



Czapáry Endre – Korom Pál

Matematika

gyakorló feladatlapok



A kiadvány 2018. 10. 26-tól tankönyvi engedélyt kapott a TKV/3481-9/2018. számú határozattal.

A tankönyv megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet:

3. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára 3.2.04.;
4. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyama számára 4.2.04.;
5. sz. melléklet: Kerettanterv a gimnáziumok 5–12. évfolyama számára 5.2.04.;
14. sz. melléklet: Kerettanterv a szakgimnáziumok 9–12. évfolyama számára megnevezésű kerettantervek előírásainak és az érettségi vizsga követelményeinek [40/2002. (V. 24.)].

Lektorok: Beck Zsuzsa és Füleki Lászlóné

Az ábrákat készítette: Fried Katalin, Juhász Lehel és Gados László

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
dr. Várady Ferenc, Zarubay Attila

© Czapáry Endre, Korom Pál, Eszterházy Károly Egyetem
(Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó Zrt.), 2013

ISBN 978-963-19-6235-2

Eszterházy Károly Egyetem
3300 Eger, Eszterházy tér 1.
Tel.: (+36-1) 460-1873
Fax: (+36-1) 460-1822
E-mail: kiado@ofi.hu

A kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor
Raktári szám: NT-16202/F
Felelős szerkesztő: Tóthné Szalontay Anna
Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orlai Márton
Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 15,45 (A/5) ív
Tömeg: 300 gramm
1. kiadás, 2019
Nyomdai előkészítés: Könyv Művek Bt. és PGL Grafika Bt.

Nyomtatta és kötötte a Reálszisztéma Dabasi Nyomda Zrt.
Felelős vezető: Balizs Attila vezérigazgató
Munkaszám:
www.dabasinyomda.hu

	Megoldások	
Bevezető	5	
Négyzetgyök és n-edik gyök	7	88
1. feladatlap: Négyzetgyökre vonatkozó azonosságok	7	88
2. feladatlap: A négyzetgyökös kifejezés	9	88
3. feladatlap: Számolás négyzetgyökös kifejezésekkel	10	89
4. feladatlap: Az n -edik gyök	11	89
5. feladatlap: Számolás az n -edik gyökkel	13	90
Másodfokú egyenletek	15	91
6. feladatlap: Másodfokú egyenletek megoldása	15	91
7. feladatlap: Másodfokú egyenletek megoldása megoldóképlettel	17	91
8. feladatlap: A másodfokú egyenlet diszkriminánsa	18	92
9. feladatlap: Gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés (Viète- formulák)	19	92
10. feladatlap: Szöveges feladatok	21	93
11. feladatlap: Másodfokú függvények	23	94
12. feladatlap: Másodfokú egyenlőtlenségek	25	94
13. feladatlap: Számtani és mértani közép	30	96
14. feladatlap: Négyzetgyökös egyenletek	31	97
15. feladatlap: Másodfokú egyenletre visszavezethető magasabb fokú egyenletek	33	98
16. feladatlap: Másodfokú egyenletre vezető egyenletrendszer	35	99
Hasonlóság és alkalmazásai	36	99
17. feladatlap: Párhuzamos szelők tétele, szögfelezőtétel	36	99
18. feladatlap: Középpontos hasonlóság és tulajdonságai	39	100
19. feladatlap: A háromszög hasonlóságának alapesetei	42	102
20. feladatlap: Körök, sokszögek hasonlósága	44	102
21. feladatlap: Arányossági tételek a derékszögű háromszögben	45	103
22. feladatlap: Hasonló síkidomok területe, hasonló testek térfogata	47	103
23. feladatlap: Kerületi és középponti szögek	49	104
24. feladatlap: Kerületi szöggel kapcsolatos szerkesztések, húrnégyszög	51	105
Szögfüggvények	53	106
25. feladatlap: Hegyesszögek szögfüggvényei	53	106
26. feladatlap: Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között	55	106
27. feladatlap: Nevezetes szögek szögfüggvényértékei	57	107
28. feladatlap: Hegyesszögek és távolságok kiszámolása	59	108

Vektorok	60	108
29. feladatlap: Vektor, vektorok összege, különbsége, számszorosa	60	108
30. feladatlap: Vektorok felbontása összetevőkre	63	109
31. feladatlap: Vektorok alkalmazása	65	110
32. feladatlap: Vektor koordináta-rendszerben	67	111
33. feladatlap: Párhuzamos eltolás	69	112
34. feladatlap: Egybevágóság	71	113
Szögfüggvények és alkalmazásai	73	113
35. feladatlap: A szög ívmértéke, tetszőleges szög szinusa, koszinusa	73	113
36. feladatlap: A szinusz- és koszinuszfüggvény egyszerű tulajdonságai	74	114
37. feladatlap: Forgásszög meghatározása a szögfüggvényérték ismeretéből	76	115
38. feladatlap: Szinusz és koszinusz szögfüggvény ábrázolása	78	116
39. feladatlap: Tangens- és kotangens-függvény	79	117
Kombinatorika és valószínűség-számítás	81	118
40. feladatlap: Kombinatorika	81	118
41. feladatlap: Logikai szita, skatulyaelv	82	118
42. feladatlap: Valószínűség-számítás	83	119
Gráfelmélet	85	120
43. feladatlap: Gráfelmélet	85	120
Megoldások	88	

A feladatok és témakörök kiválasztásának elsődleges célja a gyakoroltatás. A munkafüzet kiegészítése egy olyan tankönyvnek, amely a 2. oldalon említett kerettantervek egyikének megfelel. Így nem használható önállóan, csak tankönyvvel együtt.

A feladatsorok segítenek a középszintű érettségire való felkészülésben, a középiskolai matematika tananyag gyakorlásában. A feladatlapok felhasználhatók a tanórákon, szakkörökön vagy korrepetálási alkalmakkor. Támogatják a differenciált oktatást is.

Egy feladatlapon belül a feladatok fokozatos felépítésűek. Egy-egy témában több hasonló jellegű feladat segíti ellenőrizni a tanuló jártasságát az adott területen, vagy szükség esetén a gyakorlást is biztosítja. Az önálló munka megkönnyítésére a feladatgyűjtemény két fontos egységet tartalmaz. Az első egységcsoport minden nagyobb téma előtt megtalálható, a téma anyagához kapcsolódó elméleti összefoglaló. Az elméleti összefoglalók a definíciókat, tételeket, illetve a fontosabb eljárásokat, módszereket tartalmazzák. A másik alapvető egység pedig a könyv végén lévő megoldások és a megoldásokhoz vezető fontosabb lépések kifejtése.

A feladatgyűjtemény nem tartalmazza az említett Kerettantervek minden témakörét, ezért ezeket itt felsoroljuk:

3.2.04; 6.2.03; 4.2.04; 5.2.04 Kerettantervek esetén:

- Függvények alkalmazása (Valós folyamatok függvénymodelljének megalkotása)
- Kör és részei, kör és egyenes. Ív, húr, körcikk, körszelet. Szelő, érintő.
- A körcikk területe. Egyenes arányosság a középponti szög és a hozzátartozó körcikk területe között.
- Egybevágóság, szimmetria.
- Szimmetrikus négyszögek. Négyszögek csoportosítása szimmetria szerint. Szabályos sokszögek.
- Távolság, szög, terület a tervrajzon, térképen.

4.2.04; 5.2.04 Kerettantervek esetén:

- Egyszerű trigonometrikus egyenletek.
- Egyszerű hálózat szemléltetése.

1. feladatlap

Négyzetgyökre vonatkozó azonosságok

EMLÉKEZTETŐ

racionális szám: Olyan valós szám, amely felírható két egész szám hányadosaként. (A nevezőben nem állhat 0.) Tizedestörtalakja: véges vagy végtelen szakaszos tizedestört. Pl. $\frac{4}{5}$; $-\frac{2}{7}$; $0 = \frac{0}{1}$; $2 = \frac{2}{1}$; $-3 = \frac{-3}{1}$; $0,5 = \frac{5}{10}$; $-2,135 = \frac{-2135}{1000}$; $0,4 = \frac{4}{9}$.

irracionális szám: Nem racionális valós szám.

négyzetgyök a : Egy nemnegatív a szám négyzetgyöke az a nemnegatív szám, amelynek négyzete az a szám. Jelölés: $\sqrt{a}$. Pl. $\sqrt{4} = 2$ mert $2^2 = 4$, vagy $\sqrt{0} = 0$.

négyzetgyök azonosságai: 1. $\sqrt{a^2} = |a|$, ahol $a \in \mathbb{R}$. 2. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, ahol a, b nemnegatív valós szám.

3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ahol a nemnegatív, b pedig pozitív valós szám. 4. $\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$, ahol $a > 0$ és $k \in \mathbb{Z}$.

négyzetgyökjel alól kivétel: A négyzetgyök alatti kifejezést olyan szorzatként írjuk fel, amelynek egyik tényezője teljes négyzet. A $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ($a \geq 0$; $b \geq 0$) azonosság alkalmazása után a teljes négyzetből gyököt vonunk, és ennek az eredményét szorozzuk a másik tényező négyzetgyökével. Pl. $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$. $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = |a|\sqrt{a}$.

négyzetgyökjel alá bevétel: A négyzetgyökös kifejezés szorzóját négyzetre emeljük és megszorozzuk vele a négyzetgyök alatt álló kifejezést. $a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{a^2 \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt{ab}$. ($a \geq 0$; $b \geq 0$) Pl. $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$.

FELADATOK

1.1. Számítsd ki a következő négyzetgyökök értékét!

a) $\sqrt{49 \cdot 16} = \dots\dots\dots$

b) $\sqrt{25 \cdot 81 \cdot 0,49} = \dots\dots\dots$

c) $\sqrt{144 \cdot 400 \cdot 900} = \dots\dots\dots$

d) $-\sqrt{\frac{49}{16}} = \dots\dots\dots$

e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \dots\dots\dots$

f) $-\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \dots\dots\dots$

g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{4,5} = \dots\dots\dots$

h) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \dots\dots\dots$

i) $(\sqrt{2})^2 = \dots\dots\dots$

j) $(\sqrt{2})^4 = \dots\dots\dots$

$$k) (\sqrt{\sqrt{2}})^4 = \dots\dots\dots$$

$$l) \sqrt{36\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{8}} = \dots\dots\dots$$

1.2. A következő gyökkifejezéseket alakítsd olyan szorzattá, amelynek egyik tényezője racionális szám vagy kifejezés! (Pl. $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, vagy $\sqrt{3b^2} = |b|\sqrt{3}$.)

$$a) \sqrt{18} = \dots\dots\dots \quad b) \sqrt{32} = \dots\dots\dots$$

$$c) \sqrt{1000} = \dots\dots\dots \quad d) \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{49}} = \dots\dots\dots$$

$$e) \sqrt{2a^2} = \dots\dots\dots \quad f) \sqrt{a^3 \cdot b^4} = \dots\dots\dots$$

$$g) \sqrt{\frac{9}{x}} = \dots\dots\dots \quad h) \sqrt{\frac{3x^2}{8}} = \dots\dots\dots$$

$$i) \sqrt{3(1+x)^2} = \dots\dots\dots \quad j) \sqrt{x^2(a^2 + x^2)} = \dots\dots\dots$$

$$k) \sqrt{a^2x^2 + x^4} = \dots\dots\dots \quad l) \sqrt{xy^3 + x^2y^6} = \dots\dots\dots$$

1.3. Írd közös gyökjel alá és hozd egyszerűbb alakra a következő gyökkifejezéseket a változók legbővebb értelmezési tartománya mellett!

$$a) 4 \cdot \sqrt{\frac{5}{8}} = \dots\dots\dots \quad b) 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \dots\dots\dots$$

$$c) a \cdot \sqrt{\frac{a}{x}} = \dots\dots\dots \quad d) (x+y) \cdot \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \dots\dots\dots$$

$$e) x \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} = \dots\dots\dots \quad f) (1-a) \cdot \sqrt{\frac{2}{1-a}} = \dots\dots\dots$$

1.4. A valós számok mely (legbővebb) részhalmazán igaz, hogy $2a^2 = a\sqrt{2}$?

.....

1.5. A valós számok mely (legbővebb) részhalmazán igaz, hogy $\sqrt{2a^2} = -a\sqrt{2}$?

.....

1.6. A valós számok mely (legbővebb) részhalmazán igaz, hogy $a^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \sqrt{a^2}$?

.....

1.7. Igaz-e az, hogy két irracionális szám szorzata irracionális szám?

.....

2. feladatlap

A négyzetgyökös kifejezés

EMLÉKEZTETŐ

nevező gyöktelenítése: A törtkifejezés nevezőjéből a gyökös kifejezés bővítéssel történi eltávolítása.

FELADATOK

2.1. Írd egyszerűbb alakban!

a) $4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \dots\dots\dots$ b) $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \dots\dots\dots$

c) $\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{72} = \dots\dots\dots$ d) $(3 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = \dots\dots\dots$

e) $(3\sqrt{2} - \sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{5} = \dots\dots\dots$ f) $(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = \dots\dots\dots$

g) $(2\sqrt{6} + \sqrt{3})(2\sqrt{6} - \sqrt{3}) = \dots\dots\dots$ h) $(\sqrt{2} - 1)^2 = \dots\dots\dots$

i) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = \dots\dots\dots$

2.2. Gyökjel alá bevittel hozd egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

a) $2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \dots\dots\dots$

b) $3 \cdot \sqrt{\frac{7}{15}} = \dots\dots\dots$

c) $\frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} = \dots\dots\dots$

d) $\frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = \dots\dots\dots$

e) $a \cdot \sqrt{\frac{b}{2a}} = \dots\dots\dots$

f) $\frac{5}{b} \cdot \sqrt{\frac{2b}{15}} = \dots\dots\dots$

g) $\frac{2}{3}x \cdot \sqrt{\frac{21}{22x}} = \dots\dots\dots$

h) $2,5y \cdot \sqrt{\frac{6}{5y}} = \dots\dots\dots$

2.3. Gyöktelenítsd a nevezőt a következő törtekben!

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

b) $\frac{3}{2\sqrt{3}} =$

c) $\frac{6}{5\sqrt{3}} =$

d) $\frac{a}{\sqrt{a}} =$

e) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} =$

f) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

g) $\frac{6}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} =$

h) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} =$

2.4. Melyik szám nagyobb: a $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ vagy a $\sqrt{8} + \sqrt{2}$?

.....

2.5. Igazold, hogy $\sqrt{5\sqrt{2}-7} \cdot \sqrt{5\sqrt{2}+7} = 1$!

.....

2.6. a) Igaz-e, hogy ha a és b pozitív valós számok és $a^2 = b^2$, akkor $a = b$?

b) Módosítsd a feltételeket úgy, hogy az $a^2 = b^2$ egyenlőségből ne következzen az $a = b$ egyenlőség!

.....

2.7. Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} = 2$!

.....

.....

3. feladatlap

Számolás négyzetgyökös kifejezésekkel

FELADATOK

3.1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $x^2 = 16$

b) $\sqrt{x} = 3$

- c) $\sqrt{x} = -2$
- d) $2\sqrt{x} = \sqrt{x}$
- e) $\sqrt{2x} + \sqrt{32x} + \sqrt{128x} = 1$
- f) $\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} = -4$
- g) $\sqrt{x - 10} = 1 - \sqrt{x}$

3.2. a) Mekkora az 5 cm oldalú négyzet átlója?

b) Mekkora az a oldalú négyzet átlója?

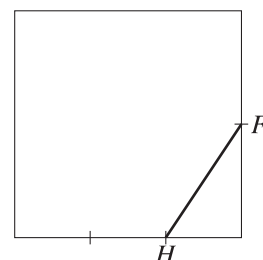
c) Mekkora a négyzet oldalának pontos hossza, ha átlója 8 cm?

3.3. a) Mekkora a szabályos, 6 cm oldalhosszúságú háromszög magassága?

b) Mekkora a szabályos, a oldalhosszúságú háromszög magassága?

c) Mekkora a szabályos háromszög oldalának hossza, ha a magassága $\sqrt{8}$ cm?

3.4. a) A 6 cm oldalú négyzet oldalfelezőjét (F) és a szomszédos oldal harmadolópontját (H) az ábrán látható módon összekötjük. Mekkora az FH szakasz hossza?



b) Mekkora a szakasz, ha a négyzet oldala a ?

3.5. a) Mekkora az 5 cm sugarú körbe írt négyzet oldala?

b) Mekkora az r sugarú körbe írt négyzet oldala?

4. feladatlap

Az n -edik gyök

EMLÉKEZTETŐ

n . gyök fogalma páros kitevő esetén: Egy nemnegatív a szám n . gyöke ($n \in \mathbb{N}^+$, páros) olyan nemnegatív szám, amelynek n . hatványa az a szám. Jelölés: $\sqrt[n]{a}$. Pl. $\sqrt[4]{16} = 2$, mert $2^4 = 16$. $\sqrt[6]{a^6} = |a|$, $\sqrt[4]{-1}$ nem értelmezhető.

n . gyök fogalma páratlan kitevő esetén: Egy valós a szám n . gyöke ($n \in \mathbb{N}^+$, páratlan) olyan valós szám, amelynek n . hatványa az a szám. Jelölés: $\sqrt[n]{a}$. Pl. $\sqrt[3]{8} = 2$, mert $2^3 = 8$. $\sqrt[5]{a^5} = a$. $\sqrt[3]{-27} = -3$, mert $(-3)^3 = -27$.

n . gyökvonás azonosságai: A változók megfelelő értelmezési tartománya mellett.

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$; 2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$; 3. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$, $a > 0$, $k \in \mathbb{Z}$; 4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$; 5. $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[mn]{a^{mk}}$, $a > 0$; $m \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{Z}$.

FELADATOK

4.1. Számítsd ki a következő n . gyökök értékét!

- a) $\sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$ b) $\sqrt[3]{8} = \dots\dots\dots$
- c) $\sqrt[4]{81} = \dots\dots\dots$ d) $\sqrt[4]{625} = \dots\dots\dots$
- e) $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}} = \dots\dots\dots$ f) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \dots\dots\dots$
- g) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \dots\dots\dots$ h) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \dots\dots\dots$
- i) $\sqrt[3]{-0,001} = \dots\dots\dots$ j) $\sqrt{-0,0016} = \dots\dots\dots$

4.2. Mivel egyenlők az alábbi kifejezések a változók legbővebb értelmezési tartománya mellett?

- a) $\sqrt[4]{a^4} = \dots\dots\dots$ b) $\sqrt[3]{y^3} = \dots\dots\dots$
- c) $\sqrt[6]{(-a)^6} = \dots\dots\dots$ d) $\sqrt[5]{(-a)^5} = \dots\dots\dots$
- e) $\sqrt[3]{(x-1)^3} = \dots\dots\dots$ f) $\sqrt[4]{(x+2)^4} = \dots\dots\dots$
- g) $\sqrt[5]{x^{10}} = \dots\dots\dots$ h) $\sqrt[4]{a^8} = \dots\dots\dots$
- i) $\sqrt[4]{-x^8} = \dots\dots\dots$ j) $\sqrt[2]{-x^{18}} = \dots\dots\dots$

4.3. Döntsd el, hogy mely egyenlőségek igazak minden valós x értéknél!

- a) $\sqrt[5]{-x^5} = -x$ $\dots\dots\dots$ b) $\sqrt[6]{x^6} = x$ $\dots\dots\dots$
- c) $\sqrt[5]{x^5} = x$ $\dots\dots\dots$ d) $\sqrt[6]{-x^6} = -x$ $\dots\dots\dots$
- e) $\sqrt[5]{(-x)^5} = |x|$ $\dots\dots\dots$ f) $\sqrt[6]{(-x)^6} = |x|$ $\dots\dots\dots$
- g) $\sqrt[5]{(1-x)^5} = x-1$ $\dots\dots\dots$ h) $\sqrt[6]{(1-x)^6} = |1-x|$ $\dots\dots\dots$

4.4. Az n -edik gyök azonosságai alapján hozd egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

- a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \dots\dots\dots$
- b) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \dots\dots\dots$
- c) $\sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{40} \cdot \sqrt[5]{250} = \dots\dots\dots$
- d) $\sqrt[6]{36} \cdot \sqrt[6]{54} \cdot \sqrt[6]{24} = \dots\dots\dots$
- e) $\sqrt[4]{2a^2bc} \cdot \sqrt[4]{4a^2b^3} \cdot \sqrt[4]{2c^3} = \dots\dots\dots$
- f) $\sqrt[5]{96a^6b^3} \cdot \sqrt[5]{\frac{b^2}{3a}} = \dots\dots\dots$
- g) $\sqrt[3]{0,2 \frac{a^4}{b^2}} \cdot \sqrt[3]{0,04 \frac{b^5}{a}} = \dots\dots\dots$

$$h) \sqrt[6]{0,09 \frac{a^7}{b^2}} \cdot \sqrt[6]{0,027 \frac{b}{a}} \cdot \sqrt[6]{0,3 \frac{1}{b^5}} = \dots\dots\dots$$

4.5. Az n . gyök azonosságai alapján hozd egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

$$a) \sqrt[3]{27 \cdot 64} = \dots\dots\dots \quad b) \sqrt[4]{16 \cdot 625} = \dots\dots\dots$$

$$c) \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \dots\dots\dots \quad d) \sqrt[3]{-\frac{216}{343}} = \dots\dots\dots$$

$$e) \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \dots\dots\dots \quad f) \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \dots\dots\dots$$

$$g) \left(\sqrt[5]{\sqrt{7}} \right)^3 = \dots\dots\dots \quad h) \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} \right)^5 = \dots\dots\dots$$

5. feladatlap

Számolás az n -edik gyökkel

EMLÉKEZTETŐ

n . gyökjel alól kivitel: A négyzetgyök alatti kifejezést olyan szorzatként írjuk fel, amelynek egyik tényezője n . hatvány. Az $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ azonosság alkalmazása után az n . hatványból n . gyököt vonunk, és ennek az eredményét szorozzuk a másik tényező

n . gyökével. Pl. $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$. $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = |a|\sqrt{a}$.

n . gyökjel alá bevitel: Az n . gyökös kifejezés szorzóját n . hatványra emeljük és megszorozzuk vele az n . gyök alatt álló kifejezést.

Pl. $2 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$. $a \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a^2}} = \sqrt[3]{a^3 \cdot \frac{b}{a^2}} = \sqrt[3]{ab}$.

FELADATOK

5.1. Az n . gyökjel alól kivittel alakítsd át az alábbi kifejezéseket!

$$a) \sqrt[3]{16} = \dots\dots\dots \quad b) \sqrt[4]{0,000\ 01} = \dots\dots\dots$$

$$c) \sqrt[5]{\frac{64}{729}} = \dots\dots\dots \quad d) \sqrt[3]{27x^4} = \dots\dots\dots$$

$$e) \sqrt[4]{\frac{a^7 b^5}{16}} = \dots\dots\dots \quad f) \sqrt[3]{81a^4 b^3 x} = \dots\dots\dots$$

$$g) \sqrt[3]{\frac{0,001}{x}} = \dots\dots\dots \quad h) \sqrt[4]{0,0081 \frac{a^5}{b^6}} = \dots\dots\dots$$

5.2. Az n . gyökjel alá bevitellel alakítsd át az alábbi kifejezéseket! A változók megengedett értelmezési tartománya mellett.

$$a) 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \dots\dots\dots \quad b) 3a \cdot \sqrt[4]{\frac{b}{9a^3}} = \dots\dots\dots$$

$$c) -2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{3x}{4}} = \dots\dots\dots \quad d) -\frac{x}{5} \cdot \sqrt[3]{-\frac{25}{x^2}} = \dots\dots\dots$$

5.3. Írd fel egyetlen gyökjel segítségével!

a) $\sqrt[3]{2^4\sqrt{2}} = \dots\dots\dots$

b) $\sqrt{3^3\sqrt[3]{3^4\sqrt{3}}} = \dots\dots\dots$

c) $\sqrt[12]{x^3\sqrt{x}\sqrt{x}} = \dots\dots\dots$

d) $\sqrt{a^3\sqrt{a^2}\sqrt{a}} = \dots\dots\dots$

5.4. Az $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[mn]{a^{mk}}$ azonosság alkalmazásával hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \dots\dots\dots$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[6]{3} = \dots\dots\dots$

c) $\frac{\sqrt[8]{5^3}}{\sqrt{5}} = \dots\dots\dots$

d) $\frac{\sqrt[6]{10^5} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt[3]{10^2}} = \dots\dots\dots$

e) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{3} = \dots\dots\dots$

f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[5]{2}} = \dots\dots\dots$

g) $\frac{\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[10]{a^3}} = \dots\dots\dots$

h) $\frac{\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt[5]{ab}} = \dots\dots\dots$

5.5. Az $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[mn]{a^{mk}}$ azonosság alkalmazásával csökkentsd a gyökkitevőt!

a) $\sqrt[6]{4} = \dots\dots\dots$

b) $\sqrt[4]{25} = \dots\dots\dots$

c) $\sqrt[10]{32 \cdot 243} = \dots\dots\dots$

d) $\sqrt[8]{\frac{16}{625}} = \dots\dots\dots$

e) $\sqrt[6]{64 \cdot x^2} = \dots\dots\dots$

f) $\sqrt[6]{0,001 \cdot x^3} = \dots\dots\dots$

g) $\sqrt[4]{\frac{b^2}{a^2}} = \dots\dots\dots$

h) $\sqrt[6]{64 \cdot \frac{x^3}{a^3}} = \dots\dots\dots$

6. feladatlap

Másodfokú egyenletek megoldása

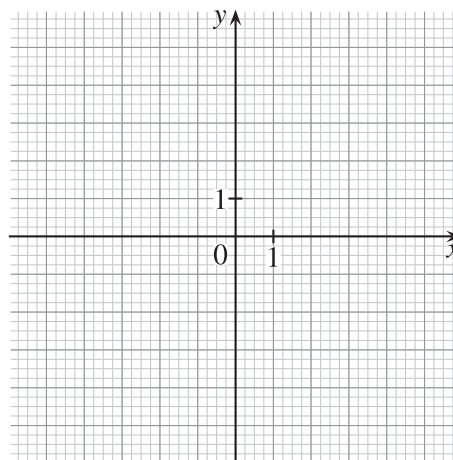
EMLÉKEZTETŐ

másodfokú egyenlet: Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenletet, ahol x az ismeretlen, a, b, c tetszőleges valós számok és $a \neq 0$, egyismeretlenes másodfokú egyenletnek nevezzük.

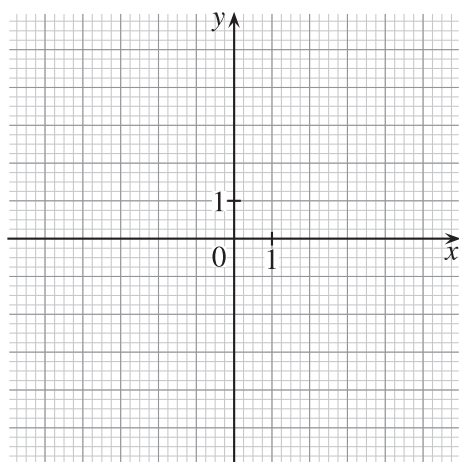
FELADATOK

6.1. Oldd meg grafikusan az egész, majd a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

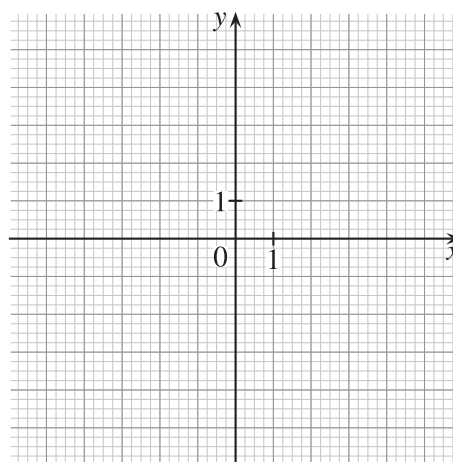
a) $x^2 + x - 2 = 0$;



b) $\frac{1}{2}x^2 + x - 1,5 = 0$;

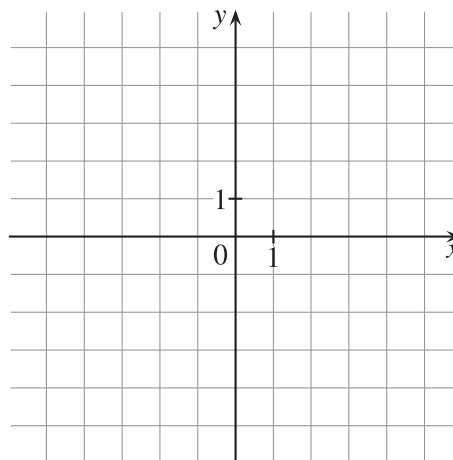


c) $x^2 - x + 2 = 0$.

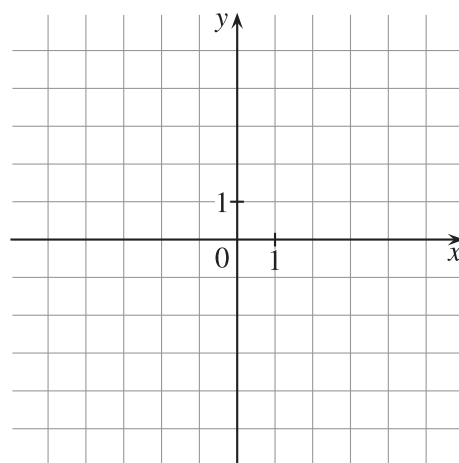


6.2. Oldd meg grafikusan az egész számok, majd a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$;



b) $2x^2 - 4x + 7 = x^2 + 2x + 2$.



6.3. Az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosság alkalmazásával oldd meg a következő hiányos másodfokú egyenleteket!

a) $x^2 - 16 = 0$;

b) $x^2 = 6,25$;

c) $x^2 - \frac{4}{25} = 0$;

d) $x^2 + 9 = 0$;

e) $x^2 = 0$;

f) $4x^2 - \frac{49}{64} = 0$;

g) $x^2 - 2 = 0$;

h) $x^2 - 12 = 0$

6.4. Kiemeléssel oldd meg a következő hiányos másodfokú egyenleteket!

a) $x^2 - 5x = 0$;

b) $x^2 = -6x$;

c) $3x^2 + 5x = 0$;

d) $7x = 9x^2$

6.5. Szorzattá alakítással oldd meg a következő másodfokú egyenleteket!

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$; b) $x^2 - x - 6 = 0$;

.....

c) $x^2 + x - 12 = 0$; d) $x^2 - 5x - 6 = 0$;

.....

e) $x^2 + 8x + 16 = 0$; f) $x^2 + 2x - 3 = 0$

.....

7. feladatlap

Másodfokú egyenletek megoldása megoldóképlettel

EMLÉKEZTETŐ

megoldóképlet: Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú másodfokú egyenlet megoldóképlete: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

FELADATOK

7.1. Oldd meg a racionális számok, majd a valós számok halmazán megoldóképlettel a következő másodfokú egyenleteket!

a) $2x^2 + 5,6x - 1,2 = 0$;

.....

b) $3x^2 + 4,5x - 3 = 0$;

.....

c) $1,5x^2 - 11,4x + 6,3 = 0$;

.....

d) $5x^2 + 8,5x + 2,1 = 0$;

.....

e) $3x^2 - 1,8x + 0,27 = 0$;

.....

f) $-1x^2 + 1,2x + 7,48 = 0$;

.....

g) $-1,6x^2 - 8,16x - 9,92 = 0$;

.....

h) $-0,45x^2 - 0,45x + 0,9 = 0$

.....

7.2. Oldd meg a racionális számok, majd a valós számok halmazán megoldóképlettel a következő másodfokú egyenleteket!

a) $5x^2 - 7x - 6 = 0$;

.....

b) $3x^2 + 4x + 2 = 0$;

.....

c) $1 - x - \frac{x^2}{2} = 0$;

.....

d) $(2x+3)(x-4)+9=(x+1)^2$

7.3. Oldd meg a racionális számok, majd a valós számok halmazán megoldóképlettel a következő másodfokú, és másodfokúra visszavezethető egyenleteket!

a) $1 - \frac{x}{x+1} = x$;

b) $\frac{5x-1}{x+1} = \frac{x+5}{x-1}$;

c) $\frac{x+2}{x^2-1} - \frac{2x+1}{x-1} = 1$;

d) $(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1\right) = 0$

8. feladatlap

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

EMLÉKEZTETŐ

másodfokú egyenlet diszkriminánsa: Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú másodfokú egyenlet diszkriminánsa a $b^2 - 4ac$ kifejezés. Jele: D . A gyökkjel alatti kifejezés előjele meghatározza a másodfokú egyenlet megoldásainak számát. Ha $b^2 - 4ac > 0$, akkor két különböző valós gyök van, ha $b^2 - 4ac = 0$, akkor az egyenlet két valós gyöke egyenlő (azt is mondhatjuk, hogy egy valós gyöke van), ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke.

FELADATOK

8.1. Az egyenletek megoldása nélkül, a diszkrimináns segítségével állapítsd meg, hogy az alábbi egyenletek közül melyik egyenletnek van két különböző valós gyöke, melyiknek van egy (két egyenlő) valós gyöke, és melyik egyenletnek nincs megoldása a valós számhalmazon!

a) $x^2 - 3x + 4 = 0$, $D =$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$, $D =$

c) $x^2 + 8x - 16 = 0$, $D =$

(Viète-féle formulák.)

FELADATOK

9.1. Írj fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei:

a) 2 és 3; b) -1 és 2,5;

.....

c) -2 és $-\frac{1}{3}$; d) $1+\sqrt{2}$ és $1-\sqrt{2}$;

.....

e) 4 és 4.

9.2. Határozd meg a c értékét úgy, hogy az $x^2 + 4x + c = 0$ egyenlet egyik gyöke 3 legyen!

[illegible]

9.3. Határozd meg a b értékét úgy, hogy az $x^2 + bx + 12 = 0$ egyenlet egyik gyöke -3 legyen!

[illegible]

9.4. Határozd meg a c értékét úgy, hogy az $x^2 - 5x + c = 0$ egyenlet egyik gyöke a másiknál 3-mal nagyobb legyen!

[illegible]

[illegible][illegible]

FELADATOK

[illegible][illegible]

10.3. Három szám aránya $1:2:4$. A számok négyzeteinek összege 189. Melyek ezek a számok?

[illegible]

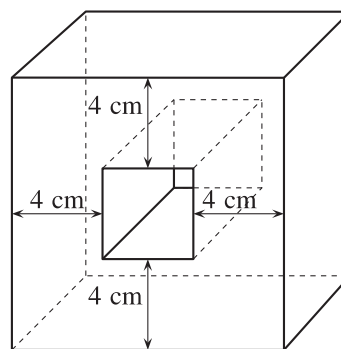
10.4. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 12. A számjegyeket felcserélve és az így kapott számot az eredetivel szorozva 4032-t kapunk. Melyik ez a szám?

[illegible]

10.5. Mekkora a derékszögű háromszög oldalai, ha az átfogó az egyik befogónál 3 cm-rel, a másik befogónál 6 cm-rel hosszabb?

[illegible]

10.6. Egy kockából – az ábrán látható módon – négyzetes hasáb alakú csatornát vágunk ki. A maradék test térfogata 5120 cm^3 . Mekkora az eredeti kocka éle?

[illegible]

11. feladatlap

Másodfokú függvények

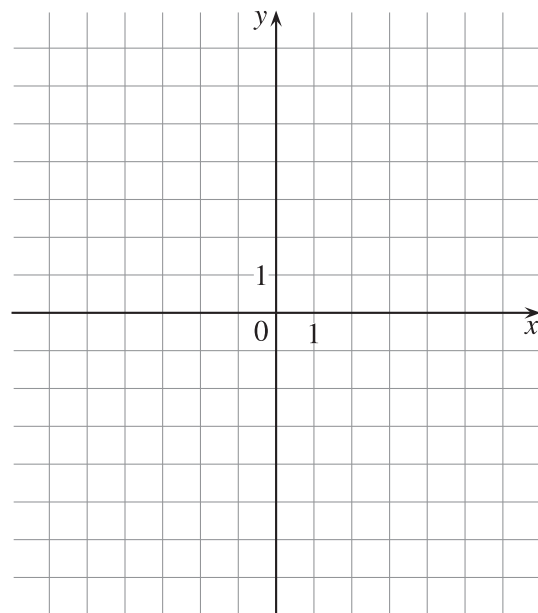
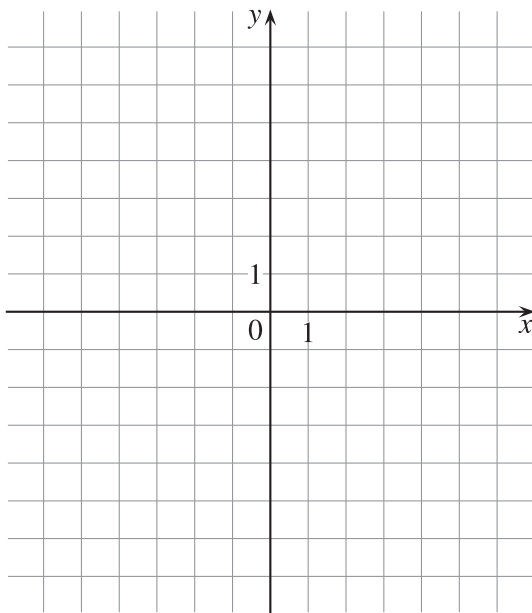
EMLÉKEZTETŐ

másodfokú függvény: A másodfokú függvény $x \mapsto ax^2 + bx + c$ alakú, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $x \in \mathbb{R}$. Képe: parabola.

FELADATOK

11.1. Az $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvény görbéjének segítségével a mellékelt koordináta-rendszerben ábrázold a következő függvények görbéjét;

a) $x \mapsto \frac{1}{4}x^2$; b) $x \mapsto -(x-3)^2$; c) $x \mapsto -\frac{1}{4}(x+4)^2$; d) $x \mapsto \frac{1}{4}(x-1)^2 + 5$.



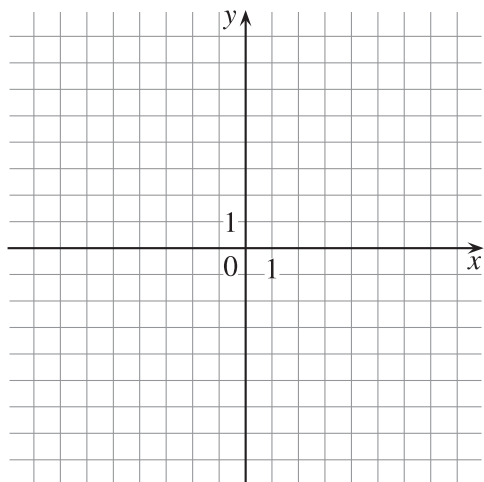
Töltsd ki a táblázatot!

	$x \mapsto \frac{1}{4}x^2$	$x \mapsto -(x-3)^2$	$x \mapsto -\frac{1}{4}(x+4)^2$	$x \mapsto \frac{1}{4}(x-1)^2 + 5$
Értelmezési tartomány:				
Értékkészlet:				
Zérushely:				
Tengelypont:				
Minimumhely: Minimumérték:				
Maximumhely: Maximumérték:				
Monoton nő:				
Monoton csökken:				

11.2. Alakítsd át a valós számhalmazon értelmezett alábbi függvényeket $x \mapsto a(x-u)^2 + v$ alakra, azután ábrázold a függvénygörbéket a normál parabola megfelelő transzformálása útján!

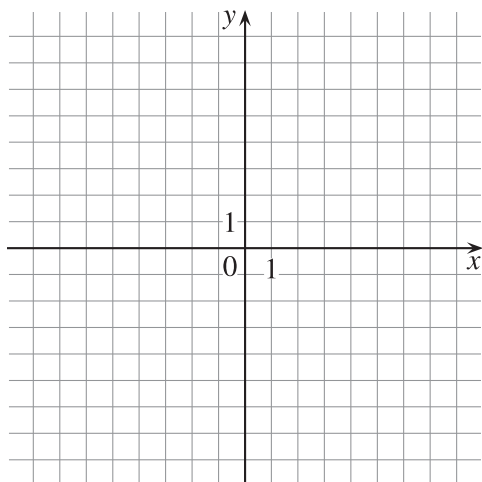
a) $x \mapsto x^2 - 3x + 2,25$.

$$x^2 - 3x + 2,25 =$$



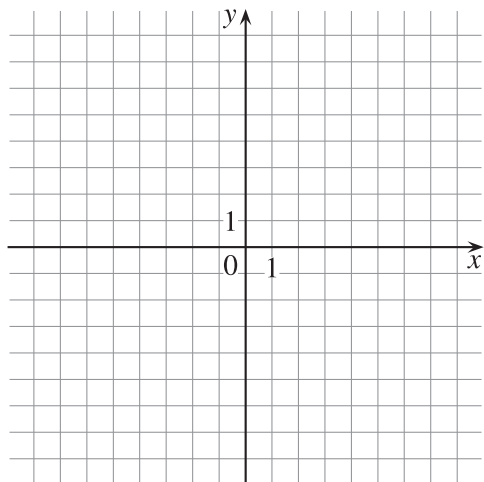
b) $x \mapsto x^2 + 6x + 9$.

$$x^2 + 6x + 9 =$$



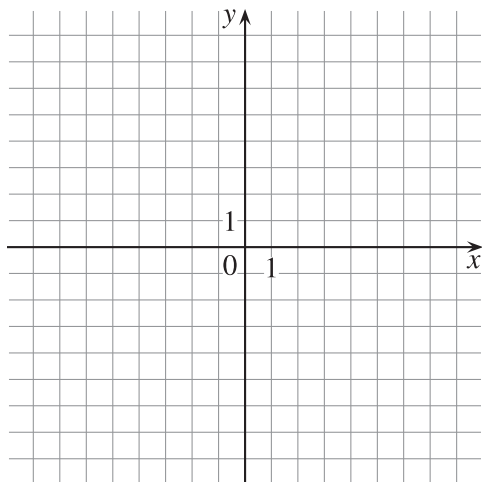
c) $x \mapsto x^2 + 6x + 13$.

$$x^2 + 6x + 13 =$$



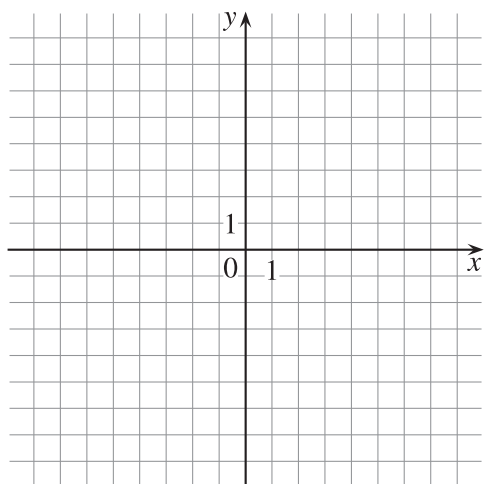
d) $x \mapsto -x^2 + 6x - 13$.

$$-x^2 + 6x - 13 =$$



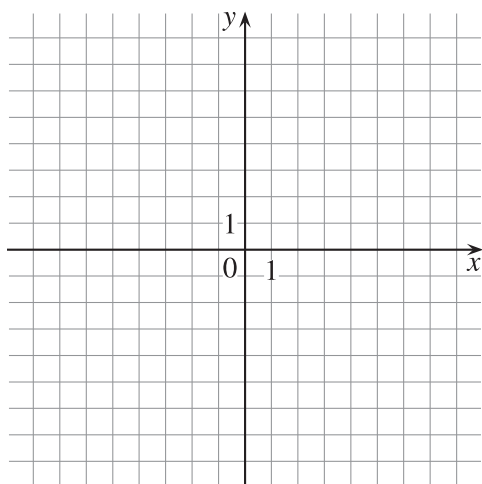
e) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5 =$$



f) $x \mapsto -2x^2 - 6x + 1$.

$$-2x^2 - 6x + 1 =$$



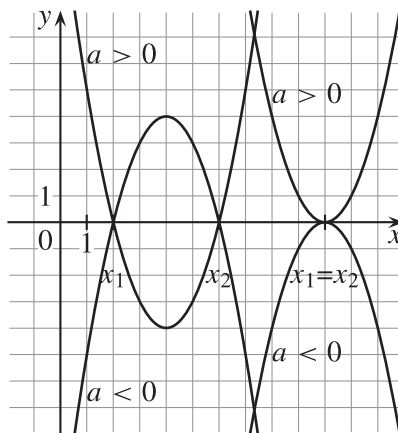
11.3. Írj fel két olyan másodfokú függvényt $x \mapsto ax^2 + bx + c$ alakban, amelynek az $x = 3$ helyen minimuma van, és a minimum értéke -2 !

12. feladatlap

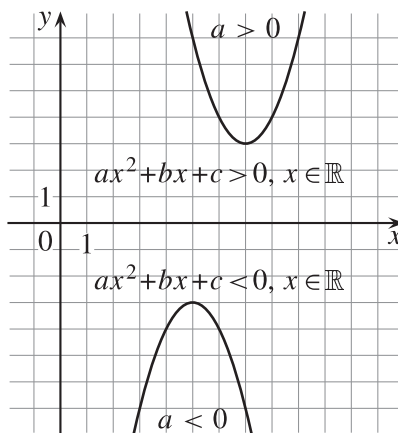
Másodfokú egyenlőtlenségek

EMLÉKEZTETŐ

másodfokú egyenlőtlenség grafikus megoldása: Az egyenlőtlenséget először az $ax^2 + bx + c < / > / \geq 0$ alakok egyikére hozzuk. Ezután az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletet megoldjuk. Feltételezve, hogy az egyenletnek x_1 és x_2 két különböző valós gyöke, vagy két egyenlő $x_1 = x_2$ gyöke van, az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonja „ a ” értékétől (előjelétől) függően az ábrán látható módon helyezkedik el.

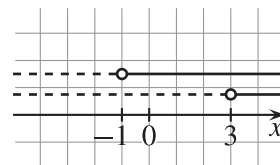


Ha nincs valós megoldás, akkor az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ függvény grafikonjának nincs közös pontja az x tengellyel. $a > 0$ esetben az x tengely felett és $a < 0$ esetben az x tengely alatt van.



Például oldjuk meg az $(x-3)^2 \leq -2x+30$ egyenlőtlenséget. Az egyenlőtlenséget nullára redukáljuk: $x^2 - 4x - 21 \leq 0$. Az $x^2 - 4x - 21 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = -3$, $x_2 = 7$. Mivel az x^2 együtthatója (1) pozitív, azért az $x \mapsto x^2 - 4x - 21$ függvény grafikonja, az $y = x^2 - 4x - 21$ egyenletű parabola „felfelé” nyílik. A grafikonról leolvasható, ha $-3 < x < 7$, akkor $x^2 - 4x - 21 < 0$ és $x^2 - 4x - 21 = 0$, ha $x_1 = -3$, vagy $x_2 = 7$. Az egyenlőtlenség megoldása: $x \in [-3; 7]$.

másodfokú egyenlőtlenség megoldása tényezőkre bontással: Az egyenlőtlenséget nullára redukáljuk. A nem nulla kifejezést szorzattá bontjuk. A számegyenesen bejelöljük, hogy az egyes tényezők mely tartományban pozitívak és mely tartományban negatívak. Azokon a tartományokon, ahol páratlan számú negatív tényező szerepel, ott negatív a kifejezés, ahol páros számú a negatív tényezők száma, ott pozitív a kifejezés. Pl. $2(x-3)(x+1) < 0$. A tényezők negatív (szaggatott) és pozitív (folyamatos) tartományainak jelölése után a páratlan számú negatív tényezővel rendelkező tartomány leolvasható. Mivel a nullával való egyenlőség nincs megengedve, így a határolók nem tartoznak a tartományhoz. A megoldás: $x \in]-1; 3[$.



FELADATOK

12.1. Oldd meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$;

A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

.....

Az x^2 együtthatójának előjele:

.....

Megoldás:

b) $x^2 + x - 6 \geq 0$;

A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

.....

Az x^2 együtthatójának előjele:

.....

Megoldás:

c) $x^2 + 2x - 3 > 0$.

A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

.....

Az x^2 együtthatójának előjele:

.....

Megoldás:

d) $x^2 + 2x + 8 \leq 2x^2 - x - 2$;

Nullára redukálás:

A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

Az x^2 együtthatójának előjele:

.....

Megoldás:

e) $-(x-1)^2 < x$;

Nullára redukálás:

A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

Az x^2 együtthatójának előjele:

.....

Megoldás:



f) $(2x+1)^2 \geq -x$.

Nullára redukálás:

A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

Az x^2 együtthatójának előjele:

.....

Megoldás:



12.2. Szorzattá alakítással oldd meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 + 2x + 3 > 0$;

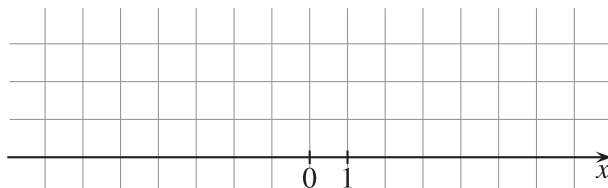
A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

.....

A bal oldali kifejezés szorzatalakja:

.....

Megoldás:



b) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$;

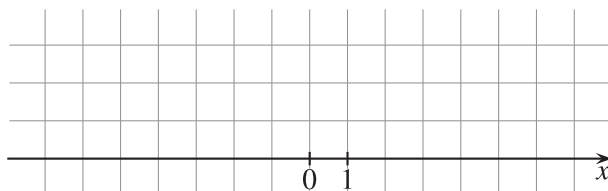
A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

.....

A bal oldali kifejezés szorzatalakja:

.....

Megoldás:



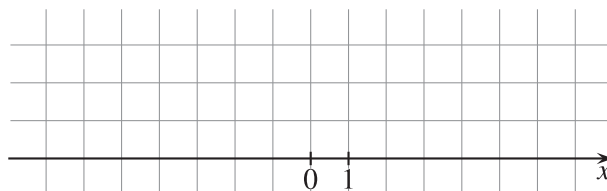
c) $-x^2 + 6x - 9 > 0$;

A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

A bal oldali kifejezés szorzatalakja:

.....

Megoldás:



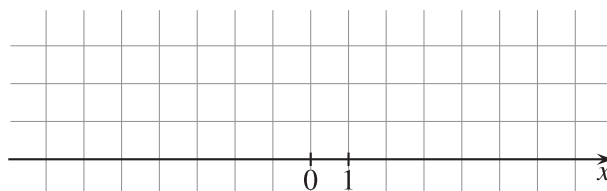
d) $2x^2 - 4x - 10,5 \leq 0$;

A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

A bal oldali kifejezés szorzatalakja:

.....

Megoldás:



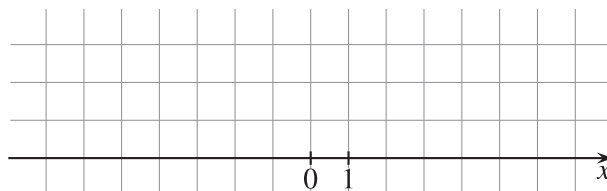
e) $-1,5x^2 + 3,75x + 9 > 0$;

A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

A bal oldali kifejezés szorzatalakja:

.....

Megoldás:



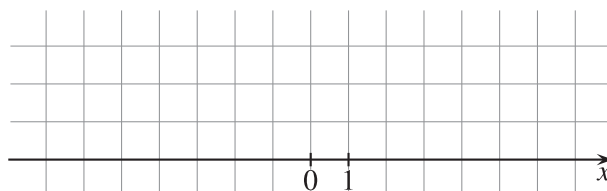
f) $-x^2 + 2,7x - 0,5 < 0$.

A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

A bal oldali kifejezés szorzatalakja:

.....

Megoldás:



$(x-2)(x^2 + 2x - 3) \geq 0$;

(x_1, x_2) :

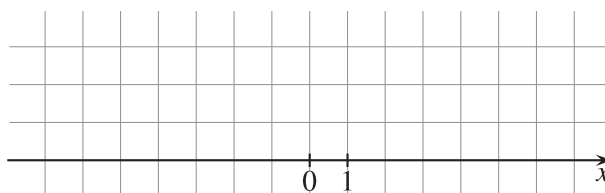
12.3. Szorzattá alakítással oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $(x - 2)(x^2 + 2x - 3) \geq 0$;

A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

A bal oldali kifejezés szorzatalakja:

Megoldás:

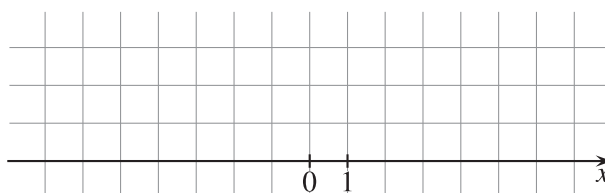


b) $(x + 3)(x^2 - 7x + 10) > 0$;

A másodfokú kifejezés zérushelyei (x_1, x_2) :

A bal oldali kifejezés szorzatalakja:

Megoldás:



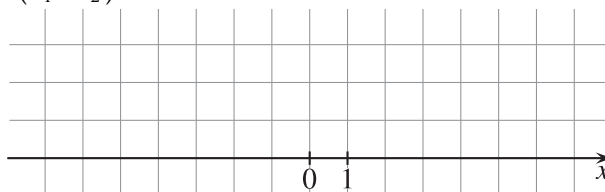
c) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \geq 0$;

A számlálóban lévő másodfokú polinom zérushelyei (x_1, x_2) :

A nevezőben lévő másodfokú polinom zérushelyei (x_1, x_2) :

A bal oldali kifejezés szorzatalakja:

Megoldás:



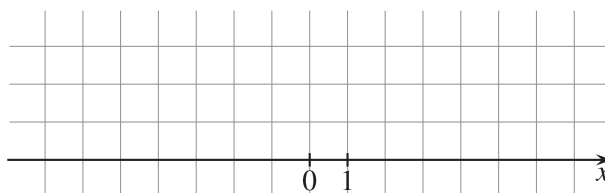
d) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 5x + 6} < 0$.

A számlálóban lévő másodfokú polinom zérushelyei (x_1, x_2) :

A nevezőben lévő másodfokú polinom zérushelyei (x_1, x_2) :

A bal oldali kifejezés szorzatalakja:

Megoldás:



13. feladatlap

Számtani és mértani közép

EMLÉKEZTETŐ

számtani közép: Az a és b nemnegatív számok számtani közepén (átlagán) az $\frac{a+b}{2}$ számot értjük.

mértani közép: Az a és b nemnegatív számok mértani közepén a $\sqrt{a \cdot b}$ számot értjük.

azonos egyenlőtlenség: Olyan egyenlőtlenség, amely a benne szereplő változók minden megengedett értékére fennáll.

számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség: Az a és b nemnegatív számok között fennáll a $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ egyenlőtlenség. Az egyenlőség pontosan akkor állhat fenn, ha $a = b$.

FELADATOK

13.1. Számold ki a következő a , b számok számtani és mértani közepét!

a	1	2	3	4	5	6	7	8
b	4	8	12	5	45	6	14	0,18
Számtani közép								
Mértani közép								

13.2. Bizonyítsd be, hogy az alábbi kifejezésekre is igaz a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség! Az a minden esetben pozitív ($a > 0$).

A kifejezések: a) a és $100 - a$ ($0 < a < 100$); b) a és $\frac{100}{a}$ ($a > 0$);

Az egyenlőtlenség:

A rendezés lépései:

A megoldás:

A kifejezések: c) a és $100 + a$ ($a > 0$); d) 4 és a^2 ($a > 0$).

Az egyenlőtlenség:

A rendezés lépései:

A megoldás:

13.3. Bontsuk az 50-et két részre úgy, hogy a részek szorzata a lehető legnagyobb legyen!

[illegible]

13.4. A 100 cm kerületű téglalapok közül mekkora a legnagyobb területűnek az oldala és a területe?

[illegible]

13.5. Két pozitív szám szorzata 6,25. Mekkora a két szám, ha az összegük minimális?

[illegible]

13.6. A 36 cm^2 területű téglalapok közül melyik kerülete a legkisebb?

[illegible]

14. feladatlap

Négyzetgyökös egyenletek

FELADATOK

14.1. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

$$a) \sqrt{x+5} = 2;$$

$$b) \sqrt{x-4} = 1;$$

c) $\sqrt{2x-1} = x$;

$$d) \quad 2\sqrt{1-x} = x.$$

14.2. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x-1} = x-3$;

b) $\sqrt{x+4} = x+2$.

14.3. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x} = 3$;

b) $\sqrt{x-2} = 4$;

c) $\sqrt{x^2} = x$;

d) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1 - x$;

e) $\sqrt{x} = -x$.

14.4. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x^2 + 2} = x - 1$;

b) $\sqrt{3x+1} + 11 = 3x$;

c) $\sqrt{x+4} = 2x+7$.

15. feladatlap

Másodfokú egyenletre visszavezethető magasabb fokú egyenletek

EMLÉKEZTETŐ

új változó bevezetésének módszere: Vannak olyan egyenlettipusok, amelyeket a másodfokú egyenletre vonatkozó ismereteink segítségével meg tudunk oldani. Például tekintsünk olyan negyedfokú egyenletet, amelyben az ismeretlen csak negyed- és másodfokon fordul elő: $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$. Vezessük be új ismeretlennek az $y = x^2$ -et. Ekkor $y^2 - 5y + 6 = 0$. Ennek a gyökei $y_1 = 3$, $y_2 = 2$. Ebből $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{2}$ és $x_4 = -\sqrt{2}$ négy valós gyök adódik. Vagy például az $x - 23\sqrt{x} + 132 = 0$ egyenlet az $y = \sqrt{x}$ helyettesítéssel $y^2 - 23y + 132 = 0$ másodfokú egyenletté alakul.

FELADATOK

15.1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;

c) $x^4 - 4,25x^2 + 1 = 0$;

d) $x^4 + 29x^2 + 100 = 0$.

15.2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$;

b) $x^6 + 126x^3 + 125 = 0$;

c) $x^6 - 1 = 0$;

d) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

15.3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0;$

b) $x - 23\sqrt{x} + 132 = 0;$

c) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 30 = 0;$

d) $\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} + 4 = 0.$

15.4. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $(x+1)^4 - 13(x+1)^2 + 36 = 0;$

b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$

15.5. Szorzattá alakítás segítségével oldd meg a következő egyenleteket!

a) $x^3 - 9x = 0;$

b) $x^3 - 5x = 0;$

c) $x^3 + 5x^2 + 4x = 0;$

d) $(x+1)^3 - 0,8(x+1)^2 + 0,24(x+1) = 0.$

Másodfokú egyenletre vezető egyenletrendszerek

FELADATOK

16.1. Oldd meg a következő egyenletrendszereket!

$$a) \begin{cases} x + y = 4 \\ x(y + 3) = 12 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 4 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} x + y = -3 \\ x \cdot y = -10 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} x + y = -1 \\ (x + 2)(3 - y) = 48 \end{cases}.$$

16.2. Oldd meg a következő egyenletrendszereket!

$$a) \begin{cases} x - y = 10 \\ x \cdot y = 24 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 = 250 \\ x - y = 4 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 = 229 \\ x + y = 13 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x \cdot y = 20 \end{cases}.$$

17. feladatlap

Párhuzamos szelők tétele, szögfelezőtétel

EMLÉKEZTETŐ

párhuzamos szelők tétele: Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor az egyik száron nyert metszetek aránya megegyezik a másik száron nyert megfelelő metszetek arányával. Pl.

$$\text{Pl. } \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}; \frac{AB}{AO} = \frac{A'B'}{A'O}; \frac{CD}{DE} = \frac{C'D'}{D'E'}; \frac{CE}{AB} = \frac{C'E'}{A'B'}.$$

párhuzamos szelők tételének megfordítása: Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat szel le, amelyek aránya mind a két száron megegyezik, akkor a két egyenes párhuzamos. (A szárból lementett szakaszokat minden esetben a szög csúspontjától mérjük.)

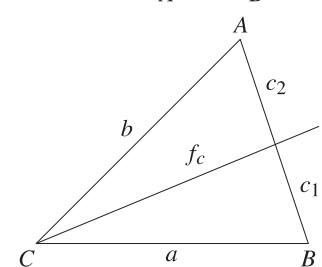
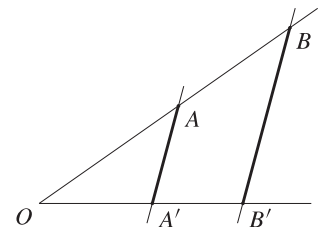
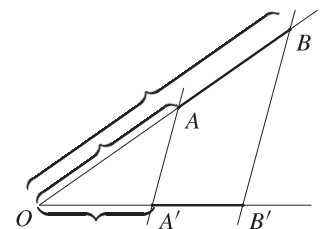
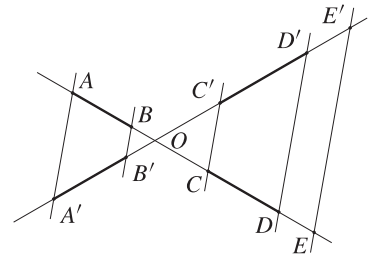
$$\text{Pl. } \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

párhuzamos szelőszakaszok tétele: Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor a párhuzamosak metszeteinek aránya megegyezik a párhuzamosak által az egyes szögszárból kimetszett szeletek arányával.

$$\text{Pl. } \frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

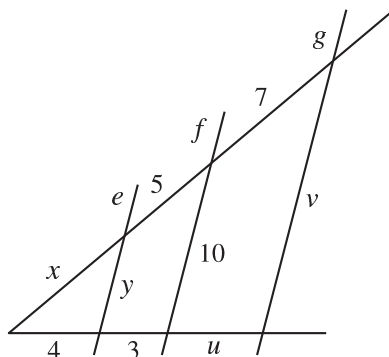
szögfelezőtétel: Egy háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre.

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a}{b}.$$



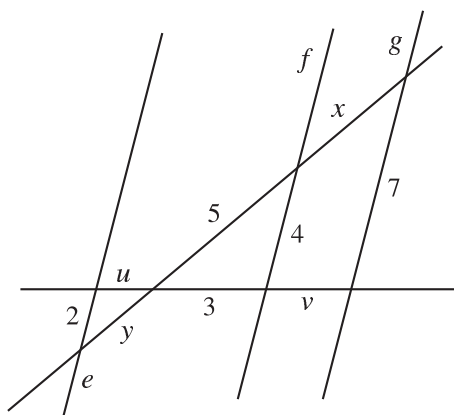
FELADATOK

17.1. Számítsd ki a táblázat hiányzó adatait! $e \parallel f \parallel g$.



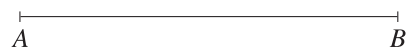
u	v	x	y

17.2. Számítsd ki a táblázat hiányzó adatait! $e \parallel f \parallel g$.



u	v	x	y

17.3. Szerkeszd meg azt a pontot, amely az adott szakaszt
a) $2:5$ arányban; b) $3:7$ arányban osztja!



a)

b)

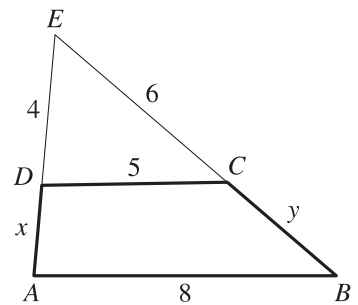
17.4. Adott három szakasz: a , b , c . Szerkeszd meg azt a d szakaszt, amelyre $a : b = c : d$!



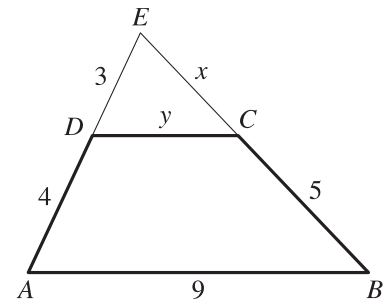
17.5. Adott egy háromszög kerületének hossza. Szerkeszd meg a háromszöget, ha az oldalainak aránya $2 : 4 : 5$!

Kerület

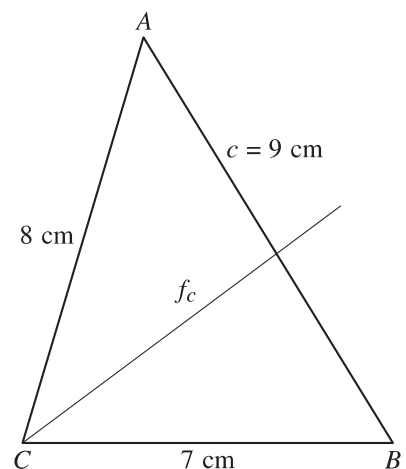
17.6. Egy trapéz kiegészítő háromszögének három oldala 4 cm, 5 cm, 6 cm. A trapéz két alapja 5 cm és 8 cm. Mekkora a trapéz két szára?



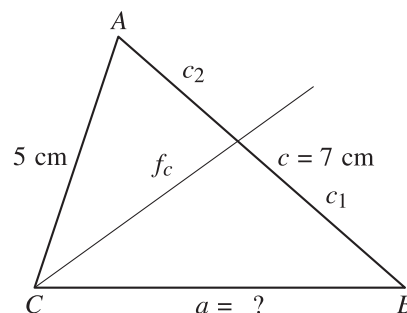
17.7. Egy trapéz és a kiegészítő háromszögének adatai az ábráról leolvashatók. Mekkora a hiányzó adatok?



17.8. Egy háromszög oldalai: 7 cm, 8 cm, 9 cm. Mekkora részekre osztja fel a C csúcshoz tartozó szögfelező a 9 cm-es oldalt?



17.9. Egy háromszög ismert oldalai: 5 cm és 7 cm. A 7 cm-es oldalból a szemközti szög szögfelezője 3 cm-es szakaszt vág le. Mekkora a háromszög harmadik oldala?

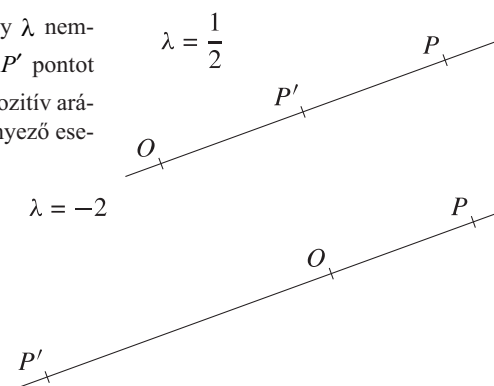


18. feladatlap

Középpontos hasonlóság és tulajdonságai

EMLÉKEZTETŐ

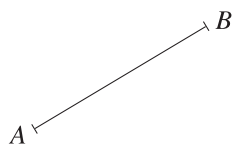
középpontos hasonlóság: Adott egy O pont (a hasonlóság középpontja) és egy λ nem-nulla valós szám (a hasonlóság aránya). A tér P pontjához hozzárendeljük a P' pontot a következőképpen: P' az OP egyenes azon pontja amelyre $OP' = |\lambda|OP$, és pozitív arányossági tényező esetén, az OP félegyenes pontja lesz, negatív arányossági tényező esetén pedig az O szétválasztja a két pontot.



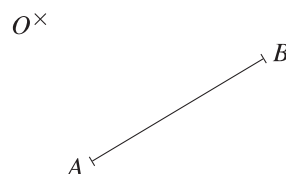
FELADATOK

18.1. Szerkeszd meg a következő szakaszok középpontos hasonlósággal előállított képeit!

a) $\lambda = 2$;
 $O^\times$



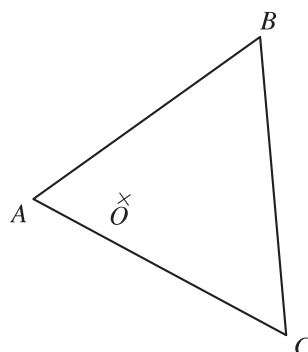
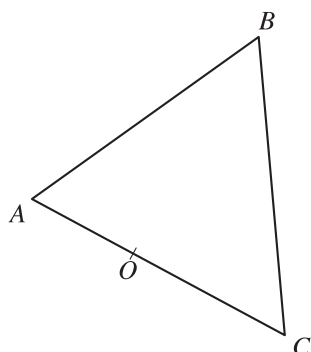
b) $\lambda = -\frac{2}{3}$.



18.2. Szerkeszd meg az alábbi háromszögek középpontos hasonlósággal előállított képeit!

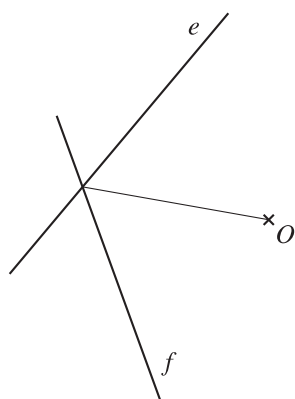
a) $\lambda = \frac{3}{4}$;

b) $\lambda = -\frac{1}{2}$.

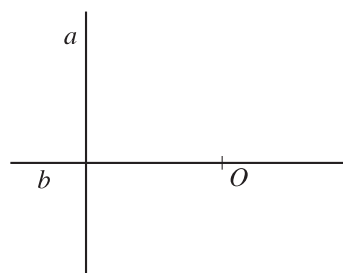


18.3. Szerkeszd meg az egyenesek O középpontú $\lambda = \frac{2}{3}$ arányú kicsinyített képét!

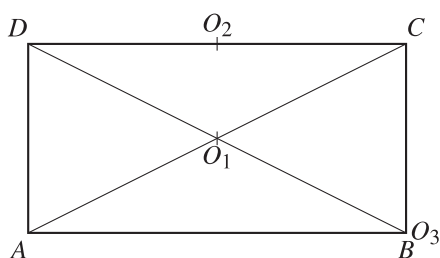
a)



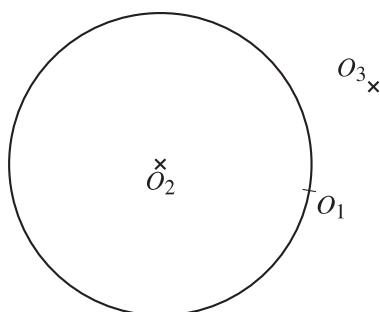
b)



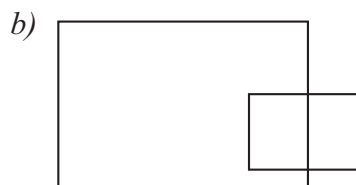
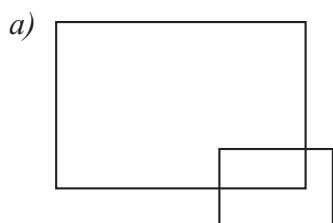
18.4. Szerkeszd meg a téglalap O_1 , O_2 , O_3 középpontú másfélszeres nagyítású képeit!



18.5. Szerkeszd meg a kör O_1 , O_2 , O_3 középpontú félszeres kicsinyítésű képeit!



18.6. Szerkeszd meg a középpontos hasonlóságok középpontjait!



18.7. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz és melyik hamis!

- a) A $\lambda = 0,32$ arányú középpontos hasonlóság az O pontot tartalmazó sík minden pontját egy másik, tárgyponttól különböző pontjába viszi át.
- b) A középpontos hasonlóságnál az egyenes képe soha nem lehet önmaga.
- c) Van olyan középpontos hasonlóság, amely a derékszöget megfigyeli.
- d) A középpontos hasonlóság nem változtatja meg a sokszögek körüljárási irányát.
- e) Ha a középpontos hasonlóság aránya -1 , akkor középpontos tükrözésről beszélhetünk.
- f) Ha a középpontos hasonlóság aránya 1 , akkor a tér minden pontja helyben marad.

19. feladatlap

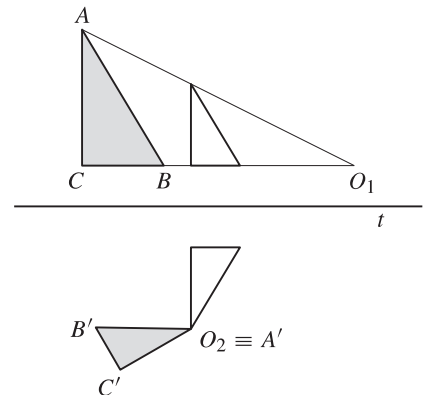
A háromszög hasonlóságának alapesetei

EMLÉKEZTETŐ

hasonlósági transzformáció: Középpontos hasonlósági transzformáció és egybevágósági transzformációk egymás után alkalmazásával kapott transzformáció. Pl. $ABC\Delta$ hasonló $A'B'C'\Delta$ -höz, mert egy O_1 középpontú középponti hasonlósággal egy t tengelyű tengelyes tükrözéssel és egy O_2 középpontú forgatással egymásba vihetők.

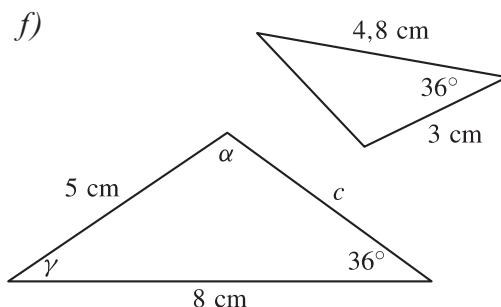
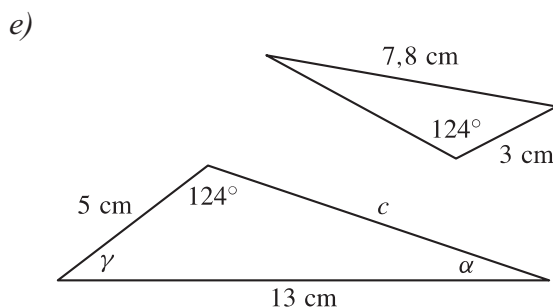
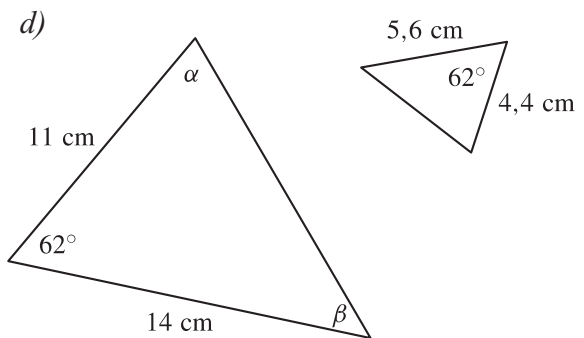
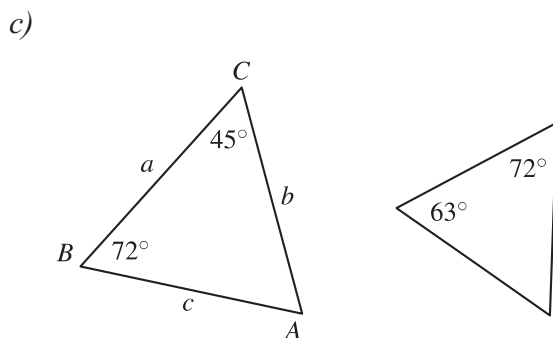
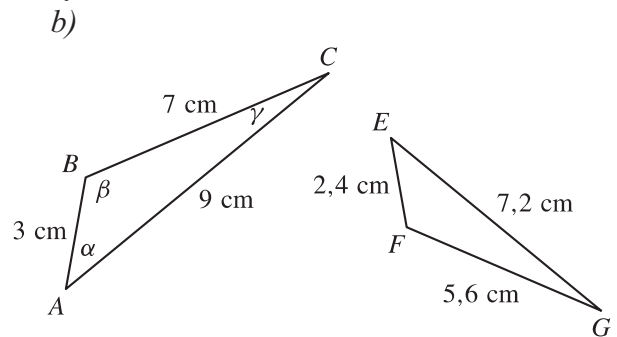
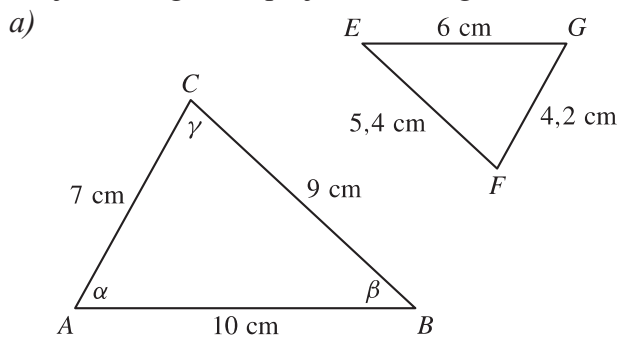
háromszög hasonlóságának alapesetei: Két háromszög hasonló, ha

1. három-három oldalpárjuk aránya egyenlő;
2. két-két oldalpárjuk aránya megegyezik, és az oldalak által bezárt szög egyenlő;
3. megegyeznek két-két szögükben;
4. megegyeznek két-két oldalpárjuk arányában és a nagyobbik oldallal szemkölti szögükben.



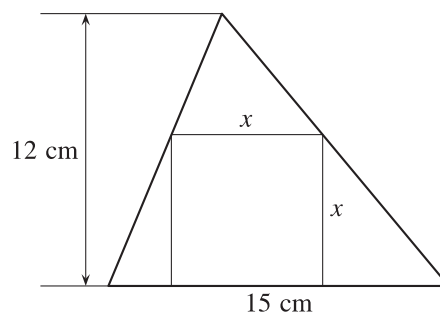
FELADATOK

19.1. Mutasd meg, hogy a háromszögek hasonlóak, majd jelöld be a szögek, illetve oldalak vesszővel jelölt megfelelő párját! Add meg a hasonlóság arányát, ha lehet!



19.2. Egy háromszög oldalai 7 cm, 8 cm, 9 cm hosszúak. A hozzá hasonló háromszögben a 7 cm-es oldalnak megfelelő oldal 5 cm. Mekkora a másik két oldalnak megfelelő oldalak?

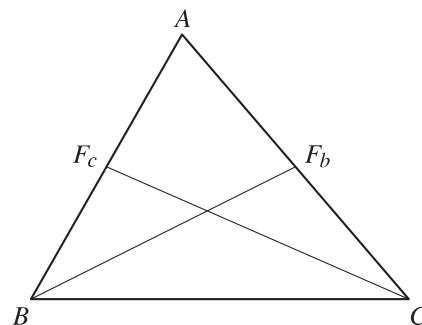
19.3. Egy hegyesszögű háromszög egyik oldala 15 cm, az oldalhoz tartozó magasság 12 cm. Mekkora a háromszögbe rajzolható négyzet oldala?



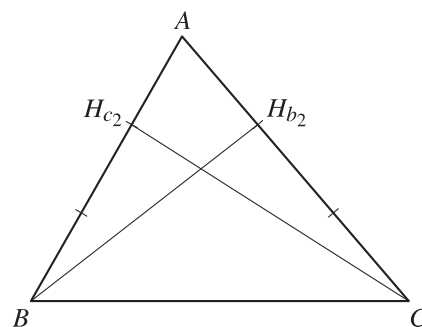
19.4. Egy fa magasságát úgy mértük le, hogy napsütéses időben lemértük a fa és a mellé állított 1,5 m magas rúd árnyékának hosszát. A fa árnyéka 8,45 m, a rúd árnyéka 0,64 m volt. Milyen magas volt a fa?



19.5. a) Egy háromszög két oldalának felezőpontját összekötjük az oldallal szemközti csúccsal (súlyvonal). Határozzuk meg, hogy az így kapott vonalak milyen arányban metszik egymást!



b) Egy háromszög két oldalának ábrán látható harmadolópontját összekötjük az oldallal szemközti csúccsal. Határozzuk meg, hogy az így kapott vonalak, milyen arányban metszik egymást!



20. feladatlap

Körök, sokszögek hasonlósága

EMLÉKEZTETŐ

alakzatok hasonlósága: Két alakzat hasonló, ha létezik olyan hasonlósági transzformáció, amelyik az egyik alakzatot a másik alakzatba viszi át.

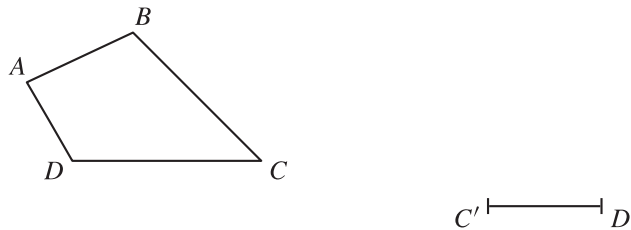
sokszögek hasonlósága: Két sokszög hasonló, ha

1. megfelelő oldalaik és átlóik aránya egyenlő;
2. megfelelő oldalaik aránya egyenlő, és megfelelő szögeik páronként egyenlők.

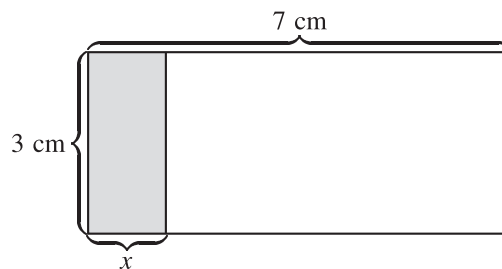
FELADATOK

20.1. Igaz-e, hogy két kör hasonló? Ha igaz, miért?

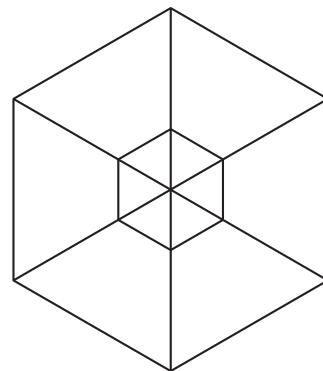
20.2. Szerkessz a $D'C'$ szakasz fölé az $ABCD$ négyszöghöz hasonló négyszöget!



20.3. Mekkora legyen az x , hogy a besötétített téglalap az eredeti téglalaphoz hasonló legyen?



20.4. Szabályos hatszög átlóinak harmadolópontjait összekötjük úgy, hogy szintén konvex hatszöget kapunk. Bizonyítsd be, hogy az így kapott hatszög hasonló az eredeti hatszöghöz!



20.5. Az alábbi kijelentések közül melyik igaz és melyik hamis?

- a) Minden szabályos háromszög hasonló egymáshoz.
- b) Két rombusz hasonló egymáshoz, mert megfelelő oldalaik aránya megegyezik.
- c) Két téglalap hasonló egymáshoz, mert megfelelő szögeik egyenlők.
- d) Van két négyzet, amely nem hasonló egymáshoz.
- e) Ha két paralelogramma szögei egyenlők, akkor hasonlóak is.
- f) Csak két szimmetrikus trapéz lehet hasonló, két általános trapéz nem.

20.6. Az alábbi kijelentések közül melyik igaz és melyik hamis?

- a) Két négyzet hasonló, ha az átlóik aránya egyenlő.
- b) Két négyszög hasonló, ha a szögeik derékszögeik.
- c) Két rombusz hasonló, ha a szögeik egyenlők.
- d) Két paralelogramma hasonló, ha a két szomszédos oldaluk aránya egyenlő.
- e) Két szimmetrikus trapéz hasonló, ha a szögeik páronként egyenlők.

21. feladatlap

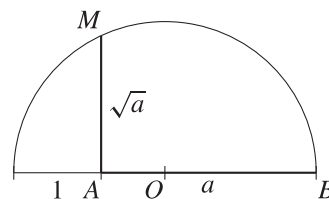
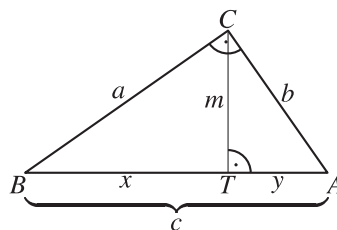
Arányossági tételek a derékszögű háromszögben

EMLÉKEZTETŐ

magasságtétel: A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága mértani közepe a talp-pontja által felosztott átfogó két részének. Pl. $m = \sqrt{x \cdot y}$.

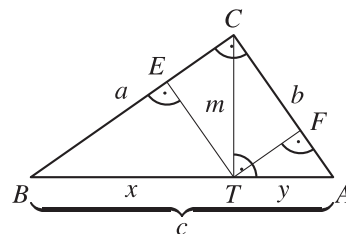
befogótétel: Derékszögű háromszög befogója mértani közepe az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének. $a = \sqrt{x \cdot c}$.

$\sqrt{a}$ hosszúságú szakasz szerkesztése: Felmérjük az a hosszúságú szakaszt, melynek az A jelű végét meghosszabbítjuk pontosan 1 egységnyi hosszal. Az így kapott új szakasz, mint átmérő fölé szerkesztünk egy Thalész-kört. Állítsunk az A pontban az a szakaszra merőle-gest. A merőleges a Thalész-kört az M pontban metszi. Az AM szakasz lesz a $\sqrt{a}$ hosszú-ságú szakasz.

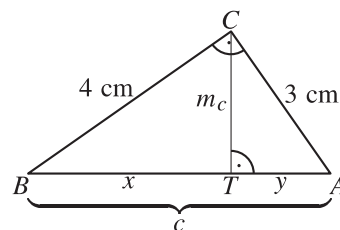


FELADATOK

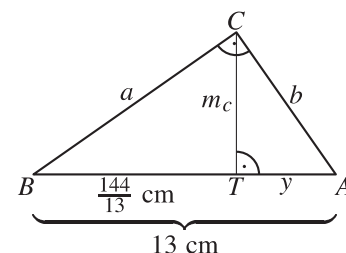
21.1. Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának talppontjából merőlegeseket bocsátunk a befogóira. Bizonyítsd be, hogy az így kapott háromszögek hasonlóak az eredeti háromszöghöz!



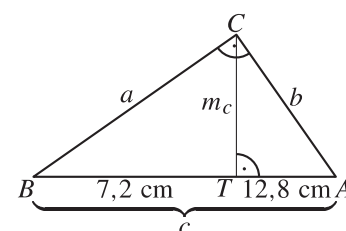
21.2. a) Az ábrán látható derékszögű háromszög két befogójának hossza: $a = 4$ cm, $b = 3$ cm. Mekkora a háromszög átfogója, a magassága, és mekkora az átfogó azon két része, amelyre a magasság talppontja osztja?



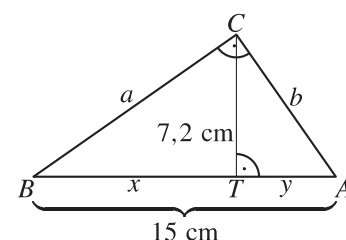
b) Az ábrán látható derékszögű háromszög átfogójának és az a oldal átfogójára eső vetületének a hossza: $c = 13$ cm, $x = \frac{144}{13}$ cm. Mekkora a másik befogónak az átfogóra eső vetülete, mekkora a háromszög átfogójához tartozó magassága és két befogója?



c) Az ábrán látható derékszögű háromszög befogóinak az átfogóra eső merőleges vetületei $x = 7,2$ cm és $y = 12,8$ cm hosszúak. Mekkora a háromszög átfogóhoz tartozó magassága, két befogója és az átfogója?



d) Az ábrán látható derékszögű háromszög átfogója $c = 15$ cm, az átfogóhoz tartozó magassága pedig $m_c = 7,2$ cm. Számítsd ki a háromszög két befogójának és a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek a hosszát!



21.3. Szerkessz *a)* $\sqrt{3}$ cm; *b)* $\sqrt{5}$ cm és *c)* $\sqrt{6}$ cm hosszúságú szakaszt!

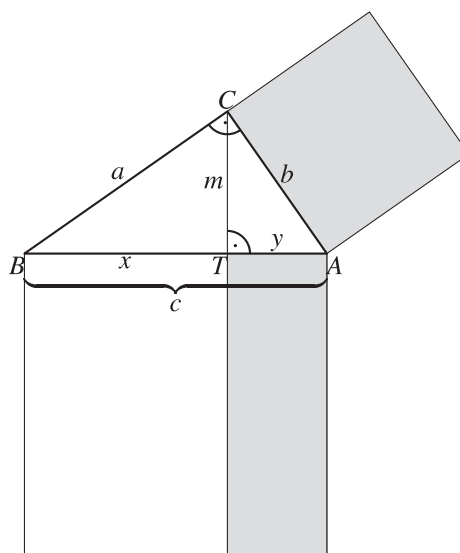
21.4. Szerkeszd meg az adott két szakasz négyzetgyökének a hosszát!

a)

b)

21.5. Bizonyítsd be, hogy egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság egyenlő két befogó szorzatának és az átfogónak a hányadosával!

21.6. Bizonyítsd be, hogy az ábrán látható két szürke terület egyenlő!



22. feladatlap

Hasonló síkidomok területe, hasonló testek térfogata

EMLÉKEZTETŐ

hasonló síkidomok területének aránya: A hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő. Pl. ha egy négyzet oldala egy másik négyzet oldalának kétszerese, akkor a területe négyszerese az eredeti négyzet területének.

hasonló testek térfogatának aránya: A hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő. Pl., ha egy kocka éle egy másik kocka élének kétszerese, akkor a térfogata nyolcszorosa az eredeti kocka térfogatának.

FELADATOK

22.1. Egy 300 cm^2 területű háromszöget $\lambda = 2; 10; \frac{1}{2}; 1,5; 0,2$ arányban középpontosan nagyítunk, illetve kicsinyítünk. Töltsd ki az alábbi táblázatot!

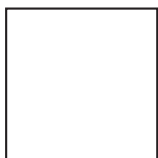
λ	2	10	$\frac{1}{2}$	1,5	0,2
A terület					

22.2. Egy 300 cm^3 térfogatú gömböt $\lambda = 2; 10; \frac{1}{2}; 1,5; 0,2$ arányban középpontosan nagyítunk, illetve kicsinyítünk. Töltsd ki az alábbi táblázatot!

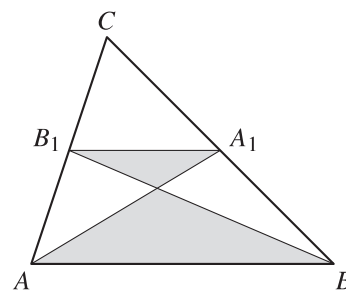
λ	2	10	$\frac{1}{2}$	1,5	0,2
A térfogat					

22.3. $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$. Az $ABC\Delta$ területe 4 dm^2 , az $A_1B_1C_1\Delta$ területe 8 dm^2 . Számítsd ki a hasonlóság arányát!

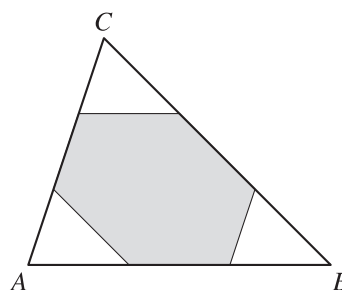
22.4. Szerkeszd meg az adott négyzetnél kétszer nagyobb területű négyzetet!



22.5. A_1 és B_1 oldalfelező pontok. Mekkora a szürke háromszögek területének aránya?



22.6. A háromszög oldalait harmadoltuk. Számítsd ki, hogy a szürke hatszög területe az ABC háromszög területének hány százaléka!



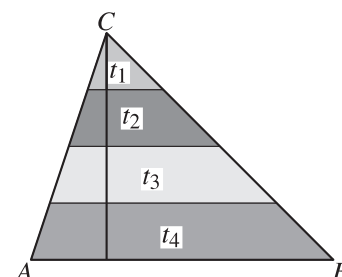
22.7. Az $ABC\Delta$ AB oldalához tartozó magasságot az AB oldallal párhuzamos szakaszok négy egyenlő részre osztják. Számítsd ki, hogy a felső háromszög, illetve a trapézok területe az $ABC\Delta$ területének hány százaléka!

t_1 a t_{ABC} -nek százaléka.

t_2 a t_{ABC} -nek százaléka.

t_3 a t_{ABC} -nek százaléka.

t_4 a t_{ABC} -nek százaléka.



22.8. Hány százalékkal kell növelni az egyenlő oldalú háromszög oldalát, hogy az új egyenlő oldalú háromszög területe az eredeti területének 150%-a legyen?

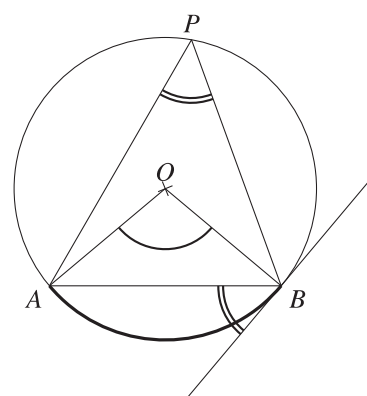
23. feladatlap

Kerületi és középponti szögek

EMLÉKEZTETŐ

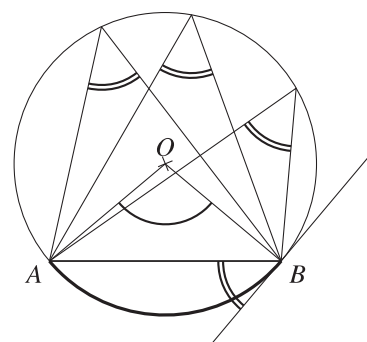
középponti szög: A középponti szög csúcsa a kör középpontjával esik egybe. A szögtartományba eső körívet a **középponti szöghöz tartozó körívnek** nevezzük.

kerületi szög: Az AB ívhez tartozó kerületi szög csúcsa a kör azon ívére esik, amely nem tartozik az AB ívhez. Ha a kerületi szög csúcspontja éppen az AB ív egyik végpontja, akkor a kerületi szög egyik szára a végpontba húzott érintő (**érintőszárú kerületi szög**).



kerületi szögek tétele: A kör adott ívéhez tartozó kerületi szögek egyenlők.

középponti és kerületi szögek tétele: A középponti szög kétszerese az ugyanahhoz az ívhez tartozó kerületi szögnek.

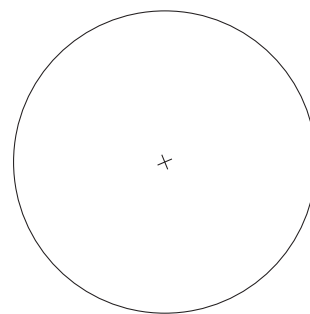


FELADATOK

23.1. Rajzolj a körbe egy nem érintőszárú kerületi szöget és egy érintőszárú kerületi szöget!

Vastagítsd meg azokat az íveket, amelyeken a kerületi szögek nyugszanak!

Rajzod meg az ezeken az íveken nyugvó középponti szögeket is!



23.2. Milyen nagyságú lehet egy α kerületi szög?

23.3. Hány fokos középponti, illetve kerületi szög tartozik a körnek az alábbi táblázatban megjelölt részéhez? Fejezd ki a szöget ívmértékben is!

Az ív hossza a kerület	A középponti szög	A kerületi szög
$\frac{1}{2}$ része		
$\frac{1}{3}$ része		
$\frac{3}{4}$ része		
$\frac{1}{6}$ része		
0,4 része		
$\frac{4}{7}$ része		

23.4. Egy középponti szögnek és a középponti szöghöz tartozó íven nyugvó kerületi szögnek a különbsége $42^\circ 23'$. Mekkora a középponti szög, és mekkora a kerületi szög?

23.5. Egy körszeletet határoló ív a kör középpontjából 70° -os szögben látszik. Mekkora szögben látszik az ív pontjából a körszeletet határoló húr?

24. feladatlap

Kerületi szöggel kapcsolatos szerkesztések, húrnégyszög

EMLÉKEZTETŐ

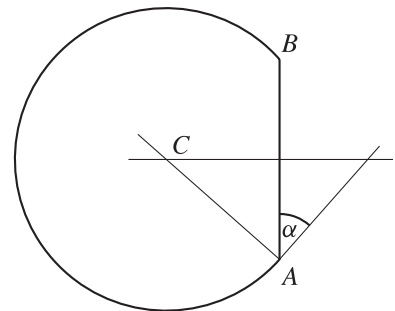
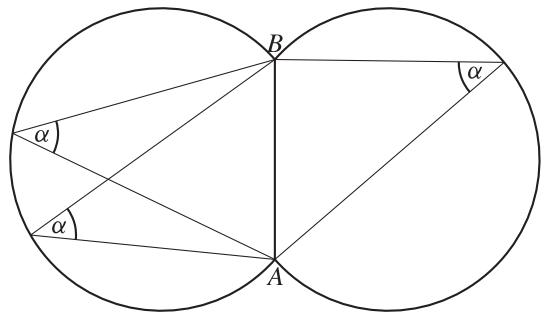
látókörv: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyekből egy adott szakasz adott $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ szögben látszik. A látókörv az adott szakasz egyenesére tükrösen elhelyezkedő két nyílt körív. Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor a ponthalmaz kör, amelynek átmérője az adott szakasz, kivéve a szakasz végpontjait.

látókörv szerkesztése: Mérjük fel az AB szakasz A végpontjára az α szöget, majd szerkesszünk az A pontból indulva merőleget a szög másik szárára. Messük el ezt a merőleget a szakasz oldalfelező merőlegesével. Ez a pont lesz a látószöggörv (C) középpontja, a CA szakasz hossza pedig a sugara.

húrnégyszög: Olyan négyszög, amely köré írható kör.

húrnégyszögek tétele: Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor szemközti szögeinek összege 180° .

húrnégyszög tételének megfordítása: Ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180° , akkor az húrnégyszög.



FELADATOK

24.1. Szerkeszd meg azoknak a pontoknak a halmazát a síkon, amelyekből a megadott szakasz a megadott szögben látszik!

a) $\alpha = 30^\circ$:

b) $\alpha = 45^\circ$:

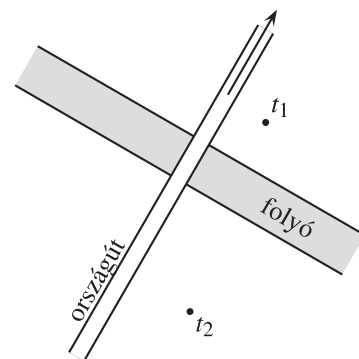


c) $\alpha = 60^\circ$:

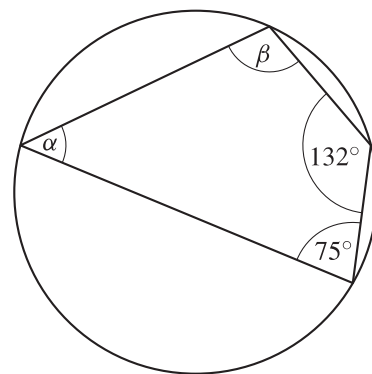
d) $\alpha = 120^\circ$.



24.2. Egy katonai járőr az országúton a megjelölt irányban halad. Mielőtt elérte volna a hidat, megfigyelte, hogy a T_1 és T_2 tereptárgyakat összekötő szakaszt 60° -os szögben látja. Szerkeszd meg a mellékelt térképvázlaton a járőr tartózkodási helyét!

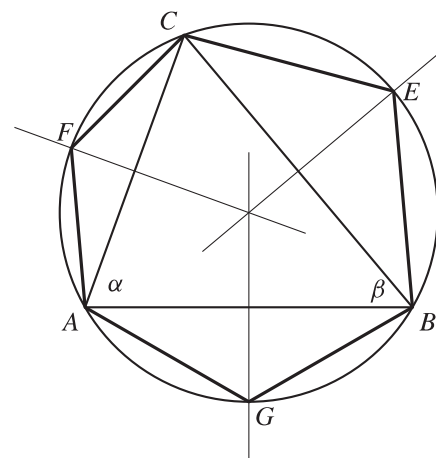


24.3. Egy húrnégyszög két szomszédos szöge 75° és 132° . Mekkora a másik két szöge?

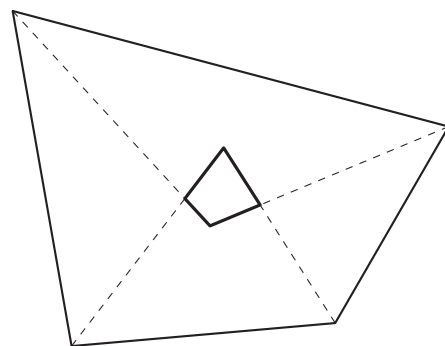


24.4. Egy C csúcpontú szög belső P pontjából a szög száraira merőlegeseket bocsátunk. A metszéspontok jelölése T_1 és T_2 . Bizonyítsd be, hogy a PT_1CT_2 négyszög húrnégyszög!

24.5. Az ABC háromszög két belső szöge $\alpha = 70^\circ$ és $\beta = 50^\circ$. A háromszög köré írható kört az oldalfelező merőlegesek az ábrán látható módon E , F és G pontokban metszik. Mekkora az $AGBECF$ hatszög belső szögei?



24.6. Az ábrán látható négyszög szögfelezői négyszöget határoznak meg. Bizonyítsd be, hogy az így keletkezett négyszög húrnégyszög!



24.7. Döntsd el a következő állításokról, hogy melyik igaz és melyik hamis!

- A téglalap húrnégyszög.
- Egy húrnégyszögnek lehet három hegyesszöge.
- Nincs olyan paralelogramma, amely húrnégyszög.
- Egy húrnégyszög bármelyik szögének külső szög nagysága egyenlő a szöggel szemkötti szög nagyságával.
- Ha egy trapéz húrnégyszög, akkor tengelyesen szimmetrikus.

Szögfüggvények

25. feladatlap

Hegyesszögek szögfüggvényei

EMLÉKEZTETŐ

hegyesszög szinusza: Egy derékszögű háromszögben a hegyesszöggel (α) szemkötti befogó és az átfogó hányadosa a hegyesszög szinusza. Jelölése:

$\sin \alpha$. Az ábra jelöléseivel: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$.

hegyesszög koszinusza: Egy derékszögű háromszögben a hegyesszög (α) melletti befogó és az átfogó hányadosa a hegyesszög koszinusza. Jelölése: $\cos \alpha$.

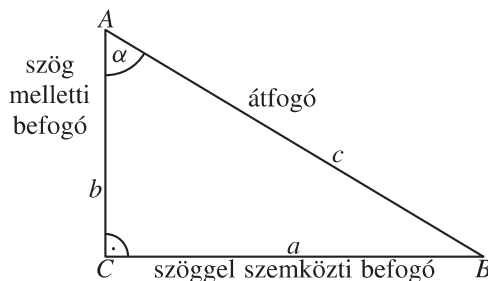
Az ábra jelöléseivel: $\cos \alpha = \frac{b}{c}$.

hegyesszög tangense: Egy derékszögű háromszögben a hegyesszöggel (α) szemkötti befogó és a szög melletti be-

fogó hányadosa a hegyesszög tangense. Jelölése: $\operatorname{tg} \alpha$. Az ábra jelöléseivel: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$.

hegyesszög kotangense: Egy derékszögű háromszögben a hegyesszög melletti és a szemkötti befogó hányadosa a

hegyesszög kotangense. Jelölése: $\operatorname{ctg} \alpha$. Az ábra jelöléseivel: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$.



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

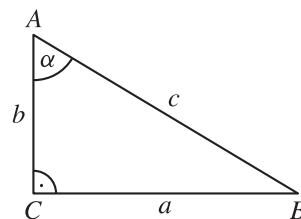
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

FELADATOK

25.1. Adott a derékszögű háromszög két oldala. Határozd meg a harmadik oldalt és az α szög megfelelő szögfüggvényeit!

	a	b	c	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
a)	6	8					
b)	5		13				
c)		7	25				

25.2. Függvénytáblázat vagy számológép segítségével határozd meg a következő hegyesszögek szögfüggvényértékeit!



α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
28°				
79°				
$37,67^\circ$				
$5,14^\circ$				
$68^\circ 11'$				
$13^\circ 45'$				

25.3. Egy derékszögű háromszögben adott az átfogó és az egyik hegyesszög. Számítsd ki a szöggel szemközti befogót!

átfogó	hegyesszög	szöggel szemközti befogó
14 cm	76°	
67 m	$7,5^\circ$	

25.4. Egy derékszögű háromszögben adott az átfogó és az egyik hegyesszög. Számítsd ki a szög melletti befogót!

átfogó	hegyesszög	szög melletti befogó
45,6 cm	11°	
6,25 m	$81,5^\circ$	

25.5. Egy derékszögű háromszögben adott valamelyik befogó és az egyik hegyesszög. Számítsd ki az átfogót!

szöggel szemközti befogó	szög melletti befogó	hegyesszög	átfogó
19 cm	—	$56,7^\circ$	
—	6,66 m	$13,7^\circ$	

25.6. Egy derékszögű háromszögben adott az egyik hegyesszög és a szög melletti befogó. Számítsd ki a szöggel szemközti befogót!

hegyesszög	szög melletti befogó	szöggel szemközti befogó
40°	9 cm	
$10,5^\circ$	23 m	

25.7. Egy derékszögű háromszögben adott az egyik hegyesszög és a szöggel szemközti befogó. Számítsd ki a szög melletti befogót!

hegyesszög	szöggel szemközti befogó	szög melletti befogó
$88,9^\circ$	10 cm	
$2,6^\circ$	1,4 m	

26. feladatlap

Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között

EMLÉKEZTETŐ

a hegyesszög pótszögére vonatkozó összefüggések: 1. A hegyesszög pótszögének szinusa megegyezik a hegyesszög koszinuszával. 2. A hegyesszög pótszögének koszinusa megegyezik a hegyesszög szinuszával. 3. A hegyesszög pótszögének tangense megegyezik a hegyesszög kotangensével. 4. A hegyesszög pótszögének kotangense megegyezik a hegyesszög tangensével. Pl. $\sin 25^\circ = \cos 65^\circ$, $\operatorname{tg} 25^\circ = \operatorname{ctg} 65^\circ$.

pitagoraszai azonosság: A hegyesszög szinuszának és koszinuszának négyzetösszege 1-gyel egyenlő. Pl. $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$.

a hegyesszög tangensére vonatkozó összefüggések: 1. A hegyesszög tangense egyenlő a hegyesszög szinuszának és koszinuszának a hányadosával. 2. A hegyesszög tangense egyenlő kotangensének reciprokával. Pl. $\operatorname{tg} 34^\circ = \frac{\sin 34^\circ}{\cos 34^\circ}$, $\operatorname{tg} 43^\circ = \frac{1}{\operatorname{ctg} 43^\circ}$.

a hegyesszög kotangensére vonatkozó összefüggések: 1. A hegyesszög kotangense egyenlő a hegyesszög koszinuszának és szinuszának a hányadosával. 2. A hegyesszög kotangense egyenlő tangensének reciprokával. Pl. $\operatorname{ctg} 52^\circ = \frac{\cos 52^\circ}{\sin 52^\circ}$, $\operatorname{ctg} 5^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 5^\circ}$.

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha; \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha; \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

FELADATOK

26.1. Számítsd ki az α hegyesszög többi szögfüggvényét a szög értékének kiszámítása nélkül!

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
a)	$\frac{3}{5}$			
b)		$\frac{5}{13}$		
c)	0,2			
d)		0,4		

26.2. Bizonyítsd be a következő azonosságokat!

a) $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$

b) $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha};$

(A negatív megoldásokat még egyelőre nem értelmezzük. Vagyis a továbbiakban használhatjuk

a $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ és a $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ azonosságokat!)

c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}};$

d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha};$

e) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}};$

f) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}.$

26.3. Határozd meg a hegyesszög nagyságát!

a) $\sin 69^\circ = \cos (\alpha - 26^\circ)$;

b) $\cos 81^\circ = \sin (\alpha - 30^\circ)$;

c) $\operatorname{tg} (\alpha - 16^\circ) = \operatorname{ctg} 46^\circ$;

d) $\operatorname{ctg} (\alpha - 8^\circ) = \operatorname{tg} 53^\circ$.

27. feladatlap

Nevezetes szögek szögfüggvényértékei

EMLÉKEZTETŐ

nevezetes szögek szögfüggvényértékei:

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

FELADATOK

27.1. Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét! (Számolás közben használd a fenti táblázatot!)

a) $\sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ =$

b) $\sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ - \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ =$

c) $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ =$

d) $\operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + \sin 45^\circ - \cos 45^\circ =$

e)

$$f) \frac{\sin 45^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ} - \frac{\cos 45^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ} =$$

27.2. Határozd meg a következő hegyesszögek értékét!

$$a) \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$b) \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$c) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$d) \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

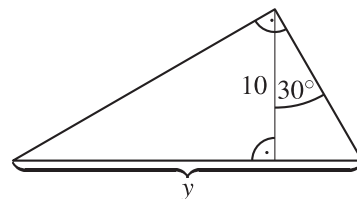
$$e) \cos \alpha = \frac{1}{2};$$

$$f) \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

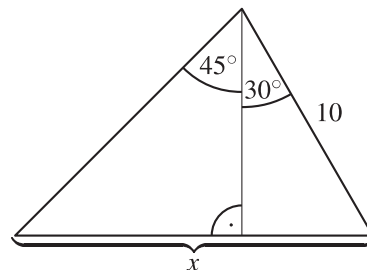
$$g) \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3};$$

$$h) 2 \cdot \sin \alpha = 1.$$

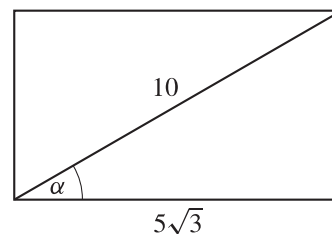
27.3. Számítsd ki a háromszög y oldalát!



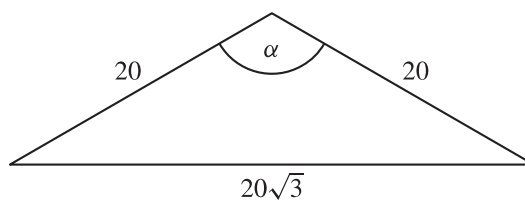
27.4. Számítsd ki a háromszög x oldalát!



27.5. Számítsd ki a téglalap oldala és átlója által bezárt szögét!



27.6. Számítsd ki az egyenlő szárú háromszög szar-szögét!



28. feladatlap

Hegyesszögek és távolságok kiszámolása

FELADATOK

28.1. Számítsd ki a hegyesszögek értékeit számológép vagy függvénytáblázat segítségével!

a) $\sin \alpha = 0,456$;

b) $\sin \alpha = 0,006$;

c) $\cos \alpha = 0,891$;

d) $\cos \alpha = 0,991$;

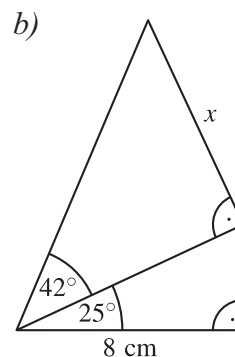
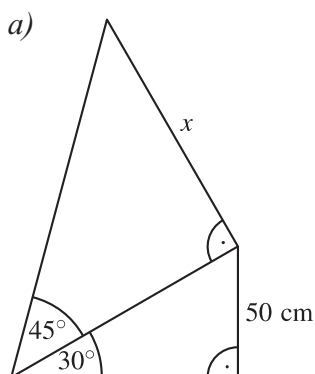
e) $\operatorname{tg} \alpha = 2,56$;

f) $\operatorname{tg} \alpha = 0,77$;

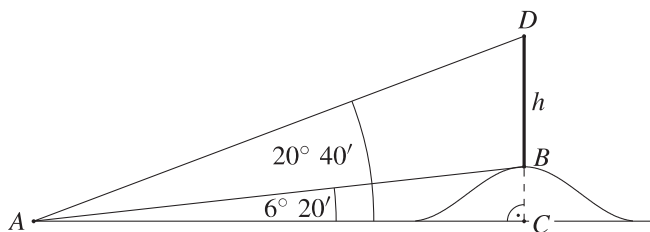
g) $\operatorname{ctg} \alpha = 0,893$;

h) $\operatorname{ctg} \alpha = 8$.

28.2. Számítsd ki az ábrán lát-ható adatok segítségével az x -et!

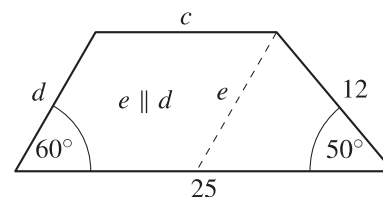


28.3. Számítsd ki a dombon álló függőleges antennaoszlop h magasságát, ha $AB = 150$ m!

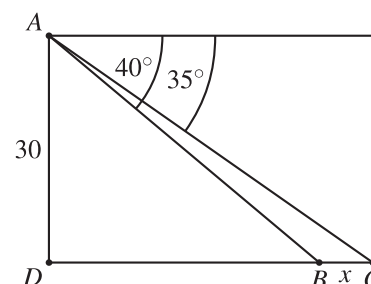


$$\frac{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ}{\cos 60^\circ - \cos 30^\circ} =$$

28.4. Számítsd ki a trapéz c és d oldalát! (Segít a segédvonallal lemetezett háromszög!)



28.5. Egy 30 méter magas toronyból egy folyó egyik partja 40° , a másik partja 35° depressziószög alatt látszik. Milyen széles a folyó? (Az A, B, C pontok függőleges és a folyó irányára merőleges síkot határoznak meg. Keress váltószögeket!)



Vektorok

29. feladatlap

Vektor, vektorok összege, különbsége, számszorosa

EMLÉKEZTETŐ

vektor: Irányított szakasz, vagyis olyan szakasz, amelynek ismert a *kezdőpontja* és a *végpontja*

(nyíl). Jelölése: Lehet kisbetű aláhúzva ($\underline{a}$); kisbetű felette jobbra mutató nyíllal ($\vec{b}$), illetve nyomtatásban félkövér kisbetűvel ($\mathbf{a}$). Ha ismert a két végpont, akkor a jelölés: két pont betűjele felettük egy nyíllal ($\overrightarrow{AB}$). (Az elkövetkező fejezetekben a kézírásos jelölést alkalmazzuk.)

vektor állása: A vektor állása megmutatja, hogy melyik egyenessel párhuzamos. Két vektor *egyállású*, ha ugyanazzal az egyenessel párhuzamos, vagyis párhuzamosok egymással.

vektor iránya: Az egyállású vektorok között megkülönböztethetünk *egyirányú* és *ellentétes irányú* vektorokat. Pl. $\underline{b}$ egyállású vektor $\underline{a}$ -val, $\underline{c}$ ellentétes állású

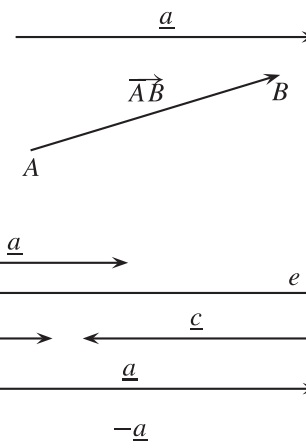
$\underline{a}$ -val.

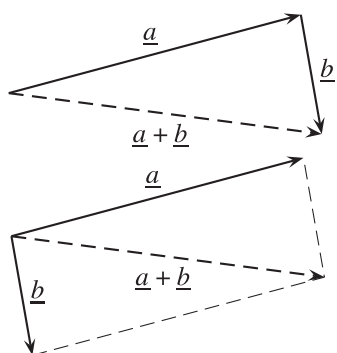
vektor abszolútértéke: A vektor abszolútértéke a vektor hossza. Jele: $|\underline{a}| = a$.

nullvektor: A nullvektor hossza 0, állása pedig tetszőleges lehet. Jele: $\vec{0}$.

vektorok egyenlősége: Két vektor egyenlő, ha egyenlő az abszolútértékük és egyirányúak.

vektor ellentettje: A vektorral azonos abszolútértékű, de ellentétes irányú vektor.

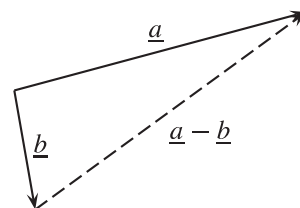




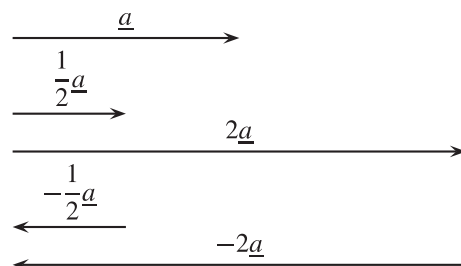
két vektor összege: Az összegvektort megkapjuk, ha az egyik összeadandó vektor végpontjából indul a másik vektor, és az összegük az egyik vektor kezdőpontjából a másik vektor végpontjába mutat! (**Láncszabály.**) Nem párhuzamos vektorok esetén jól használható a vektorok összeadására a **paralelogrammaszabály** is, mely alkalmazásakor az összeadandó vektorok egy pontból indulnak és egy paralelogrammát feszítenek ki. A közös pontból induló átló lesz az eredő vektor.

A két vektort, amelyet összeadunk, **összeadandó vektornak**, az eredményt pedig **eredőnek** nevezzük.

két vektor különbsége: Az azonos kezdőpontú vektorok különbsége a végpontokat összekötő és abba a végpontba mutató vektor, amelyből kivonunk.

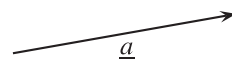


vektor szorzása számmal: A vektor pozitív számmal való szorzásakor a vektor abszolútértéke számszorosra változik, az eredményvektor állása és iránya nem változik. A vektor negatív számmal való szorzásakor a vektor hossza a szám abszolútértékszeresére változik, az állása nem, de az iránya ellentétesre változik. 0-val való szorzásakor nullvektort kapunk.

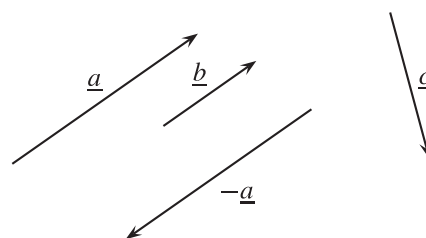


FELADATOK

29.1. Rajzolj az $\underline{a}$ vektorral egyenlő, az $\underline{a}$ vektorral nem egyenlő, végül az $\underline{a}$ vektorral ellentett vektort!



29.2. Az ábrán négy vektort adtunk meg. Szerkeszd meg a következő összegeket!



a) $\underline{a} + \underline{b}$; b) $\underline{a} + (-\underline{a})$; c) $\underline{a} + \underline{c}$;

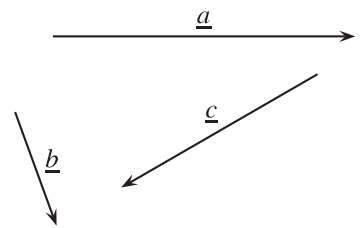
d) $\underline{b} + (-\underline{a})$; e) $\underline{c} + (-\underline{a})$; f) $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$.

29.3. Szerkeszd meg a különbségvektorokat!

a) $\underline{a} - \underline{b}$;

b) $\underline{b} - \underline{a}$;

c) $\underline{a} - \underline{c}$.

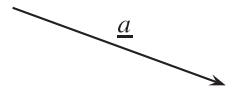


29.4. Szerkeszd meg a vektorokat!

a) $2\underline{a}$;

b) $1,5\underline{a}$;

c) $-0,7\underline{a}$.

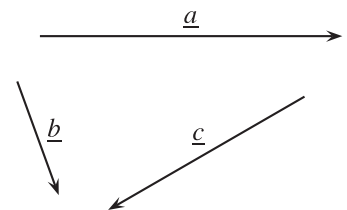


29.5. Szerkeszd meg az eredő vektorokat!

a) $2\underline{a} - \underline{b}$;

b) $2\underline{b} - 3\underline{a}$;

c) $-0,5\underline{a} + 2\underline{c}$.

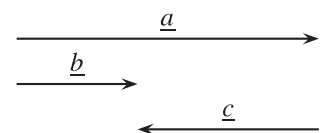


29.6. Szerkeszd meg az eredő vektorokat!

a) $\underline{a} + 2\underline{b}$;

b) $\underline{c} + 1,5\underline{b}$;

c) $2\underline{b} - \underline{a}$;



d) $\underline{c} - \underline{b}$;

e) $\underline{a} + \underline{c} + \underline{b}$;

f) $\underline{c} + \underline{a} - \underline{b}$.

29.7. Írd fel egyszerűbb alakban a következő vektorokat!

a) $2\underline{a} - (\underline{a} - \underline{b}) =$

b) $2(\underline{a} - 2\underline{b}) - 3(3\underline{a} - \underline{b}) =$

c) $\frac{2}{3}(\underline{a} + 3\underline{b}) - \frac{1}{2}(3\underline{a} - 4\underline{b}) =$

d) $\frac{1}{2}(2\underline{a} + \underline{b}) - \frac{1}{3}(\underline{a} - 2\underline{b}) =$

30. feladatlap

Vektorok felbontása összetevőkre

EMLÉKEZTETŐ

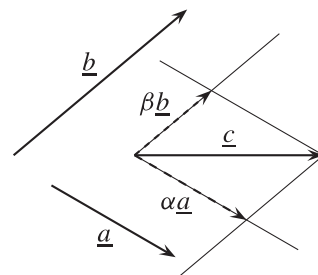
vektorok felbontása:

a) Ha $\underline{a} \parallel \underline{b}$, és nem nullvektorok, akkor a $\underline{b}$ előállítható $\underline{a}$ számszorosaként: $\underline{b} = \lambda \underline{a}$, ahol $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamos vektorok és $\underline{c}$ egy velük egysíkú vektor, akkor a $\underline{c}$ vektor előállítható

(1) $\underline{c} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

alakban. Az előállított (felbontást) az ábrán láthatjuk. Az (1) alatti kifejezést az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok **lineáris kombinációjának** mondjuk.



FELADATOK

30.1. Méréssel állapítsd meg, hogy az adott vektorok hányszorosai az $\underline{a}$ vektornak!

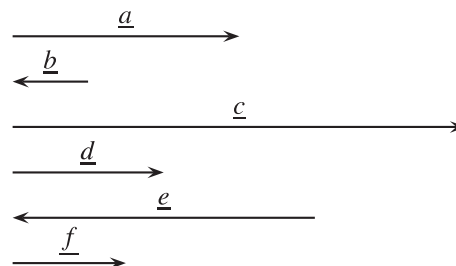
$\underline{b} = \dots \cdot \underline{a};$

$\underline{c} = \dots \cdot \underline{a};$

$\underline{d} = \dots \cdot \underline{a};$

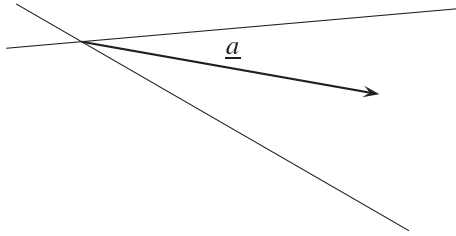
$\underline{e} = \dots \cdot \underline{a};$

$\underline{f} = \dots \cdot \underline{a}.$

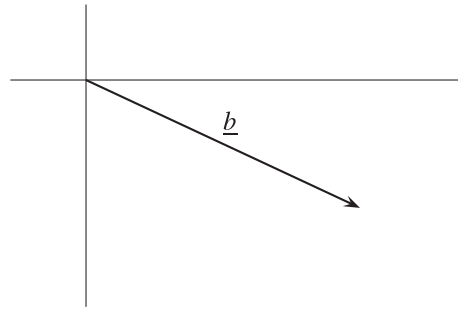


30.2. Bontsd az egyeneseknek megfelelő állású összetevőkre a megadott vektorokat!

a)

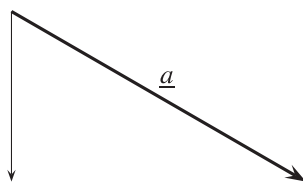


b)

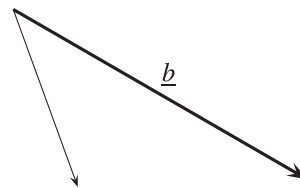


30.3. Szerkeszd meg azt a vektort, amelyhez a vékony vektort adva a vastag vonallal jelölt vektort kapjuk eredményül!

a)

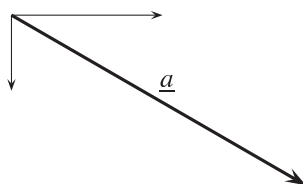


b)

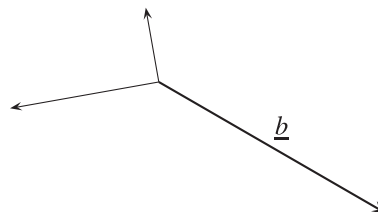


30.4. Bontsd fel a vastag vonallal jelölt vektorokat vékony vonallal jelölt vektorokkal egyállású összetevőkre!

a)



b)



31. feladatlap

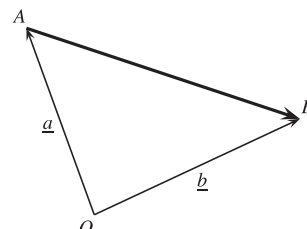
Vektorok alkalmazása

EMLÉKEZTETŐ

helyvektor: Ha rögzítünk egy O pontot, akkor a sík vagy a tér bármelyik P pontjához pontosan egy olyan vektor tartozik, amelynek a kezdőpontja az O pont és a végpontja a P pont. Az $\overrightarrow{OP}$ vektort a P pont helyvektorának nevezzük. Az O pont helyvektora a $\underline{0}$ vektor. Az O pontot **origónak** nevezzük. Megfordítva, ha megadunk egy $\underline{p}$ vektort, akkor pontosan egy olyan P pont létezik, amelynek adott O origó esetén a helyvektora $\underline{p}$.

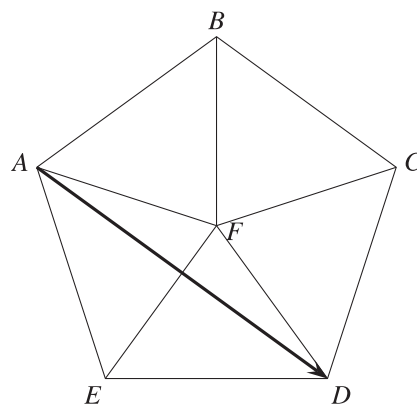
vonatkoztatási pont: A sík vagy tér azon pontja, amelyhez képest a sík vagy tér többi pontjának helyzetét megadjuk. Jele: O .

szakasz felírása helyvektorok segítségével: Az $\overrightarrow{AB}$ vektor felírható a végpontjaikba mutató $\underline{a}$ és $\underline{b}$ helyvektorok segítségével: $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$.



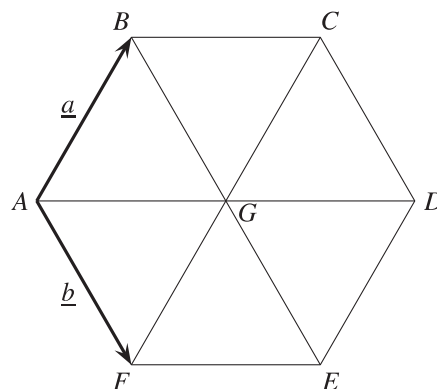
FELADATOK

31.1. Az ábrán látható szabályos ötszög oldalai és a köré írható körének sugarai segítségével minél többféleképpen írd fel az $\overrightarrow{AD}$ vektort! (Pl. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}$.)



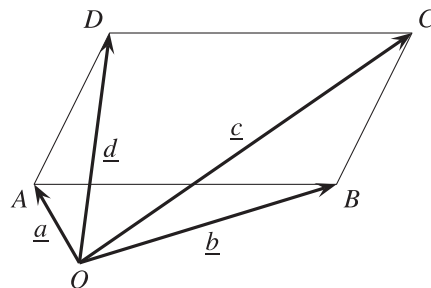
31.2. Írd fel az ábrán látható szabályos hatszögben az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok segítségével a következő vektorokat!

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $\overrightarrow{AG} =$ | b) $\overrightarrow{GC} =$ |
| c) $\overrightarrow{CF} =$ | d) $\overrightarrow{AD} =$ |
| e) $\overrightarrow{AE} =$ | f) $\overrightarrow{EB} =$ |
| g) $\overrightarrow{CB} =$ | h) $\overrightarrow{AC} =$ |
| i) $\overrightarrow{BD} =$ | j) $\overrightarrow{DF} =$ |

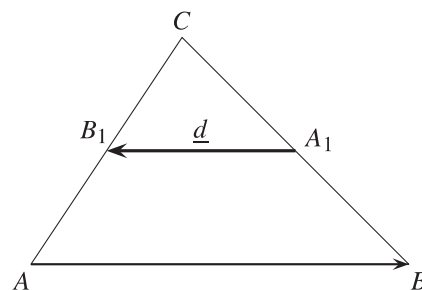


31.3. Az O pontból az $ABCD$ paralelogramma csúcsaihoz vezető vektorok: $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$. Fejezd ki a következő vektorokat az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok segítségével!

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $\overrightarrow{AB} =$ | b) $\overrightarrow{BC} =$ |
| c) $\overrightarrow{DC} =$ | d) $\overrightarrow{AC} =$ |

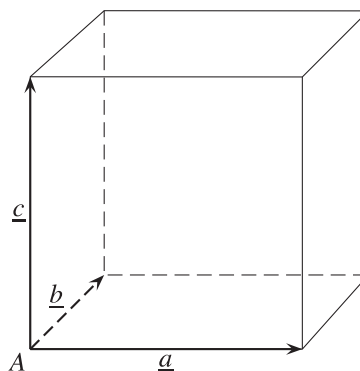


31.4. Fejezd ki az ABC háromszög $\overrightarrow{AB}$ oldalvektorát a $\underline{d} = \overrightarrow{A_1B_1}$ vektor segítségével! A_1B_1 a háromszög középvonala.



31.5. Fejezd ki az $\overrightarrow{AB}$ szakasz F felezőpontjába mutató $\overrightarrow{OF}$ vektort a szakaszok végpontjába mutató $\underline{a}$, $\underline{b}$ helyvektorok segítségével!

31.6. Egy kocka A csúcsából kiinduló élvektorok $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. Fejezd ki az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok segítségével az A -ból a lapközéppontokba vezető vektorokat!



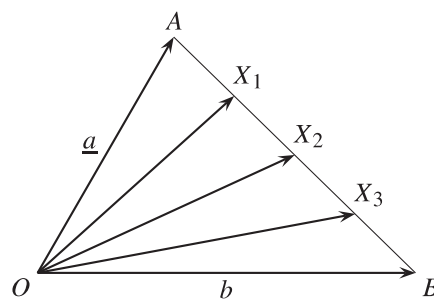
31.7. Fejezd ki az $\overrightarrow{AB}$ szakasz H_1 és H_2 harmadolópontjaiba mutató $\overrightarrow{OH_1}$, $\overrightarrow{OH_2}$ vektorokat a szakaszok végpontjába mutató $\underline{a}$, $\underline{b}$ helyvektorok segítségével!

31.8. Az AB szakaszt négy egyenlő részre osztottuk. Fejezd ki az $\overrightarrow{OX_1}$, $\overrightarrow{OX_2}$, $\overrightarrow{OX_3}$ vektorokat az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorok segítségével!

a) $\overrightarrow{OX_1} =$

b) $\overrightarrow{OX_2} =$

c) $\overrightarrow{OX_3} =$



32. feladatlap

Vektor koordináta-rendszerben

EMLÉKEZTETŐ

vektorok koordinátái: Az $(\underline{i}; \underline{j})$ egységvektorokkal mint bázisvektorokkal megadott derékszögű koordináta-rendszerben bármely $\underline{v}$ vektor előállítható $\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j}$ alakban. v_1 és v_2 a $\underline{v}$ vektor koordinátái. (v_1 az első, v_2 a második koordináta.)

helyvektor koordinátája: Derékszögű koordináta-rendszerben a helyvektor koordinátái megegyeznek annak a pontnak a koordinátaival, amelybe mutat. Pl. a $P(-2;3)$ pont helyvektorának koordinátái $\underline{p}(-2;3)$.

vektor abszolútértéke: A vektor abszolútértéke a $|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Pl. $\underline{v}(2;-3)$; $|\underline{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

egységvektor: Az egységvektor abszolútértéke 1.

Minden $\vec{v}$ nem nullvektorhoz előállítható egy vele azonos irányú egységvektor a $\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$ módon.

Pl. $\underline{v}(2;-3)$ vektor esetén a $\underline{v}$ irányába mutató egységvektor $\frac{\underline{v}}{\sqrt{13}}$. ($|\underline{v}| = \sqrt{13}$).

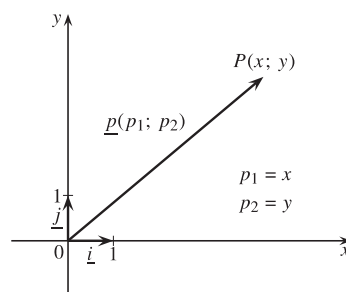
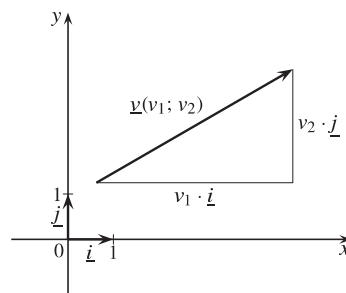
összegvektor koordinátája: Az $\underline{a}(a_1;a_2)$ és a $\underline{b}(b_1;b_2)$ vektorok összegének koordinátái: $(\underline{a} + \underline{b})(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

Pl. $\underline{a}(2;-3)$ és $\underline{b}(1;4)$ vektorok esetén $(\underline{a} + \underline{b})(2+1; -3+4) = (\underline{a} + \underline{b})(3;1)$.

különbségvektor koordinátája: Az $\underline{a}(a_1;a_2)$ és a $\underline{b}(b_1;b_2)$ vektorok különbségének koordinátái: $(\underline{a} - \underline{b})(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

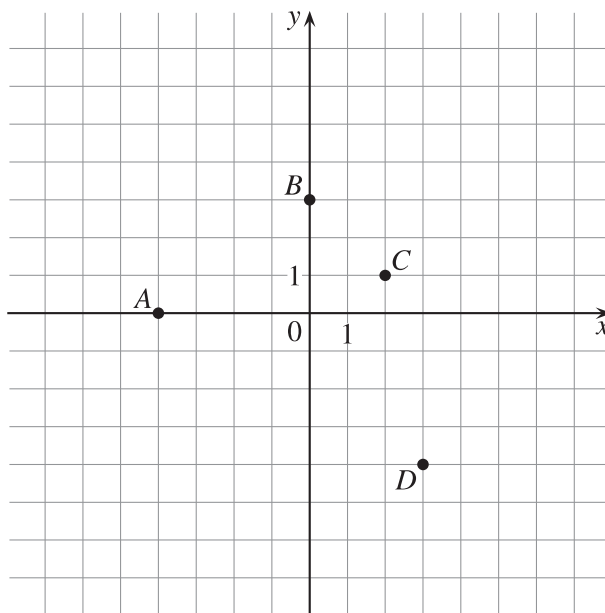
Pl. $\underline{a}(2;-3)$ és $\underline{b}(1;4)$ vektorok esetén $(\underline{a} - \underline{b})(2-1; -3-4) = (\underline{a} - \underline{b})(1;-7)$.

számmal szorzott vektor koordinátája: Az $\underline{a}(a_1;a_2)$ vektor λ -szoros vektorának koordinátái: $\lambda \cdot \underline{a}(\lambda \cdot a_1; \lambda \cdot a_2)$. Pl. $\underline{a}(2;-3)$ vektor 3-szorosának koordinátái: $3\underline{a}(3 \cdot 2; 3 \cdot (-3)) = 3\underline{a}(6;-9)$.



FELADATOK

32.1. Ábrázold az $\underline{u}(2;-3)$, $\underline{v}(-1;5)$ és $\underline{w}(0;3)$ vektorokat a megadott kezdőpontokból indulva!



32.2. Olvasd le az ábrán lévő vektorok koordinátáit!

a) $\underline{a}$ (.....;.....)

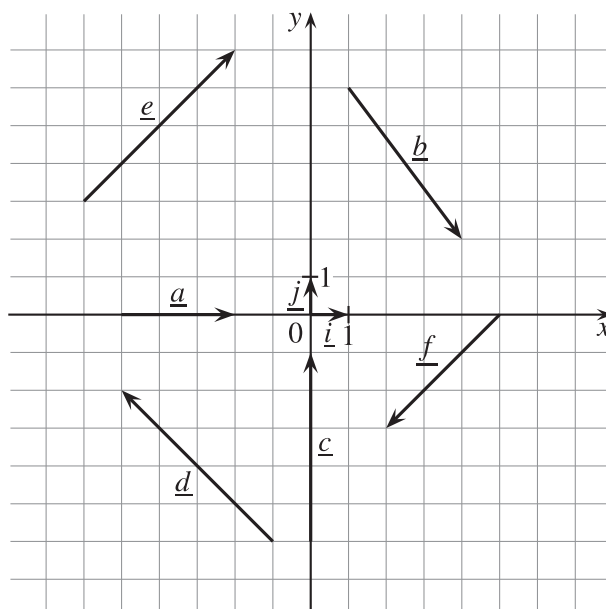
b) $\underline{b}$ (.....;.....)

c) $\underline{c}$ (.....;.....)

d) $\underline{d}$ (.....;.....)

e) $\underline{e}$ (.....;.....)

f) $\underline{f}$ (.....;.....)



32.3. Adott az $\underline{a}$ (2;-3), $\underline{b}$ (0;3) és $\underline{c}$ (-1;1). Határozd meg a következő eredő vektorok koordinátáit!

a) $\underline{a} + \underline{b} =$

b) $\underline{c} - \underline{b} =$

c) $5\underline{a} =$

d) $3\underline{a} + 2\underline{b} =$

e) $4\underline{a} - 3\underline{c} =$

f) $\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b} =$

g) $\underline{a} - \underline{b} + 2\underline{c} =$

h) $-3\underline{a} + 4\underline{b} - \underline{c} =$

32.4. A vektorok koordinátáiból állapítsd meg a vektorok lineáris kombinációjában a bázisvektorok együtthatóit és viszont! (Ügyelj a műveleti jelekre is!)

	vektor	lineáris kombináció		vektor	lineáris kombináció
a)	$\underline{a}$ (3;6)	$\underline{a} = \dots \vec{i} \square \dots \vec{j}$	b)	$\underline{b}$ (.....;.....)	$\underline{b} = 1,24 \vec{i} - 2,5 \vec{j}$
c)	$\underline{c}$ (0;-6)	$\underline{c} = \dots \vec{i} \square \dots \vec{j}$	d)	$\underline{d}$ (.....;.....)	$\underline{d} = -\frac{111}{15} \vec{i}$

32.5. Számold ki a következő vektorok abszolútértékét, valamint a vektorokhoz tartozó egységvektorokat!

	vektor	vektor abszolútértéke	egységvektor
a)	$\underline{a}$ (3;4)		
b)	$\underline{b}$ (1;-1)		
c)	$\underline{c}$ (0;5)		
d)	$\underline{d}$ (-12;-5)		
e)	$\underline{e}$ (-3;0)		
f)	$\underline{f}$ (8;-9)		

32.6. Adott az $A(-2;7)$, $B(-2;4)$ és $C(2;4)$ pont. Határozd meg a következő vektorok koordinátáit!

a) $\overrightarrow{AB}(\dots\dots; \dots\dots)$;

b) $\overrightarrow{CA}(\dots\dots; \dots\dots)$;

c) $\overrightarrow{BC}(\dots\dots; \dots\dots)$.

32.7. Adott az $A(-1;6)$, $B(0;-6)$ és $C(5;-1)$ pont. Határozd meg a következő szakaszok felezőpontjának a koordinátáit!

a) $F_{AB}(\dots\dots; \dots\dots)$;

b) $F_{BC}(\dots\dots; \dots\dots)$;

c) $F_{AC}(\dots\dots; \dots\dots)$.

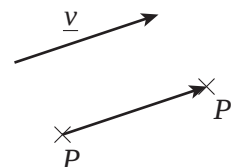
33. feladatlap

Párhuzamos eltolás

EMLÉKEZTETŐ

párhuzamos eltolás: Adott egy $\underline{v}$ vektor. A tér P pontjához hozzárendeljük a P' pontot úgy, hogy $\overrightarrow{PP'} = \underline{v}$. A $\underline{v}$ vektor az eltolás vektora. Amikor a $\underline{v}$ nullvektor ($\underline{v} = 0$), akkor a tér minden pontja helyben marad.

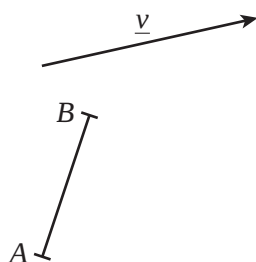
párhuzamos eltolás tulajdonságai: Távolsgártató, illeszkedéstartó, szögtartó, párhuzamosságtartó. A sokszög megtartja a tárgysokszög körüljárási irányát.



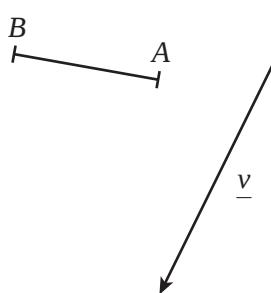
FELADATOK

33.1. Szerkeszd meg a következő szakaszok párhuzamos eltolással előállított képeit!

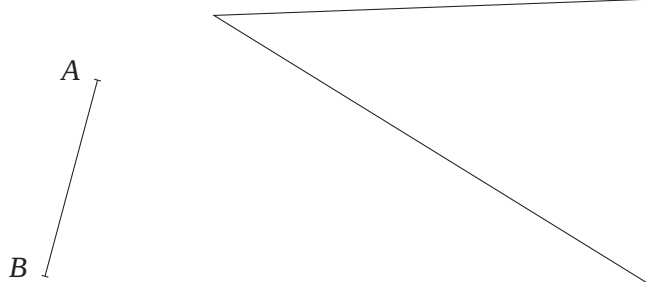
a)



b)

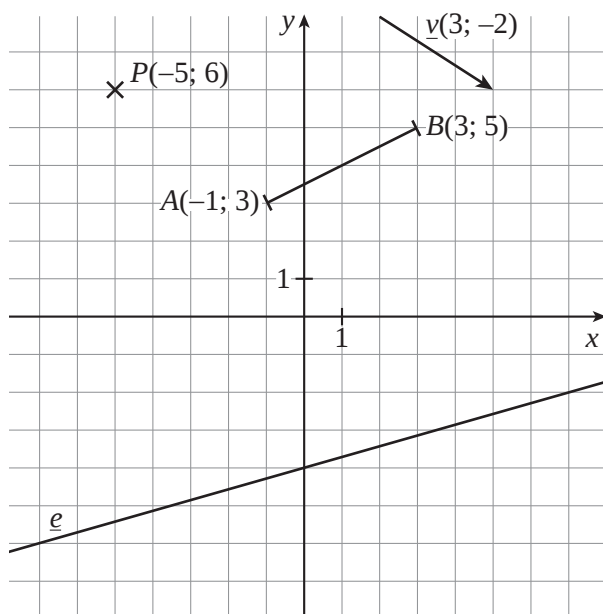


33.2. Told el az AB szakaszt úgy, hogy A végpontjai egy-egy szögcsúszra kerüljenek!

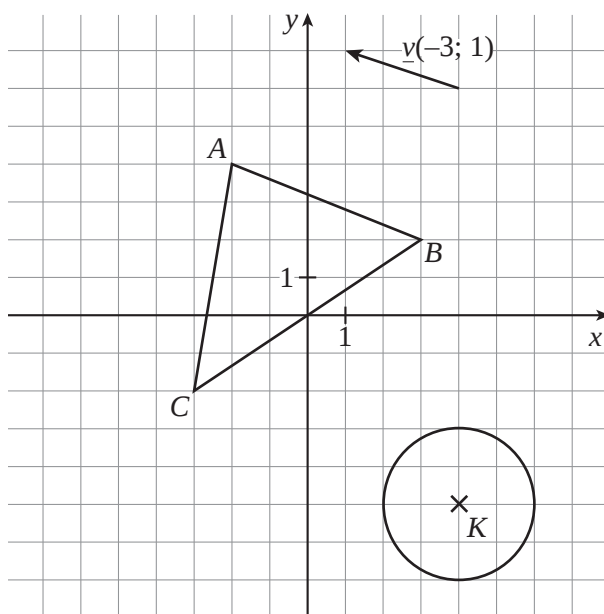


33.3. A megadott $\underline{v}$ vektorral párhuzamosan told el a koordináta-rendszerben lévő alakzatokat! Pontok esetében add meg a képpontok koordinátáit is!

a)



b)

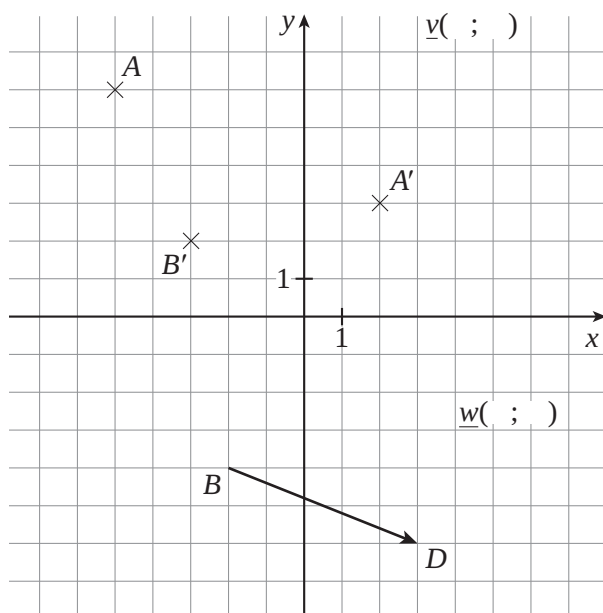


c) Az a) és b) feladat elvégzése után állapítsd meg, hogy mi a kapcsolat a képpont helyvektorának koordinátái, a tárgypont helyvektorának koordinátái és az eltolás vektorának koordinátái között. A felismert összefüggés segítségével állapítsd meg, hogy a $P(2; 5)$ pont $\underline{v} = (-1; 13)$ vektorral eltoló képpontjának (P') mik lesznek a koordinátái?

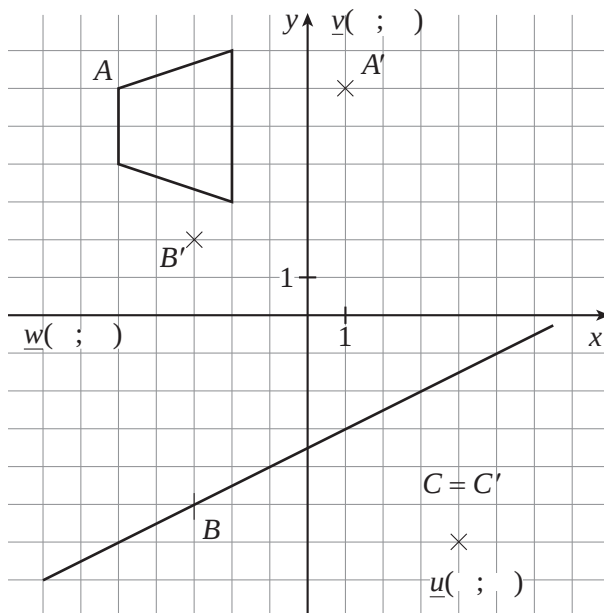
$P'(\dots; \dots)$

33.4. Végezd el az alakzatok eltolását úgy, hogy az A pontnak az A' pont legyen a képe, a B pontnak a B' és a C pontnak pedig a C' ! Határozd meg az egyes eltolásvektorok koordinátáit is!

a)



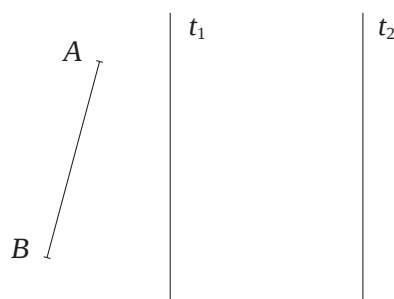
b)



33.5. Adottak a trapéz oldalainak hossza. A két alap az a és c , a két szár pedig a b és d oldal. Szerkeszd meg a trapézt a füzetedben!

a
b
c
d

33.6. Két, egymással párhuzamos tengelyekre történő, tükrözés helyettesíthető egyetlen eltolással. Tükrözd az AB szakaszt előbb a t_1 , majd az így kapott $A'B'$ szakaszt a t_2 tengelyre ($A''B''$). Az ábra alapján figyeld meg, hogy mi állapítható meg az eltolás vektoráról?



34. feladatlap

Egybevágóság

EMLÉKEZTETŐ

geometriai transzformáció: Olyan függvény, amely ponthoz pontot rendel, vagyis az értelmezési tartománya és az értékkészlete egyaránt ponthalmaz.

egybevágósági transzformációk: Azok a geometriai transzformációk, amelyeknél bármely szakasz képeinek hossza egyenlő az eredeti szakasz hosszával. Egybevágósági transzformáció például a tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés, az elforgatás és az eltolás. Egybevágósági transzformációk egymás utáni alkalmazásával egybevágósági transzformációt kapunk.

egybevágósági transzformáció tulajdonságai: Távollágtartó, illeszkedéstartó, szögtartó, párhuzamosságtartó.

alakzatok egybevágósága: Két alakzatot egybevágónak tekintünk, ha létezik olyan egybevágósági transzformáció, amellyel az egyik alakzat a másikba vihető.

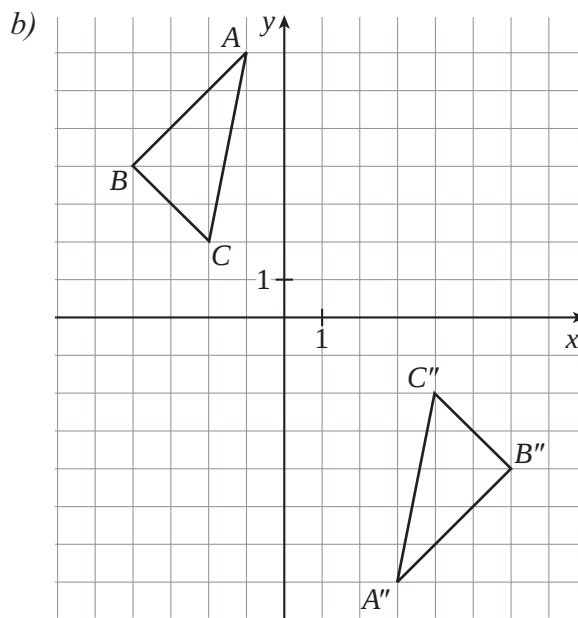
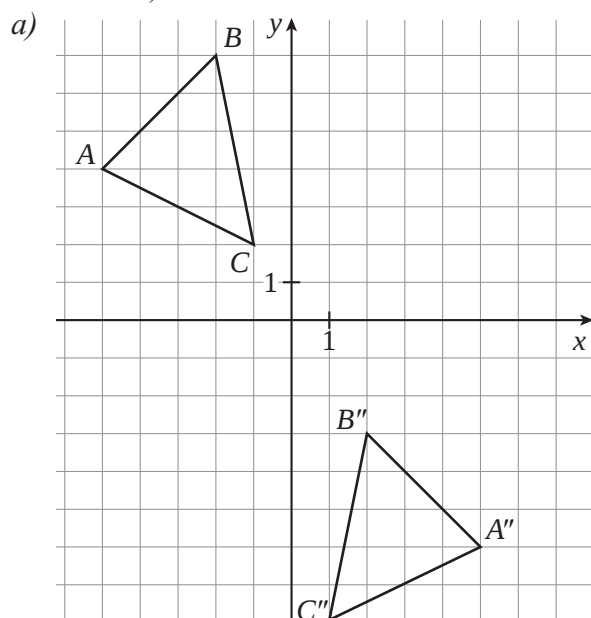
sokszögek egybevágósága: Két sokszög akkor és csak akkor egybevágó, ha a megfelelő oldalaik hossza és megfelelő szögeik nagysága páronként egyenlő.

háromszögek egybevágóságának feltételei: Két háromszög egybevágó, ha

1. megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő;
2. két-két oldaluk hossza és az oldalak által közrezárt szögek nagysága páronként egyenlő;
3. két-két oldalhosszuk és a hosszabb oldallal szemközti szögek nagysága páronként egyenlő;
4. egy-egy oldaluk hossza és az oldalon fekvő mindkét szög nagysága páronként egyenlő.

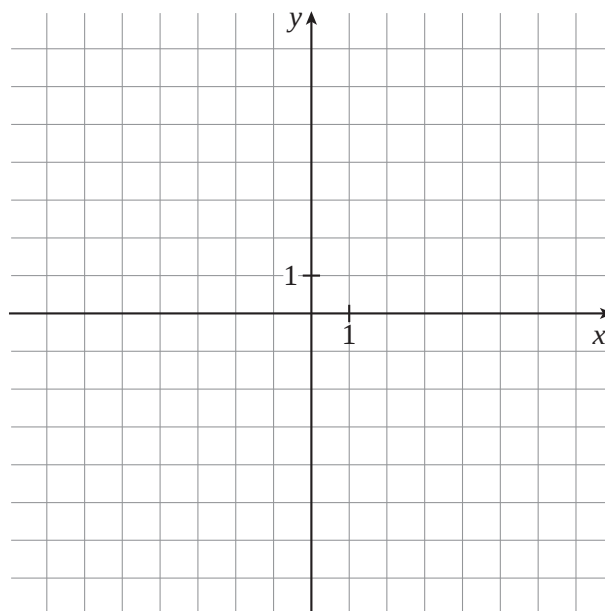
FELADATOK

34.1. Keress két olyan egybevágósági transzformációt, amelyek egymás utáni alkalmazásával az ABC háromszög az $A'B'C'$ háromszögbe vihető. (Egy-egy feladat megoldásához több megoldás is kiötlhető.)



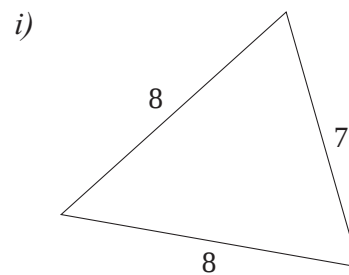
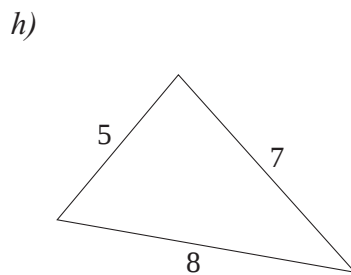
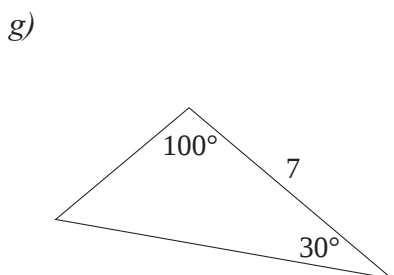
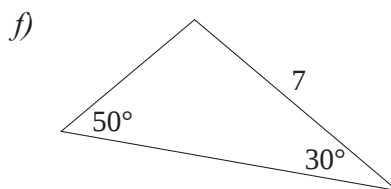
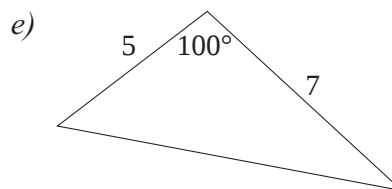
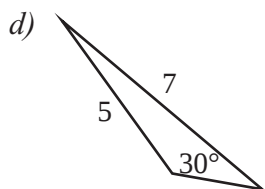
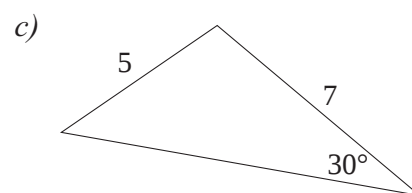
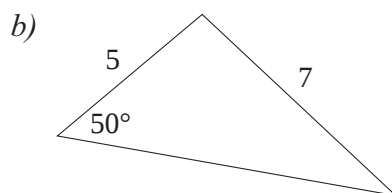
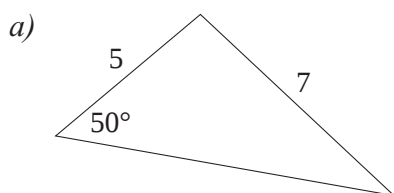
34.2. Az adott pontokkal végezzük el a megadott transzformációt, és állapítsuk meg az általános ponttal $P(x; y)$

	$A(2; 5)$	$B(-3; 4)$	$P(x; y)$
x tengelyre való tükrözés			
y tengelyre való tükrözés			
Origóra való tükrözés			
$K(2; 3)$ pontra való tükrözés			



34.3. Bizonyítsd be, hogy az egyenlőszárú háromszög alaphoz tartozó súlyvonala a háromszöget két egybevágó háromszögre bontja fel!

34.4. Párosítsd az egybevágó háromszögeket! Az ábrák tájékoztató jellegűek.



34.5. Bizonyíts be, hogy két szabályos ötszög egybevágó, ha oldalaik egyenlő hosszúságúak!

35. feladatlap

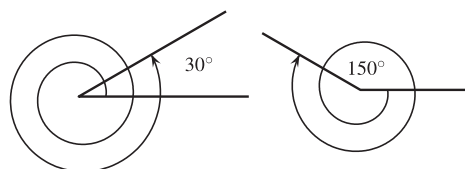
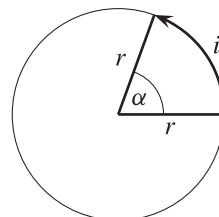
A szög ívmértéke, tetszőleges szög szinusza, koszinusza

EMLÉKEZTETŐ

szög ívmértéke: Az ívmértékben megadott szög megmutatja, hogy a szöghöz mint középponti szöghöz tartozó körívben hányszor van meg a kör sugara. Az ábra jelöléseivel: $\alpha = \frac{i}{r}$.

a szög fokmértéke és ívmértéke közötti átváltás: $\hat{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$, illetve $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \hat{\alpha}$, ahol α° a fokmértékben megadott, valamint $\hat{\alpha}$ az ívmértékben megadott szög. Pl. 1) $\alpha^\circ = 135^\circ$ esetén $\hat{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 135^\circ = \frac{3}{4}\pi \approx 2,36$. 2) $\hat{\alpha} = 2,34$ esetén $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 2,34 = 134,08^\circ$.

forgásszög: A forgásszöget megkapjuk, ha nullszögből indulva az egyik szögcsár nyugalomban marad, a másikat meg pozitív előjel esetén az óra járásával ellenkező, negatív előjel esetén pedig megegyező irányban a szög nagyságával elforgatjuk. Pl. 1. $\alpha^\circ = 750^\circ$; 2. $\alpha^\circ = -570^\circ$.

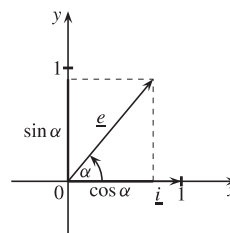


az α szög szinusza: A koordinátasíkon az i egységvektor α forgásszög elforgatásával kapott egységvektor második koordinátája. Jelölése: $\sin \alpha$.

az α szög koszinusza: A koordinátasíkon az i egységvektor α forgásszög elforgatásával kapott egységvektor első koordinátája. Jelölése: $\cos \alpha$.

az α szög tangense: Az α forgásszög tangense a szög szinuszának és koszinuszának hányadosa, amennyiben a koszinuszérték nem nulla. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, ha $\cos \alpha \neq 0$.

az α szög kotangense: Az α forgásszög kotangense a szög koszinuszának és szinuszának hányadosa, amennyiben a szinuszerék nem nulla. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, ha $\sin \alpha \neq 0$.



FELADATOK

35.1. Váltsd át a szög ívmértékét fokmértékbe és viszont! Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit!

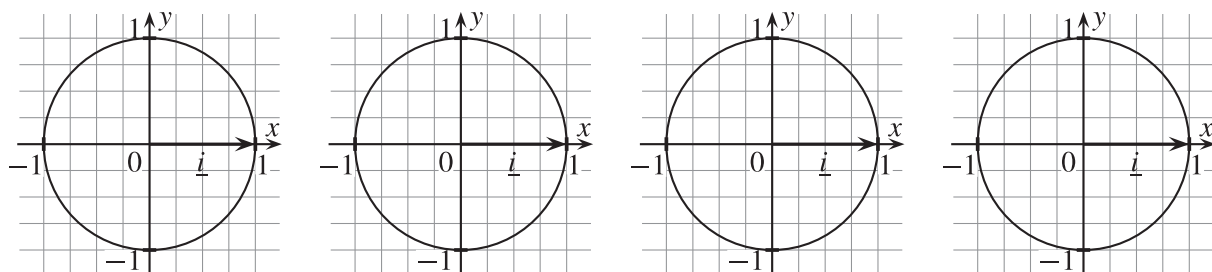
	α°	$\hat{\alpha}$		α°	$\hat{\alpha}$
a)	60°		b)		$-\frac{7}{4}\pi$
c)		$\frac{5}{6}\pi$	d)	-30°	
e)	135°		f)		10

35.2. Számold ki a következő forgásszögek szögfüggvényértékeit!

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
120°				
-540°				
675°				
$\frac{15}{4}\pi$				
-2				

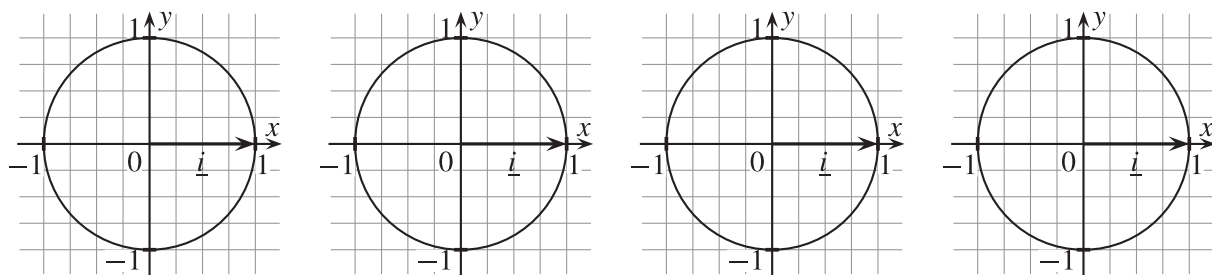
35.3. Forgasd el a forgásszögnek megfelelően az egységvektort, és jelöld be a koordinátatengelyeken az így kapott egységvektor első koordinátáját pirossal, a másodikat pedig kékkel!

- a) $\alpha = 135^\circ$; b) $\alpha = -150^\circ$; c) $\alpha = 225^\circ$; d) $\alpha = 480^\circ$.



35.4. Forgasd el a forgásszögnek megfelelően az egységvektort, és jelöld be a koordinátatengelyeken az így kapott egységvektor első koordinátáját pirossal, a másodikat pedig kékkel!

- a) $\alpha = \frac{11}{6}\pi$; b) $\alpha = \frac{9}{4}\pi$; c) $\alpha = -\frac{5}{2}\pi$; d) $\alpha = -6\pi$.



36. feladatlap

A szinusz- és koszinuszfüggvény egyszerű tulajdonságai

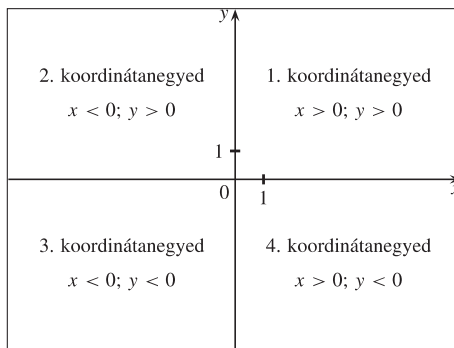
EMLÉKEZTETŐ

a szinusz- és a koszinuszfüggvény periódusos: Egy adott forgásszöghöz a teljes szög egész számú többszörösét hozzáadva vagy kivonva a szög szinusza vagy koszinusza nem változik meg.

$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha$ $\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$	, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin \alpha$ $\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos \alpha$	, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Ívmértékben pedig

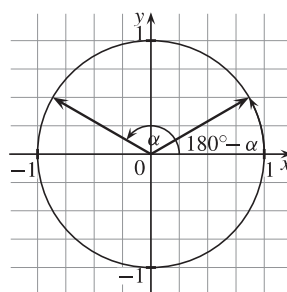
a koordinátasík koordináтанegyedekre való felosztása: A koordinátasíkot a két tengely négy negyedre osztja fel. Az 1. koordináтанegyedben lévő pontok mindkét koordinátája pozitív. A 2. koordináтанegyedben lévő pontok első koordinátája negatív, második koordinátája pozitív. A 3. koordináтанegyedben lévő pontok mindkét koordinátája negatív. A 4. koordináтанegyedben az első koordináта pozitív, a második negatív.



A 2. koordináтанegyedbe eső egységvektor koordinátái:

$$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha) \quad \text{illetve} \quad \sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$$

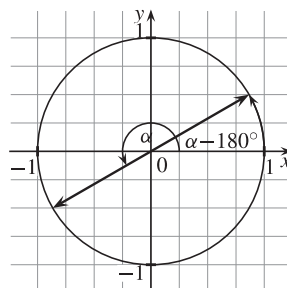
$$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha), \quad \cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha).$$



A 3. koordináтанegyedbe eső egységvektor koordinátái:

$$\sin \alpha = -\sin(\alpha - 180^\circ) \quad \text{illetve} \quad \sin \alpha = -\sin(\alpha - \pi)$$

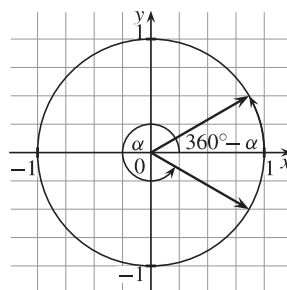
$$\cos \alpha = -\cos(\alpha - 180^\circ), \quad \cos \alpha = -\cos(\alpha - \pi).$$



A 4. koordináтанegyedbe eső egységvektor koordinátái:

$$\sin \alpha = -\sin(360^\circ - \alpha) \quad \text{illetve} \quad \sin \alpha = -\sin(2\pi - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \cos(360^\circ - \alpha), \quad \cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha).$$



FELADATOK

36.1. A következő szögfüggvényeket vedd vissza nullszög és teljesszög közötti szögfüggvény-értékére! ($\sin 1000^\circ = \sin 280^\circ$.)

- a) $\sin 2000^\circ = \sin(\dots\dots\dots)$; b) $\cos 1200^\circ = \cos(\dots\dots\dots)$; c) $\sin(-600^\circ) = \sin(\dots\dots\dots)$;
d) $\cos(-900^\circ) = \cos(\dots\dots\dots)$; e) $\sin 5000^\circ = \sin(\dots\dots\dots)$; f) $\cos(-12\,000^\circ) = \cos(\dots\dots\dots)$.

36.2. Add meg a nevezetes szögek szögfüggvényeinek ismeretében a következő szögfüggvények pontos értékét!

- a) $\sin 120^\circ =$ b) $\cos 135^\circ =$
c) $\sin 210^\circ =$ d) $\cos 240^\circ =$
e) $\sin 315^\circ =$ f) $\cos 300^\circ =$
g) $\sin 480^\circ =$ h) $\cos 390^\circ =$

36.3. Add meg a nevezetes szögek szögfüggvényeinek ismeretében a következő szögfüggvények pontos értékét!

- a) $\sin \frac{5\pi}{6} =$ b) $\cos \frac{2\pi}{3} =$

$$c) \sin \frac{4\pi}{3} =$$

$$d) \cos \frac{5\pi}{4} =$$

$$e) \sin \frac{7\pi}{6} =$$

$$f) \cos \frac{5\pi}{3} =$$

$$g) \sin \frac{7\pi}{4} =$$

$$h) \cos \frac{11\pi}{6} =$$

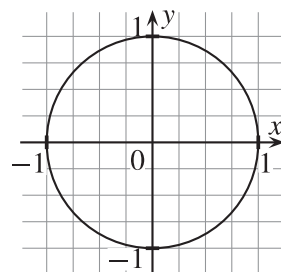
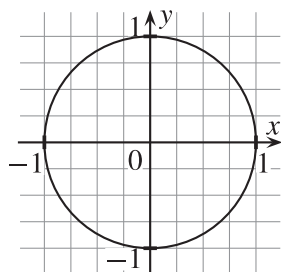
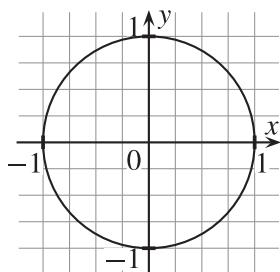
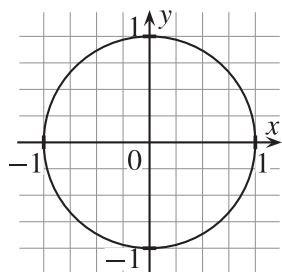
36.4. Az adott szögfüggvényt mint koordinátát ábrázold a megfelelő koordinátatengelyen, és szerkeszd meg a hozzá tartozó egységvektort!

$$a) \sin 45^\circ =$$

$$b) \cos 135^\circ =$$

$$c) \sin 240^\circ =$$

$$d) \cos 330^\circ =$$



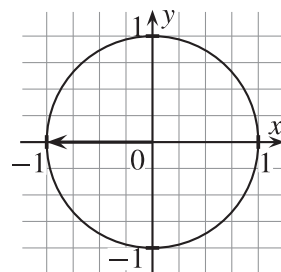
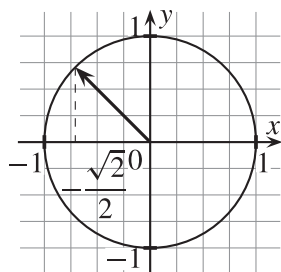
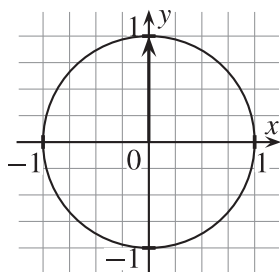
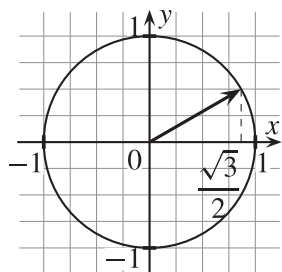
36.5. Olvasd le az egységvektorokhoz tartozó forgásszögeket!

$$a) \alpha =$$

$$b) \alpha =$$

$$c) \alpha =$$

$$d) \alpha =$$



37. feladatlap

Forgásszög meghatározása a szögfüggvényérték ismeretéből

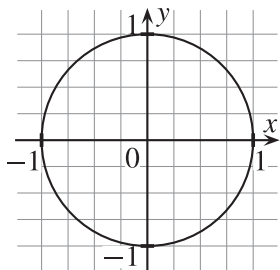
EMLÉKEZTETŐ

Az egyenletek megoldását radiánban adjuk meg. Fontos: ha egy trigonometrikus egyenletnek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása van.

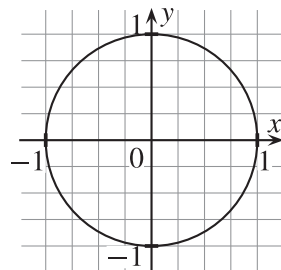
FELADATOK

37.1. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

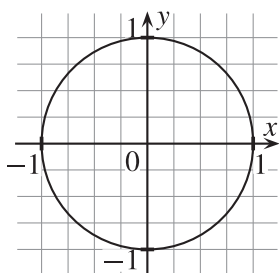
$$a) \sin x = \frac{1}{2};$$



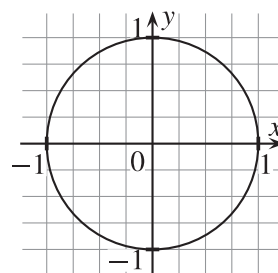
$$b) \sin x = -\frac{1}{2};$$



$$c) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

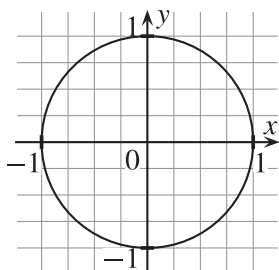


$$d) \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

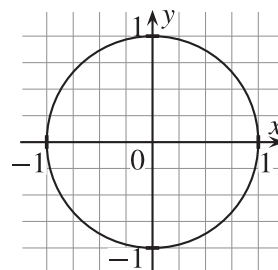


37.2. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

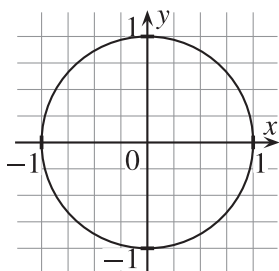
$$a) \sin x = -1;$$



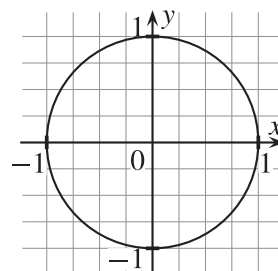
$$b) \sin x = 0;$$



$$c) \cos x = -1;$$

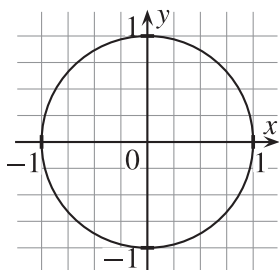


$$d) \cos x = 0.$$

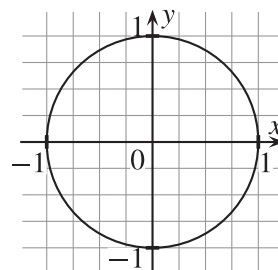


37.3. Oldd meg a valós számhalmazon a következő egyenleteket!

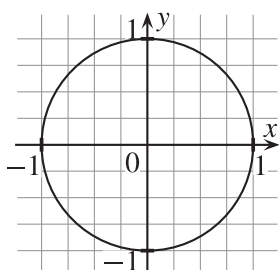
$$a) \sin x = 0,25;$$



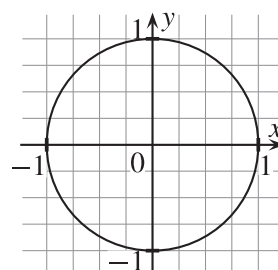
$$b) \sin x = -0,8;$$



$$c) \cos x = -0,5;$$



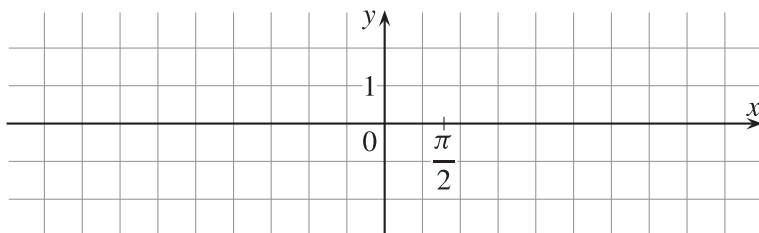
$$d) \cos x = 0,65.$$



Szinusz és koszinusz szögfüggvény ábrázolása

FELADATOK

38.1. Ábrázold és jellemezd az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ függvényt!



Értelmezési tartomány:

Értékkészlet:

Zérushely:

Tengelypont:

Növekedés:

Csökkenés:

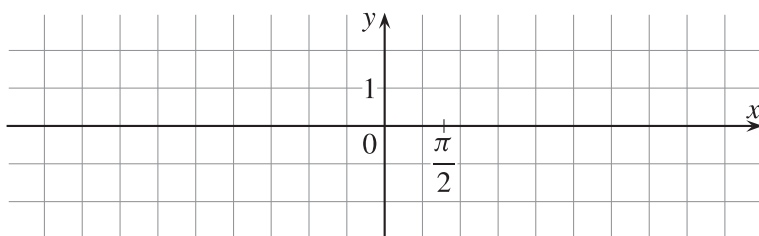
Szélsőértékek:

Páros:

Páratlan:

Periódus:

38.2. Ábrázold és jellemezd az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos x$ függvényt!



Értelmezési tartomány:

Értékkészlet:

Zérushely:

Tengelypont:

Növekedés:

Csökkenés:

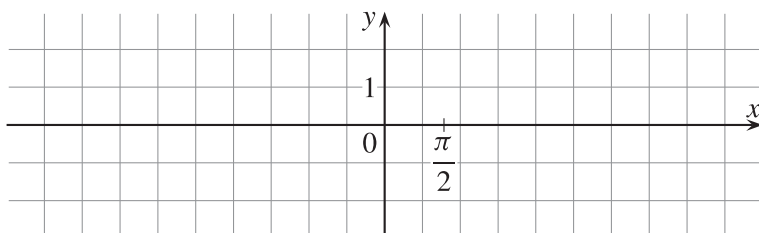
Szélsőértékek:

Páros:

Páratlan:

Periódus:

38.3. Ábrázold és jellemezd az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2 \cdot \sin x$ függvényt!



Értelmezési tartomány:

Értékkészlet:

Zérushely:

Tengelypont:

Növekedés:

Csökkenés:

Szélsőértékek:

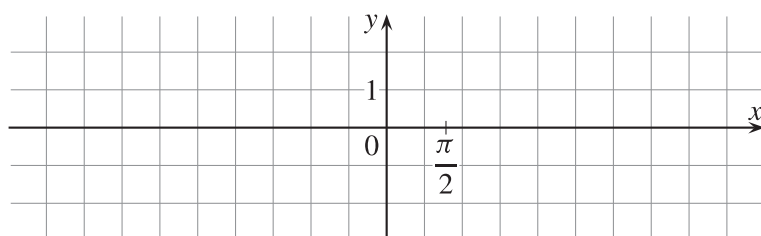
Páros:

Páratlan:

Periódus:

38.4. Ábrázold és jellemezd az

függvényt!



Értelmezési tartomány:

Értékkészlet:

Zérushely:

Tengelypont:

Növekedés:

Csökkenés:

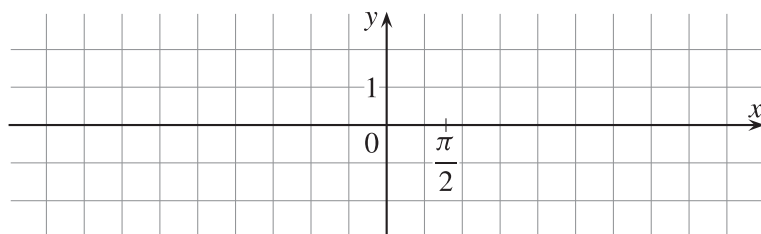
Szélsőértékek:

Páros:

Páratlan:

Periódus:

38.5. Ábrázold és jellemezd az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x + 1$ függvényt!



Értelmezési tartomány:

Értékkészlet:

Zérushely:

Tengelypont:

Növekedés:

Csökkenés:

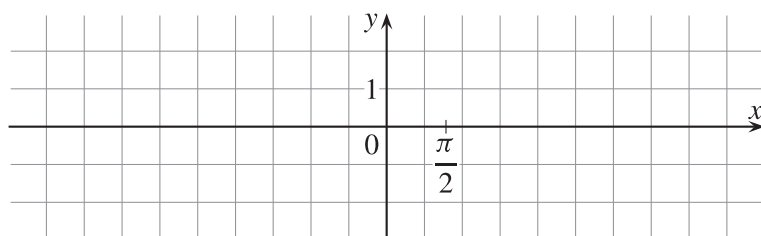
Szélsőértékek:

Páros:

Páratlan:

Periódus:

38.6. Ábrázold és jellemezd az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ függvényt!



Értelmezési tartomány:

Értékkészlet:

Zérushely:

Tengelypont:

Növekedés:

Csökkenés:

Szélsőértékek:

Páros:

Páratlan:

Periódus:

39. feladatlap

Tangens- és kotangens-függvény

FELADATOK

39.1. Add meg a nevezetes szögek szögfüggvényeinek ismeretében a következő szögfüggvények pontos értékét!

a) $\operatorname{tg} 120^\circ =$

b) $\operatorname{ctg} 135^\circ =$

c) $\operatorname{tg} 210^\circ =$

d) $\operatorname{ctg} 240^\circ =$

e) $\operatorname{tg}(-45^\circ) =$

f) $\operatorname{ctg}(-45^\circ) =$

g) $\operatorname{tg} 480^\circ =$

h) $\operatorname{ctg} 390^\circ =$

39.2. Add meg a nevezetes szögek szögfüggvényeinek ismeretében a következő szögfüggvények pontos értékét!

a) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} =$

b) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{2\pi}{3} \right) =$

c) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} =$

d) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4} =$

39.3. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

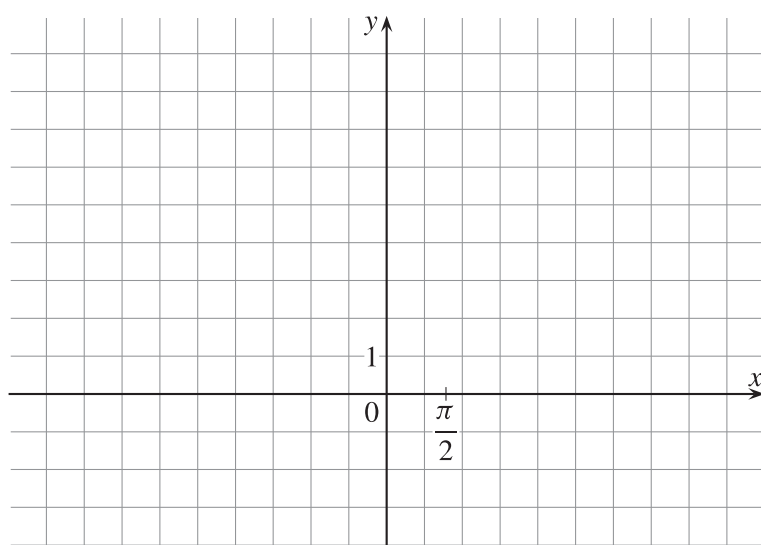
a) $\operatorname{tg} x = 1;$

b) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3};$

c) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3};$

d) $\operatorname{ctg} x = 0.$

39.4. Ábrázold és jellemezd az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{tg} x$ függvényt!



Értelmezési tartomány:

Értékkészlet:

Zérushely:

Tengelypont:

Növekedés:

Csökkenés:

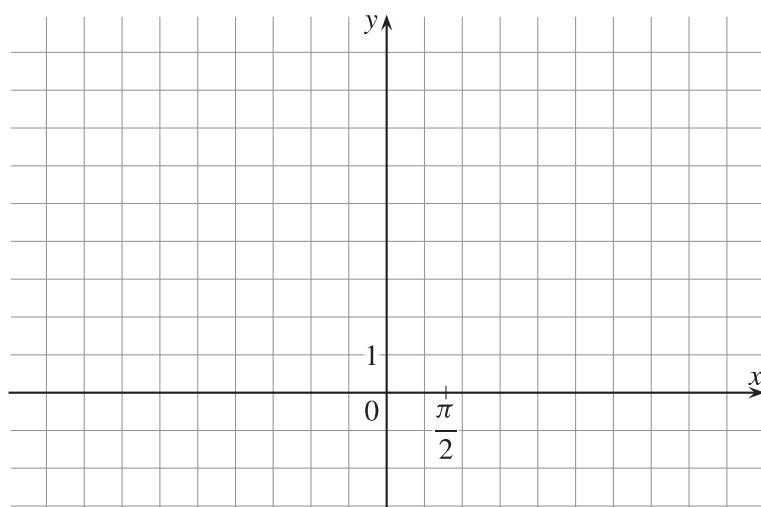
Szélsőértékek:

Páros:

Páratlan:

Periódus:

39.5. Ábrázold és jellemezd az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{ctg} x$ függvényt!



Értelmezési tartomány:

Értékkészlet:

Zérushely:

Tengelypont:

Növekedés:

Csökkenés:

Szélsőértékek:

Páros:

Páratlan:

Periódus:

40. feladatlap

Kombinatorika

EMLÉKEZTETŐ

n faktoriális: Az első n pozitív egész szám szorzatát a következőképpen jelöljük: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$, és n faktoriálisnak nevezzük. Például $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Megállapodunk abban, hogy $1! = 1$ és $0! = 1$ legyen.

sorba rendezési feladatok: n különböző elem egy bizonyos sorrendjét az n elem egy permutációjának nevezzük. n különböző elem permutációinak száma $n!$. Ha n között k darab egyenlő ($k \leq n$), akkor ismétléses permutációról beszélünk. Ezek száma: $\frac{n!}{k!}$. Ha $k_1, k_2, \dots, k_s$ egyenlő elem van, akkor a permutációk száma $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!}$, ahol $k_1 + k_2 + \dots + k_s \leq n$. Például a GRÓF betűiből $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, a BABA betűiből $\frac{4!}{2!2!} = 6$ permutáció képezhető.

FELADATOK

40.1. A $\boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{6}, \boxed{8}$ számkártyák mindegyikének felhasználásával

- a) hány ötjegyű szám rakható ki?
- b) hány páratlan szám rakható ki?
- c) hány 85 000-nél nagyobb számot kaphatunk?
- d) mennyi a legnagyobb és a legkisebb szám különbsége?

40.2. Hat jóbarát: Andi, Anti, Bea, Béla, Csilla és Csaba moziba mennek. Egymás mellé szóló jegyeket vettek.

- a) Hányféleképpen helyezkedhetnek el?
- b) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a három fiú az 1. 2. 3. széken, a lányok a 4. 5. 6. széken ülnek?
- c) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha Andi Csaba mellett ül?
- d) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a három lány egymás mellett ül?

40.3. Hány lehetséges sorrendje van a „PARALELOGRAMMA” szó betűinek?

40.4. Egy 20 fős osztály kirándulni megy. Szállásként egy 6 ágyas, két 5 ágyas és egy 4 ágyas szobát kapnak. Hányféleképpen foglalhatják el a szobákat?

40.5. Tekintsük a páratlan számjegyeket!

a) Hány ötjegyű szám képezhető, ha megengedjük a számjegyek ismétlését?

b) Hány különböző számjegyekből álló ötjegyű számot kapunk?

c) Hány különböző számjegyekből álló kétjegyű szám lehetséges?

d) Hány 5-tel osztható négyjegyű szám képezhető?

41. feladatlap

Logikai szita, skatulyaelv

EMLÉKEZTETŐ

logikai szita: Logikai szita alkalmazásával azokat a feladatokat oldjuk meg, amelyekben bizonyos tulajdonságokkal nem rendelkező elemek számát keressük.

skatulyaelv: A skatulyaelv szerint: ha van n darab dobozunk (skatulyánk) és $n + 1$ darab tárgyunk (elemünk), és ezeket a dobozba akarjuk elhelyezni, akkor biztosan lesz olyan skatulya, amelyikbe legalább két tárgy kerül.

FELADATOK

41.1. Legalább hány fős osztály kell ahhoz, hogy biztosan legyen köztük négy olyan gyerek, aki ugyanabban a hónapban született?

41.2. Hány négyzetszám kell ahhoz, hogy biztosan legyen köztük kettő, melynek különbsége osztható 3-mal?

41.3. Egy 24 fős küldöttségben 15-en beszélnek angolul, 12-en németül. 7-en mindkét nyelven tudnak. Hányan nem beszélnek se németül, se angolul? (Számolásodat Venn-diagramon is ellenőrizheted.)

41.4. Hány olyan 1000-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely

- a) 2-vel és 5-tel nem osztható?
- b) 3-mal és 7-tel nem osztható?
- c) 2-vel és 3-mal és 5-tel nem osztható?
- d) 3-mal és 7-tel és 11-gyel nem osztható?

41.5. Egy 750 fős iskolában legalább hány olyan diák van, aki

- a) az év ugyanazon napján született?
- b) ugyanabban a hónapban született?
- c) a hét ugyanazon napján született?

41.6. Egy zenei táborban 140 diák nyaralt. Legtöbben zongorán, gitáron vagy hegedűn játszottak. 46-an zongoráztak, 64-en gitároztak, 13-an mindkét hangszeren ügyesek voltak. 37 diák hegedült, közülük 9-en gitároztak is, 5-en zongoráztak is. 3 olyan gyerek volt, aki mindhárom hangszeren tudott játszani. Hány olyan táborlakó volt, aki a három hangszer egyikén sem játszott?

42. feladatlap

Valószínűség-számítás

EMLÉKEZTETŐ

elemi esemény: egy kísérlet lehetséges kimenetele. Az elemi események valószínűsége megegyezik.

eseménytér: az elemi események összessége.

klasszikus valószínűség elemei:

A : az A eseményt jelöli;

$P(A)$: az A esemény bekövetkezésének valószínűsége;

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset}}.$$

Pl. Egy zsákba 3 piros és 5 fehér golyót teszünk. Egy golyót kihúzunk.

Eseménytér: 1 piros, 1 fehér.

A : pirosat húzunk.

Kedvező esetek száma: 3.

Összes eset száma: 8.

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

FELADATOK

42.1. Egy érmét kétszer egymás után feldobunk. Írd fel az eseményteret!

42.2. Egy szabályos érmét háromszor feldobunk, és felírjuk a dobások eredményét.

- a) Hány elem eseményéből áll az eseménytér?
- b) Mennyi a valószínűsége, hogy mindig fejet dobunk?

- c) Mennyi a valószínűsége, hogy mindig egyformát dobunk?
- d) Mennyi a valószínűsége, hogy nem három egyformát dobunk?

42.3. Egy szabályos dobókockával dobva mennyi az összes eset száma

- a) egy dobás esetén?
- b) két dobás esetén?
- c) három dobás esetén?

42.4. Egy szabályos dobókockával egyet dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

- a) prímszámot dobunk?
- b) legalább 3-ast dobunk?
- c) 6-nál nagyobbat dobunk?

42.5. Egy 32 lapos magyar kártyából kihúzunk egy lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

- a) pirosat húzunk?
- b) ászt húzunk?
- c) figurát (alsó, felső, király, ász) húzunk?
- d) nem zöldet húzunk?

42.6. Egy dobókockát kétszer feldobunk, és a dobott eredményeket összeadjuk. Melyiknek nagyobb a valószínűsége, és mennyivel?

a) 5-nél kevesebb a dobott összeg, vagy 10-nél több?

b) Az összeg prím vagy páros?

42.7. Egy urnába 3 fehér, 4 piros, 5 kék golyót teszünk. Egy golyót kihúzva mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) kéket húzunk?

b) nem pirosat húzunk?

c) fehérret vagy pirosat húzunk?

Gráfelmélet

43. feladatlap

Gráfelmélet

EMLÉKEZTETŐ

gráf: Gráfnak nevezzük a csúcsoknak és éleknek a halmazát, ahol az élek pontokat kötnek össze, illetve az élek végére csúcsok illeszkednek úgy, hogy minden élre legalább egy, de legfeljebb két csúcs illeszkedik.

fokszám: Az egy csúcsból induló élek száma. Például a B csúcs fokszáma 3, a C csúcs fokszáma 1.

izolált pont: Olyan pont, amelyből nem indul ki él. Például az F pont.

többszörös él: Többszörös élről beszélünk, ha két pontot több él is összeköt.

hurokél: Olyan él, amelynek mindkét vége ugyanarra a pontra illeszkedik.

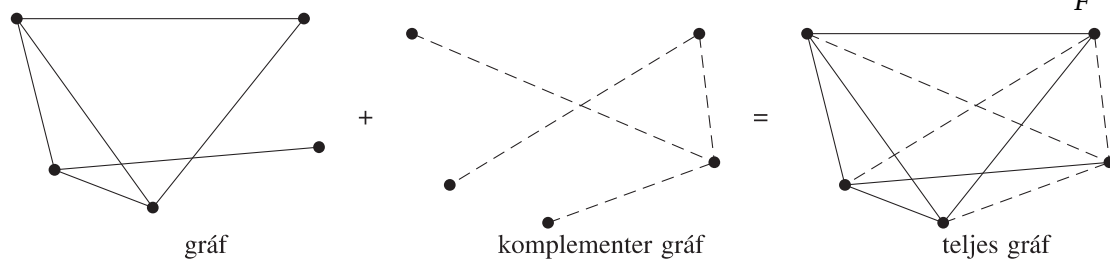
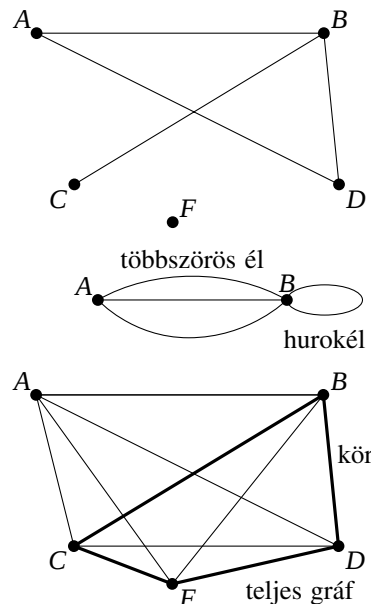
egyszerű gráf: Olyan gráf, amely nem tartalmaz többszörös élt és hurokét.

összefüggő gráf: Olyan gráf, amelyben élek mentén valamilyen úton el lehet jutni bármely pontjából bármely pontjába.

kör: Az élek olyan sorozata egy gráfban, melyek visszavezetnek a kiindulási ponthoz.

teljes gráf: Olyan egyszerű gráf, melyben bármely két pontot él köt össze.

komplementer gráf: Olyan gráf, mely az eredeti gráf éleivel együtt teljes gráfot alkot.

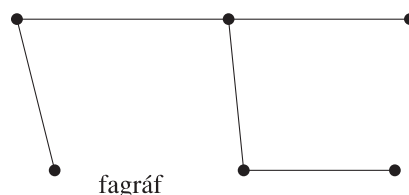


fagráf: Olyan összefüggő gráf, melyben nincs kör.

gráfra vonatkozó összefüggések: 1. Egy gráf összfokszáma (a csúcsok fokszámainak összege) mindig páros szám, az élek számának kétszerese.

2. Egy n pontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Egy n pontú fagráf éleinek száma: $n - 1$.



FELADATOK

43.1. Rajzolj egy 5 pontú, 10 élű gráfot, amely tartalmaz többszörös élt! Írd a pontok fölé a megfelelő fokszámot!

43.2. Egy hattagú társaságban mindenkinek 3 ismerőse van. Rajzold meg az „ismerősök” egy lehetséges gráfját! Rajzold meg a „nem ismerősök” komplementer gráfját is!

43.3. Tekintsük egy kocka csúcsait gráfpontoknak, éleit pedig a gráf éleinek.

a) Mennyi az egyes csúcsok fokszáma?

b) Mennyi a gráf összfokszáma?

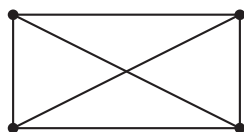
c) Hány él hiányzik a teljes gráfhoz?

43.4. Egy urnában 1 piros, 2 fehér és 3 zöld golyó van. Ábrázold gráf segítségével a kihúzási sorrend lehetőségeit, ha elsőre piros golyót húzunk!

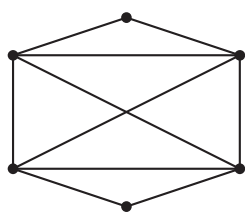
43.5. Lehetséges-e olyan 15 fős csoport, melyben mindenkinek pontosan 5 barátja van?

43.6. Az alábbi gráfok közül melyek rajzolhatók meg a ceruzánk felemelése nélkül úgy, hogy minden élt és minden pontot csak egyszer érintünk?

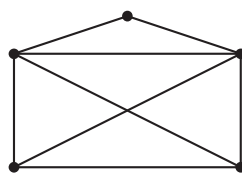
a)



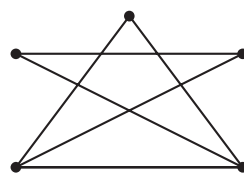
b)



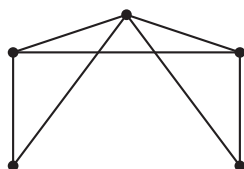
c)



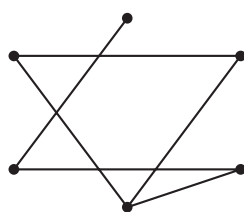
d)



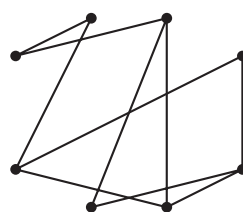
e)



f)



g)



43.7. Egy születésnapi összejövetelre érkezők kézfogással üdvözlik egymást. Hányan vettek részt a partin, ha 120 kézfogás történt?

43.8. A következő állításokról dönts el, hogy igazak (I) vagy hamisak (H)!

a) Van olyan gráf, melynek összfokszáma 0.

b) Egy 5 pontú gráfnak maximum 10 éle lehet.

c) Van 10 élű és 10 pontú fagráf.

d) Nincs olyan 7 pontú gráf, melyben minden csúcs fokszáma 3.

e) Van olyan gráf, melynek több pontja van, mint éle.

f) Ha egy gráf összefüggő, akkor van benne kör.

1. feladatlap

- 1.1. a) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{16} = 7 \cdot 4 = 28$; b) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{81} \cdot \sqrt{0,49} = 5 \cdot 9 \cdot 0,7 = 31,5$;
 c) $\sqrt{144} \cdot \sqrt{400} \cdot \sqrt{900} = 12 \cdot 20 \cdot 30 = 7200$; d) $-\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} = -\frac{7}{4}$; e) $\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$;
 f) $-\sqrt{2 \cdot 32} = -\sqrt{64} = -8$; g) $\sqrt{2 \cdot 4,5} = \sqrt{9} = 3$; h) $\sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$; i) 2; j) $\left((\sqrt{2})^2\right)^2 = 2^2 = 4$;
 k) $\left(\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$; l) $\sqrt{36 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \sqrt{36 \cdot \sqrt{16}} = \sqrt{36 \cdot 4} = 6 \cdot 2 = 12$.
- 1.2. a) $\sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$; b) $\sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$; c) $\sqrt{100 \cdot 10} = 10\sqrt{10}$; d) $\frac{\sqrt{9 \cdot 3}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{7}$; e) $|a|\sqrt{2}$;
 f) $ab^2\sqrt{a}$; g) $\frac{3}{\sqrt{x}}$; h) $\frac{|x|}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$; i) $|1+x|\sqrt{3}$; j) $|x|\sqrt{a^2+x^2}$;
 k) $\sqrt{x^2(a^2+x^2)} = |x|\sqrt{a^2+x^2}$; l) $\sqrt{xy^3(1+xy^3)} = |y|\sqrt{xy(1+xy^3)}$.
- 1.3. a) $\sqrt{\frac{16 \cdot 5}{8}} = \sqrt{10}$; b) $\sqrt{4 \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$; c) $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$; d) $\sqrt{(x+y)^2 \frac{x-y}{x+y}} = \sqrt{x^2-y^2}$;
 e) $\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{x}$; f) $\sqrt{(1-a)^2 \frac{2}{1-a}} = \sqrt{2(1-a)}$.
- 1.4. $2a^2 - \sqrt{2}a = 0$; $a(2a - \sqrt{2}) = 0$; $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 1.5. $\sqrt{2}|a| = -\sqrt{2}a$; $|a| = -a$; $a \leq 0$. 1.6. $\frac{a^2}{|a|} = |a|$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- 1.7. Nem feltétlenül, mert például $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

2. feladatlap

- 2.1. a) $2\sqrt{5}$; b) $2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$; c) $\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -\sqrt{2}$; d) $3 \cdot \sqrt{5} + 5$; e) $6\sqrt{10} - 10$;
 f) $(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$; g) $(2\sqrt{6} + \sqrt{3})(2\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 4 \cdot 6 - 3 = 21$;
 h) $2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$; i) $\frac{3}{4} + 2\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3} = \frac{3}{4} + 2 + \frac{4}{3} = \frac{9}{12} + \frac{24}{12} + \frac{16}{12} = \frac{49}{12}$.
- 2.2. a) $\sqrt{\frac{12}{2}} = \sqrt{6}$; b) $\sqrt{\frac{63}{15}} = \sqrt{\frac{21}{5}}$; c) $\sqrt{\frac{10}{75}} = \sqrt{\frac{2}{15}}$; d) $\sqrt{\frac{20}{50}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$; e) $\sqrt{\frac{ba^2}{2a}} = \sqrt{\frac{ba}{2}}$;
 f) $\sqrt{\frac{50b}{15b^2}} = \sqrt{\frac{10}{3b}}$; g) $\sqrt{\frac{84x^2}{198x}} = \sqrt{\frac{14x}{33}}$; h) $\frac{5}{2}y\sqrt{\frac{6}{5y}} = \sqrt{\frac{150y}{20}} = \sqrt{\frac{15y}{2}}$.
- 2.3. a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{6}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$; d) $\frac{a}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$;
 e) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$; f) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$;

$$g) \frac{6}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{6(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{8-5} = 2(2\sqrt{2}+\sqrt{5});$$

$$h) \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{12-18} = -\frac{12-5\sqrt{6}}{6}.$$

2.4. $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2 = 10+2\sqrt{21}$, illetve $(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2 = 10+2\sqrt{16}$. A $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ a nagyobb.

2.5. $\sqrt{(5\sqrt{2}-7) \cdot (5\sqrt{2}+7)} = \sqrt{50-49} = 1.$

2.6. a) Két különböző számnak (a és $-a$) lehet ugyanaz a négyzete (a^2). Ha a pozitív megkötéssel kizárjuk a negatív lehetőséget, akkor valóban igaz az állítás. b) Ha az a , b számok közül valamelyik negatív is lehet, akkor már nem feltétlenül igaz az egyenlőség, mert akkor a pozitív szám nem lehet egyenlő a negatívval.

2.7. $\sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} = \sqrt{7+2\sqrt{7}+1} - \sqrt{7-2\sqrt{7}+1} = |\sqrt{7}+1| - |\sqrt{7}-1| = \sqrt{7}+1 - \sqrt{7}+1 = 2.$

3. feladatlap

3.1. a) $x_1 = 4$, $x_2 = -4$; b) $x = 9$; c) Nincs megoldás. d) $\sqrt{x} = 0$; $x = 0$;

e) $\sqrt{2x} + 4\sqrt{2x} + 8\sqrt{2x} = 1$; $13\sqrt{2x} = 1$; $x = \frac{1}{338}.$

f) Kikötés: $x \neq 1$. $\sqrt{x} + 2 = -4(\sqrt{x} - 1)$; $\sqrt{x} + 2 = -4\sqrt{x} + 4$; $5\sqrt{x} = 2$; $x = \frac{4}{25}.$

g) Kikötés. $x \geq 10$. A levezetés során kapott $x = \frac{121}{4}$ bár eleget tesz a kikötésnek, de visszahelyettesítéskor ellentmondásra vezet. Nincs megoldás.

3.2. a) Pitagorasz-tétel segítségével: $e = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm.

b) $e = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. c) $8 = a\sqrt{2}$; $a = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ (cm).

3.3. a) Pitagorasz-tétel segítségével: $m = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ (cm).

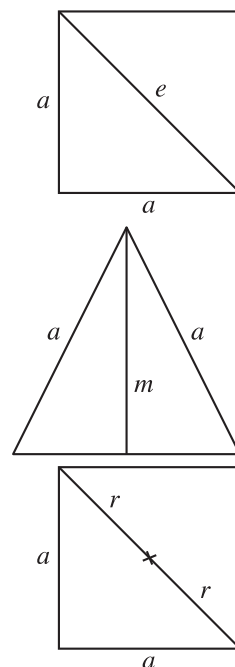
b) $m = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. c) $m = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{8}$, $a = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{6}.$

3.4. Pitagorasz-tétel segítségével:

a) $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. b) $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{6}a.$

3.5. a) Az átló az átmérő: $2 \cdot r = 10$ cm. $\sqrt{2}a = 10$, $a = 5\sqrt{2}.$

b) $\sqrt{2}a = 2r$, $a = r\sqrt{2}.$



4. feladatlap

4.1. a) 3; b) 2; c) 3; d) 5; e) $-\frac{2}{5}$; f) $\frac{2}{3}$; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{1}{2}$; i) -0,1; j) Nincs értelmezve.

4.2. a) $|a|$; b) y ; c) $|a|$; d) $-a$; e) $x-1$; f) $|x+2|$; g) x^2 ; h) a^2 ; i) Nincs értelmezve; j) $-x^2$.

4.3. a) Igaz; b) Hamis; c) Igaz; d) Hamis; e) Hamis, mert $x=1$ esetén $-1 \neq 1$; f) Igaz; g) Hamis; h) Igaz.

4.4. a) $\sqrt[3]{2 \cdot 4} = 2$; b) $\sqrt[4]{3 \cdot 27} = 3$; c) $\sqrt[5]{10 \cdot 40 \cdot 250} = \sqrt[5]{100\,000} = 10$;

d) $\sqrt[6]{36 \cdot 54 \cdot 24} = \sqrt[6]{46\,656} = 6$; e) $\sqrt[4]{16a^4b^4c^4} = 2 \cdot |abc|$; f) $\sqrt[5]{\frac{96a^6b^5}{3a}} = \sqrt[5]{32a^5b^5} = 2ab$;

g) $\sqrt[3]{0,008 \frac{a^4b^5}{ab^2}} = \sqrt[3]{0,2^3 a^3 b^3} = 0,2ab$; h) $\sqrt[6]{0,3^6 \frac{a^6}{b^6}} = 0,3 \cdot \left| \frac{a}{b} \right|$.

4.5. a) $3 \cdot 4 = 12$; b) $2 \cdot 5 = 10$; c) $\frac{2}{3}$; d) $-\frac{6}{7}$; e) $\sqrt[6]{5}$; f) $\sqrt[12]{a}$; g) $\sqrt[10]{7^3}$; h) $\sqrt[24]{2^5}$.

5. feladatlap

5.1. a) $2\sqrt[3]{2}$; b) $\sqrt[4]{0,000\,01} = 0,1\sqrt[4]{0,1}$; c) $\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$; d) $3x\sqrt[3]{x}$; e) $\frac{|ab|}{2}\sqrt[4]{a^3b}$; f) $3ab\sqrt[3]{3ax}$;

g) $0,1\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$; h) $0,3\frac{a}{|b|}\sqrt[4]{\frac{a}{b^2}}$.

5.2. a) $\sqrt[3]{2^3 \frac{3}{2}} = \sqrt[3]{12}$; b) $\sqrt[4]{81a^4 \frac{b}{9a^3}} = \sqrt[4]{9ab}$; c) $\sqrt[3]{8 \frac{3x}{4}} = \sqrt[3]{6x}$; d) $\sqrt[3]{\frac{x^3}{125} \cdot \frac{25}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{x}{5}}$.

5.3. a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4} \cdot 2} = \sqrt[12]{32}$; b) $\sqrt{\sqrt[3]{3^3 3^4 \sqrt[3]{3}}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^4 \sqrt[3]{3}}} = \sqrt{\sqrt[3]{4 \sqrt[3]{3^{16} \cdot 3}}} = \sqrt[24]{3^{17}}$;

c) $\sqrt[12]{\sqrt[3]{x^3} \cdot x \sqrt{x}} = \sqrt[12]{\sqrt[3]{x^4} \sqrt{x}} = \sqrt[12]{\sqrt[3]{x^8 \cdot x}} = \sqrt[12]{x^9}$;

d) $\sqrt{\sqrt[3]{a^3 \cdot a^2} \sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^5} \sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{10} \cdot a}} = \sqrt[12]{a^{11}}$.

5.4. a) $\sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^3}$; b) $\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^8} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$; c) $\frac{\sqrt[8]{5^3}}{\sqrt[8]{5^4}} = \frac{1}{\sqrt[8]{5}}$;

d) $\frac{\sqrt[6]{10^5} \cdot \sqrt[6]{10^3}}{\sqrt[6]{10^4}} = \frac{\sqrt[6]{10^8}}{\sqrt[6]{10^4}} = \sqrt[6]{10^4} = \sqrt[3]{10^2}$; e) $\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^8} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{3^{11}}$;

f) $\frac{\sqrt[60]{2^{30}} \cdot \sqrt[60]{2^{15}}}{\sqrt[60]{2^{20}} \cdot \sqrt[60]{2^{12}}} = \frac{\sqrt[60]{2^{45}}}{\sqrt[60]{2^{32}}} = \sqrt[60]{2^{13}}$; g) $\frac{\sqrt[10]{a^2} \cdot \sqrt[10]{a^5}}{\sqrt[10]{a^3}} = \frac{\sqrt[10]{a^7}}{\sqrt[10]{a^3}} = \sqrt[10]{a^4} = \sqrt[5]{a^2}$;

h) $\frac{\sqrt[60]{a^{20}b^{40}} \cdot \sqrt[60]{a^{45}b^{15}}}{\sqrt[60]{a^{12}b^{12}}} = \sqrt[60]{a^{53}b^{43}}$.

5.5. a) $\sqrt[3]{2}$; b) $\sqrt{5}$; c) $\sqrt[10]{2^5 \cdot 3^5} = \sqrt{6}$; d) $\sqrt[8]{\frac{2^4}{5^4}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$; e) $\sqrt[6]{2^6 \cdot x^2} = 2\sqrt[6]{x^2} = 2\sqrt[3]{x}$;

f) $\sqrt[6]{0,1^3 \cdot x^3} = \sqrt{0,1x}$; g) $\sqrt[4]{\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{|b|}{|a|}}$; h) $2\sqrt{\frac{x}{a}}$.

6. feladatlap

6.1. A transzformációs alakra hozás után, a parabolák ábrázolhatók. A megoldásokat a grafikonok x tengelymetsetei alapján olvassuk le.

a) $a(x) = (x + 0,5)^2 - 2,25$; $x_1 = -2$, $x_2 = 1$;

b) $b(x) = 0,5(x^2 + 2x) - 1,5 = 0,5[(x + 1)^2 - 1] - 1,5 = 0,5(x + 1)^2 - 2$; $x_1 = -3$, $x_2 = 1$;

c) $c(x) = (x - 0,5)^2 + 1,75$, nincs megoldás.

Az egész szám valós szám is, így az összes megoldás, megoldás mind a két számhalmazon.

6.2. A transzformációs alakra hozás után, a parabolák ábrázolhatók. A megoldásokat a grafikonok x tengelymetsetei alapján olvassuk le.

a) $a(x) = (x + 3)^2 - 1$;

$x_1 = -4$, $x_2 = -2$; b) $2x^2 - 4x + 7 = x^2 + 2x + 2$; $x^2 - 6x + 5 = 0$;

$b(x) = (x - 3)^2 - 4$; $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Az egész szám valós szám is, így az összes megoldás, megoldás mind a két számhalmazon.

6.3. a) $(x - 4)(x + 4) = 0$;

$x_1 = 4$, $x_2 = -4$;

b) $(x - 2,5)(x + 2,5) = 0$;

$x_1 = 2,5$, $x_2 = -2,5$;

c) $\left(x - \frac{2}{5}\right)\left(x + \frac{2}{5}\right) = 0$; $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = -\frac{2}{5}$; d) $x^2 + 9 = 0$, nincs megoldás; e) $x^2 = 0$; $x = 0$;

f) $\left(2x - \frac{7}{8}\right)\left(2x + \frac{7}{8}\right) = 0$; $x_1 = \frac{7}{16}$, $x_2 = -\frac{7}{16}$; g) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$; $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$;

h) $(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3}) = 0$; $x_1 = 2\sqrt{3}$, $x_2 = -2\sqrt{3}$.

6.4. a) $x(x - 5) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 5$;

b) $x(x + 6) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -6$;

c) $x(3x + 5) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{5}{3}$;

d) $x(9x - 7) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{7}{9}$.

6.5. a) $(x - 2)(x - 3) = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$;

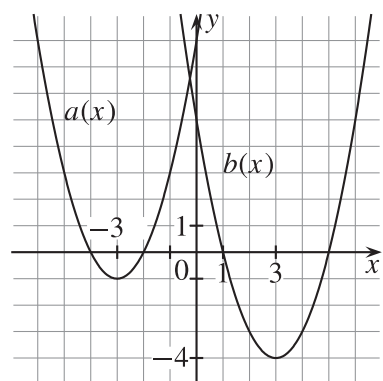
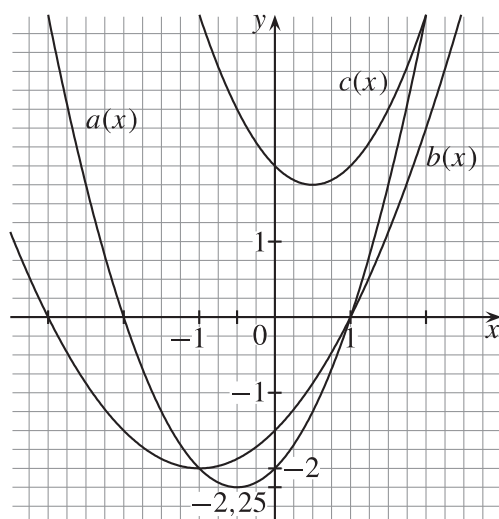
b) $(x - 3)(x + 2) = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = -2$;

c) $(x + 4)(x - 3) = 0$; $x_1 = -4$, $x_2 = 3$;

d) $(x - 6)(x + 1) = 0$; $x_1 = 6$, $x_2 = -1$;

e) $(x + 4)^2 = 0$; $x = -4$;

f) $(x - 1)(x + 3) = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.



7. feladatlap

7.1. a) $x_1 = 0,2$, $x_2 = -3$; b) $x_1 = -2$, $x_2 = 0,5$; c) $x_1 = 7$, $x_2 = 0,6$; d) $x_1 = -0,3$, $x_2 = -1,4$;

e) $x = 0,3$; f) $x_1 = -2,2$, $x_2 = 3,4$; g) $x_1 = -3,1$, $x_2 = -2$; h) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

7.2. a) $x_1 = -0,6$, $x_2 = 2$; b) Nincs megoldás; c) $x_1 = -1 - \sqrt{3}$, $x_2 = -1 + \sqrt{3}$;

d) Átalakítás után: $x^2 - 7x - 4 = 0$; $x_1 = \frac{7 - \sqrt{65}}{2}$, $x_2 = \frac{7 + \sqrt{65}}{2}$.

7.3. a) Kikötés: $x \neq -1$. Közös nevezőre hozás után: $x + 1 - x = x^2 + x$; $x^2 + x - 1 = 0$;

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

b) Kikötés: $x \neq -1, 1$. Közös nevezőre hozás után:

$(5x - 1)(x - 1) = (x + 5)(x + 1)$; $x^2 - 3x - 1 = 0$; $x_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

c) Kikötés: $x \neq -1, 1$. Közös nevezőre hozás után: $x + 2 - (2x + 1)(x + 1) = x^2 - 1$; $3x^2 + 2x - 2 = 0$;

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}$, $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$.

d) Kikötés: $x \neq -1, 1$. Az $x^2 - 1 = 0$ egyenlet megoldásai nem megoldások a kikötés miatt. A $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1 = 0$ megoldása. Közös nevezőre hozás után:

$x + 1 - (x - 1) - (x - 1)(x + 1) = 0$; $x^2 - 3 = 0$; $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$.

8. feladatlap

8.1. a) $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7$; b) $D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$; c) $D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 128$;

d) Átalakítás után: $x^2 - 8x + 16 = 0$. $D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$;

e) $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 10$. Két különböző gyöke van: c, e . Egy valós gyöke van: b, d . Nincs megoldása: a .

8.2. Írjuk fel a diszkriminánst: $D = (-2)^2 - 4 \cdot p^2 \cdot 1 = 0$; $p^2 = 1$; $p_1 = -1$, $p_2 = 1$.

8.3. A kikötés: $x \neq 0$. Átalakítás után: $x^2 - 2ax + a^2 = 0$; $(x - a)^2 = 0$; $x = a$.

8.4. Megvizsgáljuk a gyökjel alatti másodfokú kifejezés diszkriminánsát, és azt, hogy a függvénynek minimuma vagy maximuma van-e, vagyis az x^2 -es tag együtthatója pozitív vagy negatív-e.

a) A diszkrimináns: $D = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 0$. A gyökjel alatti kifejezés teljes négyzetté alakítható, és 4 a kérdéses együttható, így biztosan nemnegatív. A megoldás: $x \in \mathbb{R}$. b) Az a) feladat megoldásához hasonlóan $D = 0$, az együttható 1. A megoldás: $x \in \mathbb{R}$. c) A diszkrimináns: $D = 36 - 40 = -4$,

negatív, az együttható 1, ekkor a gyökjel alatti kifejezés minden értéke pozitív. A megoldás: $x \in \mathbb{R}$. d) A gyökjel alatti kifejezés diszkriminánsa $D = 4 - 32 = -28$, de az x^2 -es tag együtthatója negatív, ezért x minden értékére negatív, Nincs megoldás.

9. feladatlap

9.1. a) $(x - 2)(x - 3) = 0$, $x^2 - 5x + 6 = 0$; b) $(x + 1)(x - 2,5) = 0$, $x^2 - 1,5x - 2,5 = 0$;

c) $(x + 2)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0$, $x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} = 0$; d) $\left(x - (1 + \sqrt{2})\right)\left(x - (1 - \sqrt{2})\right) = 0$, $x^2 - 2x - 1 = 0$;

e) $(x - 4)(x - 4) = 0$, $x^2 - 8x + 16 = 0$.

9.2. A $D = 16 - 4c \geq 0$ feltételből $4 \geq c$. A feladatban megfogalmazott feltételből $x_1 = 3$. A Viète-féle formulák alapján: $3 + x_2 = -4$ és $3 \cdot x_2 = c$. $x_2 = -7$, $c = 3 \cdot (-7) = -21$. (Az eredményhez eljuthatunk $x = 3$ behelyettesítéssel is.)

9.3. A $D = b^2 - 48 \geq 0$ feltételből $b \leq -4\sqrt{3}$ vagy $4\sqrt{3} \leq b$. A feladatban megfogalmazott feltételből $x_1 = -3$. A Viète-féle formulák alapján: $-3 + x_2 = -b$ és $(-3) \cdot x_2 = 12$. $x_2 = -4$, $b = 7$. (Az eredményhez eljuthatunk $x = -3$ behelyettesítéssel is.)

9.4. A $D = 25 - 4c \geq 0$ feltételből $\frac{25}{4} \geq c$. A feladatban megfogalmazott feltételből $x_1 = x_2 + 3$.

A Viète-féle formulák alapján: $x_2 + 3 + x_2 = 5$ és $(x_2 + 3) \cdot x_2 = c$. $x_2 = 1$, $c = 4$.

9.5. a) Az $2x^2 - 5x + 2 = 0$ egyenlet megoldása után a gyökök: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$. A polinomszorzat:

$2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x-1)$. **b)** A $3x^2 + x - 2 = 0$ egyenlet megoldása után a gyökök:

$x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$. A polinomszorzat: $3(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right) = (x+1)(3x-2)$.

9.6. A számláló és a nevezőben lévő kifejezés szorzattá alakítása után: $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x-7)} = \frac{x+3}{x-7}$.

10. feladatlap

10.1. Legyen $n-1$, n , $n+1$ a három egymást követő szám. Felírva a feltételt: $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Ez egy azonosság, így tetszőleges három egymást követő egész számra teljesül a feltétel.

10.2. Legyen $n-2$, $n-1$, n , $n+1$, $n+2$ az öt egymást követő szám. $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$. Négyzetre emelés, összevonások és átrendezések után: $n^2 - 12n = 0$. Az egyenletnek két megoldása van: $n_1 = 0$, $n_2 = 12$. Az öt szám tehát: $-2, -1, 0, 1, 2$ vagy $10, 11, 12, 13, 14$.

10.3. A három szám: $1 \cdot x$, $2 \cdot x$, $4 \cdot x$. Felírva a feltételeket: $(1 \cdot x)^2 + (2 \cdot x)^2 + (4 \cdot x)^2 = 189$, $21x^2 = 189$, $x^2 = 9$. $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. A keresett három szám $-3, -6, -12$ vagy $3, 6, 12$.

10.4. Amennyiben az egyesek helyén álló számjegy x , úgy a tízesek helyén álló $12 - x$. A szám tehát $10(12 - x) + x$ alakban írható, a számjegyek felcserélésével pedig $10x + (12 - x)$ számot kapunk. $[10(12 - x) + x] \cdot [10x + (12 - x)] = 4032$. Átalakítások után: $x^2 - 12x + 32 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. A keresett kétjegyű szám: 84 , illetve 48 .

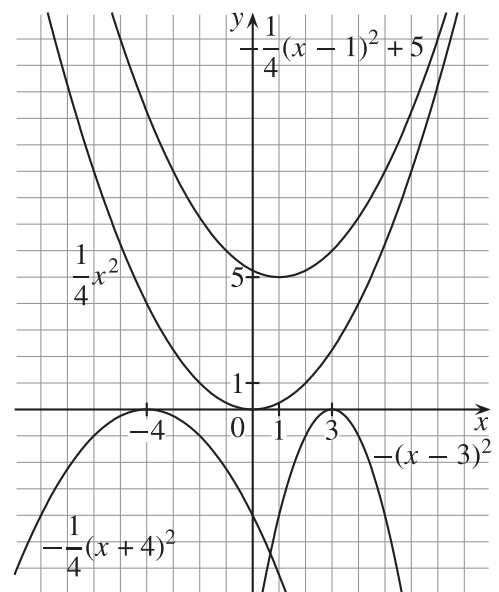
10.5. Legyen az átfogó x , ekkor a két befogó $x-3$, $x-6$. Alkalmazzuk a Pitagorasz tételét: $(x-6)^2 + (x-3)^2 = x^2$. Az átalakítások után: $x^2 - 18x + 45 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 15$. A 3 nem megoldás, mivel háromszög oldala 0 vagy negatív szám nem lehet. A három oldal $15, 12, 9$.

10.6. Legyen a nagy kocka éle x , ekkor a négyzetes oszlop alapéle $x-8$. A kocka térfogata: x^3 , a négyzetes oszlop térfogata: $x(x-8)^2$. Az $x^3 - x(x-8)^2 = 5120$, $x^2 + 4x - 320 = 0$. $x_1 = 20$, $x_2 = -16$. A negatív eredmény nem lehet kocka éle. A kocka éle 20 cm.

11. feladatlap

11.1.

	$\frac{1}{4}x^2$	$-(x-3)^2$	$-\frac{1}{4}(x+4)^2$	$\frac{1}{4}(x-1)^2 + 5$
Értelmezési tartomány	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Értékkészlet:	$[0; +\infty[$	$]-\infty; 0]$	$]-\infty; 0]$	$[5; +\infty[$
Zérushely:	0	3	-4	Nincs
Tengelypont:	0	-9	-4	5,25
Minimumhely:	0	Nincs	Nincs	1
Minimumérték:	0	Nincs	Nincs	5
Maximumhely:	Nincs	3	-4	Nincs
Maximumérték:	Nincs	0	0	Nincs
Monoton nő:	$[0; +\infty[$	$]-\infty; 3]$	$]-\infty; -4]$	$[1; +\infty[$
Monoton csökken:	$]-\infty; 0]$	$[3; +\infty[$	$[-4; +\infty[$	$]-\infty; 1]$

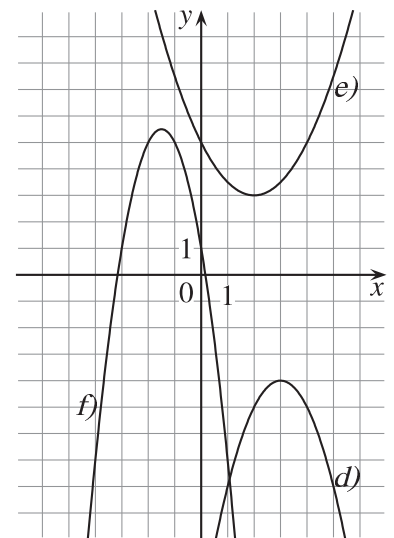
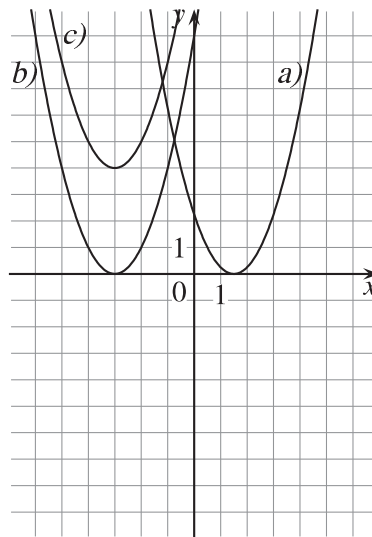


11.2. a) $(x-1,5)^2$; b) $(x+3)^2$;

c) $(x+3)^2 + 4$; d) $-(x-3)^2 - 4$;

e) $\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$;

f) $-2(x+1,5)^2 + 5,5$.



11.3. Az $a(x-3)^2 - 2$ transzformációs alakú egyenletbe helyettesítsünk be különböző a -számokat és bontsuk fel a zárójelet!

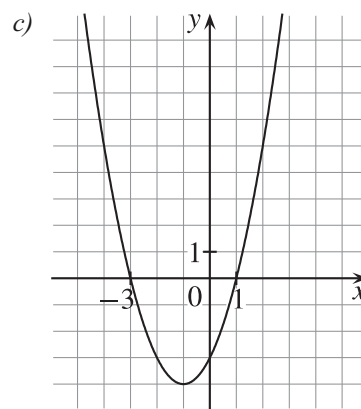
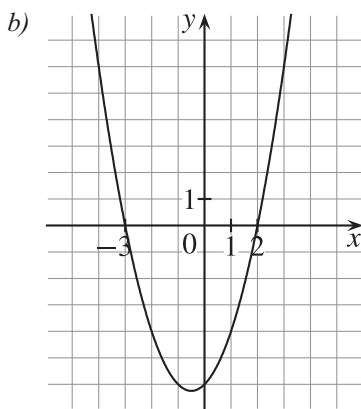
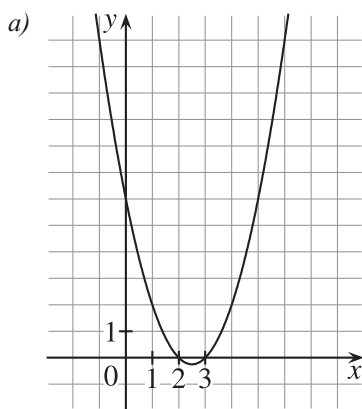
Pl. $a = 1$ esetén $1 \cdot (x-3)^2 - 2 = x^2 - 6x + 7$. $a = 2$ esetén $2 \cdot (x-3)^2 - 2 = 2x^2 - 12x + 16$.

12. feladatlap

12.1. a) A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, pozitív az x^2 együtthatója, $]2; 3[$ a megoldáshalmaz.

b) A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, pozitív az x^2 együtthatója, $]-\infty; -3] \cup [2; \infty[$ a megoldáshalmaz.

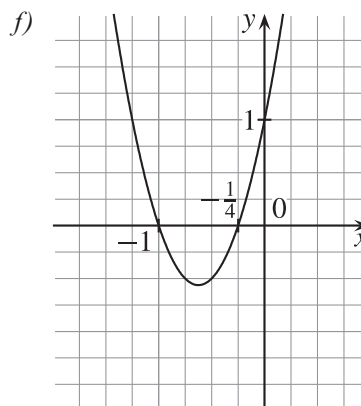
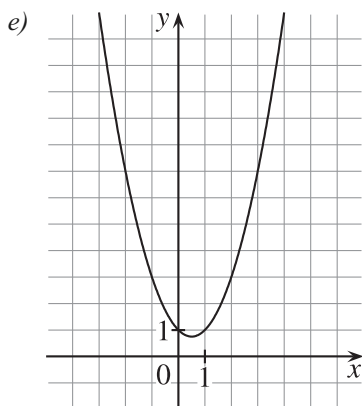
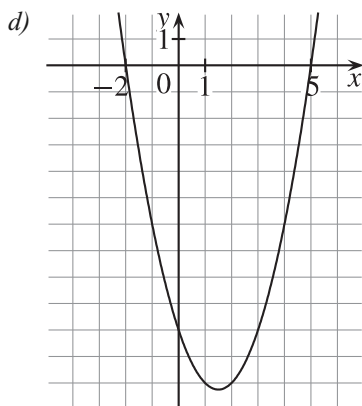
c) A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, pozitív az x^2 együtthatója, $]-\infty; -3[\cup]1; \infty[$ a megoldáshalmaz.



d) Átrendezés után $0 \leq x^2 - 3x - 10$ lesz az egyenlőtlenség. A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, pozitív az x^2 együtthatója, $]-\infty; -2] \cup [5; \infty[$ a megoldáshalmaz.

e) Átrendezés után $0 < x^2 - x + 1$ lesz az egyenlőtlenség. Minden x megoldás, pozitív az x^2 együtthatója. $x \in \mathbb{R}$ a megoldáshalmaz.

f) Átrendezés után $0 \leq 4x^2 + 5x + 1$ lesz az egyenlőtlenség. A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = -1$, $x_2 = -0,25$, pozitív az x^2 együtthatója, $]-\infty; -1] \cup [-0,25; \infty[$ a megoldáshalmaz.



12.2. a) A $x^2 + 2x + 3 = 0$ másodfokú egyenletnek nincs megoldása. Nincs szorzatalak. $x \in \mathbb{R}$ az egyenlőtlenség megoldása. (A transzformációs alak: $(x+1)^2 + 2$)

b) A $x^2 + 4x + 4 = 0$ másodfokú egyenlet megoldása $x = -2$. $(x+2)^2 \leq 0$ a szorzatalak. Az egyenlőtlenség megoldása: $x = -2$.

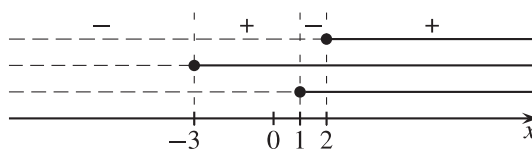
c) A $0 = x^2 - 6x + 9$ másodfokú egyenlet megoldása $x = 3$. $-(x-3)^2 > 0$ a szorzatalak. Az egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

d) A $2x^2 - 4x - 10,5 = 0$ másodfokú egyenlet megoldása $x_1 = -1,5$, $x_2 = 3,5$. $2 \cdot (x+1,5)(x-3,5) \leq 0$ a szorzatalak. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $[-1,5; 3,5]$.

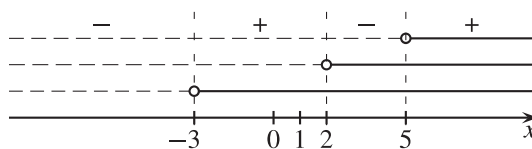
e) A $-1,5x^2 + 3,75x + 9 = 0$ másodfokú egyenlet megoldása $x_1 = -1,5$, $x_2 = 4$. $-1,5 \cdot (x+1,5)(x-4) > 0$ a szorzatalak. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $]-1,5; 4[$.

f) A $0 = x^2 - 2,7x + 0,5$ másodfokú egyenlet megoldása $x_1 = 0,2$, $x_2 = 2,5$. $(x-0,2)(x-2,5) > 0$ a szorzatalak. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $]-\infty; 0,2[\cup]2,5; \infty[$.

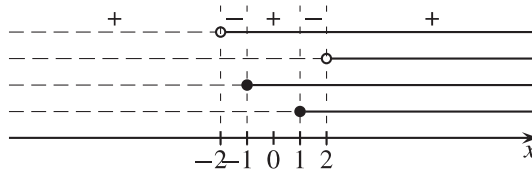
12.3. a) A bal oldali kifejezés szorzatalakja: $(x-2)(x+3)(x-1) \geq 0$. A megoldáshalmaz a száme-
gyenesről leolvasható: $[-3; 1] \cup [2; +\infty[$.



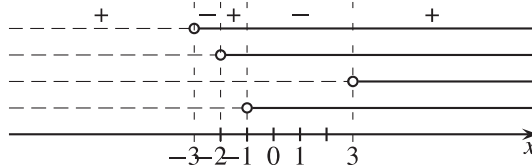
b) A bal oldali kifejezés szorzatalakja: $(x+3)(x-2)(x-5) > 0$. A megoldáshalmaz a száme-
gyenesről leolvasható: $] -3; 2[\cup] 5; +\infty[$.



c) A bal oldali kifejezés szorzatalakja: $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$. A megoldáshalmaz a száme-
gyenesről leolvasható: $] -\infty; -2[\cup] -1; 1[\cup] 2; +\infty[$.



d) A bal oldali kifejezés szorzatalakja: $\frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)(x+3)} < 0$. A megoldáshalmaz a száme-
gyenesről leolvasható: $] -3; -2[\cup] -1; 3[$.



13. feladatlap

13.1. A számtani közép kiszámolási módja $\frac{a+b}{2}$, valamint a mértani közép kiszámolási módja $\sqrt{ab}$.

Számtani közép	2,5	5	7,5	4,5	25	6	10,5	4,09
Mértani közép	2	4	6	$2\sqrt{5}$	15	6	$7\sqrt{2}$	1,2

13.2. a) Az egyenlőtlenség: $\sqrt{a(100-a)} \leq \frac{a+(100-a)}{2}$. Az egyenlőtlenség átalakításának fontosabb lépései: $\sqrt{a(100-a)} \leq 50$, $a(100-a) \leq 2500$, $0 \leq a^2 - 100a + 2500$, $0 \leq (a-50)^2$. Az utolsó egyenlőtlenség minden valós a esetén igaz.

b) Az egyenlőtlenség: $\sqrt{a \frac{100}{a}} \leq \frac{a + \frac{100}{a}}{2}$. Az egyenlőtlenség átalakításának fontosabb lépései: $\sqrt{100} \leq \frac{a + \frac{100}{a}}{2}$, $20 \leq a + \frac{100}{a}$, $0 \leq a^2 - 20a + 100$, $0 \leq (a-10)^2$. Az utolsó egyenlőtlenség minden valós a esetén teljesül.

c) Az egyenlőtlenség: $\sqrt{a(100+a)} \leq \frac{a+(100+a)}{2}$. Az egyenlőtlenség átalakításának fontosabb lépései: $a(100+a) \leq (a+50)^2$, $a^2 + 100a \leq a^2 + 100a + 2500$, $0 \leq 2500$. Az utolsó egyenlőtlenség minden valós a esetén igaz.

d) Az egyenlőtlenség: $\sqrt{4a^2} \leq \frac{a^2+4}{2}$. Az egyenlőtlenség átalakításának fontosabb lépései:

$2a \leq \frac{a^2+4}{2}$, $4a \leq a^2+4$, $0 \leq a^2-4a+4$, $0 \leq (a-2)^2$. Az utolsó egyenlőtlenség minden valós a esetén teljesül.

13.3. Az 50 két része x és $50-x$. Írjuk fel a két részre a számtani és mértani középbe vonatkozó egyenlőtlenséget: $\sqrt{x(50-x)} \leq \frac{x+(50-x)}{2}$. Rendezés után. $\sqrt{x(50-x)} \leq 25$. A keresett szorzat a gyökjel alatt látható, amely akkor maximális, ha a tényezők egyenlők: $x = 50-x$, innen $x = 25$. A két szám 25 és 25.

13.4. A téglalap kerülete $k = 2(a+b)$, $100 = 2(a+b)$, innen $b = 50-a$. Írjuk fel a téglalap oldalaira a számtani és mértani középbe vonatkozó egyenlőtlenséget: $\sqrt{a(50-a)} \leq \frac{a+(50-a)}{2}$. A gyökjel alatt látható a téglalap területe, amely akkor a legnagyobb, ha a két tényező egyenlő: $a = 50-a$. A téglalap oldalai: $a = b = 25$ cm, a területe $t = a \cdot b = 2500$ cm².

13.5. Ha az egyik szám x , akkor a másik szám $\frac{6,25}{x}$. Írjuk fel a két számra a számtani és mértani középbe vonatkozó egyenlőtlenséget: $\sqrt{x \cdot \frac{6,25}{x}} \leq \frac{x + \frac{6,25}{x}}{2}$. Az összeg akkor minimális, ha a két tag egyenlő: $x = \frac{6,25}{x}$. Innen $x = 2,5$. A két szám 2,5 és 2,5.

13.6. A téglalapok kerülete akkor a legkisebb, ha az oldalak összege a legkisebb. Az egyik oldal a , a mások oldal $\frac{36}{a}$. Írjuk fel a két oldalra a számtani és mértani középbe vonatkozó egyenlőtlenséget: $\sqrt{a \cdot \frac{36}{a}} \leq \frac{a + \frac{36}{a}}{2}$. Az összeg akkor minimális, ha a két oldal egyenlő: $a = \frac{36}{a}$, innen $a = 6$. Az oldalak 6 cm-esek, a kerület pedig 24 cm.

14. feladatlap

14.1. Minden esetben határozzuk meg az egyenlőségek értelmezési tartományát (tegyünk kikötést)!

a) Kikötés: $x \geq -5$. Négyzetre emelés után $x+5=4$. $x=-1$. A megoldás -1 . b) Kikötés: $x \geq 4$. Négyzetre emelés után $x-4=1$. $x=5$. A megoldás 5 . c) Kikötés: $x \geq 0,5$ és $x \geq 0$. Négyzetre emelés után $2x-1=x^2$, $x^2-2x+1=0$. $x=1$. A megoldás 1 . d) $2\sqrt{1-x}=x$. Kikötés: $x \leq 1$ és $x \geq 0$. A négyzetre emelés után $4-4x=x^2$, $x^2+4x-4=0$. Az egyenlet két gyöke: $x_1 = -2-2\sqrt{2}$, $x_2 = -2+2\sqrt{2}$. A kikötéssel összevetve, csak a $-2+2\sqrt{2}$ a megoldás.

14.2. a) Kikötés: $x \geq 1$ és $x \geq 3$. Négyzetre emelés után $x-1=x^2-6x+9$, $x^2-7x+10=0$. A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$. A kikötés feltételei csak az 5-re teljesülnek, a megoldás: 5 . b) Kikötés: $x \geq -4$ és $x \geq -2$. Négyzetre emelés után $x+4=x^2+4x+4$, $x^2+3x=0$.

A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = -3$, $x_2 = 0$. A kikötés feltételei csak az 0-re teljesülnek, a megoldás: 0.

14.3. a) Kikötés: $x \geq 0$. Négyzetre emelés után $x = 9$. A megoldás 9. b) Kikötés: $x \geq 2$. Négyzetre emelés után $x - 2 = 16$. $x = 18$. A megoldás 18. c) Kikötés: $x \geq 0$. Négyzetre emelés után $x^2 = x^2$. A megoldáshalmaz $x \geq 0$. d) A gyökjel alatti kifejezés $(x-1)^2$ alakra hozható. Kikötés: $x \in \mathbb{R}$ és $1 \geq x$. $\sqrt{(1-x)^2} = 1-x$, $|1-x| = 1-x$. A megoldás $1 \geq x$. e) A kikötés: $x \geq 0$ és $x \leq 0$. A megoldás $x = 0$.

14.4. a) Kikötés: $x \geq 1$. Négyzetre emelés után kapott -0,5, nem megoldás. Nincs megoldás. b) Kikötés: $x \geq -\frac{1}{3}$ és $x \geq \frac{11}{3}$. A négyzetre emelés után kapott 5 és $\frac{8}{3}$ gyökök közül csak az $x = 5$ a megoldás.

c) Kikötés: $x \geq -4$ és $x \geq -\frac{7}{2}$. A négyzetre emelés után kapott -3 és $-\frac{15}{4}$ gyökök mindegyike megoldás. A megoldások: -3 és $-\frac{15}{4}$.

15. feladatlap

15.1. a) Az $u = x^2$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = 1$, $u_2 = 4$. A megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$. b) Az $u = x^2$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = -1$, $u_2 = 9$. A megoldások: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. c) Az $u = x^2$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = 0,25$, $u_2 = 4$. A megoldások: $x_1 = -0,5$, $x_2 = 0,5$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$. d) Az $u = x^2$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = -25$, $u_2 = -4$. Nincs megoldás.

15.2. a) Az $u = x^3$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = 27$, $u_2 = -1$. A megoldás: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. b) Az $u = x^3$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = -125$, $u_2 = -1$. A megoldás: $x_1 = -5$, $x_2 = -1$. c) Az $u = x^3$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = -1$, $u_2 = 1$. A megoldás: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. d) Az $u = x^4$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = 1$, $u_2 = 16$. Az új egyenletek $y = x^2$ új változóval: $y_1^2 = -1$, $y_2^2 = 1$, $y_3^2 = -4$, $y_4^2 = 4$. A megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.

15.3. a) Az $u = \sqrt{x}$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = -1$, $u_2 = 4$. A megoldás: $x = 16$. b) Az $u = \sqrt{x}$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = 11$, $u_2 = 12$. A megoldás: $x_1 = 121$, $x_2 = 144$. c) Az $u = \sqrt[3]{x}$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = -5$, $u_2 = 6$. A megoldás: $x_1 = -125$, $x_2 = 216$.

d) Az $u = \sqrt[4]{x}$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet $u^2 + 2u + 4 = 0$. Nincs megoldás.

15.4. a) Az $u = (x+1)^2$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = 4$, $u_2 = 9$. A megoldások: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 1$. b) Az $u = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ új változó bevezetésével kapott másodfokú egyenlet megoldásai $u_1 = 0$, $u_2 = -1$. A megoldás: $x = \frac{1}{2}$.

15.5. a) Az x kiemelése után $x(x^2 - 9) = 0$, $x(x-3)(x+3) = 0$. A megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3$. b) Az x kiemelése után $x(x^2 - 5) = 0$, $x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$. A megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{5}$, $x_3 = \sqrt{5}$. c) Az x kiemelése után $x(x^2 + 5x + 4) = 0$, $x(x+1)(x+4) = 0$. A megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = -4$. d) A kiemelés után $(x+1)(x^2 + 1,2x + 0,44) = 0$. A megoldás $x = -1$. A második tényező nem lehet 0.

16. feladatlap

16.1. Az egyik ismeretlen kifejezése és behelyettesítése után, a megoldaspárok: a) $x_1 = 4$, $y_1 = 0$, $x_2 = 3$, $y_2 = 1$. b) $x_1 = 1$, $y_1 = 4$, $x_2 = 4$, $y_2 = 1$. c) $x_1 = 2$, $y_1 = -5$, $x_2 = -5$, $y_2 = 2$. d) $x_1 = -10$, $y_1 = 9$, $x_2 = 4$, $y_2 = -5$.

16.2. Az egyik ismeretlen kifejezése és behelyettesítése után, a megoldaspárok: a) $x_1 = 12$, $y_1 = 2$, $x_2 = -2$, $y_2 = -12$. b) $x_1 = -9$, $y_1 = -13$, $x_2 = 13$, $y_2 = 9$.

c) $x_1 = 15$, $y_1 = -2$, $x_2 = -2$, $y_2 = 15$.

d) $x_1 = 4$, $y_1 = 5$, $x_2 = -4$, $y_2 = -5$; $x_3 = 5$, $y_3 = 4$, $x_4 = -5$, $y_4 = -4$.

17. feladatlap

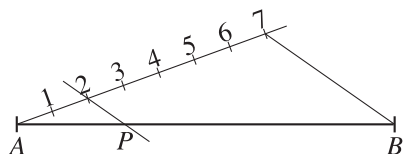
A párhuzamos szelők tétele és a párhuzamos szelőszakaszok tétele használatával.

17.1. $\frac{x}{4} = \frac{5}{3}$, $x = \frac{20}{3}$. $\frac{u}{7} = \frac{3}{5}$, $u = \frac{21}{5}$. $\frac{y}{4} = \frac{10}{7}$, $y = \frac{40}{7}$. $\frac{v}{\frac{56}{5}} = \frac{10}{7}$, $v = 16$.

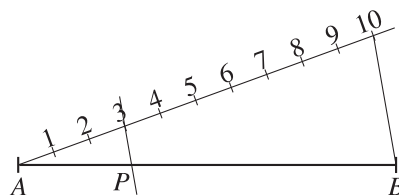
17.2. $\frac{x}{9} = \frac{5}{3}$, $x = \frac{15}{4}$. $\frac{u}{3} = \frac{2}{4}$, $u = \frac{3}{2}$. $\frac{y}{5} = \frac{2}{4}$, $y = \frac{5}{2}$. $\frac{3+v}{7} = \frac{3}{4}$, $v = \frac{9}{4}$.

17.3. A párhuzamos szelők tételének alkalmazásával. A szakasz egyik végpontjához vegyünk fel egy hegyesszög másik szárát, amelyre a csúcstól indulva felmérünk annyi egyenlő beosztást, amennyi a szakasz felosztásához szükséges. Az osztó párhuzamosok állását az utolsó osztópont és a szakasz másik végpontját összekötő egyenes határozza meg. A szakasz keresett osztópontja P .

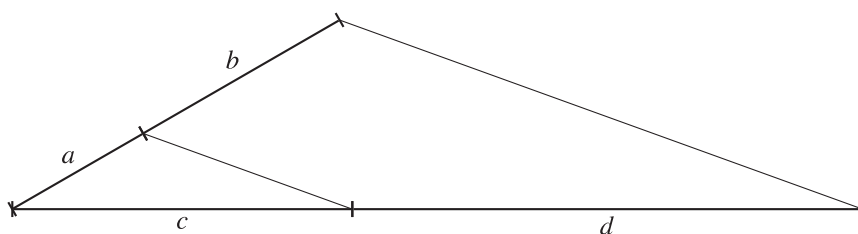
a)



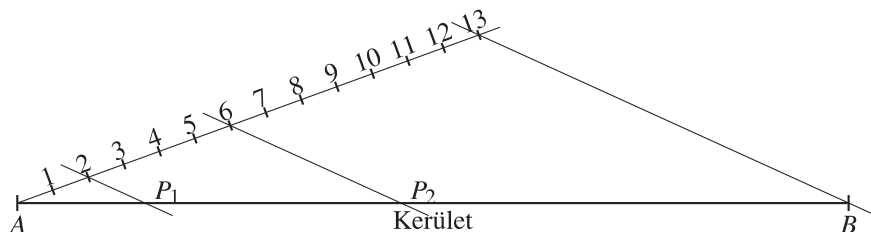
b)



17.4. A c szakasz egyik végpontjától induló hegyesszöget bezáró félegyenesre mérjük fel az a és a b szakaszt! A szakaszok végpontját összekötő egyenes adja meg a P osztópontot kimetsző párhuzamos állását.



17.5. A területet adó szakasz kívánt arányú felosztásához, húzzunk a szakasz egyik végpontjához egy hegyesszög másik szárát. A szög csúcsától kezdve mérünk fel 11 darab egyenlő szakaszt! A 2. és a 6. kis szakaszvégpontból kell a szakaszok végpontját összekötő egyenessel párhuzamos egyeneseket felmérni. A területen keletkező P_1 és P_2 osztópont metszi ki az oldalakat. A háromszög oldalai: AP_1 , P_1P_2 , P_2B .



17.6. A párhuzamos szelőszakaszok tételének alkalmazásával.

$$\frac{x+4}{4} = \frac{8}{5}, \quad x = \frac{12}{5}, \quad \frac{y+6}{6} = \frac{8}{5}, \quad y = \frac{18}{5}.$$

17.7. A párhuzamos szelők tételének és a párhuzamos szelőszakaszok tételének alkalmazásával.

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{4}, \quad x = \frac{15}{4}, \quad \frac{y}{3} = \frac{9}{7}, \quad y = \frac{27}{7}.$$

17.8. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt! A BC oldalhoz közelebbi szakasz legyen az x , a másik $9-x$.

$$\frac{x}{9-x} = \frac{7}{8}, \quad x = 4,2 \text{ cm. A két szakasz hossza } 4,2 \text{ és } 4,8 \text{ cm.}$$

17.9. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt! A feladatnak két megoldása lehetséges, attól függően, hogy

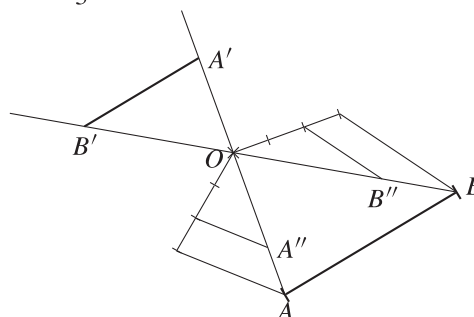
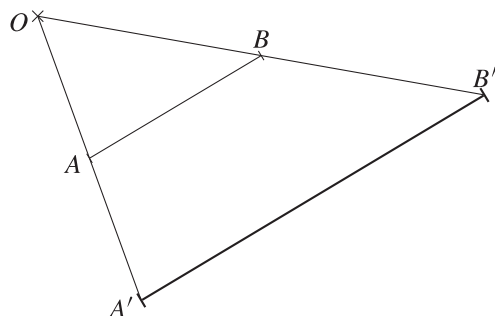
melyik szakasz 4 cm. Ha $c_1 = 4$ cm, $\frac{BC}{5} = \frac{4}{3}$, $BC = \frac{20}{3}$ cm. Ha $c_2 = 4$, $\frac{BC}{5} = \frac{3}{4}$, $BC = \frac{15}{4}$ cm.

18. feladatlap

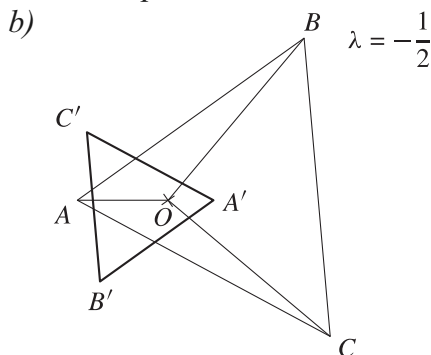
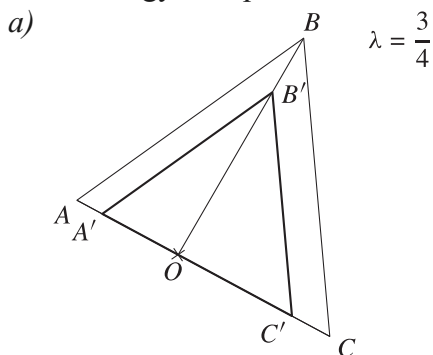
18.1. A szakaszok végpontjaira alkalmazzuk a középpontos hasonlóságot! A megfelelő arányú távolságok meghatározásához használjuk a párhuzamos szelők tételét.

a) $\lambda = 2$

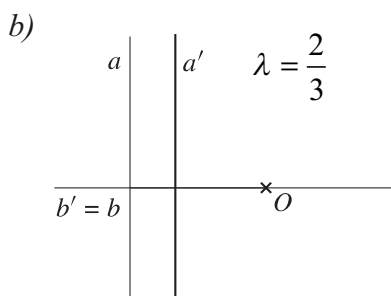
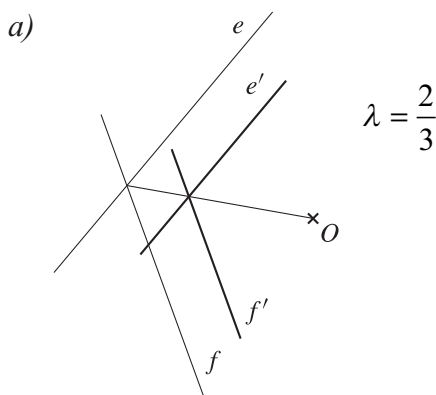
b) $\lambda = -\frac{2}{3}$



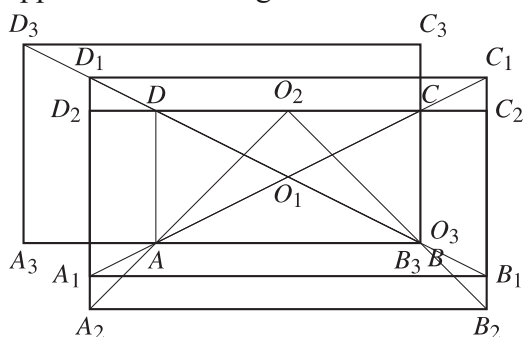
18.2. A negyedelőpontokat és felezőpontokat szakaszfelezőpontok szerkesztésével kaphatjuk meg.



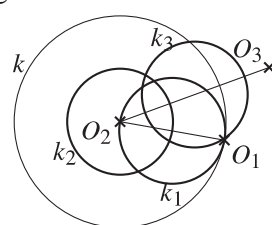
18.3. Az egyenesek egy tetszőleges pontjára alkalmazzuk a középpontos hasonlóságot, majd a ponton keresztül húzzunk párhuzamost az eredeti egyenessel!



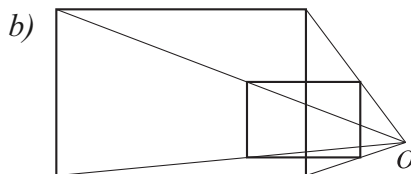
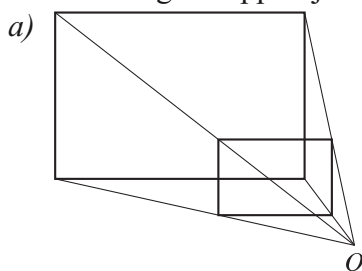
18.4. A téglalap csúcspontjaira alkalmazzuk a középpontos hasonlóságot!



18.5. A körök középpontjait az $\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlósággal határozhatjuk meg. A képkör sugara az eredetinek felel lesz.



18.6. Mivel az oldalak párhuzamosak, a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek metszéspontja a hasonlóság középpontja.

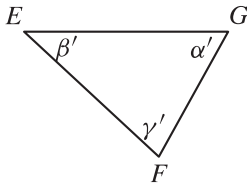


18.7. a) Hamis. b) Hamis. c) Hamis. d) Igaz. e) Igaz. f) Igaz.

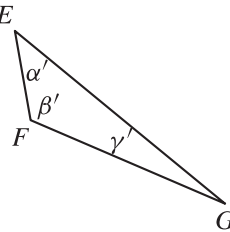
19. feladatlap

19.1.

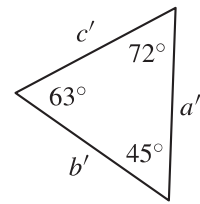
a) A megfelelő oldalak arány megegyezik, 0,6.



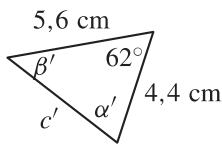
b) A megfelelő oldalak aránya megegyezik, 1,25.



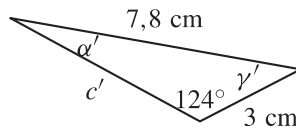
c) A háromszögek két szögükben megegyeznek.



d) A megfelelő oldalak aránya 0,4.



e) A megfelelő oldalak aránya 0,6.

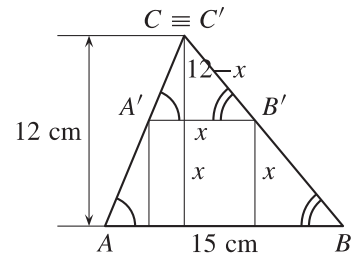


f) A két háromszög nem hasonló.

19.2. A 8 cm-nek megfelelő oldal $\frac{40}{7}$ cm hosszú. A 9 cm-nek megfelelő oldal $\frac{45}{7}$ cm hosszú.

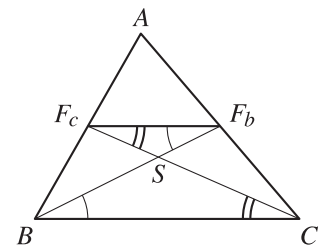
19.3. $ABC\Delta \sim A'B'C\Delta$ mivel a négyzet szemközti oldalai párhuzamosak, így a két háromszög szögei páronként megegyeznek. Az alapokra és a magasságokra felírva a hasonlósági arányokat $\frac{12-x}{12} = \frac{x}{15}$.

Innen $x = \frac{180}{27}$ cm.

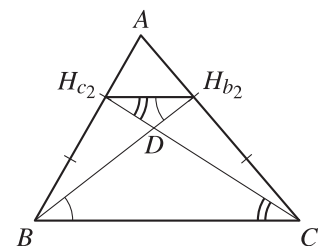


19.4. A napsugarakat párhuzamosnak feltételezve a fa (x) és árnyéka valamint a bot és árnyéka hasonló háromszögeket feszítenek ki. Felírva megfelelő oldalak közötti arányokat, $\frac{x}{8,45} = \frac{1,5}{0,64}$. A fa magassága $x = 19,8$ méter.

19.5. a) A $BAC\angle$ szögszáraira alkalmazva a párhuzamos szelők tételének megfordítását, az $F_cF_b \parallel BC$. $BCS\Delta \sim F_cF_bS\Delta$. A hasonlóság aránya $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ arányban osztják egymást $F_bS : SB = 1 : 2$.



b) Az előző feladathoz hasonlóan belátható, hogy a $BCD\Delta \sim H_{c_1}H_{b_2}D\Delta$. A hasonlóság aránya $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ arányban osztják egymást. ($H_{b_2}D : DB = 1 : 3$).

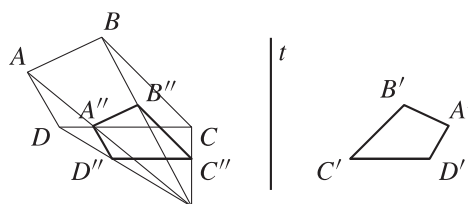


20. feladatlap

20.1. Két alakzat hasonló, ha olyan hasonlósági transzformáció rendelhető hozzájuk, amellyel egymásba vihetők. A két kör középpontja egybevágósági transzformációval egymásba vihetők. A közös középpontú középpontos hasonlóság aránya a két sugár hányadosa. A válasz tehát igen.

20.2. Például egy középpontos hasonlóság és egy tükrözés egymás utáni alkalmazása.

20.3. a) Írjuk fel az arányokat a megfelelő oldalakra: $\frac{x}{3} = \frac{3}{7}$.
Innen $x = \frac{9}{7}$ cm.



20.4. Az átlók metszéspontja legyen O . A két alakzat hasonló, mivel O középpontú, $\frac{1}{3}$ arányú középpontos hasonlósággal egymásba vihető.

20.5. a) Igaz; **b)** Hamis; **c)** Hamis; **d)** Hamis; **e)** Hamis; **f)** Hamis.

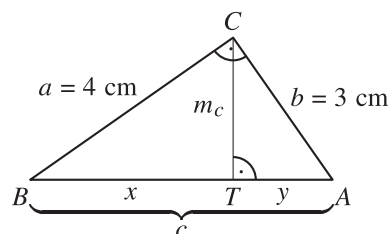
20.6. a) Igaz; **b)** Hamis; **c)** Igaz; **d)** Hamis; **e)** Hamis.

21. feladatlap

21.1. Mindegyiknek van derékszöge. $\angle EBT = \angle CBA = \angle ETC$; $\angle TAF = \angle BAC = \angle CTF$, mivel közös vagy pótszögek. Mivel két-két szögük egyenlő, így hasonlóak.

21.2. a) Pitagorasz tétele alapján $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ cm.

$$(T =) \frac{ab}{2} = \frac{cm_c}{2} \text{ -ből, } m_c = \frac{ab}{c} = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ cm.}$$



A befogótételből következik, hogy $a = \sqrt{x \cdot c}$, $4 = \sqrt{5 \cdot x}$, $x = 3,2$ cm. $y = c - x = 1,8$ cm.

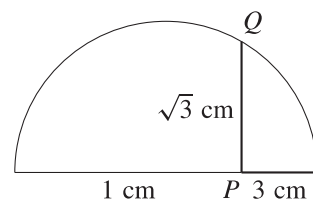
$$b) \ a^2 = xc, \ a = 12 \text{ cm. } b = \sqrt{c^2 - a^2} = 5 \text{ cm. } y = \frac{b^2}{c} = \frac{25}{13} = 1,92 \text{ cm. } m_c = \sqrt{xy} = 4,62 \text{ cm.}$$

$$c) \ m = \sqrt{xy} = 9,6 \text{ cm. } c = 20 \text{ cm. } a = \sqrt{xc} = 12 \text{ cm. } b = \sqrt{yc} = 16 \text{ cm.}$$

$$d) \ x(15 - x) = 51,84; \ x^2 - 15x + 51,84 = 0. \ x = 9,6 \text{ cm. } y = 5,4 \text{ cm. } a = \sqrt{x^2 + m^2} = 12 \text{ cm.}$$

$$b = \sqrt{y^2 + m^2} = 9 \text{ cm.}$$

21.3. a) A 3 cm hosszú szakasz meghosszabbítására, a P ponttól mérjük fel 1 cm-t. Az így kapott 4 cm-es szakaszra szerkesszünk Thálész-kört. A P pontba állítsunk merőlegest, mely a kört a Q pontban metszi. A PQ szakasz a keresett $\sqrt{3}$ cm-es szakasz. **b)** és **c)** feladatnál hasonló az eljárás csak a kezdeti szakasz hossza 5 cm, illetve 6 cm.

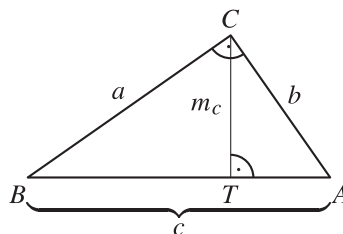


21.4. a), b) Az előző feladathoz hasonló a megoldás, csak az 1 cm-t a szakaszokhoz kell mérni.

21.5. A derékszögű háromszög területe kétféleképpen számolható ki:

$$T = \frac{ab}{2}, \text{ illetve } T = \frac{cm_c}{2}. \quad \frac{ab}{2} = \frac{cm_c}{2}, \quad m_c = \frac{ab}{c}.$$

21.6. A befogótétel alapján: $b^2 = yc$.



22. feladatlap

22.1. A megadott területet a hasonlóság arányának négyzetével kell megszorozni.

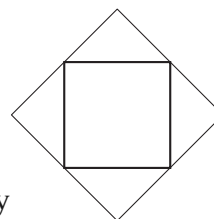
A terület	1200 cm ²	30 000 cm ²	75 cm ²	675 cm ²	12 cm ²
-----------	----------------------	------------------------	--------------------	---------------------	--------------------

22.2. A megadott térfogatot a hasonlóság arányának harmadik hatványával kell megszorozni.

A térfogat	2400 cm ³	300 000 cm ³	37,5 cm ³	1012,5 cm ³	2,4 cm ³
------------	----------------------	-------------------------	----------------------	------------------------	---------------------

22.3. A hasonlóság aránya $\lambda = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$.

22.4. Az egyik lehetséges eljárás az ábrán látható.



22.5. Mivel A_1B_1 középvonal így AB fele: $\frac{AB}{A_1B_1} = 2$. A háromszögek hasonlóak így területük aránya: $\frac{T}{t} = 4$.

22.6. A fehér háromszögek az eredeti háromszöghöz hasonlóak és a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$. A fehér háromszög és az eredeti háromszög területének aránya $\frac{1}{9}$. A bevonalkázott alakzat és az eredeti háromszög területének aránya $1 - 3 \cdot \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. (Kb. 67%-a.)

22.7. t_1 a t_{ABC} -nek 6,25 százaléka. t_2 a t_{ABC} -nek 18,75. százaléka. t_3 a t_{ABC} -nek 31,25 százaléka. t_4 a t_{ABC} -nek 43,75 százaléka.

22.8. A területarányból a hasonlóság aránya kiszámolható: $\lambda^2 = 1,5$, $\lambda = 1,2247$. A háromszög oldalát tehát 22,47%-kal kell növelni.

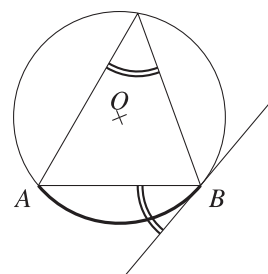
23. feladatlap

23.1. Egy lehetséges megoldás látható az ábrán.

23.2. A szög nagysága 0° és 180° közé esik.

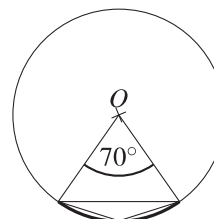
23.3.

Az ív hossza a kerület	A középponti szög		A kerületi szög	
$\frac{1}{2}$ része	180°	π	90°	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{3}$ része	120°	$\frac{2\pi}{3}$	60°	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{3}{4}$ része	270°	$\frac{3\pi}{2}$	135°	$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{1}{6}$ része	60°	$\frac{\pi}{3}$	30°	$\frac{\pi}{6}$
0,4 része	144°	$\frac{2\pi}{5}$	72°	$\frac{\pi}{5}$
$\frac{4}{7}$ része	$205,71^\circ$	$\frac{8\pi}{7}$	$102,86^\circ$	$\frac{4\pi}{7}$



23.4. A középponti szög legyen α , a kerületi szög pedig β . $\alpha - \beta = 2\beta - \beta = \beta = 42^\circ 23'$. A kerületi szög $42^\circ 23'$, a középponti szög pedig $84^\circ 46'$.

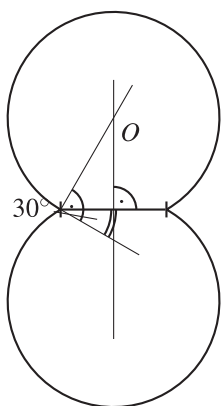
23.5. A keresett szög $180^\circ - \frac{70^\circ}{2} = 145^\circ$.



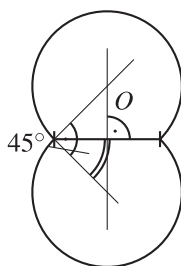
24. feladatlap

24.1. A látóköriveket kell megszerkeszteni!

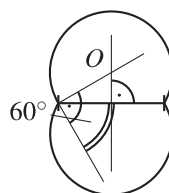
a)



b)

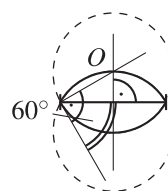


c)

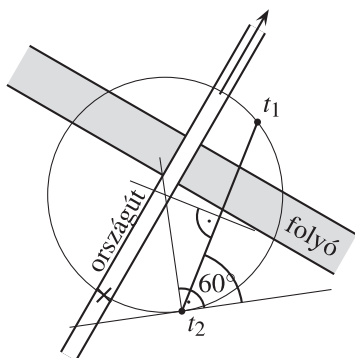


d)

A 120° -os szög kiegészítő szögével (60°) szerkesztjük a látókört. A 60° -os látókörív kiegészítő íve a nagyobb.



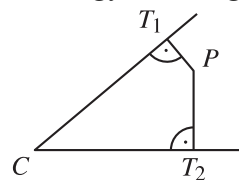
24.2. A 60° -os látókörív híd előtti pontja.



$$24.3. \alpha = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ.$$

$$\beta = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ.$$

24.4. A négyszög két derékszöge egymással szemben van, így a négyszög szemközti szögeinek összege 180° , vagyis húrnégyszög.

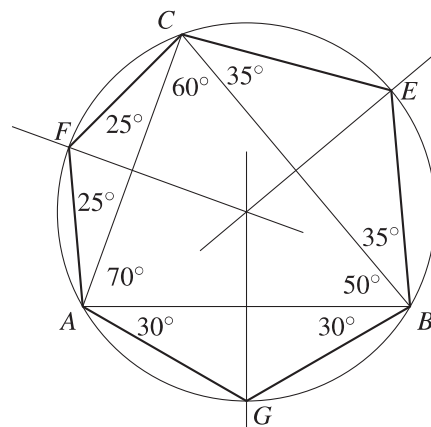


24.5.

$$A\angle = 25^\circ + 70^\circ + 30^\circ = 125^\circ;$$

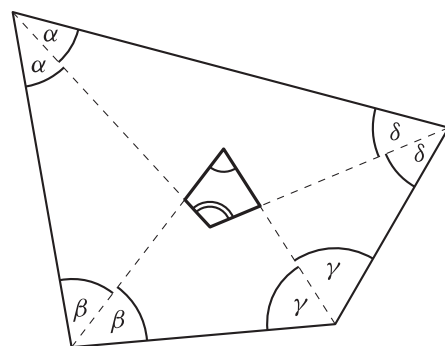
$$B\angle = 30^\circ + 50^\circ + 35^\circ = 115^\circ; \quad C\angle = 25^\circ + 60^\circ + 35^\circ = 120^\circ;$$

$$E\angle = 110^\circ; \quad F\angle = 130^\circ; \quad G\angle = 120^\circ.$$



24.6. Tudjuk, hogy az $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$. A kis négyszög egyíves szöge $= 180^\circ - (\beta + \gamma)$

A kétíves szög $= 180^\circ - (\alpha + \delta)$. A két szög összege $360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^\circ$. A szemközti szögeinek összege 180° , így húrnégyszög.



24.7. a) Igaz. b) Hamis. c) Hamis. d) Igaz. e) Igaz.

25. feladatlap

25.1.

	a	b	c	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
a)			10	0,6	0,8	0,75	$\frac{4}{3}$
b)		12		$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{5}$
c)	24			$\frac{24}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{7}{24}$

25.2.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807
79°	0,9816	0,1908	5,1446	0,1944
$37,67^\circ$	0,6111	0,7915	0,7721	1,2952
$5,14^\circ$	0,0896	0,9960	0,0899	11,1171
$68^\circ 11'$	0,9284	0,3716	0,4976	0,4003
$13^\circ 45'$	0,2377	0,9713	0,2447	4,0866

25.3.

szöggel szemközti befogó
13,58 cm
8,75 m

25.4.

szög melletti befogó
44,76 cm
0,92 m

25.5.

átfogó
22,73 cm
6,85 m

25.6.

szöggel szemközti befogó
7,55 cm
4,26 m

25.7.

szög melletti befogó
0,192 cm
30,83 m

26. feladatlap

26.1.

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
a)		$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
b)	$\frac{12}{13}$		$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{12}$
c)		0,98	0,204	4,9
d)	0,917		2,29	0,436

26.2. a) és b) A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggés alapján. c) és d) Használjuk a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ összefüggést! e) és f) Használjuk a $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ összefüggést!

26.3. Használjuk a pótszögekre vonatkozó összefüggéseket! Pl.: $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$ stb.

a) $\alpha = 47^\circ$.

b) $\alpha = 39^\circ$.

c) $\alpha = 60^\circ$.

d) $\alpha = 45^\circ$.

27. feladatlap

27.1. a) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1$;

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0$;

c) $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$;;

d) $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$;

e) $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = -1$;

f) $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

27.2. a) $\alpha = 30^\circ$;

b) $\alpha = 60^\circ$;

c) $\alpha = 30^\circ$;

d) $\alpha = 45^\circ$;

e) $\alpha = 60^\circ$;

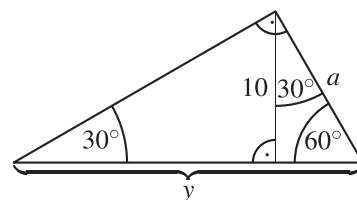
f) $\alpha = 45^\circ$;

g) $\alpha = 60^\circ$;

h) $\alpha = 30^\circ$.

27.3. Egy lehetséges megoldás az ábra jelölései mellett.

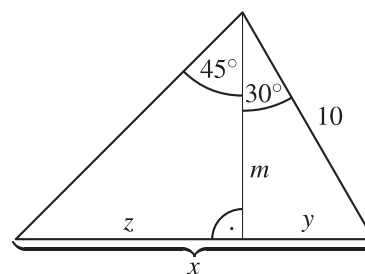
$$a = \frac{10}{\cos 30^\circ} = 11,55. \quad y = \frac{a}{\cos 60^\circ} = 23,1.$$



27.4. Egy lehetséges megoldás az ábra jelölései mellett.

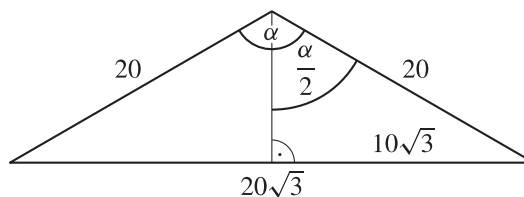
$$m = 10 \cdot \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}. \quad y = 10 \cdot \sin 30^\circ = 5, \quad z = m = 5\sqrt{3},$$

$$x = y + z = 5 + 5\sqrt{3} = 5(1 + \sqrt{3}) = 13,66.$$



27.5. Felírva a megfelelő szögfüggvényt: $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\alpha = 30^\circ$. A másik oldallal bezárt szöge 60° .

27.6. $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$; $\alpha = 120^\circ$.

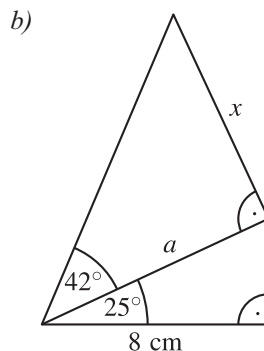
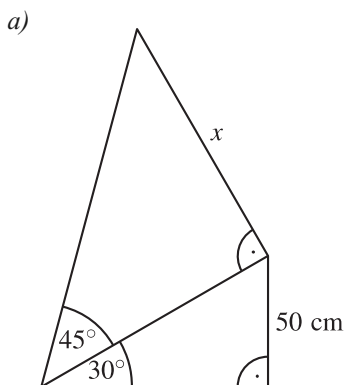


28. feladatlap

- 28.1. a) $\alpha = 27,13^\circ$; b) $\alpha = 0,344^\circ$; c) $\alpha = 27^\circ$; d) $\alpha = 7,69^\circ$;
e) $\alpha = 68,66^\circ$; f) $\alpha = 37,6^\circ$; g) $\alpha = 48,24^\circ$; h) $\alpha = 7,125^\circ$.

28.2. a) A 45° -os szögből következik, hogy a fenti háromszög egyenlő szárú. $x = 2 \cdot 50 = 100$ cm.

b) $a = \frac{8}{\cos 25^\circ} = 8,827$; $\frac{x}{a} = \tan 42^\circ$, $x = a \cdot \tan 42^\circ = 7,95$ cm.

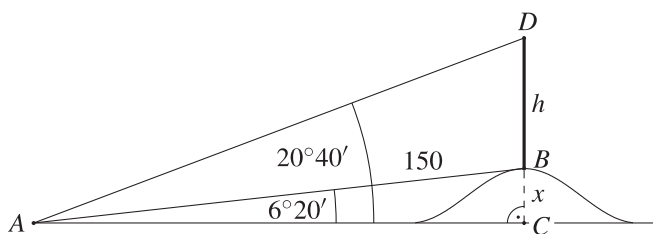


28.3. $AC = 150 \cdot \cos 6^\circ 20' = 149,09$ m.

$x = 150 \cdot \sin 6^\circ 20' = 16,55$ m.

$x + h = AC \cdot \tan 27^\circ = 75,96$ m.

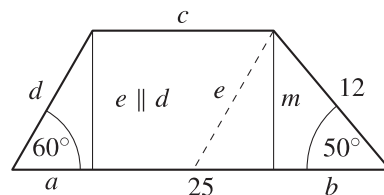
$h = 75,96 - 16,55 = 59,41$ m.



28.4. Húzzuk be az ábrán látható módon a magasságot!

$m = 12 \cdot \sin 50^\circ = 9,19$. $d = \frac{m}{\sin 60^\circ} = 10,61$. $a = \frac{d}{2} = 5,3$.

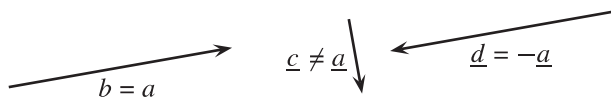
$b = 12 \cdot \cos 50^\circ = 7,71$. $a + b = 13$. $c = 25 - 13 = 12$.



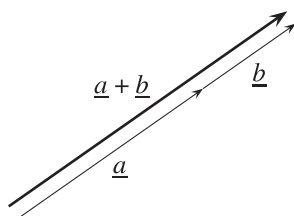
28.5. $\overline{DB} = \frac{30}{\tan 40^\circ} = 35,75$ m. $\overline{DC} = \frac{30}{\tan 35^\circ} = 42,84$ m. $x = \overline{DC} - \overline{DB} = 7,09$ m.

29. feladatlap

29.1.

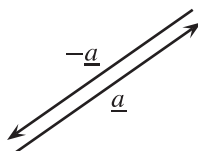


29.2. a)

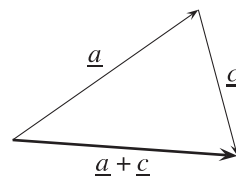


b)

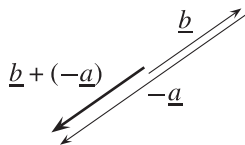
$\underline{a} + (-\underline{a}) = \vec{0}$



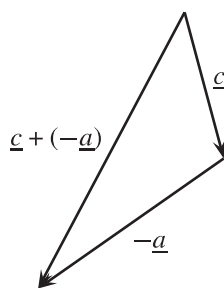
c)



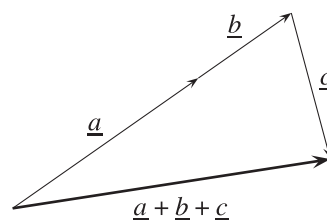
d)



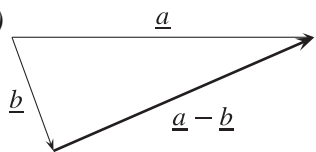
e)



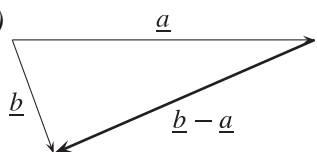
f)

**29.3.**

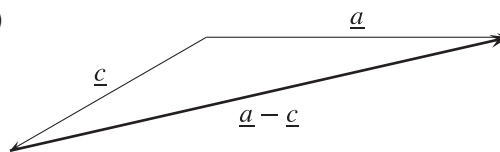
a)



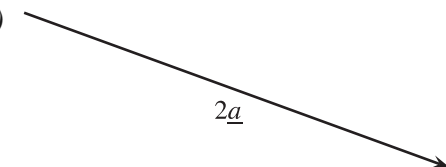
b)



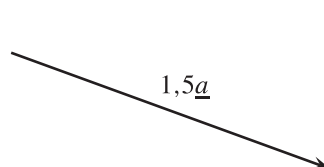
c)

**29.4.**

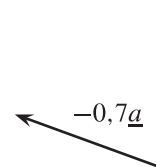
a)



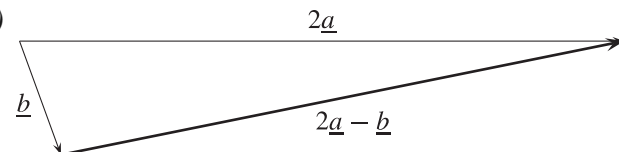
b)



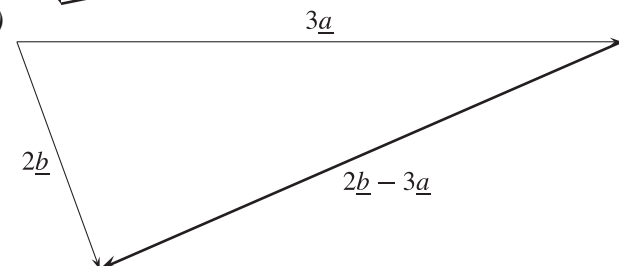
c)

**29.5.**

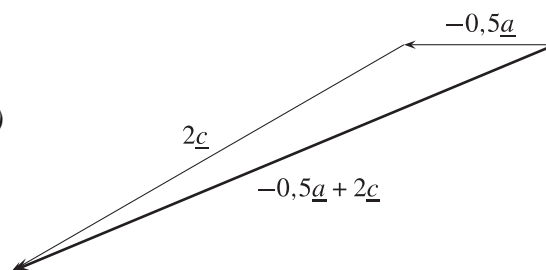
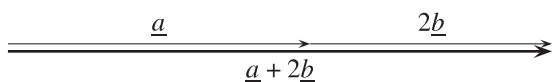
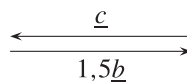
a)



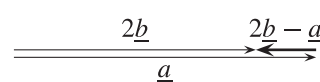
b)



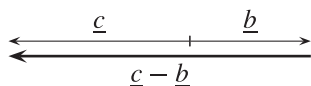
c)

**29.6.** a)b) $\underline{c} + 1,5\underline{b} = \vec{0}$ 

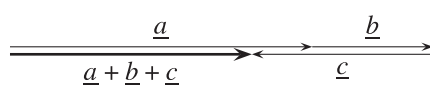
c)



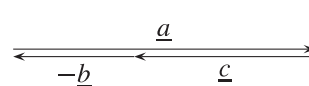
d)



e)

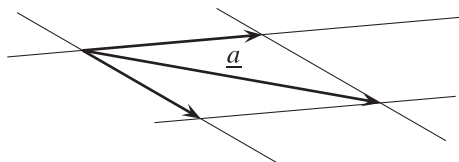


f)

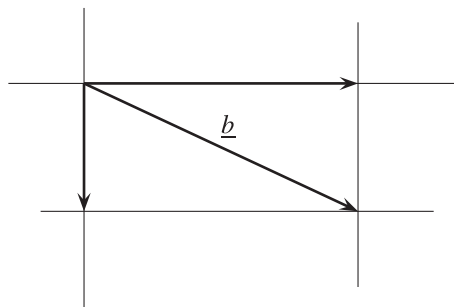
**29.7.** a) $2\underline{a} - (\underline{a} - \underline{b}) = \underline{a} + \underline{b};$ b) $2(\underline{a} - 2\underline{b}) - 3(3\underline{a} - \underline{b}) = -7\underline{a} - \underline{b};$ c) $\frac{2}{3}(\underline{a} + 3\underline{b}) - \frac{1}{2}(3\underline{a} - 4\underline{b}) = -\frac{5}{6}\underline{a} + 4\underline{b};$ d) $\frac{1}{2}(2\underline{a} + \underline{b}) - \frac{1}{3}(\underline{a} - 2\underline{b}) = \frac{2}{3}\underline{a} + \frac{7}{6}\underline{b}.$ **30. feladatlap****30.1.** $\underline{b} = -\frac{1}{3}\underline{a}; \quad \underline{c} = 2\underline{a}; \quad \underline{d} = \frac{2}{3}\underline{a}; \quad \underline{e} = -\frac{3}{2}\underline{a}; \quad \underline{f} = \frac{1}{2}\underline{a}.$

30.2.

a)

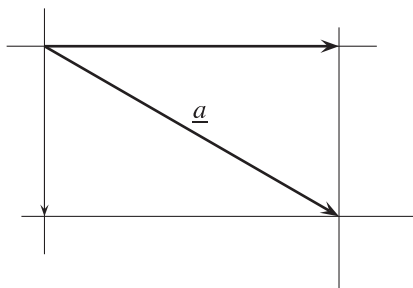


b)

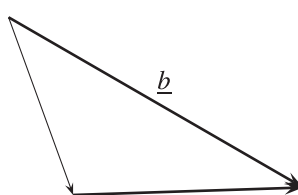


30.3.

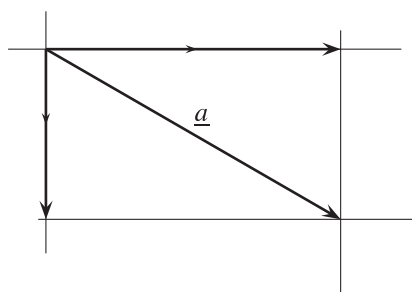
a)



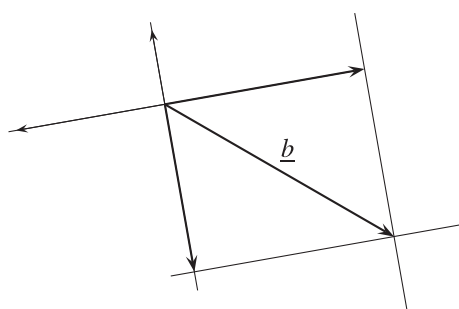
b)



30.4. a)



b)



31. feladatlap

31.1. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$; $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FD}$; stb.

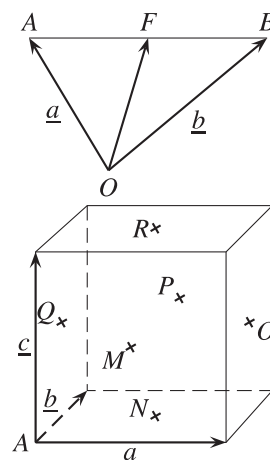
31.2. a) $\overrightarrow{AG} = \underline{a} + \underline{b}$; b) $\overrightarrow{GC} = \underline{a}$; c) $\overrightarrow{CF} = -2\underline{a}$; d) $\overrightarrow{AD} = 2\underline{a} + 2\underline{b}$; e) $\overrightarrow{AE} = \underline{a} + 2\underline{b}$; f) $\overrightarrow{EB} = -2\underline{b}$; g) $\overrightarrow{CB} = -\underline{a} - \underline{b}$; h) $\overrightarrow{AC} = 2\underline{a} + \underline{b}$; i) $\overrightarrow{BD} = \underline{a} + 2\underline{b}$; j) $\overrightarrow{DF} = -2\underline{a} - \underline{b}$.

31.3. a) $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$; b) $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$; c) $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$; d) $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}$.

31.4. $\overrightarrow{AB} = -2\underline{d}$. 31.5. $\overrightarrow{OF} = \underline{a} + \frac{\underline{b} - \underline{a}}{2} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$.

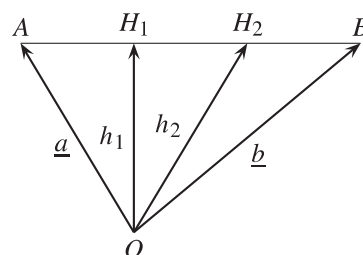
31.6. $\overrightarrow{AM} = \frac{\underline{a} + \underline{c}}{2}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$; $\overrightarrow{AO} = \frac{2\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{2}$;

$\overrightarrow{AP} = \frac{\underline{a} + 2\underline{b} + \underline{c}}{2}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{\underline{b} + \underline{c}}{2}$; $\overrightarrow{AR} = \frac{\underline{a} + \underline{b} + 2\underline{c}}{2}$.



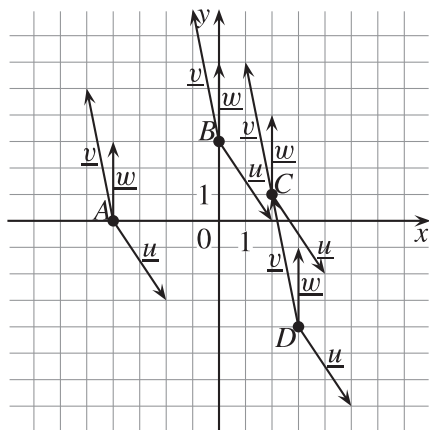
$$31.7. \overrightarrow{OH_1} = \underline{a} + \frac{b-a}{3} = \frac{2a+b}{3}; \overrightarrow{OH_2} = \underline{a} + \frac{2b-2a}{3} = \frac{a+2b}{3}.$$

$$31.8. \overrightarrow{OX_1} = \underline{a} + \frac{b-a}{4} = \frac{3a+b}{4}; \overrightarrow{OX_2} = \frac{a+b}{2}; \overrightarrow{OX_3} = \frac{a+3b}{4}.$$



32. feladatlap

32.1.



32.2. a) $\underline{a}(3;0)$; b) $\underline{b}(3;-4)$; c) $\underline{c}(0;5)$;

d) $\underline{d}(-4;4)$; e) $\underline{e}(4;4)$; f) $\underline{f}(-3;-3)$.

32.3. a) $\underline{a} + \underline{b} = (2; 0)$; b) $\underline{c} - \underline{b} = (-1; -2)$;

c) $5\underline{a} = (10; -15)$; d) $3\underline{a} + 2\underline{b} = (6; -3)$;

e) $4\underline{a} - 3\underline{c} = (11; -15)$; f) $\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b} = (1; -0,5)$;

g) $\underline{a} - \underline{b} + 2\underline{c} = (0; -4)$.

$-3\underline{a} + 4\underline{b} - \underline{c} = (-5; 20)$

h)

32.4.

	vektor	lineáris kombináció		vektor	lineáris kombináció
a)	$\underline{a}(3;6)$	$\underline{a} = 3\underline{i} + 6\underline{j}$	b)	$\underline{b}(1,24;-2,5)$	$\underline{b} = 1,24\underline{i} - 2,5\underline{j}$
c)	$\underline{c}(0;-6)$	$\underline{c} = 0\underline{i} - 6\underline{j}$	d)	$\underline{d}\left(-\frac{111}{15};0\right)$	$\underline{d} = -\frac{111}{15}\underline{i}$

32.5.

	vektor	vektor abszolútértéke	egységvektor
a)	$\underline{a}(3;4)$	$ \underline{a} = 5$	$\underline{e}\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$
b)	$\underline{b}(1;-1)$	$ \underline{b} = \sqrt{2}$	$\underline{e}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
c)	$\underline{c}(0;5)$	$ \underline{c} = 5$	$\underline{e}(0;1)$
d)	$\underline{d}(-12;-5)$	$ \underline{d} = 13$	$\underline{e}\left(-\frac{12}{13};-\frac{5}{13}\right)$
e)	$\underline{e}(-3;0)$	$ \underline{e} = 3$	$\underline{e}(-1;0)$
f)	$\underline{f}(8;-9)$	$ \underline{f} = \sqrt{145}$	$\underline{e}\left(\frac{8}{\sqrt{145}};-\frac{9}{\sqrt{145}}\right)$

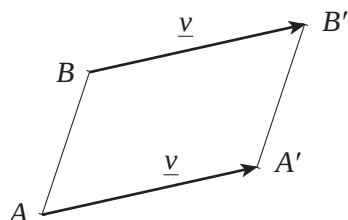
32.6. a) $\overrightarrow{AB}(0;-3)$; b) $\overrightarrow{CA}(-4;3)$; c) $\overrightarrow{BC}(4;0)$.

32.7. a) $F_{AB}\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$; b) $F_{BC}\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right)$; c) $F_{AC}\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

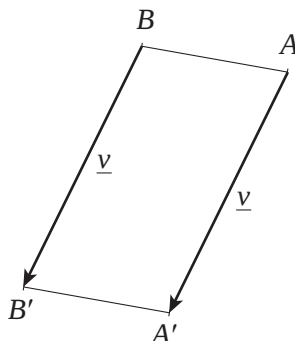
33. feladatlap

33.1.

a)



b)

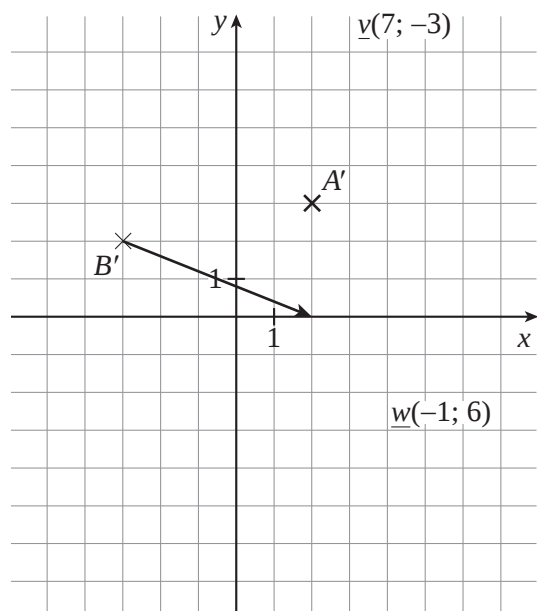


33.2. A két szögszárát eltoljuk a szakasz két megfelelő végpontjába. A két képegynes metszéspontja (M) lesz a szög csúcsának képe. Az M -ből a szög csúcsába mutató vektor lesz az az eltolásvektor, amellyel a szakaszt kell eltolni.

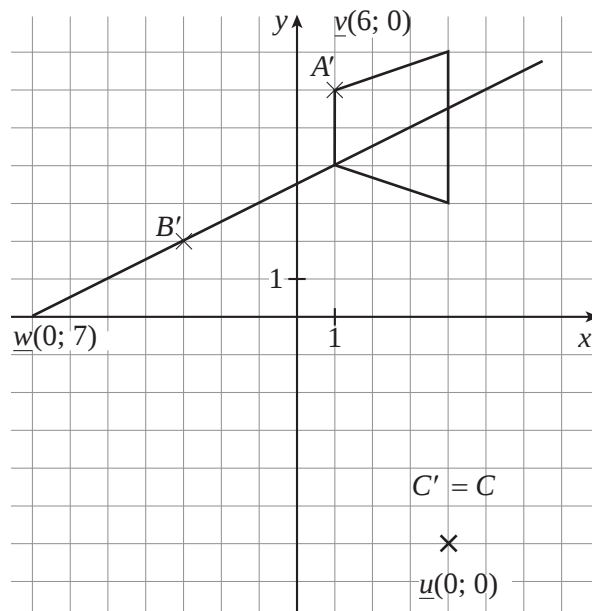
33.3. a) $P(-5; 6) \rightarrow P'(-2; 4)$, $A(-1; 3) \rightarrow A'(2; 1)$, $B(3; 5) \rightarrow B'(6; 3)$. Az egyenes két tetszőleges pontját toljuk el, pl. $E(0; -4) \rightarrow E'(3; -6)$ és $F(-3; -5) \rightarrow F'(0; -7)$. A két eltolt pontra fektetett egyenes lesz a képegynes. b) $A(-2; 4) \rightarrow A'(-5; 5)$, $B(3; 2) \rightarrow B'(0; 3)$, $C(-3; -2) \rightarrow C'(-6; -1)$. A körnél csak a középpontot toljuk el: $K(4; -5) \rightarrow K'(1; -4)$. A két kör sugara megegyezik.

33.4.

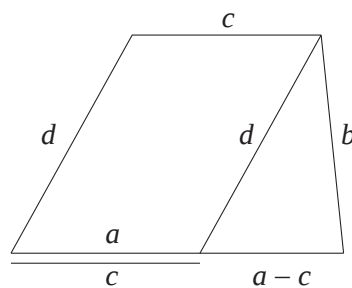
a)



b)



33.5. A két alap különbségével képzett szakasszal és a két szárral megszerkesztett háromszög megadja a trapéz b szárát és az a alapját. A trapéz c alapját és d szárát párhuzamos eltolással kaphatjuk meg.



33.6. Az eltolás vektora merőleges a megadott tengelyekre, és kétszer olyan hosszú, mint a két tengely távolsága.

34. feladatlap

34.1. a) Például először y tengelyre tükrözés, majd $v(0; 10)$ vektorral történő eltolás. b) Például a $K(1; 0)$ pontra történő középpontos tükrözés.

34.2.

	$A(2; 5)$	$B(-3; 4)$	$P(x; y)$
x tengelyre való tükrözés	$(2; -5)$	$(-3; -4)$	$(x; -y)$
y tengelyre való tükrözés	$(-2; 5)$	$(3; 4)$	$(-x; y)$
Origóra való tükrözés	$(-2; -5)$	$(3; -4)$	$(-x; -y)$
$K(2; 3)$ pontra való tükrözés	$(2; 1)$	$(7; 2)$	$(4 - x; 6 - y)$

34.3. A megfelelő oldalak egyenlősége alapján látható be az egybevágóság. Mivel a súlyvonal közös oldal, a súlyvonal felezi az alapot és a két szár egyenlő.

34.4. Az $a)$ és $b)$ háromszög egybevágó, mert két-két megfelelő oldaluk és a nagyobb oldallal szemkösti szög egyenlő. Az $f)$ és $g)$ háromszög egybevágósága egy-egy oldal és a rajtuk fekvő két szög egyenlőségéből látható be.

34.5. A szabályos ötszög minden oldala és szöge egyenlő, így a két szabályos ötszög szögei is egyenlők. Mivel a feltétel miatt az oldalaik hossza egyenlő hosszúságú, az ötszögek egybevágók.

35. feladatlap

35.1.

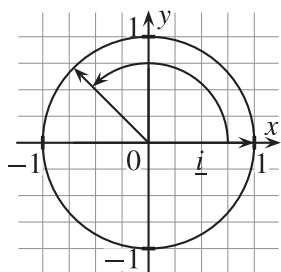
	α°	$\hat{\alpha}$		α°	$\hat{\alpha}$
a)	60°	$\frac{\pi}{3}$	b)	-315°	$-\frac{7}{4}\pi$
c)	150°	$\frac{5\pi}{6}$	d)	-30°	$-\frac{\pi}{6}$
e)	135°	$\frac{3\pi}{4}$	f)	$572,96^\circ$	10

35.2.

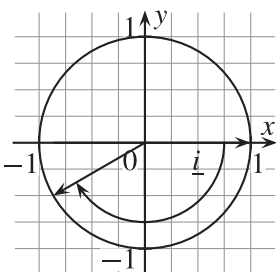
α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
-540°	0	-1	0	-
675°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{15}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
-2	-0,9092	-0,4163	2,184	0,458

35.3.

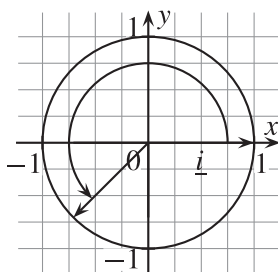
a) $\alpha = 135^\circ$



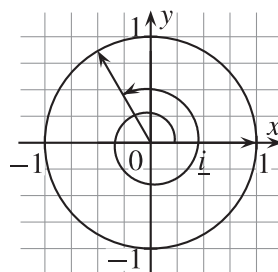
b) $\alpha = -150^\circ$



c) $\alpha = 225^\circ$

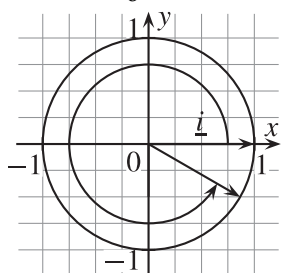


d) $\alpha = 480^\circ$

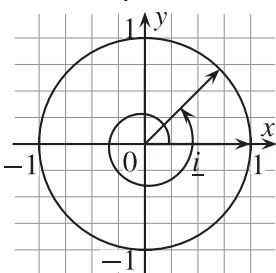


35.4.

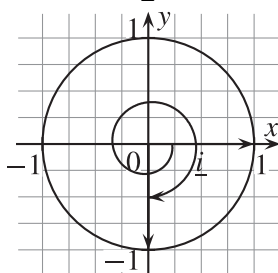
a) $\alpha = \frac{11}{6}\pi$



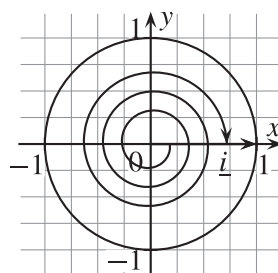
b) $\alpha = \frac{9}{4}\pi$



c) $\alpha = -\frac{5}{2}\pi$



d) $\alpha = -6\pi$



36. feladatlap

36.1. a) 200° ; b) 120° ; c) 120° ; d) 180° ; e) 320° ; f) 240° .

36.2. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $-\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $\frac{1}{2}$; g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; h) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

36.3. a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{2}$; g) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; h) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

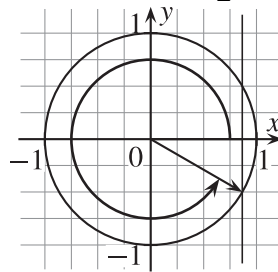
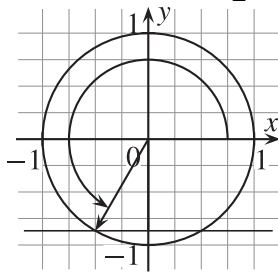
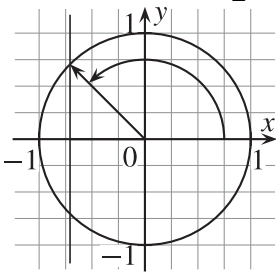
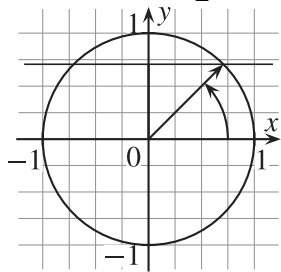
36.4.

a) $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



36.5. a) $\alpha = 30^\circ$; b) $\alpha = 90^\circ$; c) $\alpha = 135^\circ$; d) $\alpha = 180^\circ$.

37. feladatlap

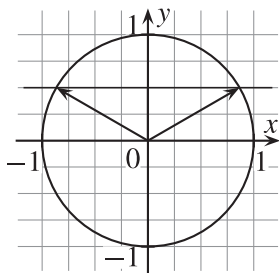
37.1.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$.

$x_1 = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + l2\pi$,

$k, l \in \mathbb{Z}$.

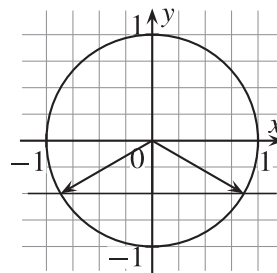


b) $\sin x = -\frac{1}{2}$.

$x_1 = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$,

$x_2 = \frac{11\pi}{6} + l2\pi$,

$k, l \in \mathbb{Z}$.

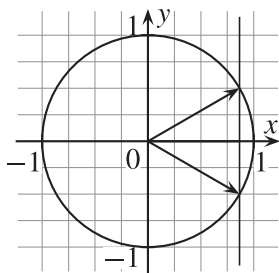


c) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x_1 = \frac{\pi}{3} + k2\pi$,

$x_2 = \frac{5\pi}{3} + l2\pi$,

$k, l \in \mathbb{Z}$.

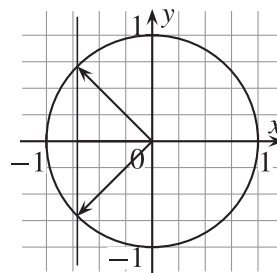


d) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$x_1 = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$,

$x_2 = \frac{5\pi}{4} + l2\pi$,

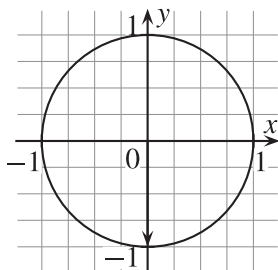
$k, l \in \mathbb{Z}$.



37.2.

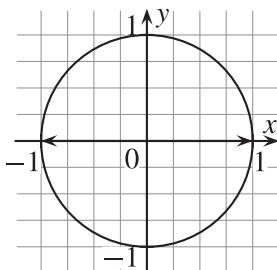
a) $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$.



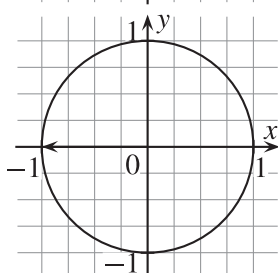
b) $x = k\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$.



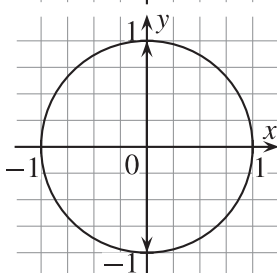
c) $x = \pi + k2\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$.



d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$.



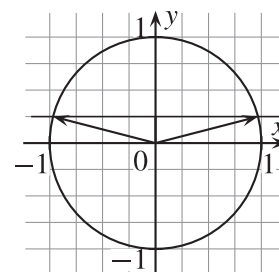
37.3.

a)

$x_1 = 0,253 + k2\pi$,

$x_2 = 2,88 + l2\pi$,

$k, l \in \mathbb{Z}$.

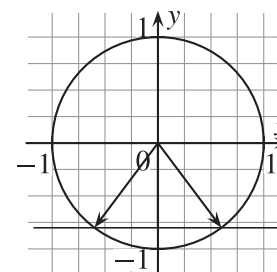


b)

$x_1 = 4,07 + k2\pi$,

$x_2 = 5,35 + l2\pi$,

$k, l \in \mathbb{Z}$.

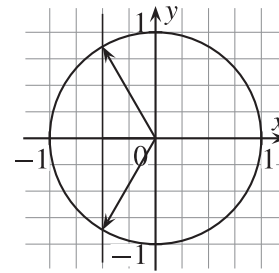


c)

$x_1 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$,

$x_2 = \frac{4\pi}{3} + l2\pi$,

$k, l \in \mathbb{Z}$.

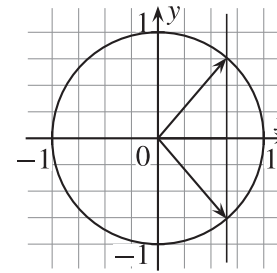


d)

$x_1 = 0,86 + k2\pi$,

$x_2 = 5,42 + l2\pi$,

$k, l \in \mathbb{Z}$.



38. feladatlap

38.1. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

Értékkészlet: $y \in [-1; 1]$.

Zérushely: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

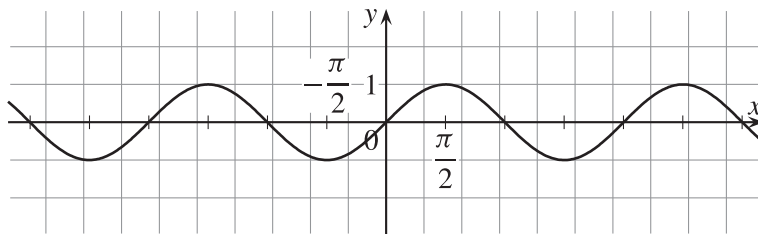
Tengelypont: $y = 0$.

Növekvés: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$; $k \in \mathbb{Z}$.

Fogyás: $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$; $k \in \mathbb{Z}$. Szélsőértékek:

Max. hely: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Max. érték: 1. Min. hely: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Min. érték: -1.

Páros: Nem. Páratlan: Igen. Periódus: $p = 2\pi$.



38.2. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

Értékkészlet: $y \in [-1; 1]$.

Zérushely: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tengelypont: $y = 1$.

Növekedés: $[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$; $k \in \mathbb{Z}$.

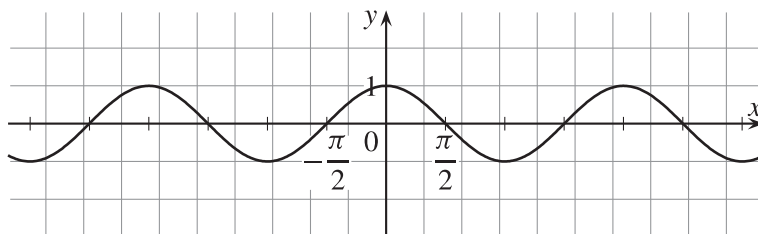
Csökkenés: $[2k\pi; \pi + 2k\pi]$; $k \in \mathbb{Z}$.

Szélsőértékek:

Max. hely: $2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Max. érték: 1.

Min. hely: $\pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Min. érték: -1.

Páros: Igen. Páratlan: Nem. Periódus: $p = 2\pi$.



38.3. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

Értékkészlet: $y \in [-2; 2]$.

Zérushely: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tengelypont: $y = 0$.

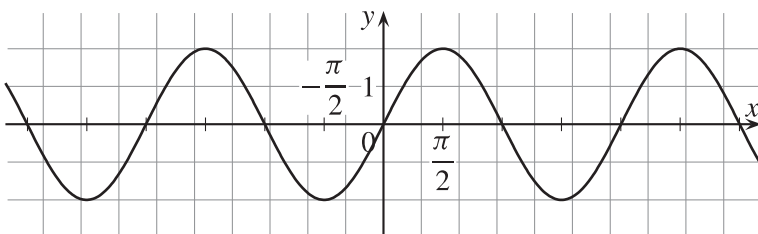
Növekedés: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$; $k \in \mathbb{Z}$.

Csökkenés: $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$; $k \in \mathbb{Z}$.

Szélsőértékek:

Max. hely: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Max. érték: 2. Min. hely: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Min. érték: -2.

Páros: Nem. Páratlan: Igen. Periódus: $p = 2\pi$.



38.4. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

Értékkészlet: $y \in [-1; 1]$.

Zérushely: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tengelypont: $y = -1$.

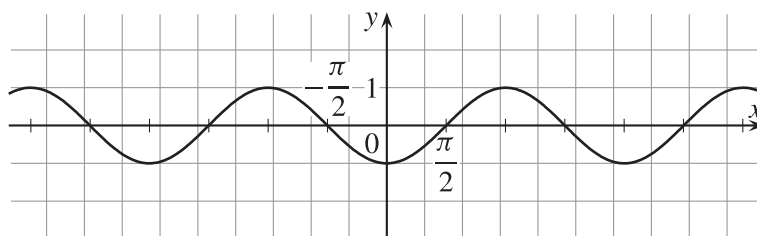
Növekedés: $[2k\pi; \pi + 2k\pi]$; $k \in \mathbb{Z}$.

Csökkenés: $[\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$; $k \in \mathbb{Z}$.

Szélsőértékek:

Max. hely: $\pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Max. érték: 1. Min. hely: $2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Min. érték: -1.

Páros: Igen. Páratlan: Nem. Periódus: $p = 2\pi$.



38.5. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

Értékkészlet: $y \in [0; 2]$.

Zérushely: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

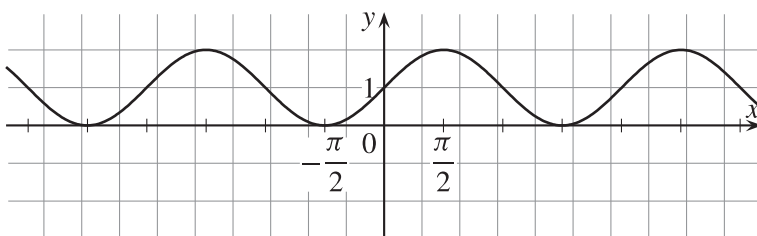
Tengelypont: $y = 1$.

Növekedés: $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$; $k \in \mathbb{Z}$. Csökkenés: $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$; $k \in \mathbb{Z}$.

Szélsőértékek:

Max. hely: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Max. érték: 2. Min. hely: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Min. érték: 0.

Páros: Nem. Páratlan: Nem. Periódus: $p = 2\pi$.



38.6. Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$.

Értékkészlet: $y \in [-1; 1]$.

Zérushely: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

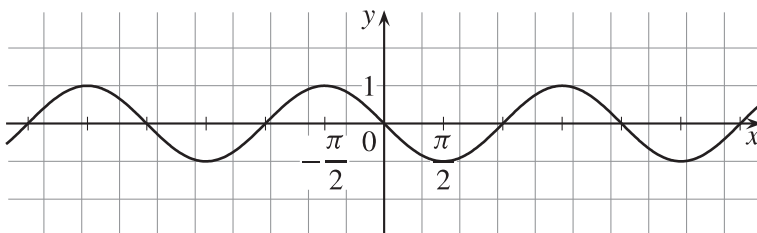
Tengelypont: $y = 0$.

Növekedés: $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$; $k \in \mathbb{Z}$. Csökkenés: $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$; $k \in \mathbb{Z}$.

Szélsőértékek:

Max. hely: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Max. érték: 1. Min. hely: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Min. érték: -1.

Páros: Nem. Páratlan: Igen. Periódus: $p = 2\pi$.



39. feladatlap

39.1. a) $-\sqrt{3}$; b) -1; c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; e) -1; f) -1; g) $-\sqrt{3}$; h) $\sqrt{3}$.

39.2. a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\sqrt{3}$; d) 1.

39.3. a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; c) $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

39.4.

Értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

Értékkészlet: $\mathbb{R}.$

Zérushely: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Tengelypont: $y = 0.$

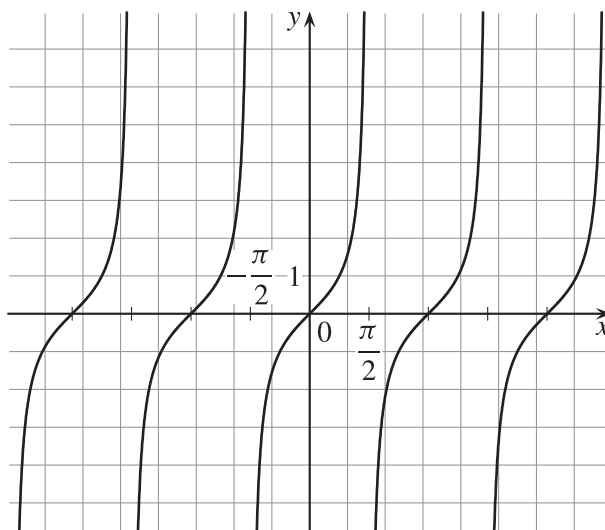
Növekedés: $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, k \in \mathbb{Z}.$

Csökkenés: $-.$

Szélsőértékek: $-.$

Páros: $-.$ Páratlan: Igen.

Periódus: $p = \pi.$

**39.5.**

Értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}.$

Értékkészlet: $\mathbb{R}.$

Zérushely: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Tengelypont: $-.$

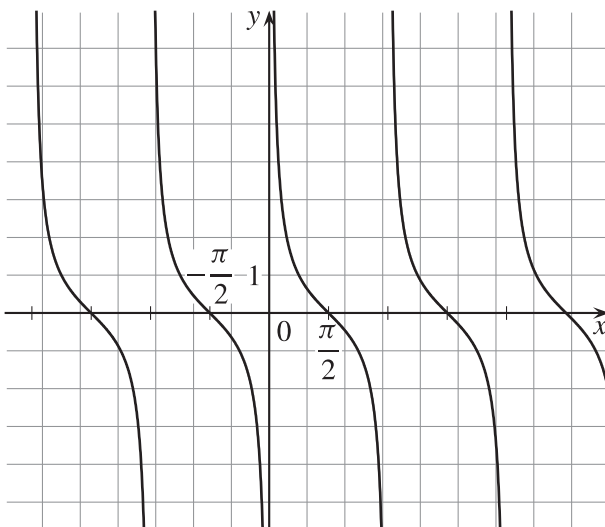
Növekedés: $-.$

Csökkenés: $]k\pi; \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}.$

Szélsőértékek: $-.$

Páros: $-.$ Páratlan: Igen.

Periódus: $p = \pi.$

**40. feladatlap**

40.1. a) $5! = 120$; b) Mivel az utolsó számjegy 3 , így $4! = 24$.

c) Az első két számjegy rögzített 86 , ekkor $3! = 6$. d) $86\,432 - 23\,468 = 62\,964$.

40.2. a) $6! = 720$. b) A leülési minta: F F F L L L. $3! \cdot 3! = 36$. c) $5! \cdot 2! = 240$. d) $4! \cdot 3! = 144$.

40.3. $\frac{14!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 454\,053\,600$.

40.4. $\frac{20!}{6! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 4!} = 9\,777\,287\,520$.

40.5. A páratlan számjegyek: $1, 3, 5, 7, 9$. a) $5^5 = 3125$. b) $5! = 120$. c) $5 \cdot 4 = 20$. d) $5^3 = 125$.

41. feladatlap

41.1. $3 \cdot 12 + 1 = 37$.

41.2. Mivel egy négyzetszám vagy osztható 3 -mal, vagy 3 -mal osztva 1 -et ad maradékul, elég 3 db.

41.3. $24 - 15 - 12 + 7 = 4$. 4 -en nem beszélnek sem angolul, sem németül.

41.4. Használjuk az egészrész $[x]$ jelölést!

$$a) 1000 - \left[\frac{1000}{2} \right] - \left[\frac{1000}{5} \right] + \left[\frac{1000}{2 \cdot 5} \right] = 1000 - 500 - 200 + 100 = 400;$$

$$b) 1000 - \left[\frac{1000}{3} \right] - \left[\frac{1000}{7} \right] + \left[\frac{1000}{3 \cdot 5} \right] = 1000 - 333 - 142 + 47 = 572;$$

$$c) 1000 - \left[\frac{1000}{2} \right] - \left[\frac{1000}{3} \right] - \left[\frac{1000}{5} \right] + \left[\frac{1000}{6} \right] + \left[\frac{1000}{10} \right] + \left[\frac{1000}{15} \right] - \left[\frac{1000}{30} \right] = 1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33 = 266;$$

$$d) 1000 - \left[\frac{1000}{3} \right] - \left[\frac{1000}{7} \right] - \left[\frac{1000}{11} \right] + \left[\frac{1000}{21} \right] + \left[\frac{1000}{33} \right] + \left[\frac{1000}{77} \right] - \left[\frac{1000}{231} \right] = 1000 - 333 - 142 - 90 + 47 + 30 + 12 - 4 = 520.$$

41.5. *a)* $2 \cdot 366 = 732$ diák esetén még 2-en, de 750 esetén biztosan van 3. *b)* $62 \cdot 12 = 744$, tehát 63 diák. *c)* $107 \cdot 7 = 749$, tehát 108 diák.

41.6. $140 - 46 - 64 - 37 + 13 + 9 + 5 - 3 = 17$.

42. feladatlap

42.1. ff, fi, if, ii.

42.2. *a)* $2^3 = 8$; *b)* $\frac{1}{8}$; *c)* $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; *d)* $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

42.3. *a)* 6; *b)* $6 \cdot 6 = 36$; *c)* $6^3 = 216$.

42.4. *a)* Kedvező esetek: 2, 3, 5. Kedvező esetek száma: 3. Összes eset: 6. $P(\text{prím}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

b) Kedvező esetek: 3, 4, 5, 6. Kedvező esetek száma: 4. Összes eset: 6. $P(\text{legalább } 3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

c) Lehetetlen esemény. $P(6\text{-nál nagyobb}) = 0$.

42.5. *a)* Kedvező esetek száma: 8. Összes eset: 32. $P(\text{piros}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. *b)* Kedvező esetek száma: 4.

Összes eset: 32. $P(\text{ász}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. *c)* Kedvező esetek száma: 16. Összes eset: 32.

$P(\text{figura}) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$. *d)* Kedvező esetek száma: 24. Összes eset: 32. $P(\text{nem zöld}) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$.

42.6. *a)* $P(5\text{-nél kevesebb az összeg}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(10\text{-nél több az összeg}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Az összeg

5-nél kevesebb a valószínűbb. A különbség $\frac{1}{12}$.

b) $P(\text{az összeg prím}) = \frac{15}{36}$, $P(\text{az összeg páros}) = \frac{18}{36}$. A páros összegű dobása a valószínűbb.

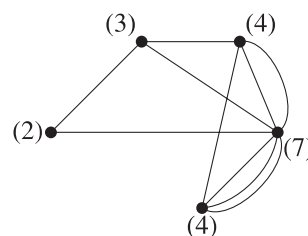
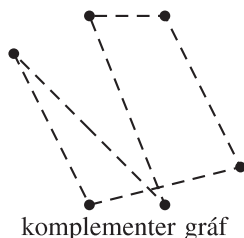
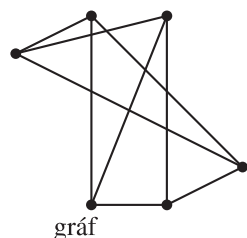
A különbség: $\frac{1}{12}$.

42.7. Mindhárom feladatban az összes eset 12. *a)* $\frac{5}{12}$; *b)* $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; *c)* $\frac{7}{12}$.

43. feladatlap

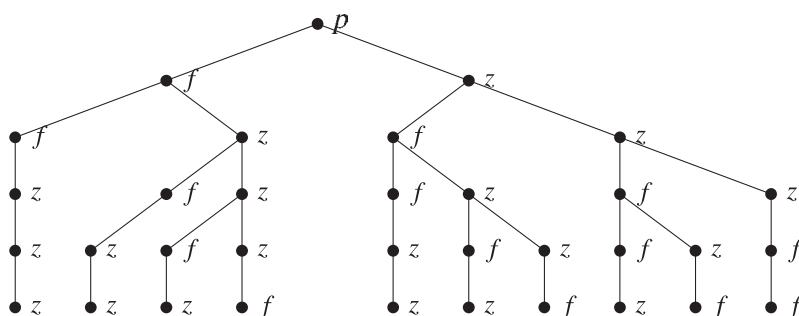
43.1. A feladatnak több megoldása is lehetséges. Például az egyik:

43.2. Egy lehetséges megoldás:



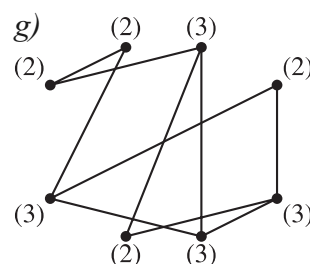
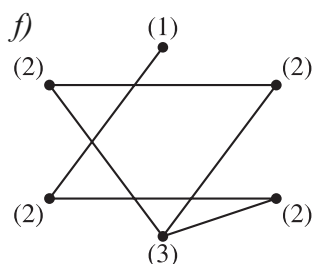
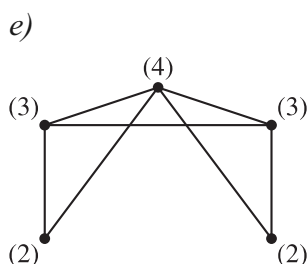
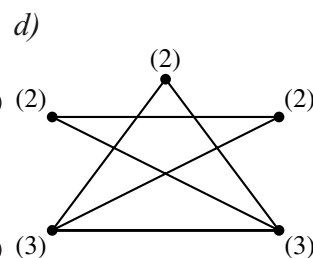
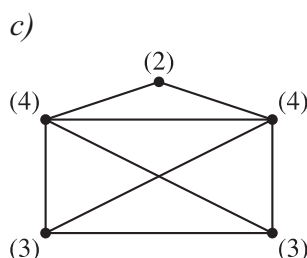
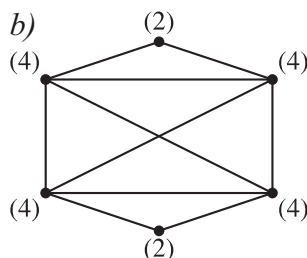
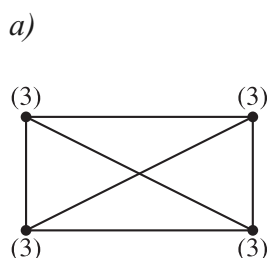
43.3. A csúcsok fokszáma 3. Összfokszámot megkapjuk, ha a csúcsok számát (8) megszorozzuk a csúcsok fokszámával: $8 \cdot 3 = 24$. Teljes gráf esetén $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ él lenne, 12 éle van a kockának, tehát $28 - 12 = 16$ él hiányzik.

43.4. A kihúzási lehetőségek gráfja. (p : piros; z : zöld; f : fehér.) Az ábráról kiderül, hogy 10 kihúzási sorrend lehetséges.



43.5. Nem, mert $15 \cdot 5 = 75$, vagyis páratlan lenne az összfokszám.

43.6. A feladatot csak azokon a gráfokon lehet végrehajtani, amelyek összes csúcspontja páros fokszámú, vagy pontosan két páratlan fokszámú csúcsa van. Megrajzolható gráfok: b, c, d, e, f .



43.7. Mivel mindenki kezét fog mindenkivel, a kézfogások gráfja teljes gráf. A teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2} = 120$. Az $n^2 - n - 240 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai $n_1 = 16$ és $n_2 = -15$. Negatív nem lehet a megoldás, tehát a társaság 16 tagú volt.

43.8. a) igaz; b) hamis; c) hamis; d) igaz; e) igaz; f) hamis.