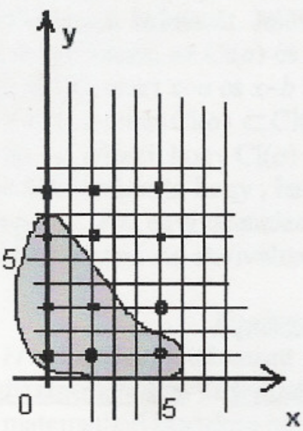
Ez az oldal a fontos

**Binér (kételemű) reláció**

A szorzathalmaz fogalmának felhasználásával megadhatjuk a reláció matematikai fogalmát. A *reláci* *két vagy több halmaz Descartes-féle szorzatának valamilyen részhalmazát jelenti.*
Binérnek (kételeműnek) nevezzük azt a relációt, amelyet két halmaz Descartes-féle szorzatának rész halmazával adhatunk meg. A továbbiakban ilyen relációkkal foglalkozunk. Legyen például

$R \subseteq A \times B \quad R = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B \wedge x + y < 7\}$ vagy röviden xRy. $A=\{0, 2, 5\}$ és $B = \{1, 3, 6, 8\}$ halmaz, és $x + y < 7$ ($x \in A$ és $y \in B$).
Először képezzük $A \times B$-t, aztán jelöljük meg annak R részhalmazát.
$R = \{(0,1), (0,3), (0,5), (2,1), (2,3), (5,1)\}$




A relációbeli rendezett párok első összetevőinek halmazát *(az x elemek halmazát) a reláció értelmezési tartományának*, a második helyen levő összetevőinek halmazát *(az y elemek halmazát)* pedig *a reláció képtartományának* nevezzük. Ha az értelmezési tartományt és a képtartományt felcseréljük, a reláció inverzét kapjuk.
Például a *3 osztója 51-nek* reláció inverze *51 többszöröse 3-nak.*
Egy binér reláció elemeinek első összetevőjéből (x) általában meghatározható a második (y) összetevő. Ezért a reláció elemeinek első(x) összetevőjét a reláció független változójának, második (y) összetevőjét függő változónak is nevezzük.

Vannak többváltozós relációk is. Legyen például rendre $A_1$ a postai irányítószámok, $A_2$ a helységnevek, illetve $A_3$ a körzetszámok halmaza.

$A_1 = \{8127, 5241, 7678, 3261\}, A_2 = \{Aba, Abádszalók, Abaliget, Abasár\}, A_3 = \{22, 59, 72, 37\}$
$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(8127, Aba, 22), (8127, Abádszalók, 22), (8127, Abaliget, 22), (8127, Abasár, 22), (8127, Aba, 59), \ldots\}$

Az R reláció akkor adott, ha bármely párról meg lehet állapítani, hogy rendelkezik-e a kérdéses tulajdonsággal, vagy sem. Általában egy relációt meghatározhatunk:

- az alaphalmaz és valamely tulajdonság megadásával,
- a relációhoz tartozó rendezett párok felsorolásával,
- gráffal,
- táblázattal.

Az *a* relációban van *b*-vel jelölése: *a*R*b*, vagy (*a*, *b*) ∈ R. Két reláció akkor inverze egymásnak, ha alaphalmazuk ugyanazokat az elempárokat tartalmazza, de a párok sorrendje fordított.
A relációkat tulajdonságaik alapján osztályozhatjuk. A különböző tulajdonságok egyidejű megléte vagy hiánya alapján beszélhetünk a relációk típusairól.

## Binér relációk tulajdonságai

*Binér relációk reflexivitása*
Egy binér relációt akkor mondunk **reflexív**nek, ha valamennyi (*x*, *y*) rendezett párnak megvan az R tulajdonsága. Pl: a=b ⇒ b=a vagyis az egyenlőségi reláció reflexív. Ellenben a≥b -ből nem következik, hogy b≥a, vagyis a „nagyobb vagy egyenlő"reláció irreflexív.
*Binér reláció szimmetriája*
Egy halmazon értelmezett R relációt akkor mondunk **szimmetrikus**nak, ha bármely *x*, *y* ∈ *H*-ra, az (*x*, *y*) és az (*y*, *x*) rendezett pár is kielégíti a relációt. *x*R*y* = *y*R*x*. A szimmetria tehát tulajdonképpen a reláció megfordíthatóságát jelenti.
*Binér relációk tranzitivitása*
Egy halmazon értelmezett R binér relációt **tranzitív**nak nevezünk, ha az alaphalmaz bármely *x*, *y*, *z* elemeire fennáll, hogy ha abból, hogy az (*x*, *y*) és az (*y*, *z*) párok kielégítik a relációt, mindig következik, hogy az (*x*, *z*) pár is kielégíti. (*x*R*y* és *y*R*z*) ⇒ *x*R*z*.

## *Ekvivalencia-reláció*

**A** *H* halmaz elemei között **értelmezett** R **relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük akkor, ha egyidejűleg**
reflexív
szimmetrikus **és**
tranzitív. **Jelölése:** $x \sim y$.

## *Ekvivalenciaosztályok*

**L**egyen R a *H* halmazban **értelmezett ekvivalenciareláció és** *a* a *H* halmaz egy eleme. Az *a* ekvivalencia-oszt**ályának nevezzük** *H a*-val ekvivalens elemeinek halmaz**át, azaz az** *a*-val rel**ációban** levő **elemek halmazát. Jelölése: Cl(*a*)**. Az *a* ekvivalenciaosztály, **tehát részhalmaza***H*-nak. T**ételezzük** fel, hogy **létezik az Cl(*a*) és Cl(*b*)** ekvivalenciaoszt**ályoknak egy közös** *x* eleme. Mivel $x \in \mathrm{Cl}(a)$ **és** $x \in \mathrm{Cl}(b)$, ez**ért** $x \sim a$ **és** $x \sim b$ egyidej**űleg fennállnak. A tranzitivitás miatt** $a \sim b$. Ez azt jelenti, hogy $a \in \mathrm{Cl}(b)$, tehát **Cl(*a*)** $\subset \mathrm{Cl}(b)$. Ugyan**így megmutatható, hogy Cl(*b*)** $\subset \mathrm{Cl}(a)$.
Ami azt jelenti, hogy $\mathrm{Cl}(a) = \mathrm{Cl}(b)$
Ebb**ől következik, hogy , ha két ekvivalenciaosztálynak van nem üres metszete, akkor** azonosak. K**ét ekvivalenciaosztály metszete az üres halmaz. Bármely osztályt bármely eleme** meghat**ározza. Az ekvivalenciaosztályok egy relációra vonatkoztatva felosztják a halmazt.**

## ***Rendezési reláció***

**A** *H* halmazban **értelmezett** R **binér relációt akkor mondjuk rendezési relációnak, ha <u>reflexív</u>, <u>antiszimmetrikus</u>** és **<u>tranzitív</u>**.
A matematikai irodalom haszn**álja a teljes rendezés**, illet**őleg szigorú értelemben vett rendezés és a nem teljes rendezés**, illet**őleg a tág értelemben vett rendezés (részbeni rendezés)** fogalm**át. Ha az antiszimmetriát** <u>tágabb</u> **értelemben vesszük, eljutunk a nem teljes** rendez**és és ha** <u>szigorú</u> **értelemben vesszük, a teljes rendezés fogalmához. A rendezési reláció jelölésére az** antiszimmetria jellegeszerint a$\leq$(nem teljes rendez**és) illetve a<(teljes rendezés) jeleket használjuk.**
Teljes rendez**ésnél az alaphalmaz elemeinek sorrendje egyértelműen meghatározott.**

A matematika ismeri az **irreflexív rendezés** fogalm**át is. Ez a reláció <u>antiszimmetrikus</u>, <u>tranzitív</u>** és **nem reflexív**. A *H* halmazt r**észben rendezett halmaznak mondjuk akkor, ha a** *H*-ban **értelmezett az egyenlőség relációjától különböző olyan nem teljes rendezési reláció, amely reflexív,** antiszimmetrikus **és tranzitív.**

## *Halmazok rendezettsége*

**E**gy halmaz rendezett, ha **értelmezünk benne egy rendezési relációt. Ha erre a relációra a halmaznak** van **összehasonlíthatatlan elempárja, a halmaz részben(parciálisan) rendezett**.
Ha minden elem**pár összehasonlítható, azaz minden** $a, b \in H$ eset**én vagy** $a < b$, vagy $a = b$, vagy $a > b$ **teljesül (trichotomia), akkor a halmaz teljesen rendezett**. Ha *a*, *b* a *H* halmaz két tetsz**őleges eleme, az** $x \in H$ elemet *a* **és** *b* **felső korlát**j**ának nevezzük a < relációra, ha az** $a < x$ **és** $b < x$ teljes**ül. Ha pedig** $x < a$ **és** $x < b$ **áll fenn, akkor** *x* **alsó korlát**.
A $c \in H$ elem az *a* **és** *b* elemek **legkisebb felső korlát**ja, ha

1. $a < c$ **és** $b < c$, tehát *c* fels**ő korlát, és**
2. $a < x$ **és** $b < x \Rightarrow c < x$.

A **legnagyobb alsó korlát** defin**íciójában a < jelek helyett > jeleket kell írni.**

Egy *H* halmaz <u>részhalmaz</u>ainak halmaz**án két r**észhalmaz legkisebb fels**ő korlátja a két halmaz** <u>unió</u>ja, legnagyobb als**ó korlátja a két halmaz** <u>metszete</u>, ez**ért jelölésükre az unió és a metszet jelölése** használatos.

# *Nevezetes elemek részben rendezett halmazokban*

*Nullelem*
Egy $H$ részben rendezett halmaz olyan 0 elemét, amelyre $0 < x$, minden $x \in H$-ra, legkisebb elemnek vagy nullelemnek nevezzük. A rendezési reláció antiszimmetrikus voltából következik, hogy a nullelem,ha létezik, egyetlen, ugyanis $0 < 0'$ és $0' < 0 \Rightarrow 0 = 0'$.
*Egységelem*
Egy $H$ részben rendezett halmaz olyan $e$ elemét, amelyre $x < e$, minden $x \in H$-ra, legnagyobb elemnek vagy egységelemnek (univerzális elemnek) nevezzük. Az előbbi módon belátható, hogy univerzális elem is csak egy létezik.
Egyes nevezetes elemek egy $H$ halmaz $A$ részhalmazára vonatkoznak, de $A$ esetleg nem tartalmazza őket. Egy $A$ részhalmaz **majoráns**a a $H$ alaphalmaz olyan $s$ eleme, amelyre fennáll, hogy $x < s$, minden $x \in A$-ra. Ha $s$ majoránsa $A$-nak, $H$-nak minden olyan $s'$ eleme, amelyre $s < s'$, szintén majoránsa $A$-nak.
Egy A részhalmaz **minoráns**a a $H$ alaphalmaz olyan $m$ eleme, amelyre fennáll, hogy $m < x$, minden $x \in A$ -ra. Ha $m' < m$, akkor $m'$ is minoránsa $A$-nak.

*HALMAZELMÉLETI FELADATOK(b változat)*

1.) Adja meg az alábbi halmazok összes részhalmazát!

$a.)\ A=\{a;b;c\}\ b.)\ B=\{0\}\ c.)\ C=\Phi\ d.)\ D=\{1;2;3;4\}$

2.) Az M={1;2;3;4;5;6;7;8} halmaz részhalmazairól tudjuk,hogy:

$A\cup B=\{1;2;3;4;5;;6;7\}\ A\cup C=\{1;2;5;6;7\}\ (A\cup C)-C=\{1\}\ A-B=\{1;7\}$

$A\cap B\cap C=\{2\}$

Határozza meg az M halmaz A,B és C részhalmazait!

3.) Adottak az M={a;b;c;} és az N={e;f;g;h} halmazok. Hány részhalmazuk van az

$$M\times N;\ az\ N\times M;\ illetve\ az\ N\times N$$

halmazoknak?

4.) Adja meg, elemeik felsorolásával, a következő halmazokat:

$$a.)\quad A=\left\{x|x\in N \quad és\ x=\frac{12}{n};n\in N\right\}$$

$$b.)\quad B=\left\{x|x=\frac{19}{n-1};x\in N;n\in N\right\}$$

$$c.)\quad C=\{(x;y)|x\in A;y\in B\} \qquad A=\{2;3;5;\}.és..B=\{4;5;7\}$$

5.) Egy osztály 21 tanulója közül tizenhatan vettek részt az első, nyolcan a második kiránduláson. Hányan kirándultak mindkét alkalommal?

6.) Egy intézmény 100 alkalmazottja közül 28 beszél angolul, 30 németül,42 olaszul.
Angolul és németül is beszélnek nyolcan, angolul és olaszul tízen, németül és olaszul öten. Hárman mindhárom nyelvet beszélik.
a.)Hányan vannak azok, akik egyik nyelvet sem beszélik az említett három közül?
b.)Hányan vannak, akik csak olaszul beszélnek?
c.)Hányan vannak, akik olaszul és németül beszélnek, de angolul nem?

7.) Valaki azt állította, hogy egy 100 főből álló évfolyam fele lány, a kollégisták száma 30, a rendszeresen sportolóké 23. A sportoló lányok száma 20, a sportoló kollégistáké 10, a kollégista lányoké 8, a sportoló kollégista lányoké 5. Mutassa meg, hogy az előbbi adatok között ellentmondás van (legalább az egyik adat hamis).

8.) Bizonyítsa be, hogy bármely félkör kerületén ugyanannyi pont van, mint az átmérőjén!

9.) Határozza meg az A\B és a B\A halmazokat, tudva azt, hogy:
A={a;b;c;d}, A $\cup$ B={a;b;c;d;e}, A∩B={a;c}.

10.) Határozza meg az (A×A)∩(B×B) halmaz elemeit, ha A={1;2}, B={1;2;3;4
Hány elemből áll a B halmaz hatványhalmaza (B részhalmazainak halmaza)?

11.) Határozza meg az A és B halmazokat, ha tudja, hogy A∩B={3;5}
A $\cup$ B={1;2;3;4;5}, A\B={1}, B\A={2;4}

12.) Hány közös elemük van az M=A×B és az N=B×A halmazoknak, ha A={0;1;2;3} és B={0;1;2;4}?

## *RELÁCIÓK*

1.) A={1;2;3}, B={2;4;6;8}, $\rho=\{(a,b)\in A\times B \mid b=2a^2\}$
Adja meg a reláció elemeit! Ábrázolja a relációt Venn-diagrammal!

2.) Adott a következő reláció: $\rho=\{(a;b)\in R\times R \mid b=a^2\}$ Ábrázolja koordinátarendszerben!

3.) Legyen Z az egész számok halmaza. A Z halmaz *a* és *b* elemei akkor vannak az $a\rho b$ relációban, ha 8-cal osztva, maradékuk 3, vagyis
$\rho=\{(a;b) \mid a,b\in Z\wedge a=8n+3;b=8k+3;n,k\in Z\}$

## *EGYVÁLTOZÓS, VALÓS FÜGGVÉNYEK*

1.) Az alábbiakban megadott függvények közül melyek nem azonosak és miért?

$a.)\quad f(x)=x^2+2x-3 \qquad f:R\rightarrow R$
$\qquad g(x)=(x-1)(x+3) \qquad g:R\rightarrow R$
$\qquad h(x)=x^2+2x-3 \qquad h:R\rightarrow R^+$

$b.)\quad f(x)=\dfrac{x^2+5x}{x} \qquad f:R-\{0\}\rightarrow R$
$\qquad g(x)=x^2+5x \qquad g:R\rightarrow R$
$\qquad h(x)=x+5 \qquad h:R-\{0\}\rightarrow R$

$c.)\quad f(x)=|x+4|-1 \qquad f:R\rightarrow[-1;\infty[$
$\qquad g(x)=\sqrt{x^2+8x+16}-1 \qquad g:R\rightarrow[-1;\infty)$
$\qquad h(x)=\sqrt{x^2+8x+16}-1 \qquad h:R^+\rightarrow R^+$

2.) Döntse el, hogy az alábbi függvények közül melyek invertálhatóak, és amelyik invertálható, annak írja fel az inverz függvényét!