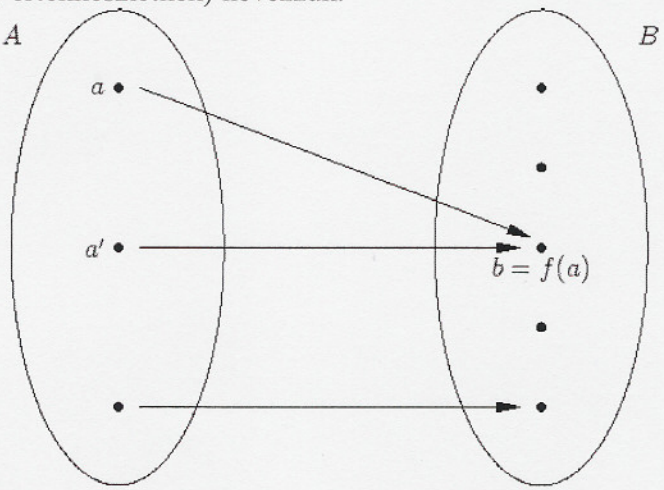
Az A halmaznak a B halmazra való f leképzésén egy olyan utasítást (szabályt) értünk, amely minden $a \in A$ elemhez pontosan egy $b = f(a) \in B$ elemet rendel:

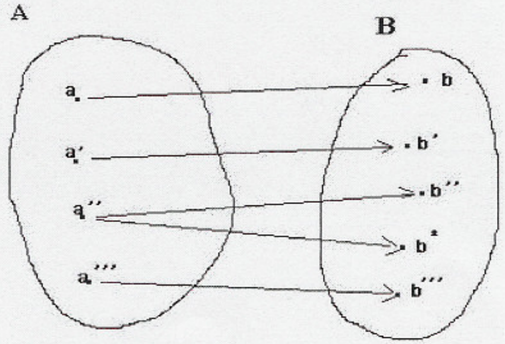
$$f : A \longrightarrow B$$

Az elemek hozzárendelésének jelölésére az $a \mapsto b = f(a)$ jelölést használjuk, ami úgy értendő, hogy a $b(a)$ elem az f függvény által alkotott „képe" az a „tárgynak". Ennek megfelelően az A halmazt tárgyhalmaznak (vagy értelmezési halmaznak), a B halmazt ped képhalmaznak (vagy értékkészletnek) nevezzük.

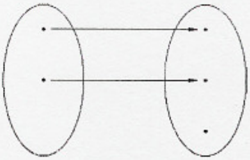
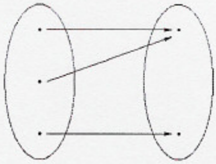
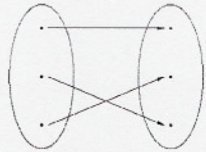


Ahogy az ábrán látható, B -nek lehetnek olyan elemei is, amelyek nem „képei" az A tárgyhalmaz egyik elemének sem, illetve olyanok is, amelyek a tárgyhalmaz több elemének képei (pl: $b = f(a) = f(a')$). Nem tekintjük viszont valós számhalmazon értelmezett egyváltozós valós függvénynek az olyan relációt, amely a tárgyhalmaz adott elemének a képhalmaz több elemét is megfelelteti.

Ebben az értelemben a jobboldalon ábrázolt reláció pl. nem függvény. (A függvény fogalmának ez az értelmezése nem általános érvényű, pl. a komplex függvénytanban nem igaz.)



Az $f : A \to B$ függvény: $\begin{cases} \textit{injektív}, \ \textit{ha} \ \ \forall a \neq a' \wedge a, a' \in A \Rightarrow f(a) \neq f(a') \\ \textit{szürjektív}, \ \textit{ha} \ \ \forall b \in B \ \ \textit{esetére} \ \ \exists a \in A, \ \textit{úgy}, \ \textit{hogy} \ \ f(a) = b \\ \textit{bijektív}, \ \textit{ha} \ \ \textit{egyszerre} \ \ \textit{szürjektív} \ \ \textit{és} \ \ \textit{injektív} \ \ \textit{is.} \end{cases}$

injektív	szürjektív	bijektív
		

A bijektív leképzést nevezik egy-egyértelmű vagy kölcsönösen egyértelmű leképzésne
megfeleltetésnek) is.

Az $f : A \to B$ és $g : B \to C$ $\quad a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)),\ a \in A$ függvények összetev
(másnéven kompozícióját) a következő diagram alapján értelmezhetjük:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

A függvények összetevése (jelölése $\circ$) asszociatív művelet, vagyis:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

de általában nem kommutatív.
Ha az $f : A \to B$ leképzés bijektív, akkor meghatározható f -nek az inverz függvény

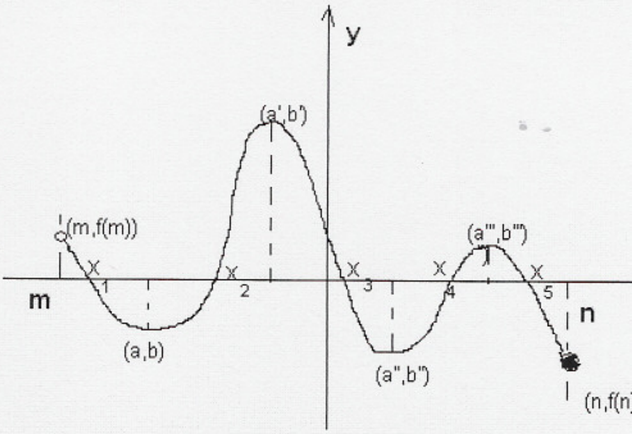
$f^{-1} : B \to A \qquad b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Az $a = f^{-1}(f(a))$, vagyis $f^{-1} \circ f$ összetevéssel azonosságot, másnéven identikus lek
határozunk meg.

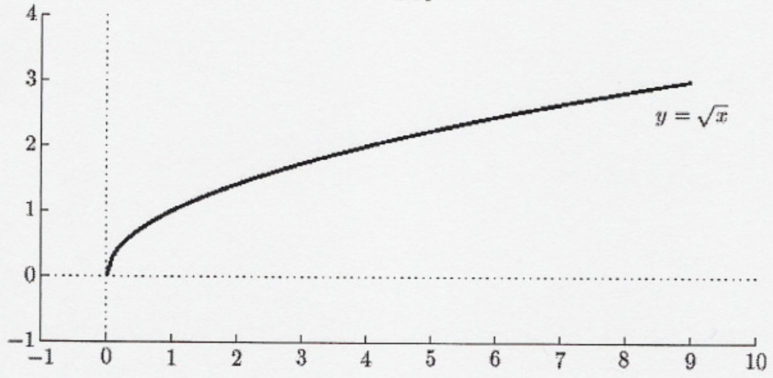
Az $f : D \to R,\ x \mapsto f(x)$ függvény a $D \subseteq R$ értelmezési halmaz minden x eleméhez
függvény minden argumentumához) az értékkészlet (R) egy $f(x) \in R$ elemét rendeli.
függvény grafikonja azon (x, y) értékpárokat jelenti, amelyekre $y = f(x)$.

Szélsőértékek (extrémumok) Az $f:(m,n]\to R_f$ függvénynek (a,b), (a'',b'') helyi (lokális) minimumpontjai, $(n, f(n))$ általános (globális) minimum; (a',b') általános (globális), (a''',b''') pedig helyi (lokális) maximum. Az $(m, f(m))$ pont nem szélsőértékpont, mert $x=m$ -re a függvény nem értelmezett.

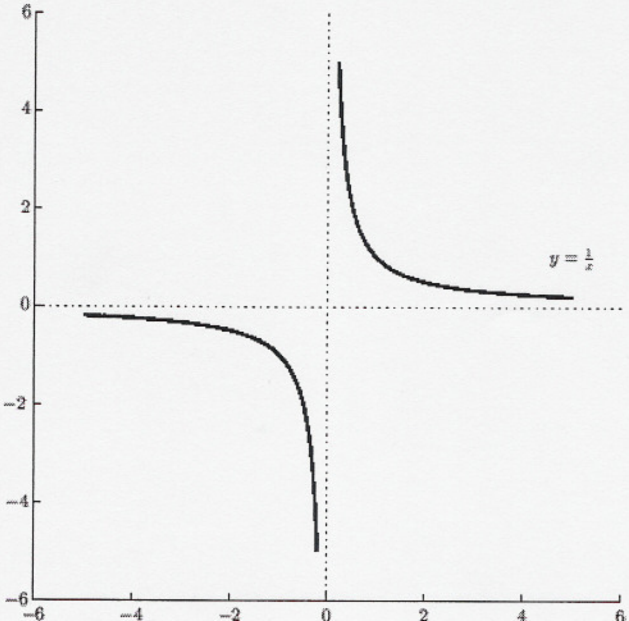


Néhány elemi függvény grafikonja:

1.) A négyzetgyökfüggvény: $x \mapsto \sqrt{x}$, $D = R_0^+$



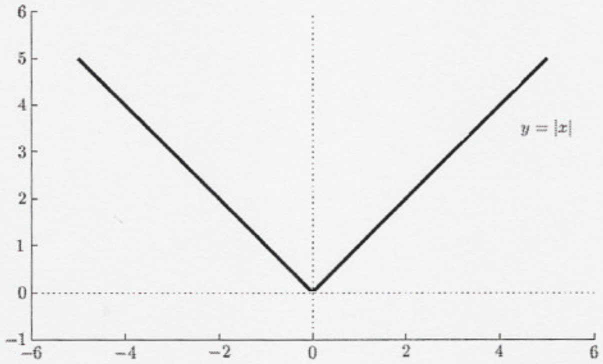
2.) A fordított arányosság: $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D=R\setminus\{0\}$



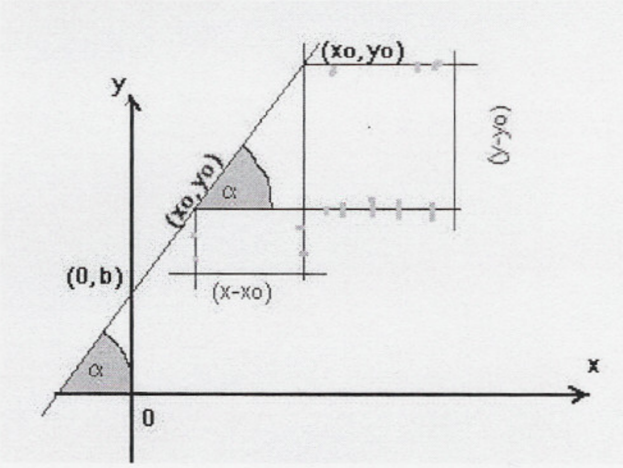
3.) Az abszolútérték-függvény:

$x \mapsto f(x) = |x|$

$D = R$



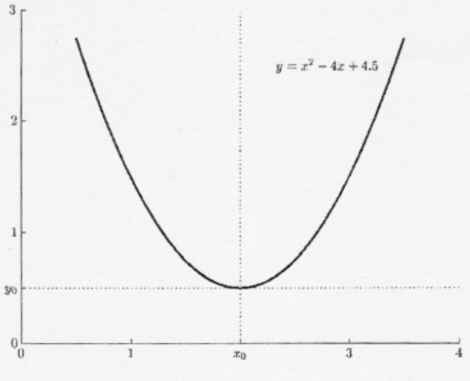
4.) Az elsőfokú függvény: $f(x) = mx + b, \quad x \in R$ grafikonja az m meredekségű egyenes, amelyik az ordinátatengelyt a $(0;b)$ koordinátájú pontban metszi.



$$tg\alpha = m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

5.) Az $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad x \in R$ másodfokú függvény grafikonja az $y = (x - x_0)^2 + y_0$ parabola, amelynek tengelypontja $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$ koordinátájú ($D = b^2 - 4ac$).

PL:



Egy függvény szigorúan monoton növekvő, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, és monoton növekvő, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Ellenkező esetekben szigorúan monoton csökkenő (fogyó), illetve monoton csökkenő.

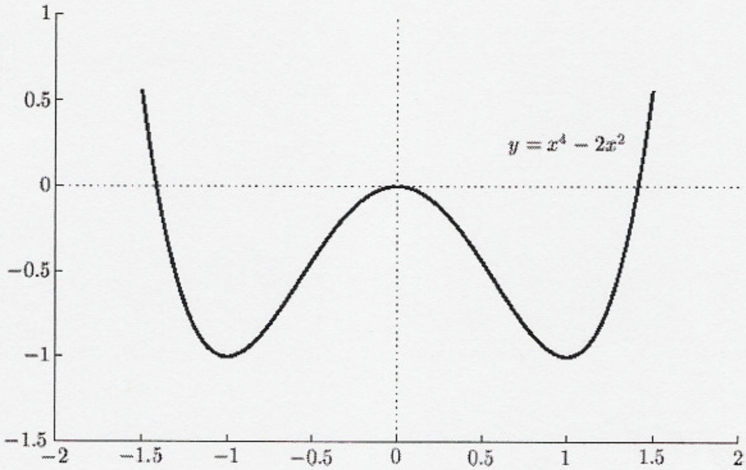
Egy f függvény páros, ha $f(x) = f(-x)$. Ez esetben grafikonjának az ordinátatengely (szimmetriatengelye.

Az f függvény páratlan, ha $f(x) = -f(-x)$. A páratlan függvények grafikonjának az ori szimmetriaközéppontja.

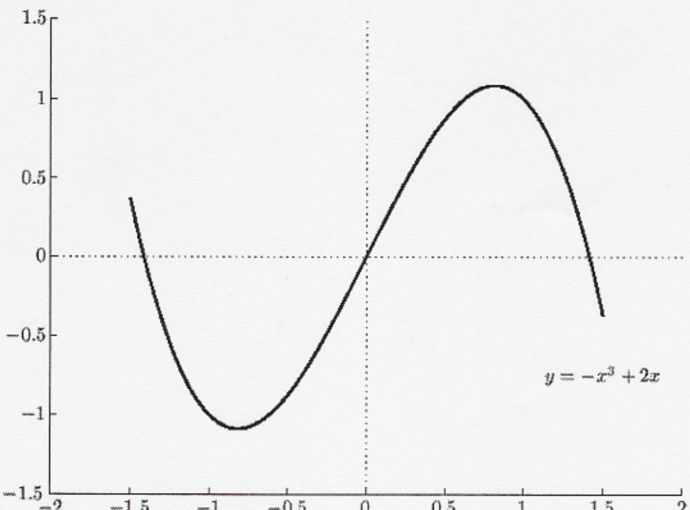
Például az $x \mapsto f(x) = x^4 - 2x^2$ függvény esetében teljesül az

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$$

feltétel, vagyis a függvény páros, $\Rightarrow$ az y tengelyre szimmetrikus a garfikonja.

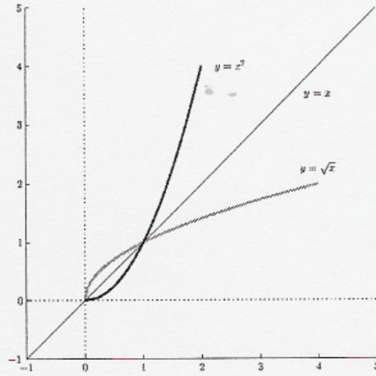


Az $x \mapsto f(x) = -x^3 + 2x$ függvény grafikonjának az origó szimmetria-középpontja, mert $f(-x) = -(-x)^3 + 2(-x) = x^3 - 2x = -f(x)$ vagyis páratlan függvény.

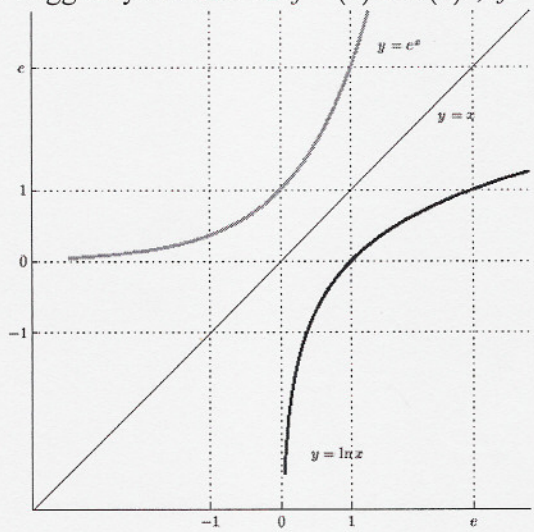


Egy bijektív f függvény f^{-1} inverzét az $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ feltétel alapján határozhatjuk meg. Az $y = f^{-1}(x)$ függvény grafikonja $y = f(x)$ grafikonjának az első szögfelezőre $(y = x)$ vonatkozó tükörképe.

Például az $f(x) = \sqrt{x}$, $f : R_0^+ \to R_0^+$ függvény inverze $f^{-1}(x) = x^2$ ahol $x \in R_0^+$.

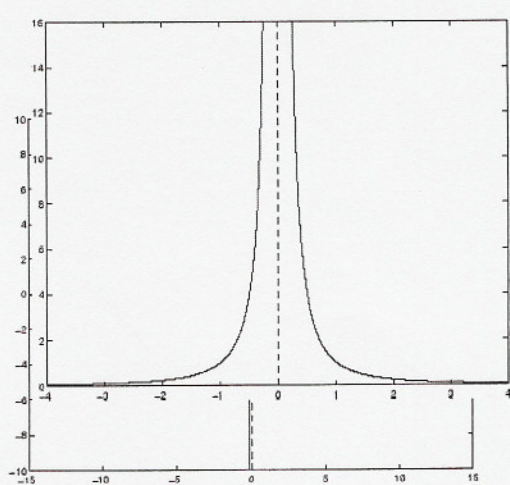


Az $f(x) = e^x$, $f : R \to R^+$ függvény inverze az $f^{-1}(x) = \ln(x)$, $f^{-1} : R^+ \to R$ függvény.

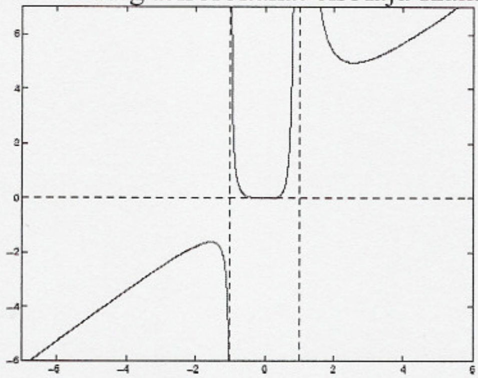


Az $f : R - \{0\} \to R - \{0\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénynek az $x = 0$ pont szakadási pontja..

és ugyanígy az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvénynek is.

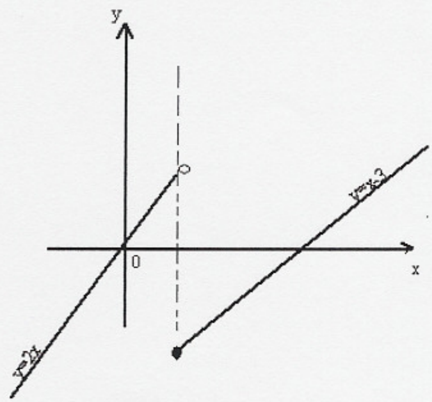


Az $f(x)=\dfrac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$ függvénynek az $x=-1$ és az $x=1$ helyeken is szakadása van. Az eddig felsoroltakat elsőfajú szakadásoknak nevezzük.

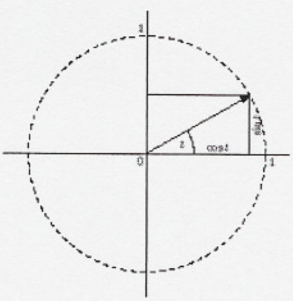


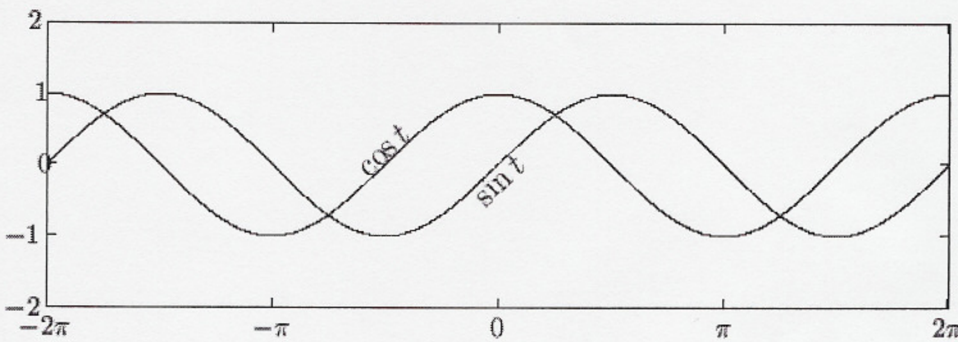
Másodfajú szakadása van pl az

$$f(x)=\begin{cases} 2x & ha \quad x<1 \\ x-3 & ha \quad x\geq 1 \end{cases}$$ függvénynek az $x=1$ helyen.



Trigonometrikus függvények: A $(0,1)$ egységvektort az óramutató járásával ellentétes, azaz matematikailag pozitív irányban t szöggel elforgatva, végpontjának koordinátái $(\cos t, \sin t)$ értékeit jelentik.



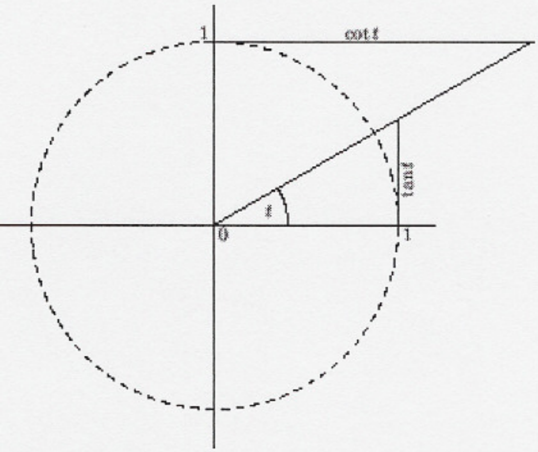


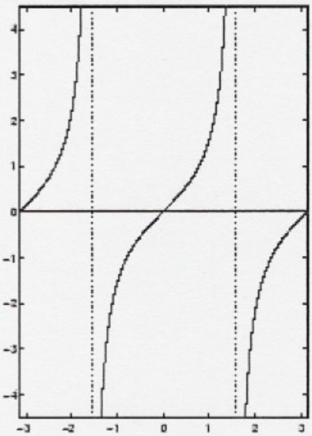
$\sin t$ illetve $\cos t$ értékeit az alábbi táblázatban adtam meg, az első két negyedre.

Természetesen $\dfrac{\sqrt{0}}{2}=0$ és $\dfrac{\sqrt{1}}{2}=\dfrac{1}{2}$, de így talán könnyebb megjegyezni.

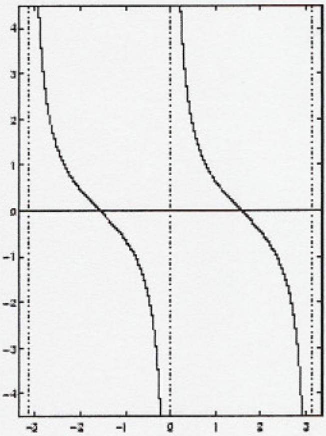
$t(rad)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$t(fok)$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin t$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{4}}{2}$

A tgt illetve a $ctgt$ értékeire $tgt = \frac{\sin t}{\cos t}$ illetve $ctgt = \frac{1}{tgt}$ -ből következtethetünk.(vagy a trigonometrikus kör alapján).





tangens



kotangens

A tanult trigonometrikus függvények közül csak a koszinuszfüggvény páros, a többi páratlan.

A „Négyjegyű"-ben szereplő tulajdonságokon kívül célszerű még tudni, hogy:

$$\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \quad \cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$tgt = ctg\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \quad ctgt = tg\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$