Elektromágneses terek gyakorlat, 6.

Síkhullámok - Hertz-dipólus

Reichardt András

2007. május 2.

Poynting-vektor elméleti összefoglaló

$$\text{sugárzó teljesítmény}: \; P_{sug} = \oint_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}} d\vec{\mathbf{A}} = \oint \vec{\mathbf{S}} d\vec{\mathbf{A}}$$

adott $\mathcal{A}'$ felületen átáramló teljesítmény

$$P_{A'} = \int_{A'} \vec{\mathbf{S}} d\vec{\mathbf{A}}$$

$$\text{dimenzió}: \; [S] = \frac{W}{m^2}$$

$$\text{komplex Poynting-vektor}: \; \vec{\mathbf{S}}_k = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^{\star}$$

$$\text{hatásos teljesítmény}: \; P = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{A}} \mathrm{Re}\left\{ \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^{\star} \right\} d\vec{\mathbf{A}}$$

P1 - Koaxiális kábel - áramló teljesítmény

Feladat : Számítsuk ki egyenáram esetén egy koaxiális kábel teljesítmény viszonyait a Poynting-vektor segítségével!

Megoldás :

$$\text{r sugarú körön a mágneses térerősség}: \ H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}$$

$$\text{villamos térerősség}: \ E_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon r}$$

ahol q a hosszegységenkénti töltés a belső vezetőn

$$\text{két elektróda közötti feszültség}: \ U = \int_{r_b}^{r_a} E_r dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_a}{r_b}$$

$$\text{térerősség (q helyett U-val kifejezve)}: \ E_r = \frac{U}{r \ \ln(r_a/r_b)}$$

P1 - Koaxiális kábel - áramló teljesítmény folyt.

Vegyük figyelembe, hogy E_r merőleges H_φ -re, ezért $\vec{\mathbf{S}}$ abszolut értéke egyenlő $\vec{\mathbf{E}}$ és $\vec{\mathbf{H}}$ abszolút értékének szorzatával.
Poynting-vektor a kábel tengelyének irányába mutat

$$S = E \cdot H = \frac{U\ I}{2\pi r^2 \ln(r_a/r_b)}$$

Áramló teljesítmény (dielektrikum keresztmetszetén halad át)

$$P = \int_A S\ dA = \int_{r_b}^{r_a} S\ 2\pi r dr = \int_{r_b}^{r_a} \frac{U\ I}{2\pi r^2 \ln(r_a/r_b)} 2\pi r dr = U \cdot I$$

P1 - Koaxiális kábel - veszteség a vezetőkben

Mindkét vezetőben I áram folyik, egyenletes áramsűrűséggel, $|\vec{\mathbf{J}}| = I/A$ és $\vec{\mathbf{J}}$ iránya axiális, a két érben egymással ellentétes irányú.

$$\text{differenciális Ohm-törvény alapján}: \; E_z = \frac{I}{\sigma A}$$

$$\text{belső vezető határfelületén}: \; H_{\varphi,b} = \frac{I}{2\pi r_b}$$

$$\text{külső vezető belső felületén}: \; H_{\varphi,a} = \frac{I}{2\pi r_a}$$

$$\text{mindkét térerősség } +\varphi \text{ irányú}: \; H_{\varphi,r_v} = \frac{I}{2\pi r_v}$$

P1 - Koaxiális kábel - veszteség a vezetőkben

Poynting-vektor iránya mindkét vezetőbe befelé mutat (elektromos térerősségek iránya ellentétes), abszolút értéke a térerősségek abszolút értékének szorzata.

$$S = E\ H = \frac{I}{2\pi r_v}\ \frac{I}{A\sigma}$$

Integrálva a vezető L hosszúságú darabjának felületére

$$P = S 2\pi r_v L = I^2 \frac{1}{A\sigma} = I^2 R$$

mindkét vezetőnél, a Joule-törvénynek megfelelően.

P1.5 - Nap sugárzása

A Nap sugárzásából a Föld 1 cm^2 nagyságú felületére átlagosan 1 perc alatt, 2.2 cal energia érkezik. (Szolár konstans)
Határozzuk meg a hullám elektromos és mágneses térerősségének nagyságát!
Szolár konstans értéke SI-ben :

$$S = 2.2\text{cal}/cm^2/\text{perc} = 1.535 \cdot 10^3 W/m^2$$

Minden elektromágneses sugárzótól elegendő távolságban az elektromos és mágnese térerősség hányadosa

$$\frac{E}{H} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

az $S = E\ H$ összefüggéssel

$$E = \sqrt{120\pi\ S} = 7.5 \cdot 10^2\ V/m$$

$$H = \frac{E}{120\pi} = 2\ A/m$$

Komplex Poynting-vektor

Az áramköröknél alkalmazott módon itt is bevezethető a komplex jelölési mód. Ekkor a komplex teljesítmény :

$$P_k = \frac{1}{2} U I^\star = P + jQ$$

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ U I^\star \right\}; \qquad = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{ U I^\star \right\}$$

Ennek megfelelően a komplex Poynting-vektor :

$$\vec{\mathbf{S}}_k = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^\star$$

$$\vec{\mathbf{S}}_p = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^\star \right\}, \qquad \vec{\mathbf{S}}_q = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{ \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^\star \right\}$$

Egy A felületen áthaladó hatásos teljesítmény

$$P = \oint_A \vec{\mathbf{S}}_p d\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \int_A \mathrm{Re}\left\{ \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}^\star \right\} d\vec{\mathbf{A}}$$

P1.7 - Síkhullám teljesítménye

Feladat : Egy hullám térkomponensére az alábbiak :

$$E_x = E_0 \sin(\alpha x) \cos(\gamma y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)};\ \ E_y = 0;\ \ E_z = 0$$

$$H_y = H_0 \sin(\alpha x) \cos(\gamma y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{6})}; H_x = 0;\ \ H_z = 0$$

Számítsuk ki a Poynting-vektor segítségével a

$$-a < x < a \text{ és } -b < y < b$$

tartományokon áthaladó teljesítményt!

P1.7 - Síkhullám teljesítménye

$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{e}}_x \cdot E_x$ és $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{e}}_y \cdot H_y$, $\vec{\mathbf{E}} \perp \vec{\mathbf{H}}$ így $|\vec{\mathbf{S}}| = |\vec{\mathbf{E}}| \cdot |\vec{\mathbf{H}}|$

$$S(t) = E_0 H_0 \sin^2(\alpha x) \cos^2(\gamma y) \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \pi/6)$$

$$S_k = \frac{1}{2} E H^\star = \frac{1}{2} E_0 H_0 \sin^2(\alpha x) \cos^2(\gamma y) \cdot e^{j\pi/6}$$

ennek valós része : $S_p = \dfrac{1}{2} E_0 H_0 \sin^2(\alpha x) \cos^2(\gamma y) \cos(\pi/6)$

P1.7 - Síkhullám teljesítménye – folyt.

$$S_p = \frac{1}{2} E_0 H_0 \sin^2(\alpha x) \cos^2(\gamma y) \cos(\pi/6)$$

a $\mathcal{A}$ felületen átáramló teljesítmény : $P = \int_{\mathcal{A}} S_p d\mathcal{A} =$

$$= \frac{1}{2} \quad \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos(\pi/6)} \; E_0 H_0 \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \sin^2(\alpha x) \cos^2(\gamma y) dy dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} E_0 H_0 \int_{-a}^{a} \sin^2(\alpha x)\ dx \int_{-b}^{b} \cos^2(\gamma y)\ dy =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} E_0 H_0 \left[a - \frac{1}{2} \sin(2\alpha a) \right] \cdot \left[b + \frac{1}{2\gamma} \sin(2\gamma b) \right]$$

Elméleti összefoglaló

Az $\vec{\mathbf{E}}$ és $\vec{\mathbf{H}}$ merőleges egymásra és mindkettő merőleges a terjedési irányra

$$\text{hullámellenállás}: \frac{|\vec{\mathbf{E}}|}{|\vec{\mathbf{H}}|} = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

$$\text{fázistényező } \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\beta_0$$

$$\text{hullámhossz } \Lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

$$\text{szabadtéri hullámhossz } \lambda = \frac{c}{f}$$

veszteséges dielektrikum :

$$\gamma = \sqrt{(\sigma + j\omega\varepsilon)j\omega\mu} \qquad \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

Elméleti összefoglaló – folyt.

A síkhullám - távvezeték analógia alapja, hogy a differenciálegyenleteik azonos jellegűek, ezért a megoldások is azonos függvényekkel írhatóak le.

Síkhullám	Távvezeték
E	U
H	I
$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\varepsilon}}$	$Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$
$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$	$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$

P2.5

Mekkora ε_r dielektromos állandójú ideális dielektrikumban lesz az $f = 2000 MHz$-es frekvenciájú hullám hullámhossza $\Lambda = 10\ cm$, $\mu_r = 1$ esetében? Mekkora lesz a hullám fázissebessége?
Fázistényező ideális dielektrikum esetében

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\cdot\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{2\pi}{\Lambda}$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}f}$$

$$f = 2000 Mhz;\ \text{esetén}$$

a szabadtéri hullámhossz $\quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 10^9} = 0.15 m = 15\ cm$

P2.5 - folytatás

$\mu_r = 1$ esetében a szükséges ε_r

$$\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\lambda}{\Lambda} = \frac{15}{10} = 1.5$$

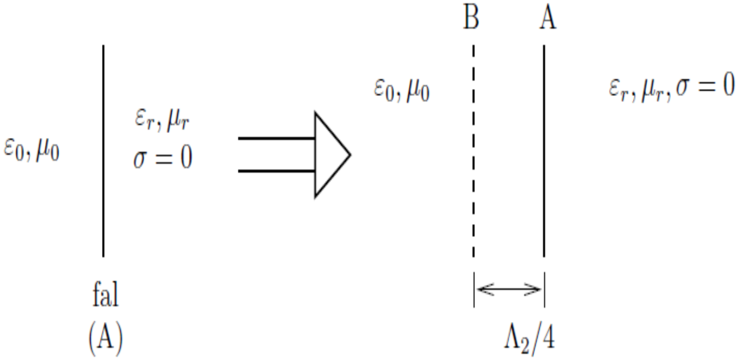
$$\varepsilon_r = 1.5^2 = 2.25$$

A hullám fázissebessége

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\Lambda}} = c\frac{\Lambda}{\lambda} = 2 \cdot 10^8 \ m \ s^{-1}$$

P2.6

Feladat : Szabad térben $f = 10$ MHz frekvenciájú síkhullám terjed. A síkhullám a terjedési irányra merőleges. A falnál $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0$ jellemzőjű anyaghoz ér.
Illesszük a távvezeték-analógia alapján a síkhullámot!



P2.6 - megolás

Megoldás :

A fal utáni anyag hullámellenállása

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} Z_0 = \frac{1}{2} Z_0$$

Az analógia alapján illesztéshez az A fal elé a $Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_0}$ hullámellenállású, $\Lambda_2/4$ széles anyagot helyezünk el.

$$Z_2 = \sqrt{Z_0 Z_1} = \frac{Z_0}{\sqrt{2}}$$

feltételezve, hogy $\mu_{r,2} = 1$ kiszámíthatjuk $\varepsilon_{r,2}$-t

$$\frac{Z_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\mu_{r,2}\mu_0}{\varepsilon_{r,2}\varepsilon_0}} = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,2}}} \rightarrow \varepsilon_{r,2} = 2$$

P2.6 - megoldás folyt.

az A és B síkok között a hullámhossz

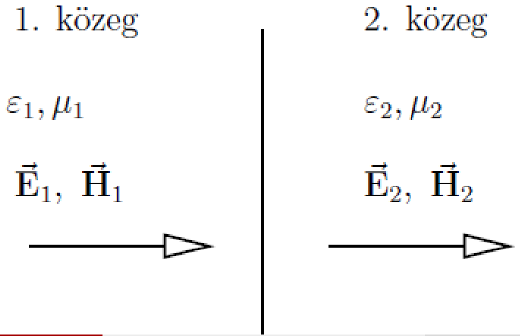
$$\Lambda_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_{r,2}\varepsilon_{r,2}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{c}{f\sqrt{2}} = 21.22m$$

Így a Z_2 hullámellenállású anyag szükséges szélessége

$$a = \frac{\Lambda_2}{4} = \frac{21.22}{4} = 5.32\ m$$

P2.12

Feladat : Két ideális dielektrikum anyagállandói : $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$ ill. $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$, $\mu_2 = \mu_0$. Ha egy $E_1 = 1\ V/m$ elektromos térerősségű síkhullám merőlegesen esik be az 1. közegből a két dielektrikumot elválasztó síkra, mekkora lesz a 2. közegben a továbbhaladó hullám térerősségének értéke? Határozzuk meg a továbbhaladó és a beeső elektromos és mágneses térerősségek viszonyát is!



P2.12 - folyt.

Megoldás : A reflexiókoefficiens értéke :

$$r = \frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4} - \sqrt{2}}{\sqrt{4} + \sqrt{2}} = \frac{0.586}{3.444} = 0.172 = -\frac{H_1^-}{H_1^+}$$

Az elválasztó síkon az elektromos térerősség nagysága :

$$E_2 = E_1^+ + E_1^- = E_1^+(1 + r) = E_1^+ \left[1 + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right] = E_1^+ \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

$$\frac{E_2}{E_1^+} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{2\sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{4}} = 1.165$$

$$E_2 = 1.165 E_1^+ = 1.165 \ V/m$$

P2.12 - folyt. 2

Mágneses térerősségek számításához a hullámellenállásokat használjuk fel

$$E_2 = H_2 Z_2 \qquad E_1^+ = H_1^+ Z_1$$

$$\frac{H_2}{H_1^+} = \frac{Z_1}{Z_2}\,\frac{E_2}{E_1^+} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4} + \sqrt{2}} = 0.831$$

Veszteséges szigetelők

Szinuszos jelek esetében $\varepsilon_k = \varepsilon(1 - j\tan\delta)$ komplex dielektromos állandóva a létrejövő veszteségeket a veszteség nélküli egyenletekkel ($\varepsilon \to \varepsilon_k$) helyettesítéssel számolni tudjuk.

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{\text{vezetési áram}}{\text{eltolási áram}} = \frac{I_v}{I_e} = \frac{\sigma E}{\varepsilon\omega E} = \frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$$

Maxwell I. :

$$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \varepsilon\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \sigma\vec{\mathbf{E}} + j\omega\varepsilon\vec{\mathbf{E}} = j\omega\varepsilon\left[1 - j\underbrace{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}_{\tan\delta}\right]\vec{\mathbf{E}} =$$

$$= j\omega\varepsilon[1 - j\tan\delta]\vec{\mathbf{E}} = j\omega\varepsilon_k\vec{\mathbf{E}}$$

Veszteséges szigetelők – folytatás

Számítsuk ki $\tan\delta$ **függvényében az** α**,**β**,**Z_0 **értékeket jó szigetelők esetében!**

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_k} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon(1 - j\mathrm{tg}\delta)}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_k}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\ \frac{1}{1 - j\mathrm{tg}\delta}}$$

$$\text{jó szigetelők esetében : } \mathrm{tg}\delta \ll 1 \text{ így sorbafejtés lehetséges}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \approx j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1 - \frac{1}{2}j\mathrm{tg}\delta + \frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\delta\right]$$

Veszteséges szigetelők – folytatás 2.

$$\gamma = \alpha + j\beta \approx j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1 - \frac{1}{2}j\mathrm{tg}\delta + \frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\delta\right]$$

$$\boxed{\alpha \approx \frac{1}{2}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\mathrm{tg}\delta \qquad \beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\delta\right)}$$

$$\boxed{Z_0 \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 + \frac{1}{2}j\mathrm{tg}\delta\right)}$$

Nagy frekvencián a szigetelőkben lejátszódó hullámtani problémákat nem σ-val, hanem tgδ-val célszerű leírni, mert az adott frekvencián $\tan\delta$ az összes veszteséget tartalmazza.

P2.15

Feladat :
Az "A" és "B" fal között szigetelő anyag van. Számítsuk ki, hogy az "A" falon mekkora a reflexiós koefficiens.
Adatok : $\varepsilon_r = 4$, $\lambda = 15\ cm$, $\tan\delta = 10^{-2}$, $\ell = 35\ cm$
Megoldás : A szigetelő anyag hullámellenállása :

$$Z_S = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}\left[1 + \frac{1}{2} j \tan\delta\right] = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{4}} = 188.5\Omega$$

A csillapítási együttható :

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\mu\varepsilon}\omega\tan\delta = \ldots = 0.418\ m^{-1}$$

fázistényező :

$$\beta = \beta_0\left[1 + \frac{1}{8}\tan^2\delta\right] \approx \beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_1} = 83.6\ m^{-1}$$

P2.15 - folyt.

$$\text{terjedési együttható}: \ \gamma = \alpha + j\beta = (0.418 + j83.6)m^{-1}$$

$$\gamma\ell = 0.146 + j29.2$$

A feladat távvezeték analógiája : Z_0 hullámellenállású távvezetékhez Z_S hullámellenállású, ℓ hosszuságú, Z_0 impedanciával lezárt távvezeték csatlakozik.
Az analógia alapján az "A" helyen az impedancia értéke :

$$Z_A = Z_S \frac{Z_0 \cosh\gamma\ell + Z_S \sinh\gamma\ell}{Z_0 \sinh\gamma\ell + Z_S \cosh\gamma\ell}$$

Ehhez számítsuk ki $\cosh\gamma\ell$ és $\sinh\gamma\ell$ értékét :

$$\cosh\gamma\ell = \cosh(\alpha + j\beta)\ell = \ldots = -0.606 - j0.116$$

$$\sinh\gamma\ell = \sinh(\alpha + j\beta)\ell = \ldots = -0.0875 - j0.808$$

P2.15 - folyt.

Ezáltal a Z_A impedancia

$$Z_A = (147.5 - j75)\Omega$$

A reflexió tényező :

$$r = \frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0} = \frac{147.5 - j75 - 377}{147.5 - j75 + 377} = 0.448 - j0.079 = 0.454\ e^{-j10^\circ}$$

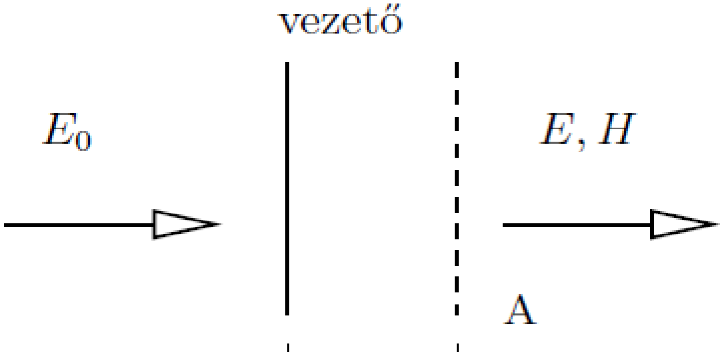
P2.18 - Simonyi 6.17.

Feladat :

Egy $f = 1MHz$ frekvenciájú síkhullám a levegőből merőlegesen réz felületére esik.

Számítsuk ki :

1. a reflexiókoefficiens értékét
2. a réz falán az elektromos térerősség nagyságát!



P2.18 - Simonyi 6.17.

Megoldás :

A dielektrikum ill. a vezető hullámellenállása :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}, \qquad Z_{10} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\ e^{j\frac{\pi}{4}} = 3.7 \cdot 10^{-4} e^{j45^\circ}\,\Omega$$

reflexiókoefficiens a falon :

$$r = \frac{Z_{10} - Z_0}{Z_{10} + Z_0} \approx -1 + 2\sqrt{\frac{\omega\varepsilon\mu_0}{\sigma\mu}} e^{j\frac{\pi}{4}} (1.4 \cdot 10^{-6} - 1) e^{-j0.79 \cdot 10^{-5\circ}} \approx -1$$

elektromos térerősség a vezető falán :

$$E_1 = E_0(1 + r) = E_0\left(1 + \frac{Z_{10} - Z_0}{Z_{10} + Z_0}\right) = 2E_0 \frac{Z_{10}}{Z_{10} + Z_0} \approx$$

$$\approx 2E_0 \frac{Z_{10}}{Z_0} = 2E_0 \sqrt{\frac{\omega\varepsilon\mu_0}{\sigma\mu}}\ e^{j\frac{\pi}{4}} = 1.97 \cdot 10^{-7} E_0\ e^{j\frac{\pi}{4}} \approx 0$$

Áramkiszorítás jelensége - Elmélet

Áramkiszoriási jelenségről beszélünk, ha a vezetőben folyik egy "hasznos" áram, amelynek mágneses tere járulékos "örvényáramokat" hoz létre, miáltal az egyenletes eloszlás eltorzul, és járulékos veszteség keletkezik.
Síkhullám a vezetőben ($E = Ex$, $J = J_x$ és $H = H_y$)

$$E_(z,t) = E(z)e^{j\omega t}; \quad H(z,t) = H(z)e^{j\omega t}; \quad J(z,t) = J(z)e^{j\omega t} = \sigma E(z,t)$$

$$E(z) = E_0 e^{-(1+j)z/\delta}; \quad H(z) = \frac{\sigma E_0}{(1+j)/\delta}; \quad J(z) = \sigma E_0 e^{-(1+j)z/\delta}$$

$z = \delta$ mélységben bármely mennyiség a felületi értékének e-edrészére csökken

$$|E(z)| = E_f e^{-z/\delta}; \quad |J(z)| = \sigma E_f e^{-z/delta}$$

PIV.15

Feladat : Határozzuk meg egy végtelenül mélynek tekinthető alumínium tömb $b = 1cm$ széles és $\ell = 1m$ hosszuságú szakaszának ellenállását $f = 40$ kHz frekvencián.

Megoldás : Az alumínium vezetőképessége $\sigma = 35 \cdot 10^6 \; S/m$, ezért a behatolási mélysége (δ)

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}} = \frac{8.5 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{f}} = 4.25 \cdot 10^{-2} cm$$

Az ellenállása

$$R = \frac{\ell}{\sigma \; b \; \delta} = 6.73 \cdot 10^{-3} \Omega = 6.73 m\Omega$$

PIV.21 feladat

Feladat : Határozzuk meg egy $\ell = 1km$ hosszuságú, $d = 3mm$ átmérőjű rézvezeték ellenállását és belső reaktanciáját $f = 30\ kHz$ frekvencián!

Megoldás : Az egyenáramú ellenállás :

$$R_0 = \frac{\ell}{A\ \sigma} = 2.48\Omega$$

A behatolási mélység

$$\delta = \frac{6.62}{\sqrt{f}} = 3.82 \cdot 10^{-2} cm$$

és

$$x = \frac{r_0}{2\delta} = 1.96$$

PIV.21 feladat - folyt.

A közelítő összefüggések $x > 1$ esetére

$$\frac{R}{R_0} = x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64\ x} = 2.23$$

$$\frac{\omega L_b}{R_0} = x - \frac{3}{64x} = 1.94$$

$$R = 2.23 \cdot 2.48\Omega = 5.52\Omega$$

$$\omega L_b = 1.94 \cdot 2.48 = 4.8\Omega$$

Innen

$$L_b = \frac{\omega L_b}{\omega} = 25.5\mu H$$

$$L_{b0} = \frac{\mu \ell}{8\pi} = 50\mu H$$

Hertz-dipól

Hertz-dipól : olyan ℓ hosszúságú, I_0 áramszál, amelynél $\ell \ll \lambda$ és $d \ll \ell$, ahol λ a frekvenciához tartozó hullámhossz, és d az áramszál átmérője
Másik elképzelés : két egymástól ℓ távolságra levő fémgömb egy egyenes vezetővel összekötve, ezen vezetőn keresztül a két gömb periodikusan feltöltődik és kisül.

Hertz-dipól – folyt.

Hertz-dipólus elektromágneses tere gömbkoordinátákban :

$$E_r = \frac{I_0 \ell}{4\pi} \left[\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{2}{r^2} - \frac{2j}{\omega \varepsilon_0 r^3} \right] \cos\vartheta \; e^{j(\omega t - \beta r)}$$

$$E_\vartheta = \frac{I_0 \ell}{4\pi} \left[\frac{j\omega\mu_0}{r} - \frac{j}{\omega \varepsilon_0 r^3} + \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_0}} \frac{1}{r^2} \right] \sin\vartheta \; e^{j(\omega t - \beta r)}$$

$$E_\varphi = 0$$

$$H_r = 0$$

$$H_\vartheta = 0$$

$$H_\varphi = \frac{I_0 \ell}{4\pi} \left[\frac{j\beta}{r} - \frac{1}{r^2} \right] \sin\vartheta \; e^{j(\omega t - \beta r)}$$

ahol $\beta = 2\pi/\lambda$ és $\omega = v \cdot 2\pi/\lambda$.

Hertz-dipól – folyt. 2.

Távol tér : $r \gg \lambda$, ezért $1/r$-es tagokon kívűl minden elhanyagolható.

$$E_\vartheta = \frac{I_0 \ell}{4\pi} j\omega\mu_0 \sin\vartheta \; e^{j(\omega t - \beta r)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\ell}{\lambda} \; I_m \frac{\sin\vartheta}{r} \; e^{j(\omega t - 2\pi r/\lambda)}$$

$$H_\varphi = \frac{I_0 \ell}{4\pi}\frac{j\beta}{r} \sin\vartheta \; e^{j(\omega t - \beta r)} = \frac{1}{2}\frac{\ell}{\lambda} \; I_m \frac{\sin\vartheta}{r} e^{j(\omega t - 2\pi r/\lambda)}$$

Poynting-vektor (egyetlen radiális irányú rendező) nagysága :

$$S_r = \frac{1}{2} E_\vartheta H_\varphi^\star = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 I_m^2 \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}$$

$$\text{elsugárzott teljesítmény : } P = \frac{1}{2} R_S I_m^2; \quad R_S = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

Hertz-dipólus – folyt. 3.

- H-d. teljesítménye döntő részét felezősíkjának környezetében, forgásszimmetrikusan sugározza ($\sin^2\vartheta \approx 1$)
- tengelye irányában nem sugároz
- maximális elektromos térerősség ($\vartheta = \pi/2$) kifejezhető az elsugárzott teljesítmény

$$E_{max}(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\ell}{\lambda}\frac{1}{r} = E_{max}(r) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sqrt[4]{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{1}{r}\cdot\sqrt{P}$$

sugárzási karakterisztika : sugárzás térbeli eloszlását jellemzi (rögzített r esetén $|E|$ relatív nagyságát adja meg φ és ϑ függvényében

$$|E_\vartheta| = E_{max}(r)\ \sin\vartheta$$

$$\text{irányítottság}:\ G = \frac{|S|_{max}}{|S|_{\text{átl.}}}$$

A/1 - PDT. 3.5.

Feladat : Egy dipólust $P = 1$ kW energiával gerjesztjük, mekkora lesz a dipól tengelyétől 45° szög alatt a dipóltól 15 km távolságban a Poynting-vektor értéke?

Megoldás :

A maximális térerősség :

$$E_{eff,max} = \frac{300}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{r_m} \sqrt{P^{kW}} = \frac{300}{\sqrt{2}15000} \sqrt{1} = 1.41 \cdot 10^{-2} V/m$$

A $\vartheta = 45^\circ$ irányban $\frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ arányban kisebb

$$E_{eff} = \frac{E_{eff,max}}{\sqrt{2}} = 10^{-2} V/m$$

A/1 - PDT. 3.5. – folyt.

A vizsgált helyen az elektromos és mágneses térerősség hányadosa a szabadtéri hullámellenállás

$$\frac{E}{H} = Z_0 \quad \rightarrow \quad H = \frac{E}{Z_0} \quad \rightarrow \quad H_{eff} = \frac{E_{eff}}{Z_0} = 2.67 \cdot 10^{-5} A/m$$

A Poynting-vektor időbeli átlag értéke

$$S = E_{eff} \cdot H_{eff} = 10^{-2} \cdot 2.67 \cdot 10^{-5} = 2.67 \cdot 10^{-7} \frac{W}{m^2} = 26.7 \frac{mW}{m^2}$$

A/2 - PDT. 3.6.

Feladat :
Egy dipólus hossza : $\ell = 1.2m$, a dipólus árama : $I = 2\ A$, frekvencia : $f = 20\ MHz$.

- Mekkora a dipólus által kisugárzott teljesítmény?
- Mekkora lesz az elektromos térerősség értéke a dipólustól 20 km távolságban a $\delta = \pi/2$ irányban?

Megoldás :
A hullámhossz $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8/20 \cdot 10^6 = 15m$, ezért $\ell/\lambda = 1.2/15 = 0.08$.
A kisugárzott teljesítmény

$$P = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 I_{eff}^2 = ... = 20\ W$$

A/2 - PDT. 3.6.

A térerősség a teljesítményből is kiszámítható :

$$E_{eff} = \frac{300}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\sqrt{P} = \frac{300}{\sqrt{2}}\frac{1}{20}\sqrt{2\cdot 10^{-2}} = 1.5\frac{mV}{m}$$

A térkomponensek egyenletéből is kiszámítható a térerősség

$$E_{eff} = \frac{I_0\ell}{4\pi}\frac{\omega\mu_0}{r} = ... = 1.5\cdot 10^{-3}V/m = 1.5mV/m$$

A/3 - PDT. 3.7.

Feladat :
Egy dipólus sugárzási ellenállása $R_S = 1.5\ \Omega$. A dipólust $P = 600\ W$ teljesítménnyel gerjesztjük, $f = 10\ MHz$ frekvencián. Írjuk fel az elektromos és mágneses térerősségek függvényeit a távoltérben.
Megoldás : A dipólus árama :

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{P}{R_S}} = \sqrt{\frac{600}{1.5}} = 20\ A \quad \rightarrow I_m = \sqrt{2} I_{eff} = 28.28\ A$$

A dipólus hossza a sugárzási ellenállásból kifejezhető

$$R_S = 80\pi^2 \cdot \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

alapján

A/3 - PDT. 3.7.

$$\ell = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{R_S}{80}} = \frac{30}{3.14}\sqrt{\frac{1.5}{80}} = 1.31\ m$$

$$\frac{\ell}{\lambda} = \frac{1.31}{30} = 0.0426$$

távoltér komponensei

$$E_\vartheta = j\frac{\omega\mu_0}{4\pi}\ \frac{I_m\ell}{r}\sin\vartheta\ e^{j\omega(t-r/c)} = ... = j243\cdot\frac{\sin\vartheta}{r}\cdot e^{j2\pi 10^7(t-r/30)}$$

$$H_\varphi = j\frac{I_m\ell}{4\pi}\ \frac{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{r}\sin\vartheta e^{j\omega(t-r/c)} = \ldots = j0.018\frac{\sin\vartheta}{r}\ e^{j2\pi 10^7(t-r/30)}$$