

LINEÁRIS ALGEBRA

Mit nevezünk másodrendű determinánsnak?

Másodrendű determinánsnak nevezzük négy elem, két sorba és két oszlopba rendezett táblázatát, melyhez az alábbi módon rendelünk értéket:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Mit nevezünk egy determináns, egy adott eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsnak?

Azt a determinánst, melyet úgy kapunk, hogy elhagyjuk az elem sorát és oszlopát, s figyelembe vesszük a sakktábla szabályt, azaz megszorozzuk $(-1)^{i+j}$ -vel, ahol i a sor- és j az oszlopindex. Pl. harmadrendű determinánsnál:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

Hogyan értelmezzük az n -ed rendű determinánst?

Kiválasztjuk valamely sorát (oszlopát), s ennek minden elemét megszorozzuk a megfelelő előjeles aldeterminánssal, majd a kapott értékeket összeadjuk. Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg másodrendű determinánsokat nem kapunk, és a másodrendű determináns értéke:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Melyik sora vagy oszlopa szerint lehet kifejtteni egy determinánst?

A determináns bármely sora vagy oszlopa szerint kifejtve ugyanazt az értéket kapjuk.

Mik a determinánsok legfontosabb tulajdonságai?

Nem változik a determináns értéke, ha valamely sorának(oszlopának) minden elemét egy számmal megszorozzuk és ezeket egy másik sor(oszlop) megfelelő elemeihez hozzáadjuk.

Ha egy determináns valamely sorának(oszlopának) minden elemét egy c számmal megszorozzuk, akkor a determináns értéke a c -szeresére változik.

Ha egy determináns főátlója alatt vagy fölött minden elem 0, akkor a determináns értéke a főátlóban levő értékek szorzata.

Mit nevezünk lineáris egyenletrendszernek?

Az alábbi egyenletrendszert, ahol a_{ij} és b_i adott értékek és x_j -k ismeretlenek:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

.

.

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

Mit nevezünk homogén lineáris egyenletrendszernek?

Az alábbi egyenletrendszert, ahol a_{ij} -k adott értékek és x_j -k ismeretlenek:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

.

.

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0$$

Mit nevezünk inhomogén lineáris egyletrendszernek?

Az alábbi egyenletrendszert, ahol a_{ij} és b_i adott értékek és x_j -k ismeretlenek, úgy, hogy a b_i -k között van 0-tól különböző:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

Hány megoldása lehet egy lineáris egyenletrendszernek?

Egy, egy sem, végtelen sok.

Mire alkalmaztuk a Cramer szabályt?

Lineáris egyenletrendszerek megoldására, ha ugyanannyi egyenlet van, ahány ismeretlen, és a fődetermináns nem 0.

Mit mond ki a Cramer szabály?

Ha ugyanannyi egyenlet van egy lineáris egyenletrendszerben, ahány ismeretlen, és a fődetermináns nem 0, akkor egy ismeretlen értékét megkapjuk úgy, hogy a hozzá tartozó determinánst elosztjuk a fődeterminással (a rendszer determinánsával).

A fődetermináns az egyenlet bal oldalán levő együtthatókból álló determináns. Ebből egy ismeretlenhez tartozó determinánst úgy kapunk meg, hogy az ismeretlennek megfelelő oszlopot az egyenletrendszer jobb oldalán álló oszloppal helyettesítjük.

Mit nevezünk mátrixnak?

Elemek n sorba és m oszlopba történő táblázatos elhelyezését.

Mi a mátrix típusa?

$(n \times m)$ -es a mátrix, ha n sora és m oszlopa van.

Mikor mondjuk, hogy két mátrix egyenlő?

Ha azonos típusúak és a megfelelő helyeken álló elemeik megegyeznek.

Mit nevezünk nullmátrixnak(zérusmátrixnak)?

Olyan mátrixot, amelynek minden eleme 0.

Mit nevezünk négyzetes mátrixnak?

Olyan mátrixot, amelynek ugyanannyi sora és oszlopa van.

Mit nevezünk sormátrixnak?

Az egy sorból álló mátrixot sormátrixnak vagy sorvektornak nevezzük.

Mit nevezünk oszlopmátrixnak?

Az egy oszlopból álló mátrixot oszlopmátrixnak vagy oszlopvektornak nevezzük.

Mit nevezünk egységmátrixnak?

Olyan négyzetes mátrixot, amelynek főátlójában minden elem 1-es, és a többi eleme 0. (Olyan diagonális mátrixot, amelynek a főátlójában minden elem 1-es.)

Mit nevezünk diagonális mátrixnak?

Olyan négyzetes mátrixot, amelynek a főátlóján kívüli elemei nullák.

Hogyan értelmezzük egy mátrix transzponáltját?

A mátrix megfelelő sorainak és oszlopainak felcserélésével keletkezett mátrixot nevezzük egy mátrix transzponáltjának.

Hogyan értelmezzük egy mátrix számszorosát (skalár szorossát)?

A mátrix minden elemét megszorozzuk a számmal (skalárral).

Hogyan értelmezzük két mátrix összegét (különbségét)?

Csak azonos típusú mátrixok összegét (különbségét) értelmezzük úgy, hogy a megfelelő elemeket összeadjuk (kivonjuk egymásból).

Hogyan értelmezzük két mátrix szorzatát?

Csak akkor értelmezzük, ha az első tényezőnek annyi oszlopa van ahány sora a másodiknak. Ekkor a szorzat mátrix i -edik sorának j -edik elemét úgy kapjuk meg, hogy az első tényező i -edik sorának és a második tényező j -edik oszlopának megfelelő elemeit összeszorozzuk, és ezeket összeadjuk.

Igaz-e, hogy a mátrix szorzás kommutatív?

Nem.

Mit tud a mátrix szorzás asszociativitásáról?

Ha a BC mátrixok szorzata és az A és a BC mátrixok szorzata is értelmezve van, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Mit tud a mátrix szorzás disztributivitásáról?

Ha B és C azonos típusú mátrixok és az $A(B+C)$ szorzat értelmezve van, akkor $A(B+C) = AB + AC$.

Milyen A és B mátrixok esetén igaz, hogy AB és BA is értelmezve van?

Amikor az elsőnek annyi oszlopa van, mint ahány sora a másodiknak és másodiknak annyi oszlopa van, mint ahány sora az elsőnek.

Mikor nevezzük az A és B mátrixokat felcserélhetőnek?

Ha $AB = BA$.

KOMPLEX SZÁMOK

Mit nevezünk a komplex szám algebrai alakjának?

$z = a + bj$ $a, b \in \mathbb{R}$ és $j^2 = -1$

Mit nevezünk egy komplex szám valós és képzetes részének?

A $z = a + bj$ alakban az „ a ” a valós rész és „ b ” a képzetes rész.

Mit nevezünk egy komplex szám konjugáltjának?

A $z = a + bj$ komplex szám konjugáltja $\bar{z} = a - bj$.

Mit nevezünk egy komplex szám abszolút értékének?

A $z = a + bj$ komplex szám abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Milyen értékei lehetnek a j nem negatív egész kitevős hatványainak?

$1; j; -1; -j$.

Mit nevezünk egy komplex szám trigonometrikus alakjának?

$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$, ahol r a komplex szám abszolút értéke és φ az argumentuma.

Mit nevezünk egy komplex szám exponenciális alakjának?

$z = re^{j\varphi}$, ahol r a komplex szám abszolút értéke és φ az argumentuma.

(Ezen alakban a matematikában a φ csak ívmértékben adható meg!)

Hogyan kell két algebrai alakú komplex számot összeadni?

A valós részeket és a képzetes részeket is összeadjuk. $(z_1 + z_2 = (a_1 + b_1j) + (a_2 + b_2j) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j.)$

Hogyan kell két algebrai alakú komplex számot kivonni egymásból?

A valós részeket és a képzetes részeket is kivonjuk egymásból.

$$(z_1 - z_2 = (a_1 + b_1j) - (a_2 + b_2j) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)j.)$$

Hogyan kell két algebrai alakú komplex számot összeszorozni?

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1j)(a_2 + b_2j) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)j.$$

Hogyan kell két algebrai alakú komplex számot elosztani egymással?

A számlálót és nevezőt is megszorozzuk a nevező konjugáltjával.

$$\left(\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1j}{a_2 + b_2j} = \frac{a_1 + b_1j}{a_2 + b_2j} \cdot \frac{a_2 - b_2j}{a_2 - b_2j} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}j \right)$$

Hogyan kell két trigonometrikus alakú komplex számot összeszorozni?

Az abszolút értékeket összeszorozzuk, és az argumentumokat összeadjuk,

$$(z_1 z_2 = (r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1))(r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2))).$$

Hogyan kell két trigonometrikus alakú komplex számot elosztani egymással?

Az osztandó abszolút értékét elosztjuk az osztó abszolút értékével és az osztandó argumentumából kivonjuk az osztó argumentumát.

$$\left(\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \right).$$

Hogyan kell egy trigonometrikus alakú komplex számot pozitív egész kitevős hatványra emelni?

Az abszolút értéket hatványozzuk, és az argumentumot szorozzuk a hatványkitevővel.

$$(z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad z^n = r^n (\cos(n\varphi) + j \sin(n\varphi))).$$

Hogyan kell egy trigonometrikus alakú komplex számból (pozitív egész kitevős) gyököket vonnni?

$$\text{Ha } z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} + j \sin \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Hogyan kell két exponenciális alakú komplex számot összeszorozni?

Az abszolút értékeket összeszorozzuk, és az argumentumokat összeadjuk.

$$(z_1 z_2 = (r_1 e^{j\varphi_1})(r_2 e^{j\varphi_2}) = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}).$$

Hogyan kell két exponenciális alakú komplex számot elosztani egymással?

Az osztandó abszolút értékét elosztjuk az osztó abszolút értékével, és az osztandó argumentumából kivonjuk az osztó argumentumát.

$$\left(\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \right).$$

Hogyan kell egy exponenciális alakú komplex számot pozitív egész kitevős hatványra emelni?

Az abszolút értéket hatványozzuk, és az argumentumot szorozzuk a hatványkitevővel.

$$(z = r e^{j\varphi}, \quad z^n = r^n e^{jn\varphi}).$$

VEKTORGEOMETRIA

Mit nevezünk vektornak?

Olyan mennyiséget, amelynek iránya és nagysága van.

Mit nevezünk egységvektornak?

Olyan vektort, amelynek a nagysága 1.

Mit nevezünk null vektornak?

Olyan vektort, amelynek a nagysága 0 és az iránya tetszőleges.

Mit nevezünk egy vektor ellentettjének?

Olyan vektort, amelynek nagysága ugyanaz, mint a vektor nagysága és az iránya vele ellentétes.

Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek az i, j, k bázisvektorok?

Páronként egymásra merőleges, az adott sorrendben jobbsodrású rendszert alkotó egységvektorok.

Hogyan értelmezzük egy vektor számszorosát (skalárszorosát)?

Ha $\lambda > 0$, akkor $|\lambda a| = \lambda |a|$ és λa egyirányú a -val.

$0a = 0$

Ha $\lambda < 0$, akkor $\lambda a = (-\lambda)(-a)$, ahol $-a$ az a ellentettje.

Hogyan értelmezzük két vektor összegét?



Hogyan értelmezzük két vektor különbségét?

$$a - b = a + (-b).$$

Hogyan értelmezzük két vektor skaláris szorzatát?

$ab = |a| |b| \cos \varphi$, ahol φ az a és b vektor hajlásszögét jelöli.

Milyen kapcsolat van két vektor hajlásszöge és skaláris szorzatuk előjele között?

Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor pozitív, ha a két vektor hegyesszöget zár be egymással.

Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor derékszöget zár be egymással.

Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor negatív, ha a két vektor tompaszöget zár be egymással.

Hogyan értelmezzük két vektor vektoriális szorzatát?

Olyan vektor, amelynek

a) Nagysága: $|a \times b| = |a| |b| \sin \varphi$, ahol φ a két vektor hajlásszöge.

b) Iránya: az a -ra és b -re is merőleges

c) Az a, b és $a \times b$ vektorok (ebben a sorrendben) jobbsodrású rendszert alkotnak.

Mi egy geometriai jelentése $|a \times b|$ -nek (ahol $|a \times b|$ az a és b vektorok vektoriális szorzatának abszolútértéke)?

Megadja az a és b vektorok által kifeszített paralelogramma területét.

Igaz-e, hogy a skaláris szorzás kommutatív?

Igaz.

R Igaz-e, hogy a skaláris szorzás asszociatív ?
Nem.

Igaz-e, hogy a skaláris szorzás disztributív ?
Igaz.

F Igaz-e, hogy a vektoriális szorzás kommutatív ?
Nem.

Igaz-e, hogy a vektoriális szorzás asszociatív ?
Nem.

Igaz-e, hogy a vektoriális szorzás disztributív ?
Igaz.

F Milyen kapcsolat van $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ és $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ között?
Ellentettük egymásnak!

R Írja fel egy vektor bázisvektoros alakját!
 $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$.

R Mit nevezünk egy vektor koordinátáinak?
Az $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ felbontásban az a_1, a_2, a_3 számokat.

F Hogyan kapjuk meg egy vektor koordinátaiból egy skalárszorosának koordinátáit?
Mindegyik koordinátát megszorozzuk a skalárral.

F Hogyan kapjuk meg két vektor összegének(különbségének) koordinátáit a két vektor koordinátaiból?
A megfelelő koordinátákat összeadjuk(kivonjuk).

F Hogyan kapjuk meg két vektor skaláris szorzatát a két vektor koordinátaiból?
A megfelelő koordinátákat összeszorozzuk, és ezeket összeadjuk.

F Hogyan kapjuk meg két vektor vektoriális szorzatát a két vektor koordinátaiból?

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

R Mit nevezünk egy egyenes egy irányvektorának?
Olyan $\mathbf{0}$ vektortól különböző vektort, ami párhuzamos az egyenessel.

R Mit nevezünk a sík egy normálvektorának?
Olyan $\mathbf{0}$ vektortól különböző vektor, amely merőleges a síkra.

F Hogyan kapjuk meg egy vektor abszolút értékét a vektor koordinátaiból?
A koordináták négyzetösszegéből négyzetgyököt vonunk.

F Írja fel a sík egyenletét?
 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
ahol $\mathbf{n}(A; B; C)$ a sík egy normálvektora és $P_0(x_0; y_0; z_0)$ a sík egy pontja.

Írja fel az egyenes egyenletét (paraméteres egyenletrendszerét)?

$$x = x_0 + v_1 t$$

$$y = y_0 + v_2 t$$

$$z = z_0 + v_3 t$$

ahol v (a ; b ; c) az egyenes egy irányvektora és $P_0(x_0; y_0; z_0)$ az egyenes egy pontja.

SZÁMSOROZATOK

Mit értünk számsorozat alatt?

Minden pozitív egész számhoz hozzárendelünk egy –egy valós számot..

Mikor mondjuk, hogy egy számsorozat felülről korlátos?

Ha van olyan valós szám, amelynél a számsorozat minden tagja kisebb.

Mikor mondjuk, hogy egy számsorozat alulról korlátos?

Ha van olyan valós szám, amelynél a számsorozat minden tagja nagyobb.

Mikor mondjuk, hogy egy számsorozat korlátos?

Ha felülről és alulról is korlátos.

Mikor mondjuk, hogy egy számsorozat növekvő?

Az (a_n) számsorozat növekvő, ha bármely $n \geq 1$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.

Mikor mondjuk, hogy egy számsorozat csökkenő?

Az (a_n) számsorozat csökkenő, ha bármely $n \geq 1$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

Mikor mondjuk, hogy egy számsorozat szigorúan növekvő?

Az (a_n) számsorozat növekvő, ha bármely $n \geq 1$ esetén $a_n < a_{n+1}$.

Mikor mondjuk, hogy egy számsorozat szigorúan csökkenő?

Az (a_n) számsorozat csökkenő, ha bármely $n \geq 1$ esetén $a_n > a_{n+1}$.

Mikor mondjuk, hogy egy számsorozat határértéke az a szám?

Egy számsorozat határértéke a , ha a bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van.

Mikor mondjuk, hogy egy számsorozat határértéke $+\infty$?

Egy számsorozat határértéke $+\infty$, ha $+\infty$ bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van.

Mikor mondjuk, hogy egy számsorozat határértéke $-\infty$?

Egy számsorozat határértéke $-\infty$, ha $-\infty$ bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van.

Mikor mondjuk, hogy egy számsorozat konvergens?

Ha van véges határértéke.

Mikor mondjuk, hogy egy számsorozat divergens?

Ha nincs véges határértéke.

Igaz-e, hogy egy konvergens számsorozat korlátos?

Igaz.

Igaz-e, hogy egy korlátos számsorozat konvergens?

Nem.

Adjon meg olyan korlátos számsorozatot, amely nem konvergens!

Pl. $a_n = (-1)^n$

Lehet-e egynél több határértéke egy számsorozatnak?

Nem.

A q milyen értékeire konvergens a (q^n) számsorozat, és ekkor mennyi a határértéke?

Ha $-1 < q \leq 1$. Ekkor: $\lim_n q^n = 0$, ha $-1 < q < 1$, és $\lim_n 1^n = 1$.

FÜGGVÉNYEK

Mit értünk függvény alatt?

Legyen A és B két nem üres halmaz, ekkor az A-n értelmezett és B-beli értékeket felvevő függvény az A halmaz egyértelmű leképezése a B halmazba. (Az A halmazt a függvény értelmezési tartományának, a B halmazt a függvény képhalmazának nevezzük.)

Mit nevezünk egy függvény értékkészletének?

Az $f: A \rightarrow B$ függvény értékkészlete az $f(x)$ $x \in A$ értékek halmaza.

Mit nevezünk egy függvény inverzének?

Az $f: A \rightarrow B$ függvénynek csak akkor van inverze, ha f kölcsönösen egyértelmű leképezés az f értelmezési tartománya és értékkészlete között. Ekkor a függvény inverze az a függvény, amelynek értelmezési tartománya az f értékkészlete, értékkészlete az f értelmezési tartománya és az f^{-1} -gyel jelölt hozzárendelési szabályára az f értelmezési tartományának bármely x_0 eleme esetén teljesül, hogy $f^{-1}(f(x_0)) = x_0$.

Mit értünk két függvényből összetett függvény alatt?

Az $f \circ g$ összetett függvényen azt a függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya g értelmezési tartományának azon része, ahol a g olyan értékeket vesz fel, amelyeken az f függvény értelmezve van és hozzárendelési szabálya a következő:

x_0 helyen az összetett függvény értéke az f függvénynek a $g(x_0)$ helyen felvett értéke. (Az f függvényt külső, a g függvényt belső függvénynek nevezzük.)

Mit értünk egyváltozós valós függvény alatt?

Ha a valós számok egy részhalmazának minden eleméhez hozzárendelünk egy-egy valós számot.

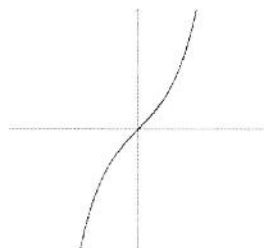
Mi a kapcsolat az egyváltozós valós függvény és inverzének grafikonja között?

A függvény inverz függvényének grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképe.

Definiálja és ábrázolja a shx függvényt!

(szinusz hiperbolikus x)

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

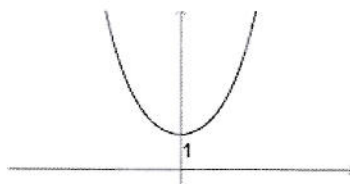


(Értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok halmaza. Páratlan, szigorúan növekedő, folytonos függvény).

Definiálja és ábrázolja a chx függvényt!

(koszinusz hiperbolikus x)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

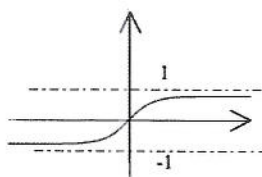


(Értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete az $[1; \infty[$ intervallum. Páros és folytonos).

Definiálja és ábrázolja a thx függvényt!

(tangens hiperbolikus x)

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

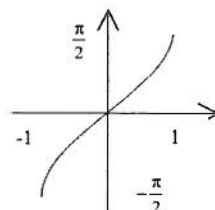


(Értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a $] -1; 1 [$ intervallum. Páratlan, szigorúan növekedő és folytonos).

Definiálja és ábrázolja az arcsinx függvényt!

Az $x \mapsto \sin x$ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ függvény inverze.

(árkusz szinusx)

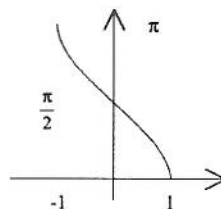


(Értelmezési tartománya: a $[-1, 1]$ intervallum. A függvény értékkészlete a $[-\pi/2; \pi/2]$ intervallum. Mivel az $x \mapsto \sin x$ függvény a $[-\pi/2; \pi/2]$ intervallumon páratlan, folytonos és szigorúan növekedő, ezért az $x \mapsto \arcsin x$ függvény a $[-1, 1]$ intervallumon szintén folytonos és szigorúan növekedő. Hozzárendelési törvény: $\arcsin x_0$ azt a $-\pi/2$ és $\pi/2$ közötti szöget jelenti (ívmértékben), amelyre $\sin(\arcsin x_0) = x_0$).

Definiálja és ábrázolja az arccosx függvényt!

Az $x \mapsto \cos x$ $x \in [0; \pi]$ függvény inverze.

(árkusz koszinusz x)

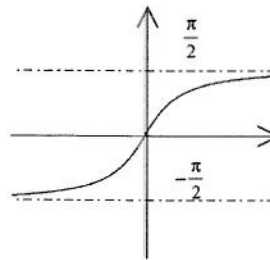


(Értelmezési tartománya: a $[-1, 1]$ intervallum. A függvény értékkészlete a $[0; \pi]$ intervallum. Mivel az $x \mapsto \cos x$ függvény a $[0; \pi]$ intervallumon folytonos és szigorúan csökkenő, ezért az $x \mapsto \arccos x$ függvény $[-1, 1]$ intervallumon szintén folytonos és szigorúan csökkenő. Hozzárendelési törvény: $\arccos x_0$ azt a 0 és π közötti szöget jelenti (ívmértékben), amelyre $\cos(\arccos x_0) = x_0$).

Definiálja és ábrázolja az arctgx függvényt!

Az $x \mapsto \operatorname{tg} x$ $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ függvény inverze.

(árkus tangens x)



(Értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A függvény értékkészlete a $]-\pi/2; \pi/2[$ intervallum. Mivel az $x \mapsto \operatorname{tg} x$ függvény a $]-\pi/2; \pi/2[$ intervallumon páratlan, folytonos és szigorúan monoton növekedő, ezért az $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ függvény a $]-\infty; \infty[$ intervallumon szintén páratlan, folytonos és szigorúan monoton növekedő függvény. Hozzárendelési törvénye: $\operatorname{arctg} x_0$ azt $-\pi/2$ és $\pi/2$ közötti szöget jelenti (ívmértékben), amelyre $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x_0) = x_0$).

Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvény korlátos egy intervallumon?

Ha megadhatók olyan k és K valós számok, hogy az intervallumban lévő bármely x -re: $k < f(x) < K$.

Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvény alulról korlátos egy intervallumon?

Ha megadható olyan k valós szám, hogy az intervallumban lévő bármely x -re: $k < f(x)$.

Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvény felülről korlátos egy intervallumon?

Ha megadható olyan K szám valós szám, hogy az intervallumban lévő bármely x -re: $f(x) < K$.

Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvény páros?

Ha értelmezési tartománya szimmetrikus a 0-ra és $x \in D_f$ esetén $f(-x) = f(x)$.

Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvény páratlan?

Ha értelmezési tartománya szimmetrikus a 0-ra és $x \in D_f$ esetén $f(-x) = -f(x)$.

Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvény periodikus?

Ha található olyan $p > 0$ valós szám, hogy ha $x \in D_f$, akkor $x \pm p \in D_f$ és $f(x) = f(x+p)$.

Mit nevezünk egy egyváltozós periodikus valós függvény periódusának?

Ha van a periodicitás definíciójában szereplő $p > 0$ valós számok között legkisebb, akkor ez a periódus.

Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvény egy intervallumon konvex?

Ha az intervallumban a grafikonjának bármely két pontját összekötő húr alatt vagy magán a húron vannak a grafikon megfelelő pontjai.

Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvény egy intervallumon konkáv?

Ha az intervallumban a grafikonjának bármely két pontját összekötő húr felett vagy magán a húron vannak a grafikon megfelelő pontjai.

Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvénynek az x_0 -ban inflexiós pontja van?

Ha van az x_0 -nak olyan környezete, amelyben f értelmezve van és ebben a környezetben az x_0 előtt konvex és x_0 után konkáv vagy az x_0 előtt konkáv és x_0 után konvex.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény monoton csökken egy intervallumon?

Ha az intervallum bármely két olyan pontjára, amelyre $x_1 < x_2$, az $f(x_1) \geq f(x_2)$ reláció teljesül.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény monoton nő egy intervallumon?

Ha az intervallum bármely két olyan pontjára, amelyre $x_1 < x_2$, az $f(x_1) \leq f(x_2)$ reláció teljesül.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény szigorúan monoton csökken egy intervallumon?

Ha az intervallum bármely két olyan pontjára, amelyre $x_1 < x_2$, az $f(x_1) > f(x_2)$ reláció teljesül.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény szigorúan monoton nő egy adott intervallumon?

Ha az intervallum bármely két olyan pontjára, amelyre $x_1 < x_2$, az $f(x_1) < f(x_2)$ reláció teljesül.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvénynek az x_0 -ban helyi(lokális) minimuma van?

Ha van az x_0 -nak olyan környezete, amelyben f értelmezve van és ebben a környezetben az $f(x_0)$ a legkisebb függvényérték.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvénynek az x_0 -ban helyi(lokális) maximuma van?

Ha van az x_0 -nak olyan környezete, amelyben f értelmezve van és ebben a környezetben az $f(x_0)$ a legnagyobb függvényérték.

Jellemezze az $f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$) függvényt monotonitás szempontjából!

Ha $a > 1$, szigorúan monoton növekvő a függvény.

Ha $0 < a < 1$, szigorúan csökkenő a függvény.

Jellemezze az $f(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$) függvényt monotonitás szempontjából!

A függvény $a > 1$ esetében szigorúan növekedő, míg $0 < a < 1$ esetén szigorúan monoton csökkenő.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény határértéke az $x = a$ helyen A ?

Ha f értelmezve van az $x = a$ pont valamely környezetében esetleg az a -t kivéve és bármely $x_n \rightarrow a$ sorozatra a megfelelő függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozata A -hoz konvergál.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény határértéke $x = a$ helyen $+\infty$?

Ha f értelmezve van az $x = a$ pont valamely környezetében esetleg az a -t kivéve és minden olyan $\{x_n\}$ sorozatra, amely az a -hoz tart, az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata $+\infty$ -hez tart.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény határértéke $x = a$ helyen $-\infty$?

Ha f értelmezve van az $x = a$ pont valamely környezetében esetleg az a -t kivéve és minden olyan $\{x_n\}$ sorozatra, amely az a -hoz tart, az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata $-\infty$ -hez tart.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény határértéke a $(+\infty)$ -ben A ?

Ha f értelmezve van a $+\infty$ valamely környezetében és minden olyan $\{x_n\}$ sorozatra, amely a $(+\infty)$ -hez tart, az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata A -hoz tart.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény határértéke $(+\infty)$ -ben $+\infty$?

Ha f értelmezve van a $+\infty$ valamely környezetében és minden olyan $\{x_n\}$ sorozatra, amely a $(+\infty)$ -hez tart, az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata $(+\infty)$ -hez tart.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény határértéke $(+\infty)$ -ben $-\infty$?

Ha f értelmezve van a $+\infty$ valamely környezetében és minden olyan $\{x_n\}$ sorozatra, amely a $(+\infty)$ -hez tart, az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata $(-\infty)$ -hez tart.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény határértéke a $(-\infty)$ -ben A?

Ha f értelmezve van a $-\infty$ valamely környezetében és minden olyan $\{x_n\}$ sorozatra, amely a $(-\infty)$ -hez tart, az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata A-hoz tart.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény határértéke a $(-\infty)$ -ben $+\infty$?

Ha f értelmezve van a $-\infty$ valamely környezetében és minden olyan $\{x_n\}$ sorozatra, amely a $(-\infty)$ -hez tart, az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata $(+\infty)$ -hez tart.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény határértéke a $(-\infty)$ -ben $-\infty$?

Ha f értelmezve van a $-\infty$ valamely környezetében és minden olyan $\{x_n\}$ sorozatra, amely a $(-\infty)$ -hez tart, az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata $(-\infty)$ -hez tart.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény jobboldali határértéke az $x = a$ helyen A?

Ha f értelmezve van az $x = a$ valamely jobb félkörnyezetében és bármely $x_n \rightarrow a$ és $x_n > a$ sorozatra az $\{f(x_n)\}$ függvényértékek sorozata A-hoz konvergál.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény jobboldali határértéke az $x = a$ helyen $+\infty$?

Ha f értelmezve van az $x = a$ valamely jobb félkörnyezetében és bármely $x_n \rightarrow a$ és $x_n > a$ sorozatra az $\{f(x_n)\}$ függvényértékek sorozata $(+\infty)$ -hez tart.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény jobboldali határértéke az $x = a$ helyen $-\infty$?

Ha f értelmezve van az $x = a$ valamely jobb félkörnyezetében és bármely $x_n \rightarrow a$ és $x_n > a$ sorozatra az $\{f(x_n)\}$ függvényértékek sorozata $(-\infty)$ -hez tart.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény baloldali határértéke az $x = a$ helyen A?

Ha f értelmezve van az $x = a$ valamely bal félkörnyezetében és bármely $x_n \rightarrow a$ és $x_n < a$ sorozatra az $\{f(x_n)\}$ függvényértékek sorozata A-hoz konvergál.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény baloldali határértéke az $x = a$ helyen $+\infty$?

Ha f értelmezve van az $x = a$ valamely bal félkörnyezetében és bármely $x_n \rightarrow a$ és $x_n < a$ sorozatra az $\{f(x_n)\}$ függvényértékek sorozata $(+\infty)$ -hez tart.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény baloldali határértéke az $x = a$ helyen $-\infty$?

Ha f értelmezve van az $x = a$ valamely bal félkörnyezetében és bármely $x_n \rightarrow a$ és $x_n < a$ sorozatra az $\{f(x_n)\}$ függvényértékek sorozata $(-\infty)$ -hez tart.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény folytonos az $x = a$ helyen?

Ha f értelmezve van a-ban és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény balról folytonos az $x = a$ helyen?

Ha f értelmezve van a-ban és $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény jobbról folytonos az $x = a$ helyen?

Ha f értelmezve van a-ban és $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény folytonos az $[a; b]$ intervallumban?

Ha az $[a; b]$ minden pontjában folytonos.

Mikor mondjuk, hogy egy egváltozós valós függvény folytonos az $[a; b]$ intervallumban?

Ha az $[a; b]$ minden pontjában folytonos és a-ban jobbról, b-ben balról folytonos.

Mit nevezünk kétváltozós valós függvénynek?

Olyan függvényt, amelynek az értelmezési tartománya a sík pontjainak egy részhalmaza és képhalmaza a valós számok halmaza.

Mikor mondjuk, hogy egy kétváltozós valós függvény az értelmezési tartományának egy A részhalmazán felülről korlátos?

Ha van olyan K valós szám, hogy az A halmaz minden pontjában a függvény értéke K -nál kisebb.

Mikor mondjuk, hogy egy kétváltozós valós függvény az értelmezési tartományának egy A részhalmazán alulról korlátos?

Ha van olyan k valós szám, hogy az A halmaz minden pontjában a függvény értéke k -nál nagyobb.

Mikor mondjuk, hogy egy kétváltozós valós függvény az értelmezési tartományának egy A részhalmazán korlátos?

Ha az A halmazon felülről és alulról is korlátos.

Mikor mondjuk, hogy egy kétváltozós valós függvény az értelmezési tartományának egy (x_0, y_0) pontjában folytonos?

Ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta$$

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

Definiálja a differencia- és differenciálhányados fogalmát!

Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezve, és legyen x olyan eleme ennek a környezetnek, amelyre $x \neq x_0$.

Ekkor az $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvényt az x_0 ponthoz tartozó differenciálhányados-függvényének nevezzük.

A differenciálhányados a differenciálhányados-függvény határértéke az x_0 helyen.

Mikor differenciálható egy egyváltozós valós függvény az x_0 helyen?

Ha a függvény x_0 pontbeli differenciálhányados-függvényének határértéke az x_0 helyen véges.

Írja le az egyváltozós valós függvény deriváltfüggvényének definícióját!

Azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya azon x pontok halmaza, ahol f differenciálható, és amelynek értéke egy ilyen x pontban $f'(x)$, az f függvény differenciálhányados-függvényének vagy derivált-függvényének (röviden deriváltjának) nevezzük.

Milyen kapcsolat van egy függvény adott helyen való folytonossága és differenciálhatósága között?

Az x_0 helyen folytonos függvény nem feltétlenül differenciálható a szóban forgó helyen.

Az x_0 helyen differenciálható függvény az adott helyen folytonos.

Írja le a szorzat függvény deriválási szabályát!

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Írja le a hányadosfüggvény deriválási szabályát!

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

R Írja le az összetett-függvény deriválási szabályát!

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

F Értelmezze egy egyváltozós valós függvény második differenciálhányadosát!

Ha az f és az f' függvények differenciálhatóak az x pontban, akkor az f' x helyen vett differenciálhányadosát az f függvénynek az x helyen vett második differenciálhányadosának (deriváltjának) nevezzük.

F Értelmezze egy egyváltozós valós függvény n -ik ($n \in \mathbb{N}$) deriváltfüggvényét!

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = (f')', \dots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

F Mit nevezünk egy egyváltozós valós függvény egy stacionárius pontjának?

Az f stacionárius pontja x_0 , ha f differenciálható az x_0 valamely környezetében és $f'(x_0) = 0$.

F Differenciálhányadosok segítségével adjon egy szükséges feltételt egy egyváltozós valós függvény helvi(lokalis) szélsőértékének létezésére!

Legyen az f függvény differenciálható az x_0 valamely környezetében és $f'(x_0) = 0$.

F Differenciálhányadosok segítségével adjon egy elégséges feltételt egy egyváltozós valós függvény helvi(lokalis) minimumának létezésére!

Ha az f függvény differenciálható az x_0 valamely környezetében és $f'(x_0) = 0$, akkor ahhoz, hogy a függvénynek az x_0 helyen lokális minimuma legyen elegendő, hogy az f' függvény az x_0 helyen $(-)$ -ből $(+)$ -ba előjelet váltson.

(Ha az x_0 helyen n -szer differenciálható f függvény deriváltjaira igaz az, hogy:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ és } f^{(n)}(x_0) > 0 \text{ és } n > 1 \text{ páros szám, akkor az } f \text{ függvénynek az } x_0 \text{ helyen helyi minimuma van.})$$

F Differenciálhányadosok segítségével adjon egy elégséges feltételt egy egyváltozós valós függvény helvi(lokalis) maximumának létezésére!

Ha az f függvény differenciálható az x_0 valamely környezetében és $f'(x_0) = 0$, akkor ahhoz, hogy a függvénynek az x_0 helyen lokális maximuma legyen elegendő, hogy az f' függvény az x_0 helyen $(+)$ -ból $(-)$ -ba előjelet váltson.

(Ha az x_0 helyen n -szer differenciálható f függvény deriváltjaira igaz az, hogy:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ és } f^{(n)}(x_0) < 0 \text{ és } n > 1 \text{ páros szám, akkor az } f \text{ függvénynek az } x_0 \text{ helyen helyi maximuma van.})$$

F Differenciálhányadosok segítségével adjon egy szükséges feltételt egy egyváltozós valós függvény inflexiós pontjának létezésére!

Legyen f az x_0 hely valamely környezetében kétszer differenciálható, és $f''(x_0) = 0$.

F Differenciálhányadosok segítségével adjon egy elégséges feltételt egy egyváltozós valós függvény inflexiós pontjának létezésére!

Ha f az x_0 hely valamely környezetében kétszer differenciálható, és $f''(x_0) = 0$, valamint az f'' függvény az x_0 helyen előjelet vált, akkor f -nek az x_0 helyen inflexiós pontja van.

(Ha az x_0 helyen n -szer differenciálható f függvény deriváltjaira igaz az, hogy:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ és } f^{(n)}(x_0) \neq 0 \text{ és } n > 1 \text{ páratlan szám, akkor az } f \text{ függvénynek az } x_0 \text{ helyen inflexiós pontja van.})$$

Ismertesse az L'Hospital szabályt!

Legyen a véges érték vagy $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumok valamelyike. Tegyük fel, hogy az f és a g függvények az a hely valamely környezetében (esetleg csak féloldalon) deriválhatóak, amelyekre $f(a) = g(a) = 0$ vagy a $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ és a $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ határértékek mindegyike $+\infty$ és $-\infty$ valamelyike. Tegyük fel továbbá, hogy a $\lim_{x \rightarrow a} (f'(x) / g'(x))$ határérték létezik és $g'(x) \neq 0$ az $x = a$ egy környezetében (esetleg csak féloldalon). Ekkor a $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x))$ is létezik és $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f'(x) / g'(x))$.

Ismertesse a teljes függvényvizsgálat legfontosabb lépéseit!

1. Értelmezési tartomány.
(Képlettel megadott függvények esetén a képlet értelmzési tartományának meghatározása.)
2. Határértékek.
(Ha az értelmzési tartomány véges sok diszjunkt intervallum egyesítése, akkor ezek végpontjaiban kell határértékeket számolni.)
3. Tengelymetszetek.
4. Paritás.
5. Periodicitás.
6. Folytonosság.
7. Monotonitás, helyi szélsőértékek.
(A függvény első deriváltjának felírása, ebből a stacionárius pontok meghatározása, majd a derivált előjelének vizsgálata.)
8. Konvexitás, konkávitás, inflexiós pontok.
(A függvény második deriváltjának felírása, ebből az inflexiós pontok meghatározása, majd a második derivált előjelének vizsgálata.)
9. A függvény gráfjának vázlatos ábrázolása.
10. Értékkészlet.

Mi az $x = a$ helyen differenciálható egyváltozós valós függvény differenciálja?

$$df|_{x=a} = f'(a)(x-a).$$

Tegyük fel, hogy az $f(x;y)$ kétváltozós függvény értelmezve van az $(x_0;y_0)$ egy környezetében.

Mikor mondjuk, hogy az $f(x;y)$ x -szerinti parciálisan differenciálható az $(x_0;y_0)$ pontban?

Ha a $g(x) = f(x; y_0)$ egyváltozós függvény differenciálható az x_0 -ban.

Tegyük fel, hogy az $f(x;y)$ kétváltozós függvény értelmezve van az $(x_0;y_0)$ egy környezetében.

Mikor mondjuk, hogy az $f(x;y)$ y -szerinti parciálisan differenciálható az $(x_0;y_0)$ pontban?

A $h(y) = f(x_0; y)$ egyváltozós függvény differenciálható az y_0 -ban.

Tegyük fel, hogy az $f(x;y)$ kétváltozós függvény értelmezve van az $(x_0;y_0)$ egy környezetében.

Mit nevezünk az $f(x;y)$ x -szerinti parciális differenciálhányadosának az $(x_0;y_0)$ pontban?

A $g(x) = f(x; y_0)$ egyváltozós függvény differenciálhányadosát az x_0 -ban.

Tegyük fel, hogy az $f(x;y)$ kétváltozós függvény értelmezve van az $(x_0;y_0)$ egy környezetében.

Mit nevezünk az $f(x;y)$ y -szerinti parciális differenciálhányadosának az $(x_0;y_0)$ pontban?

A $h(y) = f(x_0; y)$ egyváltozós függvény differenciálhányadosát az y_0 -ban.

Hogyan írható fel egy $f(x; y)$ kétváltozós függvény α szögű iránymenti deriváltja az $(x_0; y_0)$ pontban?

$$\frac{df}{d\alpha} = A \cos \alpha + B \sin \alpha, \quad \text{ahol } A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_0}.$$

Hogyan értelmezzük egy $f(x; y)$ kétváltozós függvény teljes differenciálját?

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Mit mond ki egy $f(x; y)$ kétváltozós függvényről a véges növekmények tétele?

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

u. filver

Hogyan írható fel egy $f(x; y)$ kétváltozós függvényvel adott felületnek az $(x_0; y_0)$ ponthoz tartozó érintősíkjának az egyenlete?

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z - z_0) = 0, \text{ ahol } A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0}, B = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y_0} \text{ és } z_0 = f(x_0; y_0).$$

Mit nevezünk az $f(x; y)$ kétváltozós függvény tiszta másodrendű parciális deriváltjainak?

Az $f'_x(x; y)$ x-szerinti és az $f'_y(x; y)$ y-szerinti parciális deriváltját, azaz az $f''_{xx}(x; y)$ és $f''_{yy}(x; y)$ másodrendű parciális deriváltakat.

Mit nevezünk az $f(x; y)$ kétváltozós függvény vegyes másodrendű parciális deriváltjainak?

Az $f'_x(x; y)$ y-szerinti és az $f'_y(x; y)$ x-szerinti parciális deriváltját, azaz az $f''_{xy}(x; y)$ és $f''_{yx}(x; y)$ másodrendű parciális deriváltakat.

Mit mondhatunk egy kétváltozós valós függvény vegyes másodrendű parciális deriváltjairól?

Általában egyenlők.

(Ha a másodrendű parciális deriváltak folytonosak, akkor a vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlők.)

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

(határozatlan integrálok)

Mit nevezünk egy intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény egy primitív függvényének?

Ha létezik olyan F függvény, amely az I intervallumon differenciálható és minden $x \in I$ -re

$F'(x) = f(x)$, akkor az F függvényt az f függvény I intervallumhoz tartozó primitív függvényének nevezzük.

Milyen kapcsolat van egy intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény primitív függvényei között?

Egy intervallumon értelmezett függvény primitív függvényei csak egy additív konstansban különböznek. (Bármely kettő különbsége állandó.)

Értelmezze az $f(x)$ függvény határozatlan integrálját!

Az f függvény primitív függvényeinek halmazát az f függvény határozatlan integráljának nevezzük,

($\int f(x) dx = F(x) + C$, ahol $F'(x) = f(x)$ és C konstans).

Mivel egyenlő:

* a kérdés felkövér betűi a válasz az egyenlőség után normál betűvel!

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx \text{ ahol } c \text{ állandó}$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Mivel egyenlő $\int f(ax+b) dx$, ahol $a \neq 0$?

$$\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C, \text{ ahol } F'(x) = f(x).$$

Mivel egyenlő $\int (f(x))^\alpha \cdot f'(x) dx$ ($\alpha \neq -1$)?

$$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

Mivel egyenlő $\int f'(x)/f(x) dx$?

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$$

Mivel egyenlő $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$?

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C, \text{ ahol } F'(x) = f(x).$$

Írja fel a parciális integrálás képletét határozatlan integrálra!

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

(határozott integrálok)

Mit nevezünk az $[a;b]$ intervallum egy adott felosztásához tartozó integrál közelítő összegének?

Ha $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ és $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ $i = 1, 2, \dots, n$, akkor az integrálközelítő összeg:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Mikor mondjuk, hogy egy intervallum egy F_n felosztássorozata minden határon túl finomodó?

Ha $n \rightarrow \infty$ esetén az F_n bármely részintervallumának hossza 0-hoz tart.

Mikor mondjuk, hogy $[a;b]$ intervallumon korlátos $f(x)$ függvény, az $[a;b]$ -ban (Riemann) integrálható?

Ha integrál közelítő összegeinek bármely minden határon túl finomodó felosztás sorozat esetén ugyanaz a véges határértéke van.

Mit nevezünk egy függvény határozott integráljának?

Az integrál közelítő összegeinek közös határértékét.

Mondjon elégséges feltételt arra, hogy egy az $[a;b]$ -ben korlátos függvény itt integrálható legyen?

- Legyen itt folytonos, vagy
- Legyen itt véges sok ponttól eltekintve folytonos, vagy
- Legyen itt monoton függvény.

Mivel egyenlő:

* a kérdés felkövér betű a válasz pedig mellette normál betűvel!

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \text{ ahol } c \text{ állandó}$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \text{ ahol } a < c < b$$

✕ Mondjon egy geometriai jelentését az $[a;b]$ -ben integrálható és itt nem negatív f függvény határozott integráljának!

Megadja az intervallumban a függvény grafikonja és az x tengely közti területet.

✕ Mit mond ki a Newton-Leibniz tétel?

Ha f integrálható $[a;b]$ -ben, s itt van primitív függvénye, ami F , akkor:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$