiségként *James Clark Maxwell* skót fizikus vezette be az elektromágneses jelenségek leírásába. Jelentőségét az alábbi két pontban foglaljuk össze:

1. A vezetési és az eltolási áram együtt divergenciamentes. Ezzel (3.13) megoldja a (3.7) egyenlet ellentmondását. Ugyanakkor a töltés folytonossági egyenlete (3.13) következménye lesz. Így tehát beépül az elektrodinamika egyenleteibe, és nem kell külön alaptörvényként kezelniük.
2. A gerjesztési törvény általános formájában nemcsak vezetési áram gerjeszt mágneses teret, hanem eltolási áram is. Sőt, az eltolási áram, tehát a villamos tér időbeli változása önmagában is létrehoz mágneses teret (3.1. ábra).

## 3.1. ábra

Az I. Maxwell-egyenlet fizikai tartalma különböző speciális esetekben

- a) a vezetési áram egyedül hozza létre a mágneses térerősséget;  
 b) a vezetési és eltolási áramerősség együtt hozzák létre a mágneses térerősséget;  
 c) a vákuumban a villamos térerősség változása mágneses teret hoz létre



Az utóbbi felismerés jelentősége abban áll, hogy az elektromágneses tér a forrásától elszakadva, önfenntartó módon is létezhet. Ez a fizikai világgépet átformáló felismerés *Maxwell* érdeme. Jelentőségét nehéz lenne túlbecsülni.

Az elektrodinamika differenciális formában felírt alapegyenleteit megalkotójuk után Maxwell-egyenleteknek nevezzük. (3.10) és (3.13) ebbe a családba tartoznak. A továbbiak is az alapegyenletek integrális alakjából származtathatók.

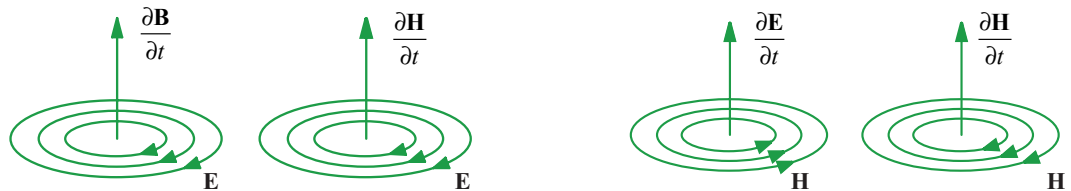
Alkalmazzuk (3.2) bal oldalára a Stokes-tételt:

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \int_A \text{rot } \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A}. \quad (3.14)$$

A jobb oldalon felcserélve a deriválás és integrálás sorrendjét és a két integrál tetszés szerinti tartományon azonos értékéből az integrandusok azonosságára következtetve a következő egyenletet kapjuk:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.15)$$

Ez az indukciótörvény differenciális alakja. Fizikai tartalma: az időben változó mágneses tér elektromos teret hoz létre (3.2. ábra). Ez a felismerés a (3.13) egyenlet következményeivel együtt vezet az önfenntartó elektromágneses tér létezésének magyarázatához (3.3. ábra).



Az integrális egyenletek közül egyedül az (3.3) egyenletnek nincs még differenciálegyenlet alakja. Alkalmazva az egyenletre a matematikai Gauss-tételt, majd a szokásos gondolatmenetet, az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t};$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (3.16)$$

Ezzel rendelkezésünkre áll a Maxwell-egyenletek teljes rendszere vákuumban. A teljesség kedvéért az alábbiakban felírjuk az egyenleteket abban a sorrendben, ahogyan általában szokásos:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\text{I})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (\text{IV})$$

A továbbiakban a térintenzitásokat és a gerjesztett vektorokat összekötő kiegészítő egyenleteket szokás a Maxwell-egyenletekhez sorolni:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_b). \quad (\text{V})$$

Az (I)–(IV) egyenletek változatlanok, nem függenek a kiegészítő egyenletek alakjától.

Közeg jelenlétében a kiegészítő egyenletek eltérő alakúak lehetnek. Az elektromágneses térrel kölcsönhatásba kerülő közegek tulajdonságai ezeken az egyenleteken keresztül kerülnek be a teljes egyenletrendszerbe.

A továbbiakban az (I)–(IV) egyenleteket kiindulási axiómáknak tekintjük, „elfelejtjük” azt az utat, amelynek során megformuláztak<sup>10</sup>.

## MIT IS MONDANAK A MAXWELL-EGYENLETEK?

1. Az egyenletek *differenciálegyenletek*. Már a folytonossági egyenletnél megállapítottuk, hogy a differenciálegyenletek egy pont kicsiny környezetének viszonyait írják le. Pontosabban: egy kicsiny környezetben megadják a vizsgált fizikai mennyiségek változásának kapcsolatát. Ezért ezek az egyenletek feltételezik, hogy a hatások a közvetlen szomszédságban működnek, azaz *közvetlen törvények*. Ez a szemlélet a fizikai tér (mező) létére fekteti a hangsúlyt. Ez ellentétes a *távolsági törvényekkel*, mint amilyen a Coulomb-törvény vagy az áramok egymásra hatásának törvénye. A közvetlen törvények szerint a hatást távolba a mező közvetíti, így ennek ugyanolyan fizikai tulajdonságokat kell tulajdonítanunk, mint a töltésnek, vagy áramnak. A közvetlen szemléletet esetünkben az eltolási áram bevezetése, és ennek következtében a gerjesztéseket elhagyó, azoktól függetlenül terjedő elektromágneses hullám támasztja alá.
2. Az egyenletek *evolúciós egyenletek*. Ez azt jelenti, hogy a tér pillanatnyi (és esetleg múltbeli) értékeinek ismeretében leírják a tér alakulását, változását a jövőben. És valóban: a térjellemzők pillanatnyi értékei meghatározzák azok időbeli deriváltjait a vizsgált térrész minden pontjában. Így a térjellemzők időbeli változása minden pontban nyomon követhető.
3. Az egyenletek megoldását rendszerint adott időpillanattól kezdve keressük. A jelenség „előéletét” az ún. *kezdeti feltételek* segítségével adjuk meg.

Az (I) egyenlethez  $\mathbf{D}$  kezdeti értékeit kell ismernünk a vizsgált térrészben. Ezekre vonatkozó feltételeket a (IV) egyenlet szab meg: csak olyan kezdeti  $\mathbf{D}$  vektort választhatunk, amelynek divergenciája megegyezik a kezdeti töltéseloszlással. A továbbiakban az (I) egyenlet mindkét oldalának divergenciáját véve:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 = \operatorname{div} \mathbf{J} + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Láthatjuk:  $\mathbf{D}$  úgy változik, hogy a folytonossági egyenlet minden időpillanatban automatikusan teljesül.

<sup>10</sup> A valóságban ez az út még bonyolultabb volt, mint az általunk vázolt egyszerűsített útvonal. Maxwell briliáns matematikai felkészültségével és elméleti intuíciós készségével Faraday erővonalain alapuló elképzeléséhez mechanikai modellel alkotott, ahol mechanikai mennyiségek feleltek meg az elektromágneses tér mennyiségeinek. A modell finomításával lassan a leíró egyenletek és következményeik váltak fontossá, a modell pedig fokozatosan eltűnt. Saját tapasztalatait is összegyűjtötte amikor így ír Ampère eredményeiről:

„Azt kell gondolnunk, amit tulajdonképpen ő maga is bevall, hogy a törvényt valamilyen eljárással – amelyet nem mutat meg nekünk – felfedezte, majd utólag konstruálta hozzá a tökéletes bizonyítást, eltüntetve az állványozás minden nyomát, amelynek segítségével felépítette.”

Maxwell közleményeiben végig érezhető az „állványozás”, de nagy összefoglaló művében már csak az egyenletek szerepelnek a hozzájuk vezető út nélkül.

A mechanikai kép két okból is magyarázható Maxwell korában:

1. A korabeli „természetfilozófia” kifejtett, tökéletes diszciplínája a newtoni mechanika volt. Minden fizikai jelenséget ennek mintájára igyekeztek magyarázni.

2. Maxwell élete végéig hitte, hogy az elektromágneses teret jól definiálható mechanikai tulajdonságokkal bíró közeg hordozza. Ez a közeg egyebek között polarizálható. Az eltolási vektor vákuumban Maxwell számára polarizációsűrűséget is jelentett. Ezért az eltolási áramot a dipólusok töltésének mozgásával lehetett magyarázni. Ezt az „éter” elképzelést csak Einstein relativitáselmélete döntötte meg – nem csekély ellenkezéssel szemben.

Hasonlóan a  $\mathbf{B}$  vektor kezdeti értéke eleget kell, hogy tegyen a (III) egyenletnek. Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = f(\mathbf{r}), \quad (3.17)$$

azaz a mágneses indukció divergenciája időtől független, csak a helytől függ. Miután ez a mennyiség kezdetben zérus, a továbbiakban mindvégig zérus marad.

4. Az egyenletek megoldását kereshetjük zárt térrészben, vagy nyitott (végtelen) térben. Az első esetben a zárt térrészen kívül a „külvilágban” szereplő gerjesztések hatását úgy vesszük figyelembe, hogy a térrészünket határoló zárt felületen *peremfeltételeket* írunk elő. Ezek általában a teret jellemző vektorok, vagy azok egyes komponensei. Más a helyzet a nyitott tér esetén. Ekkor a mező egyes vektorainak, ill. komponenseinek a végtelenben megfelelő határértékhez kell tartaniuk.

Végezetül: elemezve az (I)–(V) egyenleteket, felismerhetjük, hogy csak elektromos és mágneses mennyiségeket tartalmaznak. Együtt tehát zárt rendszert képeznek, amely alkalmas az elektromágneses jelenségek leírására, de nem kapcsolja össze azokat a fizika más ágaival. Ahhoz, hogy az elektrodinamikát elhelyezzük a fizika nagy épületében, szükségünk van egy olyan mennyiség elektromágneses definíciójára, amely a fizika lehetőleg minél szélesebb területein szintén értelmezett. Ilyen mennyiség lehet az erő. És valóban, találunk olyan leírást, amelyik a Maxwell-egyenletek rendszerét az (1.1) Lorentz-erővel egészíti ki. Mi itt a másik általános mennyiséget fogjuk definiálni: az *energiát*.

## ENERGIASÚRÚSÉG ÉS ENERGIAÁRAMLÁS

A Maxwell-egyenletek által leírt közelhatás jellegéből következik, hogy az elektromágneses mező energiája a konfigurációs geometriai térben elosztva helyezkedik el. Egy pont környezetében az energia megváltozása és az itt „eltűnő” energia megjelenése egy másik pont környezetében csak az energia áramlása útján képzelhető el. A  $w$  energiasűrűség és az  $\mathbf{S}$  energiaáram vektor között tehát a töltés és áram folytonossági egyenletéhez hasonló összefüggésnek kell fennállnia:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (3.18)$$

Könnyen belátható azonban, hogy ez a törvény nem igaz. A töltéssel ellentétben, amely nem keletkezik és nem tűnik el, az elektromágneses energia keletkezik és eltűnik. Az energiamegmaradás törvénye ugyanis valamennyi energiafajtára együtt érvényes, külön az elektromágneses energiára nem. Az elektromágneses energia például csökken, amikor a közeget melegíti.

A közeggel kölcsönhatást a Lorentz-törvény (1.1) írja le. Munkát csak az elektromos térerő végez, a mágneses erőhatás ugyanis mindig merőleges a részecske sebességére. Belátható, hogy egységnyi térfogatú, elektromosan töltött anyagon a teljesítmény  $\mathbf{EJ}$ . A (mechanikai) teljesítmény ugyanis erő  $\times$  sebesség formában számítható. Esetünkben egy töltésre  $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ , térfogategységre  $\mathbf{F} = \rho\mathbf{E}$ . A teljesítménysűrűség tehát  $p = \mathbf{Fv} = \rho\mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{E}\rho\mathbf{v} = \mathbf{EJ}$  [lásd (1.13)]. Pozitív  $p$  esetén a tér

végez munkát a közegen, tehát a tér energiasűrűsége csökken. Ezt is figyelembe véve az alábbi alakú egyenletet keressük:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (3.19)$$

Azt felesleges hangsúlyozni, hogy az egyenletnek a Maxwell-egyenletekkel teljes összhangban kell állnia. Ez biztosan fennáll, ha a (3.19) egyenletet azokból származtatjuk.

Ezt *Poynting* 1884-ben végezte el.

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ -re szükségünk van, ezért (I)-et megszorozzuk  $\mathbf{E}$ -vel. Már csak a szimmetria miatt is szorozzuk meg (II)-t  $\mathbf{H}$ -val. A jobb oldalon azonos előjeleket kapunk, ha ezek után a második egyenletből kivonjuk az elsőt:

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (3.20)$$

Használjuk fel a  $\operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}$  azonosságot. Némi rendezés után kapjuk:

$$-\left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (3.21)$$

Ezt az összefüggést nevezzük *Poynting-tételnek*.

(3.21) akkor felel meg egyértelműen (3.19)-nek, ha

$$dw = \mathbf{E} d\mathbf{D} + \mathbf{H} d\mathbf{B} \quad (3.22)$$

teljes differenciál. Lineáris összefüggéseket feltételezve ekkor a  $w$  energiasűrűség alakja:

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2. \quad (3.23)$$

Ezt az energiasűrűséget tekintjük a VI. egyenletnek a Maxwell-egyenletek teljes rendszerében. Ezzel azt erősítjük meg, hogy lineáris közegek esetén az energiasűrűség kifejezése időfüggő esetben is megegyezik az időtől független esetével.

A különböző körülmények között az esetek egy részében  $dw$  nem teljes differenciál. Ilyenkor  $w$  nem adható meg zárt alakban a teret jellemző mennyiségek függvényeként. Ez a helyzet például hiszterézises karakterisztikák vagy erősen veszteséges közegek esetén.

Vizsgáljuk meg (3.21) jobb oldalán álló tagokat. Használjuk fel az áram ( $I$ ) kifejezését:  $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b)$ , ahonnan:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} - \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{J}. \quad (3.24)$$

Az első tagot nem nehéz azonosítani: ez az egységnyi térfogatban az áram által keltett Joule-hő. Mivel ez mindig pozitív, az előjeleket figyelembe véve mindig

csökkenti az elektromágneses energiát. A második tag előjele az áram és a beiktatott tér vektora közötti szögtől függ. A skaláris szorzat pozitív, ha az áram a tér irányában folyik. Ekkor az elektromágneses energia növekszik, ellenkező esetben csökken.

Végezetül foglalkozzunk az energiaáramlást leíró  $\mathbf{S}$  vektorral, amit *Poynting-vektornak* nevezünk. Definiáló egyenlete:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A}}{\text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (3.25)$$

Amint mértékegysége is jelzi, a vektor az irányára merőleges felületegységen időegység alatt áthaladó energia. A Poynting-tételben azonban a divergenciája szerepel. Azért a tételt nem sérti, ha  $\mathbf{S}$ -et kiegészítjük egy divergenciamentes vektorral. (Zárójelben: bármely vektortér rotációját képezve divergenciamentes vektorteret kapunk.) A ma általános felfogás szerint (ezt támasztják alá relativisztikus meg-gondolások is) az  $\mathbf{S}$  vektor egyértelmű, a (3.25) alaknak van valódi fizikai tartalma.

A (3.21) differenciális összefüggés. A gyakorlatban természetesen véges térfogatra integrális mérlegegyenletet lehet kísérletileg igazolni. Az integrális mérlegegyenlet:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} \right) dV = \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} + \int_V \mathbf{E} \mathbf{J} \cdot dV, \quad (3.26)$$

amelyik kiemeli, hogy a térfogatban az energia megváltozása részben a térfogatban lejátszódó folyamatok következménye, másrészt a térfogatot körülvevő zárt felületen átáramló energia függvénye.

Az elektromágneses térben energia áramlik, és erre az energiára megmaradási törvény érvényes. Az elektromágneses tér impulzussal is rendelkezik és az impulzusra is érvényes megmaradási tétel. Itt csak annyit rögzítünk, hogy az impulzus sűrűsége (ami értelemszerűen vektormennyiség):

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (3.27)$$

## A MAXWELL-EGYENLETEK EGYÉRTELMŰ MEGOLDHATÓSÁGA

Az (I)–(V) axiomatikus egyenletrendszerrel kapcsolatban felmerül: létezik-e megoldás, és ha igen, milyen feltételek mellett egyértelmű. Az első kérdésre a válasz általában igen nehéz, és jelentős matematikai apparátus igénybe vételét igényli. A második kérdésre a válaszadás gyakran sokkal egyszerűbb. A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy egyenleteink egyértelmű megoldásához egyrészt ismernünk kell a vizsgált tér minden pontjában a térerősségek értékét a  $t = t_0$  kezdeti időpontban, másrészt a határoló felület minden pontjában vagy  $\mathbf{E}$ , vagy  $\mathbf{H}$  tangenciális komponensének értékét a  $t_0$  kezdeti időponttól a vizsgált  $t$  időpontig. Ez megfelel a „Mit is mondanak ....?” szakaszban a kezdeti és peremfeltételekről mondottaknak.

Feltételezzük, hogy az  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  anyagállandók az időtől és a térerősségektől függetlenek. A beiktatott térerősségek hely- és időfüggése adott.

Bizonyításunk alapötlete a matematikából jól ismert: A bizonyítandó állítás ellenkezőjéről bizonyítjuk be, hogy ellentmondáshoz vezet. Esetünkben tételezzük fel, hogy az egyenleteknek két eltérő megoldása létezik:  $\mathbf{E}'$  és  $\mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}'$  és  $\mathbf{H}''$ , amelyek külön-külön eleget tesznek a kezdeti és peremfeltételeknek. Miután mindkét vektorpár a Maxwell-egyenletek megoldása, nyilvánvalóan az  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}' - \mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}' - \mathbf{H}''$  különbségük is az, hiszen az egyenletek lineárisak. Ezért a különbségi térre is érvényes a Poynting-tétel:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\varepsilon \mathbf{E}_0^2 + \mu \mathbf{H}_0^2) dV = \int_V \frac{\mathbf{J}_0^2}{\sigma} dV - \int_V \mathbf{E}_{0b} \mathbf{J}_0 dV + \oint_A (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) d\mathbf{A}. \quad (3.28)$$

A jobb oldalon álló második és harmadik integrál eltűnik. A második integrálban szereplő beiktatott különbségi tér ugyanis mindig zérus:  $\mathbf{E}_{0b} = \mathbf{E}'_b - \mathbf{E}''_b = \mathbf{0}$ . A harmadik integrálban szereplő különbségi térvektorok közül legalább az egyiknek csak normális komponense van a felületen, mert a megoldásvektorok tangenciális komponense a felületen azonos, a különbségi vektoré tehát zérus. Ennek következtében a különbségi Poynting-vektornak nincsen normális komponense a felületen, az integrál zérus.

Végezetül tehát (3.28) az alábbi egyenletre redukálódik:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\varepsilon \mathbf{E}_0^2 + \mu \mathbf{H}_0^2) dV = \int_V \frac{\mathbf{J}_0^2}{\sigma} dV. \quad (3.29)$$

A jobb oldalon álló integrál nem lehet negatív. Ez nemcsak matematikai alakjából, de fizikai tartalmából (Joule-hő) is következik. Ekkor a bal oldalon álló integrál (a negatív előjelet figyelembe véve) időben nem növekedhet. A  $t = t_0$  kezdeti pillanatban felvett értéke zérus (miért?), és miután nem vehet fel negatív értéket, zérus marad. Ez az integrál alakjából következően csak akkor lehetséges, ha

$$\mathbf{E}_0 \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_0 \equiv \mathbf{0}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{E}' \equiv \mathbf{E}'', \quad \mathbf{H}' \equiv \mathbf{H}'' \quad (3.30)$$

A két különbözőnek feltételezett megoldás tehát azonos, a *megoldás egyértelmű*.

#### Megjegyzések:

1. A megoldás egyértelműségét beláttuk, de – ahogy erre már utaltunk – nem tudjuk, hogy egyáltalán létezik-e megoldása. Erre a kérdésre csak jóval nagyobb matematikai eszköztárral felvértezve lehet választ adni.
2. A gondolatmenet nem alkalmazható időben nem változó (sztatikus, stacionárius) terek esetén. Ekkor ugyanis (1.29) bal oldalán az idő szerinti derivált eltűnik, függetlenül a tér viselkedésétől. Az ilyen feladatokban a „kezdeti érték” nem értelmezhető, ezek „peremérték”-feladatok. Megoldásuk egyértelműségére később visszatérünk.
3. Amennyiben a megoldást az egész térben keressük, a határfelület helyett a végtelenben kell feltételt kitzűznünk. Ezt „sugárzási feltételek” megadásával teljesíthetjük. Ezek két egyenértékű alakja:

$$\mathbf{E} \rightarrow -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (\mathbf{r}^0 \times \mathbf{H}) \quad \mathbf{H} \rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\mathbf{r}^0 \times \mathbf{E}), \quad (3.31)$$

ahol a  $\rightarrow$  a végtelenben vett határértéket jelenti,  $\mathbf{r}^0$  a kifelé mutató egységvektor.

A fenti összefüggések biztosítják, hogy az elektromágneses tér kifelé haladó hullámként viselkedjen, amely véges energiát szállít.

4. Az egyértelmű megoldás bizonyításában alapvető szerepet játszott, hogy az energia a térmennyiségek négyzetes kifejezése. Ez a gyakori eset (pl. a mozgási energia  $\frac{1}{2}mv^2$ ) máskor is felhasználhatóvá teszi a gondolatmenetet.

## AZ ELEKTRODINAMIKA FELOSZTÁSA A MAXWELL-EGYENLETEK ALAPJÁN

Az elektrodinamika valamennyi jelenségét a Maxwell-egyenletek írják le. Ezek általános tér- és időfüggő egyenletek. A jelenségek alapvetően a változóktól függően oszthatók fel.

A térbeli változást elhanyagolva, elejtjük az erőtér (mező) vizsgálatot, amelynek specifikuma a térbeli kiterjedés és változás. Ha a térbeli változástól eltekintünk, csak időbeli változásokat vehetünk figyelembe. Vannak csak időtől függő elektromágneses jelenségek? Igen. Ezek a koncentrált paraméterű hálózatok jelenségei. A hálózategyenletek és a Maxwell-egyenletek kapcsolatára még visszatérünk.

Ezt előre bocsátva az egyenletek két nagy jelenségekört tartalmaznak: (1.) *időtől független* és (2.) *időfüggő* jelenségeket.

### 1. Időtől független jelenségek

Írjuk fel a Maxwell-egyenleteket időfüggetlen  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  esetre.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 & (3.32a), & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} & (3.33a), \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho & (3.32b), & \operatorname{div} \mathbf{B} &= \mathbf{0} & (3.33b), \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} & (3.32c), & \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} & (3.33c). \end{aligned}$$

Az első felismerés, hogy időtől független esetben az elektromos jelenségekört leíró egyenletek (3.32) teljesen függetlenek a mágneses egyenletektől. A (3.32) egyenletcsoport által leírt jelenségkör az *elektrosztatika*.

A (3.33) egyenletek csak akkor függetlenek az elektromos tértől, ha  $\mathbf{J} = 0$ . Ebben a speciális esetben a *magnetosztatika* jelenségköréről beszélünk.

Ha  $\mathbf{J} \neq 0$ , de az áram és a többi mennyiség időben nem változik, a *stacionárius áramlás* jelenségköréről beszélünk. Az (1.12) folytonossági egyenlet értelmében ekkor  $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$  és az áramra vonatkozó alapegyenletek:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b). \quad (3.34)$$

*Megjegyzés:* az egyenletek teljes analógiában vannak a  $\rho = 0$  tértöltés nélküli elektrosztatika egyenleteivel. Kérdés, hol lehetnek a tér forrásai? Válasz: az elektródákön elhelyezkedő felületi töltések létrehozhatják a teret.

A stacionárius mágneses tér egyenletei ezek után a (3.33) egyenletek, ahol  $\mathbf{J}$ -t adottnak tekintjük, ill. (3.34)-ből határozzuk meg.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az időtől független jelenségek magukban rejtik azt a feltételezést, hogy a fénysebesség végtelen nagy. Ilyen értelemben nyilván csak közelítő megoldást jelentenek.

### 2. Időfüggő jelenségek

Ez a Maxwell-egyenletek teljes rendszerét jelenti. A jelenségekört összefoglalóan *elektromágneses hullámoknak* nevezzük. Van azonban egy olyan – lazán definiált – esetünk, amikor az eltolási áramtól eltekintünk. Más szóval a hullámtan jelenségei között eltekintünk az elektromos tér változása által keltett mágneses tértől.

A  $\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{J}|$  feltétel figyelembevételével a kvázistacionárius jelenségek egyenleteihez jutunk. Ez a közelítés igen jól működik a villamos gépek területén, ahol nagyok a vezetési áramok és nagy a mágneses tér intenzitása, de kicsi a frekvencia, és ezért lassú a terek változási sebessége.

A kvázistacionárius jelenségek minőségileg eltérnek a hullámjelenségektől.

## A MAXWELL-EGYENLETEK TISZTA SZINUSZOS IDŐBELI VÁLTOZÁS ESETÉN

A gyakorlatban a szinuszos időbeli változás kitüntetett szerepet játszik. Ennek oka egyrészt a tiszta szinuszos gerjesztés gyakori előfordulása. A forgógépek és a rezonátoros oszcillátorok (rezgőkör, üregrezonátor) szinuszos feszültséget, ill. áramot állítanak elő. Másrészt a Fourier-transzformáció igen általános függvények esetén lehetővé teszi az időben változó jelenségek vizsgálatának visszavezetését szinuszos gerjesztésre. Nem mellékes, hogy a szinuszos gerjesztés teszi lehetővé az impedancia-koncepció általános használatát térben lejátszódó jelenségek esetén is.

Tiszta szinuszos időbeli változás esetén komplex számítási technikával dolgozunk. A hálózatelméletből ismert módon a szinuszos jeleket komplex amplitúdójú exponenciális függvények valós részeként értelmezzük:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \Re \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}, \quad (3.36)$$

ahol a  $\sim$  (tilde) a komplex amplitúdót jelenti,  $\Re$  a valós (reális) rész jele.

*Figyelem!* Az elektromágneses jelenségek tárgyalása során mindig a mennyiségek komplex amplitúdójával dolgozunk. Ezért ezt általában nem jelöljük külön.

A időbeli derivált a komplex amplitúdókra felírt egyenletben a  $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$  szorzó-operátorba megy át, így az első két Maxwell-egyenlet alakja:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \varepsilon \mathbf{E} = (\sigma + j\omega \varepsilon) \mathbf{E}, \quad (3.37)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}. \quad (3.38)$$

A (3.37) egyenletet az

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon - j\sigma/\omega = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega) \quad (3.39)$$

komplex permittivitás bevezetésével még egyszerűbb alakba írhatjuk. Itt  $\varepsilon''$  láthatóan a veszteségeket írja le. Ez a veszteség nemcsak a véges vezetőképességből, hanem egyéb mikrofizikai hatásokból is származhat. A veszteségek jellemzésére szolgál a  $\delta$  veszteségi szög. A veszteség szögre:

$$\text{tg } \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}. \quad (3.40)$$

Hasonlóan értelmezhető a komplex permeabilitás:

$$\tilde{\mu}(\omega) = \mu'(\omega) - j\mu''(\omega), \quad (3.41)$$

ahol a képzetes rész a permittivitáshoz hasonlóan a veszteségeket reprezentálja.

Az egyenletekben a komplex amplitúdókhöz hasonlóan a komplex anyagállandókat sem jelöljük külön. Így az első két Maxwell-egyenlet alakja homogén közegben:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}; \omega) = j\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}; \omega) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}; \omega) = -j\omega \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}; \omega). \quad (3.42)$$

*Monokromatikusak* az egyetlen frekvencián lejátszódó tiszta szinuszos folyamatok. (A kifejezést az optikából kölcsönözték, görögül „egyszínű”, „egyetlen színt tartalmazó” jelentésű.) Monokromatikus esetben az  $\omega$  paraméterként jelenik meg az egyenletben. Többfrekvenciás esetben azonban a térjellemező vektorok és az anyagi jellemző mennyiségek is a frekvencia függvényei.

## A POYNTING-VEKTOR SZINUSZOS IDŐFÜGGÉS ESETÉN

A Maxwell-egyenletek komplex alakjából (3.21)-hez hasonlóan energia mérleg-egyenlet vezethető le. Ennek következményeit azonban egy aspektusa kivételével nem használjuk a továbbiakban. Ezért a levezetést és az energiaegyenletet nem részletezzük.

Szólunk azonban a Poynting-vektor komplex alakjáról, a *komplex Poynting-vektorról*.

Definíciószerűen:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*), \quad (3.43)$$

ahol a  $*$  a komplex konjugáltat jelöli.

Az  $\frac{1}{2}$  szorzót az indokolja, hogy amplitúdókkal (csúcértékkel) számolunk. A komplex Poynting-vektornak általában van valós és képzetes része is. Ennek megfelelően a felületi integrálja a zárt felületen átáramló hatásos és meddő teljesítményt adja:

$$P + jQ = \oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}. \quad (3.44)$$

A hatásos teljesítmény a veszteségeken átalakuló elektromágneses energia mellett az elektromágneses sugárzással eltávozó energiát is tartalmazza. A meddő teljesítmény a negyedperiódusonként oda-vissza áramló elektromágneses energiát szállítja, amely a térben tárol.

# ELEKTROSZTIKA ÉS STACIONÁRIUS ÁRAMLÁSI TÉR

## ADOTT TÖLTÉSELRENDEZÉS TERE

Az elektrosztatika alapegyenletei vákuumban:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \sigma, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (4.1)$$

A 1. fejezetben láttuk, hogy a (4.1a) egyenlet következtében az elektromos térerősségek a skalárpotenciál gradienseivel fejezhetjük ki, azaz

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (4.2)$$

és (4.1b)-ből

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.3)$$

felhasználásával adódik:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (4.4)$$

A  $\operatorname{div} \operatorname{grad}$  kettős derivált olyan gyakran fordul elő a vektoranalízisben, hogy külön szimbólumot és elnevezést kapott. A

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta \quad (4.5)$$

a Laplace-operátor. Descartes-koordinátákban:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.6)$$

(4.4)–(4.6) felhasználásával az ismert töltésselrendezés potenciáljának egyenlete a Poisson-egyenlet:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (4.7)$$

A tér azon helyén, ahol nincs töltés, az egyenlet átmegy a homogén Laplace-egyenletbe<sup>11</sup>:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (4.8)$$

<sup>11</sup> Laplace az egyenletet az „üres” térben kialakuló gravitációs potenciálra írta fel 1799-ben. Ezt általánosította Poisson az elektrosztatikus jelenségekre 1811-ben megjelent cikkében.

A (4.7) megoldását az egész térre kiterjesztve a következő alakban írhatjuk:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') V'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.9)$$

Ez nem más mint a Coulomb-potenciál kiterjesztése folytonos töltéeloszlásra. Egy  $dV$  térfogatban elhelyezkedő töltést ponttöltésnek tekinthetünk, így hozzájárulása a potenciálhoz  $\varphi(\infty) = 0$  választással:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.10)$$

Ezen potenciálok szuperpozíciója eredményezi a (4.9) kifejezést.

A fenti megoldás nem matematikai, hanem fizikai alapon született. A szigorú matematikai levezetés bebizonyítja, hogy a Poisson-egyenlet megoldása eleget tesz a

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta\varphi}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_A \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dA - \frac{1}{4\pi} \oint_A \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dA \quad (4.11)$$

egyenletnek, ahol  $r$  a  $dV$  térfogatelem távolsága a vizsgált ponttól. A fenti kifejezés a zárt  $A$  felülettel határolt  $V$  térfogatban érvényes. A jobb oldal első tagja a (4.7) egyenletre tekintettel a térfogatban elhelyezkedő töltés hatását írja le. A szigorú matematikai levezetés ennek a tagnak a megjelenésével a Maxwell-egyenletekből származtatva eljut a Coulomb-potenciálra. Így a Coulomb-törvény a Maxwell-egyenletek következményeként adódik.

A jobb oldal második és harmadik tagja a vizsgált térfogaton kívül elhelyezkedő töltések hatását jeleníti meg a vizsgált térfogatban. Látjuk: ehhez meg kell adni (és elegendő is megadni) a határoló felületen a potenciál és normális irányú gradiense értékét. A két kifejezés azonban nem független, ezért egymástól függetlenül nem adható meg. A későbbiekben bebizonyítjuk, hogy a határolófelületen elegendő *vagy* a potenciál, *vagy* a deriváltja normális komponense megadása a feladat egyértelmű megadásához.

Ezért a fenti kifejezés inkább azonosság, mintsem számítási utasítás. Fizikai tartalma azonban rendkívül érdekes.

A jobb oldal második tagja felületi töltésréteg potenciálja, míg a harmadik tag kettősréteg. Így a fizikai tartalom nyilvánvaló: a vizsgálat térfogaton kívül elhelyezkedő töltések hatása úgy is figyelembe vehető, mintha a felületen felületi töltés és kettős réteg helyezkedne el. Ezek a felületeken a térerősség, illetve a potenciál ugrik. Ez az ugrás éppen akkora, mint az előírt határfeltétel, tehát ha töltés és kettősréteg fizikailag jelen volna a felületen, ez azt jelentené, hogy a felületen kívül a potenciál és a térerősség is zérus.

A zárt felületen belül elhelyezkedő töltés is helyettesíthető a felületre helyezett töltéssel és kettősréteggel, miközben belül zérus teret és potenciált feltételezünk. Speciális esetben, ha a felület ekvipotenciális, elegendő a felületi töltésréteg helyettesítő töltésként. Ezt a tényt később, az integrálegyenleteket alkalmazó megoldási módszernél felhasználjuk.

Az egész térben történő potenciáeloszlás meghatározása esetén (4.11) jobb oldalának második és harmadik tagja eltűnik. Ennek feltétele, hogy töltés csak a véges térrészben legyen. Ekkor a

potenciál  $\frac{1}{R}$ , a potenciál deriváltja  $\frac{1}{R^2}$  arányban tűnik el a végtelenben. Mindkét integrandusz

tehát  $\frac{1}{R^3}$  nagyságrendű, miközben az integrálási felület  $R^2$ -tel arányos.  $R \rightarrow \infty$  esetén tehát

az  $\frac{1}{R^3} R^2 \sim \frac{1}{R}$  rendben tűnik el az integrál. Ezért az egész térben a megoldás (4.9) alakjában

írható le.

*Megjegyzések:*

1. A potenciál (4.9) alakú kifejezésébe természetesen a felületi, vonalszerű és ponttöltések is beleértendők. Ezek közül a felületi töltésnek kitüntetett szerepe van (fémlektrodák felületén és – később – különböző közegek határfelületén), ezért a potenciálok kifejezésben gyakran külön is szerepeltetjük:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{R} dA', \quad (4.12)$$

ahol  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ .

A kifejezésben csak óvatossággal lehet kezelni a vonalszerű és a pontszerű töltés potenciálját, mivel *szinguláris* tulajdonságúak, a végtelenhez tartanak, ha megközelítjük a töltést, azaz  $R \rightarrow 0$ .

2. Kétdimenziós feladathoz jutunk, ha az elrendezés az egyik koordináta mentén „végtelen”. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy az elrendezés hossza – változatlan keresztmetszettel – olyan nagy, hogy a végek hatásától a vizsgált térközben eltekinthetünk. Ekkor (4.12)-ben a végtelen hosszú vonaltöltés terének ismeretében. Az  $1/R$  helyébe  $\ln(1/R)$ -t írhatunk:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \cdot \ln \frac{1}{R} dA' + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int \sigma(\mathbf{r}') \ln \frac{1}{R} dl'. \quad (4.13)$$

3. A fenti megfontolásokat szabad térben kialakuló mezőre tettük. Amennyiben a töltések polarizálható szigetelők környezetében helyezkednek el, a tér számítási módszerei különbözhetnek attól függően, hogy a dielektrikum homogén (az egész tér azonos közeggel van kitöltve), vagy inhomogén, térrészenként változó permittivitással.

A) Homogén dielektrikum esetén választhatunk: vagy a valódi és polarizációs töltés összegeként kiadódó szabad töltéssel számolunk:

$$\rho_{\text{szabad}} = \rho - \text{div } \mathbf{P}, \quad (4.14)$$

amivel

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_{\text{szabad}}}{\epsilon_0}, \quad (4.15)$$

vagy a valódi töltésekre írjuk fel a Poisson-egyenletet:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (4.16)$$

B) Térrészenként változó permittivitás esetén a valódi töltéssel célszerű számolni. A dielektrikumok határfelületén a térvektorok folytonossági feltételei érvényesek. A Poisson-egyenlet megoldásakor az  $E$  tangenciális komponensének folytonossága

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad (4.17)$$

az eltolódási vektor normális komponensének folytonossága pedig

$$\epsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \quad (4.18)$$

alakba írható, ahol a  $\frac{\partial}{\partial n}$  jelölés a gradiens felületre merőleges komponensét jelöli:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} \quad (4.19)$$

4. Az elektrosztatika alapegyenlete helyfüggő permittivitás esetén is felírható. A folytonosan változó függvénnyel leírható permittivitás azonban fizikailag nem reális. A térrészenként állandó permittivitást az előzőekben vizsgáltuk.

## A GYAKORLATI ELEKTROSZTATIKA KÉRDÉSEI

Az eddigiekben előre megadott térbeli (felületi stb.) töltéeloszlás terét kerestük. Ennek a feladatnak kicsi a gyakorlati jelentősége. A gyakorlatban ugyanis a legritkább esetben ismerjük a töltések eloszlását.

Melyek tehát a gyakorlati elektrosztatika alapfeladatai?

1. Ismerjük az elektródok geometriáját. Mindegyik elektróda potenciálja adott (és természetesen állandó). Keressük a tér minden egyes pontjában a potenciált (és térerősséget), miközben mindenütt érvényes a  $\Delta\varphi = 0$  egyenlet, azaz az elektródok közötti térben *nincsen töltés!*
2. Ismerjük az elektródok geometriáját, valamint minden egyes elektróda ösztöltését. Keresendő a tér minden pontjában a potenciál (és térerősség), miközben ismét a  $\Delta\varphi = 0$  egyenlet mindenütt érvényes, az elektródokon kívüli térben nincs töltés.

## AZ ELEKTROSZTATIKA EGYENLETEINEK EGYÉRTELMŰ MEGOLDÁSA

A 3. fejezetben igazoltuk, hogy a Maxwell-egyenletek megoldása igen általános feltételek mellett egyértelmű. Már ott megjegyeztük azonban, hogy az időben nem változó terek esetén a levezetés nem alkalmazható.

A továbbiakban bemutatjuk, hogy zárt térfogatban a megoldás egyértelmű, ha a térfogat határolófelületén a potenciál vagy a térerősség normális komponense (ez a felületi töltéssűrűségnek felel meg) adott. A bizonyítás homogén közeget feltételez.

A bizonyítás elvégzéséhez szükségünk van az ún. *Green-tételre*.<sup>12</sup> Ez a tétel a matematika Gauss-tételének közvetlen folyománya.

Alkalmazzuk a Gauss-tételt az

$$\mathbf{u} = \psi \operatorname{grad} \varphi \quad (4.20)$$

vektorfüggvényre, ahol  $\psi$  és  $\varphi$  folytonosan differenciálható skalárfüggvények. Az  $\mathbf{u}$ -t a Gauss-tételbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\int_V \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \varphi) dV = \oint_A \psi \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{dA}. \quad (4.21)$$

A vektoranalízisből ismert, hogy

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varphi, \quad (4.22)$$

azaz

$$\operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \varphi) = \psi \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \varphi - \psi \Delta\varphi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi, \quad (4.23)$$

amit (4.21)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\int_V (\psi \Delta\varphi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi) dV = \oint_A \psi \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{dA}. \quad (4.24)$$

<sup>12</sup> A tételt Green angol matematikus és fizikus 1824-ben fogalmazta meg.

$\psi$ -t és  $\varphi$ -t cseréljük fel (4.24)-ben.

$$\int_V (\varphi \Delta \psi) + (\text{grad } \psi \text{ grad } \varphi) dV = \oint_A \varphi \text{ grad } \psi d\mathbf{A}. \quad (4.25)$$

A (4.25)-ből (4.24)-et kivonva kapjuk a *Green-tételt*:

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_A \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dA. \quad (4.26)$$

Abban a speciális esetben, ha  $\varphi = \psi$ , a tétel alakja (4.24)-ből:

$$\int_V \left[ \varphi \Delta \varphi + (\text{grad } \varphi)^2 \right] dV = \oint_A \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA. \quad (4.27)$$

Tételezzük fel, hogy a vizsgált térrész peremén:

- vagy  $\varphi$  adott (Dirichlet-peremfeltétel),
- vagy  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  adott (Neumann-peremfeltétel).

Mindkét feltételrendszer fizikailag kézenfekvő.

A bizonyítás során feltételezzük, hogy a feltételeknek eleget tevő két különböző megoldása létezik az azonos töltéssűrűséghez tartozó  $\Delta \varphi = -\rho/\varepsilon$  Poisson-egyenletnek. (Ugye ismerős megfontolás?) A két megoldás különbsége

$$\Phi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (4.28)$$

a peremfeltételek nullák, és mivel a két megoldásra vonatkozó Poisson-egyenletben a töltéeloszlás azonos, a különbségi megoldásra  $\Delta \Phi = 0$ . A (4.27)-be  $\Phi$ -t helyettesítve:

$$\int_V \Phi \Delta \Phi + (\text{grad } \Phi)^2 dV = \oint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad (4.29)$$

ahonnan az előzőekben elmondottak alapján

$$\int_V (\text{grad } \Phi)^2 dV = 0 \quad (4.30)$$

ami csak  $\text{grad } \Phi = 0$  esetén teljesül, tehát a vizsgált térfogatban  $\Phi$  állandó. (Ismét a négyzetes kifejezés integrálja a bizonyítás kulcsa!)

*Dirichlet-peremfeltétel* esetén  $\Phi$  a peremen zérus, tehát zérus kell, hogy legyen a térfogatban is. Így  $\varphi_1 = \varphi_2$ , a különbözőknek feltételezett megoldások azonosak.

*Neumann-peremfeltétel* esetén a megoldások egy additív állandó erejéig azonosak. A potenciálok additív állandója ugyanarra az elektromos tereeloszlásra vezet.

A (4.29) egyenlet jobb oldalát tekintve nyilvánvaló, hogy az egyértelműség vegyes peremfeltétel esetén is fennáll. Megadhatjuk tehát  $\varphi$ -t a perem egy részén és  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ -t a

perem másik részén.

Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy a Poisson- és így a Laplace-egyenlet megoldásában is a határolófelületen nem adhatjuk meg egyszerre  $\varphi$  és  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  értékét. Az egyenlet megoldása ugyanis bármelyik peremfeltétel megadása esetén egyértelmű. A két megoldás azonban általában nem feleltethető meg egymásnak.

*Megjegyzések:*

1. Az előző megfontolások az ún. *belső peremérték-feladattal* foglalkoztunk. Itt a határolófelületen véges térfogatot fognak körül. Más szóval a vizsgált térfogat koordinátái nem tartanak végtelenhez. Más a helyzet a végtelen is tartalmazó térben számított potenciál, az ún. *külső peremérték-feladat* esetén. Ekkor a keresett függvény viselkedésére a „végtelenben” külön-feltételeket kell előírni. A gyakorlatban mindig véges töltésmennyiséget tételezünk fel az elektródokon. Ugyanakkor a végtelenben a potenciál legalább  $1/r$  módon kell, hogy a nullához tartson.
2. A homogén térről általánosabb az az itt nem vizsgált elrendezés, amikor a közeg térrészenként homogén, azaz a permittivitás térrészenként állandó. Ebben az esetben is bizonyítható, hogy a megoldás Dirichlet- vagy Neumann-peremfeltételek esetében egyértelmű. A bizonyítás azonban olyan matematikai apparátust és megfontolásokat igényel, amelyek messze túlmutatnak jelenlegi célkitűzéseinken.

Tekintsünk egy magában álló elektródát! Ha az elektródát feszültség alá helyezzük, a felszínén töltés jelenik meg. (A folyamatot úgy kell elképzelni, hogy feszültségforrást kapcsolunk az elektród és a 0 potenciálú pont közé. Utóbbi a teljes térben elvben a végtelen, a gyakorlatban egy távoli – és lehetőleg nagy kiterjedésű – elektród.) A Maxwell-egyenletek lineárisak, ha a közeg is lineáris, azaz a permittivitása nem függ a térerősségtől. (A helytől függhet, a közeg nem kell, hogy homogén legyen.) A linearitás következtében az elektródán megjelenő töltés és az elektród potenciálja arányosak egymással, kétszer akkora töltés kétszer akkora potenciált hoz létre. A töltés és az elektródapotenenciál hányadosát kapacitásnak nevezzük:

$$C = \frac{Q}{U}, \quad (4.31)$$

ahol  $U$  az elektród végtelenhez viszonyított potenciálja.

A kapacitás csak a geometria és a közegjellemzők függvénye, és mint ilyen, az elrendezés sajátos jellemzője. Egysége a farad (F),  $1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}$ .

Példaként tekinthetünk egy homogén közegben magában álló  $r_0$  sugarú gömböt. Keressünk olyan helyettesítő töltéselrendezést, amelynek a terében a gömb ekvipotenciális felület. Ez a töltéselrendezés a ponttöltés. A ponttöltés potenciálja a Coulomb-potenenciál:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

amelynek zérus értéke a végtelenben van.

Ha az  $r_0$  sugarú gömb  $U$  potenciálon van, akkor

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0},$$

ahonnan

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 r_0 \quad (4.32)$$

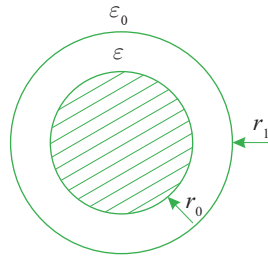
az  $r_0$  sugarú, magában álló gömb kapacitása.

Amint látjuk a gömb kapacitása arányos a sugarával. (Érdekeségként megjegyezzük, hogy az 1900-as évek első felében a kereskedelmi forgalomban lévő kondenzátorok kapacitásának értékét sokszor a velük egyenlő kapacitású gömb sugarával adták meg, azaz a kapacitások értékét *cm-ben* mérték; 1 cm 1,1 pF-nek felelt meg.)

A megfontolásból nyilvánvaló, hogy homogén  $\varepsilon$  permittivitású közegben  $\varepsilon_0$  helyébe  $\varepsilon$ -t kell helyettesíteni. Ez azt jelenti, hogy a kapacitás  $\varepsilon_r$ -szeresére nő. (Miért?)

Egyszerű példán mutassuk be, hogy a kapacitás inhomogén dielektrikum esetén is csak az elrendezés függvénye.

Fedje az  $r_0$  sugarú gömböt egyenletes vastagságú  $\varepsilon (\neq \varepsilon_0)$  dielektrikum.



4.1. ábra  
Rétegezett dielektrikum

A Gauss-tétel értelmében mindenütt

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2},$$

ebből következik, hogy

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r^2}, \quad r_0 \leq r \leq r_1;$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}, \quad r \geq r_1.$$

A potenciál egyszerű számítással:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1}, \quad r_0 \leq r \leq r_1$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}, \quad r \geq r_1,$$

ahonnan

$$C = 4\pi \left[ \varepsilon \frac{r_0 r_1}{r_1 - r_0} + \varepsilon_0 r_1 \right], \quad (4.33)$$

ami nyilvánvalóan csak az elrendezés (geometria + közegjellemzők) függvénye.

Az elemi hálózatelméletből ismert, hogy a töltött kondenzátorban tárolt energia:

$$W = \frac{1}{2}CU^2. \quad (4.34)$$

Vajon mi a kapcsolat az elektromágneses térben tárolt energia és a fenti energiakifejezés között?

Az elektrosztatikai tér energiasűrűsége:

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}^2, \quad (4.35)$$

így az egész térben tárolt energia:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon\mathbf{E}^2 dV = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{E}\mathbf{D} dV. \quad (4.36)$$

Helyettesítsük  $\mathbf{E}$  helyébe  $-\text{grad } \varphi$ -t:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{E}\mathbf{D} dV = -\frac{1}{2}\int_V (\text{grad } \varphi)\mathbf{D} dV = \frac{1}{2}\int_V \varphi \text{div } \mathbf{D} dV - \frac{1}{2}\int_V \text{div}(\varphi\mathbf{D})dV. \quad (4.37)$$

ahol felhasználtuk a

$$\text{div}(\varphi\mathbf{D}) = \varphi \text{div } \mathbf{D} + \mathbf{D} \text{grad } \varphi \quad (4.38)$$

azonosságot, és a Gauss-tétel felhasználásával:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \varphi \text{div } \mathbf{D} dV - \frac{1}{2}\oint_A \varphi\mathbf{D} d\mathbf{A} \quad (4.39)$$

A felületi integrál a végtelenben eltűnik, hiszen  $\varphi$  a végtelenben  $1/r$ -rel,  $\mathbf{D}$  pedig

$1/r^2$ -tel arányos. Így az integrál határértéke  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = 0$ .

A felületi integrált a véges távolságban azokra a felületekre is ki kell terjesztenünk, amelyek  $\varphi$  vagy  $\mathbf{D}$  szakadásait körülfogják és így kizárják a vizsgált térfogattól.

Esetünkben  $\mathbf{D}$ -nek az elektróda felületén lévő töltésen van szakadása. A zárt elektróda felületén  $D_n = \sigma$ , és így (4.39) az alábbi alakba írható:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho dV + \frac{1}{2}\oint_A \varphi\sigma dA,$$

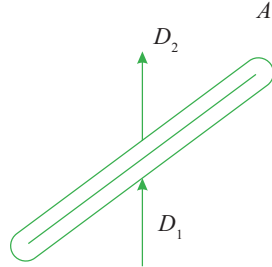
ahol a második integrál a felületi normális választása miatt vált előjelet.

A (4.30) kifejezés a térben elosztott energia helyett az energiát a lokalizált töltések potenciális energiájaként fejezi ki. Ez tipikusan a távolhatási szemléletmód. Ha általánosan az energiát a (geometriai) térben elosztva képzeljük el. Mindenütt tárol energiát, ahol térerősség van, nemcsak ott, ahol töltések vannak. Abban a speciális esetben, amikor a töltés nyitott felületen helyezkedik el, az eltolási vektor normális komponensének ugrása a folytonossági feltételek következtében éppen  $\sigma$ .

Ekkor

$$-\frac{1}{2} \oint \varphi \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \frac{1}{2} \int_A \varphi (D_{1n} - D_{2n}) \, dA = \frac{1}{2} \int_A \varphi \sigma \, dA, \quad (4.41)$$

mert a felületet körülvevő zárt felületet rázsugorítjuk a nyitott felületre (4.2. ábra).



4.2. ábra  
A (4.41) egyenlet  
számításához

A magában álló elektródát körülvevő térben nincsen valódi töltés. Az energia számításánál tehát (4.40) második integrálját kell kiértékelni:

$$W_e = \frac{1}{2} \oint_A U \sigma \, dA = \frac{1}{2} U \oint_A \sigma \, dA = \frac{1}{2} U Q, \quad (4.42)$$

mert az elektróda ekvipotenciális.  $Q$  az összeköttetés felhasználva a kapacitás (4.31) definícióját:

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \quad (4.43)$$

azaz az ismert eredményre jutottunk.

Ismét hangsúlyozzuk, hogy bár (4.36) és (4.43) azonos eredményre vezet, a mögöttük álló szemlélet gyökeresen különböző.

## KONDENZÁTOR

Az előző pontban megismerkedtünk a kapacitás fogalmával. A kapacitást egyetlen elektródához rendeltük. Az elektródán véges töltés helyezkedett el, ezt a töltést az eredetileg mező nélküli elrendezésből egy feszültségforrás szállította a 0 potenciálú helyről. Mivel eredetileg nem alakult ki mező, nem lehettek töltések jelen, az elrendezés elektromosan semleges volt. Ezért az elektródán megjelenő  $Q$  töltést a 0 potenciálú helyen  $-Q$  töltésnek kell kompenzálnia. Miután a 0 potenciálú helyet a végtelenben választottuk, ennek a kompenzáló töltésnek a végtelenben kell megjelennie egy „virtuális elektródán”.

A gyakorlatban rendkívül sokszor ez a második elektróda a véges térrészben, még hozzá a másik elektródához közel helyezkedik el. A kételektródás elrendezést (ilyenkor az elektródákat gyakran mondjuk fegyverzetnek) kondenzátornak nevezik. A kondenzátorban úgy hozunk létre feszültséget az elektródák között, hogy az eredetileg semleges elrendezésben az egyik lemezről a másikra viszünk át töltést, így a fegyverzeteken valóban  $+Q$  és  $-Q$  töltés jelenik meg. A kondenzátor kapacitása a lemezek potenciálkülönbségével, azaz a lemezek közötti  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  feszültséggel kifejezve, ahol  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  a két elektróda potenciálja formailag egybeesik a (4.31) kifejezéssel:  $C = Q/U$ . A kondenzátorban tárolt energia kiszámításához most a (4.41) formulát kell használni, ha az elektródák nyitott felületek.

Az integrálást mindkét elektródán el kell végeznünk. Miután az elektródák most is ekvipotenciálisak, az integrálokból a potenciált kiemelve az  $\int_A \sigma \, dA$  tagok maradnak, melyek  $+Q$  és  $-Q$  értéket adnak. Ezzel

$$W_e = \frac{1}{2} \varphi_1 Q + \frac{1}{2} \varphi_2 (-Q) = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) Q = \frac{1}{2} U Q \quad (4.44)$$

Az energia kifejezése formailag teljesen megegyezik (4.42)-vel. Ne feledjük azonban:  $Q$  most az egyik fegyverzeten levő töltés abszolút értéke,  $U$  pedig a fegyverzetek közötti feszültség. Utóbbinak szintén az abszolút értékét kell vennünk, hiszen az energia nem negatív mennyiség.

## RÉSZKAPACITÁSOK

Az elektrosztatika alapfeladatainak felsorolásánál említettük azt a feladatot, amikor több elektródából álló rendszerben az elektródák töltését ismerjük. Ekkor a tér meghatározása visszavezethető az első alapfeladatra, ha a töltések ismeretében meg tudjuk határozni az egyes vezetők potenciálját, majd a potenciálok ismeretében megoldjuk a peremértékfeladatot.

A linearitás következtében nyilvánvaló, hogy az elektródok potenciálja és a töltések közötti összefüggés lineáris. Ezért  $n$  elektródokból álló rendszer elektródapotenenciáljaira a következő *lineáris* egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 + \dots + p_{1n} Q_n, \\ \varphi_2 &= p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 + \dots + p_{2n} Q_n, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \varphi_n &= p_{n1} Q_1 + p_{n2} Q_2 + \dots + p_{nn} Q_n. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Az itt szereplő  $p_{ik}$  együtthatók csak a geometriától és a (lineáris) közegek permittivitásától függenek. Fizikai jelentésüket könnyen meg tudjuk adni.

Legyen

$$Q_l = 0, \text{ ha } l \neq k, \text{ és } Q_l = 1, \text{ ha } l = k.$$

Ezt (4.45)-be helyettesítve  $\varphi_i = p_{ik}$ . Más szóval  $p_{ik}$  az  $i$ -edik elektróda potenciálja, ha a  $k$ -adik elektróda töltése egységnyi, míg a többi nulla.

A (4.45) egyenletrendszert a töltésekre megoldva:

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{11} \varphi_1 + c_{12} \varphi_2 + \dots + c_{1n} \varphi_n, \\ Q_2 &= c_{21} \varphi_1 + c_{22} \varphi_2 + \dots + c_{2n} \varphi_n, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ Q_n &= c_{n1} \varphi_1 + c_{n2} \varphi_2 + \dots + c_{nn} \varphi_n. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Itt az  $c_{ik}$ -ket kapacitáseggyütthatónak nevezzük.  $c_{ii}$  az  $i$ -edik vezető *saját kapacitása*,  $c_{ik}$  ( $i \neq k$ ) pedig az  $i$ -edik és  $k$ -adik vezető *kölcsönös kapacitása*. A kapacitáseggyütthatók jelentése könnyen magyarázható:  $c_{ik}$  az  $i$ -edik elektród töltése, ha a  $k$ -adik elektród potenciálja egységnyi és a többi elektród potenciálja zérus.

Az együtthatókra reciprocitási tétel érvényes. Bizonyítható ugyanis, hogy  $p_{ik} = p_{ki}$  és  $c_{ik} = c_{ki}$ , azaz a (4.45) és (4.46) egyenletek mátrixa szimmetrikus.

Az energia (4.42) kifejezését használva több elektróda esetén a rendszer elektrosztatikus energiája:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_i \varphi_j. \quad (4.47)$$

Az energiakifejezés a potenciálok szorzatát tartalmazó ún. kvadratikus kifejezés.

Szokásos a (4.46) egyenlet helyett olyan összefüggést használni, amely a potenciálok helyett az elektródok potenciálkülönbségét tekinti ismeretlennek. Ezzel lényegében az elektródapárok közötti kapacitásokat definiáljuk.

Alakítsuk át (4.46) minden egyenletét a következőképpen

$$Q_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} \varphi_k = \sum_{k=1}^n c_{ik} (\varphi_k - \varphi_i + \varphi_i) = \sum_{k=1}^n -c_{ik} (\varphi_i - \varphi_k) + \sum_{k=1}^n c_{ik} \varphi_i. \quad (4.48)$$

$$\text{Bevezetve a } C_{i0} = c_{i1} + c_{i2} + \dots + c_{in}, \quad (4.49-1)$$

$$C_{ik} = -c_{ik} \quad (i \neq k) \quad (4.49-2)$$

együtthatókat, (4.48) a következő alakba írható:

$$Q_i = \sum_{k=1}^n C_{i0} \varphi_i + C_{ik} (\varphi_i - \varphi_k), \quad (4.50)$$

vagy  $\varphi_i = U_{i0}$ ,  $\varphi_i - \varphi_k = U_{ik}$  jelöléssel:

$$Q_i = C_{i1} U_{i1} + C_{i2} U_{i2} + \dots + C_{i0} U_{i0} + \dots + C_{in} U_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.51)$$

Ez az egyenletrendszer is szimmetrikus, azaz  $C_{ik} = C_{ki}$ .

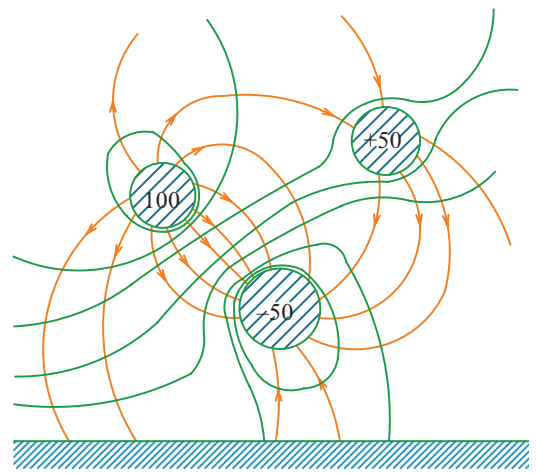
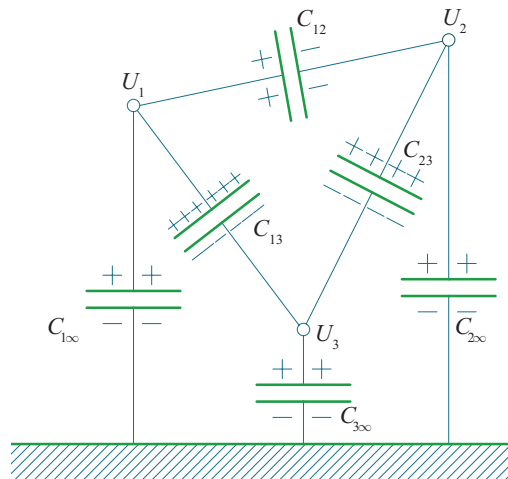
Az egyenlet úgy értelmezhető, hogy az elektródok között  $C_{ik}$  részkapacitású kondenzátor helyezkedik el, míg az elektróda és 0 potenciálú föld között  $C_{i0}$  földkapacitású kondenzátor. Három elektródra és a földre az elrendezés, és kondenzátorból álló helyettesítő képe a 4.3. és 4.4. ábrán látható.

4.3. ábra

A részkapacitások helyettesítő kapcsolása három vezeték esetén

4.4. ábra

Három különböző feszültségen levő, a föld közelében elhelyezett vezető ekvipotenciális felület- és erővonalrendszere. A 4.2. ábrán ezen elrendezés helyettesítő kapcsolását rajzoltuk meg



A részkapacitások fegyverzetein fellépő töltések összege megegyezik az elektróda töltéseivel. A részkapacitások tehát a többielektrodás elrendezés szemléletes áramkörti modelljét adják meg.

## STACIONÁRIUS ÁRAMLÁSI TÉR

A 3. fejezetben felírtuk az *elektrosztatikus tér* és a *stacionárius áramlási tér* egyenletét:

Elektrosztatika		Stacionárius áramlási tér	
$\text{rot } \mathbf{E} = 0$	(4.52)	$\text{rot } \mathbf{E} = 0$	(4.55)
$\text{div } \mathbf{D} = \rho$	(4.53)	$\text{div } \mathbf{J} = 0$	(4.56)
$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$	(4.54)	$\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b)$	(4.57)

Itt a  $\gamma$  a vezetőképességet jelöli.

Az  $\mathbf{E}_b = 0$  feltétel mellett az áramlási tér egyenletei teljes analógiában vannak a töltésmentes térrészben kialakuló elektrosztatikus tér egyenleteivel. Az analóg mennyiségek:

Elektrosztatika	Stacionárius áramlási tér
$\mathbf{E}$	$\mathbf{E}$
$\mathbf{D}$	$\mathbf{J}$
$\varepsilon$	$\gamma$

Az elektromos tér (4.55) értelmében rendelkezik skalárpotenciállal:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (4.58)$$

és a skalárpotenciálra a

$$\Delta\varphi = 0. \quad (4.59)$$

Laplace-egyenlet érvényes.

Miután a vizsgált térben az áramnak (4.56) értelmében nincsen forrása, az áram forrásai a fémelektrodok lehetnek. Ez az elektrosztatika felületi töltésével analóg. Az áram felületi forrassűrűsége  $\gamma_{\text{vezető}} E_n$  teljes analógiában az  $\varepsilon E_n = \gamma_{\text{töltés}}$  elektrosztatikai azonossággal. Egy elektróda összárama:

$$I = \oint_A \mathbf{J} \, d\mathbf{A} = \oint_A \gamma \mathbf{E} \, d\mathbf{A}, \quad (4.60)$$

ahol a zárt felületet az elektródára kell zsugorítanunk. Összevetve (4.60)-at (3.4)-gyel kapjuk, hogy az áram és az elektrosztatika töltés analóg mennyiségek. Az elektróda vezetése:

$$G = \frac{I}{\gamma}. \quad (4.61)$$

Ismét teljes az analógia a kapacitással. Miután a (4.59) Laplace-egyenlet megoldása előírt peremfeltételekkel egyértelmű, (4.61)-ből és a kapacitás (4.31) definíciójából homogén térrészben azonos elektródakonfigurációra.

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\gamma}. \quad (4.62)$$

A kondenzátor kapacitásához hasonlóan definiálható a vezetés két fémelektróda között, ha a két elektróda árama  $+I$  és  $-I$ . Értelemszerűen több elektróda esetén a részkapacitásokkal analóg részvezetések definiálhatunk.

Írjuk fel az analóg mennyiségek teljes listáját:

Elektrosztatika	Stacionárius áram
<b>E</b>	<b>E</b>
<b>D</b>	<b>D</b>
$\varepsilon$	$\gamma$
$Q$	$I$
$C$	$G$

Egy megjegyzés még idekívánkozik. Áramlási térben – az elektrosztatikával ellentétben – rendkívül gyakori a  $\partial\varphi/\partial n = 0$  peremfeltétel (homogén Neumann-peremfeltétel). Ennek oka, hogy vezető közegből az áram szigetelőbe átlépni nem tud, ezért a vezető-szigetelő perem felületén az áramnak nincs normális komponense.

# STACIONÁRIUS ÁRAM MÁGNESES TERE

A Maxwell-egyenleteken alapuló felosztás során stacionárius  $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$  áram esetén a következő egyenletek írják le a jelenségeket

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (5.1)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5.3)$$

ahol  $\mu = \mu_r \mu_0$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$ .

Homogén közegben a három egyenlet kettőre redukálható:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}, \quad (5.4)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (5.2)$$

<sup>13</sup> Az elektrosztatikus tér számításánál találoztunk a kérdéssel.

Ismét<sup>13</sup> a klasszikus feladathoz jutottunk: meg kell határozni egy vektorteret a rotációjának és divergenciájának ismeretében. Az egyenletrendszer megoldása egyszerű azokban a térrészekben, ahol az áramsűrűség nulla, mert itt  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$  és az indukcióvektor előállítható egy (mágneses) skalárpotenciál gradienseként:  $\mathbf{B} = -\text{grad } \varphi_m$ . Ekkor elvben az elektrosztatika számítási módszerei alkalmazhatók. A peremfeltételek azonban eltérnek, továbbá a közegek mágneses tulajdonságai is más jellegűek, mint a dielektrumok elektromos tulajdonságai. Ezért – és mivel áram jelenlétében *nem* a skalárpotenciál a megoldás segédmenyisége – az általános egyenletrendszer megoldását keressük.

Mivel  $\mathbf{B}$  (5.2) értelmében mindig divergenciamentes, kell léteznie olyan  $\mathbf{A}$  vektortérnek, amelynek  $\mathbf{B}$  éppen a rotációja:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (5.5)$$

Ezt a  $\mathbf{A}$  vektorteret *vektorpotenciálnak* nevezzük.

Egyértelmű-e a vektorpotenciál? A gyanú azért ébredhet, mert az egyszerűbb skalárpotenciál nem egyértelmű, csak egy additív állandó erejéig meghatározott. A helyzet itt még bonyolultabb.  $\mathbf{B}$  értéke ugyanis nem változik, ha  $\mathbf{A}$ -hoz olyan

vektorfüggvényt adunk, amelynek rotációja 0. Ilyen vektorfüggvényt könnyen tudunk előállítani: bármely kellőképpen deriválható skalárfüggvény gradiense rotációmentes. Ha tehát  $\mathbf{A}$  megfelelő vektorpotenciál, akkor

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \text{grad } \psi \quad (5.6)$$

is az. Az ilyen típusú transzformációt *mértéktranszformációnak* nevezzük.

Miért éppen mértéktranszformáció? Nos azért, mert az átalakításra az ad lehetőséget, hogy (5.5) csupán  $\mathbf{A}$  rotációját írja elő.  $\text{div } \mathbf{A}$  megválasztásában nagy szabadságunk van. A vektorpotenciál divergenciájának megválasztását nevezik a fizikában *mértékválasztásnak*. Innen a transzformáció neve is. A mértékválasztás, ill. a mértéktranszformáció lehetővé teszi, hogy a számításokat  $\mathbf{A}$  legkényelmesebb alakjával végezzük el. Nézzük, milyen „mérték” tűnik kényelmesnek (optimálisnak) esetünkben?

Helyettesítsük (5.5)-öt az (5.4) egyenletbe:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}, \quad (5.7)$$

és felhasználva a  $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$  azonosságot, az egyenlet alakja:

$$\text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}. \quad (5.8)$$

Most éljünk a mértékválasztás lehetőségével és legyen  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  (Ezt a választást Coulomb-mértéknek nevezzük.)

Ezzel az alábbi egyenlet:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (5.9)$$

vektorális Poisson-egyenlet. Az egyenlet derékszögű (Descartes-) koordinátákban mindhárom komponensre vonatkozó skalár egyenletet jelent, azaz

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= -\mu J_x, \\ \Delta A_y &= -\mu J_y, \\ \Delta A_z &= -\mu J_z. \end{aligned} \quad (5.10)$$

A megoldást a skaláris egyenletre elektrosztatikából ismerjük (4.11). Ezt az (5.10) komponens-egyenletekre alkalmazva és egyetlen vektorba összefogva (5.9) megoldása az egész térben:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV. \quad (5.11)$$

Az így meghatározott vektorpotenciálva, a  $\text{div } \mathbf{J} = 0$  következtében:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (5.12)$$

Felmerül a kérdés, hogy az (5.6) mértéktranszformációnak milyen feltételeknek kell eleget tennie, hogy  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$  legyen, azaz a transzformáció ne változtassa meg a vektorpotenciált. Ezt a helyzetet mértékinvarianciának nevezzük. (5.6)-ból  $\mathbf{A}^*$ -t (5.12)-be helyettesítve:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}^* = 0 = \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = -\Delta \psi \quad (5.13)$$

azaz a mérték invariáns, ha

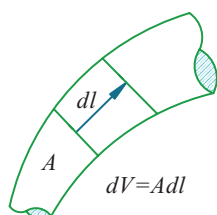
$$\Delta \psi = 0 \quad (5.14)$$

a  $\psi$  skalár kielégíti a Laplace-egyenletet. (Felhasználtuk, hogy  $\mathbf{A}$  önmagában divergenciamentes.) Ha a végtelenben nincs forrás, (5.14) megoldása csupán a  $\psi$  konstans függvény:  $\psi = \text{konstans}$ .

## VONALSZERŰ VEZETÉKBEN FOLYÓ ÁRAM TERE

A mérnöki gyakorlatban az esetek döntő többségében a mágneses teret keltő áram vékony vezetékben folyik. (A térben eloszló áramok által keltett tereknek leggyakrabban az asztro- és geofizikában van szerepük.) Ezért indokolt a vékony vezetékben folyó és ezért igen jól lokalizálható áramok által keltett mágneses tér számításának vizsgálata.

5.1. ábra  
Lineáris vezető  
térfogateleme



A vezető  $dl$  hosszúságú szakaszának a térfogata  $adl$  formába írható, ahol  $a$  a keresztmetszet (5.1. ábra). Az áramsűrűség iránya a vezeték tengelye irányába mutat, ezért  $d\mathbf{l}$ -t vektorként kezeljük. (5.11)-be helyettesítve:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_a \frac{\mathbf{J}}{r} dV = \frac{\mu}{4\pi} \oint_L \frac{JA}{r} d\mathbf{l} = \frac{\mu}{4\pi} I \oint_L \frac{d\mathbf{l}}{r}, \quad (5.15)$$

ahol felhasználtuk, hogy a divergenciamentes áram a vezeték mentén állandó, továbbá divergenciamentesség felételezi, hogy a vezeték zárt.

A mágneses tér ezek után a vektorpotenciál rotációjából számítható:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}_p \mathbf{A} = \operatorname{rot}_p \frac{1}{4\pi} I \oint \frac{d\mathbf{l}_Q}{r_{PQ}} = \frac{I}{4\pi} \oint \operatorname{rot}_p \frac{d\mathbf{l}_Q}{r_{PQ}}. \quad (5.16)$$

A rotációképzés annak a pontnak a koordinátái szerint történik, ahol a teret keressük, az integrálás pedig az ívelem koordinátái szerint.

Felhasználva a

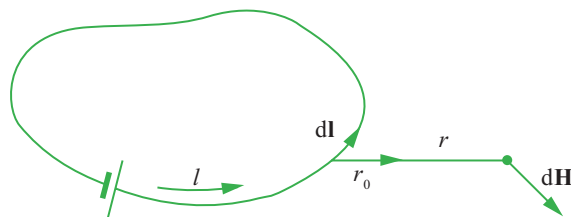
$$\operatorname{rot}(u\mathbf{v}) = \operatorname{grad} u \times \mathbf{v} + u \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad (5.17)$$

azonosságot,

14 Biot és Savart 1820-ban kísérleti úton állapították meg az egyenes vezetékben folyó áram által a tér egy pontjában létrehozott mágneses teret. Ez az év az áram és mágneses tér kapcsolatával kapcsolatos „csillagidő” volt. Az áram és mágneses kölcsönhatását Ørsted dán fizikus ebben az évben publikálta. Ugyanebben az évben végezte Ampère az áramok kölcsönhatását megállapító korszakalkotó kísérleteit.

5.2 ábra

A Biot–Savart-törvény értelmezéséhez



$$\operatorname{rot}_P \frac{d\mathbf{l}_Q}{r_{PQ}} = \operatorname{grad}_P \frac{1}{r_{PQ}} \times d\mathbf{l}_Q + \frac{1}{r_{PQ}} \operatorname{rot}_P d\mathbf{l}_Q, \quad (5.18)$$

ahol a második tag zérus, mert  $d\mathbf{l}$  nem függ  $P$  koordinátáitól. Ezért:

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \operatorname{rot}_P \frac{d\mathbf{l}_Q}{r_{PQ}} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \operatorname{grad}_P \frac{1}{r_{PQ}} \times d\mathbf{l}_Q = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2}, \quad (5.19)$$

ahol  $\mathbf{r}_0$  a  $Q$  pontból a  $P$  pontba mutató egységvektor, (5.19) a Biot–Savart-törvény<sup>14</sup> (5.2. ábra).

A törvény levezetéséből két figyelmeztetést kapunk:

1. A törvény csak *homogén* közegben adja meg helyesen a mágneses térerősséget, jóllehet  $\mu$  az (5.19) kifejezésben nem szerepel.
2. A törvény csak zárt áramkör egészének a hatását írja le. Ennek ellenére csábító úgy értelmezni, hogy a vezeték  $d\mathbf{l}$  hosszúságú darabkáján folyó áram:

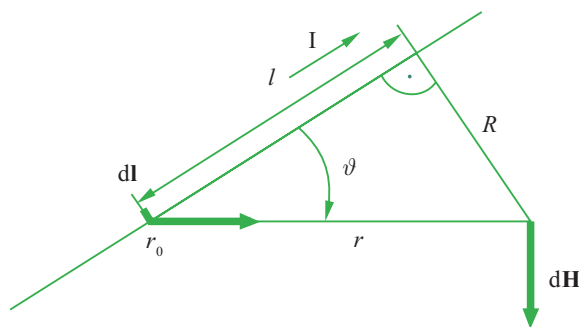
$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2} \quad (5.20)$$

mágneses teret hoz létre és a teljes tér ezen hozzájárulások összege. [Ráadásul (5.20)  $1/r^2$  távolságfüggést tartalmaz a Coulomb-törvényhez hasonlóan!]

Ennek fizikai tarthatatlanságát egyebek között az is mutatja, hogy az  $I d\mathbf{l}$  áram nem tesz eleget a stacionárius folytonossági egyenletnek, hiszen kezdete és vége van.

A Biot–Savart-törvényt felhasználva határozzuk meg egy végtelen hosszú egyenes vezetőben folyó áram által keltett mágneses teret. (Zárt ez a vezető?)

5.3. ábra



Az 5.3. ábrán látható, hogy  $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0$  az általuk kifeszített síkra mindig merőleges, a mágneses erővonalak tehát koncentrikus körök, amelyek középpontja a vezetéken van.

(5.19)-be be kell helyettesítenünk  $r = \sqrt{R^2 + l^2}$ , valamint a  $|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0| = dl \sin \vartheta = dl \frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}}$  kifejezéseket. Ezzel

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{4\pi} R \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{(R^2 + l^2)} = \frac{I}{2\pi R}. \quad (5.21)$$

Ez volt a Biot és Savart által kísérletileg igazolt összefüggés: az egyenes vezető mágneses terének erőssége fordítva arányos a vezetéktől mért távolsággal (és persze a linearitás miatt egyenesen arányos az árammal!)

A vektorpotenciál ismeretében könnyen határozható meg bármely zárt görbe által feszített felület fluxusa. A fluxus (1.34) definíciója alapján:

$$\Phi = \int_a \bar{\mathbf{B}} d\bar{\mathbf{a}} = \int_a \text{rot } \bar{\mathbf{A}} da \quad (5.22)$$

A Stokes-tétel értelmében:

$$\int_a \text{rot } \mathbf{A} da = \oint_L \mathbf{A} dl, \quad (5.23)$$

és ezt (5.22)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A} dl. \quad (5.24)$$

A vektorpotenciál ismeretében a fluxus a felületi integrál helyett az egyszerűbb vonalintegrállal számítható.

*Figyelem!* Meg kell jegyeznünk, hogy a vektorpotenciál kiszámítása alig jelent kevesebb munkát, mint a tér közvetlen számítása (ha ez lehetséges). Ugyanakkor a vektorpotenciál ismeretében a tér meghatározásához még egy rotáció kiszámítása tartozik minden egyes pontban.

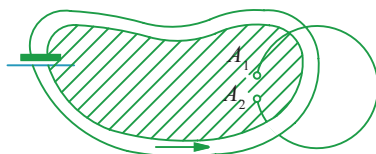
## MÁGNESES SKALÁRPOTENCIÁL

Már a bevezetőben említettük, ahol áram nem folyik, tehát a stacionárius térerősség rotációmentes, a térerősség megadható egy (mágneses) skalárpotenciál gradienseként:

$$\mathbf{H} = -\text{grad}\varphi_m. \quad (5.25)$$

Ennek a skalárpotenciálnak vékony vezetékben folyó áram esetén különleges tulajdonsága van (5.4. ábra).

5.4. ábra  
Egy áramkör mágneses terének levezetése egy skalárpotenciálból



Feszítsünk ki egy felületet, amelynek a pereme a vékony vezető. A gerjesztési törvény értelmében az ábrán látható úton integrálva a felület két oldalán fekvő pontok között (zárt úton) integrálva véges értéket kapunk:

$$\int_{A_1}^{A_2} \mathbf{H} dl = \int_A \mathbf{J} dl = I. \quad (5.26)$$

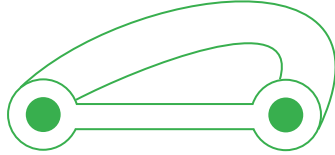
A felületen áthaladva a potenciál ugrik, miközben a térerősség folytonos.

Ha a vezeték kivételével tekintjük az egész teret, ez a tartomány kétszeresen összefüggő. A kétszeresen összefüggő tartományban a gyűrűt körülölelő zárt görbe semmilyen folytonos deformációval nem vihető át egy a gyűrűt körül nem ölelő zárt görbébe. Kétszeresen összefüggő tartománynál, és hasonlóan többszörösen összefüggő tartománynál a potenciál értéke többértékű, ciklikus potenciál.

Ha a vezetőket többször körüljárjuk, minden egyen körüljárásnál újra  $I$  járulékot kapunk az (5.26) értelmében, az integrálás útjától függetlenül az (5.25) kifejezésben szereplő potenciálfüggvény tehát  $I$  többszörösével kiegészíthető:

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \varphi_{m0}(\mathbf{r}) + nI. \quad (5.27)$$

Az ilyen potenciált *ciklikus potenciálnak* nevezzük.



5.5. ábra

Tegyük a tartományunkat egyszeresen összefüggővé oly módon, hogy az 5.5. ábrán bemutatott felületet (és a vezetékfurkot) kizárjuk a térből. Ekkor a keretre feszített felület bármely pontjában a felület két oldalán a potenciál különböző, más szóval a potenciál ugrik a felületen áthaladva. Az ugrás értéke minden pontban ugyanaz:

$$\varphi_m^{(1)} - \varphi_m^{(2)} = I. \quad (5.28)$$

A  $\varphi$  potenciálból tehát két dolgot állíthatunk: mindenütt kielégíti a Laplace-egyenletet a keretre illesztett felület kivételével, ott viszont minden pontban azonos értékű ugrása van. Ilyen tulajdonsággal a kettősréteg rendelkezik.

Az elektrosztatikus kettősréteg analógiájára:

$$\varphi_m^{(1)} - \varphi_m^{(2)} = \frac{m}{\mu_0}, \quad (5.29)$$

ahol  $m = |\mathbf{m}|$  a mágneses nyomaték felületi sűrűségének abszolút értéke. Következtetésként levonható, hogy a köráram helyettesíthető egy mágneses kettősréteggel, amelynek pereme az áramvezető és egyenletes nyomatéksűrűsége:

$$|\mathbf{m}| = \mu_0 I \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{s}}{\mathbf{m}}. \quad (5.30)$$

A kettősréteg potenciálja

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_a \mu_0 I \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} da \quad (5.31)$$

alakba írható, ahonnan a mágneses tér (5.25) alapján:

$$\mathbf{H} = -\text{grad} \frac{I}{4\pi} \int_a \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} da. \quad (5.32)$$

Eredményünk érdekes következménye, hogy nagy távolságból egy síkban fekvő kicsiny köráram, amely a felületet ölel körül, egyenértékű egy

$$\mathbf{m}^* = \mu_0 I \mathbf{a} \quad (5.33)$$

nyomatékú mágneses dipólussal.

Amikor a mágneses tér hatását a kicsiny köráramra gyakorolt forgatónyomatékkal jellemeztük, tulajdonképpen egy mágneses dipólusra ható forgatónyomatékról is beszélhettünk volna.

A kis köráram és a mágneses dipólus azonos viselkedése adta Ampère számára az ötletet a mágneses anyagokban fellépő tér magyarázatára. Ampère elképzelése szerint az ilyen anyagokban elemi kicsiny köráramok léteznek. Az anyag mágnesezettségi állapota ezen elemi köráram rendezettségétől függ.

A kép rendkívül szemléletes, jól magyarázza a mágneses felépülő anyag, ill. a létrejövő tér természetét. Ma már azonban tudjuk, hogy ez a magyarázat nem igaz. A korszerű magyarázat azonban nincsen messze tőle. A mai fizika a mágneses tér forrásának a kompenzálatlan spinű elektronok együttesét tekinti. A spin szemléletesen az elektronok körforgásával magyarázható. (Láthatjuk, mennyire mechanikai jellegű magyarázatokat keres az ember az elektromágneses alapjelenségekre.) A nagy sebességgel forgó töltött részecske köráramot produkálna. Sajnos ez a szemléletes kép sem felel meg a valóságnak, a mikrofizika jelenségei egyszerű képekkel ritkán magyarázhatók.

Még egy megjegyzést. Igazolható, hogy tetszés szerinti stacionárius árameloszlás mágneses terének első közelítése egy mágneses dipólus. Más szóval kellően nagy távolságból minden árameloszlás tere dipólus terével helyettesíthető. Ez az állítás analóg az elektrosztatikus terekre tett állítással, egy különbséggel. Mivel valódi elektromos töltés létezik, a töltéseloszlás első közelítése egy ponttöltés, csak további közelítésnél jelenik meg egy dipólus is.

## A MÁGNESES TÉR ENERGIÁJA; AZ ÖN- ÉS KÖLCSÖNÖS INDUKTIVITÁS

Az elektromos tér energiájának kifejezését két alakban kaptuk meg: a térmennyiségekkel kifejezve, ill. a töltés és a potenciál segítségével. A mágneses térben analóg kifejezéseket kaphatunk. Induljunk ki a

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \mathbf{B} dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} dV \quad (5.34)$$

összefüggésből.

Használjuk fel a vektoranalízis alábbi azonosságát<sup>15</sup>:

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (5.34)$$

és innen behelyettesítve (5.34)-be kapjuk, hogy

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} dV - \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dV. \quad (5.35)$$

A jobb oldal második tagja az egész térben integrálva eltűnik. Alkalmazzuk-e célból a Gauss-tételt:

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dV = \oint_a (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) da. \quad (5.36)$$

A felületi integrált a végtelenbe kiterjesztve a  $\mathbf{H}$  dipólus térerőssége, ami a végtelenben  $1/r^3$ -nel tűnik el. Ezért a vektorpotenciál tehát  $\frac{1}{r^2}$ -nel tűnik el, míg a integrálási felület csak  $r^2$ -szerésre növekszik. Így a végtelenben a felületi integrál eltűnik, tehát a  $\operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A})$  integrálja az egész térre zérus.

<sup>15</sup> Ugyanazt használtuk a Poynting-tétel bevezetésénél.

A megmaradt kifejezést némileg átalakítva:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \mathbf{J} \, dV. \quad (5.37)$$

A kifejezés teljesen analóg a  $W_e = \frac{1}{2} \int \rho U \, dV$  kifejezéssel, csak kevésbé szemléletes. Tartalma is hasonló: az egész térben integrálandó térmennyiségek helyett az integrálást csak azokra a térfogatokra kell kiterjeszteni, ahol áram folyik. Ez azonban csak matematikai mutatvány és nem érinti azt a tényt, hogy a mai felfogás szerint energia az egész térben elosztott, ahol mágneses mező létezik.

## KÖLCSÖNÖS INDUKCIÓ; ÖNINDUKCIÓ

A kapacitás-együtthatók (és a részkapacitások) felhasználásához hasonló módon a mágneses tér energiája is kifejezhető ön- és kölcsönös indukcióegyütthatók segítségével.

Tételezzük fel, hogy  $n$  db önálló körvezetők van, amelyben áramok folynak. A vezetők nem feltétlenül vékony vezetékek. Kezdetben tételezzük fel, hogy az elrendezés vákuumban helyezkedik el.

Állítjuk, hogy a (5.37) képlettel adott energia kifejezhető

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_{ik} I_i I_k \quad (5.38)$$

alakban, ahol  $I_i$  az  $i$ -edik vezető árama és  $L_{ik}$  ( $i \neq k$ ) a kölcsönös indukció-együttható.  $L_{ii}$  az ún. önindukciós együttható.

Felhasználva az energia (5.37) kifejezést és a vektorpotenciál (5.11) alakját:

$$W_m = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{J}_i \mathbf{J}_k}{r_{ik}} \, dV_k \, dV_i, \quad (5.39)$$

ahol  $r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$  a két aktuális térfogatelem távolsága. Figyeljük meg a kifejezés szimmetriáját: invariáns  $i$  és  $k$  cseréjére!

Miután az áramok különálló zárt vezetőkben folynak, az (5.39) integrál az egyes vezető hurkok térfogatára vett integrálok összegére esik szét:

$$W_m = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{J}_i \mathbf{J}_k}{r_{ik}} \, dV_k \, dV_i. \quad (5.40)$$

Az  $i$ -edik vezetékben folyó áramot  $I_i$ -vel jelölve az (5.40) és az (5.38) összehasonlításából kapjuk, hogy:

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{J}_i \mathbf{J}_k}{r_{ik}} \, dV_i \, dV_k, \quad (5.41)$$

ahol az integrálást az  $i$ -edik és  $k$ -adik vezető térfogatára (önindukciós együtthatók esetén ugyanarra a térfogatra) kell integrálni.

Vonalszerű vezetők esetén

$$\mathbf{J}_i dV_i = J_i \mathbf{A} dl_i = I_i d\mathbf{l}_i \quad (5.42)$$

átalakítással a kölcsönös indukciós együttható

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{d\mathbf{l}_k d\mathbf{l}_i}{r_{ik}} = L_{ki} \quad (i \neq k) \quad (5.43)$$

alakba írható. Ez a kölcsönös indukciós együtthatók kiszámítására használható *Neumann-képlet*. (Önindukciós együtthatóra az integrál szingulárisává válik. Ennek okát a következőkben megmagyarázzuk.)

Vonalszerű vezetőkre a Neumann-képlet más módon is interpretálható. Tekintsük az  $n$  vonalszerű vezetőhurokból álló elrendezést. Határozzuk meg a  $k$ -adik hurok fluxusát (5.24) alapján:

$$\Phi_k = \int_{LK} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_k. \quad (5.44)$$

$\mathbf{A}$  értéke (5.15) alapján a következő alakba írható:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_0}{4\pi} I_i \oint_{L_i} \frac{d\mathbf{l}_i}{r}, \quad (5.45)$$

és ezt (5.44)-be helyettesítve és az (5.43) formulát felhasználva kapjuk, hogy

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^n L_{ki} I_i. \quad (5.46)$$

A kölcsönös indukciós együttható tehát azt mutatja meg, mekkora fluxust hoz létre az  $i$ -edik vezető árama a  $k$ -adik hurokban. Ez a definíció azonban vonalszerű vezetőhurok önindukciójára nem értelmezhető, mivel a térerősség a vezetónél végtelenhez tart (amint ez például a Biot–Savart-törvényből következik), és így a fluxus is szinguláris. Ezt igazolja a vektorpotenciál fenti (5.45) kifejezése is. Ezért az önindukciós együttható számítására mindig az energiakifejezésen alapuló megfontolásokat, például az (5.41) képletet kell használnunk.

Kérdés: miért indukciós együttható az elnevezés?

A válasz: az indukciós együttható megmutatja, hogy az áram változása az egyik vezetőben mekkora feszültséget *indukál* a másikban Faraday indukciótörvénye alapján.

Az eddigiekben végig vákuumot tételeztünk fel a térben. Az eredmények para- és dimágneses közegek jelenléte esetén is extrém jó közelítések. Ha azonban a vezetők közelében ferromágneses közegek vannak, vagy maguk a vezetők ferromágnesesek, az (5.31) kifejezés igaz marad, de az (5.30) nem. Ekkor vissza kell térnünk az energia általános kifejezésére. Meg kell határozni a teret, majd az energiát és utána (5.38) alapján az indukciós együtthatókat. Természetesen ez az eljárás is csak lineáris közegek esetén alkalmazható.

## MAXWELL-EGYENLETEK – KIRCHHOFF-EGYENLETEK

A Maxwell-egyenletek általában a térben elosztott mező viselkedését írják le. A geometriai tér bármely pontjában létezik (elvben) az elektromágneses tér. Egyes térjellemzők változása bármely pontban meghatározza más térjellemzők tulajdonságait – és viszont. Az energia az egész térben elosztott, és elvben a veszteségek is.

Azonban az eddigi feladatok során is találkoztunk olyan elrendezésekkel, amelyekben a jelenségeket jól lehetett lokalizálni. Többször fordult elő a „vékony vezeték”, ahol az áram vezetése kis átmérőjű, hengeres vezetékben (drótban) történt. A vezetőképesség a vezetéken kívül zérus értékű. Így a véges vezetőképességből származó Joule-veszteség kis térrészre koncentrálódik.

Hasonlóan olyan kondenzátor esetén, ahol a nagy kiterjedésű fegyverzetek közel vannak egymáshoz, mi több, nagy permittivitású dielektrikum van közöttük, az elektromos tér gyakorlatilag teljes egészében a fegyverzetek közötti térrészben koncentrálódik. A szórt tér erőssége és így a benne tárolt energia az összes tárolt energiához viszonyítva elenyésző.

A legrosszabb a helyzet ebből a szempontból a mágneses térrel. Ferromágneses anyagok jelenléte nélkül az áram által gerjesztett tér viszonylag nagy térrészben van jelen. A mágneses teret mesterségesen koncentráló elrendezések (sokmenetes, hosszú tekercs) szórt tere még mindig igen nagy. A mágneses tér erős koncentrációját toroidtekercsekkel (ezek szórt tere elenyésző) és ferromágneses magokra tekercselt tekercsekkel (különösen, ha zártak) lehet elérni.

Példáinkat végig gondolva látjuk, hogy egyes elrendezések esetén a mező kis térrészekben koncentrálódik. Ilyen esetekben a jelenségek vizsgálatára a Maxwell-egyenletek használata tipikus „ágyúval verébre” akció. Ennek elkerülésére nézzük meg, hogy a térben koncentrált energia és veszteségek esetén hogyan lehet egyszerűsíteni az egyenleteket. Az ilyen elrendezéseket *koncentrált paraméterű hálózatoknak* nevezzük.

## EGYENÁRAMÚ HÁLÓZATOK

Az alapegyenletek:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (5.47)$$

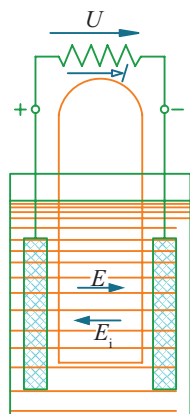
$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (5.48)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b) = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_b. \quad (5.49 \text{ a, b})$$

Foglalkozzunk az 5.6. ábrán látható egyszerű áramkörrel: telep (akkumulátor vagy galvánelem) és pólusaira kapcsolat ellenállás.

Az elrendezésben  $\mathbf{E}_b$  fizikai tartalma nyilvánvaló. A telep elektródái között nyugalmi helyzetben  $\mathbf{E}$  elektromos térerősség lép fel, amit a fegyverzeteken felhalmozódott töltések hoznak létre. Ennek ellenére a véges  $\sigma$  vezetőképességű elektrolitban nem folyik áram. Ez csak úgy lehetséges, hogy az elrendezésben fellép egy olyan hatás, amely (5.49a) értelmében kioltja a térerősség hatását<sup>16</sup>. Az ábrán látható szaggatott vonal mentén (az óramutató járásának megfelelő irányban) integrálva az áramot:

<sup>16</sup> Ez a hatás lehet például az a kémiai folyamat, amely szétválasztja a töltéseket a fegyverzetekre. Ennek a nem elektromos hatásnak az elektromos ki-fejezése van belesűrítve  $\mathbf{E}_b$ -be.



5.6. ábra  
Az Ohm-törvény  
levezetéséhez

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} + \oint_L \mathbf{E}_b \, d\mathbf{l} = \oint_L \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \, d\mathbf{l}, \quad (5.50)$$

ahol az első integrál az (5.47) miatt zérus. A második integrál csak a telep belsejében vett úton értelmezett, és az ún. üresjárási feszültséget definiálja.

A jobb oldali integrál két szakaszon történő integrálásra bontható: integrálás a telep belsejében, ill. azon kívül, a kapcsok közé helyezett ellenálláson. Miután az áram a változó keresztmetszet ellenére az egész körben azonos (5.48) értelmében, a fenti egyenlet végül:

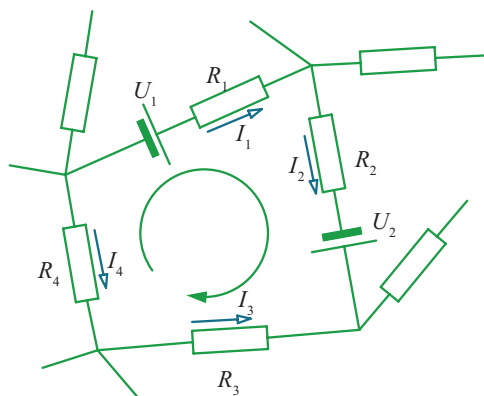
$$U_b = IR_b + IR_k \quad (5.51)$$

alakba írható, ahol  $R_b$  a telep belső ellenállását,  $R_k$  pedig a kapcsok közé helyezett külső ellenállás.

Véges hosszúságú  $A$  keresztmetszetű vezeték esetén az

$$U = \int_L \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \, d\mathbf{l} = I \int_L \frac{d\mathbf{l}}{A\sigma} = IR \quad (5.52)$$

összefüggéshez jutunk, amelyet *Ohm törvényének* nevezünk. Egyúttal az ellenállás definícióját is megkapjuk.

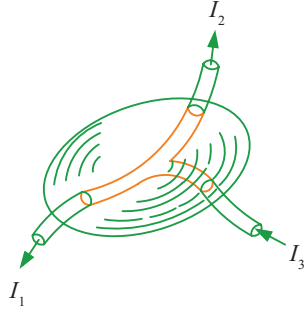


5.7. ábra  
A huroktörvény  
szemléltetése

A belső ellenállásokat az áramkör részeként kezelve bonyolultabb áramkörök tetszés szerinti zárt körére hasonlóan felírható (5.7. ábra), hogy:

$$\sum_k U_k = \sum_k I_k R_k. \quad (5.53)$$

Ez az összefüggés *Kirchhoff II. törvénye*, vagy a *huroktörvény* egyenáramú, koncentrált paraméterű hálózatra. A törvény állítása: bármely zárt hurok körüljárása esetén a feszültségek összege, tehát a körülhaladó töltésen végzett összes munka zérus.



5.8. ábra  
A csomóponti törvény  
levezetéséhez

*Kirchhoff I. törvényét* vagy a *csomóponti törvényt* az eddig fel nem használt (5.48) alaptörvényből származtatjuk (5.8. ábra). A csomópontban töltés nem halmozódhat fel, tehát a zárt felületen átfolyó áram zérus. Miután az áramok most csak a vezetékben folynak, az egyenlet egyszerűen

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$

vagy általánosságban

$$\sum_k I_k = 0 \quad (5.54)$$

alakba írható, ahol az összegzést a csomópontba ki- és befolyó valamennyi áramra fel kell írni. Zárt felületeken a kifelé mutató irányt tekintjük pozitívnak. A fenti egyenletbe a kifolyó áramokat pozitív, a befolyó áramokat negatív előjellel kell behelyettesítenünk.

Az egyenlet fizikai tartalma nyilvánvaló<sup>17</sup>.

Az ellenálláson kívül definiáltunk egy új hálózati elemet, a *feszültségforrást*. A feszültségforrás pólusai között a feszültség a rajta átfolyó áramtól függetlenül állandó, ez a *forrásfeszültség*. A *feszültséggenerátor* a teljesítményt adó berendezés belső veszteségeit is figyelembe veszi. Lineáris modellje sorba kapcsolt feszültségforrás és belső ellenállás (5.9. ábra).



5.9. ábra  
Feszültséggenerátor.  
Jellemzője az  $U_b \equiv U_G \equiv U_i$   
forrásfeszültség és az  $R_b$   
(soros) belső ellenállás

5.10. ábra  
Áramgenerátor.  
Jellemzője az  $I_b \equiv I_G$   
forrásáram és az  $R_b$   
párhuzamos belső  
ellenállás

Az áramsűrűség (5.49b) alakjának segítségével egy másik ideális forrás, illetve generátor definiálható.

Az *áramforrás* olyan modell, amelynek ágán meghatározott áram, a *forrásáram* folyik a kapcsain lévő feszültségtől függetlenül. Amennyiben a belső veszteségeket figyelembe vesszük, a forrással párhuzamosan kapcsoljuk a belső ellenállást. Ennek az elrendezésnek a neve: *áramgenerátor* (5.10. ábra).

17 Az ellenállás-hálózatokra Ohm törvényének általánosításaként a törvényeket Kirchhoff 1845-ben fogalmazta meg, tehát a levezetés még a Maxwellt megelőző elektrodinamikai tudáson alapult.

## TETSZŐLEGES IDŐFÜGGÉSŰ HÁLÓZATOK

Az egyenáramú, koncentrált paraméterű hálózatokra vonatkozó egyenletek általánosítása időben változó esetre nem magától értetődő. Az ok: időbeli változás esetén a hálózat kiterjedtsége olyan nagy lehet, hogy az elektromágneses hatás terjedési ideje a hálózat egy részén összemérhető a lejátszódó folyamatok jellemző idejével. Más szóval a késleltetés a hálózat egyes elemein fellépő áramok és feszültségek között nem elhanyagolható, a kölcsönhatások nem tekinthetők egyidejűnek. (Később látni fogjuk, hogy a feszültség és az áram sem definiálható sztatikus, stacionárius módon.)

Ezt előre bocsátva egyenleteink:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.55)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (5.56)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b). \quad (5.57)$$

Az (I.) Maxwell-egyenlet helyett a belőle származtatható folytonossági egyenletet vesszük figyelembe.

Az (5.55) mindkét oldalát integráljuk az áramkör által kifeszített felületre, ekkor:

$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (5.58)$$

A Stokes-tétel szerint ez

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.59)$$

alakba írható fel, ahol  $L$  az áramkör mentén vett integrálási út. A fluxus teljes deriváltja az indukció változásából adódik, nem kell a továbbiakban parciális deriválttal számolni.

A körben szereplő koncentrált elemek: feszültségforrás, ellenállás [ezek (5.57)-ből a már látott módon származtathatók], kondenzátor. Mindezen elemek feszültsége megjelenik a (5.59) egyenlet bal oldalán szereplő integrálban. Végül tehát az egyenlet

$$U_b + U_R + U_C = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.60)$$

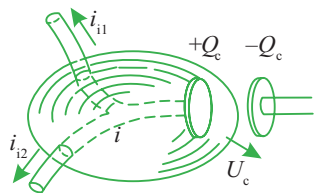
alakba írható. Több hálózati elem esetén az egyenlet általánosságban:

$$\frac{d\Phi_j}{dt} + \sum_k U_{jk} = 0, \quad (5.61)$$

ahol  $j$  a hurok sorszáma,  $k$  pedig a hurkon elhelyezkedő ágak sorszáma.

A csomóponti egyenlet alakja megegyezik az (5.54) egyenáramú alakkal, ha a csomóponthoz nem csatlakozik kondenzátor, mivel ilyenkor a csomópontot tartalmazó térfogatban az össztöltés mindig zérus. A zárt felülettel körülvevő térfogatban töltés helyezkedik el koncentrált paraméterű hálózatokban abban az esetben, ha a

csomóponthoz kondenzátor csatlakozik, és a kondenzátor egyik fegyverzete a térfogat belsejében van. (A másik fegyverzet értelemszerűen kívülesik a csomópontot, elágazást is tartalmazó térfogaton.)



5.11. ábra  
Zárt felület felvétele  
kondenzátort tartalmazó  
ág esetén

18 Bár ezeket az egyenleteket is Kirchoff nevével jelöljük, felírásuk nem hozzá fűződik. Ilyen típusú áramköri egyenleteket először William Thomson (akit inkább Lord Kelvin néven ismerünk) írt fel 1853-ban Leydeni palack típusú kondenzátor kisütésének vizsgálatára. A kisütőáramkör ellenállásán kívül figyelembe vette az induktivitását is. Kimutatta, hogy ha az ellenállás bizonyos küszöbértéknél kisebb, a kisütés oszcilláló árammal megy végbe. Ugyanebben az évben fedezte fel a mágneses energia

$E_m = \frac{1}{2} L_i$  kifejezését. Az elektromos energia  $E_e = \frac{1}{2} QU$  kifejezését Hermann von Helmholtz találta meg 1847-ben.

Az 5.11. ábrán látható térfogatra írva fel a folytonossági egyenletet az alábbi alakot kapjuk:

$$\frac{dQ_C}{dt} + \sum_k i_{ik} = 0, \quad (5.62)$$

ahol  $i$  a csomópont sorszáma,  $k$  pedig a csomópontra illeszkedő ág sorszáma. Itt  $Q_C$  a csomópontra illeszkedő valamennyi kondenzátor csomópont felé eső fegyverzetén elhelyezkedő töltések összege.

Ez az egyenlet időben változó esetben *Kirchoff I. vagy csomóponti törvénye*.

Mint látható, a koncentrált paraméterű hálózatok Kirchoff-egyenletei a hurokfluxus és a csomópontoz illeszkedő töltés mérlegegyenletei. Az egyenletekben a fluxus az ön- és kölcsönös induktivitások, a töltés pedig a saját és részkapacitásokon keresztül kapcsolódik az ágakban folyó áramhoz, illetve a kapacitásokban fellépő feszültségekhez<sup>18</sup>.

## AZ ELEKTROSZTIKA MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

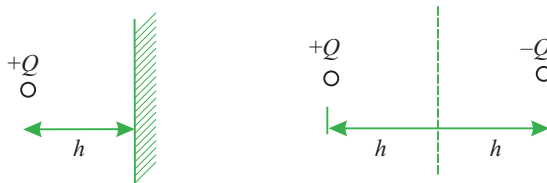
## Analitikus megoldási módszerek

## A helyettesítő töltések módszere

A helyettesítő töltések módszere abból a tényből indul ki, hogy az elektrosztatikai feladatok megoldása adott gerjesztő töltéselrendezés és peremfeltételek esetén *egyértelmű*. Ha tehát találunk olyan helyettesítő töltéselrendezést, amelyik ugyanazokat a peremfeltételeket biztosítja, mint az eredeti elrendezés peremfeltételei, akkor a kialakuló tér is ugyanaz lesz, mint az eredeti esetben.

A legegyszerűbb példa a töltés tükrözése síkon (6.1. ábra).

6.1. ábra  
Ponttöltés tükrözése



A bal oldalon látható az eredeti elrendezés: ponttöltés 0 potenciálú, végtelen sík felület közelében. Fizikailag ez fémsíkot jelent. Az ábra jobb oldalán a helyettesítő töltéselrendezés látható, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

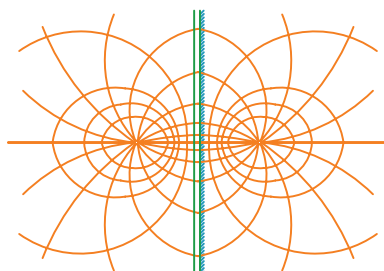
- a vizsgált térrészben a töltéselrendezés megfelel az eredeti elrendezésnek,
- a tükörtöltés a nem vizsgált térrészben helyezkedik el,
- a töltés és tükörtöltés együtt előállítják a kívánt peremfeltételeket (esetünkben a sík 0 potenciálját).

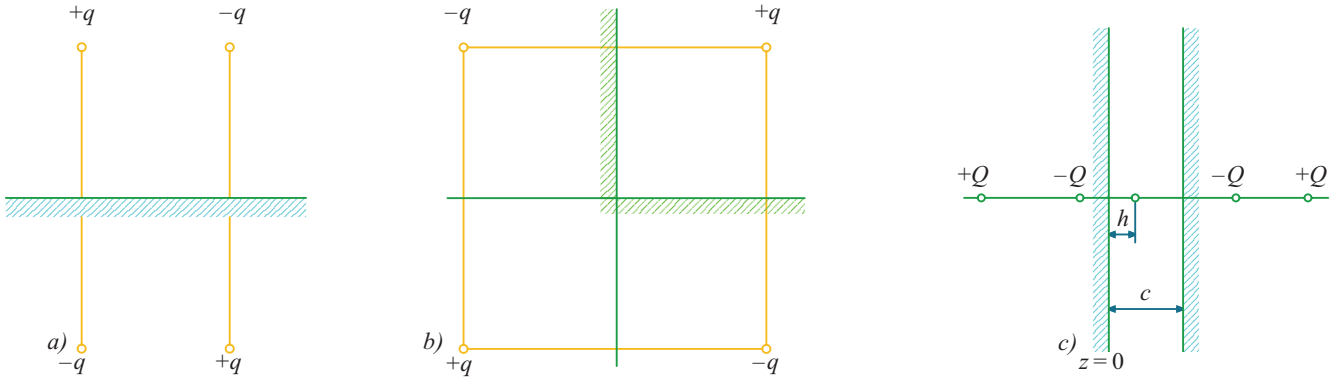
Ekkor biztosak lehetünk benne, hogy a vizsgált térrészben a töltések a valódi teret állítják elő. A nem vizsgált térrészben a kialakuló „térnek” nincs fizikai jelentése.

A síkon való tükrözés módszere síkproblémákra (kétdimenziós feladatokra) is kiterjeszhető, ha a gerjesztőtöltések végtelen hosszú vonaltöltések.

A feladat könnyen általánosítható. Néhány elrendezés a 6.2. és 6.3. ábrákon látható.

6.2. ábra  
Végtelen síkkal szemben  
elhelyezett pontszerű  
töltés erőterének meg-  
határozása tükrözéssel





6.3. ábra

- a) végtelen síkkal párhuzamos síkban egymással is párhuzamosan haladó vezetőek erőterének meghatározása tükrözéssel  
 b) két egymásra merőleges végtelen sík által alkotott sarokban elhelyezett vezető erőterének kiszámítása tükrözéssel  
 c) két párhuzamos sík közé elhelyezett töltés erőterének kiszámítása sorozatos tükrözéssel

Néhány elemi úton számítható tér ekvipotenciális felületeit mutatja a 6.1. táblázat. Ha az elektródáink megfelelnek az ekvipotenciális felületeknek, a tér az egyszerű helyettesítő töltések tereként számítható. Például kis legömbölyített csúc által létrehozott szikrakör terét két félvégtelen vonaltöltés tereként számíthatjuk.

Különös figyelmet érdemel a két utolsó sor. Az utolsó előtti sor megmutatja: végtelen hengeren a párhuzamos végtelen vonaltöltés tükrözhető úgy, hogy a henger ekvipotenciálú legyen. Sőt, két párhuzamos, eltérő potenciálú henger tere is mindig helyettesíthető két párhuzamos vonaltöltés terével.

Az utolsó sorban azt látjuk, hogy két eltérő előjelű és abszolút értékű ponttöltés terében mindig létezik egy gömb alakú ekvipotenciálú felület. Megfordítva: vezető gömb közelébe helyezett ponttöltés tere mindig leírható az eredeti töltés és a gömb belsejében alkalmasan elhelyezett tükörtöltés terével.

## Az integrálegyenletek módszere

A helyettesítő töltések módszerének általánosítása az, amikor az elektródafelületek előírt potenciálját biztosító felületi töltéselosztást keressük. Miután ezek a töltések valóban fellépő töltések, helyettesítő töltések helyett helyesebb *másodlagos töltéseknek* nevezi őket.

A másodlagos töltés lehet a fémelektrodákon megjelenő felületi töltés, a dielektrikum felszínén megjelenő polarizációs töltés, és inhomogén dielektrikumban a dielektrikum belsejében megjelenő polarizációs töltés. Ezzel az integrálegyenletek a részben dielektrikus kitöltési terek kezelését is lehetővé teszik.

Az elektrosztatika integrálegyenletének megfogalmazása végül is azon alapul, hogy az ismeret (elsődleges) töltések és a keresett másodlagos töltések együtt olyan teret hoznak létre, amelyik eleget tesz a peremfeltételeknek.

Az elektrosztatika alapfeladata: homogén, üres térben a fémelektrodák előírt potenciálon vannak. Nézzünk először egy  $\varphi_0$  potenciálú elektródát. A felületi töltés ismeretében

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}} dA_Q, \quad (6.1)$$

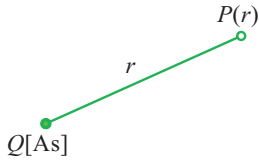

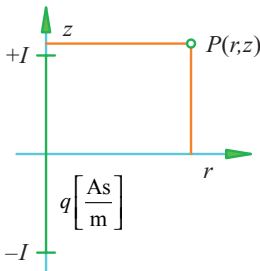
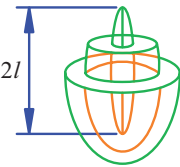
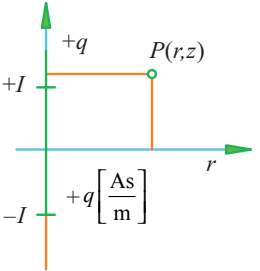
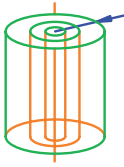
ahol az integrálást az elektróda (nem feltétlenül zárt)  $A$  felületére kell elvégeznünk és  $r_{PQ} = |r_P - r_Q|$ .

Legyen a  $P$  pont az elektróda felületén. Ekkor az

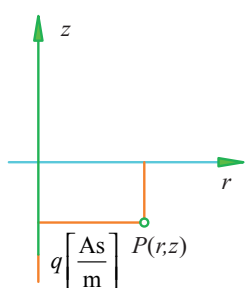
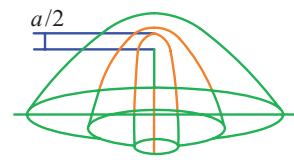
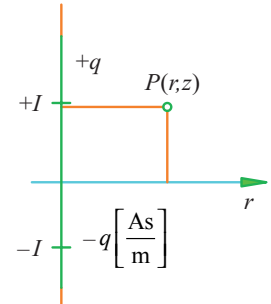
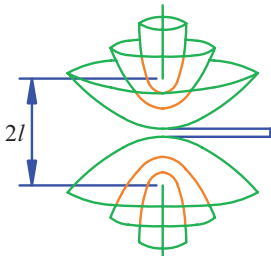
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}} dA_Q = \varphi_0, \quad P, Q \in A \quad (6.2)$$

## 6.1 táblázat

Egyszerű töltéselrendezések ekvipotenciális felületei

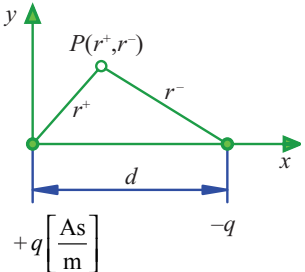
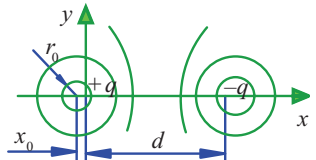
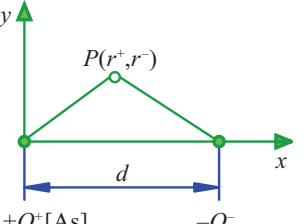
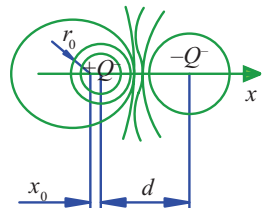
Töltéselrendezés	Potenciál	Ekvipotenciális felületek	
Pontszerű töltés 	$U_p = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$	Felület potenciálja $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ $U \rightarrow 0, \text{ ha } r \rightarrow \infty$	Geometriája  Egyenletek $r = r_0$ (konc. gömbök)
Vonalszerű töltés (véges hossz) 	$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z+l + \sqrt{r^2 + (z+l)^2}}{z-l + \sqrt{r^2 + (z-l)^2}}$	$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{a+l}{a-l}$ $U \rightarrow 0, \text{ ha } a \rightarrow \infty$ $r \rightarrow \infty \text{ vagy}$ $z \rightarrow \infty$	Geometriája  Egyenletek $\frac{z^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$ $(l^2 = a^2 - b^2)$ konfokális elipszoidok
Két végtelen, ellenkező előjelű vonalszerű töltés 	$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r}$	$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r}$ $U = 0, \text{ ha } r=1$	Geometriája  Egyenletek $r = r_0$ koaxális hengerek

6.1 táblázat  
Egyszerű töltésrendezések ekvipotenciális felületei (folytatás)

Töltéselrendezés	Potenciál	Ekvipotenciális felületek
<p>Félvégtelen vonalszerű töltés</p> 	$U_p = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln(z + \sqrt{r^2 + z^2})$	 $z = \frac{1}{2a}(a^2 - r^2)$ <p>konfokális paraboloid</p>
<p>Két végtelen, ellenkező előjelű vonalszerű töltés</p> 	$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z+l + \sqrt{r^2 + (z+l)^2}}{z-l + \sqrt{r^2 + (z-l)^2}}$	 $\frac{z^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} = 1$ <p>(<math>l^2 = a^2 + b^2</math>)</p> <p>konfokális hiperboloidok</p>

## 6.1 táblázat

Egyszerű töltéselrendezések ekvipotenciális felületei (folytatás)

Töltéselrendezés	Potenciál	Ekvipotenciális felületek
<p>Párhuzamos vonalszerű töltések</p> 	$U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r^-}{r^+}$ $U_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$x_0 = -\frac{d}{k^2 - 1}$  $\left(x + \frac{d}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{dk}{k^2 - 1}\right)^2$ <p>excentrikus körhengerek</p>
<p>Különböző nagyságú pont töltések</p> 	$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{Q^+}{r^+} - \frac{Q^-}{r^-} \right)$	$U_0 = U_0$ $x_0 = \frac{d}{k^2 - 1};$ $k > 1$ $U = 0 \text{ ha}$ $k = \frac{r^-}{r^+} = \frac{Q^-}{Q^+}$  <p>(Az egyetlen gömbfelület <math>U_0=0</math>)</p>

egyenletet kapjuk, ahol az ismeretlen a  $\sigma(Q)$  felületi töltés. Ha ezt ismerjük, a potenciál bármely pontban (6.1)-ből számítható. Ez a megoldás – ahogyan a 4. fejezetben bizonyítottuk, egyértelmű.

Az ismeretlen függvény integrálban szerepel, de ugyanebben az integrálban szerepel egy kétváltozós függvény is, amelynek mindkét változója az integrálás tartományába esik. Az ilyen egyenletek általános alakja:

$$\int_A \kappa(P, Q) f(Q) dA_Q = g(P). \quad (6.3)$$

A (6.3) összefüggést elsőfajú lineáris integrálegyenletnek nevezzük.  $f(Q)$  a keresett függvény,  $g(P)$  ismert ún. zavarófüggvény,  $\kappa(P, Q)$  az integrálegyenlet magja.  $A$  a  $P$  és  $Q$  közös tartománya,  $dA_Q$  ennek differenciális eleme.

Bizonyítható, hogy (6.3)-nak a benne szereplő függvényekre tett igen általános feltételek mellett van megoldása.

Nézzük a következő kifejezést:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega).$$

Ha elvben az egyenlőségben  $F(\omega)$  ismert,  $f(t)$  ismeretlen, akkor  $f(t)$  meghatározása (tulajdonképpen a Fourier-transzformázáshoz tartozó időfüggvény keresése) a fenti  $e^{-j\omega t}$  mégis integrálegyenlet megoldását jelenti.

Ezt a megoldást zárt alakban is elő tudjuk állítani az inverz Fourier-transzformáció képletével:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Azonban tény, hogy integrálegyenlet megoldását zárt alakban a legritkább esetben tudjuk megkapni. Különösen áll ez magasabb dimenziójú tartományuk esetén.

A (6.2) könnyen általánosítható  $N$  elektróda esetére. Ekkor az egyes elektródákat  $i$  indexszel megkülönböztetve az

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_i} \frac{\sigma_i(Q)}{r_{PQ}} dA_Q = \varphi_i, \quad P \in A_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.4)$$

integrálegyenlet-rendszerhez jutunk.

Az adott töltésű elektródákat oly módon kezeljük, hogy az elektróda potenciálját (6.4)-ben ismeretlennek tekintjük, az egyenletrendszert pedig kiegészítjük a

$$\int_{A_i} \sigma(P) dA_P = Q_i \quad (6.5)$$

egyenlettel. Természetesen a különböző feladatok megoldása során az egyenleteket másképp is meg lehet fogalmazni, illetve további feltételek érvényesítése is szükséges lehet. Ezek tárgyalása azonban messze túlmutat jelen célkitűzésünkön.

Kétdimenziós feladatok esetén (síkproblémák) a (6.2) egyenlet

$$\kappa(P, Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{P,Q}}$$

magja helyett, ami a Coulomb-potenciálból származik, a

vonaltöltés potenciáljából származó

$$\kappa(P, Q) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_{PQ}} \quad (6.6)$$

logaritmikus magfüggvényt használjuk. Ezzel pl. a (6.4) alakja:

$$\varphi(P) - \varphi_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \int_{L_i} \sigma(Q) \ln \frac{1}{r_{PQ}} dL_Q. \quad (6.7)$$

Az integrálást itt síkbeli görbén, a végtelen, henger alakú elektródák vezérgörbéjén kell elvégeznünk.

*Megjegyzések:*

1. Ha a vizsgált elrendezés *zárt*, egy kontúr valamennyi többit körülveszi,  $\varphi_0$  értéke tetszőleges lehet, ez a zárt kontúr potenciálja. E kontúron kívül a potenciál értéke konstans  $\varphi_0$ .
2. Ha az elrendezés *nyitott* és a végtelenben korlátos potenciált követelünk meg, az elrendezés semleges kell, hogy legyen. Ezt a

$$\sum_{i=1}^N \int_{L_i} \sigma(Q) dL_Q = 0$$

további feltétel biztosítja, és  $\varphi_0$  értéke ismeretlen. Az egyenletrendszer megoldása során kiadódó  $\varphi_0$  a potenciál határértéke a végtelenben.

Látható, hogy míg három dimenzióban az integrálegyenletek a nyitott feladatok legkényelmesebb megoldását kínálják, mert automatikusan produkálják a potenciál zérus határértékét a végtelenben, ez nem áll a kétdimenziós feladatokra. Ennek érdekes fizikai oka van. A végtelen hosszú egyenletes töltéssűrűséggel ellátott hengerek össztöltése végtelen, ráadásul a „végtelen távoli” pontba is elhelyezünk vele töltést. Ez persze fizikai abszurdum és formálisan ezt oldja fel, ha az össztöltés zérus. A zérus össztöltés a zárt elrendezés esetében automatikusan teljesül.

Figyeljük meg: három- és kétdimenziós esetben egyaránt az integrálegyenlet tartományának dimenziója eggyel alacsonyabb a vizsgált tér dimenziójánál. Ez homogén dielektrikum esetén a további kiterjesztett egyenletek esetén is így van. Inhomogén dielektrikumban azonban az ismeretlen polarizációs töltések eloszlása azonos dimenziójú a térrel. Ilyenkor az integrálegyenletek nem jelentenek nyereséget.

## Parciális differenciálegyenletek

Az elektrosztatika alapegyenlete a Poisson-egyenlet, illetve töltésmentes térrészben a Laplace-egyenlet. Zárt térrészben a peremen a potenciált vagy normális irányú deriváltját (Dirichlet- és Neumann-peremfeltételek) kell megadnunk az egyértelmű megoldhatósághoz.

## Megoldás a változók szétválasztásával

A Laplace-egyenlet megoldásának legkényelmesebb módszere a változók szétválasztásának módszere – amennyiben alkalmazható.<sup>19</sup>

A háromdimenziós Laplace-operátort tartalmazó egyenletek tizenegy koordináta-rendszerben szeparálhatók. A kétdimenziósok között a választék sokkal nagyobb. Mi csak egyetlen koordináta-rendszerben mutatjuk be a módszert: a derékszögű (Descartes) rendszerben. Itt a Laplace-egyenlet alakja:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (6.9)$$

<sup>19</sup> A módszert Fourier a hővezetés egyenletének megoldására alkalmazta és 1822-ben publikálta. Ezért a módszert gyakran Fourier-módszernek nevezik.

A módszer lényege, hogy feltételezi: a megoldás három függvény szorzata, amelyek közül bármelyik csak egy koordinátától függ:

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (6.10)$$

Ezt (6.9)-be helyettesítve és  $\varphi$ -vel végigosztva kapjuk:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0, \quad (6.11)$$

ahol a parciális deriváltakat közönséges deriváltak helyettesítik, hiszen a függvények egyváltozósak. (6.11) csak úgy lehet érvényes a változók bármely értéke, ha a bal oldalon álló három kifejezés külön-külön állandó, és az állandók összege zérus.

Legyen

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2, \quad (6.12a)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2, \quad (6.12b)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\gamma^2, \quad (6.12c)$$

és

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \quad (6.12c)$$

$\alpha$  és  $\beta$  megválasztása tőlünk függ. Rendszerint úgy választjuk meg őket, hogy a peremfeltételek kielégítése minél könnyebb legyen.

Válasszuk például  $\alpha$  és  $\beta$  értékét pozitív valós számnak. (Komplex mennyiségek is lehetnek!) Ekkor a (6.10) potenciál

$$\varphi(x, y, z) = (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x)(C \sin \beta x + D \cos \beta x)(E \sin \gamma x + F \cos \gamma x) \quad (6.13)$$

alakú szorzatokból állítható elő.

Bemutatjuk egy kétdimenziós potenciálprobléma megoldását a változók szétválasztásának módszerével, *Jackson* gondolatmenetet követve.

Kétdimenziós problémát vizsgálunk. Ez a  $z$  iránytól független potenciáelosztást tételez fel. (6.13) helyett kis változtatással

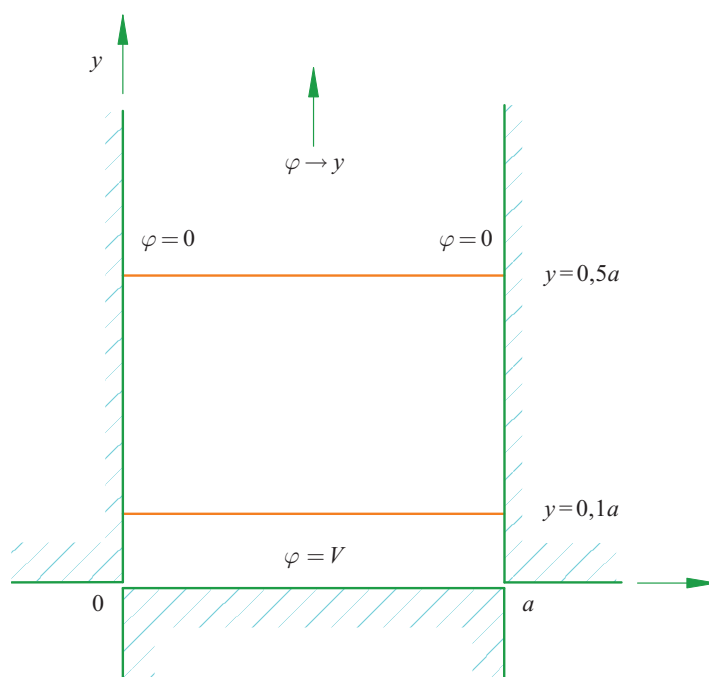
$$\varphi = (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x)(C e^{\alpha x} + D e^{-\alpha x}) \quad (6.14)$$

alakú potenciáelosztással számolunk. Legyenek a peremfeltételek a 6.4. ábrán adottak, azaz

$$\varphi = 0, \text{ ha } x = 0 \vee x = a \in \{y | 0 \leq y \leq \infty\} \quad (6.15a)$$

$$\varphi = V, \text{ ha } y = 0 \in \{x | 0 \leq x \leq a\} \quad (6.15b)$$

$$\varphi \rightarrow 0, \text{ ha } y \rightarrow \infty. \quad (6.15c)$$



6.4. ábra

(6.15a) nyilván kielégíthető, ha  $B = 0$  és  $\alpha = k \frac{\pi}{a}$ , (6.15c)-hez ezek után szükséges, hogy  $C = 0$  legyen. A négy peremfeltétel közül tehát hármat kielégít a

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k \frac{\pi y}{a}} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \quad (6.16)$$

alakú megoldás, amely a (6.14)-ben szereplő függvények alkalmas lineáris kombinációja. Ez a kifejezés minden  $y$  értékhez egy Fourier-sort rendel.  $y = 0$  értéknél:

$$\varphi(x,0) = V = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi y}{a}, \quad (6.17)$$

ahonnan a Fourier-együtthatók

$$A_k = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(x,0) \sin \frac{k\pi x}{a} dx \quad (6.18)$$

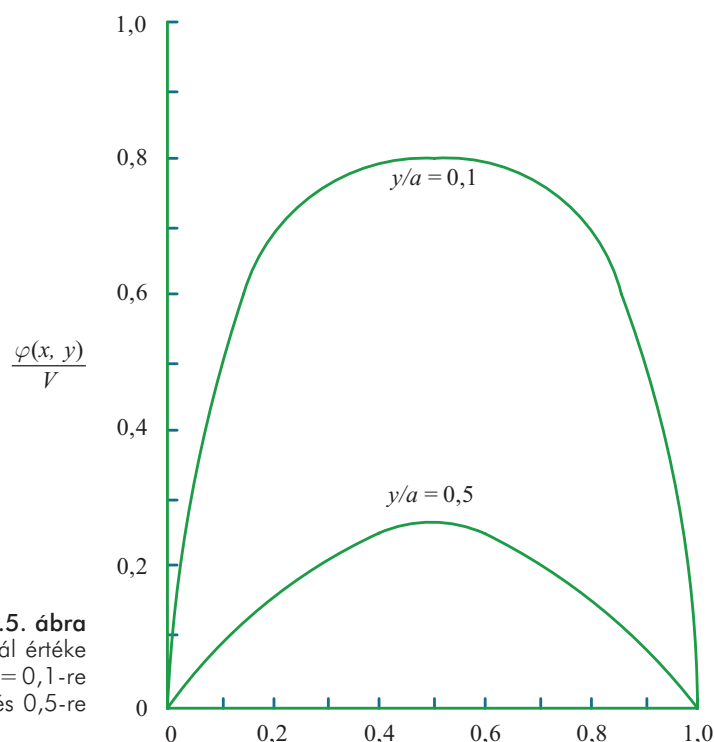
alakjából kapjuk, hogy

$$A_{k^z} = \begin{cases} \frac{4V}{\pi k}, & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases} \quad (6.19)$$

A  $\varphi(x, y)$  potenciálkifejezés tehát:

$$\varphi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \quad (6.20)$$

A potenciál értéke két  $y$  távolságra a 6.5. ábrán látható.



6.5. ábra  
A potenciál értéke  
 $y/a = 0,1$ -re  
és  $0,5$ -re

## Variációs formalizmus

A variációs elvek szerepe a fizikai jelenségek leírásában kiemelkedő jelentőségű. Segítségükkel az egyenletek koordináta-függetlenül és általánosságban fogalmazhatók meg.

Különleges helyet foglalnak el a variációs elvek között az egyensúlyi rendszerekre vonatkozóak. Az elektrodinamikában ilyen rendszerek a sztatikus és stacionárius terek.

Egyensúlyi rendszerekben általános elv az energiaminimum elérésére törekvés. Más szóval a rendszer akkor van egyensúlyban, ha a lehetséges energiaállapotai közül a legkisebb energiájú állapotban van. (Analógia: a tömeg a parabola alakú gödör alján van egyensúlyban.)

A variációs elvek általános megfogalmazása a következő. Rendeljünk a rendszert leíró függvényhez (ilyen például a potenciál) egy funkcionált. A funkcionál (a „függvény függvénye”) a leírófüggvényhez egy skalárértéket rendel.

A variációs elvek egy nagy csoportja – és így az ezekben alapuló számítási eljárások is – energiatípusú funkcionálokat definiál.

Nézzük például a

$$W[\varphi] = \frac{1}{2} \int_V (\text{grad } \varphi)^2 dV - \int_V \rho \varphi dV \quad (6.21)$$

funkcionált. Ez nyilván a  $\varphi$  skalárfüggvényhez rendel egy számértéket.

*Megjegyzés:*

A függvényeket jelölő szimbólumok ( $\varphi, \rho$ ) választása nem véletlen. A (6.21) funkcionál az elektrosztatika variációs elvének főszerepét játszó funkcionál. Ha megvizsgáljuk a struktúráját, az első tag a „mozgási energia” típusú energiakifejezés, míg a második tag a „potenciális energia” típusú kifejezés. Az ilyen kifejezést a mechanikában Lagrange-függvénynek hívják, és szintén variációs funkcionálként működik.

A  $\varphi(\mathbf{r})$  függvénynek legalább szakaszonként folytonosan deriválhatónak kell lennie  $V$  belsejében és az  $A$  felületen. Az ismert  $\rho$ -tól elvárjuk, hogy ne legyen szinguláris a  $V$  térfogatban.

A funkcionál értéke megváltozik, ha  $\varphi$  érték változik. Legyen a változás  $\delta\varphi$ . A funkcionál értéke ekkor  $W[\varphi + \delta\varphi]$ . A funkcionál *variációjának* a

$$\delta W = W[\varphi + \delta\varphi] - W[\varphi] \quad (6.22a)$$

kifejezést nevezzük.

Pontosabb megfogalmazásban a funkcionál első variációját keressük, ez (6.22a)-nál a  $\delta\varphi$  megváltozással (ez a  $\varphi$  függvény variációja!) arányos lesz, és a magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk. (Az egész gondolatmenet úgy néz ki, mint a függvényeknél az első derivált képzése.) Szokás ezt úgy is megfogalmazni, hogy a  $\delta\varphi$  variációja első rendben kicsi.

A variációszámítás azt a függvényt keresi, amelynél a funkcionál variációja zérus. A deriválttal való rokonság okán ez azt jelenti, hogy a funkcionálnak a keresett függvény ezen értékénél *szélsőértéke* van. Jól megválasztott funkcionál esetén ilyenkor a keresett függvény adott fizikai feladatmegoldás, például az elektrosztatika peremérték-feladatának megfelelő potenciálfüggvény. Az elmondottak értelmében (6.22a) variációja:

$$\delta W = \frac{1}{2} [\text{grad}(\varphi + \delta\varphi)]^2 dV - \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} (\varphi + \delta\varphi) dV - \frac{1}{2} \int_V [\text{grad} \varphi]^2 dV + \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \varphi dV \quad (6.22b)$$

A kijelölt műveletek elvégzése után:

$$\delta W = \int_V \text{grad} \varphi \text{ grad}(\delta\varphi) dV - \int_V \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \delta\varphi dV, \quad (6.23)$$

ahol az utolsó tagot elhanyagoljuk, mert  $(\delta\varphi)^2$ -tel arányos. Ez a tag egyébként nemnegatív, ezért a funkcionál a minimumát veszi fel.

A Green-tétel felhasználásával kapjuk:

$$\delta W = \int_V -\left[\Delta\varphi + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right] \delta\varphi dV + \oint_A \delta\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dA \quad (6.24)$$

A funkcionál variációja tehát akkor tűnik el, ha a felületi integrál zérus, a  $\varphi$  függvény a térfogatban pedig eleget tesz a

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.25)$$

Poisson-egyenletnek.

A felületi integrál két esetben tűnik el:

a)  $\delta\varphi = 0$  a vizsgált térfogat felületén. Ez azt jelenti, hogy a  $\varphi$  függvény variációját úgy kell megválasztani, hogy az a peremen (vagy annak legalább egy részén) ne változzék. Más szóval a  $\varphi + \delta\varphi$  és a  $\varphi$  függvény peremfeltétele azonos.

b) Ha azonban az előző feltétel nem teljesül, a peremen  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ , azaz a derivált

normális komponense zérus. (Ez fizikailag a térerősség normális komponensének eltűnését, tehát a felületen *csak* a felülettel párhuzamos komponens létezését jelenti.) Ha tehát a függvény variálásánál a perem egy részére nem írunk elő feltételt a függvény variációjára, a normális derivált a felületen zérusnak adódik. Ez a variációs feladat ún. *természetes peremfeltétele*. Az egész felületen nem érvényesülhet ez a feltétel (a perem egy részére elő kell írni a potenciált), mert ha az egész peremen  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  érvényes, ennek csak a  $\varphi = \text{konst.}$  potenciálfüggvény tesz eleget.

A variációs elvek alkalmazásánál a megoldást próbafüggvénnyel közelítjük. Ennek megkonstruálása önmagában is nehéz feladat lehet. Közelítő numerikus számításokban felhasználására még visszatérünk.

## NUMERIKUS MÓDSZEREK

*Feynman*, a Nobel-díjas elméleti fizikus írja mérnökhallgatóknak készült fizika-tankönyvében a peremérték-feladatokról: „A megoldás *egyetlen általános módszere* a numerikus módszer”. A világ egyik legkiválóbb analitikus elméjének fenntartás nélkül elhithetjük, ha az analitikus eljárásokkal szemben a numerikus eljárások prioritását hirdeti. Különösen megerősíti az állítást, ha tudjuk, hogy Feynmann ezt az 1960-as évek elején több mint negyven éve mondotta volt, amikor a számítástechnika még messze nem érte el a fejlettség mai szintjét. Az akkori mainframe számítógépek teljesítménye (extra kivételektől eltekintve) meg sem közelítette a mai személyi számítógépekét, amelyekről egyébként akkor még senki sem álmodott.

Ugyanakkor a numerikus módszereket már a második világháborútól kezdve kiterjedten alkalmazták. A számítási munkát kézikalkulátorokkal, a feladatot részekre bontva, olykor több tucatnyi ember párhuzamos munkájával végezték. Ekkor a helyzethez képest már a 60-as évek elején is óriási előrelépést jelentett az elektronikus számítógépek használata, még ha a máig tartó fejlődés távlati beláthatatlanok is voltak.

A numerikus módszerek két nagy csoportra oszthatók:

- az analitikus végeredmények numerikus meghatározása,
- numerikus közelítő módszerek alkalmazása.

Az elsőre a továbbiakban térszámítási példát nem adunk. Ilyen eredmény például Fourier-sorfejtésben az együtthatók analitikus formában megadott integráljának numerikus kiszámítása.

A továbbiakban peremérték-feladatok megoldására olyan példákat mutatunk, ahol a leíró egyenleteket ill. a peremfeltételeket eleve közelítő módon írjuk le. Ez a közelítés a különböző módon megadott operátorok diszkretizálása. A számítógép véges memóriájából következik, hogy a numerikus megoldást (jóllehet olykor igen nagy) véges számú adattal, tehát diszkrét adatok sokaságával kell reprezentálnunk.

Három ilyen módszerrel ismerkedünk meg:

- a véges differenciák
- a véges elemek és a
- momentumok módszerével.

## A véges differenciák módszere

A módszert kétdimenziós problémára mutatjuk be. Általánosítása három dimenzióra rendkívül egyszerű. A feladat a

$$\Delta\varphi = 0, \mathbf{r} \in V \quad (6.26)$$

egyenlet megoldása zárt tartományban, amelynek peremére

$$\varphi = f(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in A_1 \quad (6.27a)$$

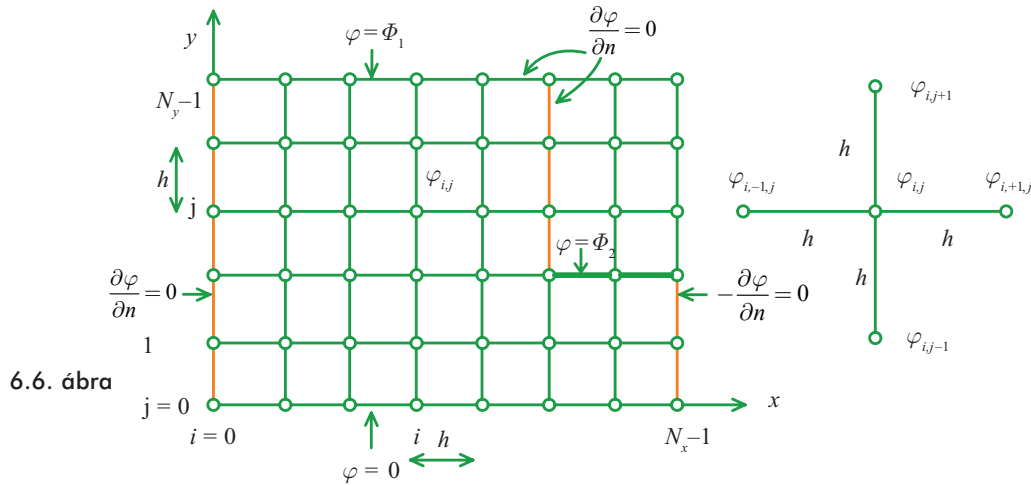
$$A_1 \cup A_2 = A \quad (6.27b)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = g(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in A_2$$

a  $\varphi$  függvény Dirichlet- vagy Neumann-peremfeltételének tesz eleget.

A vizsgált tartományt (az esetünkben síktartomány) fedjük le egy (a továbbiakban mindig egyenlő távolságú) derékszögű ráccsal (négyzetrács). A közelítő potenciált a rácspontokban határozzuk meg.

A rácspontokat a 6.6. ábra alapján kettős indexszel látjuk el, amelyik az  $x$ , ill.  $y$  irányú oszlop, ill. sor sorszáma.



Az ábrán látható ötpontos séma potenciáljai a következőképpen fejezhetők ki:

$$\varphi_{i+1,j} = \varphi_{i,j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} h^2 + \dots,$$

$$\varphi_{i-1,j} = \varphi_{i,j} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} h^2 + \dots,$$

$$\varphi_{i,j+1} = \varphi_{i,j} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} h^2 + \dots, \quad (6.28)$$

$$\varphi_{i,j-1} = \varphi_{i,j} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} h^2 + \dots$$

Összeadva a négy egyenletet, némi elrendezés után kapjuk, hogy:

$$(\Delta\varphi)_{i,j} = \frac{\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i+1,j} - 4\varphi_{i,j}}{h^2} + \dots \quad (6.29)$$

A Laplace-kifejezés diszkrét közelítését kaptuk meg tehát. Igazolható, hogy az elhagyott tagok  $h^2$ -tel arányosak.

A térrész minden pontjára felírhatunk tehát egy lineáris algebrai egyenletet, (6.29) összefüggést zérussal téve egyenlővé.

A Dirichlet-feltételnek úgy tesszünk eleget, hogy a peremre eső rácspont potenciálját megfeleltetjük a (6.28) egyenletben előírtaknak. Így az ismeretlenek és az egyenletek száma eggyel csökken.

A Neumann-peremfeltételhez a peremen fekvő  $\varphi_{i-1,j}$  potenciálokkal a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h} + \dots \quad (6.30)$$

és ezzel helyettesítjük a perem pontjára vonatkozó (6.23) egyenletet, amelyben pl.  $\varphi_{i-1,j}$  nincs is értelmezve. Sajnos (6.30) elhagyott tagja  $h$ -val arányos, így nagyobb hibát tartalmaz, mint (6.29), ahol a hiba  $h^2$ -tel arányos. A hiba csökkenthető, ha nemcsak a peremmel szomszédos rácspont, de egy további rácspont potenciálját is figyelembe vesszük. Ezek után a Laplace-egyenlet megoldása igen egyszerű, minden rácspontra a

$$\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i+1,j} - 4\varphi_{i,j} = 0 \quad (6.31)$$

egyenletet kell felírni. A kialakuló egyenletrendszer akkor nem homogén, ha vannak perempontok, ahol Dirichlet-feltételt írtunk elő.

A Poisson-egyenlet esetén a jobb oldali ismert tag  $(x_i, y_i)$  koordinátához tartozó értékét kell behelyettesítenünk a rácspontra felírt (6.29) egyenletbe.

Végeredményként az ismeretlen csomóponti potenciálokra (ezek száma több tízezer is lehet) lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk. Ennek mátrixa azonban (6.29) alakját figyelembe véve igen kevés elemet tartalmaz; azok négyzete is a főátlóban és a főátlóval párhuzamosan a mellékátlókban helyezkedik el. Az ilyen „ritkás” (sparse) mátrixokkal rendelkező egyenletrendszer megoldására (tulajdonképpen a mátrix invertálására) speciális eljárásokat dolgoztak ki.

Egy szó még a görbe vonalú peremekről. Ezeket meg lehet kísérlni négyzetrács vonalaival közelíteni, vagy nem ekvidisztáns rácsponti elrendezéssel dolgozni.

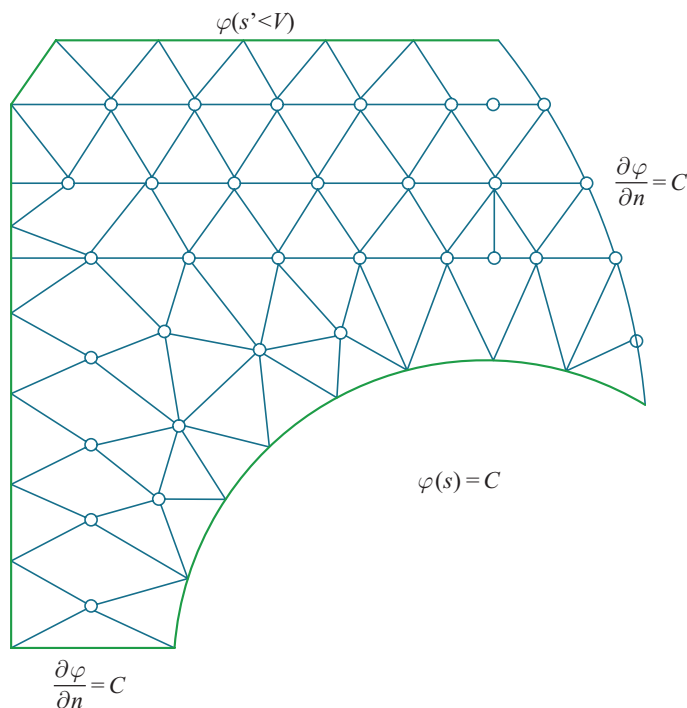
A módszer általánosítása nem ekvidisztáns hálóra, továbbá három dimenzióra kézenfekvő és alapvetően új megfontolásokat nem igényel.

## A véges elemek módszere

Az előző szakaszban megismert végesdifferencia-módszer legnagyobb hátránya, hogy gömbvonalú peremek esetén az illeszkedés a peremekhez nehézkes. A pontosság javítása a rácsvonalak – és így a rácspontok – számának jelentős növekedésével jár.

A peremproblémák megoldásának lehetséges módja, hogy a rácspontokat kellő sűrűséggel a peremen vesszük fel. Ekkor azonban a pontokra illeszkedő rács szabálytalan, semmi esetre sem derékszögű. A 6.7. ábrán a két dimenzióban

leggyakrabban alkalmazott háromszögrácsot mutatjuk be. A lefedés más alakzatokkal is történhet, de a szomszédos alakzatok élei, ill. csúcspontjai egybe kell, hogy essenek. A megoldásfüggvény közelítését ezen lefedés csúcspontjaiban meghatározott értékek meghatározásával keressük. Ebben az értelemben a véges elemek módszerét a véges differenciák módszere általánosításának tekinthetjük.



6.7. ábra  
A végeselemek felvétele

20 Ritka kivételként a szabályos háromszög és a szabályos hatszögrács esetén a feladat megoldható, de a gyakorlatban nem használatos.

De csak ebben az értelemben. A szabálytalan rács miatt a Laplace-operátor Taylor-sorral történő közelítése nem járható út<sup>20</sup>.

Mint említettük, a véges elemek módszerénél is a rácspontok potenciálértékével közelítjük a keresett potenciálfüggvény-értékét. Feltételezzük, hogy a csomópontok potenciálértékei meghatározzák a sokszögű alakzat felett a potenciáeloszlást. Ebből a szempontból a legegyszerűbb a 6.8 ábrán látható, háromszög alakú tartomány: a három csúcspont potenciálja a tartományban lineáris potenciaeloszlást határoz meg.

A csomópontok potenciáljaira vonatkozó egyenlet felírása többféle módszerrel történhet:

- momentummódszer,
- variációs módszer.

A momentummódszerrel a következőkben az integrálegyenletek numerikus megoldásainál foglalkozunk. (A végeselem-módszerben történő felhasználásáról igen jó összefoglalást ad J. D. Jackson irodalomjegyzékben idézett munkájának 2.12. szakasza.)

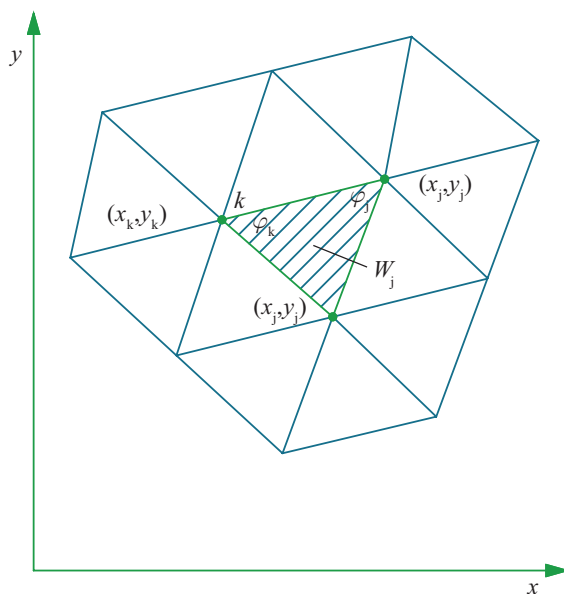
Kétdimenziós esetre szorítkozva a variációs módszernél a (6.21) alapján az alábbi funkcionált kell minimalizálnunk:

$$W = \frac{1}{2} \iint_A \kappa(x, y) \left[ \left( \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \iint_A f(x, y) \varphi(x, y) dx dy \quad (6.32)$$

A funkcionál szélsőértékét veszi fel (és mint láttuk, ez minimum), ha az ismeretlen függvény helyébe a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa(x, y) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \kappa(x, y) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right] = f(x, y) \quad (6.33)$$

általánosított Poisson-egyenlet megoldását helyettesítjük. Ez az egyenlet érvényes az elektromos tér valamennyi sztatikus és stacionárius feladata esetén. Az általunk vizsgált esetekben  $\kappa(x, y)$  a tartományonként állandó anyagjellemző:  $\varepsilon$  permittivitás vagy  $\sigma$  vezetőképesség,  $f(x, y)$  a Poisson-egyenlet jobb oldala: töltéssűrűség, ill. stacionárius áramsűrűségének komponense.



6.8. ábra  
Végeselem koordinátái  
és potenciálja

Ezek után a csúcsponti potenciálok által kijelölt lineáris potenciálfüggvényekkel közelítjük a potenciáeloszlást oly módon, hogy a potenciálok alkalmas megválasztásával minimalizáljuk (6.32)-t. A potenciálfüggvény meghatározásához tekintsük a 6.8. ábra jelöléseit. Ezekkel a jelölésekkel a kijelölt végeselemhez tartozó lineáris potenciálfüggvény:

$$\varphi(x, y) = a_l + b_l x + c_l y, \quad (6.34)$$

ahol az  $a_l$ ,  $b_l$ ,  $c_l$  együtthatók az

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_l \\ b_l \\ c_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

egyenletrendszer megoldásából adódnak.

A (6.32) funkcionál extrém voltának szükséges feltétele:

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi_i} = 0. \quad (6.36)$$

$N$  véges elem esetén (6.32) közelítése az egyes háromszögek felett értelmezett  $w_1$  integrálok összege:

$$W = \sum_{i=1}^N w_i = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \iint_{A_i} \kappa \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \iint_{A_i} f \varphi dx dy \right\} \quad (6.37)$$

Az (6.34) és (6.35) segítségével kiszámított közelítőfüggvényeket behelyettesítve (6.37)-be és (6.36)-t felhasználva valamennyi  $\frac{\partial w_i}{\partial \varphi_i}$  parciális derivált kifejezhető a csomóponti potenciálok függvényeként.

A rácsponti potenciálokra felírt egyenlet ezek után a

$$\sum_{i \in L} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi_i} = 0 \quad (6.38)$$

egyenletek összessége, ahol  $L$  jelenti mindazon véges elemek sorszámát, amely elemek az  $i$ -edik rácspontot csúcspontként tartalmazzák. (6.38)-at minden rácspontra felírva egy ritkás mátrixú, lineáris algebrai egyenletrendszer kapunk eredményül.

A peremfeltételek közül a Dirichlet-feltétel teljesülését a peremen fekvő rácspontok potenciáljainak rögzítésével biztosíthatjuk. A variációs elvek tárgyalásánál kapott eredmény szerint a homogén Neumann-feltétel *természetes határfeltétel*. Ha tehát perempontokra semmit sem írunk elő, a peremen a homogén Neumann-feltétel automatikusan teljesül.

A véges elemek módszere három dimenzióra hasonló elvek alapján általánosítható. A kitöltés legegyszerűbb egymáshoz illeszkedő tetraéderekkel történhet, amelyek csúcspontjainak potenciáljai meghatározzák a tetraéder belsejében a potenciáloszlást közelítő függvényt.

## Momentum módszer.

### Integrálegyenletek numerikus megoldása

A momentum módszer általános közelítő módszer lineáris operátorral rendelkező egyenletek megoldására. A megoldást, mint látni fogjuk, függvénytör alakjában keresi a módszer.

A módszer integrál- és differenciáloperátorok esetén egyformán alkalmazható. Így a véges elemek módszere is felépíthető a momentum módszerre támaszkodva.

A továbbiakban a módszert olyan általánossággal tárgyaljuk, hogy mindkét említett esetben érvényes kijelentéseket tudjunk megfogalmazni.

Legyen adott az  $L$  lineáris operátor, amelyre

$$Lf = g, \quad (6.39)$$

ahol az ismeretlen  $f$  függvény és az ismert  $g$  függvény meghatározott (nem szükségképpen azonos) függvényosztályba tartozik.

A (6.39) egyenlet megoldásán az  $L$  operátor  $L^{-1}$  inverzének megkeresését értjük:

$$f = L^{-1}g. \quad (6.40)$$

$L^{-1}$  nem feltétlenül állítható elő zárt alakban, ill. véges algoritmus formájában.

Az elektrosztatika (6.2) integrálegyenletének esetében pl.  $g$  az elektródák ismert potenciálja a felületen (a hely korlátos függvénye),  $f$  a felületi töltéssűrűség [szintén a hely függvénye, de ha az elektródák felülete nem kellően sima (élei, csúcsai vannak), nem feltétlenül korlátos].

A momentumok módszere a keresett  $f$  függvényt közelítőleg egy lineárisan független elemekből álló, véges számú elemet tartalmazó függvényhalmaz  $\{\varphi_n\}$  soraként állítja elő:

$$f = \sum_{n=1}^N f_n \varphi_n \quad (6.41)$$

ahol  $f_n$  az  $f$ -től és  $\varphi_n$ -től függő konstans. A  $\varphi_n$  függvényeket *bázisfüggvénynek* nevezzük.

A (6.41) sort (6.39)-be helyettesítve kapjuk:

$$\sum_{n=1}^N f_n (L\varphi_n) = g, \quad (6.42)$$

ahol felhasználtuk, hogy az  $L$  operátor lineáris. Az operátor közelítő invertálását az  $f_n$  együtthatók meghatározása jelent, hiszen ha az  $\{f_n\}$  halmaz ismert, (6.41) közelítőleg előállítja a keresett  $f$  függvényt. Az  $\{f_n\}$  sorozat meghatározásához a momentumok módszere egy másik függvényhalmazzal, a  $\{w_m\}$  súlyfüggvények halmazát definiálja. Megköveteljük, hogy a választott skalárszorzat definícióval valamennyi  $\langle w_n, f_m \rangle$  és  $\langle w_m, g \rangle$  skalárszorzat értelmezve legyen.

A skalárszorzat valós elemek esetén olyan kéttényezős művelet, amelynek eredménye valós skalármennyiség, és eleget tesz a következő feltételeknek:

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= \langle b, a \rangle - \text{kommutativitás,} \\ \langle a, b + c \rangle &= \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle - \text{disztributivitás.} \end{aligned}$$

$\langle a, a \rangle \geq 0$  pozitív számú definit, mert az egyenlőségjel csak  $a = 0$  esetben állhat fenn.

A tulajdonságok pontosan megegyeznek a vektorok skalárszorzatának tulajdonságaival. Az analógia alapján az  $a$  elem abszolút értéke:

$$|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}.$$

Az elektrosztatika integrálegyenleteinek esetében a skalárszorzat két függvény szorzatának az integráloperátoros tartományán vett integrálja.

Minden egyes súlyfüggvénnyel megszorozva (6.39) skalárszorzatát az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\sum_{n=1}^N \langle w_m, L\varphi_n \rangle f_n = \langle w_m, g \rangle \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (6.43)$$

$M = N$  esetében az egyenletrendszer  $L = [l_{mn}] = [\langle w_m, L\varphi_n \rangle]$  mátrixa kvadratikus és így közvetlenül invertálható, és

$$[f_n] = [l_{mn}]^{-1} [g_m]. \quad (6.44)$$

Az eljárás neve  $w_m = \varphi_m$  esetén, ha tehát a súlyfüggvények és a bázisfüggvények azonosak, *Galerkin-módszer*. Ha az  $L$  operátor önadjungált és a  $\{\varphi_m\}$ -t az operátor teljes sajátfüggvényrendszerének csonkításával kapjuk, az eljárást *Rayleigh–Ritz-módszernek* nevezzük.

A közelítés hibáját így definiálhatjuk:

$$\eta = L \sum_{n=1}^N f_n \varphi_n - g. \quad (6.45)$$

A momentum módszer ezt a hibát kicsivé teszi oly módon, hogy

$$\langle w_m, \eta \rangle = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (6.46)$$

Ha  $M > N$  választással élünk, a megoldást akkor is a (6.45) hiba valamilyen módon történő minimalizálásával keressük. Ilyen feladat lineáris programozási eljárásokkal oldható meg.

A módszer alkalmazásánál a kérdés, hogyan válaszunk a bázis- és súlyfüggvényeket, illetve  $N$  és  $M$  értékét. Erre vonatkozóan a megkívánt pontosság és a rendelkezésre álló erőforrások: térfelület, számítási sebesség stb. ismeretében a gyakorlat tud választ adni.

A bázisfüggvények és súlyfüggvények két nagy csoportra oszthatók:

- a) az egész tartományon értelmezett függvények (pl. Fourier-sorok, ortogonális polinomok);
- b) résztartományokon értelmezett függvények. Ezek csak az egész tartomány egy részén különböznek zérustól (pl. impulzusfüggvények).

Mindkét esetben a módszer által megkövetelt integrálokat általában numerikusan számítjuk ki. Ez a *b)* választás esetén általában sokkal könnyebb. Például rész-tartományonként, polinom karakterű függvények esetén a véges elemek módszerének egy megalapozásához jutunk.

A módszer egy gyakran használt változata, ha súlyfüggvényként a rész-tartományon értelmezett  $\delta$ -függvényt használunk. Ekkor:

$$w_m = \delta(P_m), \quad (6.47)$$

és (6.43) alakja:

$$\sum_{n=1}^N f_n (L\varphi_n(P_m)) = g(P_m) \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (6.48)$$

Az egyenletből látszik, hogy nem az egész tartományon, csupán  $M$  előre kijelölt pontjában követeljük meg az egyenlet teljesülését. Ezért a módszert gyakran pontillesztésnek (kollokáció) nevezik.

Előnye, hogy a mátrixelemek számítása egyszerűbb, például csak egy integrálást követel az integrálegyenletek esetén. Hátránya, hogy kellő pontosságú számításhoz az általános módszernél jóval nagyobb számú bázisfüggvény felvételét követeli meg.

## Összefoglalás

Három numerikus módszert mutattunk be a térszámítás alapegyenleteinek megoldására. Ami szembetűnően közös bennük:

- Valamennyi módszer véges számú reprezentációs skalármennyiséggel közelíti a keresett függvényt.
- A véges számú ismeretlen meghatározására az eredeti operátort algebrai egyenletrendszerre képezi le.

Az algebrai egyenletrendszerek megoldására számos kész algoritmus (ill. program) áll rendelkezésre.

## BEVEZETŐ

A 5. fejezet végén bemutattuk a koncentrált paraméterű hálózatok leíró egyenleteinek, a Kirchhoff-egyenleteknek a származtatását a Maxwell-egyenletekből. Megjegyeztük, hogy a koncentrált paraméterű hálózatok csak akkor tekinthetők az elektromágneses tér jó modelljének, ha geometriai méreteik következtében az elektromágneses hatás terjedési ideje kicsi a hálózatokon belül a karakterisztikus időhöz képest. Ellenkező esetben az elektromos potenciál (feszültség), ill. a divergenciamentes áram, ill. a belőlük számítható elektromos és mágneses tér többé nem az elektromágneses jelenségek korrekt leírásai.

Mint a legtöbb esetben, a két szélső leírás (koncentrált paraméterű hálózat és mező) között létezik átmeneti zóna, amely már a véges terjedési sebességet figyelembe veszi, de még megőrzi a feszültséggel és árammal történő leírás egyszerűségét. Az ezeknek a feltételeknek eleget tevő elrendezéseket *elosztott paraméterű hálózatoknak* nevezzük. Ezekben a hálózatokban a leírás során már nemcsak az időtől függenek a leíró mennyiségek, hanem (az esetek döntő többségében) egy térbeli koordinátától is. Tipikus elosztott paraméterű hálózat a *távvezeték*.

A távvezeték elvben homogén kitöltésű térben két párhuzamos alkotójú, tetszőleges vezérgörbéjű fémhenger. Az ideális távvezeték ideális fémhengerekből áll, a valódi vezetéknel engedünk ebből a szigorúságból.

A távvezeték elvben végtelen hosszú. A gyakorlatban természetesen kezdete és vége is van, de valóban elég hosszú ahhoz, hogy már ne lehessen koncentrált paraméterűnek tekinteni.

Az ideális vezeték – ahogy ezt mondtuk – nem változtat irányt. A gyakorlatban ez általában nem valósítható meg, de ennek rendszerint csekély hatását nem vizsgáljuk.

Az elektromágneses hullámokat vizsgálva bebizonyítható, hogy párhuzamos, ideális fém hengerek környezetében többi között olyan tér alakul ki, ahol a villamos és mágneses térerősségnek is csak a hengerekre merőleges síkban van komponens. Ezeket transzverzális komponensnek nevezzük, ezért az ilyen struktúrájú tér elnevezése: transzverzális elektromos mágneses tér, rövidítve: TEM. Véges vezetőképesség esetén a tér csak keveset torzul, a leírás még jól közelít.

Inhomogén keresztmetszetű kitöltés esetén nem alakul ki TEM-tér, egyik vagy mindkét térerősségnek hosszanti (longitudinális) komponense is van. Ilyen távvezetéseket a TEM-módusú távvezetékhez hasonló módon lehet leírni és tárgyalni.

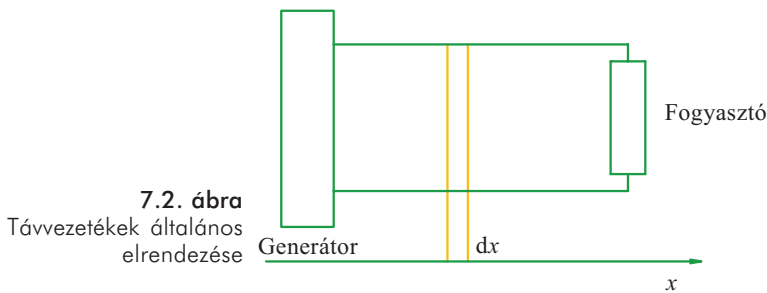
A 7.1. ábrán néhány, a gyakorlatban használt távvezeték-keresztmetszet látható. A továbbiakban a megfontolásainkat a vezetékpáron mutatjuk be, de azok valamennyi kétvezetékes távvezetékre érvényesek.



**7.1. ábra**  
Néhány gyakran használt távvezeték keresztmetszete

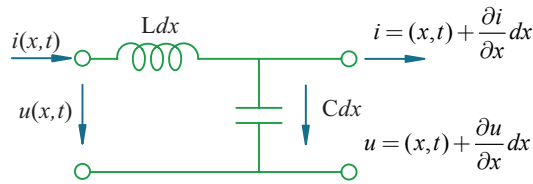
Az eredmények könnyen általánosíthatók többvezetékes távvezeték-rendszerekre is.

A 7.2. ábrán mutatjuk be a távvezeték általános elrendezését. A távvezeték egy kicsiny  $dx$  hosszúságú szakasza minden irányban olyan kiterjedésű, hogy koncentrált paraméterű rendszernek tekinthető. A keresztmetszetben kialakuló tér megfelel a sztatikus, ill. stacionárius térnek, így  $\int \mathbf{E}d\mathbf{l} = u$  és  $\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = i$  minden keresztmetszetben egyértelműen definiálható. Így van létjogosultsága a kapacitás, ill. induktivitás bevezetésének. Ennek hosszegységre eső értékét  $C$ -vel és  $L$ -lel jelölve rövid szakaszunk induktivitása  $Ldx$ , kapacitása.



Ezzel egy  $dx$  hosszúságú szakasz koncentrált elemű helyettesítő képe megalkotható (7.3. ábra).

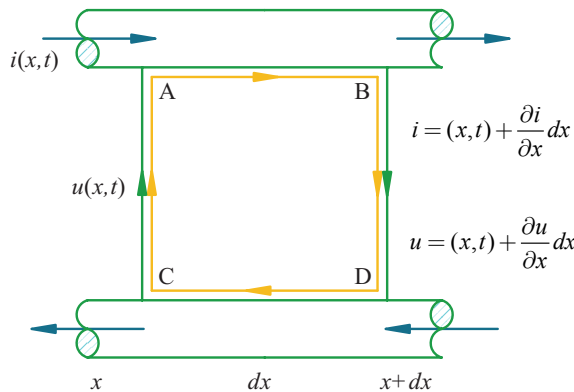
**7.3 ábra**  
Távvezeték  $dx$   
hosszúságú szakaszának  
helyettesítő képe



Az első egyenlet az indukciótörvényből kapható. A 7.4. ábrán látható hurokra felírva a törvényt:

$$\oint_s \mathbf{E} ds = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A}. \quad (7.1)$$

**7.4. ábra**  
Az indukciótörvény  
felírásához



A feszültség az  $AB$  pontok között  $u(x,t)$ , de a  $dx$  szakaszon megváltozik. A  $dx$ -szel arányos változást figyelembe véve a  $BC$  pontok között a feszültség  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ . A térerősség vonalintegrálja:

$$\oint_s \mathbf{E} ds = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u(x,t), \quad (7.2)$$

mert az  $AB$  és  $CD$  szakaszokon ideális vezetőkön a tangenciális térerősség zérus.

(7.2)-t (7.1)-gyel összevetve:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -L dx \frac{\partial i}{\partial t} + \dots, \quad (7.3)$$

ahol az elhagyott tagok legfeljebb  $dx^2$  nagyságrendűek (hiszen az áram is változik a  $dx$  szakaszon).

Rendezve kapjuk, hogy

$$- \frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (7.4)$$

Az egyenlet állítása: a vezeték mentén a feszültség változását az öninduktivitáson fellépő induktív feszültség okozza.

Miért változik az áramerősség a vezeték mentén? A két vezető henger közötti kapacitáson töltés halmozódik fel. Ez a töltés a  $dx$  szakasz  $Cdx$  kapacitásán:

$$q = Cdxu + \dots, \quad (7.5)$$

ahol az elhagyott tagok ismét  $(dx)^2$ -tel arányosak. Felírva a folytonossági egyenletet a  $dx$  hosszúságú szakaszra (7.3. ábra):

$$i(x,t) + \frac{\partial i}{\partial x} dx - i(x,t) = -\frac{\partial q}{\partial t} = -Cdx \frac{\partial u}{\partial t} + \dots,$$

ahonnan a

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.6)$$

egyenlethez jutunk. Az egyenlet fizikai tartalma nyilvánvaló.

(7.4) és (7.6) az *ideális távvezeték-egyenletek*. Az egyenletek a 7.3. ábrán látható hálózatra felírható hurok- és csomóponti egyenletnek felelnek meg.

A (7.4) mindkét oldalát hely szerint deriválva:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial i}{\partial x},$$

és ide  $\frac{\partial i}{\partial x}$  értéket (7.4)-ből behelyettesítve a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7.7)$$

egyenlethez jutunk. Hasonló módon az áramra:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad (7.8)$$

vagyis ugyanazt az egyenletet kapjuk.

Ez az egyenlet az (egydimenziós) *hullámgömb*. Ez az egyenlet a fizika számos területén megjelenik. Könnyű belátni, hogy megoldása tetszés szerinti függvény lehet, amelynek változója  $\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$  alakú. Nagyképűen: a függvény argumentuma a  $t$  és  $x$  független változók lineáris kombinációja.

A bizonyításhoz csak a közvetett deriválás szabályát kell ismerni  $\alpha = t \mp \frac{x}{v}$  jelöléssel:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \left(\mp \frac{1}{v}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Ebből

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mp \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial t},$$

és ezt a  $\frac{\partial f}{\partial x}$  deriváltfüggvényre alkalmazva:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Ezt a (7.8)-cal összevetve beláttuk, hogy a hullám tetszőleges alakú, a pozitív vagy negatív tengely irányába  $v$  sebességgel haladó alakzat. Esetünkben:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (7.9)$$

Bizonyítható, hogy ideális vezeték esetén  $LC = \varepsilon\mu$ , azaz  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ . Ez a távvezeték kitöltő közegben haladó fény sebessége.

Az ideális távvezetéken tehát hullámok terjednek. A (pozitív vagy negatív irányba) haladó hullámok tetszés szerinti alakúak lehetnek.

Figyelem! El kell oszlatnunk azt a tévhitet, hogy a hullám szinuszos alakzat tovaterjedése. Ez onnan ered, hogy a gerjesztés gyakran szinuszos időfüggvény, ekkor szinuszos alakú haladóhullám alakul ki. De ezzel ellentétben elektromos hullámoknál is ismert, pl. az impulzushullám, lökeshullám stb.

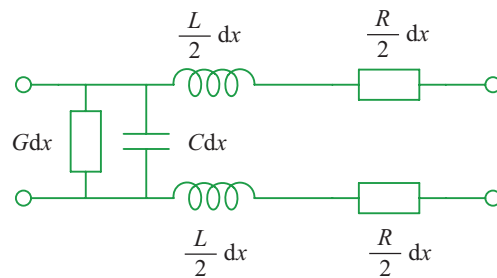
Később látni fogjuk, hogy a pozitív irányba haladó áram- és feszültség-hullám arányosak egymással, és az arányossági tényező:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7.10)$$

A negatív irányba haladó hullámok hányadosa  $-Z_0$ . A  $Z_0$ -t hullámellenállásnak nevezzük, mert ellenállás dimenziójú.

Eddig ideális távvezetéseket vizsgáltunk, nem vettük figyelembe a veszteségeket. A veszteségek egyrészt a vezetők véges vezetőképességétől származnak. Ha az ellenállás  $dx$  hosszon  $Rdx$ , a rajta átfolyó áram  $iRdx$  feszültségsökkenést hoz létre.

A veszteség másik okozója a vezetékek közötti dielektrikum véges vezetőképessége (nem tökéletes szigetelő volta) lehet.  $dx$  hosszúságon a két vezeték között  $Gdx$  vezetést feltételezve a feszültség hatására  $uGdx$  áram folyik át a két vezeték között (7.5. ábra).



**7.5. ábra**  
A  $dx$  hosszúságú  
vesztéses vezeték elem  
helyettesítő kapcsolása

Az  $R$  soros fajlagos ellenállás és  $G$  párhuzamos fajlagos vezetést a  $dx$  szakaszra felírt Kirchhoff-egyenletekben figyelembe véve azok alakja:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad (7.11)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (7.12)$$

21 A távítás fejlődésével alakult ki az igény a távvezetéken kialakuló hullámok terjedésének vizsgálatára, még mielőtt az elektromágneses hullámok elmélete megszületett volna. 1851-ben fektették le az első tenger alatti kábelt Dover és Calais között, de már felmerült az igény atlanti kábel kiépítésére is. Ilyen nagy távolság esetén az előzetes elméleti megfontolások már szükségesek voltak és W. Thomson (Lord Kelvin) kapott megbízást a vizsgálatra. Az egyetlen szigetelt érből álló kábel ellenállását természetesen figyelembe vette, de a nagy kapacitás miatt az induktivitást elhanyagolta és a párhuzamos vezetés is érdektelen volt. Mai terminológiával tehát RC-hálózat egyenletét írta fel 1854-ben. Az induktivitás figyelembevétele Kirchoff nevéhez fűződik (1857). Az egyenletet mai teljes formájukban O. Heaviside 1876-ban írta fel, gondolatmenete lényegében megegyezik a miénkkel. A távítóegyenletek szigorú elektrodinamikai megalapozása Poincaré nevéhez fűződik (1890).

22 Meg kell jegyeznünk, hogy a mérnöki specifikáció sohasem követelheti meg két mennyiség pontos egyenlőségét. (7.15) tehát elvi jelentőségű. A gyakorlat azonban igen közeli értékek esetén jó közelítéssel használni tudja az eredményeket.

Ezek a „távítóegyenletek”<sup>21</sup>. Hasonlóan az ideális távvezetékhez, felírhatjuk az egy-egy mennyiség tér-idő függésére érvényes veszteséges hullámegyenletet. Az  $u$ -ra kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial u}{\partial t} + RGu, \quad (7.13)$$

és a teljesen hasonló egyenletet  $i$ -re:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} + RGi. \quad (7.14)$$

Az egyenletek veszteségmentes esetben ( $R = 0$ ,  $G = 0$ ) átmennek a (7.7) és (7.8) egyenletekbe. Fenti teljes formájukban azonban az ideális egyenletekhez hasonló általános megoldást nem lehet megadni.

Egyetlen kitüntetett esetet ismerünk, amikor:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}. \quad (7.15)$$

Az ilyen vezetéknek több különböző elnevezése van: egyenletes veszteségű/torzításmentes/Thomson-kábel<sup>22</sup>.

Ezen vezeték pozitív irányba haladó feszültség-hullámának alakja:

$$u^+(x, t) = U_0 e^{-\alpha x} f\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad (7.16)$$

a negatív irányba haladó pedig:

$$u^-(x, t) = U_0 e^{+\alpha x} f\left(t + \frac{x}{v}\right), \quad (7.17)$$

ahol  $v = 1/\sqrt{LC}$ ,  $\alpha = \sqrt{RG}$ .

Látható, hogy az intenzitás (amplitúdó) exponenciálisan csökken a haladás irányában, de a jel időbeli lefutása bármely pontban azonos függvény szerint történik. Igazolható az is, hogy ilyen vezetéken is:

$$\frac{u^+}{i^+} = Z_0, \quad \frac{u^-}{i^-} = -Z_0,$$

ahol  $Z_0$  a (7.10) által definiált hullámellenállás.

A terjedési sebesség és a hullámimpedancia megegyezik az ideális vezetékével.

## A TÁVÍTÓEGYENLETEK MEGOLDÁSA SZINUSZOS GERJESZTÉS ESETÉN

Miután a távítóegyenletek időtartományban általában nem oldhatók meg, az általános megoldás helyett a szinuszos gerjesztés esetén kialakuló megoldást keressük, és pedig komplex számítási módszerrel. Ennek indoklása a koncentrált paraméterű hálózatok vizsgálatából ismert:

1. A szinuszos gerjesztés komplex számítmódja az időbeli deriválás műveletét egyszerű algebrai műveletbe (szorzás) transzformálja. Így koncentrált paraméterű

esetben a megoldandó egyenletek a komplex amplitúdóra vonatkozó algebrai egyenletek lesznek.

Esetünkben két független változós, *parciális* differenciálegyenletről van szó. *De* az idő szerinti deriváltat itt is szorzás helyettesíti. A másik változó szerint deriválva tehát *közönséges* differenciálegyenleteket elégít ki a komplex amplitúdó. A megoldás ebben a környezetben elérhető közelségbe kerül.

2. A gerjesztőjeleknek (áramok, feszültségek) igen általános feltételek mellett létezik Fourier-transzformáltja. Ennek általános feltétele a jel véges energiatartalma, annak minden valódi jel eleget kell, hogy tegyen. A komplex számítástechnikával kapott megoldás lehetővé teszi a gerjesztésre adott válasz Fourier-transzformáltjának meghatározását, és – ha szükséges – inverz Fourier-transzformációval a valós időfüggvények meghatározását. Ennek jelentősége a gyors Fourier-transzformációs algoritmusok széles körű elterjedésével hatalmasra nőtt.

Külön kell említenünk a periodikus gerjesztéseket. Ha ezeket Fourier-sorral írjuk le, valamennyi harmonikus viselkedése a távvezetéseken külön-külön vizsgálható. Miután a harmonikusok frekvenciája adott, a vezeték bármely pontján ugyanolyan periódusidejű harmonikus válasz alakul ki, és annak Fourier-sora a szinuszos gerjesztésre adott válasz ismeretében számítható.

3. A komplex számításmód lehetővé teszi a távvezetéseken kívül más, adott esetben bonyolultabb struktúrájú elosztott paraméterű hálózatok leírását és számítását. Ezek a hálózatok olykor összetett elektromágneses jelenségek egyszerűsített modelljei.

A megoldásokat mindig

$$u(t, x) = U(x)e^{j\omega t}; \quad (7.18)$$

$$i(t, x) = I(x)e^{j\omega t} \quad (7.19)$$

alakban keressük. A valós tér–idő függvények a komplex függvények valós részei. Itt  $U(x)$  és  $I(x)$  a helytől függő komplex amplitúdók. *A következőkben nem jelöljük külön a komplex mennyiségeket és ezt már  $u(t, x)$ ,  $i(t, x)$  esetében is így tettük.*

Jegyezzük meg: hullámjelenségek komplex leírásánál *mindig* komplex amplitúdóval számolunk (azaz nem a komplex effektív értékkel)!

Az elmondottak alapján a (7.11) és (7.12) egyenletekből a komplex amplitúdókra az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} -\frac{dU}{dx} &= (R + j\omega L)I = Z_s(j\omega)I; \\ -\frac{dI}{dx} &= (G + j\omega C)U = Y_p(j\omega)U, \end{aligned} \quad (7.21)$$

ahol  $Z_s(j\omega)$  és  $Y_p(j\omega)$  a hosszegységre eső soros impedanciát, illetve párhuzamos admittanciát jelenti.

Egyszerű számítás után kapjuk (7.13) és (7.14) megfelelőit:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \gamma^2 U; \quad (7.22)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = \gamma^2 I, \quad (7.23)$$

$$\text{ahol } \gamma^2 = Z_s Y_p. \quad (7.24)$$

Miután a két egyenlet formailag azonos, a továbbiakban részletesen csak az  $U$ -ra vonatkozó egyenlettel foglalkozunk,  $U(z)$ -t határozzuk meg. Ezután *mutatis mutandis* (a változtatandókat megváltoztatva) írjuk fel az áramra vonatkozó megoldást.

(7.22) a legegyszerűbb másodrendű lineáris homogén differenciálegyenlet. Általános megoldását az ún. Euler-módszerrel, exponenciális próbafüggvénnyel keressük:

$$U(x) = e^{\lambda x}.$$

Behelyettesítve kiderül, hogy ez a függvény akkor megoldás, ha

$$\lambda = \pm \gamma, \quad (7.25)$$

azaz két lineárisan független megoldás létezik (ahogy ez másodrendű közönséges egyenletnél illik).  $\gamma$  elnevezése: *terjedési együttható*. Segítségével felírva (7.22) teljes megoldása tehát:

$$U(x) = U_0^+ e^{-\gamma x} + U_0^- e^{+\gamma x}. \quad (7.26)$$

Az áramra hasonlóan adódik:

$$I(x) = I_0^+ e^{-\gamma x} + I_0^- e^{+\gamma x}. \quad (7.27)$$

Az amplitúdók kapcsolatát (7.20) segítségével kapjuk:

$$I(x) = -\frac{1}{Z_s} \frac{dU(x)}{dx} = \frac{\gamma}{Z_s} U_0^+ e^{-\gamma x} - \frac{\gamma}{Z_s} U_0^- e^{+\gamma x}, \quad (7.28)$$

ahonnan:

$$I(z) = \frac{U_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U_0^-}{Z_0} e^{+\gamma z}, \quad (7.29)$$

ahol  $Z_0 = \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}}$  a hullámimpedancia. (7.30)

Értelmezzük a megoldást. Ehhez definiáljuk  $\gamma$  valós, ill. képzetes részét:

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (7.31)$$

Ezzel (7.26) első tagja tér-idő függése

$$U^+ = U_0^+ e^{j\omega t - (\alpha + j\beta)x} = U_0^+ e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}, \quad (7.32)$$

ill. bevezetve a

$$\frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{v} \quad (7.33)$$

jelölést:

$$u^+ = U_0^+ e^{-\alpha x} e^{j\omega \left( t - \frac{x}{v} \right)}. \quad (7.34)$$

A legegyszerűbb esetben tételezzük fel, hogy  $\alpha = 0$ . Ekkor megoldásunk a  $\left(t - \frac{x}{v}\right)$  függvénye, amiről már beláttuk, hogy a pozitív  $x$  tengely irányába  $v$  sebességgel terjedő hullámot ír le. Esetünkben  $\beta$  és így  $v$  is a frekvencia függvénye, de egy adott frekvencián állandó.

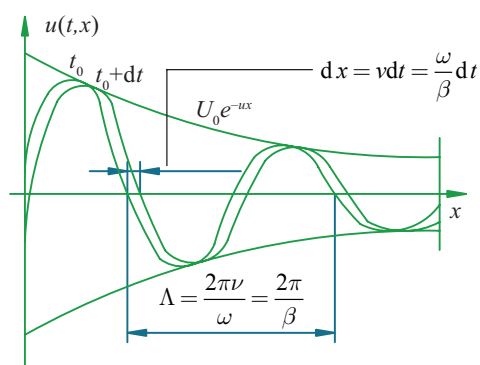
Következtetés: a szinuszos gerjesztés esetén minden  $\omega$  frekvenciájú szinuszos gerjesztéshez egy állandó sebességgel terjedő szinuszos hullám tartozik.

A  $v(\omega)$  mennyiség ezek után azt mutatja meg, hogy a szinuszos hullám bármely tetszés szerinti fázisa (pl. nullátmenete vagy maximuma) milyen sebességgel terjed.

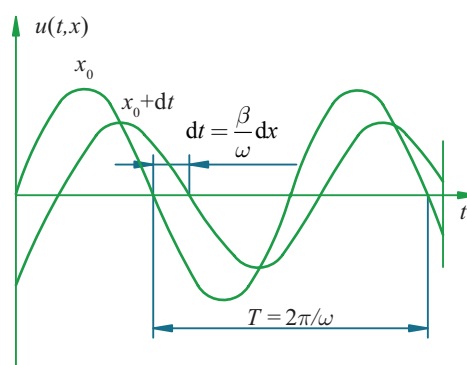
Ezért neve a *fázissebesség*. Ha meg akarjuk különböztetni, jelölése:  $v_f$ ,  $\beta(\omega) = \frac{\omega}{v(\omega)}$  a *fázistényező*.

Most már  $\alpha$  jelentése is értelmezhető. A terjedés irányában az amplitúdó exponenciálisan csillapodik. Ennek a mértékét adja meg az  $\alpha$  csillapítási tényező. A feszültség ennek megfelelően a hely, ill. idő függvényében a 7.6. és 7.7. ábrákon látható. Ne felejtsük: a valós időfüggvény a komplex függvény valós része!

**7.6. ábra**  
A feszültség változása a vezeték mentén két egymáshoz közel eső pontban



**7.7. ábra**  
A feszültség változása a vezeték két egymáshoz közel eső helyén



Jegyezzük meg: az egy frekvenciájú (monokromatikus), tiszta szinuszos hullám terjedése torzításmentes, csupán az amplitúdója más és más a vezeték különböző helyein.

Most már  $\gamma$  másik előjelének értelmezése sem okoz nehézséget. Az

$$u^- = U_0^- e^{+\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} = U_0^- e^{+\alpha x} e^{j\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)} \quad (7.35)$$

tér–idő függvény negatív irányba haladó és a *haladás irányában* csökkenő amplitúdójú szinuszos hullámot ír le. Ne tévesszen meg a pozitív előjel az exponenciális függvény kitevőjében!

Szinuszos hullámoknál fel lehet tenni a kérdést: mekkora utat tesz meg a hullám bármelyik fázisa egy periódusidő alatt. Ezt a távolságot hullámhossznak nevezzük és  $\lambda_g$ -vel jelöljük. (A  $g$  index a „guided wave”: vezetett hullám kifejezésére utal.)

Meghatározása az

$$e^{j\omega \frac{x+\lambda_g}{v}} = e^{j\omega \frac{x}{v} + 2\pi} \quad (7.36)$$

egyenlőségből azonnal adódik:

$$\lambda_g = \frac{2\pi v_f}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta} \quad (7.37)$$

*Megjegyzés:*  $\lambda$  (index nélkül) a szabadtéri hullámhossz:

$$\lambda = \frac{c}{f}, \quad (7.38)$$

ahol  $c$  a szabadtéri fénysebesség. A *szabadtéri hullámhossz* a frekvenciával azonos értékű jellemzője a jelenségnek.

A feszültség általános kifejezése:

$$u(x, t) = u^+ + u^- = U_0^+ e^{j\omega t - \gamma x} + U_0^- e^{j\omega t + \gamma x}. \quad (7.39)$$

(7.29) felhasználásával az áram:

$$i(x, t) = i^+ + i^- = \frac{U_0^+}{Z_0} e^{j\omega t - \gamma x} - \frac{U_0^-}{Z_0} e^{j\omega t + \gamma x}. \quad (7.40)$$

Ismételjük: a valós tér-idő függvényeket a fenti komplex függvények valós részeként értelmezzük.

Az eddigiekben részletezettek teljes általánosságban érvényesek.  $Z_s(j\omega)$  és  $Y_p(j\omega)$  elvben tetszés szerinti immittanciafüggvények lehetnek. A gyakorlatban általában koncentrált paraméterű hálózatok jellemzői, így  $j\omega$  racionális függvényei.

Ez a helyzet az általunk vizsgált  $R$ - $L$ - $G$ - $C$  távvezetékek esetén is. Foglalkozzunk részletesebben ezeknek a vezetékeknek a tulajdonságaival.

Esetünkben

$$Z_s(j\omega) = R + j\omega L; \quad Y_p(j\omega) = G + j\omega C, \quad (7.41a, b)$$

és ezért

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}. \quad (7.42)$$

$\alpha$  és  $\beta$  meghatározásához először emeljük négyzetre mindkét oldalt. Kapjuk, hogy:

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2j\beta = (R + j\omega L)(G + j\omega C), \quad (7.43)$$

ahonnan

$$\alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC; \quad (7.44)$$

$$2\alpha\beta = \omega(RC + LG). \quad (7.45)$$

Ezután határozzuk meg (7.42) mindkét oldalának abszolút értékét:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}. \quad (7.46)$$

(7.46) és (7.44) különbségéből, majd összegéből:

$$\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\omega^2 LC - RG) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}}; \quad (7.47)$$

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(RG - \omega^2 LC) + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}}. \quad (7.48)$$

Az előjelek párosításában a (7.45) egyenlet segít. Innen látszik, hogy  $\alpha$  és  $\beta$  azonos előjelűek (vagy  $\alpha = 0$ ), tehát a terjedés irányában csökkenő amplitúdójú hullámokat kapunk megoldásként.

Belátható, hogy  $\omega \rightarrow \infty$  esetén  $\beta \rightarrow \omega\sqrt{LC}$ , míg  $\alpha \rightarrow 0$ . A csillapításnak a paramétereiktől függően véges frekvenciaértéknél maximuma van.

A hullámimpedancia:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (7.49)$$

ahonnan látszik, hogy a koncentrált paraméterű impedanciákkal ellentétben  $Z_0$  nemracionális függvénye  $j\omega$ -nak. Ezt az is mutatja, hogy fázisa  $-\pi/4$  és  $+\pi/4$  között változhat, ellentétben a racionális függvények  $-\pi/2 \div +\pi/2$  intervallumával.

$Z_s$  és  $Y_p$  a távvezeték primer paraméterei,  $\gamma$  és  $Z_0$  szekunder paraméterek. Megállapítható, hogy racionális primer paraméterek esetén sem kapunk racionális szekunder paramétereket.

## SPECIÁLIS TÁVVEZETÉKEK

A) *Ideális vezeték:*

$R = 0$ ,  $G = 0$  esetén a vezeték veszteségmentes. Tulajdonságait általánosan is vizsgáltuk. Szinuszos gerjesztésnél:

$$\alpha = 0, \quad (7.50)$$

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}, \quad (7.51)$$

ahonnan

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (7.52)$$

Valamennyi frekvencián azonos fázissebességet csak akkor kapunk, ha  $v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  arányos  $\omega$ -val. Ennek a terjedésnek az elnevezése: *diszperziómentes*. A *diszperzió* hullámterjedés esetén a frekvenciafüggő fázissebességet jelenti. Ekkor a jel különböző frekvenciájú komponensei különböző fázissebességgel terjednek, ezért a jel a terjedés során torzul.

Az ideális vezetéken szinuszos gerjesztés esetén is az ismert

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7.53)$$

eredményt kapjuk a hullámimpedanciára: ez frekvenciafüggetlen és valós mennyiség.

B) *Kis csillapítású vezeték:*

Ha a vezeték veszteségei kicsik, az ideális vezeték zérusrendű közelítése a ténylegesen lejátszódó jelenségeknek. A most következő levezetés a kis veszteség esetén az elsőrendű közelítés.

Legyen

$\omega L \gg R$  és  $\omega C \gg G$ , azaz összefoglalva

$$\omega \gg \max \left( \frac{R}{L}, \frac{G}{C} \right). \quad (7.54)$$

Növekvő frekvenciával a csillapítás egyre jobban elhanyagolható. Elegendően nagy frekvencián valamennyi távvezeték kis csillapítású.

A terjedési együttható:

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \sqrt{1 - j\frac{R}{\omega L}} \sqrt{1 - j\frac{G}{\omega C}}, \quad (7.55)$$

ahol a jobb oldal két utolsó tényezőjét sorba fejtjük a

$$\sqrt{1-a} \cong 1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 \quad (7.56)$$

binomális sor harmadik tagjáig. Ezzel:

$$\gamma \cong j\omega\sqrt{LC} \left[ 1 - \frac{1}{\omega} \left( \frac{R}{2L} + \frac{G}{2C} \right) + \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 \right]. \quad (7.57)$$

Ebből a fázistényező:

$$\beta \cong \omega\sqrt{LC} \left[ 1 + \frac{1}{8\omega^2} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 \right], \quad (7.58)$$

míg

$$\alpha \cong \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7.59)$$

Ebből az látszik, hogy még elsőrendű közelítésben is a fázistényező az ideális távvezeték fázistényezőjével közelíthető, míg ugyanebben a közelítésben a csillapítási tényező frekvenciafüggetlen.

A hullámimpedancia:

$$Z_0 \cong \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ 1 - j \frac{1}{2\omega} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) \right]. \quad (7.60)$$

C) *Torzításmentes vezeték:*

Ezt a vezetéktípust az általános időfüggés során már tárgyaltuk. Tulajdonságai szinuszos gerjesztés esetén is nyilván azonosak az általános tulajdonságokkal, azaz

$$\beta = \omega\sqrt{LC}; \quad (7.61)$$

$$\alpha = \sqrt{RG}; \quad (7.62)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7.63)$$

## FÁZIS- ÉS CSOPORTSEBESSÉG

Az előzőekben monokromatikus (egy frekvenciával jellemezhető) szinuszos gerjesztést vizsgáltunk. Már a bevezetőben is jeleztük azonban, hogy általános jelek több frekvenciát tartalmaznak, ezért terjedési sebességeik diszperzió esetén nem írhatók le egyetlen fázissebességgel.

Vizsgáljunk egy olyan esetet, amikor a gerjesztőjel két eltérő frekvenciát ( $\omega_1$  és  $\omega_2$ ) tartalmaz. Ekkor a két fázistényező  $\beta_1$  és  $\beta_2$ . A csillapítás hatását itt nem vizsgáljuk.

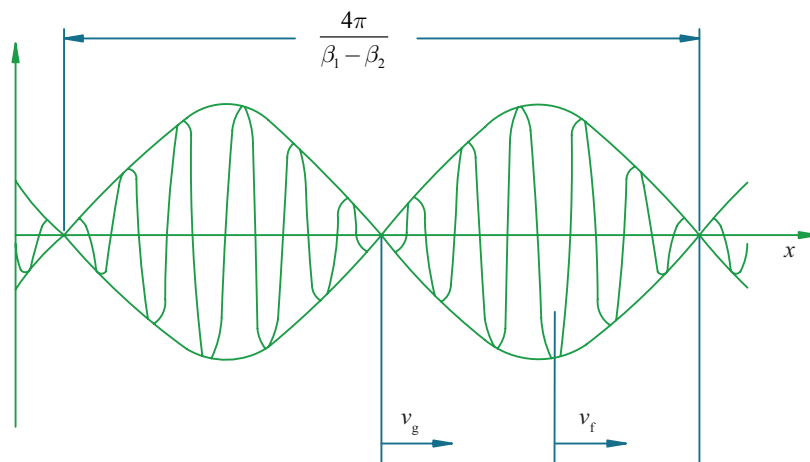
A vezeték mentén mérhető valós feszültség:

$$u(t, x) = U_m [\cos(\omega_1 t - \beta_1 x) + \cos(\omega_2 t - \beta_2 x)], \quad (7.64)$$

ami ismert trigonometriai azonosságok felhasználásával

$$u(t, x) = 2U_m \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} x\right) \quad (7.65)$$

alakba írható. Ez a jel egy  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  frekvenciájú vivőhullám, amelyet egy  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$  frekvenciájú burkoló modulál (7.8. ábra).



7.8. ábra  
A fázis-  
és csoportsebesség  
magyarázatához

A vivőhullám terjedési sebességét a

$$v_f = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (7.66a)$$

fázissebesség adja meg. A burkoló haladásának sebessége ettől eltér:

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta_1 - \beta_2}. \quad (7.66b)$$

A burkoló  $v_g$  haladási sebességét *csoportsebességnek* nevezzük. Miután az információt a burkoló szállítja, az információátvitel sebessége *nem* a fázissebesség, hanem a csoportsebesség.

A csoportsebesség keskeny sáv szélességű moduláció (és elhanyagolható veszteség) esetén értelmezhető. Ekkor  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$  határesetben a fázis sebesség:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}, \quad (7.67)$$

és a csoportsebesség:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1}. \quad (7.68)$$

Mindkét kifejezést a vivőfrekvencián kell kiértékelni.

Diszperzív esetben  $v_g \neq v_f$ . A csoportsebességet gyakran a jelben terjedő energia terjedési sebességével azonosítják. Ez veszteségmentes közegekben igaz, ekkor értéke nem múlhatja felül a fénysebességet. A fázis sebesség ún. „kinematikai” jellemző, erre nincs hasonló megkötésünk.

Beláthatjuk, hogy a csoportsebesség a terjedés során kevéssé torzuló jelalak esetén a jel „súlypontjának” (időbeli középpontjának) terjedési sebessége. Definíciószerűen:

$$t_{sp} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt}. \quad (7.69)$$

A Fourier-transzformáció szabályai közül ismert, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = F(0), \quad (7.70)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = j \frac{dF(j\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=0}, \quad (7.71)$$

ahol

$$\frac{dF(j\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} [F(\omega) e^{j\varphi(\omega)}] = \left[ \frac{dF(\omega)}{d\omega} + j \frac{d\varphi}{d\omega} F(\omega) \right] e^{j\varphi(\omega)}. \quad (7.72)$$

$F(\omega)$  páros voltát felhasználva  $dF(\omega)/d\omega|_{\omega=0} = 0$  és (7.49)-be helyettesítve

$$t_{sp} = - \frac{d\varphi}{d\omega} \Big|_{\omega=0}. \quad (7.73)$$

A pozitív irányba haladó hullám gerjesztése a távvezeték bemenetén:

$$u^+(t, 0) = f(t) \quad (7.74)$$

és Fourier-transzformáltja

$$U^+(\omega, 0) = Ff(t) = F(j\omega). \quad (7.75)$$

Ekkor a terjedő jel Fourier-transzformáltja:

$$U^+(\omega, x) = F(j\omega) e^{-\gamma x} = F(\omega) e^{-\alpha x} e^{j[\varphi(\omega) - \beta x]}. \quad (7.76)$$

Hanyagoljuk el a csillapítást ( $\alpha \cong 0$ ). Ekkor a jel súlypontja a vezeték  $x$  koordinátájú pontjában:

$$t_{\text{sp}}(x) = -\frac{\partial}{\partial \omega} [\varphi(\omega) - \beta x] = -\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} + \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} x, \quad (7.77)$$

ahonnan

$$t_{\text{sp}}(x) = t_{\text{sp}}(0) + \frac{1}{v_g} x, \quad (7.78)$$

$$\text{ahol } v_g = \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega=0}^{-1}.$$

Ha  $f(t)$  szinuszos jel burkolója, akkor:

$$u^+(t, 0) = f(t) e^{j\omega_0 t},$$

ahonnan

$$U^+(\omega, 0) = F[j(\omega - \omega_0)]. \quad (7.79)$$

Ha a moduláló  $f(t)$  jel eléggé keskeny, akkor spektruma széles és mindenütt lassan változik. Ekkor továbbra is igen jó közelítéssel a burkoló súlypontjának terjedési sebessége (7.78) érvényes, de most:

$$v_g = \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0}^{-1}. \quad (7.80)$$

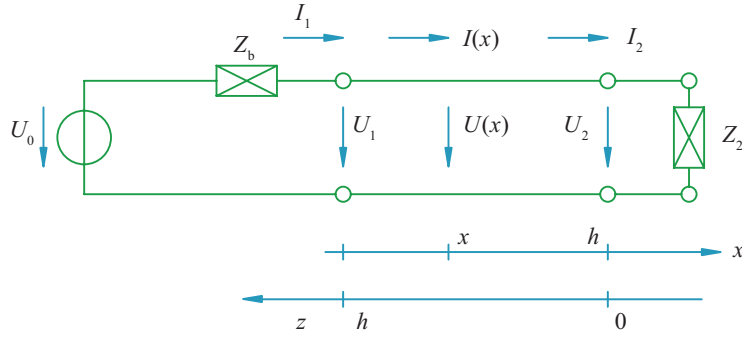
Nem alkalmazható a csoportsebesség ilyen értelmezése, ha a távvezeték erősen veszteséges. Ekkor ugyanis közelítőleg sem igaz, hogy  $f(t)$  alakja kevésbé változik, és így a megfontolások érvényüket veszítik.

## LEZÁRT TÁVVEZETÉK

Az eddigiekben a képzeletben végtelen hosszú távvezetéken terjedő hullámokat vizsgáltuk. Megállapítottuk, hogy két, egymástól független, egymással szembe haladó csillapított hullám alakulhat ki a vezetéken. Nem foglalkoztunk azonban a véges hosszúságú távvezetékkel, a távvezeték végének lezárásával és az így kialakuló jelenségekkel.

A véges hosszúságú távvezeték *eleje* az a lezárás, ahol a gerjesztőforrás van, és a *vége* passzív kétpólussal van lezárva. (Ha valaki mindkét végén gerjeszteni kívánja a távvezetékét, eredményeinket felhasználva egyszerű szuperpozícióval vizsgálhatja azt.)

A vizsgált távvezeték hosszát  $h$ -val jelöljük, a többi jelölés a 7.9. ábráról olvasható le.



7.9. ábra  
Lezárt távvezeték

A vezeték mentén mérhető feszültség és áram:

$$U(x) = U_1^+ e^{-\gamma x} + U_1^- e^{+\gamma x}; \quad (7.81)$$

$$I(x) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma x}. \quad (7.82)$$

A lezárt vezeték bármely pontjában egykapu (kétpólus), amelynek áramát és feszültségét a fenti összefüggések adják meg. Ezek a mennyiségek a vezetéken a helytől függő impedanciát is definiálják:

$$Z(x) = \frac{U(x)}{I(x)} = \frac{U_1^+ e^{-\gamma x} + U_1^- e^{+\gamma x}}{\frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma x}}. \quad (7.83)$$

A vezeték végén mért értékek:

$$U_2 = U(h) = U_1^+ e^{-\gamma h} + U_1^- e^{+\gamma h} = U_2^+ + U_2^-; \quad (7.84)$$

$$I_2 = I(h) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma h} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{+\gamma h} = \frac{U_2^+}{Z_0} - \frac{U_2^-}{Z_0}; \quad (7.85)$$

$$Z(h) = \frac{U_2^+ + U_2^-}{U_2^+ - U_2^-} = Z_2. \quad (7.86)$$

A távvezetéseken a helyet szívesebben mérik visszafelé a lezárástól. Ennek az az oka, hogy a távvezetéken lejátszódó jelenségek alapvetően a lezárás jellegétől függenek. Az ábrán feltüntettük a lezárástól mért  $z = h - x$  koordinátákat is. Ezzel (7.84)–(7.86) jelöléseit használva:

$$U(l) = U_2^+ e^{+\gamma l} + U_2^- e^{-\gamma z}; \quad (7.87)$$

$$I(l) = \frac{U_2^+}{Z} e^{+\gamma l} - \frac{U_2^-}{Z_0} e^{-\gamma z}. \quad (7.88)$$

Figyeljük meg: a helykoordináták formálisan előjelet váltanak a képletekben. Miért? Ellenkező irányban nem ugyanolyan a terjedés, a pozitív irány nem megállapodás kérdése?

A válasz: igen, a pozitív koordináta irányát mi jelöljük ki, és ezt ebben az esetben az áram pozitív irányának kijelölésével tettük meg. A választott feszültség- és áramirányok mindenütt a jobb oldali impedanciához tartoznak, ez különösen jól látszik a lezáráson.

Az impedancia helyfüggése ezek után:

$$Z(z) = \frac{U(z)}{I(z)} = \frac{U_2^+ e^{+\gamma z} + U_2^- e^{-\gamma z}}{\frac{U_2^+}{Z_0} e^{+\gamma z} - \frac{U_2^-}{Z_0} e^{-\gamma z}}, \quad (7.89)$$

ami kis átalakítással:

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \frac{U_2^-}{U_2^+} e^{-2\gamma z}}{1 - \frac{U_2^+}{U_2^-} e^{+2\gamma z}} = Z_0 \frac{1 + r(z)}{1 - r(z)}, \quad (7.90)$$

ahol bevezettük a  $z$  helyen fellépő  $r$  reflexiós tényezőt:

$$r(z) = \frac{U_2^-}{U_2^+} e^{-2\gamma z} = \frac{U^-(z)}{U^+(z)}. \quad (7.91)$$

Ez nyilvánvalóan a negatív és a pozitív irányba haladó hullámfeszültség komplex amplitúdójának hányadosa.

A reflexiós tényező szerepe a távvezetéken (sőt általában a hullámterjedésnél) alapvetően fontos, talán az impedanciánál is fontosabb. Szerencsére az impedancia és a reflexiós tényező kölcsönösen meghatározzák egymást:

$$Z = Z_0 \frac{1+r}{1-r}; \quad (7.92)$$

$$r = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad (7.93)$$

a vezeték bármely pontján. A lezáráson:

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}. \quad (7.94)$$

Ezzel a vezetéken kialakuló feszültség és áram:

$$U(z) = U_2^+ (e^{+\gamma z} + r_2 e^{-\gamma z}); \quad (7.95)$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{+\gamma z} - r_2 e^{-\gamma z}). \quad (7.96)$$

A vezeték mentén kialakuló feszültség és áram másik kedvelt formája a hiperbolikus függvényekből álló leírás.

Itt felhasználjuk az  $e^{+\gamma z} = \text{ch } \gamma z + \text{sh } \gamma z$ ;  $e^{-\gamma z} = \text{ch } \gamma z - \text{sh } \gamma z$  összefüggéseket.

Ezzel

$$U(z) = U_2^+ [(1+r_2) \operatorname{ch} \gamma z + (1-r_2) \operatorname{sh} \gamma z], \quad (7.97)$$

és

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} [(1-r_2) \operatorname{ch} \gamma z + (1+r_2) \operatorname{sh} \gamma z]. \quad (7.98)$$

Ha inkább a lezárás teljes feszültségével akarjuk kifejezni az amplitúdót, mintsem a pozitív irányba haladó hullám amplitúdójával a lezáráson, használjuk a (7.95)-ből következő

$$U_2 = U_2^+ (1+r_2) \quad (7.99)$$

összefüggést. Ezzel:

$$U(z) = U_2 \left( \operatorname{ch} \gamma z + \frac{1-r_2}{1+r_2} \operatorname{sh} \gamma z \right), \quad (7.100)$$

míg

$$I(z) = \frac{U_2}{Z_0} \left( \frac{1-r_2}{1+r_2} \operatorname{ch} \gamma z + \operatorname{sh} \gamma z \right). \quad (7.101)$$

Figyelembe véve, hogy (7.92) alapján

$$\frac{1-r_2}{1+r_2} = \frac{Z_0}{Z_2} \quad (7.102)$$

és a lezáráson  $Z_2 = U_2/I_2$ , kapjuk, hogy a vezeték mentén a feszültség és áram értéke:

$$U(z) = U_2 \operatorname{ch} \gamma z + Z_0 I_2 \operatorname{sh} \gamma z; \quad (7.103)$$

$$I(z) = I_2 \operatorname{ch} \gamma z + \frac{U_2}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma z. \quad (7.104)$$

A  $h$  hosszúságú vezeték alkotta kétkapu lánckarakterisztikája  $z = h$ ,  $U(h) = U_1$ ,  $I(h) = I_1$  helyettesítésekkel:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma h & Z_0 \operatorname{sh} \gamma h \\ \frac{\operatorname{sh} \gamma h}{Z_0} & \operatorname{ch} \gamma h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (7.105)$$

Ebből a  $h$  hosszúságú távvezeték szakasz mint kétkapu valamennyi kétkapu-paramétere előállítható. A kétkapu

$$A_{11} = A_{22} \quad (7.106)$$

alapján *szimmetrikus* és

$$\Delta A = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1 \quad (7.107)$$

alapján pedig *reciprok*.

(7.105) alapján a *bemeneti impedancia* a távvezetéken:

$$Z_{be} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \operatorname{ch} \gamma h + I_2 Z_0 \operatorname{sh} \gamma h}{\frac{U_2}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma h + I_2 \operatorname{ch} \gamma h} \quad (7.108)$$

ahonnan némi rendezéssel és  $Z_2 = U_2/I_2$  behelyettesítésével:

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 \operatorname{ch} \gamma h + Z_0 \operatorname{sh} \gamma h}{Z_0 \operatorname{ch} \gamma h + Z_2 \operatorname{sh} \gamma h}. \quad (7.109)$$

A távvezeték szakasz tehát impedanciáttranszformációt végez.

A bemeneti generátor a  $Z_{be} = Z_1$  impedanciát „látja” (7.9. ábra). Ezért

$$I_1 = \frac{U_0}{Z_1 + Z_b}, \quad U_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_b} U_0. \quad (7.110)–(7.111)$$

## KÜLÖNLEGES LEZÁRÁSOK

Érdeemes megvizsgálnunk néhány speciális lezárást.

a) *Hullámimpedancia:*

$Z_2 = Z_0$ . Ezt koncentrált paraméterű lezáróimpedanciával nyilván csak egy frekvencián tudjuk megvalósítani. Ilyen esetben:

$$Z_{be} = Z_0 \quad (7.112)$$

Bővebben: a hullámimpedanciával lezárt távvezeték bemeneti impedanciája is a hullámimpedancia. Ilyenkor a vezetéken nincs reflexió, csak pozitív irányba haladó hullámunk van. Ezt a jelenséget úgy nevezzük: a lezárás *illesztett* (a vezetékhez). Néha hullámillesztésről vagy reflexiómentes illesztésről beszélünk, megkülönböztetésül az ún. teljesítményillesztéstől.

*Megjegyzések:*

1. A jelenség fizikai magyarázata nyilvánvaló. A vezeték számára a hullámimpedanciával történő lezárás és egy végtelen hosszú azonos vezetékkel történő lezárás között nincsen különbség. A terjedő hullám számára a feltételek mindkét esetben azonosak. Ezért nem lép fel reflexió.
2. A távvezeték analógiájára valamennyi szimmetrikus kétkapunál definiálhatjuk a hullámimpedanciát, ha a bemeneti impedancia megegyezik a lezáróimpedanciával, ez a hullámimpedancia.

b) *Rövidzár:*

$$Z_2 = 0, \quad Z_{ber} = Z_0 \operatorname{th} \gamma h. \quad (7.113)$$

c) *Szakadás:*

$$Z_2 \rightarrow \infty, \quad Z_{besz} = Z_0 \operatorname{cth} \gamma h. \quad (7.114)$$

A két speciális lezárás lehetőséget ad a vezeték szekunder paramétereinek meghatározására:

$$Z_0 = \sqrt{Z_{\text{ber}} Z_{\text{besz}}}; \quad (7.115)$$

$$\gamma h = \text{arth} \sqrt{\frac{Z_{\text{ber}}}{Z_{\text{besz}}}}. \quad (7.116)$$

## IDEÁLIS VEZETÉKSZAKASZ

Ideális vezetéken a jelenségek sokkal áttekinthetőbbek. Miután  $\alpha = 0$ ,

$\gamma = j\beta = j\frac{2\pi}{\lambda_g}$ , a haladóhullámok csillapításmentesek.

A legfontosabb, minőségileg új jelenség, hogy a reflexiók tényező amplitúdója a vezeték mentén állandó [l. (7.91)]:

$$r(z) = r_2 e^{-j2\beta z}. \quad (7.117)$$

Ez a vektor az óramutató járásának megfelelő irányba forog (változatlan abszolút értékkel), ha a vezetéken a lezárás irányából a gerjesztés irányába haladunk. A forgó vektor  $z = \frac{\lambda_g}{2}$  távolság megtételekor, azaz félhullám hossznyi távolságonként

ugyanazt az értéket veszi fel. Ennek következtében a vezetéken kialakuló áram, ill. feszültség:

$$U(z) = U_2^+ (e^{+j\beta z} + r_2 e^{-j\beta z}); \quad (7.118)$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{+j\beta z} + r_2 e^{-j\beta z}) \quad (7.119)$$

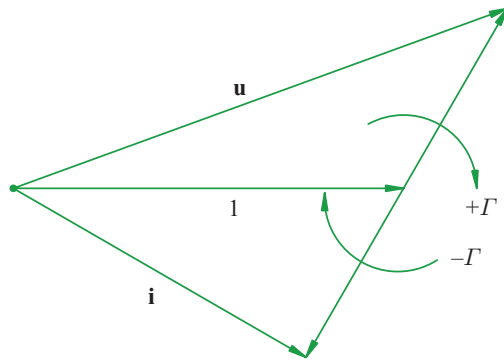
is fél hullámhossznyi periodicitással rendelkezik a vezeték mentén. Ezt jól illusztrálja a normalizált feszültség komplex vektora:

$$\bar{u} = \frac{U(z)}{U_2^+ e^{j\beta z}} = 1 + r_2 e^{-j2\beta z} = 1 + r(z), \quad (7.120)$$

illetve az áram normalizált alakja:

$$\bar{i} = \frac{I}{U_2^+ e^{j\beta z} Z_0} = 1 - r_2 e^{-j2\beta z} = 1 - r(z). \quad (7.121)$$

A normalizált értékeket a 7.10. ábra mutatja, ahol a vezetéken félhullám hosszúságú távolságot megtéve a reflexió komplex vektora egy teljes fordulatot tesz meg.



7.10. ábra  
Normál feszültség  
és áram

Az impedancia a vezeték mentén (7.109)-nek megfelelően

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_2 \cos \beta z + jZ_0 \sin \beta z}{Z_0 \cos \beta z + jZ_2 \sin \beta z} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \operatorname{tg} \beta z}{Z_0 + jZ_2 \operatorname{tg} \beta z}, \quad (7.122-123)$$

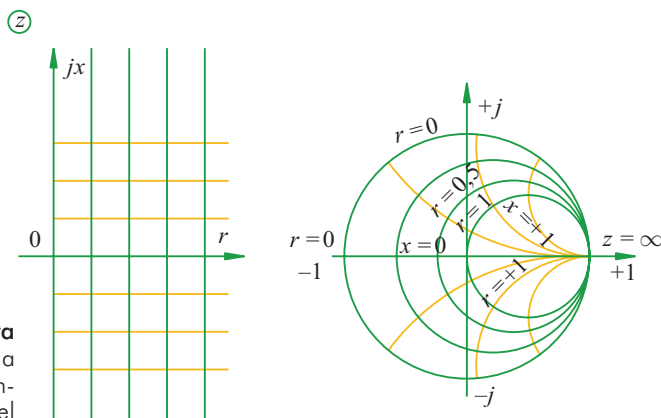
nyilvánvalóan szintén  $\lambda_g/2$  szerint periodikus. A normalizált impedancia  $\bar{z} = Z/Z_0$  és a reflexió tényező kapcsolata végig a vezeték mentén (7.120) és (7.121)-ből:

$$\bar{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{i}} = \frac{U}{I} \frac{1}{Z_0} = \frac{1+r}{1-r}, \quad (7.124)$$

ahonnan:

$$r = \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1}. \quad (7.125)$$

Ezek az összefüggések a  $\bar{z}$  és  $r$  komplex számsíkokat kölcsönösen leképezik egymásra. Mindkét leképezés körtartó: kört (beleértve az egyenest is mint végtelen sugarú kört) körbe képez le a másik síkra. Ennek megfelelően a  $z$  sík konstans valós és képzetes egyeneseinek körök felelnek meg az  $r$  síkon (7.11. ábra). Ezt a kördiagramot *Smith-diagramok* nevezik. (7.117) értelmében az  $r$  síkon egy távvezeték fél hullámhossznyi szakaszon minden impedanciája egy konstans  $r$  sugarú körön fekszik. Ez az így kapott diagramon egyszerű grafikus műveletekkel lehetővé teszi az impedanciáttranszformációk nyomon követését.



7.11. ábra  
Bemenőimpedancia  
meghatározása Smith-  
diagram segítségével

A (7.102) egy érdekes következménye a negyedhullám hosszúságú vezetékszakasz lezárásának és bemeneti impedanciájának kapcsolata  $l = \frac{\lambda_g}{4}$ , azaz  $\beta l = \frac{\pi}{2}$  esetén:

$$Z_1 = \frac{Z_0^2}{Z_2} \Rightarrow Z_1 Z_2 = Z_0^2, \quad (7.125)$$

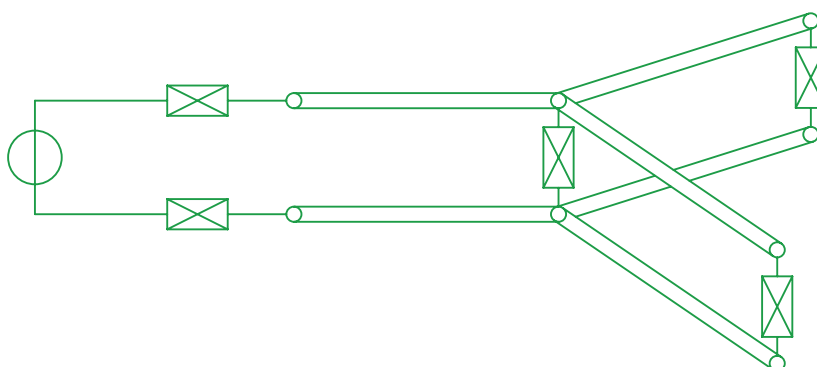
azaz a lezáró- és a bemeneti impedancia mértani közepe a hullámellenállás. Valós lezárás esetén valós impedanciát kapunk negyed hullámhossz távolságra. Ezt az impedanciáttranszformációt a későbbiekben felhasználjuk.

## ÖSSZETETT VEZETÉKHÁLÓZATOK

Távvezetésekből mint kétkapukból összetett hálózatok építhetők fel.

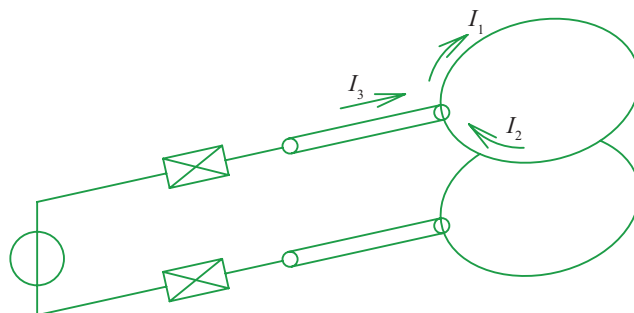
Amennyiben a hálózatban nincsenek távvezetésekből kialakított hurkok (7.12. ábra), akkor a vezetékek lezáróimpedanciájából a bezáró impedanciát számítva soros és paralel kapcsolás sorozatai jutunk el a bemenetig, a generátor kapujáig. Több generátor esetén az eljárás egy-egy generátort a hálózatba helyezve szuperpozíciós eljárással végezhető el.

7.12. ábra  
Távvezeték-hálózat



Ha a hálózat távvezetésekből, (adott esetben akár egy távvezetésekből is (7.13. ábra) álló hurkot tartalmaz, a kapukon a csomóponti egyenleteket és a hurok-egyenleteket fel kell írni, és ezekhez hozzá kell venni a távvezeték hálózati paramétereit, pl. a láncmátrixot. Az így kapott egyenletrendszerrel bebizonyítható, hogy konzisztens, mindig van megoldása.

7.14. ábra



## IDEÁLIS VEZETÉK SPECIÁLIS LEZÁRÁSSAL

a) Hullámimpedancia:

$$Z_2 = Z_0, \quad r_2 = 0, \quad Z_1 = Z_0. \quad (7.126)$$

b) Rövidzár:

$$Z_2 = 0, \quad r_2 = -1, \quad Z_1 = Z_{\text{ber}} = jZ_0 \operatorname{tg} \beta h. \quad (7.127a)$$

c) Szakadás:

$$Z_2 \rightarrow \infty, \quad r_2 \rightarrow +1, \quad Z_1 = Z_{\text{besz}} = -jZ_0 \operatorname{ctg} \beta h. \quad (7.127b)$$

A (7.126) és (7.127) ismét lehetővé teszi a szekunder paraméterek meghatározását:

$$Z_0 = \sqrt{Z_{\text{ber}} Z_{\text{besz}}}, \quad \operatorname{tg} \beta h = \sqrt{-\frac{Z_{\text{ber}}}{Z_{\text{besz}}}}. \quad (7.128), (7.129)$$

A b) és c) esetben külön is érdemes foglalkozni a vezetéken kialakuló hullámmal.

Rövidzárral történő lezárás esetén  $r_2 = -1$ ; (7.118) és (7.119)-ből:

$$U(z) = U_2^+ (e^{+j\beta z} - e^{-j\beta z}) = 2jU_2^+ \sin \beta z; \quad (7.130)$$

$$I(z) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{+j\beta z} + e^{-j\beta z}) = 2 \frac{U_2^+}{Z_0} \cos \beta z. \quad (7.131)$$

A fenti kifejezések abszolút értékei az amplitúdó eloszlását mutatják. Visszatérve a valós időfüggvényre, a következőket látjuk:

$$u(z, t) = \Re 2jU_2^+ \sin \beta z e^{j\omega t} = 2U_2^+ \sin \beta z \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (7.132a)$$

$$i(z, t) = \Re 2 \frac{U_2^+}{Z_0} \cos \beta z e^{j\omega t} = 2 \frac{U_2^+}{Z_0} \cos \beta z \cos(\omega t). \quad (7.132b)$$

Az első szembetűnő jelenség: nincs többé haladóhullám. Az időben szinuszosan változó feszültségek és áramok amplitúdója a helytől függ, és pedig szinuszfüggvény szerint. Mindkét amplitúdónak nullahelyei vannak egymástól félhullámnyi távolságban. Ezeket *csomópontoknak* nevezzük.

A második észrevétel: az áram- és feszültségamplitúdók helyfüggvénye negyedhullám hosszúsággal el van tolva egymáshoz képest, tehát ahol az egyiknek csomópontja van, a másiknak maximális kitérése. Ugyanekkor a feszültség és áram időben is el vannak tolva negyed periódussal: amikor az egyik mennyiség mindenütt eléri a maximumot, a másik mindenütt éppen zérus és fordítva.

Negyedperiódus  $\left( \frac{\pi}{2} \right)$  fáziskéséssel az impedancia éppen tiszta reaktancia lesz.

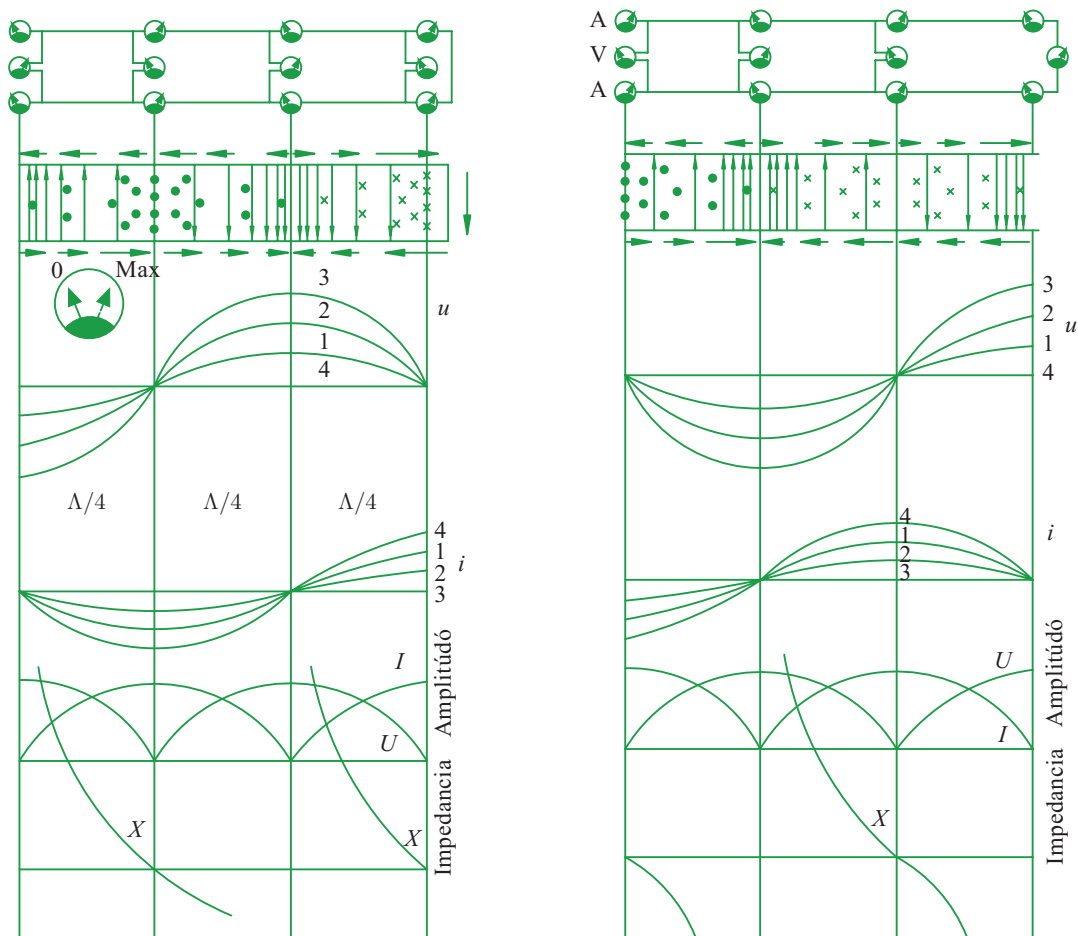
Ezt már korábban is láttuk a (7.127a) kifejezésben.

A viszonyokat a 7.14. ábra szemlélteti.  
Szakadással lezárt vezetéken  $r_2 = 1$ , így most:

$$u(z) = 2U_2^+ \cos \beta z; \quad (7.133a)$$

$$i(z) = 2j \frac{U_2^+}{Z_0} \sin \beta z, \quad (7.133b)$$

és látható, hogy az előző esethez hasonlóan itt is állóhullámok alakulnak ki.  
A viszonyokat most a 7.15. ábra szemlélteti.



**7.14. ábra**  
Az illesztett fogyasztóval  
lezárt távvezeték áram-  
és feszültségviszonyai

**7.15. ábra**  
A végén nyitott ideális  
vezeték elektromos  
viszonyai

d) Tiszta reaktáns lezárás:

$$Z_2 = jX, \quad r_2 = \frac{jX - Z_0}{jX + Z_0} = -\frac{Z_0 - jX}{Z_0 + jX}. \quad (7.134)$$

Nyilvánvalóan  $|r_2| = 1$ , tehát

$$r_2 = e^{j\varphi}, \quad (7.135)$$

és így

$$u(z) = U_2^+ (e^{+j\beta z} + e^{j\varphi} e^{-j\beta z}) = 2U_2^+ e^{j\frac{\varphi}{2}} \cos\left(\beta z - \frac{\varphi}{2}\right), \quad (7.136)$$

tehát ebben az esetben is állóhullámot kapunk a vezetéken, csupán a lezárás helyén most sem csomópont, sem maximális kitérés nem alakul ki, de ez  $\frac{\varphi}{2\beta}$ -val el van tolva a szakadással elzárt esethez képest. A bemeneti impedancia most is tiszta képzetes.

e) *Általános lezárás:*

Vizsgáljuk meg a vezetéken lejátszódó jelenséget tetszés szerinti impedanciával történő lezárás esetén. Ekkor

$$r_2 = \frac{R + jX - Z_0}{R + jX + Z_0} = \frac{(R - Z_0) + jX}{(R + Z_0) + jX} = |r|e^{j\varphi}, \quad (7.137)$$

ahol most láthatóan  $|r| < 1$ , ha  $R > 0$ , azaz minden passzív lezárás esetén. Az is belátható (7.137) elemzésével, hogy  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ .

A feszültség eloszlása a vezeték mentén:

$$U(z) = U_2^+ [e^{+j\beta z} + |r|e^{j\varphi} e^{-j\beta z}].$$

Némi számolással:

$$\begin{aligned} U(l) &= U_2^+ \left\{ (1 - |r|)e^{j\beta l} + |r|e^{j\frac{\varphi}{2}} \left[ e^{j\left(\beta l - \frac{\varphi}{2}\right)} + e^{-j\left(\beta l - \frac{\varphi}{2}\right)} \right] \right\} = \\ &= (1 - |r|)U_2^+ e^{j\beta l} + 2|r|e^{j\frac{\varphi}{2}} U_2^+ \cos\left(\beta l - \frac{\varphi}{2}\right), \end{aligned} \quad (7.138)$$

ami a vezetéken kialakuló hullámot egy pozitív irányba haladó és egy állóhullám összegeként írja fel. Az állóhullám következtében az amplitúdó a vezeték mentén változik, maximuma az állóhullám legnagyobb kitérésénél, minimuma az állóhullám csomópontjánál lesz:

$$|U|_{\max} = (1 + |r|)|U_2^+|; \quad |U|_{\min} = (1 - |r|)|U_2^+|. \quad (7.139)$$

Az állóhullám-intenzitás mértékét a tápvonal mentén mérhető maximális és minimális feszültség hányadosaként definiáljuk, és *állóhullámarány*nak nevezzük. Jele az angol „voltage standing wave ratio” kezdőbetűiből *VSWR*:

$$VSWR = \frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}. \quad (7.140)$$

Egy pillanatra visszatérve a (7.120) és (7.121) összefüggésre, ill. a 7.10. ábrára, láthatjuk, hogy a feszültség abszolút értéke maximumánál az áram abszolút értéke minimális (és fordítva), és ezeken a helyeken az áram és a feszültség fázisban vannak. Ezért kimondhatjuk, hogy ideális vezetéken a maximális és minimális

abszolút értékű impedancia egyúttal tiszta valós, és az állóhullámaránnyal a következőképpen fejezhető ki:

$$Z_{\max} = Z_0 \cdot VSWR; \quad (7.141)$$

$$Z_{\min} = \frac{Z_0}{VSWR}, \quad (7.142)$$

és a két impedancia helyének távolsága éppen negyedhullám hosszúságú.

Az állóhullámarány növekedése csökkenti a vezetéken átvihető teljesítményt. Ha a távvezetéken megengedett maximális feszültséget adott (ezt rendszerint a dielektrikum átütési szilárdsága szabja meg), akkor a következőképpen gondolkodhatunk.

A  $Z_2$  lezáróellenálláson fellépő hatásos teljesítmény:

$$P_2 = \frac{1}{2} \Re U_2 (I_2)^* = \frac{1}{2} \Re U_2^+ (1+r) \frac{(U_2^+)^*}{Z_0} (1-r^*) = \frac{1}{2} \frac{|U_2^+|^2}{Z_0} (1-|r|^2),$$

ahol figyelembe vettük, hogy  $Z_0$  valós. A (7.119) első egyenlőségét felhasználva:

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{|U|_{\max}^2}{Z_0} \frac{1-|r|^2}{(1+|r|)^2} = \frac{|U|_{\max}^2}{2Z_0} \frac{1-|r|}{1+|r|}.$$

A végső eredményünk tehát:

$$P_2 = \frac{|U|_{\max}^2}{2Z_0} \frac{1}{VSWR}, \quad (7.143)$$

azaz rögzített maximális megengedett feszültség esetén az átvihető hatásos teljesítmény az állóhullámaránnyal fordítva arányos.

A növekvő állóhullámarány nem csak az átvihető teljesítményt korlátozza, a reflektált hullám a távvezetéken történő információátvitelt is zavarja.

Célkitűzés tehát, hogy a távvezetéken a reflexiót megszüntessük tetszőleges passzív ( $R_2 \neq 0$ ) lezárás esetén.

## TÁVVEZETÉK ILLESZTÉSE

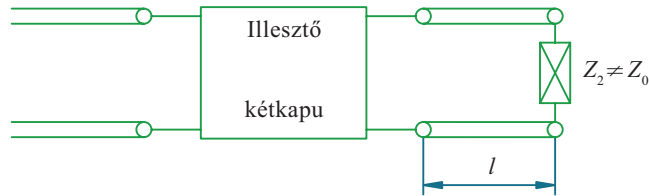
Az előzőekben rávilágítottunk, hogy a távvezeték használata során a reflexió a távvezeték mentén hátrányos. Ezért alapvető feladat a reflexió megszüntetése. Korábban láttuk, hogy ha a lezáróimpedancia a hullámellenállás,  $Z_2 = Z_0$ , akkor a távvezeték *illesztett* módon van lezárva és nem lép fel reflektált hullám. Az esetek jelentős részében azonban a felhasználás során nem biztosítható ilyen lezárás.

A továbbiakban tehát nem az egész távvezetéken, de annak a nagy részén követeljük meg a reflexiómentes terjedést, a lezárás kis környezetében elfogadjuk a reflexiót.

Megjegyezzük, hogy itt – mint az eddigiekben is – csupán egyetlen frekvencián való vizsgálatra szorítkozunk. Az illesztés véges frekvenciaintervallumban nem biztosítható. A gyakorlatban ezért véges intervallumban a specifikáció nem a tökéletes illesztést szokta elérni, hanem azt, hogy az állóhullámarány legfeljebb mekkora értéket vehet fel. A tartományban történő illesztésre a példák között találunk néhány illusztratív feladatot.

Az illesztést mindig a vezeték egy lezáráshoz közeli pontja és a távvezeték többi, „illesztett” része közé helyezett kétkapuvál végezzük. A kétkaput úgy kell kialakítanunk, hogy a távvezeték illesztett része felé  $Z_0$  terhelőimpedanciát mutasson.

A 7.16. ábra feltételezi, hogy az illesztetlen távvezeték szakasz hullámimpedanciája megegyezik az illesztett távvezetékével. Ez nem feltétlen követelmény.



7.17. ábra  
Távvezeték illesztése

Az illesztésnél az illesztő kétkaput és az  $l$  távolságot kell meghatároznunk oly módon, hogy a kétkapú bemenetén az impedancia  $Z_{be} = Z_0$  legyen. Más szóval a reflexió tényező  $r = 0$ , ill.  $VSWR = 1$ .

A vezeték hosszú szakasza illesztett. Ezért kompromisszumként elviseljük, hogy az illesztetlen szakaszon, amelyet minél rövidebbnek igyekszünk tartani, van reflektált hullám.

## ILLESZTŐ KÉTKAPUK

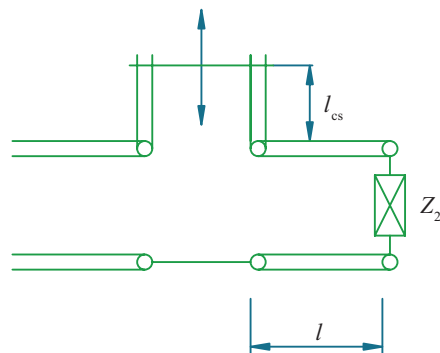
### 1. Soros reaktancia

Az ötlet: keressük meg a vezetéken azt a helyet, ahol az impedancia valós része éppen  $Z_0$  a hullámimpedancia. Az itt fellépő reaktanciát egy ellenkező előjelű, sorosan kapcsolt reaktanciával kompenzáljuk.

Van-e ilyen hely a távvezetéken?

Igen. A (7.141) és (7.142) tanulsága szerint egymástól negyed hullámhossz távolságra tiszta valós impedancia alakul ki, és pedig  $Z_{max} > Z_0$ , míg  $Z_{min} < Z_0$ . A köztük lévő negyed hullámhossznyi szakaszon az impedancia valós része folytonosan változik. A folytonos függvények középértéktele következtében van olyan pont ebben az intervallumban, ahol  $\Re Z_{be} = Z_0$ . Félhullám hosszúságú szakaszon tehát két ilyen hely van. Belátható, hogy az impedancia képzetes része e két pontban ellenkező előjelű, de azonos abszolút értékű. Ezen helyek egyikén végezzük az illesztést.

Az illesztőreaktanciát a távvezetéken legkönnyebben rövidzárral vagy szakadással lezárt távvezetékkel tudjuk megvalósítani (7.127). Rövidre zárt csonkkal való illesztést mutat a 7.17. ábra.



7.17. ábra  
Soros illesztés

A hányadoshoz  $l$  és  $l_{cs}$  értékét változtatni kell. Utóbbinál ez általában nem okoz gondot,  $l$  változtatása azonban nehéz. Maga az elrendezés pl. koaxiális kábelben eleve nehezen valósítható meg.

Az illesztés számítása viszonylag egyszerű. Az illesztés feltétele:

$$Z_0 = Z_{cs} + Z_{be}, \quad (7.144)$$

ahol

$$Z_{cs} = jZ_{0cs} \operatorname{tg} \beta l_{cs} = jX_{cs}, \quad (7.145)$$

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + jZ_2 \sin \beta l} = Z_0 + jX_{be}; \quad (7.146)$$

és a

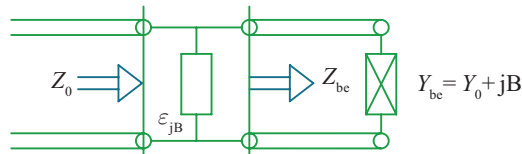
$$Z_0 = \Re Z_{be}, \quad (7.147)$$

$$X_{cs} + X_{be} = 0 \quad (7.148)$$

egyenletekből a keresett  $l$  és  $l_{cs}$  meghatározható.

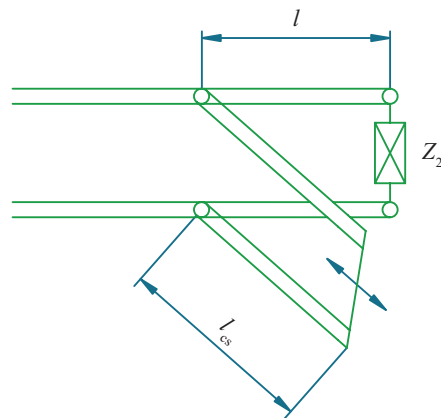
## 2. Párhuzamos reaktancia

A soros illesztés kivitelezésének technikai nehézségei miatt a párhuzamos illesztés sokkal elterjedtebb (7.18. ábra).



7.18. ábra  
Párhuzamos illesztés elve

A reaktanciát most is vezetékcsonkkal, éspedig rövidre zárt vezetékcsonkkal célszerű megvalósítani (7.19. ábra).



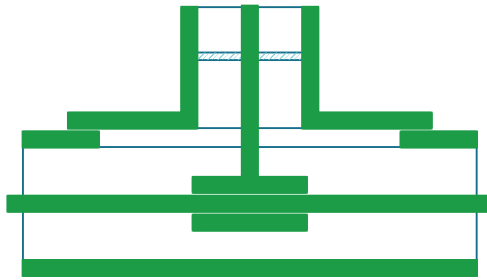
7.19. ábra  
Párhuzamos illesztés

Az illesztés feltétele  $l$  és  $l_{cs}$  olyan megvalósítása, hogy teljesüljön az

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_{cs}} + \frac{1}{Z_{be}} \quad (7.149)$$

feltétel. Ez ismét két skaláregyenletet jelent, amelyből a keresett hosszak meghatározhatóak. Most is belátható, hogy a távvezetéken félhullám hosszúságon belül két illesztési hely található.

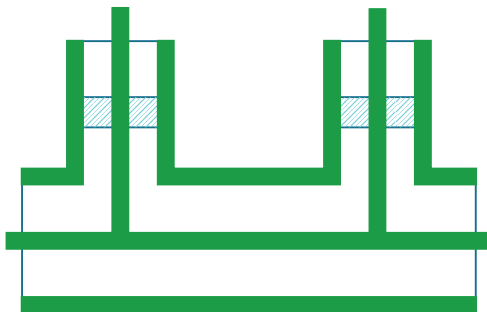
A hangolás most is a csonk és a rövidzár mozgatásával történik. Ez kettős vezetéken igen egyszerűen kivitelezhető, de a koaxiális kábel esetén is megoldható (7.20. ábra).



7.20. ábra  
Csúsztatható  
vezetékcsonc mint illesztő  
elem

### 3. Illesztés két csonkkal

Ha el akarjuk kerülni az illesztőcsonc mozgatását a vezeték mentén, rögzített csonkokat kell használnunk. Az illesztés feltételét legalább két ilyen csonkkal lehet megvalósítani (7.21. ábra).

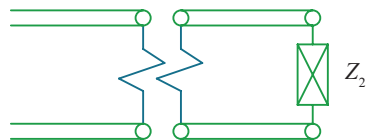


7.21. ábra  
Két helyhez kötött  
vezetékcsonc mint  
illesztőelem

Meg kell jegyezni, hogy míg egy mozgatható csonkkal elvben tetszés szerinti állóhullámarány esetén elvégezhető az illesztés, ez két rögzített csonk esetén nem lehetséges.

### 4. Illesztés transzformátorral

A vezetéken – mint ezt már említettük – (7.141) és (7.142) tanulsága szerint félhullám hosszúságon belül két olyan hely található, ahol a vezeték impedanciája tiszta valós:  $Z_0 \times VSWR$  és  $Z_0/VSWR$ . Ezen a helyen ideális transzformátorral a bemeneti impedancia a vezeték hullámimpedanciájára transzformálható (7.22. ábra).

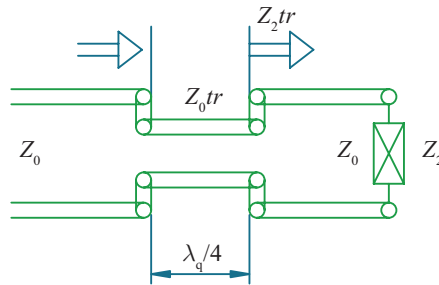


7.22. ábra  
Illesztés transzformátorral

Távvezetéken „ideális” transzformátort legkönnyebben  $\lambda_g/4$  hosszúságú vezeték-szakasszal tudunk megvalósítani (7.23. ábra). Ilyen vezeték-szakaszon (7.125) értelmében a transzformátor hullámimpedanciája a lezáró- és a bemeneti impedancia mértani közepe:

$$Z_{0tr} = \sqrt{Z_{1tr} Z_{2tr}}. \quad (7.150)$$

7.23. ábra  
Illesztés  $\lambda/4$ -es  
transzformátorral



Az illesztéshez meghatározzuk azt az  $l$  távolságot a lezárástól, ahol az impedancia tiszta valós (7.141) és (7.142) értelmében itt az impedancia:

$$Z_{2tr} = \begin{cases} Z_0 \cdot VSWR \\ \frac{Z_0}{VSWR} \end{cases} \quad (7.151)$$

és így a transzformátor hullámimpedanciája:

$$Z_{0tr} = \begin{cases} Z_0 \sqrt{VSWR} \\ \frac{Z_0}{\sqrt{VSWR}} \end{cases}. \quad (7.152)$$

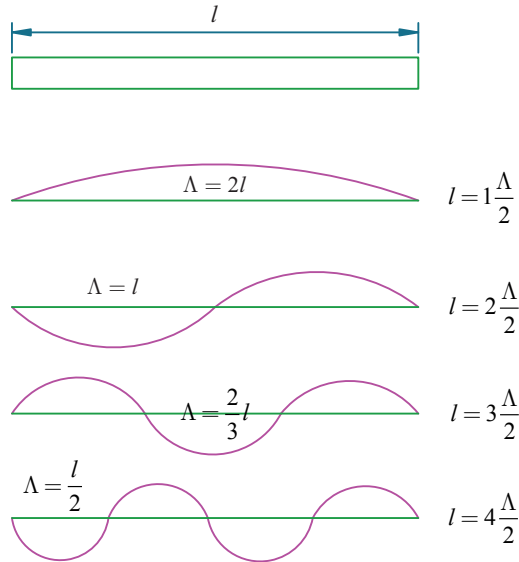
*Figyelem!* Valamennyi illesztés egy frekvencián érvényes. A frekvencia változásával az illesztett szakaszon is eltér az állóhullámarány egytől. Az illesztés sáv szélességet úgy definiáljuk, hogy a sávon belül az állóhullámaránynak megadott értéknél kisebbnek kell lennie. A sáv szélesség növelése több vezetékcsomókkal történő illesztéssel, illetve több nem szükségszerűen  $\lambda/4$ -es transzformátor láncba kapcsolásával érhető el.

## TÁVVEZETÉK-REZGŐKÖR

Rövidzárral lezárt távvezetéken állóhullámok alakulnak ki. A feszültségnek a rövidzáron csomópontja van. Ha a vezetéken a következő feszültségcsomópontba szintén rövidzárát teszünk, az így kialakult zárt és véges hosszúságú vezeték-szakaszon a feszültség (és áram) eloszlása nem változik. A rövidzárát távolabbi csomópontba elhelyezve ugyanezt állíthatjuk. A csomópontok közötti távolság  $\lambda_g/2$ . Az  $l$  hosszú-

ságú, mindkét végén rövidzárral lezárt távvezeték szakaszon a félhullám hosszúság egész számú többszöröse helyezkedhet el. A hullámhossz tehát (7.24. ábra):

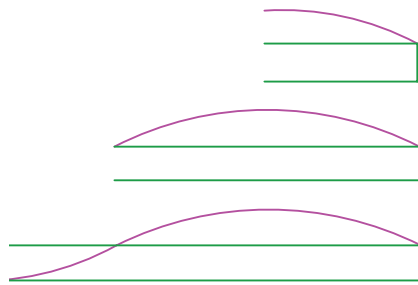
$$\lambda_g = \frac{2}{n}l, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.153)$$



**7.24. ábra**  
A két végén lezárt vezeték különböző rezgési állapotai

A távvezeték szakasz frekvenciameghatározó áramkörként (rezgőkörként) viselkedik, ahol a frekvencia:

$$f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r} \lambda_g} = n \frac{2c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r} l} \quad (7.154)$$



**7.25. ábra**  
Negyedhullám-, félhullám- és háromnegyedhullám hosszúságú rezgőrendszer

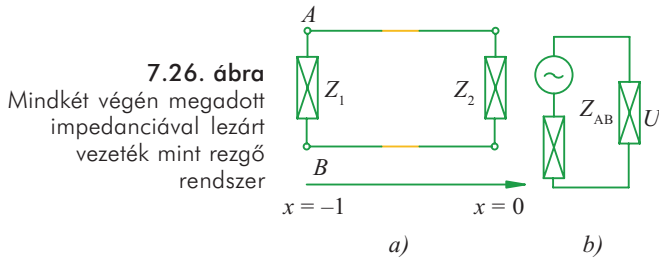
A szakadással lezárt vezeték végén az áramnak van csomópontja, a feszültség-hullám amplitúdója maximális. Ezért mindkét végén szakadással lezárt vezetéken a hullámhossz megegyezik (7.153)-mal. Egyik végén rövidre zárt, másik végén nyitott távvezetéken (7.25. ábra) a hullámhossz negyede adódik hozzá a félhullám hosszhoz:

$$l = n \frac{\lambda_g}{2} + \frac{\lambda_g}{4}, \quad (7.155)$$

ahonnan

$$\lambda_g = \frac{4}{2n+1}l, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.156)$$

Általános lezárások esetén a rendszer saját rezgésének frekvenciáját a következőképpen számítjuk (7.26. ábra).



A  $Z_1$  impedanciával sorba kötünk egy feszültségforrást. A bemeneten folyó áramot  $I_1$ -gyel jelölve:

$$I_1(Z_1 + Z_{AB}) = U_G, \quad (7.157)$$

ahol  $Z_{AB}$  a távvezeték bemeneti impedanciája ( $b$  áramkör). A generátorfeszültséget 0-ra csökkentve (és így visszatérve az eredeti  $a$  áramkörhöz) véges áramot csak akkor kaphatunk, ha

$$Z_1 + Z_{AB} = 0, \quad (7.158)$$

azaz részletesen:

$$Z_1 + Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} l}{Z_0 + jZ_2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} l} = 0. \quad (7.159)$$

Ebben az összefüggésben egyetlen szabad paraméter van:  $\omega$ . A komplex egyenlet megoldása nem feltétlenül valós. A komplex  $\omega$  értékek csillapodó rezgéseket jelentenek:

$$\omega = \omega' + j\omega'' \quad (7.160)$$

esetén

$$e^{j\omega t} = e^{-\omega'' t} e^{j\omega' t}. \quad (7.161)$$

## TÁVVEZETÉKEK IDŐTARTOMÁNYBELI VIZSGÁLATA

Egyszerű eszközökkel csak ideális (torzításmentes) távvezetéken terjedő hullámokat tudunk kezelni. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért itt csak az ideális vezetéken lejátszódó jelenségekre vonatkozó alapfeladatokat ismertetjük. Az eredmények kiterjesztése torzításmentes vezetésekre nem okoz nehézséget.

A távvezetéken lejátszódó jelenség tér-idő dinamikája általában megköveteli kezdeti és peremértékek együttes kitűzését. Speciális esetekben azonban ezek közül elegendő az egyiket kitűznünk. A továbbiakban valamennyi alapesetet végigvizsgáljuk.

A vezetéken haladó hullámokat (7.16) és (7.17)-nek megfelelően az alábbi alakban keressük:

$$u(z, t) = f_1(z - vt) + f_2(z + vt); \quad (7.162)$$

$$i(z, t) = \frac{1}{Z_0} [f_1(z - vt) - f_2(z + vt)]. \quad (7.163)$$

A képletekben  $f_1$  és  $f_2$  tetszőleges alakú függvények lehetnek. Általában megköveteljük, hogy ezen függvények véges energiát hordozzanak, azaz abszolút értékük négyzete mindkét változójuk szerint integrálható legyen.

### 1. Kezdetiérték-feladat

Végtelen hosszú távvezetéken a peremértékeket nem tudjuk megadni. Az egyértelmű megoldáshoz a vezeték mentén meg kell adnunk a feszültség és az áram eloszlását a  $t = 0$  pillanatban. Ez a *kezdeti érték*.

Legyen

$$u(z, 0) = U(z); \quad (7.164)$$

$$i(z, 0) = I(z); \quad (7.165)$$

ahonnan némi számolással:

$$f_1(z) = \frac{1}{2} [U(z) + Z_0 I(z)]; \quad (7.166)$$

$$i(z) = \frac{1}{2} [U(z) - Z_0 I(z)]; \quad (7.167)$$

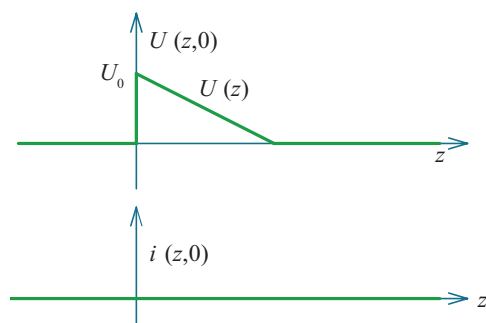
ahonnan a megoldás (7.142) és (7.143) felhasználásával könnyen előállítható:

$$u(z, t) = \frac{1}{2} [U(z - vt) + Z_0 I(z - vt) + U(z + vt) - Z_0 I(z + vt)] \quad (7.168)$$

Hasonlóan az áramra:

$$i(z, t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{U(z - vt)}{Z_0} + I(z - vt) - \frac{U(z + vt)}{Z_0} + I(z + vt) \right]. \quad (7.169)$$

Nézzünk egy egyszerű példát! Tételezzük fel, hogy a vezeték mentén egy feszültséglökés alakul ki, de a kezdeti pillanatban áram még nem folyik (7.27. ábra).



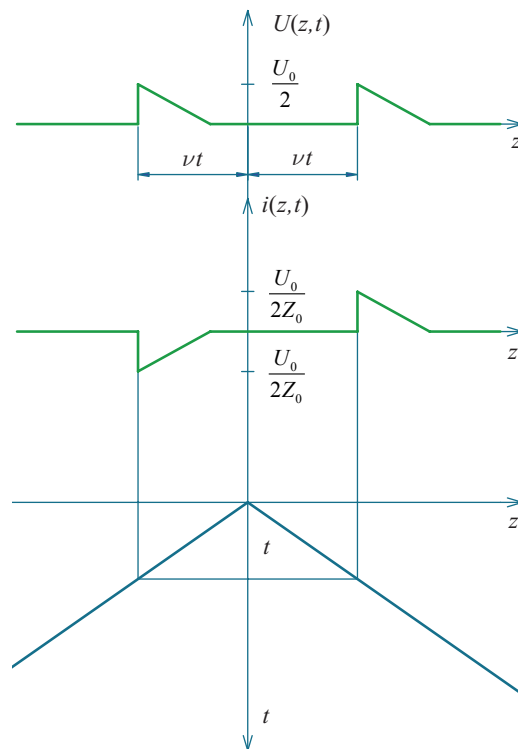
7.27. ábra

A kialakuló feszültség-, illetve áramhullám:

$$u(z, t) = \frac{1}{2} [U(z - vt) + U(z + vt)]; \quad (7.170)$$

$$i(z, t) = \frac{1}{2Z_0} [U(z - vt) - U(z + vt)]. \quad (7.171)$$

Ebben az egyszerű esetben tehát a feszültség és az áram eloszlása a vezeték mentén  $t \neq 0$  pillanatban a 7.28. ábrán látható.



7.28. ábra

Az áram előjele jelzi, hogy az áram pozitív vagy negatív irányban folyik-e a referencia-vezetéken.

Az ábrán feltüntettük az ún. karakterisztikákat. Ezek azt mutatják, hogy a vezetéken a hullám egy karakterisztikus pontja (esetünkben a maximuma) hogyan halad a vezeték mentén  $t$  függvényében. Egyenes haladás (állandó sebesség) esetén a karakterisztikák  $v$  meredekségű egyenesek.

A karakterisztikák nem állandó sebességű terjedés esetén is a hullámjelenségek vizsgálatának fontos segédeszközei. Ilyenkor természetesen nem egyenes a karakterisztika.

A karakterisztikák akkor használhatók, ha a hullám alakja a terjedés során csak lassan változik.

## 2. Peremérték-feladat

Ebben az esetben a vezetéken a kezdeti érték zérus, a vezeték egy pontján azonban előírjuk a feszültség és/vagy áram időbeli változását. Mindkét mennyiség előírásakor kellő óvatossággal kell eljárni, tekintve, hogy a terjedő hullám árama és feszültsége meghatározzák egymást.

A peremérték tehát:

$$u(0, t) = U_0(t); \quad (7.172)$$

$$i(0, t) = I_0(t). \quad (7.173)$$

Mindkét irányban terjedő hullám esetén (7.162) és (7.163)-ból:

$$f_1(t) = \frac{1}{2}[U_0(t) + Z_0 I_0(t)]; \quad (7.174)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2}[U_0(t) - Z_0 I_0(t)]; \quad (7.175)$$

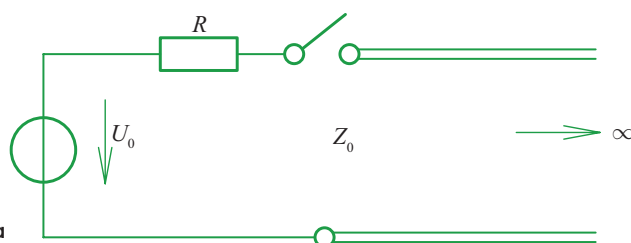
ahonnan

$$u(z, t) = \frac{1}{2}\left[U_0\left(t - \frac{z}{v}\right) + Z_0 I_0\left(t - \frac{z}{v}\right) + U_0\left(t + \frac{z}{v}\right) - Z_0 I_0\left(t + \frac{z}{v}\right)\right]; \quad (7.176)$$

$$i(z, t) = \frac{1}{2}\left[\frac{U_0\left(t - \frac{z}{v}\right)}{Z_0} + I_0\left(t - \frac{z}{v}\right) - \frac{U_0\left(t + \frac{z}{v}\right)}{Z_0} + I_0\left(t + \frac{z}{v}\right)\right]. \quad (7.177)$$

A karakterisztikák az előző esethez viszonyítva változatlanok.

Egy példát mutatunk az egyik irányban történő terjedésre: egy bekapcsolási tranziens (7.29. ábra).



7.29. ábra

$$u(0, t) = U^{(+)}\varepsilon(t) \quad (7.178)$$

$$i(0, t) = \frac{U^{(+)}}{Z_0}\varepsilon(t). \quad (7.179)$$

Miután csak pozitív irányba haladó hullám van,  $u(0, t)$  egyértelműen meghatározza  $i(0, t)$ -t. Bármely időpillanatban (7.162) és (7.163) alapján:

$$u(z, t) = U^{(+)}\varepsilon\left(t - \frac{z}{v}\right) \quad (7.180)$$

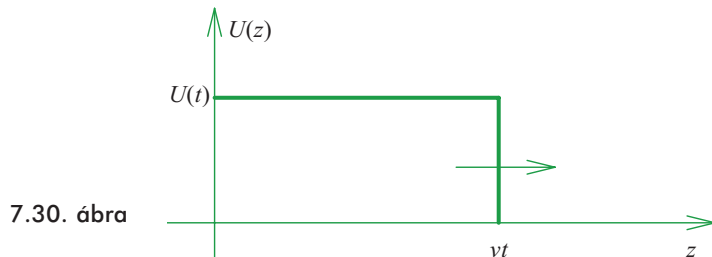
és

$$i(z, t) = \frac{U^{(+)}}{Z_0}\varepsilon\left(t - \frac{z}{v}\right) \quad (7.181)$$

azaz

$$u = \begin{cases} U^{(+)}, & \text{ha } z < vt \\ 0, & \text{ha } z > vt \end{cases}. \quad (7.182)$$

Ezt a függvényt ábrázoljuk a 7.30. ábrán.



A karakterisztika megegyezik a 7.28. ábra pozitív féltengelyhez tartozó karakterisztikájával. Az  $u(0, t)$  és  $i(0, t)$  ismeretében a 7.29. ábra alapján:

$$U^{(+)} = U_0 - I^{(+)}R = U_0 - \frac{U^{(+)}}{Z_0}R;$$

ahonnan

$$U^{(+)} = \frac{Z_0}{R + Z_0}U_0, \quad (7.183)$$

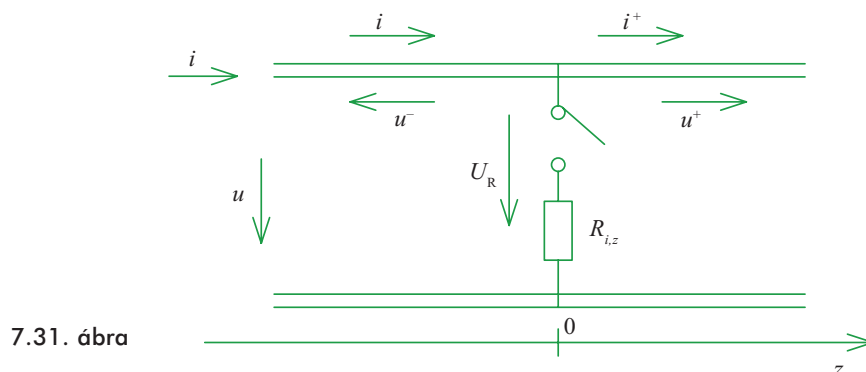
azaz a vezeték bemenetének feszültsége egyszerű feszültségosztással számítható az  $R$  és  $Z_0$  ellenállás között.

### 3. Kezdetiérték- és peremérték-feladat

Az általános esetre mutatunk egy példát, amely a vezetéken kialakuló zárlat hatását modellezi. Legyen a távvezetéken a 0 pillanatban stacionárius  $U$  feszültség az áram a vezeték mentén zérus. A  $t = 0$  pillanatban a  $z = 0$  helyen véges  $R$  ellenállást kapcsolunk a vezetékre (7.31. ábra):

$$u(z, 0) = U \quad (7.184)$$

$$i(z, 0) = 0. \quad (7.185)$$



Az  $R$  ellenállás bekapcsolásakor mindkét irányba azonos értékű feszültség hullám indul el. Az  $R$  ellenálláson fellépő  $U_R$  feszültség:

$$U_R = Ri_R = U + u^- = U + u^+ \quad (7.186)$$

ahol  $u^- = u^+$ . De

$$-i^- = \frac{u^-}{Z_0}; \quad +i^+ = \frac{u^+}{Z_0} = -i^-; \quad (7.187-7.188)$$

ahonnan az ellenálláson folyó áram:

$$i_R = i^- - i^+ = 2i^-.$$

Ebből (7.186)-ot felhasználva kapjuk:

$$U + u^- = i_R R = 2i^- R = -2 \frac{R}{Z_0} u^-,$$

azaz

$$u^- = -\frac{Z_0}{2R + Z_0} U; \quad (7.189)$$

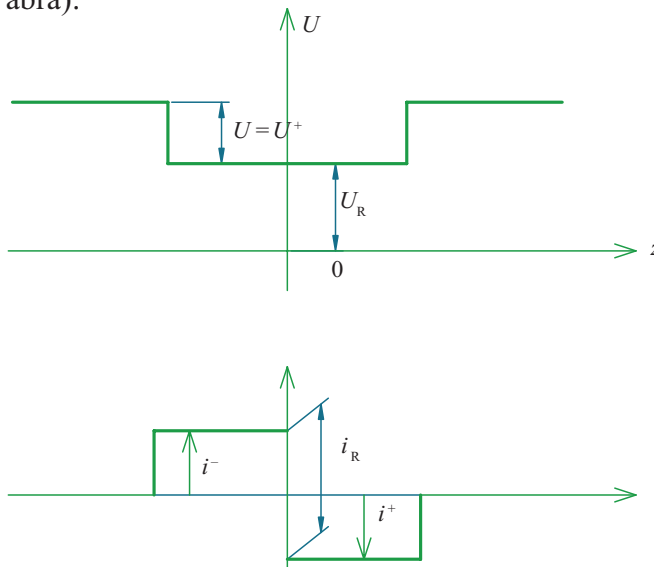
$$i^- = \frac{U}{2R + Z_0}. \quad (7.190)$$

A zárlati feszültség, ill. áram értéke:

$$u_R = \frac{2R}{2R + Z_0} U; \quad (7.191)$$

$$i_R = \frac{2U}{2R + Z_0}. \quad (7.192)$$

A legérdekesebb eredmény, hogy a zárlati áram  $R = 0$  esetén is véges marad (7.32. ábra):

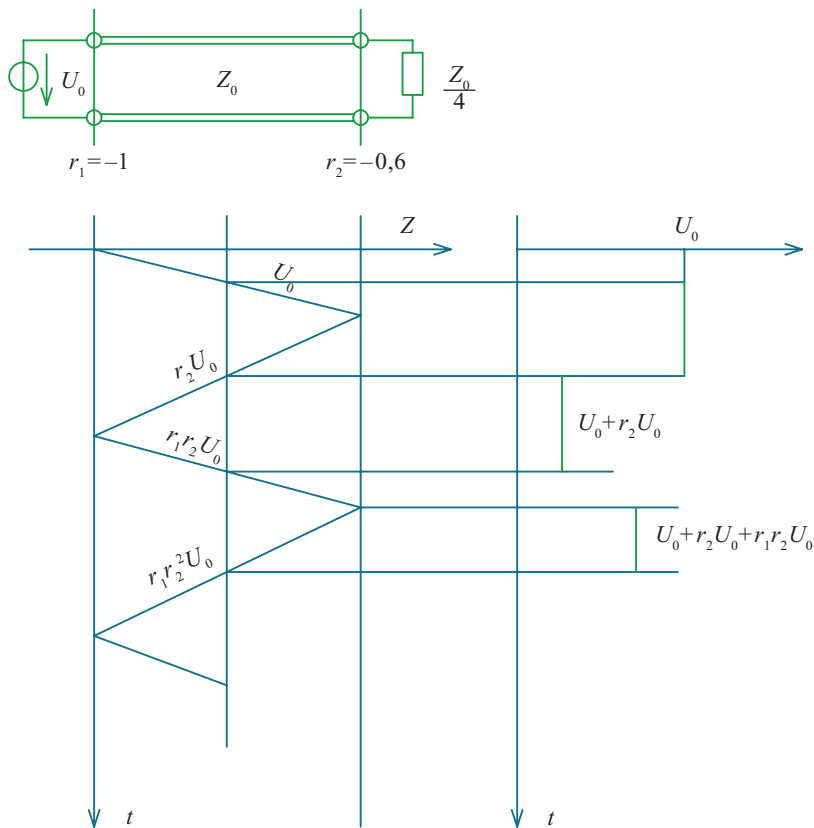


7.32. ábra

A karakterisztikák megegyeznek a 7.29. ábra karakterisztikáival. Az áramhullám a vezeték végét  $T = L/v$  idővel a zárlat bekövetkezése után éri el, és legnagyobb értéke  $u/Z_0$  lehet.

## A MENETDIAGRAMOK MÓDSZERE

A karakterisztikák segítségével frekvenciafüggetlen lezárásnál a tranziens nyomon követhető, a távvezeték egyes pontjaiban az áram és feszültség értéke megszerkeszthető. A továbbiakban a részletes „elmélet” helyett egy példán mutatjuk be a módszer használatát. Tükrözik a 7.33. ábrán bemutatott elrendezést. Kapcsoljuk az  $U_0$  feszültség-generátort a  $t = 0$  pillanatban a vezetékre.



7.33. ábra  
Elrendezés  
és karakterisztikái

Az ábrán  $\tau = \frac{1}{v}$  a futási idő a vezeték mentén.

$$r_1 = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1; \quad r_2 = \frac{\frac{Z_0}{4} - Z_0}{\frac{Z_0}{4} + Z_0} = \frac{-0,75}{1,25} = -0,6.$$

A karakterisztikákból álló menetdiagram segítségével a vezeték két végén visszaverődő hullámok nyomon követhetők, és a vezeték bármely pontjában összegezhetők.

Látszik, hogy frekvenciafüggő reflexió és bonyolultabb gerjesztés esetén ez a félgrafikus módszer nem használható.

A menetdiagram-módszer befejezéseként határozzuk meg az állandósult feszültséget és áramot a lezáráson:

$$\begin{aligned} U_2 &= (1+r_2)U_0 - r_2(1+r_2)U_0 + r_2^2(1+r_2)U_0 + \dots = \\ &= (1+r_2)(1-r_2+r_2^2-r_2^3 \pm \dots \pm)U_0 = \frac{1+r_2}{1+r_2}U_0 = U_0; \end{aligned} \quad (7.193)$$

$$I_2 = (1-r_2)\frac{U_0}{Z_0} - r_2(1-r_2)\frac{U_0}{Z_0} \pm \dots \pm = \frac{1-r_2}{1+r_2}\frac{U_0}{Z_0} = \frac{U_0}{R_2}. \quad (7.194)$$

A fenti formulák megfelelnek a fizikailag indokolt várakozásnak. Az előző megfontolás az egyenáramú fogyasztón felépülő áram és feszültség bekapcsolásakor fellépő tranzienseit illusztrálja.

## ÁLTALÁNOS TRANZIENSEK

Tetszés szerinti vezeték és lezárás esetén az eddigi módszerek nem használhatók. A numerikus megoldásain kívül lehetséges a transzformációs módszerek használata is. Az alábbiakban a Fourier-transzformáció alkalmazását mutatjuk be. Laplace-transzformációval hasonló eredményekre jutunk.

A transzformáció az időtartományt a  $j\omega$  frekvenciatartományba képezi le, miközben a térbeli változó paraméterként szerepel:

$$Fu(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-j\omega t} dt = U(x, j\omega); \quad (7.195)$$

$$Fi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(x, t) e^{-j\omega t} dt = I(x, j\omega). \quad (7.196)$$

A vezetéken pozitív irányban haladó hullám:

$$u^+(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(j\omega) e^{-\gamma x} e^{j\omega t} d\omega \quad (7.197)$$

$$i^+(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_1(j\omega)}{Z_0(j\omega)} e^{-\gamma x} e^{j\omega t} d\omega; \quad (7.198)$$

ahol

$U_1(j\omega)$  a bemeneti  $U_1(t) = U(0, t)$  feszültség transzformáltja,  $Z_0$  pedig a hullámimpedancia.

A vezeték végén mérhető reflexiós tényező a lezáráson:

$$r_2(j\omega) = \frac{Z_2(j\omega) - Z_0(j\omega)}{Z_2(j\omega) + Z_0(j\omega)}, \quad (7.199)$$

és a bemeneten:

$$r_1(j\omega) = \frac{Z_1(j\omega) - Z_0(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_0(j\omega)}. \quad (7.200)$$

Az első reflektált hullám  $l$  hosszúságú vezetéken:

$$u^-(x, j\omega) = r_2 U_1(j\omega) e^{-\gamma l} e^{\gamma(z-l)};$$

és végül a sokszoros oda-vissza verődés után:

$$\begin{aligned} U(x, j\omega) &= U_1(j\omega) \left[ e^{-\gamma x} + r_2 e^{-\gamma(2l-x)} + r_1 r_2 e^{-\gamma(2l+x)} + r_1 r_2^2 e^{-\gamma(4l-x)} + \dots \right] = \\ &= U_1(j\omega) \left[ e^{-\gamma x} (1 + r_1 r_2 e^{-2\gamma l} + r_1^2 r_2^2 e^{-4\gamma l} + \dots) + r_2 e^{-\gamma(2l-x)} (1 + r_1 r_2 e^{-2\gamma l} + \dots) \right]. \end{aligned}$$

Innen a mértani sort összegezve:

$$U(z, j\omega) = U_1(j\omega) \frac{e^{-\gamma x} + r_2 e^{\gamma(x-2l)}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma l}} \quad (7.201)$$

$$I(z, j\omega) = \frac{U_1(j\omega)}{Z_0(j\omega)} \frac{e^{-\gamma x} - r_2 e^{\gamma(x-2l)}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\gamma l}}. \quad (7.202)$$

A sorösszezésnek az a feltétele, hogy az

$$|r_1 r_2 e^{-2\gamma l}| < 1 \quad (7.203)$$

egyenlőtlenség fennálljon.

A (7.201) és (7.202) kifejezésekben jól elkülönül a pozitív és negatív irányba haladó hullám. Állandósult állapotban csak a lezárás határozza meg a reflexiót:  $r_2$  a reflexió tényező.

A visszatranszformálásnál kitüntetett szerepet kapnak a nevező pólusai, azok a (komplex) frekvenciák, amelyeken:

$$r_1 r_2 e^{-2\gamma l} = 1. \quad (7.204)$$

Ezek a frekvenciák a rendszer sajátrezgéseinek frekvenciái.

# ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK KELTÉSE

Amint a 3. fejezetben az elektrodinamika felosztásánál láttuk, az elektromágneses tér legáltalánosabb egyenletei:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \quad (\text{IV})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (\text{V})$$

Homogén közeget tételezünk fel, tehát  $\varepsilon$  és  $\mu$  állandó.

A teret gerjesztő mennyiségek az *áram* és a *töltés*. A továbbiakban azt vizsgáljuk, milyen módon lehet meghatározni a gerjesztőmennyiségek ismeretében magát a létrehozott teret.

Az összefüggéseket nem a térjellemező mennyiségekre írjuk fel, hanem a potenciálokra. Az a tény, hogy a  $\mathbf{B}$  vektor divergenciamentes, lehetővé teszi, hogy egy alkalmasan választott  $\mathbf{A}$  vektorpotenciál rotációjaként fejezzük ki:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (8.1)$$

Ezt az összefüggést (II)-be helyettesítve és felcserélve a hely és idő szerinti deriválást (ez nyugvó rendszerben mindig megtehető):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

a következő összefüggésre jutunk:

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (8.2)$$

Mivel a zárójelben álló vektor rotációmentes, előállítható egy skalárpotenciál gradienseként:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad} \varphi,$$

ahonnan

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (8.3)$$

A sztatikus ( $\partial/\partial t = 0$ ) esettel ellentétben az elektromos tér nem állítható elő csak skalárpotenciállal, hanem a mágneses teret meghatározó vektorpotenciál is megjelenik az értékében.<sup>23</sup>

Az eddigiek értelmében, ha adva van  $\mathbf{A}$  és  $\varphi$ , a vektor- és skalárpotenciál mint a hely és idő függvénye, akkor  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  a (8.3) és (8.1) egyenletekből meghatározható.

Magukat a potenciálokat az eddig fel nem használt (I) és (IV) egyenletek segítségével tudjuk meghatározni. Vegyük észre: csak ezek az egyenletek tartalmazzák a gerjesztő-mennyiségeket, a másik két egyenlet homogén!

Miután az  $\mathbf{A}$  vektorpotenciálnak csak a rotációja kötött, a divergenciáját szabadon választhatjuk. Ez az ún. *mértékválasztás*. A divergenciát célszerűen úgy választjuk, hogy az egyenletek a lehető legkényelmesebb alakúak legyenek:

$\mathbf{H} = (1/\mu)\text{rot} \mathbf{A}$  -t (I)-be helyettesítve a

$$\text{rot rot} \mathbf{A} = \text{grad div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \varepsilon \mu \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

összefüggéshez jutunk, amelyből rendezés után kapjuk:

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \text{grad} \left( \text{div} \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0. \quad (8.4)$$

A (IV) egyenletbe (8.3)  $\varepsilon$ -szorosát helyettesítve  $\mathbf{D}$  helyére azt nyerjük, hogy

$$\text{div} \mathbf{D} = -\varepsilon \text{div grad} \varphi - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A} = \rho,$$

ahonnan rendezés után a

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A} \quad (8.5)$$

összefüggéshez jutunk.

A mértéket a (8.4) egyenletet egyszerűsítve megválaszthatjuk úgy, hogy

$$\text{div} \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (8.6)$$

legyen. Ez az összefüggés a *Lorentz-feltétel*, és az így választott mértéket Lorentz-mértéknek nevezzük. (8.6) alkalmazásával (8.4) az alábbi egyenletre egyszerűsödik:

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}, \quad (8.7)$$

23 Történelmi érdekesség, hogy Maxwell munkáiban az alap-egyenletek az (I), (IV), (8.1) és (8.3) voltak. Ennek oka az a bonyolult hidrodinamikai modell volt, amellyel Maxwell az elektromágneses teret modellezte, és amelyben az  $\mathbf{A}$  vektorpotenciál kitüntetett szerepet játszott. Az egyenletek mai alakját O. Heaviside formulázta meg 1884-ben, már Maxwell halála után. Lényegében azonos egyenletekre jutott H. Hertz, aki kísérleti úton először keltett rádióhullámokat. Érdekesség, hogy az (I)–(II) egyenleteket Einstein mindig mint Maxwell–Hertz-egyenleteket idézte.

míg (8.5)

$$\Delta\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (8.8)$$

alakú lesz.

Az  $\mathbf{A}$  vektorpotenciálra és a  $\varphi$  skalárpotenciálra azonos alakú egyenletet kapunk a Lorentz-feltétel alkalmazásával.

Az egyenletek térbeli hullámegyenletek. Diskussziójukra még visszatérünk. Már most megjegyezzük azonban, hogy nem függetlenek, hanem a jobb oldalon álló mennyiségek között a folytonossági egyenlet erős kötést jelent. Belátható, hogy a (8.6) Lorentz-feltétel a (8.7) és (8.8) egyenletekben a folytonossági egyenlet teljesülését biztosítja.

Tetszés szerinti  $\psi$  függvény segítségével olyan potenciálok állíthatók elő, amelyen azonos térmennyiségekre vezetnek. Ezek a potenciálok:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \text{grad}\psi; \quad (8.9)$$

$$\varphi^* = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (8.10)$$

A  $\psi$  elnevezése: *mértékfüggvény*. Ha úgy választjuk, hogy  $\mathbf{A}^*$  és  $\varphi^*$  is eleget tegyen a Lorentz-mértéknek, *mértékinvarianciáról* beszélünk. Könnyen belátható, hogy a mértékvariancia esetén a  $\psi$  eleget tesz a homogén hullámegyenletnek:

$$\Delta\psi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (8.11)$$

A másik gyakran választott mérték a stacionárius esetből jól ismert *Coulomb-mérték*:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (8.12)$$

Ezzel a (8.5) a Poisson-egyenletre egyszerűsödik (de a benne szereplő mennyiségek az időben változnak):

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (8.13)$$

A vektorpotenciálra vonatkozó (8.4) egyenlet azonban bonyolultabb lesz.

$$\Delta\mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} + \varepsilon\mu \text{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (8.14)$$

(8.13)-ból  $\varphi$  meghatározása a sztatikából ismert módon történhet. Az így kapott potenciált (8.14)-be helyettesítve kell megoldanunk a hullámegyenletet.

A folytonossági egyenlet most is teljesül. (8.14) mindkét oldalának divergenciáját véve a bal oldalon (8.12) következtében zérust kapunk, még a jobb oldalt kiszámítva a

$$-\text{div } \mathbf{J} + \varepsilon \text{div grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi = -\text{div } \mathbf{J} - \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (8.15)$$

folytonossági egyenletre jutunk.

A mértékinvariancia feltétele most (8.9) felhasználásával  $\operatorname{div} \mathbf{A}^* = \operatorname{div} \mathbf{A} + \Delta\psi = 0$  alapján:

$$\Delta\psi = 0, \quad (8.16)$$

azaz a mértékfüggvény a Laplace-egyenletnek kell, hogy eleget tegyen. A feltétel (8.10) alapján a  $\varphi$  skalárpotenciál invarianciáját is biztosítja.

Térjünk vissza a Lorentz-feltételnek eleget tevő hullámegyenletekre! A hullám terjedési sebességére (ahogyan ezt a 7. fejezetben már láttuk) a közegben mérhető fénysebesség adódik:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}. \quad (8.17)$$

A két egyenletből jól látszik, hogy a sztatikus-stacionárius alapegyenleteket akkor kapjuk vissza, ha

$$\varepsilon\mu \rightarrow 0, \text{ azaz } v \rightarrow \infty \quad (8.18)$$

a terjedési sebessége végtelen. A sztatikus-stacionárius leírás a valódi folyamatoknak mindig csak a közelítése. Ez a közelítés a fénysebesség igen nagy értéke miatt véges, de viszonylag nagy kiterjedésű térrészben igen jó lehet. Ez a tény teszi lehetővé például a koncentrált paraméterű hálózatokkal történő, azonnali kölcsönhatást feltételező leírást.

Határozzuk meg a (8.7) és (8.8) egyenletek megoldását. Kezdjük a legegyszerűbbel, egy időben változó pontszerű töltés potenciáljának a meghatározásával.

A megoldás nyilván gömbszimmetrikus lesz. Ezért a (8.8) egyenletet gömbi koordinátákban kell felírni. A Laplace-operátor az  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  gömbi koordinátákkal felírva:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2}.$$

A gömbszimmetrikus megoldás csak  $r$ -től függ, így az egyenlet alakja az origó kivételével (ahol pontszerű töltés helyezkedik el):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Tételezzük fel, hogy a megoldás alakja – ismerve a sztatikus határértéket:

$$\varphi(r, t) = \frac{f(r, t)}{r}.$$

Ezt a hullámegyenletbe helyettesítve:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2},$$

$$r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = r \frac{\partial f}{\partial r} - f;$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial f}{\partial r} + r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\partial f}{\partial r} = r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

Az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Az origótól eltekintve az egyenlet tehát

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = 0$$

alakba írható, azaz a zárójeles kifejezés minden  $r$ -re zérus. Ennek az egyenletnek a megoldását a távvezetékek elméletéből ismerjük:

$$f(r, t) = f_1 \left( t - \frac{r}{v} \right) + f_2 \left( t + \frac{r}{v} \right).$$

Foglalkozzunk a fizikailag jól értelmezhető megoldással: a pozitív  $r$  irányban terjedő hullámmal, tehát legyen:

$$f(r, t) = f \left( t - \frac{r}{v} \right).$$

$r \rightarrow 0$  esetén a sztatikus határértéket kell kapnunk. Az ennek megfelelő megoldás:

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r}. \quad (8.19)$$

**Megjegyzés:** a kifejezés eleget tesz azon feltételünknek is, hogy  $v \rightarrow \infty$  esetén is a sztatikus határértékbe megy át.

Elosztott töltés esetén:

$$dQ = \rho \left( \xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{v} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (8.20)$$

és ezzel

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{v})}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (8.21)$$

Hasonló módon:

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \left( \xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{v} \right)}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (8.22)$$

Az eddigi konvencionknak megfelelően  $x, y, z$  azon  $P$  pont koordinátái, ahol a potenciált keressük:  $\xi, \eta, \zeta$ , azon  $Q$  pont koordinátái, ahol a töltés/áram van.  $r$  a  $P$  és  $Q$  pont közötti távolság, ami mind a hat koordináta függvénye.

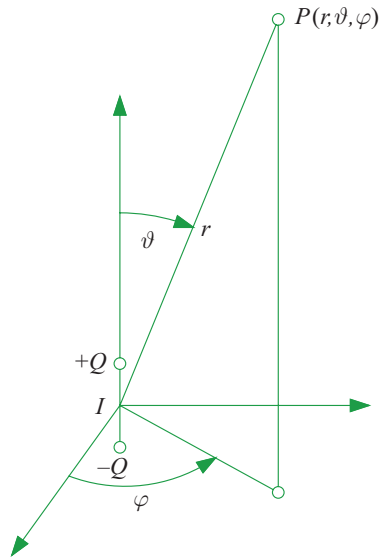
(8.21) és (8.22) a *retardált (késleltetett) potenciálok*. Abban különböznek a sztatikus-stacionárius potenciáloktól, hogy a potenciálértéket nem a vizsgált időpillanatban fennálló gerjesztés határozza meg, hanem az az érték, amelyet a gerjesztés  $t - \frac{r}{v}$  időpontban, tehát  $\frac{r}{v}$  idővel a vizsgálat előtt vett fel. Ez azt jelenti, hogy a véges terjedési sebesség miatt a gerjesztés a hatását késleltetve fejt ki.

Meg kell említenünk, hogy a kifejezések a  $t + \frac{r}{v}$  változóval is az inhomogén hullámegyenlet megoldását adják. Ezek az avanszált (siető) potenciálok. Ezeknél az ok-okozati viszony időrendje felcserélődik. Létezésük mégsem vezet ellentmondásra. (Ennek magyarázata pl. a Simonyi–Zombory tankönyv 4.5. szakaszában található. Ezen magyarázat szerint is a retardált potenciálok elégségesek a tér keltésének vizsgálatára.)

## A DIPÓLUSANTENNA SUGÁRZÁSA. HERTZ-DIPÓLUS

A Hertz-dipólus rövid,  $l$  hosszúságú vezetékdarab, amelyen tiszta szinuszos időfüggésű áram folyik, amelynek értéke a vezeték hossza mentén állandó. Ez akkor lehetséges, ha vezeték hossza sokkal kisebb az adott frekvenciához tartozó hullámhossznál.

A vezeték végén az áramnak divergenciája van. Ezért fel kell tételeznünk, hogy a vezeték végén negatív és pozitív töltés halmozódik fel, azonos abszolút értékkel. Az elrendezés elektromos szempontból tehát egy dipólus, amelynek momentuma szinuszosan változik (8.1. ábra.)



8.1. ábra  
Dipólus a koordináta-rendszer origójában

A Hertz-dipólus jelentősége abban áll, hogy vékony vezetékből kialakított (vonal-szerű = lineáris) antenna kis szakasza helyettesíthető vele. Az egész antenna elektromágneses tere a dipólusok terének szuperpozíciója.

A dipólus nyomatéka:

$$\mathbf{p} = \Re\{\mathbf{p}_0 e^{j\omega t}\} = \mathbf{l}q = \mathbf{l}\Re\{Q_0 e^{j\omega t}\}, \quad (8.23)$$

ahonnan a nyomaték időbeli változása:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Re\{\mathbf{p}_0 j\omega e^{j\omega t}\} = \mathbf{l}\frac{dq}{dt} = \mathbf{l}i = \Re\{\mathbf{l}I_0 e^{j\omega t}\}. \quad (8.24)$$

(8.23) és (8.24) összevetéséből:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{l}\frac{I_0}{j\omega}. \quad (8.25)$$

A vektorpotenciál (8.22) felhasználásával szabad térben ( $v = c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ )

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} \mathbf{l} = \Re \left\{ \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{e^{j\omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}}{r} \mathbf{l} \right\}. \quad (8.26)$$

A továbbiakban csak a (helyfüggő) komplex amplitúdókkal számolunk, az  $e^{j\omega t}$  alakú időfüggő tényezőt elhagyjuk.

A (8.1) alapján:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A}. \quad (8.27)$$

Felhasználjuk a vektoranalízis alábbi azonosságát:

$$\text{rot}[f(r)\mathbf{a}] = f(r)\text{rot } \mathbf{a} + \text{grad } f(r) \times \mathbf{a}. \quad (8.28)$$

Ezzel a mágneses térerősség:

$$\mathbf{H} = \frac{I_0}{4\pi} \text{grad} \frac{e^{-j\omega \frac{r}{c}}}{r} \times \mathbf{l}, \quad (8.29)$$

mivel  $\text{rot } \mathbf{l} = 0$ . Bevezetve az  $r_0 = \mathbf{r}/r$  egységvektort:

$$\mathbf{H} = \frac{I_0}{4\pi} \left( \frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\omega \frac{r}{c}} [\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0]. \quad (8.30)$$

Az  $\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0$  vektorszorzat merőleges a dipólus és a vizsgált pont felé mutató vektor által kifeszített síkra. Ebből következik, hogy a mágneses tér erővonalai kör alakúak, középpontjuk a dióda tengelyén van.

A mágneses térerősség két részből áll. Az első tag a távolság első hatványával fordított arányban csökken, míg a második tag a távolság négyzetével fordított arányban. A második tagot *közeli térnek* nevezzük, az első tagot pedig *távoli* vagy *sugárzási térnek*, mert a második tag csak kis távolságokban érezheti hatását, még az első tag nagy távolságokban is. Az  $1/r^2$  távolságfüggés a Biot–Savart-törvénynek felel meg.

A számítást egyszerűbb koordináták szerint végezni. A mágneses térerősség (8.30) kifejezése  $|\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0| = l \sin \vartheta$  helyettesítéssel gömbi koordináta-rendszerben az alábbi komponensekhez vezet:

$$\begin{aligned} H_r &= 0; \\ H_\vartheta &= 0; \\ H_\varphi &= \frac{I_0 l}{4\pi} \left[ \frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \sin \vartheta e^{-j\beta r}; \end{aligned} \quad (8.31)$$

ahol  $\beta = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ .

Az elektromos tér számítására az (I) Maxwell-egyenletet használjuk fel. A tiszta szinuszos gerjesztés következtében a komplex amplitúdókra felírt egyenletekben

$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$  helyettesítéssel élünk. Az origón kívül nem folyik áram, tehát  $\mathbf{J} = 0$ .<sup>24</sup>

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\mu_0} \text{rot rot } \mathbf{A}. \quad (8.32)$$

(8.31) rotációját gömbi koordinátákban kiszámítva:

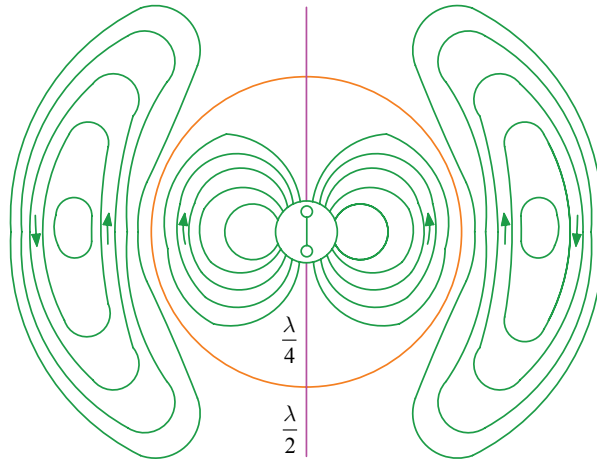
$$E_r = \frac{I_0 l}{4\pi} \left[ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{2}{r^2} - \frac{2j}{\omega\epsilon_0 r^3} \right] \cos \vartheta e^{-j\beta r};$$

$$E_\vartheta = \frac{I_0 l}{4\pi} \left[ \frac{j\omega\mu_0}{r} - \frac{j}{\omega\epsilon_0 r^3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{r^2} \right] \sin \vartheta e^{-j\beta r}. \quad (8.33)$$

$$E_\varphi = 0.$$

Az elektromos térerősség kifejezésében is találunk  $1/r$ -rel arányos távoli teret. A közeli tér  $1/r^3$ -beli arányos komponensei a sztatikus dipólus retardált teréből adódnak, míg az  $1/r^2$ -tel arányos tagok a mágneses tér hasonló tagjainak változása által indukált elektromos teret írják le.

Az elektromos térnek csak a dipólus tengelyére fektetett síkban (meridiánsík) vannak komponensei,  $\varphi$  irányú komponense nincsen (8.2. ábra). Ezzel szemben a mágneses térnek csak  $\varphi$  irányú komponense van, amint az előzőekben beláttuk.



8.2. ábra

A villamos erővonalak a dipólus meridiánsíkjában

Erővonalai körök, amelyek középpontja a dipólus tengelyén van. Az elektromos és mágneses térerősség azonos intenzitású helyei egybeesnek.

A jelenség első részletes elméleti vizsgálatát Heinrich Hertz német fizikus 1888-ban publikálta, miután kísérleti úton először állított elő egyenes vezetéken folyó nagyfrekvenciás árammal (antennával) elektromágneses hullámot.

A képeken jól látható, hogy a távoli térben az elektromos térerősségnek gyakorlatilag csak  $\vartheta$  komponense van. Ezek a komponensek az antenna tengelyére

merőleges irányban a legintenzívebbek. A  $\sin \vartheta$  függés miatt az antenna tengelyének irányában nincs  $\vartheta$  irányú komponens, így távoli tér sem. Az erővonalak záródását a közeli tér  $r$  irányú komponensei teszik lehetővé.

Miért várjuk el az erővonalaktól, hogy zártak legyenek? Azért, mert a térben (az antennán kívül) sehol sincsen töltés, a tér divergenciamentes.

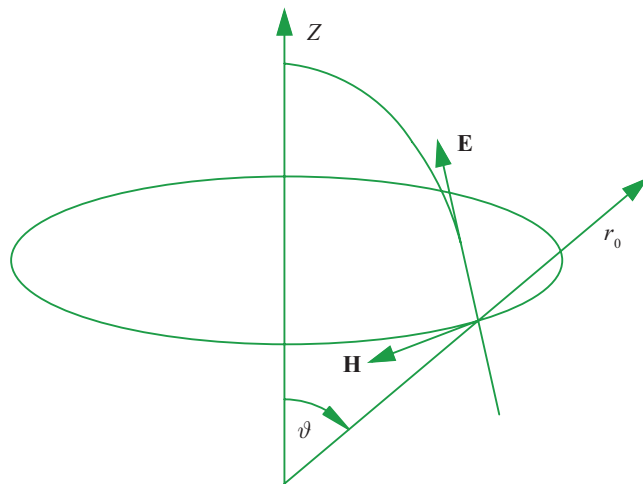
## A HERTZ-DIPÓLUS TÁVOLI TERE

A távoli tér komponensei:

$$E_{\vartheta} = \frac{I_0 l}{4\pi r} \frac{j\omega\mu_0}{r} \sin \vartheta e^{-j\beta r}; \quad (8.34)$$

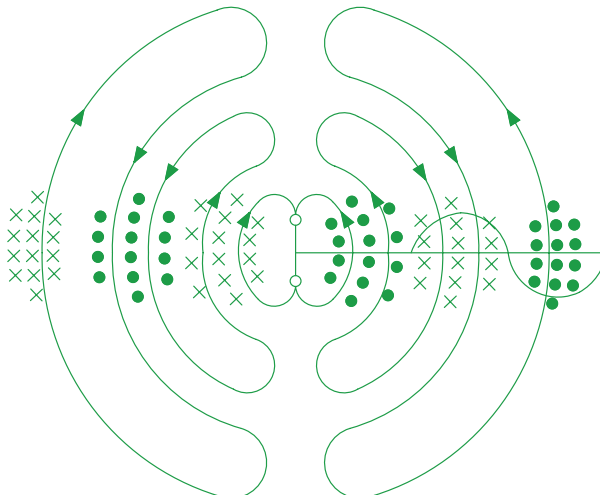
$$H_{\varphi} = \frac{I_0 l}{4\pi r} \frac{j\beta}{r} \sin \vartheta e^{-j\beta r}. \quad (8.35)$$

A távoli tér komponensei egymásra merőleges vektorok (8.3. ábra). Miután az elektromos és mágneses tér között nincsen fáziskülönbség, a távoli térben a térerősségek maximumai helyben is egybeesnek (8.4. ábra). Az előző állítás azt is jelenti, hogy  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{H}$  amplitúdójának hányadosa mindenütt állandó mennyiség.



8.3 ábra

A villamos és mágneses térerősség iránya a távoli zónában



8.4 ábra

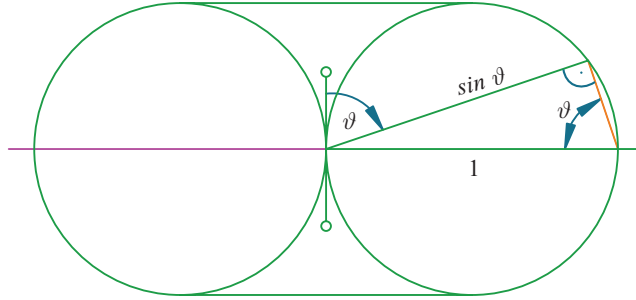
A villamos és mágneses térerősség maximális intenzitású helyei a térben egybeesnek



Esetünkben a rövid dipólus iránykarakterisztikája,

$$F(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \quad (8.44)$$

hengersizmetrikus, csak a  $\vartheta$  függvénye (8.5. ábra).



8.5. ábra  
A dipólus sugárzási  
iránykarakterisztikája

## A KISUGÁRZOTT TELJESÍTMÉNY

A kisugárzott teljesítményt a távoli tér szállítja el az antenna környezetéből. Ha ugyanis a  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  Poynting-vektort számítjuk, csak az  $1/r$ -rel arányos komponensek adnak  $1/r^2$ -tel arányos Poynting-vektort. Miután a felület, amelyen a teljesítmény átáramlik, a távolság növekedésekor  $r^2$ -tel arányosan növekszik, csak a távoli tér komponensei által szállított teljesítmény nem csökken a távolság növekedésekor. Ebben áll a távoli tér igazi jelentősége. Minden más elektromágneses tér az antenna által kisugárzott távoli térnél gyorsabban csökken a távolság növekedésekor, ezért nem alkalmas a teljesítmény nagy távolságra szállítására.

Ezt előre bocsátva számítsuk ki a távoli térkomponensek által létrehozott teljesítményáram sűrűségét – a Poynting-vektort, majd integráljuk azt az antennát körülvevő zárt felületre. Az előbb elmondottak értelmében valamennyi zárt felületre azonos eredményt kell kapnunk. Ezért egyszerűség kedvéért egy gömbfelületre integrálunk. A távoli tér Poynting-vektora ugyanis mindenütt merőleges erre a felületre.

A szinuszos időfüggés következtében komplex Poynting-vektorral kell számolnunk. Mivel a távoli tér komponensei merőlegesek egymásra és fázisban vannak, a komplex Poynting-vektor tiszta valós lesz és abszolút értéke:

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{2} EH = \frac{1}{2} \cdot 60\pi \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2 \sin^2 \vartheta; \quad (8.45)$$

$$P = \oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{2} 30\pi \frac{1}{r^2} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^2 \vartheta r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (8.46)$$

ahol  $r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  a gömbfelület elemi darabja. A kifejezésben szereplő integrálok értéke:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi; \quad \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3}. \quad (8.47)$$

A hatásos teljesítmény tehát:

$$P = \frac{1}{2} 30\pi \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2 2\pi \frac{4}{3} = \frac{1}{2} I_0^2 \cdot 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (8.48)$$

Az  $R$  ellenálláson átfolyó  $I_0$  amplitúdója áram hatásos teljesítménye:

$$P = \frac{1}{2} I_0^2 R, \quad (8.49)$$

ahonnan a rövid antenna *sugárzási ellenállását* kapjuk:

$$R_s = 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2. \quad (8.50)$$

A teljesítményt szolgáltató generátor számára az antenna a sugárzási ellenállással megegyező ellenállásnak látszik. A generátor nem „észleli”, hogy a teljesítmény nem disszipálódik, hanem a szabad térbe távozik.

Az antenna sugárzási ellenállása tehát az antenna hossza és a hullámhossz hányadosa négyzetével arányos. Egy dipóllal annál hatásosabban tudunk sugározni, minél hosszabb az antenna és minél kisebb a hullámhossz. A (8.50) összefüggés azonban csak az  $l \ll \lambda$  feltétel fennállása esetén érvényes.

Általánosan igaz azonban, hogy nagyobb frekvenciákon, tehát rövidebb hullámhosszban ugyanakkora áramerősséggel nagyobb teljesítményt tudunk elsugározni.

A hullámmellenállás egyébként sok vonatkozásban valódi ellenállásként viselkedik, például a távvezetéken fellépő reflexió szempontjából. Produkálja az ún. ellenállás-zajt is.

Az antenna impedanciája tiszta valós? Nincs reaktanciája? A válasz: az impedanciának van képzetes része is. A közeli tér komponensei eltérő fázisúak. A belőlük számított komplex Poyting-vektor képzetes része jelzi, hogy a közeli térben van ide-oda áramló teljesítménylengés. Ennek hatására az antenna reaktanciájában a sugárzási ellenálláson kívül reaktáns komponens is megjelenik.

Hogyan jellemezzük az antenna irányítottságát, azaz azt a tulajdonságot, hogy egyes irányokban nagyobb, más irányokban kisebb vagy éppen semmilyen teljesítményt nem sugároz? Az antenna irányítottságát a  $D$  irányhatás jellemzi, ami a legnagyobb teljesítménysűrűség és kisugározott átlagos teljesítmény hányadosa:

$$D = \frac{S_{\max}}{S_{\text{á}}} = \frac{S_{\max}(r)}{P_{\text{sug}}/4\pi r^2}, \quad (8.51)$$

ahol a távoli térkomponensekkel számolunk. Hertz-dipólusra (8.45) alapján:

$$S_{\max} = 15\pi \frac{1}{r^2} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 I_0^2, \quad (8.52)$$

míg a kisugározott teljesítmény (8.48)-ból:

$$P = 40\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 I_0^2. \quad (8.53)$$

Mindezt (8.51)-be helyettesítve:

$$D = 1,5. \quad (8.54)$$

Ez a Hertz-dipólus irányhatása. Ezt a mennyiséget rendszerint logaritmikus egységben, decibelben fejezik ki:

$$D^{\text{dB}} = 10 \lg D = 10 \lg 1,5 = 1,76 \text{ dB}.$$

*Figyelem!* Az antennák irányítottságának jellemzésére gyakran a  $G$  nyereséget használják. Ez abban különbözik az irányhatástól, hogy nem a kisugárzott, hanem az antennába betáplált teljesítmény szerepel a hányadosban:

$$G = \frac{S_{\max}(r)}{P_{\text{össz}}/4\pi r^2}, \quad (8.55)$$

$P_{\text{össz}}$  a kisugárzott teljesítményen kívül az antenna veszteségeire fordított teljesítményt is tartalmazza. Jó vezetőképességű anyagból készült antennák esetén a nyereség és az irányhatás gyakorlatilag megegyezik.

## A FÖLD BEFOLYÁSA A TÉR KIALAKULÁSÁRA

Az antennához közel elhelyezkedő földet végtelen jó vezetőképességűnek tekintjük. Ez a közelítés a frekvencia növekedésével egyre romlik, de kisebb frekvenciákon jó közelítés.

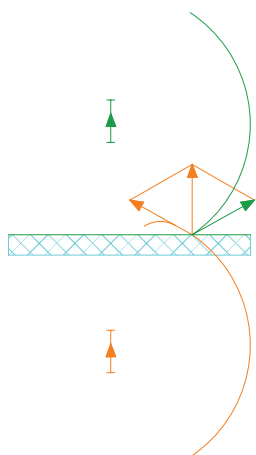
A végtelen jó vezetőképességű föld felszínén az elektromos térerősségnek merőlegesnek kell lennie a felületre. Sík felület esetén ilyen teret az antenna alkalmas tükrözésével tudunk előállítani. Végeredményben a vezető felületen folyó áramok hatását alkalmasan választott helyettesítő töltéselrendezéssel írjuk le.

A vezető síkra merőlegesen elhelyezkedő dipólus töltését az ismert módon tükrözve a kialakuló tükróáram azonos irányban folyik az eredeti dipólus áramával. A két dipólus terének szuperpozíciója mindenütt merőleges a vezető felületre (8.6a ábra). Az eredő térnek természetesen csak a határoló felülettől az eredeti dipólust tartalmazó féltérben van fizikai jelentése.

A vezető síkkal párhuzamos dipólus tükröképében az eredetivel ellentétes áram folyik (8.6b ábra). Tetszés szerinti pozícióban álló antenna egy a felületre merőleges és egy azzal párhuzamos komponensű áram segítségével modellezhető (8.6c ábra).

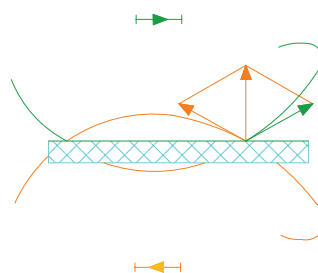
**8.6a ábra**

Függőleges dipólus tükröképében az áram azonos fázisban folyik



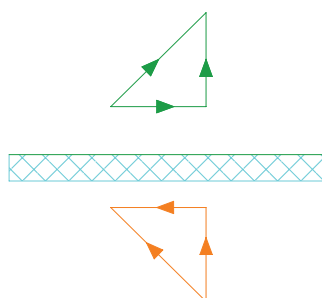
**8.6b ábra**

Vízszintes dipólus tükröképében az áram ellenkező fázisban folyik

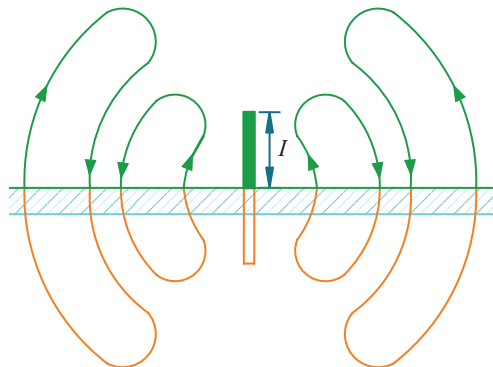


**8.6c ábra**

Ferde dipólus tükröképének függőleges komponensében az eredeti dipólus függőleges komponensével azonos fázisú, vízszintes komponensében pedig az eredeti dipólus vízszintes komponensével ellenkező fázisú áram folyik



Az eddigiek alapján vizsgálhatjuk a földre állított rövid dipól sugárzási tulajdonságait (8.7. ábra). Az  $l$  hosszúságú dipólust tükörképével kiegészítve  $2l$  hosszúságú antenna terével kell számolnunk, amelynek azonban csak a föld síkja feletti tere rendelkezik fizikai jelentéssel.



**8.7. ábra**  
A végtelen jó vezetőképességű sík befolyása a sugárzó tér kialakítására

(8.41) felhasználásával – és kivételesen effektív értékekre felírva az összefüggéseket:

$$E_{\text{eff}}^{\text{mV/m}} = 120\pi \frac{1}{r^{\text{km}}} \frac{l}{\lambda} I_{\text{eff}} \sin \vartheta, \quad (8.56)$$

ahol a távolságok km-ben, a térerősséget mV/m-ben mérjük. A kifejezésben figyelembe vettük, hogy a tükörképpel együtt az antenna  $2l$  hosszúságú.

Az elsugárzott teljesítmény kiszámításakor figyelembe kell vennünk, hogy a  $2l$  „hosszúságú” antenna csak a felső térrészbe sugároz energiát, ez a teljes, számított energiának csupán a fele:

$$P = \frac{1}{2} 80\pi^2 \left(\frac{2l}{\lambda}\right)^2 I_{\text{eff}}^2 = 160\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_{\text{eff}}^2. \quad (8.57)$$

(8.56) és (8.57) összevetéséből némi számolással kapjuk, hogy:

$$E_{\text{eff}}^{\text{mV/m}} = \frac{300}{r^{\text{km}}} \sqrt{P^{\text{kW}}}. \quad (8.58)$$

Ez a „háromszáz” formula a rádiótávközlés korai szakaszának általánosan használt képlete volt. A korabeli berendezések viszonylag nagy hullámhosszal dolgoztak, az antennák ezért „rövidek” voltak. Az áramerősség persze csak közelítőleg volt állandónak tekinthető, de a fenti összefüggés így is jó becslést adott a földre állított függőleges antenna által létrehozott térerősségre.

Hogyan változik a földre állított rövid antenna többi jellemzője?

A sugárzási ellenállás (8.57)-ből:

$$R_s = \frac{P}{I_{\text{eff}}^2} = 160\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (8.59)$$

kétszerese a magában álló dipólénak.

Mivel a maximális teljesítménysűrűség kétszeres antennahossznál négyszeresre nő, a kisugárzott teljesítmény azonban csak kétszeresére, az irányhatás  $4/2=2$ -szere-sére nő, azaz

$$D = 3,$$

illetve logaritmikus egységekben  $10 \lg 2 = 3$  dB-lel nő, tehát:

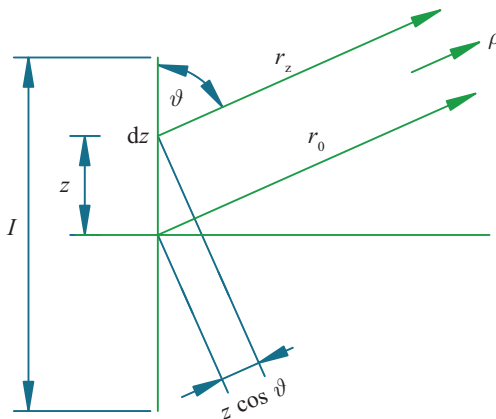
$$D^{\text{dB}} = 4,76 \text{ dB}.$$

## KÖZÉPEN TÁPLÁLT EGYENES HUZALANTENNÁK TERE

Az előzőekben megállapítottuk, hogy vonalszerű (lineáris) antennák tere mindig előállítható Hertz-dipólusok terének szuperpozíciójaként.

Példaként nézzük az egyenes szimmetrikus dipólust. Az egyenes antenna (8.8. ábra) kicsiny  $dz$  hosszúságú darabja által keltett elektromos térerősség amplitúdója (8.42) figyelembevételével:

$$dE_{\vartheta} = j \frac{60\pi}{r_z \lambda} I(z) dz e^{-j\beta r_z} \sin \vartheta. \quad (8.60)$$



**8.8. ábra**  
Tetszés szerinti árameloszlású egyenes antenna sugárzó terének megállapításához

Feltételezzük, hogy a pont, ahol a távoli teret keressük, olyan messze van, hogy az antenna különböző pontjaiból odahúzott egyenesek párhuzamosaknak tekinthetők. Az ábrából leolvasható, hogy:

$$r_z = r_0 - z \cos \vartheta,$$

ahol  $r_0$  az antenna közepének távolsága a vizsgált ponttól.

Az  $r_z$  egymást követő közelítései:

*zérusrendű:*

$$r_z \cong r_0;$$

*elsőrendű:*

$$r_z \cong r_0 - z \cos \vartheta.$$

A (8.59) nevezőjében a zérusrendű közelítés megengedhető, de az exponenciális függvény kitevőjében nem. Az amplitúdó számításánál a hiba zérusrendű közelítéssel elenyésző, a fázis számításnál azonban nagyobb pontossággal kell számolunk, ezért ott az elsőrendű kifejezést használjuk. Ezzel

$$dE_{\vartheta} = j \frac{60\pi}{r_0 \lambda} e^{-j\beta(r_0 - z \cos \vartheta)} \sin \vartheta. \quad (8.61)$$

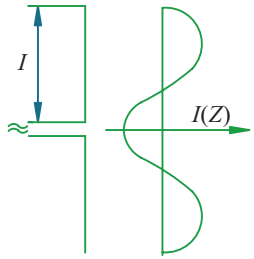
Az egyes Hertz-dipólusok terének eredőjét a fenti kifejezés integrálásával kapjuk:

$$E_{\vartheta} = j \frac{60\pi}{\lambda} \frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0} \sin \vartheta \int_{-l/2}^{+l/2} I(z) e^{j\beta z \cos \vartheta} dz. \quad (8.62)$$

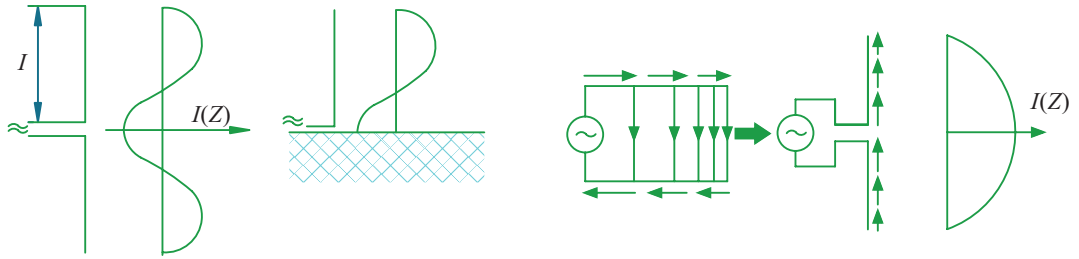
A kifejezés a távoli térben igen jó eredményt ad, ha ismerjük az antenna mentén az árameloszlást.

Sajnos, ezt az eloszlást pontosan nem ismerjük! Jó közelítést kapunk, ha az antennát szakadással lezárt kinyitott tápvonalnak tekintjük, amelyen állóhullámok alakulnak ki, hiszen a vezetékvégeken az áram zérus. Feltételezzük, hogy ezek az állóhullámok ugyanolyan szinuszos eloszlásúak, mint a távvezetéken (8.9. ábra). Ez a közelítés igen jó például félhullám hosszúságú antennák esetében (8.10. ábra).

**8.9. ábra.**  
Jó vezető földre helyezett antenna árameloszlása



**8.10. ábra**  
Középen táplált szimmetrikus antenna árameloszlásának meghatározása a távvezeték-analógiával



Az árameloszlás ezzel a közelítéssel:

$$I(z) = \begin{cases} I_0 \sin \beta(l - z), & z > 0 \\ I_0 \sin \beta(l + z), & z < 0 \end{cases}, \quad (8.63) - (8.64)$$

vagy egyetlen összefüggésben:

$$I(z) = I_0 \sin \beta(l - |z|), \quad (8.65)$$

ahol az antenna hossza  $2l$ . Ezzel a szimmetrikus gerjesztést biztosítottuk.

(8.65)-öt behelyettesítve (8.62)-be,  $r_0$  helyére az általános  $r$ -t írva, és némi rendezés után az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$E_{\vartheta} = j \frac{120\pi I_0}{\lambda} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sin \vartheta \int_0^l \sin \beta(l - z) \cos(\beta z \cos \vartheta) dz. \quad (8.66)$$

Az integrálás – ritka eset – zárt alakban elvégezhető:

$$E_{\vartheta} = j60I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} \frac{\cos(\beta l \cos \vartheta) - \cos \beta l}{\sin \vartheta}. \quad (8.67)$$

Ha  $l < 0,25\lambda$ , az antenna rövidebb, mint fél hullámhossz, az  $I_0$  árammaximum nincs az antennán. Ilyenkor a bemeneti  $I(0)$  árammal számolhatunk, ahol

$$I(0) = I_0 \sin \beta l. \quad (8.68)$$

Ezzel

$$E_{\vartheta} = j60 \frac{I(0)}{\sin \beta l} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \frac{\cos(\beta l \cos \vartheta) - \cos \beta l}{\sin \vartheta}. \quad (8.69)$$

(8.68), ill. (8.69) felhasználásával a szimmetrikusan táplált egyenes antennák (a szaknyelv ezeket is dipólusoknak nevezi) iránykarakterisztikája ill. sugárzási ellenállása és irányhatása számítható.

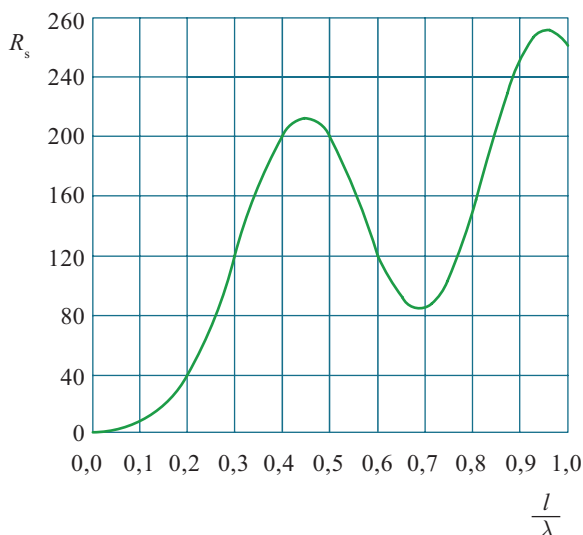
Az iránykarakterisztika számításához kimutatható, hogy a fő sugárzási irány  $l/\lambda \leq 0,625$  esetén  $\vartheta_{\max} = 90^\circ$ , az antennára merőleges. Eddig az antennahosszig tehát

$$|E_{\max}| = 60I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} (1 - \cos \beta l), \quad (8.70)$$

és így az amplitúdó iránykarakterisztikája:

$$F(\vartheta) = \frac{\cos(\beta l \cos \vartheta)}{(1 - \cos \beta l) \sin \vartheta}. \quad (8.71)$$

A sugárzási ellenállás és az irányhatás általában nem fejezhető ki zárt alakban, de numerikus integrálással meghatározható. Az eredményeket diagramon ábrázolva (8.11. ábra) látható, hogy pl.  $l/\lambda = 0,25$  esetén  $R_s = 73,2 \text{ W}$ ,  $D = 1,64$  (2,15 dB).



8.11. ábra  
A sugárzási ellenállás

# ELEKTROMÁGNESES HULLÁMOK TERJEDÉSE

25 Az izotróp tulajdonság azt jelenti, hogy a közeg elektromágneses jellemzői irányfüggetlenek.

## SÍKHULLÁMOK

Keressük a Maxwell-egyenletek legegyszerűbb megoldását homogén, izotróp<sup>25</sup> közegben, töltések és áramok nélkül.

A 3. fejezetben láttuk, hogy a Maxwell-egyenletek ilyenkor a következő összefüggésekhez vezetnek:

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0; \quad (9.1)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (9.2)$$

Ezek az egyenletek homogén hullámeqyenletek. A legegyszerűbb megoldás keresésénél tételezzük fel, hogy az  $x$  koordináta-tengely irányában terjed a hullám. Ekkor a fenti egyenletek az alábbi egyenletekbe mennek át:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2};$$

$$i = x, y, z, \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2}.$$

A (9.3)-ban szereplő egy térbeli dimenziós hullámeqyenlet megoldását egyebek között a távvezetékek elméletéből jól ismerjük. Minden megoldás

$$\left. \begin{array}{l} E_i \\ H_i \end{array} \right\} = f_1 \left( t - \frac{x}{v} \right) + f_2 \left( t + \frac{x}{v} \right) \quad (9.4)$$

alakú, ahol  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{n}$ .

A megoldás csak az  $x$  koordinátától, a terjedés irányától függ. Az arra merőleges síkban tehát a térerősség értéke azonos. Ezért a hullámeqyenlet ezen megoldását *síkhullámnak* nevezzük.

Az elektromos és mágneses térre vonatkozó egyenletek megoldásai nem függetlenek egymástól. Hogy mely megoldások tartoznak össze, csak az eredeti Maxwell-egyenletekből dönthető el.

(Figyelem! Az egyenletek egyszerűsítésekor könnyebben megoldható egyenleteket kaptunk, de olyan információ veszett el, amit csak az eredeti egyenletek felhasználásával tudunk megszerezni!)

Írjuk az I. Maxwell-egyenletet a következő alakba:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9.5)$$

$$\text{Esetünkben } \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0. \quad (9.6)$$

míg

$$\frac{\partial}{\partial x} = \mp \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (9.7)$$

Ezt (9.5)-be helyettesítve:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mp \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mp \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}. \quad (9.8)$$

A kifejezés jobb oldalán álló determináns az  $\mathbf{i}$  egységvektor és a  $\mathbf{H}$  vektoriális szorzata:

$$\mp \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{i} \times \mathbf{H}] = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9.9)$$

A derivált mennyiségek egy időben állandó konstanstól eltekintve azonosak. Hullámjelenségnél az állandó (statikus, stacionárius) térerősségeknek nincs szerepe, tehát zérusnak tekinthetjük őket.

Felhasználva a sebesség kifejezését:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{H} = \mp \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}, \quad (9.10)$$

illetve hasonló módon a II. Maxwell-egyenletből

$$\mathbf{i} \times \mathbf{E} = \mp \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H}. \quad (9.11)$$

A felső előjel a pozitív, az alsó előjel a negatív irányba terjedő hullám esetén érvényes.

A (9.10) és (9.11) egyenletekből a homogén és izotróp (és tegyük hozzá: veszteségmentes) közegben terjedő síkhullám következő tulajdonságai olvashatók ki:

- az elektromos és mágneses térerősség, valamint a terjedés irányába mutató vektor kölcsönösen merőleges egymásra és ebben a sorrendben ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{i}$ ) jobb sodrású rendszert alkotnak;
- az elektromos és mágneses térerősségvektor abszolút értékének hányadosa az egy irányban terjedő hullám bármely pontjában azonos:

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0, \quad (9.12)$$

ami a közeg *hullámimpedanciája*.

Vákuumban:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 377 \, \Omega \quad (\cong 120\pi \, \Omega). \quad (9.13)$$

Visszatérve az *a)* tulajdonságra, azt mondjuk, hogy a síkhullám *transzverzális hullám*, azaz a térerősség merőleges a terjedés irányára. Miután ez mindkét térerősségre igaz, az elektromágneses síkhullámot transzverzális elektromos-mágneses hullámnak nevezzük. Rövid jelölése: TEM.

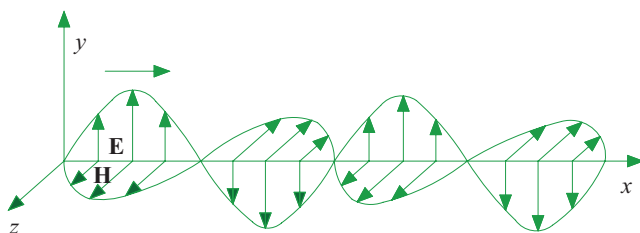
Tiszta szinuszos időbeli lefolyás esetén az  $x$  tengely mentén haladó hullám térerősségei az alábbi módon változnak:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega\left(t \mp \frac{x}{v}\right)}, \quad (9.14)$$

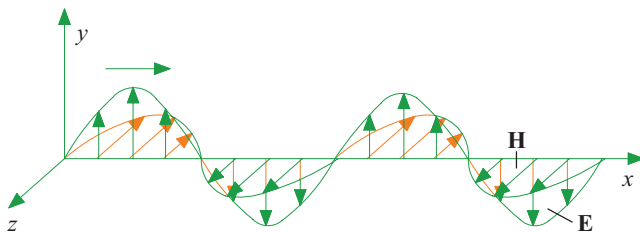
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{j\omega\left(t \mp \frac{x}{v}\right)}. \quad (9.15)$$

Ezek a hullámok a 9.1a és 9.1b ábrán láthatók.

**9.1a ábra**  
A villamos és a mágneses térerősség térbeli eloszlása síkhullámban, ha a hullám jobbra halad



**9.1b ábra**  
A villamos és a mágneses térerősség térbeli eloszlása síkhullámban, ha a hullám balra halad

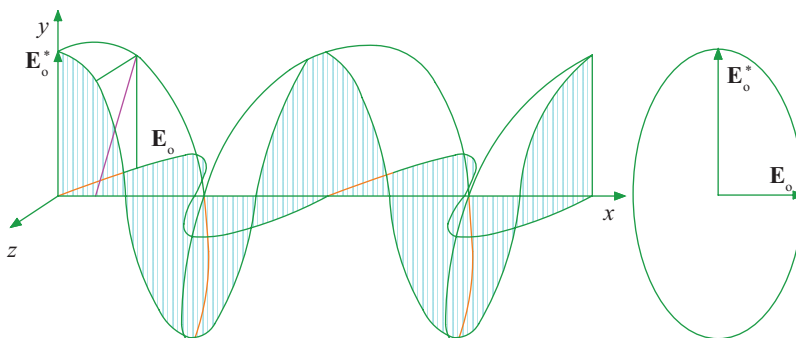


A hullámoknak ez az ábrázolása pontosan megegyezik Maxwell hatalmas, 1873-ban megjelent művének, „*A Treatise on Electricity and Magnetism*” (Értekezés az elektromosságról és mágnességről) egyik ábrájával. Maxwell már az 1865-ben írt tanulmányában kifejtette, hogy a fény elektromágneses hullám, de a *Treatise* megjelenése idejében ez az erős sejtés bizonyossággá vált.

Foglaljuk össze, melyek azok a tulajdonságok, amelyek ezt alátámasztják.

- a) a terjedés sebessége szabad térben igen jól megegyezik a fénysebesség értékével<sup>26</sup>;
- b) a fény hullámjelenség, amit az *interferencia* és *elhajlás* bizonyít;
- c) a fény transzverzális hullám, amit a *polarizáció* jelensége bizonyít.

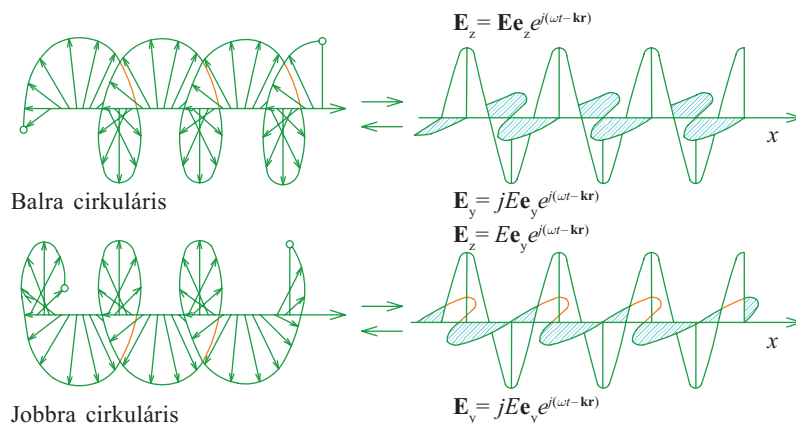
A TEM-hullámok polarizációját az a sík jellemzi (polarizáció síkja), amelyet az **E** vektor és a terjedés iránya kijelölnek. Két, egymáshoz képest fázisban eltolt, azaz azonos irányban haladó szinuszos síkhullám eredője azonban olyan hullám, amelyben **E** forog és hossza is változik: végpontja egy elliptikus csavarvonalat ír le (9.2a ábra).



9.2a ábra  
Elliptikusan polározott hullám

Ezt a hullámformát *elliptikusan polározott* hullámnak nevezzük. Figyeljük meg: a TEM-tulajdonság most sem változik.

Speciális esetben a forgó elektromos vektor a hosszát nem változtatja. Ekkor végpontja a terjedés során állandó sugarú (cirkuláris) csavarvonalat ír le. Ez a *cirkulárisan (körösen) polározott* hullám esete (9.2b ábra bal oldala).



9.2b ábra  
A cirkulárisan polározott hullámok különböző fázisú, de azonos amplitúdójú lineárisan polározott hullámokból tevődnek össze. Ezek eredője ismét lineárisan polározott hullám

Összefoglalva: sík-, elliptikus és cirkuláris polarizációt különböztetünk meg. A két utóbbi előállítható sík polarizációjú hullámok szuperpozíciójaként. A síkban polározott fénycsugár előállítása, ill. detektálása jól ismert volt már Maxwell előtt is.

Mi okozott mégis kételyt? Ez éppen az ún. *Maxwell-összefüggés*. A (9.4) egyenletben szereplő törésmutató, a gyakorlatban az amúgy optikailag átlátszatlan ferromágneses anyagok kivételével  $\mu_r = 1$  helyettesítéssel:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \quad (9.16)$$

Maxwell idejében a következő adatokat ismerték, pl. vízre:  $n = 1,33$ ,  $\varepsilon_r = 80$ . Az ellentmondás okát ma már tudjuk: az  $\varepsilon_r$  sztatikus mérés eredményeként született, ugyanakkor pedig frekvenciafüggő. Ma a (9.16) Maxwell-összefüggést a teljes spektrumban mérésrel igazolni tudjuk.

A „teljes spektrum” felveti a Maxwell-egyenletek érvényességének határait. Ezeket a határokat a növekvő frekvenciáknál a kvantumos hatások megjelenése okozza. A kvantumjelenségeket a Maxwell-egyenletek már nem írják le helyesen.

A síkhullámban terjedő energia Poynting-vektor segítségével könnyen számítható. A kölcsönös merőlegességből következik, hogy a vektor abszolút értéke a térerősségvektorok abszolút értékének szorzata, és iránya a terjedési irány. Értéke:

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{E}||\mathbf{H}| = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 + \mu H^2). \quad (9.17)$$

A magyarázat egyszerű: a felületegységen időegység alatt áthaladó energia éppen az egységnyi felületű,  $\nu$  hosszúságú hasámban található energia.

Létezik síkhullám? A választ (9.17) adja meg: nem! A terjedés irányára merőleges végtelen kiterjedésű síkon ugyanis végtelen lenne az átáramló teljesítmény, ami fizikailag lehetetlen. Miért foglalkozunk hát a síkhullámmal? Ennek legalább két oka van. A *gyakorlati*: közelítőleg létezhet, véges kiterjedésben. Az antennák tárgyalásánál láttuk, hogy a távoli térkomponensek tulajdonságai azonosak a síkhullám terének tulajdonságaival. Ezért különösen a fő sugárzási irány környezetében, véges felületen, elegendő távolságban a hullám közelíthető síkhullámmal. Ezért például az adótól távoli vételi tulajdonságok számításánál a hullámokat (a vevőantenna környezetében) síkhullámnak tekintjük.

A *pedagógiai ok* pedig: a síkhullám a legegyszerűbb, a Maxwell-egyenleteknek eleget tevő elektromágneses hullám. Ezért különösen alkalmas az elektromágneses hullámok tulajdonságainak bemutatására. Egy tudománytörténeti kérdés kívánczik még ide. Ha Maxwell már 1865-ben leírta az elektromágneses hullám tulajdonságait, mi okozta azt a húsz év késedelmet, amíg 1886-ban Heinrich Hertz végül is mesterségesen elő tudta állítani azt – ahogyan ezt az előző fejezetben láttuk. A válasz: Maxwell és az elmélet háttérét képező megfontolások nem adtak útmutatást a hullámok keltésére. Hertz felkészültsége kellett az elmélet olyan mélységű megértéséhez, amely az áramot és a töltést úgy rendelte felhasználni, hogy a gerjesztésről „leszakadó” elektromágnes hullám megszülessen.

És a fény? A látható fény frekvenciáján a hullámok keltése már olyan mikrofizikai folyamatok eredménye, amelyekre a *fenomenologikus*, a jelenségeket makroszkopikus szinten leíró Maxwell-elmélet nem adott közvetlen magyarázatot.

## A SÍKHULLÁMOK TÁVVEZETÉKMODELLJE

Ha a (9.1) és (9.2) egyenletek levezetésénél az eltolási áram mellett a  $\sigma \mathbf{E}$  vezetési áramot is figyelembe vesszük, az egyenletek alakja kismértékben módosul. Például az elektromos térerősségre és csak  $x$  irányú terjedésre:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (9.18)$$

Hasonlítsuk ezt össze a veszteséges távvezeték feszültségére felírt (7.13) egyenlettel:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (CR + GL) \frac{\partial u}{\partial t} - LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (9.19)$$

Hasonló egyenleteknek tesz eleget  $\mathbf{H}$  és  $i$ . Az egyenletekből a következő analógia olvasható ki:

$$\mathbf{E} \rightarrow u, \quad \mu \rightarrow L, \quad \varepsilon \rightarrow C, \quad \sigma \rightarrow G, \quad R \rightarrow 0 \text{ és } \mathbf{H} \rightarrow i. \quad (9.20)$$

Ez az analógia az alapegyenletekre is igaz  $x$  irányú terjedés esetén  $\mathbf{E}$ -nek csak  $y$  irányú,  $\mathbf{H}$ -nak csak  $z$  irányú komponense van. Az I. és II. Maxwell-egyenlet és az analóg táviróegyenletek a következők:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \sigma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}; & -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gu + C \frac{\partial u}{\partial t}; \\ -\frac{\partial E_y}{\partial x} &= \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}; & -\frac{\partial u}{\partial x} &= L \frac{\partial i}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

A szinuszos váltakozású hullámokra felírt egyenletek analógiájából következik, hogy például a terjedési együttható és a hullámimpedancia a síkhullámokra is definiálható:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}; \quad (9.22)$$

$$\frac{E_y^+}{H_z^+} = Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}; \quad (9.23)$$

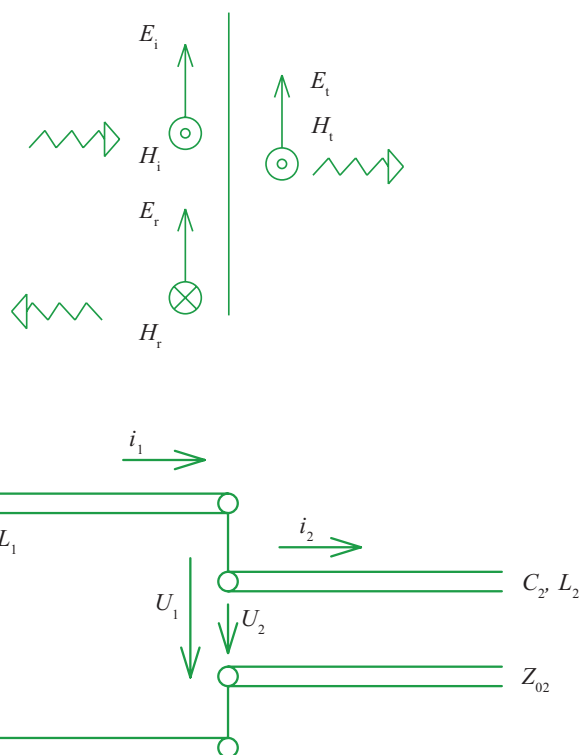
illetve veszteségmentes esetben:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}; \quad (9.24)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (9.25)$$

Az analógia akkor is alkalmazható, ha a közeg inhomogén, de inhomogenitása csak  $x$ -től függ. A különböző tulajdonságú térrészeket elválasztó felületek ilyenkor merőlegesek a terjedés irányára. Következésképpen  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{H}$  párhuzamosak az elválasztósíkkal. Ezért a tangenciális komponensek folytonossága és a távvezetékmodell folytonossági feltételei megfeleltethetők egymásnak (9.3. ábra).

A beeső hullám reflexiója az analóg modell alapján könnyen számítható (9.3. ábra):



9.3. ábra

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_{t2} & U_1 &= U_2, \\ H_{t1} &= H_{t2} & I_1 &= I_2. \end{aligned} \quad (9.26)$$

A reflexió tényező:

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{01}}. \quad (9.27)$$

A transzmissziós tényező:

$$t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}. \quad (9.28)$$

A két mennyiség láthatóan nem független:

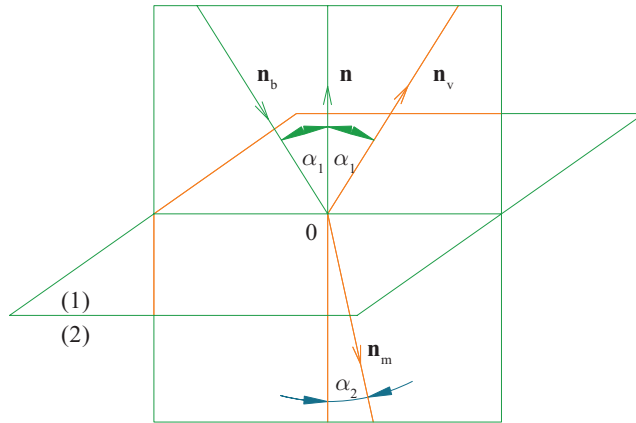
$$t = 1 + r. \quad (9.29)$$

A kifejezés fizikai tartalma éppen a tangenciális komponensek folytonosságát fejezi ki:

$$E_t = E_i + E_r \quad (9.30)$$

Merőleges beesés esetén a síkhullám visszaverődése és behatolása a távvezetékmodell és az impedancia alkalmazásával tárgyalható.

Ferde beesés esetén a hullám felbontható egy a határfelületre merőlegesen haladó és egy azzal párhuzamosan haladó hullámra. A folytonossági feltételek teljesítését is figyelembe véve a következő összefüggésekre jutunk. A 9.4. ábrán tüntetjük fel a beeső, visszaverődött és a közegbe behatoló hullámok terjedési irányát, és a beesési merőlegessel ( $\mathbf{n}$  vektor) bezárt szögét.



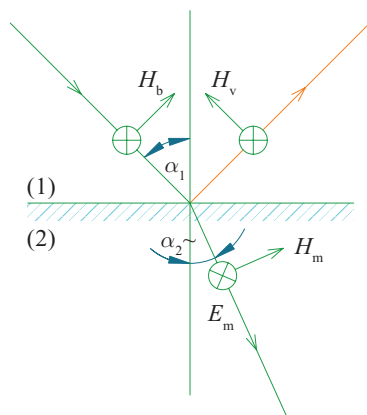
9.4. ábra  
Síkhullámok  
törésványának  
levezetéséhez

A folytonossági feltételek kielégítése megköveteli, hogy a felülettel párhuzamosan haladó komponens fázissebessége azonos legyen a két közegben. Ennek közvetlen következménye a *Descartes–Snell* törési törvény:

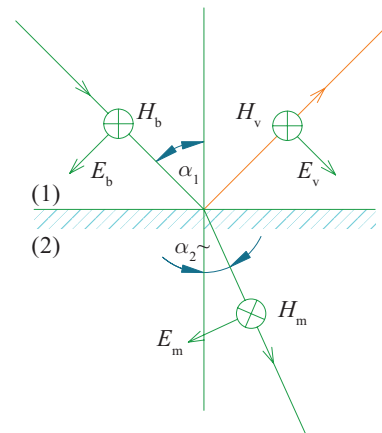
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{9.31}$$

ahol  $n_1$  és  $n_2$  a közegek törésmutatója.

A folytonossági feltételek érvényesítésénél figyelembe kell vennünk a hullám polarizációját. A polarizációt itt a belső hullám terjedési iránya ( $\mathbf{n}_b$ ) és a beesési merőleges ( $\mathbf{n}$ ) által meghatározott síkhoz viszonyítjuk. Ebben az értelemben beszélünk „merőleges” (9.5. ábra) és „párhuzamos” (9.6. ábra) polarizációról.



9.5. ábra  
A villamos térerősség  
merőleges a beesési  
síkra



9.6. ábra  
A villamos térerősség  
a beesési síkban fekszik

Merőleges polarizációnál az elektromos térre vonatkozó peremfeltétel:

$$E_b + E_v = E_m. \tag{9.32}$$

Nem túl bonyolult számítással:

$$\frac{E_v}{E_b} = \frac{\cos \alpha_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2} - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \alpha_1}}. \quad (9.33)$$

Párhuzamos polarizációnál a folytonossági feltétel a tangenciális komponensre:

$$(E_b + E_v) \cos \alpha_1 = E_m \cos \alpha_2. \quad (9.34)$$

Ebből

$$\frac{E_v}{E_b} = \frac{\cos \alpha_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1} - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1} - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \sin^2 \alpha_1}}. \quad (9.35)$$

(9.33)–(9.35) a *Fresnel-képletek*, a visszaverődött hullám térerősségét megadó összefüggések.

Érdekes speciális eset, ha a Fresnel-képletben a számláló eltűnik. Ilyenkor a visszavert hullám amplitúdója zérus, nincs visszaverődés.

Fizikailag a  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$  esetben ez csak párhuzamos polarizációjú beesés esetén következhet be.

Ekkor

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (9.36)$$

Az így definiált szöget *Brewster-szögnek* nevezzük.

Különleges eset állhat elő, ha  $n_2 < n_1$ , azaz  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , és a beesési szög nagyobb, mint az alábbi egyenlet által definiált határszög:

$$\sin \alpha_1 > \sin \alpha_h = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (9.37)$$

A (9.31) egyenletből következik, hogy:

$$\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 \frac{n_1}{n_2} > \frac{n_2}{n_1} \frac{n_1}{n_2} = 1. \quad (9.38)$$

Ez az összefüggés valós  $\alpha_2$  szöggel nem elégíthető ki. Mi történik ilyen esetben?

A (9.38)-ból:

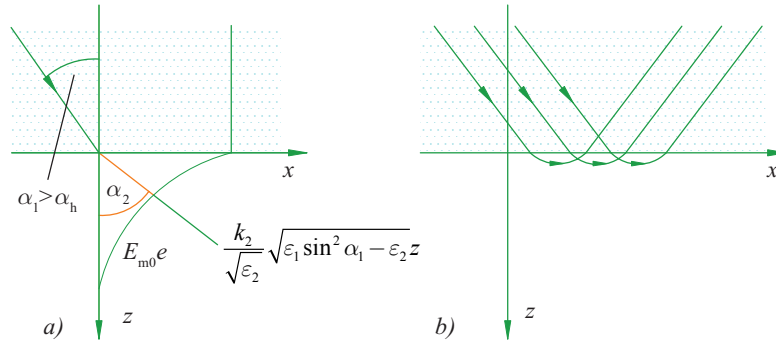
$$\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1 \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)} = -j \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \sqrt{\varepsilon_1 \sin^2 \alpha_1 - \varepsilon_2}. \quad (9.39)$$

A megtört hullámot

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_{m0} e^{j(\omega t - \beta \mathbf{n}_m \mathbf{r})} \quad (9.40)$$

alakban keressük, ahol  $\mathbf{n}_m$  a megtört hullám terjedési irányába mutató egységvektor,  $\mathbf{r}$  pedig a helyvektor a beesési síkban.

**9.7. ábra**  
Teljes visszaverődés  
a) Az  $\mathbf{E}_{m0}$  amplitúdó a 2. közegben exponenciálisan eltűnik, z irányban nincs hullámterjedés  
b) A sugarak útjának sematikus ábrázolása



Figyelembe véve, hogy a 9.7. ábra koordináta-rendszerében

$$\beta_2(\mathbf{n}_m \mathbf{r}) = \beta_2(x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2), \quad (9.41)$$

az elektromos térerősség az alábbi alakba írható:

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_{m0} e^{j\omega t} e^{j\beta_2 \left( x \sin \alpha_2 - \frac{j}{\sqrt{\epsilon_2}} \sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \alpha_1 - \epsilon_2} z \right)} = \mathbf{E}_{m0} e^{j(\omega t - \beta_2 x \sin \alpha_2)} e^{-\frac{\beta_2}{\sqrt{\epsilon_2}} \sqrt{\epsilon_1 \sin^2 \alpha_1 - \epsilon_2} z}. \quad (9.42)$$

A „megtört” hullám azonos fázisú és azonos amplitúdójú síkjai nem esnek egybe. Utóbbiak párhuzamosak a határolósíkkal. A határolósíkra merőleges irányban azonban nincs terjedés a közegben, az amplitúdó exponenciálisan eltűnik. Az ilyen típusú hullámot *inhomogén* síkhullámnak nevezzük.

A jelenséget *teljes visszaverődésnek* (totálreflexió) nevezzük. Érdekes eredményünk, hogy – hullám teljes visszaverődésénél is behatol a ritkább közegbe, csak a felülettől távolabb gyakorlatilag megszűnik.

## SÍKHULLÁM VEZETŐ KÖZEGBEN

A véges vezetőképességű közegben a hullámegyenlet tartalmazni fogja a veszteséget reprezentáló,  $\sigma$  vezetőképességgel felírt tagot. A távvezetékmodell alapján a terjedési együttható és a közeg hullámimpedanciája

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta; \quad (9.43)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}. \quad (9.44)$$

A hullám amplitúdója a terjedés irányában exponenciálisan csillapodik. Pozitív irányban terjedő hullámra:

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}, \quad (9.45)$$

ahol (9.43) alapján:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} - 1 \right)}; \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} + 1 \right)}. \quad (9.46)$$

Hogy a közeg mennyire tekinthető vezetónak, a  $\sigma/\omega\varepsilon$  viszonytól függ. Ez gyakorlatilag a vezetési áramsűrűség és az eltolási áramsűrűség hányadosa. A frekvencia növekedésével a közegek viselkedése egyre inkább szigetelő jelleget mutat. Igen nagy frekvencián a hullámparaméterek a kis veszteségű távvezeték tulajdonságával rendelkeznek:

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \beta = \omega \sqrt{\varepsilon \mu \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \right]}, \quad (9.47)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \left( 1 + j \frac{\sigma}{2\omega \varepsilon} \right)}. \quad (9.48)$$

A fázissebesség,

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu} \left[ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \right]} \quad (9.49)$$

mindig kisebb a veszteségmentes közegben mértnél.

Fémek esetében  $\sigma \gg \omega \varepsilon$ . Ekkor jó közelítéssel:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}} = \frac{1}{\delta}, \quad (9.50)$$

itt  $\delta$  a behatolási mélység. A térerősségek amplitúdója exponenciálisan csökken, és  $\delta$  távolságban a felületen mért e-ad része.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j\omega \left( t - \frac{x}{\delta \omega} \right)}. \quad (9.51)$$

A fázissebesség,  $v_f = \delta \omega$  általában jóval kisebb a fénysebességnél.

A hullámhossz:

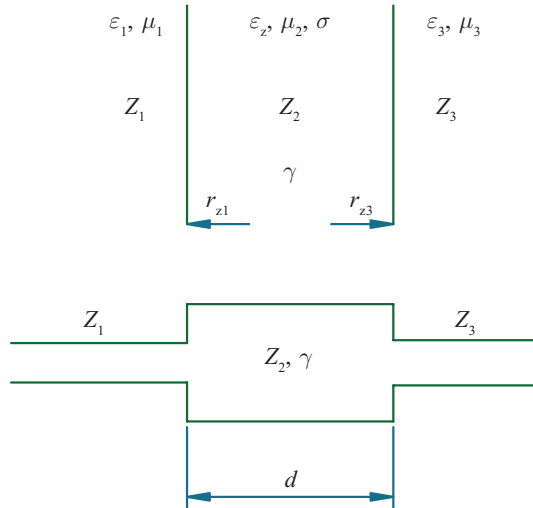
$$\lambda = 2\pi\delta. \quad (9.52)$$

Ami azt jelenti, hogy egy hullámhossznyi távolságban a felülettől a hullám amplitúdója  $e^{-2\pi} = 0,002$ -ed részére csökken, gyakorlatilag eltűnik.

A hullámimpedancia:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sigma\delta}. \quad (9.53)$$

A jól vezető anyagok, fémek azon tulajdonságát, hogy bennük az elektromágneses hullám intenzitása ilyen gyorsan csökken, felhasználjuk árnyékolásra. Az árnyékolás egy térrész elszigetelése az elektromágneses hatásoktól. Ennek lehetséges megoldása az árnyékolandó térfogat körülvétele jól vezető fémlemezzel. Az árnyékolás hatásfokát síkhullám csillapításával modellezzük (9.8. ábra).



9.8. ábra

A réteg a sokszoros reflexió hatására a bemeneten

$$E_{\text{összes}} = \frac{t_{12} E_{be}}{(1 - r_{21} r_{23} e^{-2\gamma d})} \quad (9.54)$$

térerősség alakul ki. Ez azt jelenti, hogy  $E_{\text{összes}} = E^+|_{\text{falhatáron belül}}$ , ahogyan ezt a (7.181) összefüggésnél is láttuk. A képletben  $E_{be}$  a bal oldali féltérből érkező hullám amplitúdója a határfelület bal oldalán, míg

$$t_{12} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}; \quad (9.55)$$

$$r_{21} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad (9.56)$$

$$r_{23} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}. \quad (9.57)$$

(9.53) akkor érvényes, ha  $|r_{21} r_{23} e^{-2\gamma d}| < 1$ .

A kimenő tér erőssége a réteg csillapításától és a kimeneti transzmissziós tényezőtől függ:

$$E_{ki} = t_{23} E_{\text{összes}} e^{\gamma d}, \quad (9.58)$$

ahol

$$t_{23} = \frac{2Z_3}{Z_3 + Z_2}. \quad (9.59)$$

Az eredő transzmissziós tényező tehát:

$$T = \frac{E_{ki}}{E_{be}} = \frac{t_{12}t_{23}e^{-\gamma d}}{(1 - r_{21}r_{23}e^{-2\gamma d})}. \quad (9.60)$$

Az árnyékolás hatásosságát  $T$  abszolút reciprokának logaritmikus egységben kifejezett értéke adja:

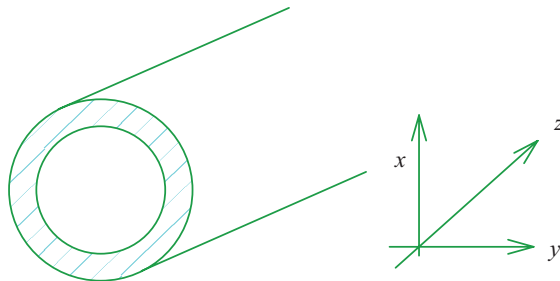
$$\eta = 20 \lg \frac{1}{|T|} \text{ dB}. \quad (9.61)$$

# CSŐTÁPVONALAK, ÜREGREZONÁTOROK

Akár rövid távolságra is, a nagyfrekvenciás energia átvitele szabadon terjedő elektromágneses hullámmal nagy teljesítmények esetén rossz hatásfokú. A terjedő energiát szívesen „bezárnánk.”

Erre szolgál a *csőtápvonal*. A csőtápvonal igen jó (elvben végtelen nagy) vezetőképességű anyagból készült zárt, egyenes henger. A körülfogott térrészben a cső keresztmetszete alakjától és méretétől függően nagyfrekvenciás elektromágneses hullámok terjedhetnek a tengely irányában.

Válasszuk a henger tengelyével párhuzamosan a  $z$  koordinátát (10.1. ábra), ezt nevezzük longitudinális iránynak. Az erre merőleges  $x$ - $y$  síkot pedig transzverzális síknak.



10.1. ábra

A cső belsejében az elektromágneses tér forrásmentes. Ezért a vektorpotenciálra vonatkozó tér vákuumban:

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (10.1)$$

Homogén kitöltés esetén  $\varepsilon_0 \mu_0$ -t  $\varepsilon \mu$ -vel helyettesíthetjük.

$\rho = 0$  következtében a  $\varphi = 0$  választás megengedett, a skalárpotenciál eltűnik. Ez (8.13) lehetséges megoldása. Ezzel a (8.6) Lorentz-feltételből következik, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (10.2)$$

Ezzel a független vektorkomponensek száma kettőre csökkent, a harmadik egy konstans erejéig (10.2)-ből kifejezhető. Általános felismerésre jutottunk: forrásmentes elektromágneses tér két alkalmasan választott skalárfüggvény segítségével előállítható.

A térerősségek (8.3) felhasználásával:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad (10.3)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A} \quad (10.4)$$

alakban számíthatók.

Tiszta szinuszos időfüggés  $\left(\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega\right)$  esetén (10.3) és (10.4) alakja a komplex amplitúdókra:

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A}; \quad (10.5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A}; \quad (10.6)$$

és a vektorpotenciál komplex amplitúdója a

$$\Delta \mathbf{A} + k_0^2 \mathbf{A} = 0 \quad (10.7)$$

vektorális Helmholtz-egyenletnek tesz eleget, ahol

$$k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c}. \quad (10.8)$$

$k_0$  a *szabadtéri hullámszám*. (Ezt a mennyiséget jelöltük eddig  $\beta$ -val.)

A csőtápvonalban a longitudinális,  $z$  irányban haladó, hullám alakú megoldásokat keressük. Ezek alakja:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y) e^{j\omega t - \gamma z}, \quad (10.9)$$

ahol

$$\gamma = \alpha + j\beta. \quad (10.10)$$

A továbbiakban  $\mathbf{A}$  mindig a transzverzális koordinátáktól függő amplitúdót jelöli. A vektorpotenciál (és így a térkomponensek)  $z$  szerinti deriváltjára:

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\gamma; \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \gamma^2. \quad (10.11a, b)$$

Bontsuk fel a Laplace-operátort transzverzális és longitudinális koordinátáktól függő operátorra (10.11) figyelembevételével:

$$\Delta = \Delta_t + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_t + \gamma^2. \quad (10.12)$$

A (10.7) egyenlet ezzel a jelöléssel:

$$\Delta_t \mathbf{A} + (k_0^2 + \gamma^2) \mathbf{A} = 0 \quad (10.13)$$

alakba írható, azaz

$$\Delta_t \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0 \quad (10.14)$$

alakú transzverzális, síkbeli Helmholtz-egyenletre jutottunk, ahol:

$$k^2 = k_0^2 + \gamma^2. \quad (10.15)$$

A vektorpotenciált két részre bontjuk oly módon, hogy  $\mathbf{A}$  transzverzális komponense az  $x$ - $y$  síkban rotációmentes, ill. divergenciamentes legyen. Ebből a két vektorból a transzverzális komponens mindig előállítható. A transzverzális komponens ismeretében a longitudinális komponens (10.2) értelmében egy állandó erejéig előállítható.

1. A transzverzális komponense *rotációmentes*. Ebben az esetben

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0. \quad (10.16)$$

(10.16) egyenértékű állítás a rotáció longitudinális komponensének eltűnésével:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = 0, \quad (10.17)$$

azaz (10.6) alapján  $H_z = 0$ , a mágneses tér longitudinális komponense zérus. Más szóval a mágneses térnek csak transzverzális komponense van, ezért *transzverzális mágneses (TM) típusú térnek* nevezzük.

(10.16) alapján létezik olyan, a transzverzális síkban értelmezett skalárfüggvény, amellyel

$$A_x = \frac{\gamma}{j\omega} \frac{\partial \varphi_e}{\partial x}; \quad A_y = \frac{\gamma}{j\omega} \frac{\partial \varphi_e}{\partial y}, \quad (10.18 \text{ a,b})$$

azaz

$$\mathbf{A}_t = \frac{\gamma}{j\omega} \text{grad}_t \varphi_e \quad (10.19)$$

alakú a vektorpotenciál transzverzális komponense.

A (10.2) feltételből:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0, \quad (10.20)$$

ahonnan  $\text{div}_t \text{grad}_t = \Delta_t$  és  $\frac{\partial A_z}{\partial z} = -\gamma A_z$  felhasználásával:

$$A_z = \frac{1}{j\omega} \Delta_t \varphi_e. \quad (10.21)$$

A  $\varphi_e$  függvény (10.14) alapján eleget tesz a síkbeli Helmholtz-egyenletnek:

$$\Delta_t \varphi_e + k_e^2 \varphi_e = 0, \quad (10.22)$$

ahol az  $e$  indexet a TM-hullámok megkülönböztetésére használjuk.

A differenciálegyenlet megoldásához ismernünk kell a peremfeltételeket. Mivel (10.5) értelmében  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{A}$  arányosak, (10.21) és (10.22) alapján pedig  $E_z$  arányos  $\varphi_e$ -vel, a transzverzális keresztmetszet kontúrján (a cső falán) a

$$\varphi_e = 0 \quad (10.23)$$

feltételnek kell teljesülnie. Ekkor a kontúr „ekvipotenciális”, tehát (10.19) értelmében  $\mathbf{A}_t$  és így  $\mathbf{E}_t$  is merőleges a kontúrra, azaz a cső falára. Az elektromos térre vonatkozó

peremfeltételek tehát (10.23) fennállása esetén teljesülnek. A mágneses térnek csak transzverzális komponense van, amelyet a (10.6)-ból, (10.21) és (10.22) felhasználásával a

$$\mathbf{H}_t = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(A_z \mathbf{e}_z) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \left[ \left( -\frac{1}{j\omega} k_e^2 \varphi_e \right) \mathbf{e}_z \right] \quad (10.24)$$

összefüggésből kapunk a  $\text{rot}(u\mathbf{v}) = u \text{ rot } \mathbf{v} + \text{grad } u \times \mathbf{v}$  azonosság felhasználásával:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{e}_z \times \frac{k_e^2}{j\omega\mu_0} \text{grad}_t \varphi_e. \quad (10.25)$$

Az előzőekben beláttuk, hogy  $\text{grad}_t \varphi_e$  merőleges a kontúrra,  $\mathbf{H}_t$  tehát párhuzamos a kontúrral. Valamennyi peremfeltétel tehát teljesül.

Nagyon fontos részhez értedtünk. A (10.22) egyenlet a (10.23) peremfeltétellel csak  $k_e^2$  meghatározott értékei mellett oldható meg. Ezek az értékek a *sajátértékek*. Az egyenlet ún. *sajátérték-feladathoz* vezet. A sajátértékhez tartozó megoldásfüggvények a *sajátfüggvények*. Az adott feladatnak megszámlálhatóan végtelen sok, monoton sorba rendezhető pozitív diszkrét sajátértéke van.

A sajátértékhez tartozó sajátfüggvényekből származtatott terek a *módusok*. Esetükben TM módusoknál beszélhetünk. (Miótán az elektromos tér longitudinális komponense arányos  $\varphi_e$ -vel, amelyből az egész tér származtatható, régebben ezeket a módusokat E típusú módusoknak is nevezték.)

2. A transzverzális komponens *divergenciamentes*, más szóval:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0. \quad (10.26)$$

Ekkor (10.2) és (10.11a) értelmében:

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = -\gamma A_z = 0, \quad (10.27)$$

azaz  $\mathbf{A}$  és így (10.5) alapján  $E$  longitudinális komponense is zérus:

$$E_t = E_z = 0. \quad (10.28)$$

$$A_x = \mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}; \quad A_y = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}, \quad (10.29a, b)$$

azaz

$$\mathbf{A}_t(x, y) = -\mu_0 \mathbf{e}_z \times \text{grad}_t \varphi_m, \quad (10.30)$$

és ezzel a választással (10.28) automatikusan teljesül.

A keresett skalárfüggvény most is eleget tesz a

$$\Delta_t \varphi_m + k_m^2 \varphi_m = 0. \quad (10.31)$$

egyenletnek.

Mivel (10.28)-nak megfelelően csak a tangenciális elektromos tér létezik, az pedig  $\mathbf{A}_t$ -vel arányos, a peremen a tér tangenciális komponense akkor tűnik el, ha ott

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial n} = 0. \quad (10.32)$$

(10.30) alapján (itt nem részletezett számítással) belátható, hogy:

$$\mathbf{H}_t = -\gamma \operatorname{grad}_t \varphi_m, \quad (10.33)$$

azaz (10.32) teljesítése esetén a peremen  $\mathbf{H}$ -nak csak tangenciális komponense lehet, beleértve a longitudinális komponenst is.

A longitudinális komponens a  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  feltételből számítható a (10.33) és (10.31) egyenletek felhasználásával:

$$H_t = H_z = k_m^2 \varphi_m. \quad (10.34)$$

Mivel ez a longitudinális komponens  $\varphi_m$ -mel arányos, ezt a teret  $H$  térnek is nevezik.

Érdekes elfajuló eset, ha a sajátérték zérus. A Green-tétel értelmében:

$$\int_A \varphi \Delta_t \varphi + (\operatorname{grad}_t \varphi)^2 dA = \oint_C \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl, \quad (10.35)$$

ami zérus sajátérték esetén  $\Delta_t \varphi = 0$  helyettesítéssel

$$\int_A (\operatorname{grad}_t \varphi)^2 dA = \int_C \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl \quad (10.36)$$

alakra egyszerűsödik.

Könnyen belátható, hogy egyszeresen összefüggő tartományban a (10.23) vagy a (10.32) homogén peremfeltételek esetén csak

$$(\operatorname{grad}_t \varphi)^2 = 0 \quad (10.37)$$

lehet az egész tartományban. Ez TM hullámnál  $\varphi = 0$  megoldásra, TE tartományban  $\varphi \equiv \text{konstans}$  megoldásra vezet. Terjedő hullám egyik esetben sem létezik.

Más a helyzet többszörösen összefüggő tartományban TE módusok esetén. Ekkor  $\varphi$  értéke a különböző kontúrokon eltérő lehet. Ilyenkor létezik megoldás. (10.34) értelmében azonban a mágneses térnek sem lesz longitudinális komponense. Ezért ezt a teret transzverzális elektromos mágneses (TEM) nevezzük. Ilyen tér alakulhat ki például koaxiális kábelben vagy mikroszalagvonalon.

A fenti gondolatmenetek szemléletesen elektrosztatikai analógiával is magyarázhatók. A  $\Delta \varphi = 0$  egyenlet ugyanis elektrosztatikai potenciálra érvényes. A peremfeltételek ilyenkor azt jelentik, hogy egy zárt, egyszeresen összefüggő térrész belsejében az elektrosztatikus térre vonatkozó peremfeltétel, első esetben 0 ekvipotenciális, második esetben pedig 0 normális irányú térkomponens. Az elektrosztatikus tér első esetben csak zérus potenciálú lehet, a második esetben pedig az

egész térrészben konstans a potenciál. Kétszeresen vagy többszörösen összefüggő térrész esetében az elektródák potenciálja eltérő lehet, ilyenkor létezik 0-tól különböző megoldás.

## FÁZISSEBESSÉG, DISZPERZIÓ, HATÁRFREKVENCIA

Valamennyi módus terjedési együtthatóját a (10.15) összefüggésből határozhatjuk meg:

$$\gamma^2 = k_{e,m}^2 - k_0^2, \quad (10.38)$$

ahonnan

$$\gamma = \sqrt{k_{e,m}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (10.39)$$

Az  $e, m$  indexek jelzik, hogy mindkét módusfajtára érvényes a fenti összefüggés. A fenti kifejezésben szembeötlő, hogy csak meghatározott frekvenciánál nagyobb frekvencián létezik terjedő hullám. Ez a frekvencia a *határfrekvencia*:

$$\omega_h = ck_{e,m}; \quad f_h = \frac{ck_{e,m}}{2\pi}. \quad (10.40)$$

A határfrekvencia tehát a sajátérték függvénye. Ezen frekvencia felett a terjedési együttható tiszta képzetes:

$$\gamma = j\beta = j\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{m,n}^2}, \quad (10.41)$$

ahonnan a fázistényező:

$$\beta = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_h^2}}{c}; \quad \omega > \omega_h = k_{m,n}c. \quad (10.42)$$

Egyszeresen összefüggő keresztmetszetű csőtápvonalban a legkisebb határfrekvencia és a következő határfrekvencia közötti frekvenciasávban csak egyetlen módus terjed, ez az adott keresztmetszetű csőtápvonal *alapl módusa*. Bizonyítható, hogy a legkisebb sajátérték így a legkisebb határfrekvencia is TE módushoz tartozik, ezért az alapl módus mindig TE módus. Többszörösen összefüggő, csőtápvonalban terjedő TEM módus határfrekvenciája zérus. Ilyen csőtápvonalon tetszőleges frekvenciájú hullám terjedhet. (Ez nem mond ellent az előző állításnak, hiszen a TEM módus elfajuló TE módus.)

A fázistényező frekvenciafüggése határozza meg a különböző frekvenciájú hullámok terjedési sebességét, a *fázissebességet*:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right)^2}}. \quad (10.43)$$

A fázissebesség függ a frekvenciától. Ez a jelenség a *diszperzió*: a különböző frekvenciájú hullámok „elszaladnak” egymástól, a sokfrekvenciájú jel terjedés közben eltorzul.

A fázistényező frekvenciafüggését leíró (10.41) egyenlet, illetve általánosabban a terjedési együttható frekvenciafüggését leíró (10.39) egyenlet a *diszperziós egyenlet*.

(10.43)-ból látható, hogy a fázissebesség minden nem elfajuló (TEM) módusra nagyobb, mint a fénysebesség. Mint korábban tárgyaltuk, ez nem ellentétes a speciális relativitáselmélettel. A fizikai tartalmat leíró csoportsebességnek azonban nem szabad felülmúlnia a fénysebességet<sup>27</sup>. A csoportsebességre csőtápvonalak esetén a

$$v_g = \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)^{-1} = c \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right)^2} \quad (10.44)$$

összefüggést kapjuk. Ez megfelel a fenti feltételnek. Csőtápvonalmódusokra:

$$v_f v_g = c^2. \quad (10.45)$$

Ez az összefüggés nem általános. Más diszperzív hullámokra a csoport- és fázissebesség szorzata eltérő lehet.

A fázissebesség ismeretében kifejezhetjük a csőben mérhető hullámhosszat is. Ezt  $\lambda_g$ -vel jelöljük, a g index a „guided” (vezetett) hullámformára utal:

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_h} \right)^2}}, \quad (10.46)$$

ahol  $\lambda$  a szabadtéri hullámhossz:

$$\lambda_h = \frac{2\pi}{k_{e,m}} \quad (10.47)$$

a *határhullámhossz*, a határfrekvenciához tartozó szabadtéri hullámhossz. Határhullámhossznál *nagyobb* szabadtéri hullámhossz esetén nincsen terjedés. Komolytalanul: a hullám nem fér be a csőbe!

Mi történik határfrekvenciánál kisebb frekvencián, illetve határhullámhossznál nagyobb hullámhosszon? Ilyenkor a terjedési együttható tiszta valós:

$$\gamma = \alpha = k_{e,m} \sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_h} \right)^2} = k_{e,m} \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_h}{\lambda} \right)^2}. \quad (10.48)$$

Valamennyi térkomponens komplex amplitúdója  $e^{-\alpha z} e^{j\omega t}$  alakban változik. Nincsen tehát terjedés, hanem stacionárius állapotban a csőtápvonal mentén exponenciálisan csökkenő amplitúdójú szinuszos rezgés alakul ki.

## A MÓDUSFÜGGVÉNYEK

Legyen  $\varphi_{e1}, \varphi_{e2}, \dots, \varphi_{ei}, \dots$  illetve  $\varphi_{m1}, \varphi_{m2}, \dots, \varphi_{mi}, \dots$  a (10.22) egyenlet (10.23) peremfeltételt kielégítő, ill. a (10.31) egyenlet (10.32) peremfeltételt kielégítő megoldása. Definiáljuk az

$$\mathbf{e}_{ei} = \text{grad}_i \varphi_{ei}, \quad (10.49)$$

$$\mathbf{h}_{ei} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{ei}, \quad (10.50)$$

<sup>27</sup> Ez az állítás veszteségmentes terjedésre igaz, és általában teljesül kis veszteségű terjedés esetén is.

$$\mathbf{e}_{mi} = -\mathbf{k} \times \text{grad}_t \varphi_{mi} = -\mathbf{k} \times \mathbf{h}_{mi}, \quad (10.51)$$

$$\mathbf{h}_{mi} = \text{grad}_t \varphi_{mi} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{mi} \quad (10.52)$$

módusfüggvényeket. Itt  $\mathbf{k}$  a  $z$  irányú egységvektor.

Ekkor a TM módusok térkomponenseinek komplex amplitúdói az előzőek alapja.

$$\mathbf{E}_{t,ei} = -\gamma C_{ei} \mathbf{e}_{ei} e^{-\gamma z} \quad (10.53)$$

$$E_{l,ei} = C_{ei} k_{ei}^2 \varphi_{ei} e^{-\gamma z} \quad (10.54)$$

$$\mathbf{H}_{t,ei} = -C_{ei} j \omega \varepsilon_0 \mathbf{h}_{ei} e^{-\gamma z} \quad (10.55)$$

$$H_{l,ei} = 0 \quad (10.56)$$

alakba írhatók. Míg ugyanezek TE módusokra

$$\mathbf{E}_{t,mi} = -j \omega \mu_0 C_{mi} \mathbf{e}_{mi} e^{-\gamma z}, \quad (10.57)$$

$$E_{l,mi} = 0, \quad (10.58)$$

$$\mathbf{H}_{t,mi} = -\gamma C_{mi} \mathbf{e}_{mi} e^{-\gamma z}, \quad (10.59)$$

$$H_{l,mi} = C_{mi} k_{mi}^2 \varphi_{mi} e^{-\gamma z}. \quad (10.60)$$

A módusfüggvényekről bizonyítható, hogy ortogonálisak. Például:

$$\int_A \mathbf{e}_{ei} \mathbf{h}_{ej} = 0, \text{ ha } i \neq j; \int_A \mathbf{e}_{ei} \mathbf{h}_{ei} = 0, \text{ ha } i \neq j \quad (10.61)$$

és hasonló összefüggés igaz bármely módusfüggvénypárra. Belátható az is, hogy teljes rendszert alkotnak a transzverzális síkban. Más szóval tetszés szerinti tér, amelynek a transzverzális síkon áthaladó teljesítménye véges, sorbafejthető a módusfüggvények szerint.

A módusfüggvények az alábbi módon normálhatók:

$$\int_A |\mathbf{e}_{ei}|^2 dA = \int_A |\mathbf{e}_{mi}|^2 dA = \int_A |\mathbf{h}_{ei}|^2 dA = \int_A |\mathbf{h}_{mi}|^2 dA = 1. \quad (10.62)$$

Az így normált függvényekkel előállíthatjuk a transzverzális teret:

$$\mathbf{E}_t = \sum_i U_{ei} \mathbf{e}_{ei} + \sum_i U_{mi} \mathbf{e}_{mi}, \quad (10.63a)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_i I_{ei} \mathbf{h}_{ei} + \sum_i I_{mi} \mathbf{h}_{mi}, \quad (10.63b)$$

az  $U_{ei}$ ,  $U_{mi}$  módusfeszültségek és  $I_{ei}$ ,  $I_{mi}$  módusáramok segítségével. A fenti egyenleteket összevetve a (10.53) – (10.60) komponensegyenletekkel, az alábbi összefüggésekre jutunk:

$$U_{ei} = -\gamma C_{ei} e^{-\gamma z}, \quad (10.64)$$

$$I_{ei} = -j\omega \varepsilon_0 C_{ei} e^{-\gamma z}, \quad (10.65)$$

$$U_{mi} = -j\omega \mu_0 C_{mi} e^{-\gamma z}, \quad (10.66)$$

$$I_{mi} = -\gamma C_{mi} e^{-\gamma z}. \quad (10.67)$$

A fenti összefüggések eleget tesznek az alábbi egyenleteknek:

$$-\frac{\partial U_{ei}}{\partial z} = \frac{\gamma^2}{j\omega \varepsilon_0} I_{ei}, \quad (10.68)$$

$$-\frac{\partial I_{ei}}{\partial z} = j\omega \varepsilon_0 U_{ei}, \quad (10.69)$$

$$-\frac{\partial U_{mi}}{\partial z} = j\omega \mu_0 I_{mi}, \quad (10.70)$$

$$-\frac{\partial I_{mi}}{\partial z} = \frac{\gamma^2}{j\omega \mu_0} U_{mi}. \quad (10.71)$$

Ezek az egyenletek távíróegyenletek, amelyekben a soros impedanciák ill. párhuzamos admittanciák a következők:

$$Z_{ei} = \frac{\gamma_{ei}^2}{j\omega \varepsilon_0}, \quad (10.72)$$

$$Y_{ei} = j\omega \varepsilon_0. \quad (10.73)$$

$$Z_{mi} = j\omega \mu_0, \quad (10.74)$$

$$Y_{mi} = \frac{\gamma_{mi}^2}{j\omega \mu_0}. \quad (10.75)$$

(10.38)-ből tudjuk, hogy:

$$\gamma_{m,n}^2 = k_{m,n}^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0. \quad (10.76)$$

Ezt a fenti egyenletekbe helyettesítve:

$$Z_{ei} = j\omega \mu_0 + \frac{1}{j\omega \frac{\varepsilon}{k_{ei}^2}}, \quad (10.77)$$

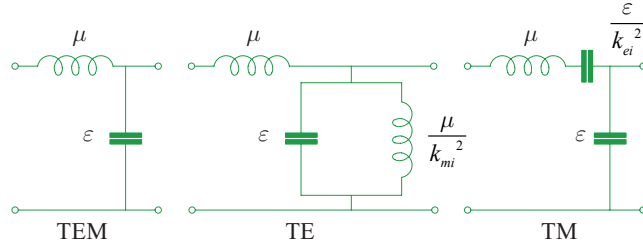
$$Y_{ei} = j\omega \varepsilon_0, \quad (10.78)$$

$$Z_{mi} = j\omega \mu_0, \quad (10.79)$$

$$Y_{mi} = j\omega \varepsilon_0 + \frac{1}{j\omega \frac{\mu_0}{k_{mi}^2}}. \quad (10.80)$$

Az összefüggések homogén dielektrikumban  $\mu_0 \rightarrow \mu$ ,  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$  helyettesítéssel minden további nélkül érvényesek.

Ezzel az analógiával minden módus távvezetékkel helyettesíthető, amelyek struktúrája a 10.2. ábrán látható.



10.2. ábra  
Az egyes módusok helyettesítő távvezetékei

A helyettesítő kép a következőt mutatja: valamennyi módus egymástól független, csatolatlan távvezetéken történő terjedéssel írható le. A határfrekvencia a helyettesítő képekben lévő rezgőkörök rezonanciájával magyarázható. A transzverzális térben tárolt energiát az  $\varepsilon$ ,  $\mu$  reaktanciák reprezentálják, a longitudinális térben tárolt energiát pedig a  $k_{m,n}$  sajátértékeket tartalmazó reaktanciák.

A távvezeték analógia a dielektrikum és a fal veszteségének leírására ellenállásokkal kiegészíthető. Ekkor azonban a módusok már nem csatolatlanok. Hasonlóan csatolást okoz a csőtápvonal keresztmetszetének méretváltozása, az ún. *diszkontinuitások*. Ezeket azonban már nem tárgyaljuk.

## A CSŐTÁPVONALBAN HALADÓ TELJESÍTMÉNY

A csőtápvonalak csatolatlansága (azaz a módusfüggvények ortogonalitása) rendkívül egyszerűvé teszi a csőtápvonalon haladó hatásos teljesítmény számítását. Mivel a Poynting-vektor hosszirányú (longitudinális) komponensét a transzverzális térkomponensek határozzák meg, egyedül ezeket kell figyelembe venni a teljesítmény számításánál<sup>28</sup>. A módusfüggvények ortonormáltságát figyelembe véve a hatásos teljesítmény

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*) = \frac{1}{2} \sum_i \operatorname{Re}(U_{ei} I_{ei}^*) + \frac{1}{2} \sum_i \operatorname{Re}(U_{mi} I_{mi}^*) = \frac{1}{2} \sum_i \operatorname{Re} U_i I_i^*. \quad (10.81)$$

A jobb oldali utolsó kifejezésben már nem különböztetjük meg a különböző típusú módusok módusfeszültségét és -áramát. Ez az eredmény teljesen megegyezik a hálózatelméletből jól ismerettel. Egyebek között ez indokolja a (10.64)–(10.67) definíciók célszerűségét.

## CSŐHULLÁMOK TÉGLALAP KERESZTMETSZETŰ CSÖVEKBEN

Téglalap keresztmetszetű cső esetén a  $\varphi = \varphi_{e,m}$  függvényre vonatkozó (10.22) és (10.31) egyenlet körös alakja:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0. \quad (10.82)$$

28 A tér longitudinális komponensei a Poynting-vektor transzverzális, a csőtápvonal tengelyére merőleges komponensét határozzák meg. Ez a komponens a falak között ide-oda reflektálódó, a teljesítmény szállítása szempontjából meddő energiát reprezentál.

Ezt az egyenletet a változók szétválasztásával oldjuk meg. Tételezzük fel, hogy a megoldás kereshető

$$\varphi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (10.83)$$

alakban. Ezt (10.82)-be helyettesítve és rendezve:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 = 0. \quad (10.84)$$

A bal oldal első tagja csak  $x$ -től függ, a második tagja csak  $y$ -től és  $k^2$  konstans. Ez csak úgy lehetséges, ha az első két tag külön-külön állandó:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2; \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2, \quad (10.85a, b)$$

ahol

$$Z_{mi} = j\omega\mu_0, \quad (10.86)$$

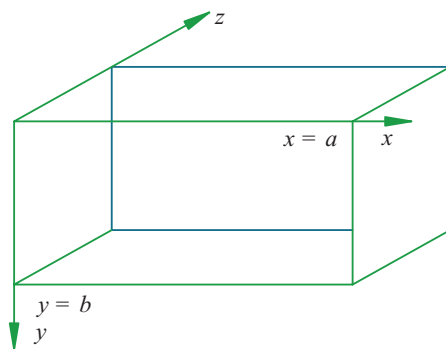
TM módusra a  $\varphi_e = 0$  peremfeltételeknél eleget tevő megoldás:

$$\varphi_e = C \sin k_x x \sin k_y y. \quad (10.87)$$

TE módusra a  $\frac{\partial \varphi_m}{\partial n} = 0$  peremfeltételt a

$$\varphi_m = C \cos k_x x \cos k_y y \quad (10.88)$$

megoldással tudjuk kielégíteni.



**10.3. ábra**  
Négyszög keresztmetszetű  
hullámvezető terének  
leírásához használt  
koordináta-rendszer

A 10.3. ábra koordináta-rendszerében a TM módusok komponensei:

$$\begin{aligned} E_z &= Ck^2 \sin k_x x \sin k_y y, & H_z &= 0 \\ E_x &= -C\gamma \cos k_x x \sin k_y y, & H_x &= Cj\omega\epsilon k_y \sin k_x x \cos k_y y, \\ E_y &= -C\gamma k_y \sin k_x x \cos k_y y, & H_y &= -Cj\omega\epsilon k_x \cos k_x x \sin k_y y. \end{aligned} \quad (10.89)$$

A TE hullámok komponensei:

$$\begin{aligned} E_z &= 0, & H_z &= Ck^2 \cos k_x x \cos k_y y, \\ E_x &= Cj\omega\mu k_y \cos k_x x \sin k_y y, & H_x &= C\gamma k_x \sin k_x x \cos k_y y, \\ E_y &= -Cj\omega\mu \sin k_x x \cos k_y y, & H_y &= C\gamma k_y \cos k_x x \sin k_y y. \end{aligned} \quad (10.90)$$

Határfeltételek:

$$\begin{aligned} E_z &= 0, & E_y &= 0, & \text{ha } x &= 0, & x &= a, \\ E_z &= 0, & E_x &= 0, & \text{ha } y &= 0, & y &= b. \end{aligned} \quad (10.91)$$

Ez a komponensekben

$$\sin k_x a = 0; \quad \sin k_y b = 0 \quad (10.92a, b)$$

teljesülését kívánja, aminek feltétele, hogy legyen:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}; \quad k_y = \frac{n\pi}{b}. \quad (10.93a, b)$$

A (10.86) alapján:

$$k^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad (10.94)$$

ahonnan

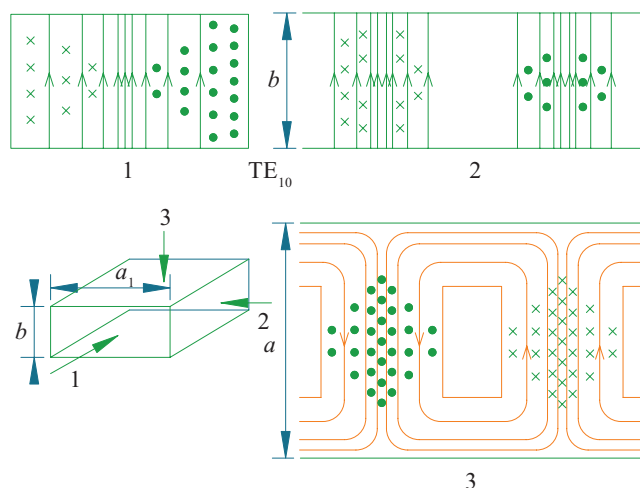
$$\omega_h = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad (10.95)$$

$$\lambda_h = \frac{2\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}. \quad (10.96)$$

A módusok két egész számmal jellemezhetők,  $TM_{mn}$  és  $TE_{mn}$  kétméretű sokaságot alkotnak.  $TM$  hullámoknál egyik módusindex sem lehet zérus, míg  $TE$ -nél az egyik igen. Ezért az alaplómódus a  $TE_{10}$  módus (10.4. ábra), amelynek határfrekvenciája:

$$\omega_h = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{a}, \quad (10.97)$$

$$\lambda_h = 2a\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}. \quad (10.98)$$

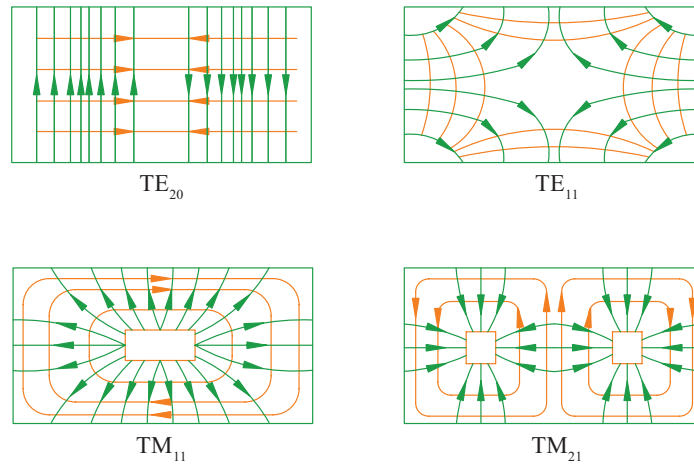
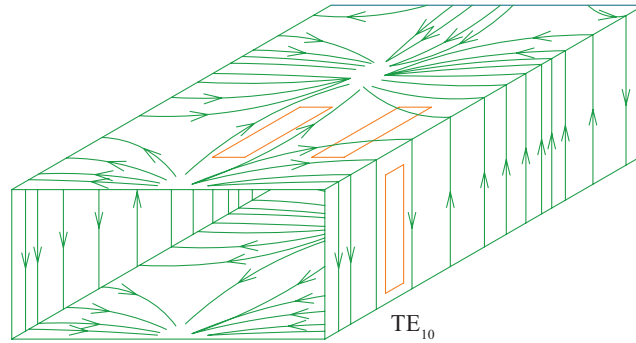


10.4. ábra

A leggyakrabban használt csőhullám erővonalképe. A perspektívus ábrán látható nyilak azt az irányt jelölik, amerre az egyes erővonalképek rajzolásánál néztünk. A folytonos vonalak a villamos, a szaggatott vonalak a mágneses térerősséget jelentik

A fallal párhuzamos mágneses térerősség komponens hatására a falban áram folyik. Ennek áramvonalait  $TE_{10}$  módusnál a 10.5. ábra mutatja. Néhány egyéb módus keresztmetszeti erővonalképét mutatja a 10.6. ábra.

**10.5. ábra**  
A cső falában folyó áramok a leggyakrabban használt hullámformánál. A szaggatott vonalak a falon vágott réseket jelzik. Ha a rés párhuzamos az áramsűrűség vektorával, a rés befolyása elhanyagolható



**10.6. ábra**  
Módusok keresztmetszeti erővonal képei

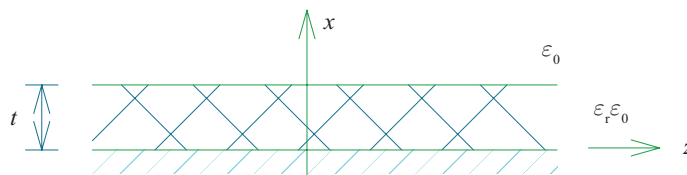
## NYITOTT HULLÁMVEZETŐK

Kiemelkedő jelentősége van a szigetelőhenger mentén terjedő hullámnak. Ilyen struktúrák az optikai szálak.

A tárgyalást egyszerűsítendő a hullámterjedést dielektromos réteg mentén vizsgáljuk. Ebben az esetben is azt várjuk a hullámvezetőtől, hogy longitudinális irányban csillapítatlan hullám terjedjen, miközben a transzverzális síkon áthaladó teljesítmény véges legyen.

Helyezkedjen el a dielektromos bevonat ideális végtelen sík felületen (10.7. ábra).

**10.7. ábra**  
Felületi hullámvezető



A magában álló réteg ennek az elrendezésnek a tükrözésével tárgyalható. TM hullámformát keresünk. (Kimutatható, hogy TE és TM hullámok csak  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$  esetén léteznek.) Ekkor  $H_z = 0$ . A csőtápvonalhoz hasonlóan az  $\mathbf{E}$  longitudinális  $E_z$  komponensét határozzuk meg először. (Emlékezzünk vissza  $\varphi_e \approx E_z$ ). Ekkor:

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\gamma}{k_i^2} \text{grad}_t E_z \quad (10.99)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{j\omega\varepsilon}{\gamma} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t. \quad (10.100)$$

A számítás annyiban tér el a homogén kitöltésű csőtápvonalától, hogy a két, különböző permittivitású térrészben a tér más-más Helmholtz-egyenletet elégít ki (és természetesen a perem-, illetve folytonossági feltételeket).

$$\Delta_t E_z + k_i^2 E_z = 0, \quad (10.101)$$

ahol

$$k_i^2 = \omega^2 \varepsilon \mu + \gamma^2 = \varepsilon_r k_0^2 + \gamma^2. \quad (10.102)$$

A keresett térnek nincs  $y$  irányú komponense. Ekkor:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + k_d^2 E_z = 0, \quad 0 < x < t, \quad (10.103a)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - h^2 E_z = 0, \quad t < x, \quad (10.103b)$$

mivel az  $x \rightarrow \infty$  esetén eltűnő megoldást keresünk:

$$E_z = 0, \quad x = 0 \text{ esetén.}$$

A peremfeltételeket kielégítő megoldások:

$$E_z = \begin{cases} A \sin k_d x, & 0 < x < t, \\ B e^{-hx}, & t < x. \end{cases} \quad (10.104)$$

$x = t$ -nél  $E_t$  és  $H_t$  tangenciális komponensek folytonosak, tehát

a)  $\gamma$  azonos a két térrészben:

$$\gamma^2 = k_d^2 - \varepsilon_r k_0^2 = -h^2 - k_0^2 = (\alpha + j\beta)^2, \quad (10.105)$$

ahonnan

$$k_d^2 + h^2 = (\varepsilon_r - 1) k_0^2. \quad (10.106)$$

b)  $E_z$  folytonosságától:

$$A \sin k_d t = B e^{-ht}. \quad (10.107)$$

c)  $H_y$  folytonosságából:

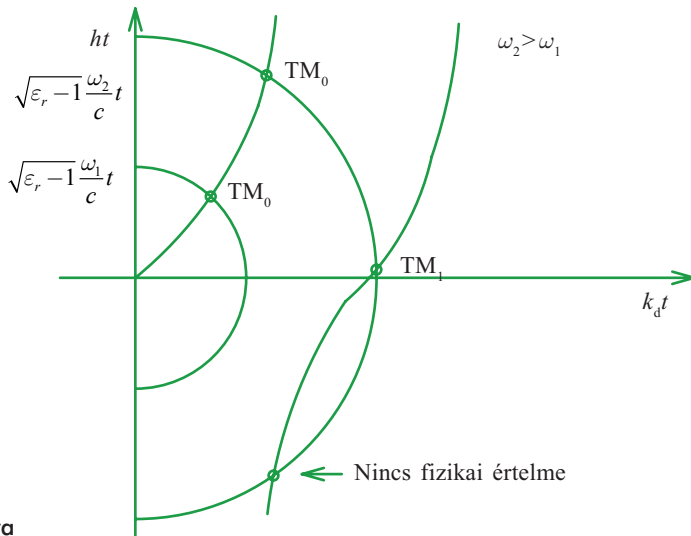
$$\frac{\varepsilon_r A}{k_d} \cos k_d t = \frac{1}{h} B e^{-ht}. \quad (10.108)$$

A két előző egyenletből:

$$\varepsilon_r h t = k_d t \operatorname{tg} k_d t. \quad (10.109)$$

(10.106) és (10.109) szimultán megoldása valós  $h$ -val a kívánt feltételeknek megfelelő teret biztosít.

Az egyenletrendszer megoldását grafikusán az ábra szemlélteti (10.8. ábra).



10.8. ábra

Ezek a hullámok az ún. *lassú hullámok*, mivel a fázissebesség a fénysebességnél kisebb:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{k_0 c}{\beta} = \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 + h^2}} c < c, \quad (10.110)$$

ahol felhasználtuk a (10.105) összefüggést.

Fizikailag az állítás nyilvánvaló: a fázissebesség a szabad térben és a dielektrikumban kialakuló  $c/\sqrt{\varepsilon_r}$  fénysebesség között kell, hogy legyen. Ez teljesül, hiszen:

$$k_0 < \beta = \sqrt{\varepsilon_r k_0^2 - k_d^2} < \sqrt{\varepsilon_r} k_0. \quad (10.111)$$

A grafikus megoldás azzal a meglepetéssel szolgál, hogy bármely véges frekvencián csak véges számú módus létezik. Ezek nem alkothatnak teljes függvényrendszert, tehát tetszés szerinti gerjesztés tere nem írható le csak módusfüggvényekkel. A további hullámformákat beeső és visszaverődő síkhullámok alakjában kereshetjük. Ezek

hullámok tehát nem TE és TM típusú módusokat alkotnak. A síkhullámokból más hullámformák is előállíthatók. Ezekhez a hullámokhoz folytonos spektrum rendelhető.

## ÜREGREZONÁTOROK

Ha a csőtápvonalat transzverzális síkjában ideális vezető fallal elzárjuk, azon teljesülnie kell a peremfeltételeknek, például az elektromos térerősségnek nem lehet tangenciális komponense.

A csőtápvonalmódusok távvezetékmodelljéből azonnal következik, hogy az analóg távvezetéseket rövidre zárjuk.

Mindkét képből az látszik, hogy a csőtápvonalon haladóhullám reflektálódik, a vezeték mentén állóhullám alakul ki, amelyben a transzverzális elektromos térerősség zérus a lezáráson. Ez egyenértékű azzal az állítással, hogy a módusfeszültségnek a lezáráson csomópontja van.

Meg kell jegyeznünk, hogy haladóhullámban a transzverzális elektromos és mágneses térerősség-maximumok a csőtápvonal azonos helyen vannak. A fenti ideális lezárás esetén a peremfeltételeket csak úgy tudjuk kielégíteni, ha a mágneses tér negyed hullámhosszal eltolódik az előző pozíciójához képest. Időben is negyed periódusnyi lesz az eltolás.

Ha az állóhullám bármely további csomópontjához ismét egy ideálisan vezető fémlemez helyezünk, azon a peremfeltételek teljesülnek és a térelrendezés és rezgési frekvenciája változatlan marad. Zárt üreg belsejében meghatározott frekvencián rezgő elektromágneses teret nyertünk. Ezt az elrendezést nevezzük hengeres *üregrezonátornak*.

Az üregrezonátor rezgési frekvenciáját a kiindulási módus ismeretében tudjuk meghatározni. Állóhullámok esetén a cső  $L$  hosszára egész számú fél hullámhossznak kell esnie:

$$L = p \frac{\lambda_g}{2}, \quad (10.112)$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_h}\right)^2}}, \quad (10.113)$$

ahol

$$\lambda_h = \frac{2\pi}{k_{e,m}}, \quad (10.114)$$

ahonnan az üregben mért hullámhossz:

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{2}{\lambda_h}\right)^2 + \frac{p^2}{L^2}}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{k_{e,m}}{\pi}\right)^2 + \frac{p^2}{L^2}}}. \quad (10.115)$$

Innen a rezgés frekvenciája:

$$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda} = \pi c \sqrt{\left(\frac{k_{e,m}}{\pi}\right)^2 + \frac{p^2}{L^2}}. \quad (10.116)$$

Négyszögletes keresztmetszetű üregben TE és TM módusra egyaránt

$$k_{e,m}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (10.117)$$

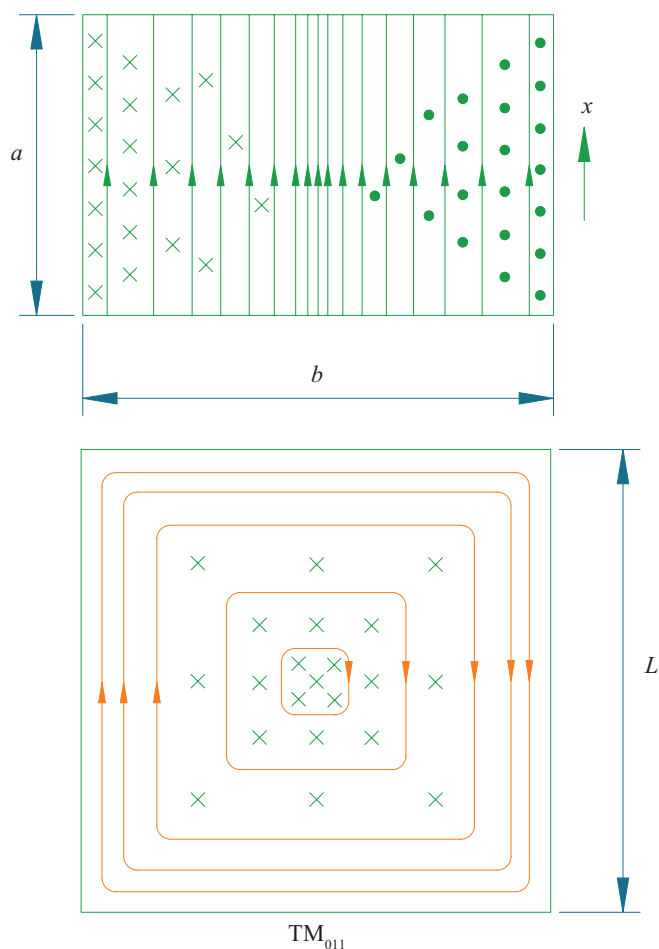
két módusindexszel leírható sokaság. Ezt (10.115) és (10.116)-ba helyettesítve:

$$\lambda_{mp} = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{L^2}}}, \quad (10.118)$$

$$\omega_{mp} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{L^2}} \quad (10.119)$$

háromméretű sokaságot kapunk.

Mindhárom módusindexet nem választhatjuk zérusnak. TE módusoknál  $m$  vagy  $n$  zérusnak választható. A 10.9. ábra a  $TE_{011}$  üregmódus erővonalképét mutatja. Más irányból szemlélve ez a  $TM_{110}$  módusnak felel meg, ahol az eredeti terjedési irány az  $x$  tengely. A  $p = 0$  index ebben az esetben azt jelenti, hogy a  $z$  irányban nincsen változás a térkomponensekben. Ez az üregmódus biztosítja a legnagyobb frekvenciát adott méretű üregben: ez az alaprezgés. Téglaltest alakú üregekben a TE és TM csőtápvonalmódusok megkülönböztetése önkényes.



**10.9. ábra**  
A villamos vagy mágneses alaprezgés hasáb alakú üregben

Természetesen tetszés szerinti alakú zárt üreg belsejében kialakulhat rezgő elektromágneses tér. Ennek számításával azonban nem foglalkozunk.

A rezonátorok jósági tényezőjét a falveszteségek határozzák meg:

$$Q = 2\pi \frac{\text{a rezgőkörben tárolt energia rezonancifrekvencián}}{\text{a periódusidő alatt disszipált energia}}$$

Ennek jó becslése:

$$Q \cong \frac{2}{\delta} \frac{\text{térfogat}}{\text{fal felülete}}$$

ahol  $\delta$  a behatolási mélység.

## DIELEKTROMOS REZONÁTOROK

Felismertük, hogy csőtápvonalak lezárásával üregrezonátort alakítunk ki, amely meghatározott frekvenciákon rezonáns rendszerként viselkedik. Hullámokat azonban nemcsak zárt csőtápvonalakkal, hanem dielektromos hullámvezetőkkel is tudunk irányítani. Önkéntelenül is felvetődik a kérdés: lehet-e dielektromos hullámvezetőből rezonáns elrendezést kialakítani? Általánosságban: alkalmasan kialakított és megfelelő anyagjellemzőkkel rendelkező dielektromos test tud-e rezonátorként viselkedni?

A kérdést különösen aktuálissá teszi az a tény, hogy nagy permittivitású, kis veszteségű dielektrikumok állnak rendelkezésünkre. A miniatürizálás további igényt jelent kisméretű, könnyű, stabil, nagy jósági tényezőjű rezgőrendszerek iránt.

A dielektromos rezonátor akkor felel meg e követelménynek, ha permittivitása (a rezonanciafrekvencián is) nagy ( $\epsilon_r \geq 30$ ). Ilyen permittivásnál a dielektrikumot és a szabad teret elválasztó felület közel ideális nyitott áramkört jelent.

Kellően nagy permittivítás esetén ugyanis még merőleges beesésnél is közel teljes reflexió következik be. Az

$$r = \frac{Z_0 - Z_w}{Z_0 + Z_w} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}} = \frac{\sqrt{\epsilon_r} - 1}{\sqrt{\epsilon_r} + 1} \Big|_{\epsilon_r \rightarrow \infty} = 1 \quad (10.122)$$

reflexió tényező nagy  $\epsilon_r$  esetén megközelíti az egységet. Ezért az elsőrendű közelítés során a dielektrikum-levegő határfelületet ideális mágneses falnak tekintjük. Az ideális mágneses fal az ideális vezetőfelület duálja: az elektromos térnek csak párhuzamos komponense létezik a felületen a mágneses térnek csak merőleges komponense. Energia a falon nem tud átáramlani, mert a Poynting-vektornak ilyen feltételek mellett nincsen a falra merőleges komponense.

Az ideális mágneses fal feltétel hasonló az ideális fémfal feltételezéséhez. A valódi fémfalak veszteségesek, ezért a csőtápvonal felületén van csekély energiaátáramlás. Nagy permittivitás esetén az energiakiáramlás a dielektromos rezonátorból nem lényegesen nagyobb arányú, a dielektromos rezonátor jósági tényezője nem sokkal rosszabb, mint zárt üregeké.

A dielektromos rezonátorok egyik nyilvánvaló előnye azonnal látszik: azonos rezonáns frekvenciához kisebb méreteket lehet alkalmazni. A lineáris méretek nem ferromágneses közeg esetén  $\sqrt{\varepsilon_r}$ -szer kisebbek.

## VEKTOROK DERIVÁLTJAI. TÖBBSZÖRÖS DERIVÁLTAK

A deriváltak kifejezhetők a szimbolikus  $\nabla$  (nabla) vektorral, ami valójában operátor:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{F.1})$$

Ezzel az operátorral a vektorderiváltak:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi, \quad (\text{F.2})$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}, \quad (\text{F.3})$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (\text{F.4})$$

A nabla kétszeri egymás utáni alkalmazása óvatosságot igényel, de megkönnyíti a szorzatok deriváltjának, illetve a kétszeres deriváltaknak a számítását.

A szorzatok deriváltjai

$$\text{div } \varphi \mathbf{v} = \varphi \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{grad } \varphi, \quad (\text{F.5})$$

$$\text{rot } \varphi \mathbf{v} = \varphi \text{rot } \mathbf{v} + \text{grad } \varphi \times \mathbf{v}, \quad (\text{F.6})$$

$$\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \text{rot } \mathbf{v}. \quad (\text{F.7})$$

A  $\text{grad}(\mathbf{u}\mathbf{v})$  és a  $\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$  deriváltak kifejtése nem végezhető el csak az (F.2)–(F.4) operátorokkal, bonyolultabb kifejezésre vezet.

A kétszeres deriváltak:

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi. \quad (\text{F.8})$$

$\Delta = \nabla^2$  a Laplace-operátor. Descartes-koordinátákban:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (\text{F.9})$$

$$\text{rot grad } \varphi = \mathbf{0}, \quad (\text{F.10})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{F.11})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} \quad (\text{F.12})$$

ahol a vektorra alkalmazott Laplace-operátor maga is vektort eredményez. Descartes-rendszerben:

$$(\Delta \mathbf{v})_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} = \Delta v_i; \quad i = x, y, z. \quad (\text{F.13})$$

Más koordináta-rendszerekben (F. 12) adja meg  $\Delta \mathbf{v}$  definícióját.

## INTEGRÁLTÉTELEK

*Gauss-tétel*

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \oint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \quad (\text{F.14})$$

A tétel a térfogati integrált a térfogatot határoló zárt felületre vett integrálra redukálja. A felület kifelé mutató normálisát tekintjük pozitívnak.

*Stokes-tétel:*

$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{F.15})$$

A tétel a felületi integrált a felületet határoló zárt görbére vett integrálra redukálja. A felület normálisa és a körüljárás iránya jobbsavarszabály szerint vannak összerendelve.

A Gauss-tétel következménye a *Green-tételcsoport*:

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_A \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dA, \quad (\text{F.16})$$

ahol  $\frac{\partial}{\partial n}$  a gradiensvektor felületi normálisra vett vetülete.

$\varphi = \psi$  esetben a következő tétel érvényes

$$\int_V \left[ \varphi \Delta \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2 \right] dV = \oint_A \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA. \quad (\text{F.17})$$

# IRODALOM

A jegyzet tárgyalása feltételezi a műszaki egyetemek bevezető fizika tantárgy elektromágneses anyagának ismeretét: alapfogalmak, elemi elektrosztatika és mágnességtan, a Maxwell egyenletek integrális alakja. Számos ilyen tankönyv közül csak egyet idézünk:

*Hudson, A. – Nelson, R: Útban a modern fizikához, 1994 Budapest, LSI Oktatóközpont*

Ehhez a jegyzethez hasonló célkitűzésű jegyzetek és tankönyvek sorából idézzük a következőket:

- *Standeisky István: Elektrodinamika 2006 Győr: Universitas Győr Kht.*
- *Fodor György: Elektromágneses terek 2002 Budapest (7. utánnomás) Műszaki Kiadó*
- *Solymár László: Elektromágneses térelmélet alkalmazásai, 1980 Budapest, Műszaki Könyvkiadó (az angol eredeti: Lectures on electromagnetic theory: a short course for engineers) az Oxfodi Egyetemen tartott BSc tantárgy tankönyve*

Mérnöki alaptantárgy egy Nobel-díjas fizikustól

- *Feynman, R. P. – Leighton, R. B. – Sands, M: Mai fizika 5. – 6. kötet, 1970 Budapest, Műszaki Könyvkiadó*

Az elektrodinamika mérnöki szemléletű monografikus feldolgozása:

- *Simonyi Károly: Elméleti Villamosság, 2000 Budapest, (12. átdolgozott kiadás, társszerző: Zombory László), Műszaki Könyvkiadó*

Az elektrodinamika fizikus szemléletű monografikus feldolgozásából nem hiányozhat a relativitáselmélet:

- *Jackson, J. D.: Klasszikus elektrodinamika, 2004 Budapest, Typotex*
- *Nagy Károly: Elektrodinamika a speciális relativitáselmélet rövid ismertetésével, 2002 Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó*
- *Benedict Mihály: Elektrodinamika, 2000 Szeged (2. kiadás) JATE Press*

A fizika világhírű nagyléptékű tárgyalásának, a „Landau-Lifsic” sorozatnak vonatkozó kötetei:

- Landau, L. D. – Lifsic, E. M.: Elméleti fizika*
- *II. Klasszikus erőterek, 1976 Budapest, Tankönyvkiadó*
- *VIII. Folytonos közegek elektrodinamikája, 1986 Budapest, Tankönyvkiadó*

Az elektronikus elérhető jegyzetek közül különösen ajánljuk a Massachusetts Institute of Technology anyagait: [www.mit.edu](http://www.mit.edu)

# TÁRGYMUTATÓ

## A

alaplómódus 158  
állóhullámarány 107  
áram 1  
– konduktív 12  
– konvektív 12  
áramforrás 60  
áramgenerátor 60  
árnyékolás 151

## B

bázisfüggvény 80  
behatolási mélység 150  
beiktatott térerősség 12  
bemeneti impedancia 101  
Biot és Savart törvénye 6  
Biot–Savart-törvény 52  
Brewster-szög 148

## C

ciklikus potenciál 54  
cirkulárisan (körösén) polározott hullám 143  
Coulomb törvénye 5  
Coulomb- mérték 125  
Coulomb-mérték 50  
csőben mérhető hullámhossz 159  
csomóponti törvény 60  
csoportsebesség 95  
csőtápvonal 153

## D

Descartes–Snell törési törvény 147  
differenciális Ohm-törvény 12  
dipólus 13  
dipólusmomentum 13

dipólusnyomaték 13  
Dirichlet-peremfeltétel 40  
diszperzió 158  
diszperziós egyenlet 159

## E

elektromágneses hullámok 33  
elektromos Gauss-törvény 9  
elektromos szuszceptibilitás 19  
elektromos térerősség 1, 6  
elektromos töltés 3, 5  
elektromos Gauss-törvény 11  
elektrosztatika 33  
elemi töltés 6  
elhajlás 143  
elliptikusan polározott hullám 143  
elosztott paraméterű hálózatok 83  
eltolási áram 26  
eltolási áramsűrűség 26  
eltolási vektor 10  
evolúciós egyenletek 28

## F

Faraday indukciótörvénye 11  
fázissebesség 91, 158  
fázistényező 91  
feszültség 2, 7  
feszültségforrás 60  
feszültséggenerátor 60  
fluxus 9, 53  
földkapacitás 46  
folytonossági egyenlet 4, 26  
Fresnel-képletek 148  
funkcionál 72  
funkcionál variációja 73

## G

gerjesztési törvény 11  
gerjesztési törvény 10  
gerjesztési törvény általános formája 26  
gömbi koordináták 126  
Green-tétel 39

## H

határfrekvencia 158  
határhullámhossz 159  
Helmholtz-egyenlet 154  
hiszterézis 20  
hullámegyenlet 86, 125  
hullámellenállás 87, 132  
hullámhossz 91  
hullámimpedancia 132, 142  
huroktörvény 60

## I

ideális távvezeték-egyenletek 86  
ideális vezeték 93  
illesztett távvezeték 108  
indukciótörvény 11  
inhomogén síkhullám 149  
integrálegyenletek 64  
interferencia 143  
irányhatás 134  
iránykarakterisztika 132

## J

Joule-hő 30

## K

kapacitás 41  
karakterisztika 116  
kettősréteg 16  
kezdeti feltételek 28  
Kirchhoff I. törvénye 60, 62  
Kirchhoff II. törvénye 60  
kis csillapítású vezeték 93  
kölcsönös indukció 56  
kölcsönös kapacitás 46  
kollokáció 81  
komplex amplitúdó 34  
komplex permeabilitás 34  
komplex permittivitás 34

komplex Poynting-vektor 35  
koncentrált paraméterű hálózatok  
33, 58, 126  
kondenzátor 44  
konzervatív erőter 8  
közeg 142  
közeg hullámimpedanciája 142  
közegjellemző törvények 11  
közelhatási 28  
közeli tér 129  
kvázistacionárius jelenségek 34

## L

Laplace-operátor 36, 126  
Lenz-törvény 11  
Lorentz-feltétel 124  
Lorentz-mérték 124  
Lorentz-törvény 1

## M

mágneses fluxus 9  
mágneses indukció 1, 6  
mágneses szuszceptibilitás 20  
mágneses térerősség 10  
mágneses töltés 9, 12  
MágnesesGauss-törvény 11  
magnetosztatika 33  
másodlagos töltéseknek 64  
Maxwell-egyenletek 28  
Maxwell-összefüggés 144  
mérték 50  
mértékfüggvény 125  
mértékinvariancia 51, 125  
mértéktranszformáció 50  
mértékválasztás 50, 124  
monokromatikus 35  
multipólusok 15

## N

Neumann-képlet 57  
Neumann-peremfeltétel 40  
nyereség 135

## O

Ohm-törvény 59  
önindukció 56

## P

peremfeltételek 29  
 polarizáció 143  
 polarizációs töltés 19  
 potenciálok 127  
 Poynting-tétel 30  
 Poynting-vektor 31

## R

Rayleigh–Ritz-módszer 81  
 reflexiós tényező 99  
 relatív permeabilitás 12  
 relatív permittivitás 12, 19  
 részkapacitás 46  
 retardált 127  
 Rövidzár 101

## S

saját kapacitás 46  
 sajátérték 156  
 sajátérték-feladat 156  
 sajátfüggvény 156  
 sajátrezgés 122  
 sík polarizációjú hullámok 143  
 síkhullám 140  
 skalárpotenciál 8  
 stacionárius áramlás 33  
 sugárzási ellenállás 134  
 sugárzási tér 129  
 $\mu_0$  szabad tér permeabilitás 2  
 – hullámmellenállása 132  
 szabadtéri hullámhossz 92, 159  
 szabadtéri hullámszám 154  
 szakadás 101

## T

távíróegyenletek 88  
 távolhatási 28  
 távoli tér 129  
 távvezeték 83  
 távvezeték rezgőkör – sajátfrekvencia 114  
 teljes visszaverődés 149  
 TEM 83, 142  
 természetes peremfeltétele 74  
 töltés 3  
 töltésközéppont 15  
 töltésmegmaradás elve 4  
 Torzításmentes vezeték 94  
 transzverzális elektromos mágneses (TEM)  
 157  
 transzverzális elektromos mágneses tér 83  
 transzverzális elektromos-mágneses hullám  
 142  
 transzverzális hullám 142  
 transzverzális komponens 83  
 transzverzális mágneses (TM) tér 155  
 tükrözés 63

## U

üregrezonátor 168

## V

(vákuum) permeabilitása 2  
 vákuum permittivitása 5  
 változók szétválasztása 163  
 vektorpotenciál 49  
 veszteségi szög 34  
 vezetés 47  
 vezetőképesség 12