

KOMBINATORIKAI ALAPFOGALMAK

A kombinatorika általában a véges halmazokra vonatkozó rendezési és leszámlálási feladatokkal foglalkozik.

Az elemi kombinatorika legtöbb esetben a következő két kérdés egyikére keresi a választ:

1.) n elem hány különböző módon rendezhető sorba

2.) n elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani?

1.) **Permutációk:** n számú, egymástól megkülönböztethető elem egy meghatározott sorrendjét az n elem egy permutációjának nevezzük. Az n elem összes permutációjának száma:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Megegyezés szerint $0! = 1$

Ha az n elem között egymással megegyezőek is találhatóak, akkor az ezek felcserélésével kapott permutációk nem különböztethetők meg egymástól. Az ilyen esetben számított permutációt ismétléses permutációnak nevezzük. Ha az ismétlődő elemek száma:

k_1, k_2, \dots, k_l és természetesen $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_l \leq n$ akkor az n elem összes ismétléses

permutációinak száma:
$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_l} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_l!}$$

2.) **Variációk:** n számú, egymástól különböző elemből tetszőlegesen kiválasztott k számú ($k \leq n$) elem egy meghatározott sorrendjét az n elem **k -ad osztályú variációjának** nevezzük. Az n egymástól különböző elem összes k -ad osztályú variációjának száma:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{P_n}{P_{n-k}}$$

Pl: 15 parlamenti képviselőből hányféle módon lehet 6 tagú bizottságot összeállítani, ha a bizottságon belül számít a sorrend (mert a tagok nem egyenrangúak: van elnök, titkár,...)?

$$V_{15}^6 = \frac{15!}{(15-6)!}$$

Ha az n számú elem közül a k elemből álló csoportot úgy választhatjuk ki, hogy ugyanaz az elem többször is szerepelhet, és az elemek sorrendjét is figyelembe vesszük, akkor az n elem **k -ad osztályú ismétléses variációját** kapjuk:

$$V_n^{k,i} = n^k$$

Pl: Az 1, 3, 5, 6 számjegyekből, ha bármelyiküket többször is felhasználhatjuk, hány háromjegyű számot készíthetünk?

$$V_4^{3,i} = 4^3$$

3.) **Kombinációk:** Ha n számú, egymástól különböző elemből úgy képezünk k tagú csoportokat, hogy a kiválasztott k elem sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor az n elem **k -ad osztályú kombinációit** kapjuk.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{V_n^k}{k!}$$

Pl: ha az előbbi 15 képviselőből olyan 6 tagú bizottságokat hozunk létre, amelyeken belül mindenki egyenrangú (nem számít a sorrend), akkor a létrehozható bizottságok száma

$$\binom{15}{6} = \frac{15!}{6!(15-6)!}$$

Ha ugyanaz az elem többször is szerepelhet, akkor az n elem **k -ad osztályú ismétléses kombinációját** kapjuk.

$$C_n^{k,i} = \binom{n}{k}_{ism} = \binom{n+k-1}{k}$$

Pl: 8-féle fagyaltból hányféleképpen lehet 5 gombócós adagot kiválasztani, ha egyforma gombócokat is kérhetünk és nem számít a gombócok sorrendje?

$$n=8 \quad k=5 \quad \binom{8+5-1}{5} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!}$$

A Newton-féle binomiális képlet:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n a^{n-n} b^n$$

vagy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n$$

UGYANEZ MÁSKÉNT, MEGOLDOTT FELADATOKKAL A SÁRGA CSÍKOSBÓL

Ismétlés nélküli permutáció

Ha n darab *különböző* elem lehetséges sorbarendezéseinek számát szeretnénk meghatározni, akkor – kombinatorikai szóhasználattal élve – n elem ismétlés nélküli permutációinak számát keressük. (Például: hányféleképpen lehet sorbaállítani egy 30 fős osztályt?)

A megoldáshoz próbáljuk meg sorbaállítani az elemeket: A sorban első helyre n -féleképpen választhatunk elemet (a példában 30 ember közül). A sorban második helyre már csak $n-1$ féleképpen választhatunk elemet, hiszen az első helyen álló elemet már nem használhatjuk fel (a példában 29 ember közül választhatunk). Eddig tehát már $n \cdot (n-1)$ féle választási lehetőségünk volt, hiszen az n féle első elem mindegyike mellé $n-1$ féleképpen választhattunk második elemet! A sorban harmadik helyre már csak $n-2$ féleképp választhatunk elemet, stb. A sorban utolsó előtti helyre már csak 2 választási lehetőségünk maradt, az utolsó helyre pedig már csak 1 maradék elem közül „választhatunk”. Az összes lehetséges sorrendek száma tehát:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 \quad (\text{A példában } 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdots 2 \cdot 1)$$

Tehát n elem ismétlés nélküli permutációinak számát úgy számíthatjuk ki, hogy összeszorozzuk a természetes számokat 1-től n -ig. Erre a szorzatra egy speciális jelölést is bevezettek a matematikában: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ (n faktoriális) Megállapodás szerint $0! = 1$

PI1: Hányféle számot állíthatunk össze az 1, 2, 3, 4 számjegyek felhasználásával, ha mindegyik számjegyet fel kell használni?

Megoldás: A 4 számjegy különböző sorrendben felírva más – más négyjegyű számot határoz meg. Tehát az a kérdés, hogy hányféleképpen tudjuk sorbarendezni a négy *különböző* számjegyet, azaz négy elem ismétlés nélküli permutációinak számát keressük. Ezeknek száma pedig: $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24$ (A jobb számológépek tudnak faktoriálist számolni!)

PI2: Hány 3 –mal kezdődő hatjegyű számot lehet felírni az 1, 3, 4, 6, 7, 9 számjegyekkel, ha minden számjegyet pontosan egyszer használhatunk?

Megoldás: Ez a feladat is ismétlés nélküli permutációkhoz vezet, de most a sorban első elem kötött: a számnak mindenképpen 3 –mal kell kezdődnie. Ilyenkor az első elem lényegében nem vesz részt a rendezgetésben – csak a többi elem sorrendje kérdéses. Tehát öt

darab elem lehetséges sorrendjeinek számát kell kiszámolnunk (az 1, 4, 6, 7, 9 számjegyek) ezeknek száma pedig: $P_5 = 5! = 120$.

PI3: Hány ötrel osztható ötjegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek felhasználásával, ha minden számjegyet pontosan egyszer használhatunk?

Megoldás: A feladat hasonló az előzőhöz, hiszen az ötrel való oszthatóság szabálya szerint a számnak 0-ra kell végződnie. Tehát az első négy számjegyet „permutálhatjuk”. A lehetséges sorrendek száma: $P_4 = 4! = 24$.

PI4: Hány ötjegyű páratlan szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegyet pontosan egyszer használhatunk?

Megoldás: Ez a feladat már túl bonyolult ahhoz, hogy csak úgy „ráhúzzuk” a permutációs számító képletet – kénytelenek vagyunk gondolkodni: Páratlan számot akarunk előállítani, ezért az utolsó helyre az 1, vagy a 3 kerülhet. (ez két lehetőség) Az első helyiértéken nem lehet 0 (mert akkor nem lenne ötjegyű) tehát az első helyre 3 közül választhatunk (nem lehet 0 és nem lehet az, amelyiket már beraktuk az utolsó helyre). Ez eddig összesen $2 \cdot 3 = 6$ lehetőség. A többi helyre (2. 3. 4. helyiérték) a maradék három szám közül választhatunk tetszőleges sorrendben (3 elem ismétlés nélküli permutációja) $3! = 6$ féleképpen. Tehát az összes lehetőségek száma: $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$.

PI5: Nyolc ember – jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H- val – leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A és B egymás mellett üljön?

Megoldás: Vizsgáljuk meg először A és B helyzetét! A pár helyzete a padon 7 féle lehet: vagy az első helyen „kezdődnek”, vagy a másodikon, ... vagy a hetedikén. (A nyolcadik helyen nem „kezdődhetnek”!) A páron belül A és B helyzete kétféle lehet: jobbról A balról B, vagy fordítva. Ez eddig $7 \cdot 2 = 14$ lehetőség. Ha már a pár leült a padra, akkor a többiek a fennmaradó 6 hely között „permutálódhatnak” tetszőleges sorrendben; ezt $P_6 = 6! = 720$ féleképp tehetik. Az összes lehetőségek száma tehát: $14 \cdot 720 = 10080$.

PI6: Hányféleképpen ülhet le Artúr király nyolc lovagja a Kerekasztal köré, ha két elhelyezkedést akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy olyan lovag, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző?

Megoldás: Vegyük észre, hogy a feladat nem azonos az egyenes pad esetével! (Hiszen ha mindenki feláll és egy hellyel „arrébb csusszan” attól még a szomszédsági viszonyok nem változnak!)

Oldjuk meg az ültetési problémát a következőképpen: válasszuk ki az egyik lovagot (PI Lancelot) és ültessük le az egyik (tetszőleges) helyre. Lancelot lesz a viszonyítási pont. A többi lovagot ültessük le Lancelot jobb oldalára az összes lehetséges sorrendben. A hét lovag $P_7 = 7! = 5040$ féleképpen tud leülni Lancelot jobbán. Lancelot kezdeti ülőhelyválasztása nem befolyásolja a szomszédsági viszonyokat, továbbá az sem, hogy Lancelot jobbára vagy baljára kezdtük leültetni a többi lovagot (hiszen úgylis körbeérnek). Tehát az összes lehetőség: 5040.

Ismétléses permutáció

Ismétléses permutációról akkor beszélünk, ha a sorbarendezendő elemek között azonosnak tekinthetők is vannak. (Például: hányféleképpen lehet sorbarakni 3 piros 2 fehér és 4 zöld golyót?) Ilyenkor nyilván nem tekintjük különböző sorbarendezésnek (permutációnak) azokat, amelyeket azonosnak tekinthető elemek felcserélésével kapunk (PI ha felcserélünk 2 zöld golyót). Ezek az azonos elemtípuson belüli rendezgetések csökkentik a lehetséges permutációk számát, mégpedig annyira, ahányféleképpen rendezgethetünk az azonos elemtípusokon belül. A színes golyók példájában tehát az összes (ismétlés nélküli) permutációk számát (9 golyónál 9!) osztanunk kell az egyes golyótípusokon belüli permutációk számával ($3! - al, 2! - al, 4! - al$). A végeredmény tehát:

$$\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{362880}{288} = 1260$$

Általános esetben n darab elem ismétléses permutációinak száma:

$$P_n^{(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Ahol $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ az egyes elemtípusok darabszámait jelentik. (Tehát $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$)

PI1: Hány darab hatjegyű számot készíthetünk a következő számkártyák felhasználásával: 4, 4, 4, 6, 6, 8.

Megoldás: Hat elem ismétléses permutációinak számát kell meghatároznunk, ahol 3 féle elemtípus van (3 darab, 2 darab, 1 darab). A megoldás, azaz a lehetséges sorrendek száma:

$$P_6^{(3,2,1)} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{720}{6 \cdot 2 \cdot 1} = 60$$

PI2: Az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 számjegyekből hány darab 13 –mal kezdődő hétjegyű számot lehet összeállítani?

Megoldás: Az első két helyen mindenképpen 13 áll. (Tehát az első két helyen nincs permutációs lehetőség.) Maradt tehát öt darab számjegyünk: 1, 1, 2, 2, 3. Ezeket tetszőlegesen permutálhatjuk.

A lehetőségek száma: $P_5^{(2,2,1)} = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{120}{2 \cdot 2 \cdot 1} = 30$

PI3: Egy dobozban a MATEMATIKA szó betűi találhatóak. Egyenként kihúzzuk a dobozból a betűket és a kihúzás sorrendjében egymás mellé tesszük őket (balról jobbra haladva). Hány esetben jöhet ki a MATEMATIKA szó?

Megoldás: A kérdéses esetek mindegyikében a MATEMATIKA szót látjuk az asztalon, csak az azonos betűk cserélődhetnek (permutálódhatnak) egymás között. Az A betű 3 példányban szerepel, permutációinak száma: $3!$, az M és T betűk 2-2 példányban szerepelnek ($2!, 2!$ permutáció), a többi betű egyszer szerepel, így azoknak fix helye van a szóban. Az összes lehetőségek száma tehát: $3! \cdot 2! \cdot 2! = 24$.

PI4: Hányféleképpen olvasható ki az alábbi táblázatból az ISKOLA szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

I	S	K	O
S	K	O	L
K	O	L	A

Megoldás: Vegyük észre, hogy a szó kiolvasása során mindig a jobb alsó sarokba kell érkezünk. Ebből következőleg mindegyik kiolvasásnál összesen ötször kell lépünk: háromszor jobbra és kétszer lefelé.

Tehát a JOBBRA, JOBBRA, JOBBRA, LEFELÉ, LEFELÉ elemek (ismétléses) permutációit keressük.

A lehetőségek száma: $P_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$

Variáció

A variációval kapcsolatos feladatok a következő kérdést teszik fel: „Hányféleképpen lehet kiválasztani adott számú dolog közül néhányat, ha a kiválasztási sorrend is számít?”

Matematikai szakkifejezéssel ezt úgy mondjuk, hogy n darab elem k –ad osztályú variációinak számát szeretnénk meghatározni. Attól függően, hogy a kiválasztás során egy elemet többször is felhasználhatunk –e, foglalkozunk ismétléses és ismétlés nélküli variációkkal.

Ismétlés nélküli variáció

Ha n darab különböző elem közül k darabot szeretnénk úgy kiválasztani, hogy egy – egy elemet csak egyszer használhatunk fel és a kiválasztási sorrend is számít, akkor n elem k – ad osztályú ismétlés nélküli variációit keressük. A kiválasztási lehetőségek számát (jele: V_n^k) a következőképp határozhatjuk meg:

Az első elem kiválasztásakor még bármelyik elemet választhatjuk, azaz n lehetőségünk van. A második elem kiválasztásakor már nem választhatjuk azt az elemet, amelyiket elsőként választottunk, azaz $n-1$ választási lehetőségünk maradt. A harmadik elem kiválasztásakor már nem választhatjuk az előzőleg kiválasztott két elemet, azaz $n-3$ elem közül választhatunk. Az utolsó (k -adik) választásnál – mivel nem választhatjuk az előzőleg kiválasztott elemeket – $n-k+1$ választási lehetőségünk van. Mivel az első helyen kiválasztott n féle elem *mindegyikéhez* $n-1$ féleképpen választhatunk második elemet ezért az első két elemet $n \cdot (n-1)$ féleképpen választhatom ki. Az első három elemet $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ féleképpen, az első k darab elemet $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$ féleképpen választhatom.

A variációk száma tehát: $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

PI1: Egy futóverseny 36 résztvevője között hányféleképpen osztható ki az arany, ezüst, ill. bronzérem?

Megoldás: A feladat matematikai megfogalmazása: hányféleképpen választhatunk ki 36 elem közül hármat, ha a sorrend is számít? Ez a feladat 36 elem 3 –ad osztályú ismétlés nélküli variációihoz vezet (hiszen valaki nem lehet egyszerre aranyérmes és ezüstérmes is). A lehetséges befutási sorrendek száma tehát: $V_{36}^3 = 36 \cdot 35 \cdot 34 = 42840$.

Másféleképpen számítva: $V_{36}^3 = \frac{36!}{33!} = 42840$.

PI2: Hányféle ötjegyű számot képezhetünk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek felhasználásával, ha mindegyik számjegyet csak egyszer használhatjuk fel?

Megoldás: Ez a feladat 9 elem 5 –öd osztályú ismétlés nélküli variációihoz vezet, hiszen 9 elem közül kell választani az ötjegyű szám első helyiértékére, második helyiértékére stb... A lehetőségek száma tehát: $V_9^5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$.

PI3: Hány öttel osztható négyjegyű számot lehet készíteni az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek felhasználásával, ha mindegyik számjegyet csak egyszer használhatjuk fel?

Megoldás: Ahhoz, hogy a szám öttel osztható legyen 0 –ra vagy 5 –re kell végződnie. Mivel a feladatban nem szerepel a 0 számjegy, ezért az utolsó számjegy csak az 5 lehet. Az első három számjegyet szabadon választhatjuk (a maradékból ismétlődés nélkül) tehát a lehetőségek száma: $V_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Ismétléses variáció

Ha n darab különböző elem közül k darabot szeretnénk úgy kiválasztani, hogy egy – egy elemet többször használhatunk fel és a kiválasztási sorrend is számít, akkor n elem k - ad osztályú ismétléses variációit keressük. A kiválasztási lehetőségek számát (jele: $V_n^k(ism)$ vagy $V_n^{k(i)}$) a következőképp határozhatjuk meg:

Az első helyre az n elem bármelyikét tehetjük, azaz n lehetőségünk van. A második helyre is n elem közül választhatunk, hiszen az első helyre került elemet *újából felhasználhatjuk!* Az összes lehetőségek száma tehát:

$$V_n^k(ism) = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k \text{ darab}} = n^k$$

PI1: Hány darab ötjegyű szám képezhető az 1, 3, 5 számjegyekből?

Megoldás: A feladat csak úgy oldható meg, ha a számjegyeket többször is felhasználhatjuk. Tehát 3 elem 5 –öd osztályú ismétléses variációinak számát keressük. Az eredmény:

$$V_3^5(ism) = 3^5 = 243$$

PI2: Hány TOTÓszelvényt kell kitöltenünk ahhoz, hogy biztosan telitalálatunk legyen? (Tegyük fel, hogy minden mérkőzést lejátszanak, azaz 14 mérkőzés eredményére kell jól tippelnünk.)

Megoldás: 14 mérközés eredményét kell eltalálnunk az 1, 2, X jelek beírásával, azaz 3 jel közül kell 14 –et kiválasztanunk a megfelelő sorrendben úgy, hogy a jeleket többször is felhasználhatjuk. Matematikai szóhasználattal:

3 elem 14 –ed osztályú ismétléses variációinak számát kell meghatároznunk. Az összes variációk száma tehát:

$V_3^{14}(ism) = 3^{14} = 4782969$. (Ha ezt a számot beszorozzuk a TOTÓszelvények árával kiderül, hogy nem éri meg.)

PI3: Hányféleképpen olvasható ki az alábbi táblázatból a TANULÓ szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

T	A	N	U	L	Ó
A	N	U	L	Ó	
N	U	L	Ó		
U	L	Ó			
L	Ó				
Ó					

Megoldás: A szó kiolvasása során ötször kell lépnünk (mert hatbetűs a szó) és csak jobbra vagy lefelé léphetünk. Tehát két dolog közül (jobbra – lefelé) kell választanunk öt alkalommal. A lehetőségek száma tehát:

$$V_2^5(ism) = 2^5 = 32$$

PI4: Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan háromjegyű szám készíthető, amelyben az 5 –ös előfordul?

Megoldás: A megoldás során a következő trükköt lehet alkalmazni:

Megfelelő lehetőségek száma = Összes lehetőségek száma — Nem megfelelő lehetőségek száma

Ebben a feladatban ez a következőt jelenti:

Az 5 –ös számjegyet tartalmazó számok száma = Összes háromjegyű szám — Az 5 –öst nem tartalmazó számok száma

Az összes háromjegyű szám (a fenti számjegyekből): $V_5^3(ism) = 5^3 = 125$

Az 5 –öst nem tartalmazó háromjegyű számok száma: $V_4^3(ism) = 4^3 = 64$

Tehát a végeredmény: $125 - 64 = 61$.

Kombináció

A kombinációval kapcsolatos feladatok a következő kérdést teszik fel: „Hányféleképpen lehet kiválasztani adott számú dolog közül néhányat, ha a kiválasztási sorrend NEM számít?”

Matematikai szakkifejezéssel ezt úgy mondjuk, hogy n darab elem k –ad osztályú kombinációinak számát szeretnénk meghatározni. Attól függően, hogy a kiválasztás során egy elemet többször is felhasználhatunk –e , foglalkozunk ismétléses és ismétlés nélküli kombinációkkal.

Ismétlés nélküli kombináció

Ha n darab különböző elem közül k darabot szeretnénk úgy kiválasztani, hogy egy – egy elemet csak egyszer használhatunk fel és a kiválasztási sorrend nem számít, akkor n elem k –ad osztályú ismétlés nélküli kombinációit keressük. A kiválasztási lehetőségek számát (jele:

$\binom{n}{k}$) a következőképp határozhatjuk meg:

Ha a kiválasztott tárgyak sorrendje is számítana, akkor n elem k –ad osztályú ismétlés nélküli variációit keresnénk, amelyeknek száma: $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Ezekben a

kiválasztásokban azonban kombinációs szempontból azonosak is vannak – azok, amelyekben ugyanazokat az elemeket választottuk ki csak más sorrendben. Minden egyes kombináció

annyiszorosan szerepel a variációk között ahányféleképpen sorba lehet rendezni k darab különböző elemet. k darab különböző elemet pedig $k!$ féleképpen lehet sorba rendezni (ismétlés nélküli permutáció) tehát a fenti variációk között mindegyik kombináció $k!$ -szorosan szerepel. A kombinációk száma tehát:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

PI1: Hány négyelemű részhalmaza van egy hételemű halmaznak?

Megoldás: Hét különböző elem közül (halmazelemek között nem lehetnek azonosak) kell kiválasztanunk négyet. A kiválasztási sorrend nem számít, hiszen a részhalmaz „csak egy rakás” sorrendiség nélkül, tehát 7 elem 4-ed osztályú ismétlés nélküli kombinációit keressük.

A kombinációk, azaz a részhalmazok száma: $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{5040}{24 \cdot 6} = 35$

PI2: Hány szelvényt kell kitöltenünk az ötös lottón, ha biztos telitalálatot szeretnénk elérni?

Megoldás: Ha biztos telitalálatot szeretnénk, akkor az összes sorsolási lehetőséget le kell fednünk. Az ötös lottón 90 szám közül sorsolnak ki ötöt, visszatevés nélkül, azaz egy szám csak egyszer szerepelhet. Tehát 90 szám ötösosztályú ismétlés nélküli kombinációinak

számát kell meghatároznunk. A lehetőségek száma: $\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!}$

PI3: Hány részhalmaza van egy hatelemű halmaznak?

Megoldás: Az összes részhalmazok száma = nullaelemű részhalmazok száma + 1 elemű részhalmazok száma + ...

Azaz: $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \dots + \binom{6}{6} = 64$

PI4: Hány olyan hétjegyű szám van, amelynek számjegyei növekvő sorrendben következnek egymás után, egyenlő számjegyeket nem engedve meg?

Megoldás: Kilenc féle számjegy áll rendelkezésünkre, hiszen a nulla nem szerepelhet a számban (a növekvő sorrend miatt csak az elején szerepelhetne, de akkor nem kapnánk hétjegyű számot). Tehát kilenc számjegy közül kell kiválasztanunk hetet úgy, hogy növekvő

sorrendben legyenek. Kilenc számjegy közül hetet $\binom{9}{7}$ féleképpen lehet kiválasztani, *ha a*

sorrend nem számít (ilyenkor a kiválasztott elemeket halmazként tekinthetjük). Minden egyes ilyen számhalmaz pontosan egyféleképpen rendezhető úgy, hogy elemei növekvő sorrendben legyenek, tehát pontosan annyi növekvő számjegysorrendű számunk lehet ahányféleképpen 7 elemű részhalmaz képezhető a 9 elemű halmazból.

A feladat megoldása tehát: $\binom{9}{7} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{362880}{5040 \cdot 2} = 36$

PI5: Igaz-e a következő összefüggés: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Megoldás: Az összefüggés bal oldala azt a számot jelenti, ahányféleképpen n elem közül kiválaszthatunk k darabot. A jobb oldalon az a szám áll, ahányféleképpen kiválaszthatunk n elem közül $n-k$ darabot. A két szám egyenlő, hiszen ha kiválasztunk k darabot, akkor ezzel a maradék $n-k$ darabot nem választottuk ki.

PI6: Igazoljuk a következő összefüggést: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Megoldás: Az összefüggést ismét kombinatorikai gondolatmenettel bizonyítjuk (másképp is lehet): Az összefüggés jobb oldala azt a számot jelenti, ahányféleképpen $n+1$ elem közül kiválaszthatunk $k+1$ darabot. Az elemek közül jelöljük meg az egyiket – legyen ez a kitüntetett elem. A lehetséges kiválasztásokat válogassuk két csoportba aszerint, hogy

