

Matematika 10

Matematika



Matematika



A gyökvonás



**Másodfokú egyenletek,
egyenlőtlenségek,
egyenletrendszerek**



**Hasonlóság és
alkalmazásai**



Trigonometria



**Gondolkodási
módszerek,
kombinatorika,
valószínűesszámítás**

Út a tudáshoz

Matematika 10



- A könyvet írta:
Ábrahám Gábor középiskolai tanár
Dr. Kosztolányiné Nagy Erzsébet középiskolai tanár
Tóth Julianna középiskolai tanár
- Lektorálta:
Tarcsay Tamás középiskolai tanár
Ványa István középiskolai tanár
- OH által kirendelt szakértő:
Hajba Tamás
Herczegné Kaszás Judit
- Felelős szerkesztő:
Dr. Mező Tamás
Szabóné Mihály Hajnalka
- Illusztrációk:
Falcione Sarolta
- Képek:
Nemzetközi képügynökségek
- Borítóterv és layout:
Daróczi Sándor
- Ábrák:
Kelcz Roland
- Tördelés:
Szűcs József
- Korrektúra:
Nagy Sára
Nemcsók Adrienn

Második kiadás, 2012

Kiadói kód: MX-265

Tankönyvi engedélyszám: KHF/999 – 6/2010 (2010. 02. 01. – 2015. 08. 31.)

Kerettanterv: 17/2004 (V.20.) OM rend.

Tömeg: 453 g

Terjedelem: 256 oldal (22,88 ív)

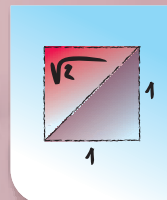
Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítást, a mű bővített, illetve rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli engedélye nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmilyen formában nem sokszorosítható.

ISBN 978 963 261 137 2

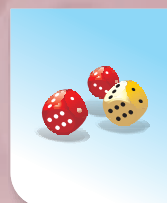
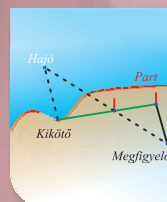
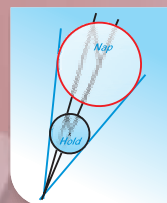
© Maxim Könyvkiadó



Matematika



$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$





Miért tanuljuk tovább? Hogyan szeressük meg még jobban?

A kiadó második – tizedikesekhez szóló – középiskolás matematika-tankönyvét tartja kezében a tisztelt olvasó. Az első kötetben – a kilencedikesben – megpróbáltuk megmutatni, hogy megérthető, megszerethető a matematika. Szívesen alkalmaztuk ehhez a szöveges – sokszor gyakorlati – problémáknak a matematika nyelvére fordítását, illetve visszafelé, a matematika elvont nyelvén megfogalmazott dolgok mindennapi értelmezését. Ezek és a többi matematikai játék a gondolkodási képességek általános fejlődéséhez vezetnek, illetve ennek a szövegértés, értelmes olvasás tanulását segítő funkciójáról sem feledkezhetünk meg. A matematikában és a többi reáltudományban minden szónak fontos és egyedi jelentése van, tehát folyamatosan érteni, értelmezni kell a szöveget. Ez nehéznek tűnhet, de hasznossága vitathatatlan.

Az első kötetben edződött fiatalok ebben a könyvben újabb szellemi táplálékhoz jutnak. Reményeink szerint sokan már várják ezt a kihívást. A középiskolai matematika-tananyag szerkezete olyan, hogy minden évben visszatérően előfordulnak a már ismerős témakörök. Mégsem unalmas ismétlésről van szó, hanem a tartalmak igen lényeges gazdagításáról, mélyítéséről. Az újabb, magasabb szinten való tájékozódást segítik a már megszerzett ismeretek. Azonban lehetnek olyanok, akik örülve annak, hogy túljutottak egy-egy anyagrészen, igyekeztek rögtön el is felejtetni azt. Számukra rossz hírünk van. Gyorsan fel kell eleveníteni a régi ismereteket, hogy az újakat rájuk építhessük! Aki könnyen akarja megérteni, megtanulni az új dolgokat, annak érdemes emlékeznie a lényeges „régiségekre”. Természetesen ebben a kötetben is egymásra épülő, egymás jótékony hatását fokozatosan erősítő, kidolgozott feladatokon keresztül juthat el az olvasó a tudás, az elvonatkoztatás, az általánosítás, illetve az alkalmazás öröméhez. Ezt a lélekemelő örömforrást kínáljuk, és reméljük, hogy a gyakori alkalmazás során elmélyíteni is sikerül a megszerzett tudást. Kívánjuk, hogy sok sikerrel tanuljanak könyvünkben!

A Szerzők

Hogyan használjuk?

Jelmagyarázat

Tankönyvünk a kétszintű érettségi követelményrendszer alapján készült. A leckék felépítése, szerkezete egyszerű, jól áttekinthető. Igyekeztünk az új fogalmakat, tételeket, ismereteket minden esetben egy-egy matematikai, illetve hétköznapi életből vett problémán keresztül bevezetni, ezért a leckék többsége feladatokkal kezdődik.



1. példa A tananyagban szereplő kidolgozott **középszintű** példákat zöld háttérű keretbe foglaltuk. Ha a középszintű példának az egyik része emelt szintű, azt kék háttérrel jelöltük.



1. példa A tananyagban szereplő kidolgozott **emelt szintű** példákat jelölő ikont és a példa sorszámát kék színnel jelöltük a zöld háttérű keretben.



Közvetlenül a kidolgozott példák alatt szerepel azok részletes megoldása, melynek során **félkövér kiemelésekkel** hívtuk fel a figyelmet az újonnan megjelenő **fogalmakra, megállapításokra, módszerekre**.



Definíció Az új **középszintű** fogalmakat Definíció címszó alatt sárga háttérszínű keretbe foglaltuk. Itt írtuk le a fogalmakkal kapcsolatban használt matematikai jelöléseket is. Ezeknek a pontos ismerete mindkét szintű érettségi esetén alapkövetelmény.



Definíció Az új **emelt szintű** definíciókat jelölő ikont és a Definíció szót kék színnel jelöltük a sárga háttérszínű keretben



Tétel A **középszintű** tételeket, azonosságokat, tulajdonságokat narancssárga háttérszínű keretben foglaltuk meg. A tételek ismerete mind közép-, mind emelt szintű érettségi esetén elengedhetetlenül fontos.



Tétel Az **emelt szintű** tételeket jelölő ikont és a Tétel szót kék színnel jelöltük a narancssárga háttérszínű keretben.

A tételek többsége után azok bizonyítása is megtalálható. Ezeknek az ismerete minden esetben emelt szintű követelmény. Minden emelt szintű anyagrészre, illetve az „Oldjuk meg!” emelt szintű feladataira is világoskék háttérrel hívjuk fel a figyelmet.



A matematikai műveltség fontos részét képezi a matematika-történet ismerete, emellett ez a terület sok érdekességet is rejt magában. Ezért egy-egy anyagrészhez kapcsolódóan matematikatörténeti érdekességek jelennek meg krémszínű háttérrel.



Vegyük észre! Ezek a részek bizonyos fogalmak használatára hívják fel a figyelmet, miközben hasznos tanácsokat nyújtanak a feladatok megoldásához, az összefüggések megértéséhez. A fontos észrevételeket szürke háttérszínű keretben foglaltuk meg.

A matematikai ismeretek elmélyítésének leghatékonyabb módja az önálló problémamegoldás. Erre is nyílik lehetőség, hiszen minden lecke végén nagy mennyiségű feladatanyagot találhat az olvasó „Oldjuk meg!” címszó alatt. Egy részük megoldásához az internet használata sok segítséget nyújthat. A többségük viszont olyan, mely a számolási készséget, a kommunikációs, a tudásszerző és a gondolkodási képességet fejleszti. Ezek végeredménye megtalálható a kiadó www.olvas.hu honlapján.

A tankönyvben szereplő szakkifejezések jegyzéke a könnyebb áttekinthetőség, kereshetőség kedvéért a kötet végén a Függelékben található meg, amelyben csillaggal* jelöltük az érettségi követelményrendszerben is szereplő tartalmakat, és *dőlt* betűvel az új szakkifejezéseket. Újnak tekintjük azokat a szakkifejezéseket, amelyek az általános iskolában a tanítási gyakorlatban nem fordulnak elő, vagy megjelennek ugyan, de a középiskolai matematikai oktatásban mélyebb értelmet nyernek.





I. A GYÖKVNÁS

11

1. A gyökfogalom kiterjesztése	12
1.1. Bevezetés	12
1.2. A négyzetgyök definíciója	13
1.3. A négyzetgyökvonás azonosságai	14
1.3.1. A szorzat négyzetgyöke	14
1.3.2. A hányados négyzetgyöke	15
1.3.3. A hatvány négyzetgyöke	16



2. A négyzetgyök alkalmazásai	19
2.1. Kihozatal a négyzetgyökjel alól	19
2.2. Bevitel a négyzetgyökjel alá	21
2.3. A tört nevezőjének gyöktelenítése	22
3. A számok n -edik gyöke	25
3.1. Az n -edik gyök definíciója	25
3.2. Az n -edik gyökvonás azonosságai	26



4. Az n -edik gyökfüggvény, az n -edik gyök alkalmazása	31
4.1. Az n -edik gyökfüggvény	31
4.2. Gyökjel alóli kihozatal	33
4.3. Bevitel a gyökjel alá	34
4.4. A tört nevezőjének gyöktelenítése	34
4.5. Írjuk fel egy gyökjellel!	35

II. MÁSODFOKÚ EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK, EGYENLETRENDSZEREK

37

1. Másodfokú függvény, másodfokú egyenlet	38
---	----



2. A másodfokú egyenlet megoldóképlete	43
2.1. Bevezetés	43
2.2. A másodfokú egyenlet megoldóképlete	45
2.3. Kidolgozott példák	47
3. Másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatok	50



4. A gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés	56
---	----

4.1. A gyöktényezős alak 56

4.2. Összefüggés a gyökök és
együtthatók között 58

5. Másodfokúra visszavezethető
magasabb fokú egyenletek 62

6. Másodfokú egyenlőtlenségek 67

7. Négyzetgyökös egyenletek,
egyenlőtlenségek 73

8. Számított középértékek 80

8.1. Számítási és mértani közép 81

8.2. Négyzetes és harmonikus
közép (Kiegészítő anyag) 84



9. Szélsőérték-feladatok 87

10. Másodfokú egyenletrendszerek 92

III. HASONLÓSÁG ÉS ALKALMAZÁSAI 97

1. Vizsgálódás a térben 98

2. Középpontos hasonlóság 104

3. Hasonlósági transzformáció 109

4. A hasonlóság alkalmazásai 113

5. Hasonló síkidomok kerülete és
területe, hasonló testek felszíne
és térfogata 119



6. Egyéb nem egybevágósági transz-
formációk (Kiegészítő anyag) 126

7. Kerületi és középponti szögek
(Kiegészítő anyag) 133



8. Húrnégyszögek, alkalmazások
(Kiegészítő anyag) 140

IV. TRIGONOMETRIA 145

1. Távolságok meghatározása ará-
nyokkal 146



2. A hegyesszögek szögfüggvényei,
összefüggések a hegyesszögek
szögfüggvényei között 154

3. Összefüggések egy hegyesszög
szögfüggvényei között 164

3.1. Összefüggés egy tetszőleges
hegyesszög szinusza és koszi-
nusza között 164

3.2. Összefüggés egy hegyesszög
tangense, kotangense, szinu-
sza és koszinusza között 166



Tartalomjegyzék

- 4. Síkgeometriai számítások 171
- 5. Térgeometriai számítások 177
- 6. Vektorok a koordinátasíkon 180
- 7. A szinusz és a koszinusz szögfüggvények általános értelmezése 188
- 8. A tangens és a kotangens szögfüggvények általános értelmezése 195
- 9. A szinusz- és a koszinuszfüggvény grafikonja, jellemzése 199



- 10. A tangens- és a kotangensfüggvény grafikonja, tulajdonságai 210

V. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK, KOMBINATORIKA, VALÓSZÍNŰESZÁMÍTÁS 217

- 1. Skatulyaelv, tétel és megfordítása, egyszerű gráfelméleti fogalmak 218



- 2. Bevezető kombinatorikafeladatok, szorzási és összeadási szabály 226



- 3. Variációk 230
 - 3.1. Ismétlés nélküli variációk 231
 - 3.2. Ismétléses variációk 233
- 4. Permutációk, kombinációk 235
 - 4.1. Permutációk 235
 - 4.1.1. Ismétlés nélküli permutációk 235
 - 4.1.2. Ismétléses permutációk 237
 - 4.2. Kombinációk 239
- 5. Vegyes feladatok a kombinatorika köréből 242
- 6. Valószínűségi kísérletek, a valószínűség szemléletes fogalma 246

VI. FÜGGELÉK 254

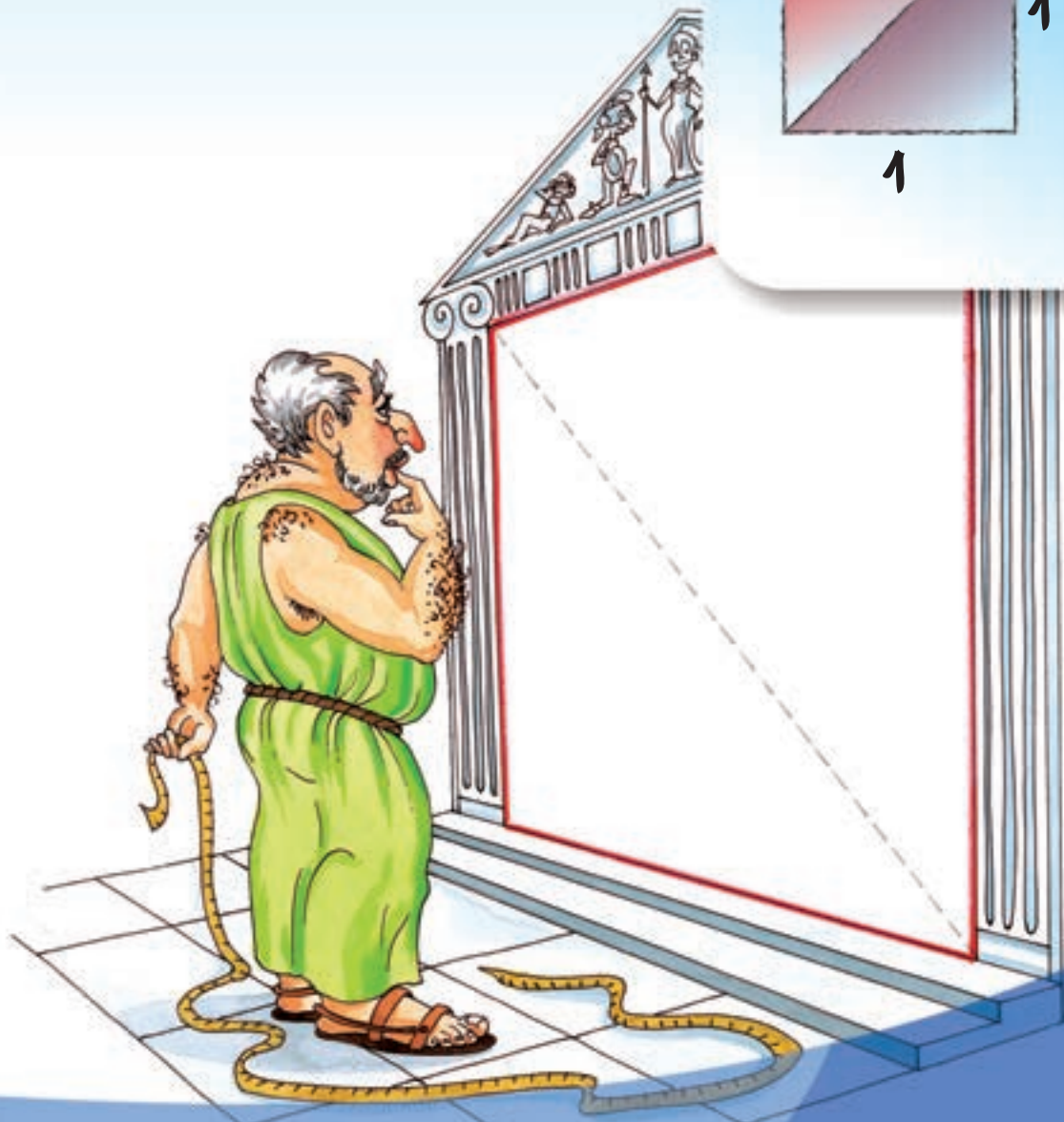
A
B
C

Szakkifejezések listája 254



I. fejezet

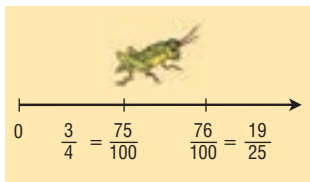
A gyökvonás



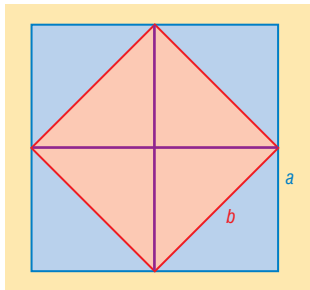
Inkább számítsuk ki!

1. A gyökfogalom kiterjesztése

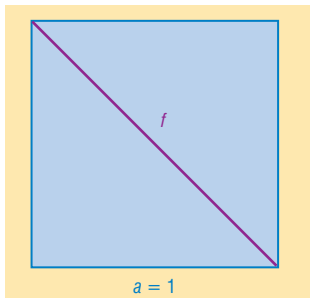
1.1. Bevezetés



1.1. ábra Ugrás a nagyobbra!



1.2. ábra $b = 1$



1.3. ábra Használjuk a Pitagorasz-tételt!



1. példa

Melyik a nagyobb: $\frac{19}{25}$ vagy $\frac{3}{4}$?

Megoldás:

A kérdésre könnyen válaszolhatunk, ha a törtet közös nevezőre hozzuk. A közös nevező a két nevező legkisebb közös többszöröse, ami jelen esetben 100. Így: $\frac{19}{25} = \frac{76}{100}$ és $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$. Mivel: $75 < 76$, ezért

$$\frac{3}{4} < \frac{19}{25}.$$



Az 1. példában megadott racionális számokat könnyen össze tudtuk hasonlítani, mert találtunk egy olyan „egységet”, a megadott példában ez az $\frac{1}{100}$, amelynek mindkét szám egész számszorosa. Ha két szakasz nagysága ilyen viszonyban állt egymással, akkor az ókori görögök a két szakaszt összemérhetőnek nevezték. Ha két szakasz nagysága racionális szám, akkor a két szakasz összemérhető, mert „egységnek” választható az a tört, amelynek a számlálója 1, a nevezője pedig a két tört nevezőjének a legkisebb közös többszöröse.



2. példa

Adott egy egység oldalú négyzet. Adjunk meg olyan négyzetet, amelynek a területe az eredeti négyzet területének a kétszerese!

Megoldás:

Az 1.2. ábra mutatja, hogy a keresett négyzet oldala az eredeti négyzet átlója.



3. példa

Összemérhető-e az eredeti négyzet és a kétszer akora területű négyzet oldala?

Megoldás:

Az előző példa alapján a kérdést úgy is megfogalmazhatjuk, hogy összemérhető-e az egység oldalú négyzet oldala és átlója. Jelöljük a négyzet oldalát a -val, az átlóját f -fel, ahol $a = 1$!

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Tegyük fel, hogy összemérhetők! Ez azt jelenti, hogy létezik olyan pozitív e szám, amelynek a is, és f is többszöröse, azaz $a = m \cdot e$ és $f = n \cdot e$, ahol m és n pozitív egész számok. A Pitagorasz-tétel értelmében fennáll, hogy $a^2 + a^2 = f^2$, azaz $2a^2 = f^2$. Ebbe behelyettesítve a -t és f -et kapjuk, hogy $2e^2m^2 = e^2n^2$. Az egyenlet mindkét oldalát elosztva a nullától különböző e^2 -tel kapjuk, hogy $2m^2 = n^2$. Mivel a jobb oldalon egy 1-nél nagyobb négyzetszám szerepel, ezért annak kanonikus alakjában minden prímszám kitevője páros, így a 2-é is. A bal oldalon egy négyzetszám kétszerese szerepel, ezért kanonikus alakjában a 2 kitevője páratlan. Ez ellentmondás, tehát a négyzet oldala és átlója nem összemérhető.



Ezzel beláttuk, hogy az egység oldalú négyzet átlója nem racionális szám, ami azt is jelenti, hogy nem fejezhető ki egész számok segítségével és a négy alapművelet véges sok alkalmazásával. Ezért szükségünk van egy új jelölésre, amellyel le tudunk írni például egy olyan számot, melynek négyzete 2. Az erre használt $\sqrt{\quad}$ (**négyzetgyök**) jel eredete elég bizonytalan, de legtöbbször, beleértve L. Eulert is, úgy gondolják, hogy a latin radix (gyökér) szó kezdőbetűjének, az r -nek az elnyújtásából származik. Így az egység oldalú négyzet átlójának hossza $\sqrt{2}$ (olv.: négyzetgyök kettő).



1.4. ábra Összemérhetőek ezek?

1.2. A négyzetgyök definíciója



Definíció Egy a nemnegatív valós szám **négyzetgyöke** az a nemnegatív valós szám, amelynek négyzete a .

Jelölés: $\sqrt{a}$ (olv.: négyzetgyök a).

Példa:

$$\sqrt{9} = 3, \text{ mert } 3 > 0 \text{ és } 3^2 = 9.$$

$$\sqrt{144} = 12, \text{ mert } 12 > 0 \text{ és } 12^2 = 144.$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ mert } |a| \geq 0 \text{ és } |a|^2 = a^2.$$

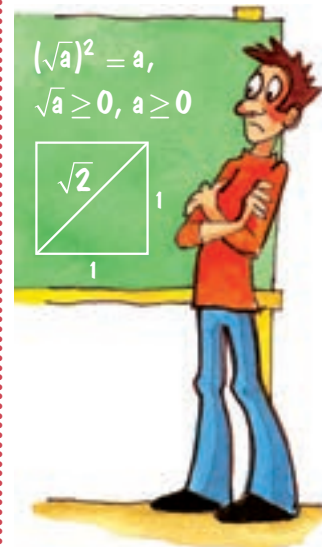


4. példa Adjuk meg egy racionális számként az alábbi kifejezések pontos értékét!

a) $\sqrt{25 \cdot 36}$ b) $\sqrt{\frac{196}{81}}$ c) $\sqrt{4^5}$

Megoldás:

a) Alakítsuk át a négyzetgyök alatti számokat a következő módon!



1.5. ábra Természetesnek tűnő definíció

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ mert } |a| \geq 0 \text{ és } |a|^2 = a^2.$$

1.6. ábra Fontos összefüggés

$$\sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{5^2 \cdot 6^2} = \sqrt{(5 \cdot 6)^2} = 5 \cdot 6 = 30$$

Azonos kitevőjű hatványok szorzása.

A négyzetgyök definíciója.

b) Alakítsuk át a négyzetgyök alatti számokat a tavaly tanultak felhasználásával!

$$\sqrt{\frac{196}{81}} = \sqrt{\frac{14^2}{9^2}} = \sqrt{\left(\frac{14}{9}\right)^2} = \frac{14}{9}$$

Azonos kitevőjű hatványok.

A négyzetgyök definíciója.

c) Az előzőekhez hasonlóan az alábbi módon alakíthatjuk át a kifejezést.

$$\sqrt{4^5} = \sqrt{(2^2)^5} = \sqrt{(2^5)^2} = 2^5 = 32$$



Vegyük észre, hogy az első példában az alábbi összefüggéseket kaptuk!

$$\sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36},$$

$$\sqrt{\frac{196}{81}} = \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{81}},$$

$$\sqrt{4^5} = (\sqrt{4})^5.$$

Ezzel három nagyon fontos összefüggésre hívtuk fel a figyelmet, melyek a **négyzetgyökvonás azonosságai**.

1.3. A négyzetgyökvonás azonosságai

1.3.1. A szorzat négyzetgyöke



Tétel

Bármely két nemnegatív szám szorzatának a négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával, azaz $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, ahol $a \geq 0$ és $b \geq 0$.

Hány pár cipőt kell vásárolnom?



1.7. ábra A lábák száma $\sqrt{10^4}$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Bizonyítás:

Az állítást a négyzetgyök definíciójának és a szorzat hatványozására vonatkozó azonosságnak a felhasználásával bizonyítjuk. A négyzetgyök definíciójából következően $\sqrt{a} \geq 0$ és $\sqrt{b} \geq 0$, így a szorzatuk is nemnegatív. Még azt kell belátnunk, hogy a jobb oldali kifejezés négyzete $a \cdot b$. Ez igaz, ugyanis $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b$.

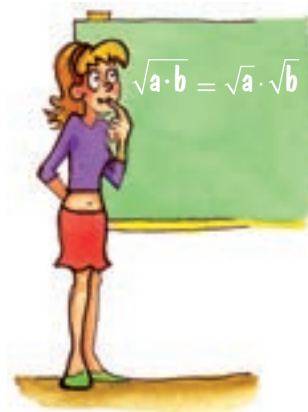
Szorzat hatványozása.

A négyzetgyök definíciója.

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Megjegyzés:

Az előbbi tétel másik megfogalmazása a következő.



1.8. ábra Igaz, ha $a \geq 0$ és $b \geq 0$



Tétel

Két négyzetgyökös kifejezés szorzatát úgy is kiszámolhatjuk, hogy a négyzetgyök alatti kifejezések szorzatából négyzetgyököt vonunk.

1.3.2. A hányados négyzetgyöke



Tétel

Bármely hányados négyzetgyöke egyenlő a számláló és a nevező négyzetgyökének a hányadosával, ha a számláló nemnegatív, a nevező pedig pozitív szám. Azaz $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ahol $a \geq 0$ és $b > 0$.

Bizonyítás:

Az állítást a négyzetgyök definíciójának és a hányados hatványozására vonatkozó azonosságnak a felhasználásával bizonyítjuk. A négyzetgyök definíciójából következően $\sqrt{a} \geq 0$ és $\sqrt{b} > 0$, így a hányadosuk is nemnegatív. Még azt kell belátnunk, hogy a jobb oldali kifejezés

négyzete $\frac{a}{b}$. Ez igaz, ugyanis $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$.

Hányados hatványozása.

A négyzetgyök definíciója.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.



1.9. ábra Látszólag más, mégis ugyanaz

Megjegyzés:

Az előző tétel másik megfogalmazása a következő.



Tétel

Két négyzetgyökös kifejezés hányadosa egyenlő a négyzetgyök alatti kifejezések hányadosának négyzetgyökével.

1.3.3. A hatvány négyzetgyöke



1.10. ábra $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = (\sqrt{2})^2$



1.11. ábra Össze lehet ezeket hasonlítani?



Tétel

A négyzetgyökvonás és a hatványozás sorrendje felcserélhető, azaz $\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$, ahol $a \geq 0$ és $k \in \mathbb{Z}$. (Ha k nem pozitív, akkor $a \neq 0$.)

Bizonyítás:

A bizonyítás az előző két tétel bizonyításához hasonlóan történik. Mivel $a \geq 0$, ezért a $(\sqrt{a})^k \geq 0$ is teljesül. Másrészt $\left((\sqrt{a})^k\right)^2 = (\sqrt{a})^{2k} = \left((\sqrt{a})^2\right)^k = a^k$.

A négyzetgyök definíciója.

Hatvány hatványozása.

Természetesen figyelembe kell venni azt is, hogy ha k nem pozitív, akkor $a \neq 0$.

Ezt kellett bizonyítani.



5. példa

Melyik nagyobb: $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$ vagy $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$?

Megoldás:

A gyökvonás első azonossága alapján: $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6$.

A gyökvonás második azonossága alapján: $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{147}{3}} = \sqrt{49} = 7$.

Tehát a második szám nagyobb.



6. példa

Adjuk meg egyetlen pozitív egész számként!

a) $(\sqrt{13} - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{13} + \sqrt{7})$ b) $(\sqrt{10} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{15} + \sqrt{2})^2$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Megoldás:

a) Alkalmazzuk az $(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$, azaz a két szám különbségének és összegének szorzatára vonatkozó azonosságot!

$$(\sqrt{13} - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{13} + \sqrt{7}) = (\sqrt{13})^2 - (\sqrt{7})^2 = 13 - 7 = 6$$

b) Alkalmazzuk a két tag összegének, ill. különbségének a négyzetére vonatkozó azonosságot!

$$\begin{aligned} & (\sqrt{10} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{15} + \sqrt{2})^2 = \\ & = (\sqrt{10})^2 - 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{15})^2 + 2\sqrt{15} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ & = 10 - 2\sqrt{30} + 3 + 15 + 2\sqrt{30} + 2 = 30 \end{aligned}$$



7. példa Adjuk meg egyetlen pozitív egész számként!

a) $\sqrt{\sqrt{51} - \sqrt{26}} \cdot \sqrt{\sqrt{51} + \sqrt{26}}$

b) $(\sqrt{7 - \sqrt{13}} + \sqrt{7 + \sqrt{13}})^2$

c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

Megoldás:

a) Alkalmazzuk a gyökvonás első azonosságát és az $(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$ azonosságot!

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sqrt{51} - \sqrt{26}} \cdot \sqrt{\sqrt{51} + \sqrt{26}} = \\ & = \sqrt{(\sqrt{51} - \sqrt{26}) \cdot (\sqrt{51} + \sqrt{26})} = \sqrt{(\sqrt{51})^2 - (\sqrt{26})^2} = \\ & = \sqrt{51 - 26} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

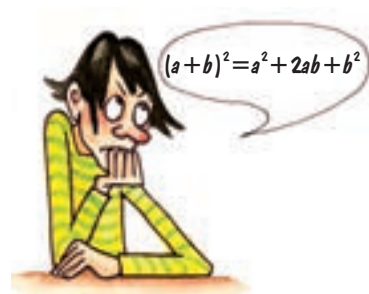
b) Végezzük el a négyzetre emelést, és alkalmazzuk a négyzetgyökvonás első azonosságát!

$$\begin{aligned} & (\sqrt{7 - \sqrt{13}} + \sqrt{7 + \sqrt{13}})^2 = \\ & = (\sqrt{7 - \sqrt{13}})^2 + 2\sqrt{7 - \sqrt{13}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{13}} + (\sqrt{7 + \sqrt{13}})^2 = \\ & = 14 + 2\sqrt{(7 - \sqrt{13}) \cdot (7 + \sqrt{13})} = 14 + 2\sqrt{49 - 13} = 14 + 2\sqrt{36} = \\ & = 14 + 12 = 26 \end{aligned}$$

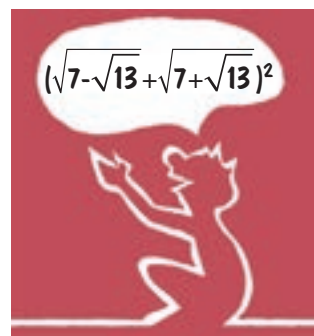
c)

1. módszer:

Mivel a kifejezés első tagja nagyobb, mint a második, ezért az értéke pozitív. Így ha a négyzetéből négyzetgyököt vonunk, megkapjuk a kifejezés értékét. Végezzük el a négyzetre emelést!



1.12. ábra Már megint a nevezetes szorzatok?



1.13. ábra Alkalmazzuk a négyzetgyökvonás azonosságait!



1.14. ábra Vizsgáljuk meg a négyzetgyökjel alatti kifejezéseket!



1.15. ábra Vegyük észre a teljes négyzetet!

$$\begin{aligned} (\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}})^2 &= 4+2\sqrt{3} - 2\sqrt{4+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4-2\sqrt{3}} + 4-2\sqrt{3} = \\ &= 8 - 2\sqrt{(4-2\sqrt{3}) \cdot (4+2\sqrt{3})} = 8 - 2\sqrt{16-12} = 8 - 2\sqrt{4} = 8 - 4 = 4. \end{aligned}$$

Így: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2.$

2. módszer:

Vizsgáljuk meg a két négyzetgyök alatti kifejezést! Vegyük észre, hogy

$$4+2\sqrt{3} = 3+1+2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 1 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2! \text{ Ehhez hasonlóan:}$$

$$4-2\sqrt{3} = 3+1-2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 1 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2.$$

Így:

$$\begin{aligned} \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} &= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \\ &= |\sqrt{3}+1| - |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}+1 - \sqrt{3}+1 = 2. \end{aligned}$$



Oldjuk meg!

1. Végezzük el az alábbi műveleteket számológép használata nélkül!

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$ b) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$ c) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$

e) $\sqrt{9^3}$ f) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{27} - \sqrt{12})$ g) $\sqrt{14} \cdot (\sqrt{126} + \sqrt{56})$

h) $\frac{\sqrt{180} + \sqrt{45}}{3\sqrt{5}}$ i) $\frac{\sqrt{7} \cdot (\sqrt{84} - \sqrt{525})}{\sqrt{3}}$

2. Adjuk meg egyetlen pozitív egész számként!

a) $(\sqrt{12} - \sqrt{10}) \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{10})$ b) $(5+2\sqrt{3}) \cdot (5-2\sqrt{3})$

c) $\sqrt{\sqrt{47} + \sqrt{22}} \cdot \sqrt{\sqrt{47} - \sqrt{22}}$ d) $\sqrt{13 - \sqrt{48}} \cdot \sqrt{13 + \sqrt{48}}$

e) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$ f) $(6 + 2\sqrt{5})^2$ g) $(\sqrt{15 - \sqrt{200}} + \sqrt{15 + \sqrt{200}})^2$ h) $(\sqrt{14 + \sqrt{27}} - \sqrt{14 - \sqrt{27}})^2$

i) $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$ j) $\sqrt{19 + 6\sqrt{10}} - \sqrt{19 - 6\sqrt{10}}$

3. Melyik nagyobb:

a) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ vagy $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}};$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ vagy $\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{2} - 4;$

c) $\frac{5 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} : \frac{\sqrt{3} - 1}{5 + \sqrt{2}}$ vagy $6 \frac{(\sqrt{6} - 2)^2}{5 - 2\sqrt{6}}?$



1.16. ábra Nincs szükség számológépre, ha jól alkalmazzuk a négyzetgyökvonás azonosságait!

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

4. Bizonyítsuk be, hogy a

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{11}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\sqrt{21}$ e) $\sqrt{a}$, ahol $a \in \mathbb{Z}^+$ és a nem négyzetszám, irracionális!

5. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi számok irracionálisak!

a) $\sqrt{5} - 1$ b) $\sqrt{6} + 7$ c) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

2. A négyzetgyök alkalmazásai

2.1. Kihozatal a négyzetgyökjel alól



1. példa Adjuk meg egy racionális számként!

$$\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$$

Megoldás:

Vizsgáljuk meg a négyzetgyökjel alatti számokat! Írjuk fel azok kanonikus alakját!

$$20 = 2^2 \cdot 5, \quad 45 = 3^2 \cdot 5, \quad 125 = 5^3$$



Vegyük észre, hogy mindhárom szám felírható egy négyzet-szám ötszöröseként!

Felhasználva a szorzat négyzetgyökére vonatkozó azonosságot, a következőképpen alakíthatjuk át az egyes tagokat:

$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt{5}, \quad \sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3 \cdot \sqrt{5},$$

$$\sqrt{125} = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \cdot 5} = 5 \cdot \sqrt{5}.$$

Így:

$$\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125} = 2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt{5} - 5 \cdot \sqrt{5} = 0.$$



Vegyük észre, hogy mindhárom esetben a négyzetgyökjel alatt álló szám legnagyobb négyzetszám osztóját kerestük meg! Ehhez nagy segítséget nyújt a pozitív egész számok kanonikus alakjának használata.

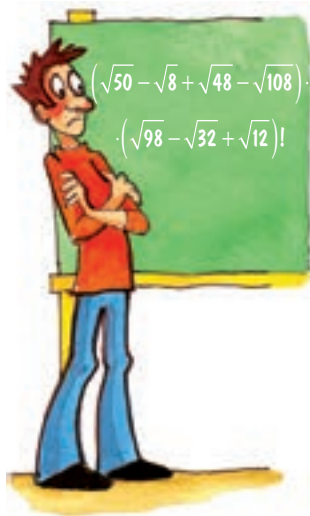
Az előző feladatban alkalmazott átalakítást nevezzük **négyzetgyökjel alóli kihozatalnak**. Nézzünk erre további példákat!



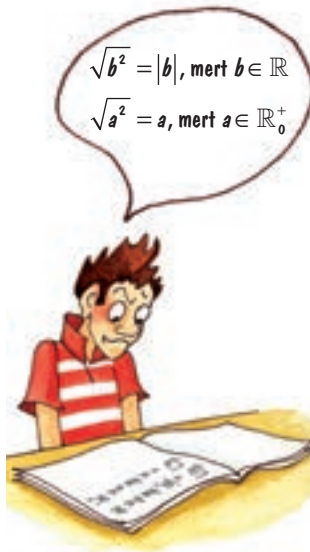
2.1. ábra $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$



2.2. ábra A kanonikus alak a számok prímtényezőzős szorzataként áll elő



2.3. ábra Ennek az eredménye lehet racionális?



2.4. ábra Minden részletre oda kell figyelni!

2. példa Adjuk meg egy racionális számként!

$$(\sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{48} - \sqrt{108}) \cdot (\sqrt{98} - \sqrt{32} + \sqrt{12})$$

Megoldás:

Keressük meg a négyzetgyökjel alatti számok legnagyobb négyzetszám osztóját! Írjuk fel azok kanonikus alakját!

$$50 = 5^2 \cdot 2, \quad 8 = 2^3 = 2^2 \cdot 2, \quad 48 = 2^4 \cdot 3 = (2^2)^2 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3,$$

$$108 = 2^2 \cdot 3^3 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 = (2 \cdot 3)^2 \cdot 3 = 6^2 \cdot 3, \quad 98 = 7^2 \cdot 2,$$

$$32 = 2^5 = 2^4 \cdot 2 = (2^2)^2 \cdot 2 = 4^2 \cdot 2, \quad 12 = 2^2 \cdot 3.$$

Ennek alapján:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{48} - \sqrt{108}) \cdot (\sqrt{98} - \sqrt{32} + \sqrt{12}) = \\ &= (\sqrt{5^2 \cdot 2} - \sqrt{2^2 \cdot 2} + \sqrt{4^2 \cdot 3} - \sqrt{6^2 \cdot 3}) \cdot (\sqrt{7^2 \cdot 2} - \sqrt{4^2 \cdot 2} + \sqrt{2^2 \cdot 3}) = \\ &= (5 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{3} - 6 \cdot \sqrt{3}) \cdot (7 \cdot \sqrt{2} - 4 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{3}) = \\ &= (3 \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \cdot (3 \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{3}) = (3 \cdot \sqrt{2})^2 - (2 \cdot \sqrt{3})^2 = 18 - 12 = 6. \end{aligned}$$

A szorzat négyzetgyökére vonatkozó azonosság.

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

3. példa Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezést, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza!

$$\sqrt{b^2 a} - \sqrt{9b^2 a} + \sqrt{16b^2 a^3}$$

Megoldás:

Adjuk meg a kifejezés értelmezési tartományát!

Mivel a négyzetgyökjel alatt csak nemnegatív szám állhat, így $a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ és b tetszőleges valós szám. Az átalakítások során vegyük figyelembe, hogy $\sqrt{b^2} = |b|$ és $\sqrt{a^2} = a$, mivel a nemnegatív. Így:

A szorzat négyzetgyökére vonatkozó azonosság.

$$\begin{aligned} \sqrt{b^2 a} - \sqrt{9b^2 a} + \sqrt{16b^2 a^3} &= \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{a} - \sqrt{9b^2} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{16b^2} \cdot \sqrt{a^3} = \\ &= |b| \sqrt{a} - 3|b| \sqrt{a} + 4|b| a \sqrt{a} = 4|b| a \sqrt{a} - 2|b| \sqrt{a}. \end{aligned}$$

2.2. Bevitel a négyzetgyökjel alá



4. példa Állítsuk növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

$$A = 7 \cdot \sqrt{2}, \quad B = 4 \cdot \sqrt{6}, \quad C = \frac{\sqrt{390}}{2}, \quad D = (\sqrt{102} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{102} + \sqrt{5}}{\sqrt{102} - \sqrt{5}}}$$

Megoldás:

A négyzetgyökfüggvényről tudjuk, hogy az értelmezési tartományán szigorúan monoton növekvő. Ezt szem előtt tartva alakítsuk át úgy a kifejezéseket, hogy mindegyik esetben a négyzetgyökjel alatt egy-egy szám álljon! Ehhez alkalmazzuk visszafelé az előző pontban látottakat az alábbi módon:

A négyzetgyök definíciója.

Négyzetgyökös kifejezések szorzatára vonatkozó azonosság.

$$A = 7 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}.$$

Az előzőhöz hasonlóan:

$$B = 4 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{16 \cdot 6} = \sqrt{96},$$

$$C = \frac{\sqrt{390}}{2} = \frac{\sqrt{390}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{390}{4}} = \sqrt{97,5}.$$

A négyzetgyök definíciója.

Négyzetgyökös kifejezések hányadosára vonatkozó azonosság.

Mivel a D első tényezője pozitív, ezért egyszerűen bevihetjük a négyzetgyökjel alá.

$$\begin{aligned} D &= (\sqrt{102} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{102} + \sqrt{5}}{\sqrt{102} - \sqrt{5}}} = \sqrt{(\sqrt{102} - \sqrt{5})^2 \cdot \frac{(\sqrt{102} + \sqrt{5})}{(\sqrt{102} - \sqrt{5})}} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{102} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{102} + \sqrt{5})} = \sqrt{102 - 5} = \sqrt{97}. \end{aligned}$$

Tehát $B < D < C < A$.



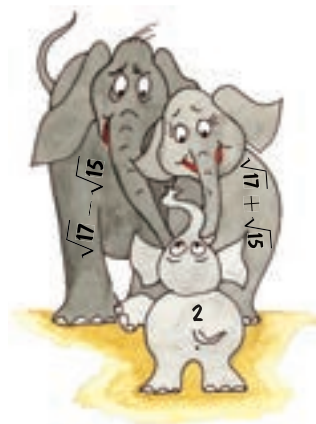
2.5. ábra Ne szomorkodj, Ketteske! Csak egy kicsit nőm kell, és mehetek a gyökjel alá



2.6. ábra Most már nem vagy magányos!

2.3. A tört nevezőjének gyöktelenítése

2.7. ábra Lent nevezők, fent nevezetők



2.8. ábra Összetett szülők egyszerű gyermeke:
 $(\sqrt{17} - \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{17} + \sqrt{15}) = 2$



5. példa Adjuk meg úgy az alábbi számokat, hogy a tört nevezője ne tartalmazzon négyzetgyökjelet!

a) $\frac{5}{\sqrt{10}}$ b) $\frac{12}{5 \cdot \sqrt{6}}$ c) $\frac{11}{4 - \sqrt{5}}$ d) $\frac{2}{\sqrt{17} + \sqrt{15}}$

Megoldás:

a) Ahhoz, hogy a nevezőből eltűnjön a négyzetgyökjel, az ott szereplő számot négyzetre kell emelni úgy, hogy a tört értéke ne változzon! Ezt úgy tehetjük meg, hogy a törtet bővítjük $\sqrt{10}$ -zel.

$$\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

b) Az előzőhöz hasonlóan járhatunk el.

$$\frac{12}{5 \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{5 \cdot \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{12 \cdot \sqrt{6}}{5 \cdot 6} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{5}$$

c) A nevezőben egy különbség található, ezért olyan azonosságot kell alkalmazni, amely tagonként emeli négyzetre a nevezőt. Ez az $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$. Ennek megfelelően bővítsük a törtet $4 + \sqrt{5}$ -tel!

$$\begin{aligned} \frac{11}{4 - \sqrt{5}} &= \frac{11}{4 - \sqrt{5}} \cdot \frac{4 + \sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}} = \frac{11(4 + \sqrt{5})}{4^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{11(4 + \sqrt{5})}{16 - 5} = \\ &= \frac{11(4 + \sqrt{5})}{11} = 4 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

d) Az előzőhöz hasonlóan bővítsünk $\sqrt{17} - \sqrt{15}$ -tel!

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{17} + \sqrt{15}} &= \frac{2}{\sqrt{17} + \sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{17} - \sqrt{15}}{\sqrt{17} - \sqrt{15}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{17} - \sqrt{15})}{17 - 15} = \\ &= \frac{2 \cdot (\sqrt{17} - \sqrt{15})}{2} = \sqrt{17} - \sqrt{15} \end{aligned}$$



6. példa Adjuk meg egyetlen valós számként!

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5} + 2} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - \frac{10}{\sqrt{5}} \right) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

Megoldás:

Alakítsuk át az első zárójelben szereplő kifejezés tagjait a nevezők gyöktelenítésével!

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \sqrt{5}-2$$

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

Ennek alapján:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{10}{\sqrt{5}} \right) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3}) =$$

$$= (\sqrt{5}-2+2+\sqrt{3}-2 \cdot \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3}) =$$

$$= (\sqrt{3}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{5}) = 3-5 = -2.$$



7. példa Határozzuk meg az alábbi kifejezés értelmezési tartományát, és végezzük el a kijelölt műveleteket, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza!

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} - \frac{8}{x-4}$$

Megoldás:

A kifejezés csak akkor értelmezhető, ha $x \geq 0$ és $x \neq 4$. Végezzük el a közös nevezőre hozást, majd vonjuk össze az egynemű tagokat! Mivel $(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{x}+2) = x-4$, ezért:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} - \frac{8}{x-4} = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+2) - 2(\sqrt{x}-2) - 8}{(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{x}+2)} =$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4-8}{(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{x-4} = 1.$$



2.9. ábra Gyöktelenítsünk!



2.10. ábra De jó, hogy tavaly megtanultam az azonosságokat!



Oldjuk meg!

1. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

- a) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \frac{1}{4}\sqrt{48}$ b) $\sqrt{72} - \sqrt{50} - \sqrt{8} + \frac{\sqrt{18}}{3}$ c) $\left(\sqrt{80} + \frac{\sqrt{20}}{2} + 3\sqrt{45} \right) \cdot \sqrt{5}$
- d) $(\sqrt{180} - \sqrt{125} + \sqrt{27} - \sqrt{12}) \cdot (3\sqrt{20} - \sqrt{80} - \sqrt{5} + \sqrt{147} - 2\sqrt{48})$
- e) $(\sqrt{216} - \sqrt{150} - \sqrt{50} - \sqrt{162} + \sqrt{338}) \cdot (\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{96} + \sqrt{200} - \sqrt{32} - 2 \cdot \sqrt{50})$

2. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát, és hozzuk egyszerűbb alakra, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza!

a) $\sqrt{9a^3} + \sqrt{25a^3} - \sqrt{a^3}$ b) $\sqrt{16b^2c^3} - \sqrt{4b^2c} + \sqrt{b^2c^7}$ c) $\sqrt{x^6} - \sqrt{144x^6} + \sqrt{36x^6} + \sqrt{49x^6}$

3. Számológép használata nélkül döntsük el, hogy melyik nagyobb!

a) $3 \cdot \sqrt{7}$ vagy $2 \cdot \sqrt{15}$ b) $\frac{\sqrt{150}}{5}$ vagy $\frac{\sqrt{57}}{3}$ c) $\frac{3 \cdot \sqrt{13}}{2}$ vagy $\frac{5\sqrt{10}}{3}$ d) $\frac{9}{\sqrt{5}}$ vagy $\frac{7}{\sqrt{3}}$

e) $(7 - \sqrt{40}) \cdot \sqrt{\frac{7 + \sqrt{40}}{7 - \sqrt{40}}}$ vagy $(4 + \sqrt{12}) \cdot \sqrt{\frac{4 - \sqrt{12}}{4 + \sqrt{12}}}$

4. Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét!

a) $\frac{12}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{24}{5 \cdot \sqrt{6}}$ c) $\frac{15}{2\sqrt{7}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$ e) $\frac{5}{\sqrt{30} - 5}$

f) $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{7} - 3 \cdot \sqrt{3}}$ g) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$ h) $\frac{4 \cdot \sqrt{3} - 5 \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot \sqrt{2}}$

5. Számológép használata nélkül döntsük el, hogy melyik nagyobb!

a) $\frac{1}{\sqrt{11} - \sqrt{10}}$ vagy $\sqrt{40}$ b) $\frac{5}{2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{7}}$ vagy $\frac{4}{\sqrt{13} - 3}$ c) $3 \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ vagy $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

6. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \right) \cdot (3\sqrt{5} - \sqrt{3})$ b) $\left(\frac{5}{\sqrt{10} - \sqrt{7}} - \frac{2}{\sqrt{10} + \sqrt{7}} \right) \cdot (3\sqrt{10} - 7\sqrt{7})$

7. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát, és végezzük el a kijelölt műveleteket, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza!

a) $\frac{2}{2\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{2\sqrt{x} - 3} + \frac{6}{4x - 9}$ b) $\frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} + 3}{\sqrt{a} - 1} + \frac{6\sqrt{a}}{a - 1}$ c) $\frac{\sqrt{y} + 5}{y - 25} : \frac{2\sqrt{y}}{y - 5\sqrt{y}}$

d) $\left(\frac{2}{\sqrt{b} - 2} - \frac{\sqrt{b} - 2}{\sqrt{b} + 2} - \frac{2\sqrt{b}}{b - 4} \right) : \frac{4\sqrt{b} - b}{b + 4\sqrt{b} + 4}$

8. Hány olyan 2008-nál kisebb pozitív egész n szám van, amely esetén az alábbi kifejezés helyettesítési értéke racionális?

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

9. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezés értéke minden pozitív egész n esetén kisebb 1-nél!

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$$

10. Az előző feladatban legalább mekkora az n , ha a kifejezés értéke nagyobb 0,99-nél?

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

3. A számok n -edik gyöke

3.1. Az n -edik gyök definíciója



1. példa Egy felül nyitott, kocka alakú tartály térfogata 8000 liter. Mennyibe kerül a tartály teljes felületének kifestése, ha 1 m^2 területű felület lefestéséhez szükséges festék ára 600 Ft, és a vásárolt mennyiség 4%-át kalkuláljuk veszteségnek?

Megoldás:

Számoljuk ki a tartály oldalélének hosszát! Azt tudjuk, hogy $8000 \text{ liter} = 8000 \text{ dm}^3$, és a kockatérfogat $V = a^3$, ahol a a kocka élének a hossza. Tehát keressük azt a számot, amelynek a köbe 8000. Ez a szám a 20, amelyet a **8000 köbgyökének** nevezünk és $\sqrt[3]{8000}$ -rel jelölünk, ahol a gyökkjelnél szereplő hármast **gyökkitevőnek** nevezzük. Tehát $\sqrt[3]{8000} = 20$. Mivel a kocka éle $20 \text{ dm} = 2 \text{ m}$ és egy oldallapnak két felülete van, egy belső és egy külső, ezért a teljes felület $5 \cdot 2 \cdot 2^2 \text{ m}^2 = 40 \text{ m}^2$. Az ehhez szükséges festék ára $40 \cdot 600 \text{ Ft} = 24000 \text{ Ft}$. Ez a vásárolt mennyiség 96%-a, így $24000 : 0,96 = 25000 \text{ Ft}$ -ba kerül a festék.



Mivel $(-2)^3 = -8$, így $\sqrt[3]{-8} = -2$, tehát a négyzetgyökökkel ellentétben negatív számoknak is értelmezhetjük a köbgyökét. Ehhez hasonlóan minden olyan esetben értelmezhetjük a negatív számok n -edik gyökét, amikor a gyökkitevő páratlan. Ha a gyökkitevő páros, akkor a definíció a négyzetgyök definíciójához hasonló, mert a negatív számok páros kitevőjű hatványa is pozitív.



Definíció Egy a nemnegatív valós szám $2k$ -adik ($k \in \mathbb{Z}^+$) gyöke az a nemnegatív valós szám, amelynek $2k$ -adik hatványa a .

Jelekkel leírva: $(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$, ahol $a \geq 0$ és $\sqrt[2k]{a} \geq 0$.



Definíció Egy a valós szám $2k+1$ -edik ($k \in \mathbb{Z}^+$) gyöke az a valós szám, amelynek $2k+1$ -edik hatványa a .

Jelekkel leírva: $(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$, ahol $a \in \mathbb{R}$, és $\sqrt[2k+1]{a} \in \mathbb{R}$.

Elég lesz a festék?



3.1. ábra Ha jól számolunk, takarékoskodhatunk

$$(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a,$$

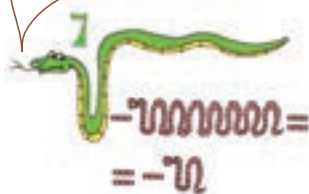
$$\text{ahol } a \geq 0 \text{ és } \sqrt[2k]{a} \geq 0$$

$$(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a,$$

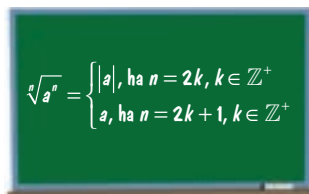
$$\text{ahol } a \in \mathbb{R} \text{ és } \sqrt[2k+1]{a} \in \mathbb{R}$$

3.2. ábra Jól jegyezzük meg!

Minél nagyobb fejemen
a szám, annál nagyobbra
tátom a szám.



3.3. ábra $\sqrt[7]{-100000000} = -10$



3.4. ábra Jegyezzük meg!

2. példa Végezzük el az alábbi műveleteket!

- a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[7]{-10000000}$
d) $\sqrt[6]{-64}$ e) $\sqrt[3]{0,001}$ f) $\sqrt[6]{0}$
g) $\sqrt[15]{-1}$

Megoldás:

Alkalmazzuk mindegyik esetben a definíciót!

- a) $\sqrt[5]{32} = 2$, mert $2^5 = 32$.
b) $\sqrt[4]{81} = 3$, mert $3^4 = 81$, és a 3 nemnegatív szám.
c) $\sqrt[7]{-10000000} = -10$, mert $(-10)^7 = -10000000$.
d) $\sqrt[6]{-64}$ nincs értelmezve, mert a gyökkitevő páros és a gyökjel alatt negatív szám áll.
e) $\sqrt[3]{0,001} = 0,1$, mert $0,1^3 = 0,001$.
f) $\sqrt[6]{0} = 0$, mert $0^6 = 0$, és a 0 nemnegatív szám.
g) $\sqrt[15]{-1} = -1$, mert $(-1)^{15} = -1$.

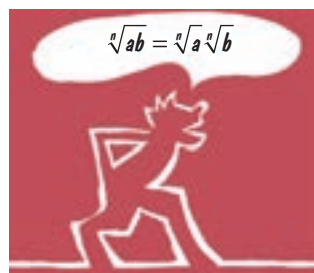
3. példa Végezzük el a kijelölt műveleteket!

- a) $\sqrt[2k]{a^{2k}}$
b) $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$

Megoldás:

- a) $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$, mivel $|a| \geq 0$ és $|a|^{2k} = a^{2k}$.
b) $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, mivel $a \in \mathbb{R}$ és $a^{2k+1} = a^{2k+1}$.

3.2. Az n -edik gyökvonás azonosságai



3.5. ábra Csak akkor, ha $a, b \geq 0$

A szorzat n -edik gyöke.



Tétel

Két szám szorzatának n -edik $(n \in (\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}))$ gyöke egyenlő a tényezők n -edik gyökének a szorzatával.

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, ahol $a, b \geq 0$, ha n páros, illetve a, b tetszőleges valós szám, ha n páratlan.

Bizonyítás:

A feltételek alapján $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ nemnegatív, ha n páros, illetve tetszőleges valós szám, ha n páratlan. Még azt kell belátnunk, hogy az n -edik hatványa $a \cdot b$. Ez igaz, mert

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b.$$

Szorzat hatványozása.

Az n -edik gyök definíciója.

Ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzés:

Az előbbi tétel másik megfogalmazása a következő:



Tétel

Két n -edik gyökös kifejezés szorzatát úgy is kiszámolhatjuk, hogy a gyökjel alatti kifejezések szorzatából n -edik gyököt vonunk.

A hányados n -edik gyöke



Tétel

Két szám hányadosának n -edik $(n \in (\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}))$ gyöke egyenlő a számláló és a nevező n -edik gyökének a hányadosával.

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, ahol $a \geq 0$ és $b > 0$, ha n páros, illetve $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ha n páratlan.

Bizonyítás:

A feltételek alapján $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ nemnegatív, ha n páros, ill. tetszőleges valós szám, ha n páratlan. Még azt kell belátnunk, hogy az n -edik hatványa $\frac{a}{b}$. Ez igaz, mert

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}.$$

Hányados hatványozása.

Az n -edik gyök definíciója.

Ezt kellett belátni.



3.6. ábra Nem jó a magányosság:
 $\sqrt[n]{\text{Anikó}}$ és $\sqrt[n]{\text{Béla}}$



3.7. ábra Fontosak a barátok:
 $\sqrt[n]{\text{Anikó és Béla}}$



3.8. ábra Az eredmény így is, úgy is tejeskávé

Megjegyzés:

Az előző tétel másik megfogalmazása a következő:



Tétel

Két n -edik gyökös kifejezés hányadosát úgy is kiszámolhatjuk, hogy a gyökjel alatti kifejezések hányadosából n -edik gyököt vonunk.

A hatvány n -edik gyöke



Tétel

A hatványozás és a gyökvonás felcserélhető művelet.

$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$, ahol $a \geq 0$, ha n páros pozitív egész szám, illetve $a \in \mathbb{R}$, ha $n > 1$ páratlan egész szám és $k \in \mathbb{Z}$. (Ha $k \in (\mathbb{Z}^- \cup \{0\})$, akkor $a \neq 0$.)

Bizonyítás:

Az $(\sqrt[n]{a})^k$ nemnegatív, ha n páros, illetve lehet tetszőleges valós szám, ha n páratlan (természetesen, ha k nem pozitív egész szám, akkor a nem lehet 0). Még azt kell belátnunk, hogy n -edik hatványa a^k . Ez igaz, mert

$$\left((\sqrt[n]{a})^k \right)^n = (\sqrt[n]{a})^{k \cdot n} = \left((\sqrt[n]{a})^n \right)^k = a^k.$$

Hatvány hatványozása.

Az n -edik gyök definíciója.

A k -adik gyök n -edik gyöke



Tétel

Egy k -adik $(k \in (\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}))$ gyöknek vehetjük úgy az n -edik $(n \in (\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}))$ gyökét, hogy a belső gyökjel alatti kifejezésből $n \cdot k$ -adik gyököt vonunk.

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}, \text{ ahol } a \geq 0.$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Bizonyítás:

Az előzőekhez hasonlóan azt kell belátni, hogy a nemnegatív $\sqrt[n]{k} \sqrt[n]{a}$ -nak az $n \cdot k$ -adik hatványa a . Használjuk fel a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságot és az n -edik gyök definícióját!

$$\left(\sqrt[n]{k} \sqrt[n]{a}\right)^{n \cdot k} = \left(\left(\sqrt[n]{k} \sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = \left(k \sqrt[n]{a}\right)^k = a$$

Hatvány hatványozása.

Az n -edik gyök definíciója.

Ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzés:

Az előző tételnek és a hatvány hatványozására vonatkozó azonosság-nak egyszerű következménye az alábbi tétel, melynek bizonyítását az olvasóra bízuk.

Tétel

A gyök- és a hatványkitevő „egyszerűsíthető”, illetve „bővíthető”, azaz:

$$\sqrt[n]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^k}, \text{ ahol } a > 0, m \in \mathbb{Z}; n, k \in (\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}).$$

4. példa

Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\sqrt[5]{(10 - \sqrt{68})} \cdot \sqrt[5]{(10 + \sqrt{68})}$ b) $\frac{\sqrt[3]{(5 + \sqrt{17})^2} \cdot (5 - \sqrt{17})}{\sqrt[3]{5 + \sqrt{17}}}$

c) $\sqrt[4]{81^5} \cdot \sqrt[3]{27^{-4}}$ d) $\sqrt[3]{64}$

Megoldás:

a) Alkalmazzuk az n -edik gyök első azonosságát és a két tag különbségének és összegének szorzatára vonatkozó azonosságot, majd az n -edik gyök definícióját!

Az n -edik gyökök szorzatára vonatkozó azonosság.

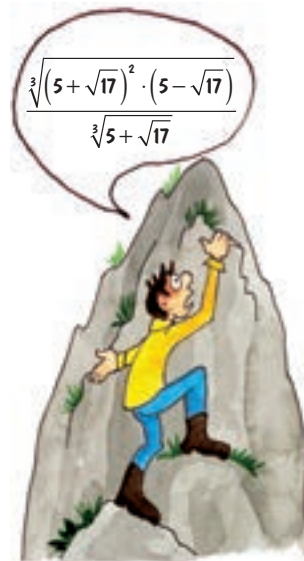
$$\begin{aligned} & \sqrt[5]{(10 - \sqrt{68})} \cdot \sqrt[5]{(10 + \sqrt{68})} = \\ & = \sqrt[5]{(10 - \sqrt{68}) \cdot (10 + \sqrt{68})} = \sqrt[5]{10^2 - (\sqrt{68})^2} = \sqrt[5]{100 - 68} = \sqrt[5]{32} = 2 \end{aligned}$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

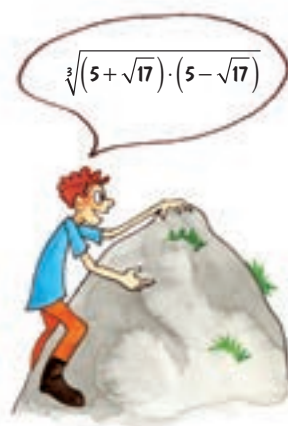
Az n -edik gyök definíciója.



3.9. ábra Csak akkor, ha $a > 0$ és $m \in \mathbb{Z}; n, k \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$



3.10. ábra Ez reménytelennek tűnik!



3.11. ábra Így már könnyebb!



3.12. ábra Ennyi az egész?

b) Az n -edik gyök második azonossága alapján írjuk fel egy gyökjellel a kifejezést, majd egyszerűsítés után alkalmazzuk a két tag összegének és különbségének szorzatára vonatkozó azonosságot, és az n -edik gyök definícióját!

Az n -edik gyökök hányadosára vonatkozó azonosság.

$$\frac{\sqrt[3]{(5+\sqrt{17})^2 \cdot (5-\sqrt{17})}}{\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}} =$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(5+\sqrt{17})^2 \cdot (5-\sqrt{17})}{5+\sqrt{17}}} = \sqrt[3]{(5+\sqrt{17}) \cdot (5-\sqrt{17})} =$$

$$= \sqrt[3]{5^2 - (\sqrt{17})^2} = \sqrt[3]{25-17} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Az n -edik gyök definíciója.

c) Alkalmazzuk az n -edik gyök harmadik azonosságát és az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosságot!

$$\sqrt[4]{81^5} \cdot \sqrt[3]{27^{-4}} = (\sqrt[4]{81})^5 \cdot (\sqrt[3]{27})^{-4} = 3^5 \cdot 3^{-4} = 3$$

d)

1. módszer:

Alkalmazzuk az n -edik gyök definícióját kétszer egymás után!

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{\sqrt[3]{4^3}} = \sqrt{4} = 2$$

2. módszer:

Alkalmazzuk az n -edik gyök negyedik azonosságát és az n -edik gyök definícióját!

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

Oldjuk meg!

1. Számítsuk ki!

a) $\sqrt[10]{1024}$

b) $\sqrt[5]{-32}$

c) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

d) $\sqrt[3]{-0,001}$

e) $\sqrt[6]{1000000}$

f) $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$

g) $\sqrt[8]{0}$

h) $\sqrt[5]{-\frac{3125}{243}}$

2. Végezzük el az alábbi gyökvonásokat, ahol az alaphalmaz a valós számok halmaza!

a) $\sqrt[8]{a^8}$

b) $\sqrt[6]{b^6}$

c) $\sqrt[11]{c^{11}}$

d) $\sqrt[27]{d^{27}}$

e) $\sqrt[7]{(-e)^7}$

f) $\sqrt[12]{(-f)^{12}}$

g) $\sqrt[3]{g^{12}}$

h) $\sqrt[6]{h^{36}}$

i) $\sqrt[4]{i^{12}}$

j) $\sqrt[8]{j^{40}}$

k) $\sqrt[5]{k^{15}}$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

3. Számítsuk ki!

a) $\sqrt[8]{32} \cdot \sqrt[8]{8}$

b) $\sqrt[6]{81} \cdot \sqrt[6]{9}$

c) $\sqrt[4]{11+2\sqrt{10}} \cdot \sqrt[4]{11-2\sqrt{10}}$

d) $\sqrt[3]{13-\sqrt{44}} \cdot \sqrt[3]{13+\sqrt{44}}$

e) $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

f) $\frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}}$

g) $\frac{\sqrt[5]{(7-\sqrt{17})^2 \cdot (7+\sqrt{17})}}{\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}}$

h) $\frac{\sqrt[4]{(56+24\sqrt{5}) \cdot (6-\sqrt{20})}}{\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}}$

i) $\frac{\sqrt[4]{625^3} \cdot \sqrt[3]{125^2}}{\sqrt{25^2}}$

j) $\sqrt[10]{1024^4} \cdot \sqrt[5]{32^3} \cdot \sqrt[6]{64^{-7}}$

k) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}}$

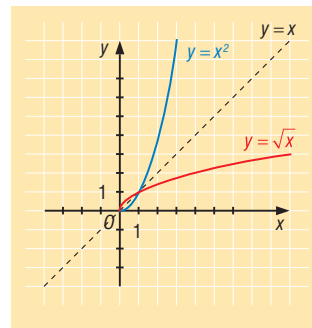
4. Az n -edik gyökfüggvény, az n -edik gyök alkalmazása

4.1. Az n -edik gyökfüggvény

Az n -edik gyök definíciójából következően a számok n -edik gyöke egyértelműen meghatározott. Ez alkalmat ad arra, hogy definiáljuk az n -edik gyökfüggvényt.



Definíció Az $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ($n \in (\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\})$) függvényt **n -edik gyökfüggvénynek** nevezzük, ahol $H = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$, ha n páros, illetve $H = \mathbb{R}$, ha n páratlan.

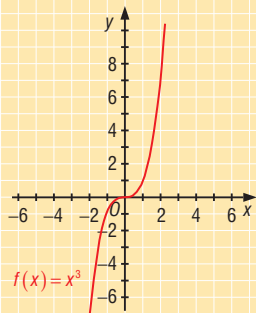


4.1. ábra

$f: (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-); f(x) = x^2$ és a
 $g: (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-); g(x) = \sqrt{x}$
 függvény inverz kapcsolatának szemléltetése

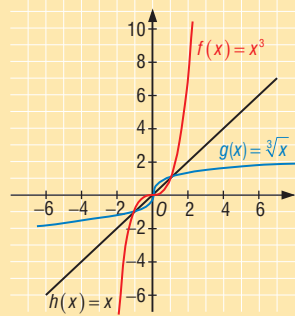
Tavaly megvizsgáltuk az $f: (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-)$, $f(x) = x^2$ és a $g: (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-)$, $g(x) = \sqrt{x}$ függvények grafikonja közötti kapcsolatot. Azt tapasztaltuk, hogy a két függvény grafikonja az $y = x$ egyenesre nézve egymás tükörképe. Ha két függvény grafikonja között ilyen kapcsolat áll fenn, akkor az arra utal, hogy a két függvény egymás inverze. Pontosabb definícióval majd 11. osztályban találkozunk.

Be lehet bizonyítani, hogy ha az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ függvény grafikonját az $y = x$ egyenesre tükrözzük, akkor a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény, azaz a köbgyökfüggvény grafikonját kapjuk. Tehát itt is fennáll az f és a g függvény között az inverz kapcsolat.



x	-2	-1	0	1	2
x^3	-8	-1	0	1	8

4.2. ábra Az $f(x) = x^3$



4.3. ábra 1. b) példa



4.4. ábra Kire illenek a következő jellemzők: izmos, vidám, okos?

1. példa

- Ábrázoljuk az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ függvényt!
- Tükrözzük az f függvény grafikonját az $y = x$ egyenesre!
- Jellemezzük a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{x}$ függvényt!

Megoldás:

a) A 4.2. ábra

b) A 4.3. ábra

Ezzel megkaptuk a g függvény grafikonját.

c)

Értelmezési tartománya a valós számok halmaza.	$D_g = \mathbb{R}$
Értékkészlete a valós számok halmaza.	$R_g = \mathbb{R}$
Zérushelye a nulla.	$f(0) = 0$
Minimuma nincs.	nincs
Maximuma nincs.	nincs
Értelmezési tartományán szigorúan monoton növekvő.	A $]-\infty; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.
Páratlan függvény, mert minden értelmzési tartománybeli x érték esetén $-x$ is eleme az értelmzési tartománynak és $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.	Páratlan, $\forall x \in D_g$ esetén $-x \in D_g$ és $g(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -g(x)$.



Megjegyzés: Be lehet bizonyítani, hogy az $f : H \rightarrow H, f(x) = x^n$ függvény grafikonjának az $y = x$ egyenletű egyenesre vett tükrösképe a $g : H \rightarrow H, g(x) = \sqrt[n]{x} (n \in (\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}))$ függvény grafikonja, ahol $H = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-,$ ha n páros, illetve $H = \mathbb{R},$ ha n páratlan. Tehát a két függvény között inverz kapcsolat áll fenn. Az n értékétől függetlenül igaz, hogy a g függvény zérushelye $x = 0,$ és az értelmzési tartományán szigorúan monoton növekvő. Ha n páratlan, akkor a függvény is páratlan.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

4.2. Gyökjel alóli kihozatal



2. példa Végezzük el az alábbi műveleteket!

- a) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{250}$
 b) $(\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32}) \cdot (\sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{1250} - \sqrt[4]{2592}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})$
 c) $\sqrt[4]{16a^5b^4} + \sqrt[4]{81a^5b^4} - \sqrt[4]{256a^5b^4}$, ahol $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-)$ és $b \in \mathbb{R}$

Megoldás:

Az n -edik gyökjel alóli kihozatalnál ugyanúgy járhatunk el, mint négyzetgyökök esetén. Azt a legnagyobb n -edik hatványt keressük, amellyel a gyökjel alatti szám osztható, és a szorzat n -edik gyökére vonatkozó azonosságot alkalmazva, azt kihozzuk a gyökjel alól.

a) Ebben az esetben is sokat segít a gyökjel alatti számok kanonikus alakjának felírása:

$$54 = 3^3 \cdot 2, \quad 16 = 2^4 = 2^3 \cdot 2, \quad 250 = 5^3 \cdot 2.$$

Így:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{250} &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} - \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = \\ &= \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 2 \cdot \sqrt[3]{2} - 5 \cdot \sqrt[3]{2} = 0. \end{aligned}$$

b) Alakítsuk át az első két tényezőt külön-külön, felhasználva a gyökjel alatti számok kanonikus alakját:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32} &= \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} - \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} - \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} = \\ &= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} + 3\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2} \\ \sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{1250} - \sqrt[4]{2592} &= \\ &= \sqrt[4]{3^4 \cdot 3} - \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} + \sqrt[4]{5^4 \cdot 2} - \sqrt[4]{(2 \cdot 3)^4 \cdot 2} = \\ &= \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{6^4} \cdot \sqrt[4]{2} = \\ &= 3\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} + 5\sqrt[4]{2} - 6\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}! \end{aligned}$$

Ezek alapján:

$$(\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32}) \cdot (\sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{1250} - \sqrt[4]{2592}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) =$$

Alkalmazzuk az $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ azonosságot!

$$\begin{aligned} &= (\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2}) \cdot (\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \left((\sqrt[4]{3})^2 - (\sqrt[4]{2})^2 \right) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{16a^5b^4} + \sqrt[4]{81a^5b^4} - \sqrt[4]{256a^5b^4} &= \\ &= \sqrt[4]{16a^4b^4} \cdot \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{81a^4b^4} \cdot \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{256a^4b^4} \cdot \sqrt[4]{a} = \\ &= 2a|b|\sqrt[4]{a} + 3a|b|\sqrt[4]{a} - 4a|b|\sqrt[4]{a} = a|b|\sqrt[4]{a} \end{aligned}$$



4.5. ábra A rendetlenség több helyet foglal el!



4.6. ábra Ha rendezzük, kisebb helyet foglalnak el!

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{b^4} &= |b|, \text{ mert } b \in \mathbb{R} \\ \sqrt[4]{a^4} &= a, \text{ mert } a \in \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

4.7. ábra Legyünk figyelmesek!

4.3. Bevitel a gyökjel alá



4.8. ábra Melyik nagyobb? Talán egyenlők?



3. példa Melyik nagyobb: $5 \cdot \sqrt[4]{3}$ vagy $6 \cdot \sqrt[4]{2}$?

Megoldás:

A lecke elején tárgyaltak alapján tudjuk, hogy a negyedik gyökfüggvény az értelmezési tartományán szigorúan monoton növekvő. Így érdemes mindkét szám esetén a negyedik gyökjel előtt álló tényezőket bevinni a negyedik gyökjel alá. Az ezután kapott számokat már könnyen össze tudjuk hasonlítani.

$$5 \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{625 \cdot 3} = \sqrt[4]{1875}$$

$$6 \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{6^4} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{6^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{1296 \cdot 2} = \sqrt[4]{2592}$$

Tehát a második szám a nagyobb.



4.4. A tört nevezőjének gyöktelenítése



4. példa Gyöktelenítsük az alábbi tört nevezőjét!

a) $\frac{7}{\sqrt[4]{3}}$ b) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{11}{\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{4}}$

Megoldás:

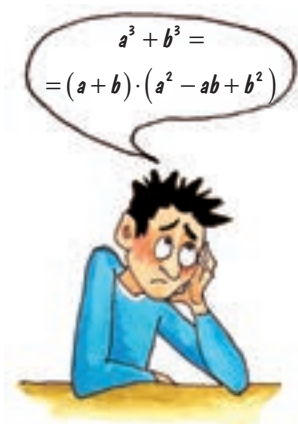
a) Úgy kell bővítenünk a törtet, hogy a nevezőben a negyedik gyökjel alatt negyedik hatványt kapjunk!

$$\frac{7}{\sqrt[4]{3}} = \frac{7}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{7 \cdot \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{7 \cdot \sqrt[4]{27}}{3}$$

b) Az előzőhöz hasonlóan járhatunk el.

$$\frac{5}{\sqrt[5]{2}} = \frac{5}{\sqrt[5]{2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \frac{5 \cdot \sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{5 \cdot \sqrt[5]{16}}{2}$$

c) Olyan azonosságot kell keresnünk, amelynek segítségével a nevezőben szereplő összeg tagjait külön-külön emeljük köbre. Ez a tavalyról ismert $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$ azonosság. Ennek felhasználásával bővítsük a törtet!



4.9. ábra Már megint egy azonosság?

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\begin{aligned} \frac{11}{\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{4}} &= \\ &= \frac{11}{\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{4}} \frac{(\sqrt[3]{7})^2 - \sqrt[3]{7}\sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2}{(\sqrt[3]{7})^2 - \sqrt[3]{7}\sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2} = \frac{11((\sqrt[3]{7})^2 - \sqrt[3]{7}\sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2)}{(\sqrt[3]{7})^3 + (\sqrt[3]{4})^3} = \\ &= \frac{11(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{28} + \sqrt[3]{16})}{11} = \sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{28} + \sqrt[3]{16} \end{aligned}$$

4.5. Írjuk fel egy gyökjellel!



5. példa

Írjuk fel egy gyökjellel az alábbi kifejezéseket!

- a) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ c) $\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a}} \quad (a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-))$
d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3}$ e) $\frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$

Megoldás:

a) Alkalmazzuk az n -edik gyök 4. azonosságát!

$$\sqrt[4]{4\sqrt{5}} = \sqrt[12]{5}$$

b) Ezt úgy tudjuk az előzőhöz hasonló alakra hozni, hogy bevisszük a köbgyökjel alá az első kettest. Ezután alkalmazzuk a 4. azonosságot!

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}} = \sqrt[6]{2^4}$$

A kapott eredményt átalakíthatjuk úgy, hogy a gyökkitevőt a következő módon csökkentjük: $\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$.

c) Alkalmazzuk az előző pontban látottakat, valamint a hatvány hatványozására, illetve az azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosságot!

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a}} &= \sqrt[4]{\sqrt[3]{(a^3)^3 a^2}\sqrt{a}} = \sqrt[12]{a^9 a^2 \sqrt{a}} = \sqrt[12]{a^{11} \sqrt{a}} = \\ &= \sqrt[12]{\sqrt{(a^{11})^2 a}} = \sqrt[24]{a^{23}} \end{aligned}$$

d) A közös gyökkitevő a két gyökkitevő legkisebb közös többszöröse, ami most a 12. Vigyük be mindkét számot a 12. gyökjel alá és közben alkalmazzuk a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságot!

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{(\sqrt[3]{2})^{12}} = \sqrt[12]{(\sqrt[3]{2})^{3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{((\sqrt[3]{2})^3)^4} = \sqrt[12]{2^4};$$



4.10. ábra A nagy csepp sok kicsi cseppből áll össze. Ezt csak nézd, mert a higany veszélyes mérreg!



4.11. ábra Így már kisebb helyet foglal el



4.12. ábra Hol lehet a legkisebb közös többszörös?

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{(\sqrt[4]{3})^{12}} = \sqrt[12]{(\sqrt[4]{3})^{4 \cdot 3}} = \sqrt[12]{((\sqrt[4]{3})^4)^3} = \sqrt[12]{3^3}$$

Ennek alapján: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^4} \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{16 \cdot 27} = \sqrt[12]{432}$.

e) Az előzőhöz hasonlóan keressük meg a gyökkitevők legkisebb közös többszörösét, és alkalmazzuk a szorzat, illetve a hányados n -edik gyökére vonatkozó azonosságot!

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[12]{(\sqrt[3]{x^2})^{12}} = \sqrt[12]{(\sqrt[3]{x^2})^{3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{((\sqrt[3]{x^2})^3)^4} = \sqrt[12]{(x^2)^4} = \sqrt[12]{x^8}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt[12]{(\sqrt{x})^{12}} = \sqrt[12]{(\sqrt{x})^{2 \cdot 6}} = \sqrt[12]{((\sqrt{x})^2)^6} = \sqrt[12]{x^6}$$

$$\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{(\sqrt[4]{x^3})^{12}} = \sqrt[12]{(\sqrt[4]{x^3})^{4 \cdot 3}} = \sqrt[12]{((\sqrt[4]{x^3})^4)^3} = \sqrt[12]{(x^3)^3} = \sqrt[12]{x^9}$$

Ennek alapján:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2} \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[12]{x^8} \sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^9}} = \sqrt[12]{\frac{x^8 x^6}{x^9}} = \sqrt[12]{\frac{x^{14}}{x^9}} = \sqrt[12]{x^5}.$$

Oldjuk meg!

1. Ábrázoljuk és jellemezzük a tanult szempontok alapján a következő függvényeket (értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás, paritás)!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{x}+1$ c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -\sqrt[3]{x+1}-2$

2. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $(\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{512}) \cdot \sqrt[4]{8}$

b) $(\sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{625}) \cdot \sqrt[3]{25}$

c) $(\sqrt[5]{729} - \sqrt[5]{96}) \cdot (\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{9375}) \cdot \sqrt[5]{27}$ d) $(\sqrt[4]{405} + \sqrt[4]{80} - \sqrt[4]{1280})^2 \cdot (\sqrt[4]{400} + \sqrt[4]{2025})$

e) $\sqrt[8]{a^8 b} + \sqrt[8]{256 a^8 b} + \sqrt[8]{6561 a^8 b}$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$)

3. Melyik nagyobb:

a) $6\sqrt[3]{3}$ vagy $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$,

b) $2\sqrt[4]{5}$ vagy $(\sqrt[4]{243} + \sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{768}) \cdot \sqrt[4]{27}$?

4. Írjuk fel egy gyökjellel!

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ b) $\sqrt[4]{b^3 \sqrt[3]{b^2}}$ ($b \geq 0$) c) $\sqrt{c \sqrt[3]{c^2 \sqrt[5]{c^3}}}$ ($c \geq 0$) d) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{2}$ e) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3}$

f) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{2}$ g) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[4]{x^2} \cdot x}$ ($x > 0$)

5. Melyik nagyobb:

a) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{2}$ vagy $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3}$, b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{2}$ vagy $\sqrt[6]{45} \cdot \sqrt[4]{8}$, c) $\frac{\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}$ vagy $\frac{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{3}}$?

6. Gyöktelenítsük a törték nevezőjét!

a) $\frac{6}{\sqrt[3]{5}}$

b) $\frac{8}{\sqrt[4]{27}}$

c) $\frac{15}{\sqrt[5]{9}}$

d) $\frac{3}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}$

e) $\frac{23}{\sqrt[3]{15+2}}$

II. fejezet

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

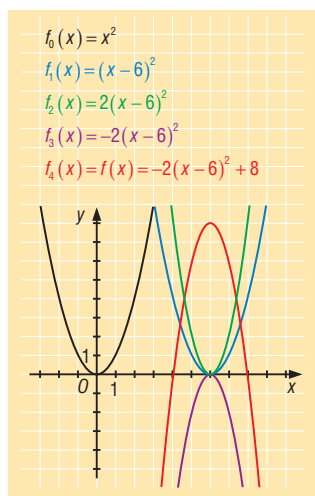
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



A megoldóképlet segít!

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

1. Másodfokú függvény, másodfokú egyenlet



1.1. ábra Az $f_4(x)$ függvény grafikonja negatív irányba nyíló parabola

A 9. osztályban már foglalkoztunk a másodfokú függvényekkel. Ismételjük át a tavaly tanultakat egy példán keresztül!



1. példa Ábrázoljuk és jellemezzük a tanult szempontok alapján az alábbi függvényt!

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 24x - 64$$

Megoldás:

A függvény grafikonjának elkészítése előtt alakítsuk át a hozzárendelési szabályt, a tavalyról ismert **teljes négyzetté kiegészítés** módszerével!

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 24x - 64 = -2(x^2 - 12x + 32) = -2(x^2 - 12x + 36 - 4) = \\ &= -2[(x-6)^2 - 4] = -2(x-6)^2 + 8 \end{aligned}$$

Az f függvény grafikonját az $f_0(x) = x^2$ hozzárendelési szabályú függvény grafikonjából, a normál parabolából kapjuk függvénytranszformáció útján, az 1.1. ábrán látható módon.

Jellemzés:

Értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R}$.

Értékkészlete: a grafikonról könnyen leolvashatjuk, hogy a $]-\infty; 8]$ intervallum.



Vegyük észre, hogy ezt a függvény ábrázolása nélkül is meghatározhatjuk! Minden valós x esetén teljesül, hogy $(x-6)^2 \geq 0$, ezért $-2(x-6)^2 \leq 0$, így $f(x) = -2(x-6)^2 + 8 \leq 8$ minden valós x esetén, és bármilyen nyolcnál nem nagyobb értéket felvesz.

Zérushelyei: a grafikonról leolvashatjuk, hogy $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. Ezt is meghatározhatjuk a teljes négyzetté kiegészített alakból. Azt az x értéket keressük, amely esetén a függvény helyettesítési értéke nulla, azaz a $-2(x-6)^2 + 8 = 0$ egyenlet megoldását.

Ehhez alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalán szereplő kifejezést!

$$\begin{aligned} -2(x-6)^2 + 8 &= -2[(x-6)^2 - 4] = -2[(x-6)^2 - 2^2] = \\ &= -2(x-6-2) \cdot (x-6+2) = -2(x-8) \cdot (x-4) \end{aligned}$$

Tehát a $-2(x-8) \cdot (x-4) = 0$ egyenletet kapjuk.

Mivel egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, ezért $x-8=0$ vagy $x-4=0$, azaz $x_1 = 4$, $x_2 = 8$.



1.2. ábra Szigorúan monoton növekvő

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Szélsőértéke: A grafikon alapján a maximumhelye $x = 6$, a maximuma $f(6) = 8$. Minimuma nincs.

Ennek meghatározásához sincs szükség grafikonra, hisz már láttuk, hogy az értékkészlet legnagyobb eleme 8, melyet $x = 6$ esetén vesz fel. Monotonitása: a $]-\infty; 6]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, a $[6; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, azaz a maximumhelyéig szigorúan monoton növekvő, utána szigorúan monoton csökkenő. Paritása: Se nem páros, se nem páratlan.



Definíció Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$) függvényt **másodfokú függvénynek** nevezzük.

A függvény hozzárendelési szabályát teljes négyzetté kiegészítéssel

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

alakra hozhatjuk. Az alábbi táblázatban

összegezzük a másodfokú függvény jellemzésével kapcsolatos ismereteket.

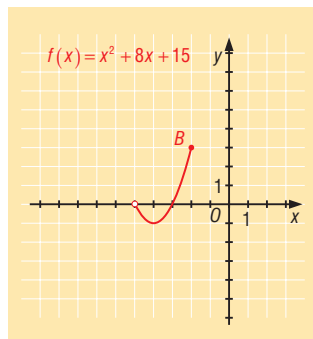
Főegyüttható pozitív: $a > 0$	Főegyüttható negatív: $a < 0$
Képe pozitív irányba nyíló parabola.	Képe negatív irányba nyíló parabola.
Értékkészlete a $\left[\frac{4ac - b^2}{4a}; \infty \right[$ intervallum.	Értékkészlete a $] -\infty; \frac{4ac - b^2}{4a}]$ intervallum.
Zérushelyét az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása adja.	Zérushelyét az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása adja.
Maximuma nincs.	Minimuma nincs.
Minimumhelye az $x = -\frac{b}{2a}$, minimuma: $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$.	Maximumhelye az $x = -\frac{b}{2a}$, maximuma: $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$.
A $] -\infty; -\frac{b}{2a}]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $\left[-\frac{b}{2a}; \infty \right[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.	A $] -\infty; -\frac{b}{2a}]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, a $\left[-\frac{b}{2a}; \infty \right[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.

Van olyan, hogy nem jut nekem hely, de néha több helyre is ülhetek.

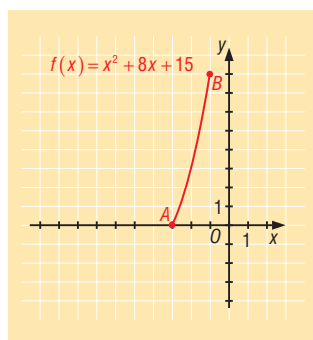


1.3. ábra Zérushely

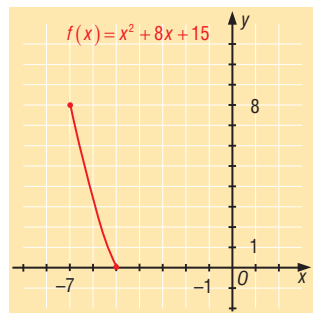
Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



1.4. ábra Ha $D_f = [-5; -2]$



1.5. ábra Ha $D_f = [-3; -1]$



1.6. ábra Ha $D_f = [-7; -5]$



2. példa Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 8x + 15$ hozzárendelési szabályú függvény szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit, ha a függvény értelmezési tartománya

- a) $[-5; -2]$ b) $[-3; -1]$ c) $[-7; -5]$ intervallum!

Megoldás:

Alakítsuk teljes négyzetté a függvény hozzárendelési szabályát!

$f(x) = x^2 + 8x + 15 = x^2 + 8x + 16 - 1 = (x + 4)^2 - 1$. Az előző feladat alapján úgy gondolhatjuk, hogy az f függvény a minimumát $x = -4$ esetén veheti fel, a minimuma $f(-4) = -1$. Ez attól függ, hogy a -4 eleme-e a függvény értelmezési tartományának vagy sem.

a) Ábrázoljuk a függvényt a megadott intervallumon!

A -4 eleme az értelmezési tartománynak, ezért a minimumhelye $x = -4$, minimuma $f(-4) = -1$, maximumhelye $x = -2$, maximuma $f(-2) = 3$, mint ahogy az 1.4. ábráról leolvasható.

b) Most is készítsünk ábrát! (1.5. ábra)

A másodfokú tag együttthatója pozitív, és a -4 az értelmezési tartománytól negatív irányban helyezkedik el, ezért a függvény a megadott intervallumon szigorúan monoton növekvő. Ezek miatt a minimumhely $x = -3$, minimuma $f(-3) = 0$, maximumhelye $x = -1$, maximuma $f(-1) = 8$, azaz a minimumhelye az intervallum bal végpontja, a maximumhelye pedig a jobb végpontja.

c) Készítsünk ábrát! (1.6. ábra)

A -4 az értelmezési tartománytól pozitív irányban helyezkedik el, ezért a vizsgált függvény a megadott intervallumon szigorúan monoton csökkenő. Így a minimumhelye $x = -5$, a minimuma $f(-5) = 0$, a maximumhelye $x = -7$, a maximuma $f(-7) = 8$, azaz a maximumát az intervallum bal végpontjában, a minimumát a jobb végpontjában veszi fel.



Összegzés: Ha az f függvény értelmezési tartománya az $[a; b]$ intervallum, és azon a függvény szigorúan monoton csökkenő, akkor a maximumát az intervallum bal végpontjában ($x = a$), a minimumát a jobb végpontjában ($x = b$) veszi fel. Ha szigorúan monoton növekvő, akkor a maximumát az intervallum jobb végpontjában ($x = b$), a minimumát a bal végpontjában ($x = a$) veszi fel.



3. példa Egy 30 fős érettségi találkozón mindenki kezét fogott mindenkivel. A férfiak egymás közötti kézfogásainak a száma 63-mal kevesebb, mint ahány kézfogás a nők és a férfiak között volt. Hány férfi és hány nő jelent meg a találkozón?

Megoldás:

Jelöljük x -szel a férfiak számát! Mivel a résztvevők száma 30, ezért a nők létszáma $30 - x$. Nyilván $x \in \mathbb{Z}^+$ és $x < 30$.

Először írjuk fel a férfiak egymás közötti kézfogásainak a számát x -szel kifejezve! Minden férfi $x-1$ másik férfinak nyújt kezét. Ez összesen $x \cdot (x-1)$ kéznyújtás, de minden kézfogáshoz két kéznyújtás tartozik, így minden kézfogást kétszer számoltunk. Tehát a férfiak egymás közötti kézfogásainak a száma: $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$.

A nők és a férfiak közötti kézfogások számát összeszámolhatjuk akár a nők, akár a férfiak oldaláról is. Nézzük a nők oldaláról! Minden nő x férfival fogott kezét. Mivel $30 - x$ nő van, ezért ezen kézfogások száma $(30 - x) \cdot x$. Ekkor természetesen egy kézfogást csak egyszer számolunk.

Ezt foglaljuk táblázatba!

Szavakkal kifejezve:	Az algebra nyelvén:
A férfiak egymás közötti kézfogásainak száma.	$\frac{x \cdot (x-1)}{2}$
A nők és férfiak közötti kézfogások száma.	$(30 - x) \cdot x$
A férfiak egymás közötti kézfogásainak a száma 63-mal kevesebb, mint ahány kézfogás a nők és a férfiak között volt.	$\frac{x \cdot (x-1)}{2} = (30 - x) \cdot x - 63$

A megoldandó egyenlet:

$$\frac{x \cdot (x-1)}{2} = (30 - x) \cdot x - 63$$

Végezzük el a zárójelbontásokat, és szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 2-vel!

Ekkor az $x^2 - x = 60x - 2x^2 - 126$ egyenlethez jutunk.

Rendezzünk mindent egy oldalra, azaz **redukáljuk** (csökkentsük) **nullára** a jobb oldalt! Ekkor kapjuk a $3x^2 - 61x + 126 = 0$ **másodfokú egyenletet**.

Oldjuk meg ezt az egyenletet a következő módon: egészítsük ki teljes négyzetté, majd alakítsuk szorzattá! Az átalakítás lépéseit, annak fontossága miatt, foglaljuk táblázatba!



1.7. ábra Régen találkoztunk



1.8. ábra Rendezzünk mindent egy oldalra!

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

Végre megtaláltam a hiányzó darabot!



1.9. ábra Kiegészítés teljes négyzetté



1.10. ábra Teljes a négyzet

Emeljük ki az x^2 együtthatóját, a főegyütthatót, és alakítsuk ki a kétszeres szorzatot!

$$3\left(x^2 - 2 \cdot \frac{61}{6}x + 42\right) =$$

Alakítsuk ki a teljes négyzetet!

$$= 3\left[x^2 - 2 \cdot \frac{61}{6}x + \left(\frac{61}{6}\right)^2 - \left(\frac{61}{6}\right)^2 + 42\right] =$$

Alkalmazzuk az $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$= 3\left[\left(x - \frac{61}{6}\right)^2 - \frac{3721}{36} + \frac{1512}{36}\right] =$$

azonosságot, és végezzük el a belső zárójelen kívüli konstansok összevonását!

$$= 3\left[\left(x - \frac{61}{6}\right)^2 - \frac{2209}{36}\right] =$$

Hozzuk létre az $a^2 - b^2$ alakot!

$$= 3\left[\left(x - \frac{61}{6}\right)^2 - \left(\frac{47}{6}\right)^2\right] =$$

Alkalmazzuk az $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ azonosságot!

$$= 3\left(x - \frac{61}{6} + \frac{47}{6}\right)\left(x - \frac{61}{6} - \frac{47}{6}\right) =$$

Végezzük el az összevonásokat!

$$= 3 \cdot \left(x - \frac{7}{3}\right) \cdot (x - 18)$$

Ezzel a $3 \cdot \left(x - \frac{7}{3}\right) \cdot (x - 18) = 0$ egyenlethez jutottunk, melynek megoldásai: $x_1 = \frac{7}{3}$; $x_2 = 18$. Ebből a feladat feltételeinek csak a 18 felel meg. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk az eredmény helyességéről, tehát a találkozón 18 férfi és 12 nő vett részt.



Az előző feladat egy másodfokú egyenletre vezető szöveges feladat volt. Az 1. példában pedig a zérushely meghatározásánál kellett másodfokú egyenletet megoldani. Mindkét esetben a teljes négyzetté kiegészítéssel történő szorzattá alakítás módszerét választottuk, ami sok számolással jár. Célszerű lenne egy könnyebben kezelhető módszert találni a megoldásokra. Ezzel foglalkozunk a következő leckében.



Oldjuk meg!

1. Egészítsük ki teljes négyzetté az alábbi kifejezéseket!

a) $x^2 - 8x + 19$

b) $x^2 + 18x + 63$

c) $x^2 - 7x - 2$

d) $x^2 + 13x + 31$

e) $2x^2 - 8x - 3$

f) $-2x^2 - 6x + 5$

g) $3x^2 - 18x - 1$

h) $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 24$

2. Ábrázoljuk és jellemezzük a tanult szempontok szerint a valós számok halmazán értelmezett alábbi függvényeket!

- a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ c) $f(x) = -2x^2$ d) $f(x) = (x-3)^2$
 e) $f(x) = (x+2)^2$ f) $f(x) = x^2 - 1$ g) $f(x) = x^2 + 2$ h) $f(x) = (x-1)^2 - 4$
 i) $f(x) = -3(x+3)^2 + 3$ j) $f(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2 - 2$

3. Ábrázoljuk és jellemezzük a tanult szempontok szerint a következő függvényeket!

- a) $D_f =]2;5]$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$ b) $D_f =]1;5]$, $f(x) = -x^2 + 8x - 12$
 c) $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$ d) $D_f =]-1;3]$, $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x$

4. Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit és azok helyét, amennyiben léteznek!

- a) $D_f =]4;8]$, $f(x) = x^2 - 10x + 22$ b) $D_f =]8;11]$, $f(x) = -x^2 + 20x - 95$
 c) $D_f = [-5;-4[$, $f(x) = 3x^2 + 36x + 113$ d) $D_f =]2;4]$, $f(x) = -2x^2 + 6x$

5. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

- a) $x^2 + 4x + 4 = 0$ b) $x^2 - 14x + 48 = 0$ c) $x^2 + 2x - 15 = 0$ d) $x^2 + x - 30 = 0$
 e) $x^2 + 9x + 18 = 0$ f) $2x^2 - 7x - 15 = 0$ g) $35 - 16x - 3x^2 = 0$

2. A másodfokú egyenlet megoldóképlete

2.1. Bevezetés



Az ókori Mezopotámiából fennmaradt égetett agyagtáblák tanúsága szerint már Kr. e. 2000 körül olyan szöveges feladatokkal is foglalkoztak, melyek első-, másod- és harmadfokú egyenletekre vezettek. Ismerték az $x^2 + ax = b$ alakú másodfokú egyenlet és az $x + y = a$, $x \cdot y = b$ alakú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldási módszerét is. Az ókori Görögországban geometriai eszközöket használtak a másodfokú egyenletek megoldására.

Az írásos emlékek alapján tudjuk, hogy az ókori és a középkori Kínában, illetve Indiában igen fejlett tudományá vált a matematika. Mindkét nép matematikájában túlsúlyba kerültek a számoló-algoritmikus módszerek. A Kínából származó legkorábbi matematikai mű a már 9. osztályban is említett, *Matematika kilenc fejezetben* című könyv, mely a kínai matematika eredményeinek sajátos összegzéseként, időszámításunk kezdete körül jelent meg. Később, az évszázadok során többször átdolgozták, kiegészítették, aminek következtében meglehetősen sajátos matematikai enciklopédiává vált. A mű utolsó könyvének 11. feladatában egy téglalap alakú ajtó oldalainak



2.1. ábra Egy ókori agyagtábla



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



2.2. ábra Vajon befér az új szekrény?

Ez a probléma is másodfokú egyenletre vezet.



2.3. ábra Kamatszámítás

a hosszát kell meghatározni, ha adott az átlója és az oldalak különbsége. A feladat az $x^2 + y^2 = c^2$; $y - x = k$ típusú egyenletrendszer megoldását igényli. Ebből átalakításokkal a $2x^2 + 2kx + k^2 - c^2 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek a szövegben megfogalmazott szabály szerinti megoldását mai jelölésekkel leírva, az alábbi módon fejezzük ki:

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{8c^2 - 4k^2}}{4}.$$

Indiából, az V. századból származik az a kamatszámítási feladat, amely a $tx^2 + px = qp$ egyenlet megoldásához vezet. Az ott leírt utasítások alapján a keresett x értékét az $x = \frac{\sqrt{qpt + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2}}{t}$ összefüggéssel számolhatjuk ki. Mindkét probléma megoldása azonos a ma használt megoldóképlet szerinti utasítással.

A következőkben olyan képletet keresünk, amely megadja a másodfokú egyenlet megoldásait az együttthatók segítségével. Ezt a másodfokú egyenlet **megoldóképletének** nevezzük.



1. példa Egészítsük ki teljes négyzetté, majd alakítsuk szorzattá, végül oldjuk meg az alábbi másodfokú egyenleteket!

a) $x^2 - 10x + 16 = 0$ b) $x^2 + 16x + 64 = 0$ c) $x^2 - 12x + 42 = 0$

Megoldás:

a) Egészítsük ki teljes négyzetté a bal oldali kifejezést!

$$x^2 - 10x + 16 = x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 25 - 9 = (x - 5)^2 - 3^2$$

Az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosság alkalmazásával alakítsuk szorzattá!

Így $(x - 5)^2 - 3^2 = (x - 5 - 3) \cdot (x - 5 + 3) = (x - 8) \cdot (x - 2)$. Ezzel az $(x - 8)(x - 2) = 0$ egyenlethez jutottunk. Mivel egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így a megoldások: $x_1 = 8$; $x_2 = 2$.

Az egyenletnek **két különböző valós megoldása van**.

b) Ebben az egyenletben ráismerhetünk egy teljes négyzetre, így azt kapjuk, hogy $(x + 8)^2 = 0$. Ebből az egyenlet megoldása $x = -8$. Ennek az egyenletnek **egy valós megoldása van**, vagy úgy is fogalmazhatunk, hogy a **két valós megoldása egyenlő**.

c) Egészítsük ki teljes négyzetté a másodfokú kifejezést!

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 - 12x + 42 = x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 36 + 6 = (x - 6)^2 + 6$$

Az alábbi egyenletet kell megoldani:

$$(x - 6)^2 + 6 = 0.$$

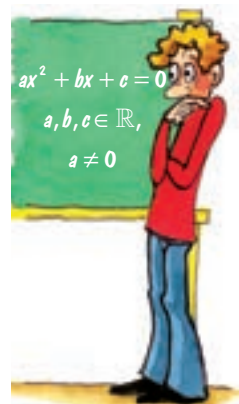
Mivel a bal oldali kifejezés első tagja egy teljes négyzet, ezért minden valós x -re nemnegatív. Ha ehhez hozzáadunk hatot, akkor a kifejezés értéke legalább hat lesz, így az egyenletnek **nincs valós megoldása**.



Láttuk, hogy egy másodfokú egyenletnek lehet két különböző valós megoldása, lehet két egyenlő valós megoldása, és előfordulhat, hogy nincs valós megoldása.



Definíció Az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) alakú egyenletet **egyszerű másodfokú egyenletnek** nevezzük.



2.4. ábra Másodfokú egyenlet

2.2. A másodfokú egyenlet megoldóképlete

Az a, b, c együtthatók a definícióban közölt feltételeknek megfelelő, rögzített számok, azaz **paraméterek**.

Az eddigi példákban szereplő másodfokú egyenleteket teljes négyzetté kiegészítéssel és szorzattá alakítással oldottuk meg. Ez sugallja azt, hogy próbálkozzunk meg a megoldóképlet levezetésénél is ezzel a módszerrel.

Induljunk ki az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) egyenletből, és emeljük ki az a együtthatót!

$$a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

Ezután a zárójelben levő kifejezést alakítsuk teljes négyzetté!

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = \\ &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \\ &= \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

Írjuk vissza az egyenletbe!

$$a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \\ D &= b^2 - 4ac \geq 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

2.5. ábra Megoldóképlet

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



2.6. ábra A megoldás kulcsa a megoldóképlet

a) Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor $a - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$,

így $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ minden valós x esetén.

Tehát az egyenlet bal oldala az a értékétől függően pozitív vagy negatív, így nem lehet 0. Az egyenletnek ebben az esetben nincs valós megoldása.

b) Ha $b^2 - 4ac = 0$, akkor kapjuk, hogy $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Mivel $a \neq 0$,

így $x + \frac{b}{2a} = 0$. Tehát az egyenlet megoldása: $x = -\frac{b}{2a}$.

c) Ha $b^2 - 4ac > 0$, akkor $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$. Ezt felhasználva az

egyenlet bal oldalát szorzattá alakíthatjuk az $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ azonosság alapján.

$$a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 \right) = 0.$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0$$

Mivel $a \neq 0$, így a másik két tényező valamelyikének kell nullának

lennie. Tehát $x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$, vagy $x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$.

Ebből a két megoldás: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ és $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

A két megoldást egyben is felírhatjuk, és így megkapjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. A valós megoldások

számában fontos szerepet játszó $D = b^2 - 4ac$ kifejezést a **másodfokú egyenlet diszkriminánsának** nevezzük.

Megjegyzés: Ha a b vagy c együtthatók valamelyike 0, akkor hiányos másodfokú egyenletet kapunk. Ekkor nem feltétlenül kell a megoldóképletet alkalmazni, mert az alábbi módokon is eljárhatunk.

➤ Ha $b = c = 0$.

Ekkor az egyenlet: $ax^2 = 0$. Ebből a megoldás: $x = 0$.

➤ Ha $c = 0$, $b \neq 0$.

Ebben az esetben az $ax^2 + bx = 0$ egyenlet megoldását keressük. Alakítsuk szorzattá!

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

Mivel egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért

$x = 0$ vagy $ax + b = 0$. Így az egyenlet megoldásai: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$.

➤ Ha $b = 0$, $c \neq 0$.

Az egyenlet ebben az esetben $ax^2 + c = 0$ alakú. Tudjuk, hogy $x^2 \geq 0$ minden valós x -re. Ezért ha a és c pozitív, akkor a bal oldal is pozitív, így nincs megoldás a valós számok halmazán. Ha a és c negatív, akkor a bal oldal is negatív, tehát ekkor sincs megoldás a valós számok halmazán. Ha a és c ellenkező előjelű, akkor a hányadosuk negatív, tehát a $-\frac{c}{a} > 0$. Így kapjuk, hogy:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow |x| = \sqrt{-\frac{c}{a}} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}; x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Bizonyítottuk tehát az alábbi tételt.



Tétel Az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) egyismertlenes másodfokú egyenletnek

- két valós megoldása az $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ha a diszkriminánsa pozitív, azaz $D = b^2 - 4ac > 0$;
- egy valós megoldása vagy két egyenlő valós megoldása az $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, ha a diszkriminánsa nulla, azaz $D = b^2 - 4ac = 0$;
- nincs valós megoldása, ha a diszkriminánsa negatív, azaz $D = b^2 - 4ac < 0$.



2.7. ábra Ezt érdemes megjegyezni!

2.3. Kidolgozott példák



2. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

- a) $2x^2 + 5x - 12 = 0$
- b) $(3x - 8)^2 - (4x - 6)^2 + (5x - 2) \cdot (5x + 2) + 36x = 104$
- c) $\frac{4 + 2x}{3x^2 - 12} - \frac{1}{x - 2} = 1 - \frac{1}{2 - x}$

Megoldás:

a) Ha összehasonlítjuk a $2x^2 + 5x - 12 = 0$ egyenletet a definícióban szereplő $ax^2 + bx + c = 0$ alakkal, akkor könnyen beazonosíthatjuk az együtthatókat. Ez alapján $a = 2$, $b = 5$, $c = -12$. Határozzuk meg az egyenlet diszkriminánsát!

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 25 + 96 = 121$$

Mivel $D > 0$, ezért az egyenletnek két különböző valós megoldása van:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \text{ és } x_2 = -4.$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 12 &= 0 \\ ax^2 + bx + c &= 0 \\ a &= 2; b = 5; c = -12 \end{aligned}$$

2.8. ábra Az együtthatók meghatározása



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



$$\frac{4+2x}{3(x^2-4)} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{x-2}$$

2.9. ábra Keressük a közös nevezőt

Ellenőrzéssel is meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.

b) Végezzük el az egyenlet bal oldalán kijelölt műveleteket, majd vonjunk össze és a végén redukáljunk nullára!

$$(3x-8)^2 - (4x-6)^2 + (5x-2) \cdot (5x+2) + 36x = 104$$

$$9x^2 - 48x + 64 - (16x^2 - 48x + 36) + 25x^2 - 4 + 36x = 104$$

$$9x^2 - 48x + 64 - 16x^2 + 48x - 36 + 25x^2 - 4 + 36x = 104$$

$$18x^2 + 36x + 24 = 104$$

$$18x^2 + 36x - 80 = 0$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát 2-vel!

$$9x^2 + 18x - 40 = 0$$

Mivel $a = 9$, $b = 18$ és $c = -40$, így a diszkrimináns

$$D = b^2 - 4ac = 18^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-40) = 324 + 1440 = 1764.$$

Mivel $D > 0$, ezért az egyenletnek két különböző valós megoldása van.

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{1764}}{18} = \frac{-18 \pm 42}{18} \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3} \text{ és } x_2 = -\frac{10}{3}$$

Ellenőrzéssel is meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.

c) Alakítsuk szorzattá a nevezőket, majd határozzuk meg az egyenlet értelmezési tartományát!

$$\frac{4+2x}{3 \cdot (x^2-4)} - \frac{1}{x-2} = 1 - \frac{1}{2-x}$$

$$\frac{4+2x}{3 \cdot (x-2) \cdot (x+2)} - \frac{1}{x-2} = 1 - \frac{1}{2-x}$$

Mivel a nevezők egyike sem lehet nulla, ezért az egyenlet értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a közös nevezővel, azaz $3 \cdot (x-2) \cdot (x+2)$ -vel!

$$4+2x-3 \cdot (x+2) = 3 \cdot (x-2) \cdot (x+2) - [-3 \cdot (x+2)]$$

Végezzük el a zárójelek felbontását és az összevonást, majd redukáljuk nullára az egyenletet!

$$4+2x-3x-6 = 3x^2-12+3x+6$$

$$-x-2 = 3x^2+3x-6$$

$$0 = 3x^2+4x-4$$

Mivel $a = 3$, $b = 4$, $c = -4$, így a diszkrimináns

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 16 + 48 = 64.$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3} \text{ és } x_2 = -2$$

Mivel az $x_2 = -2$ nincs benne az értelmezési tartományban, ezért az nem megoldása az egyenletnek. Az $x_1 = \frac{2}{3}$ viszont igen, erről ellenőrzéssel is meggyőződhetünk.



2.10. ábra Mennyi arany, és mind hamis!

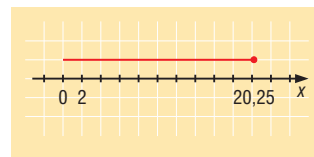


3. példa Határozzuk meg a c valós paraméter értékét úgy, hogy a $4x^2 - 18x + c = 0$ egyenletnek legyen valós megoldása!

Megoldás:

Egy másodfokú egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz $D = b^2 - 4ac \geq 0$. Mielőtt felírnánk az egyenlet diszkriminánsát, határozzuk meg az a , b , c együtthatókat! Az $a = 4$, $b = -18$ és c paraméter, azaz a feladatnak megfelelő, rögzített szám. Ennek alapján a diszkrimináns: $D = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 324 - 16c$, melynek értéke nemnegatív. Tehát $324 - 16c \geq 0$, azaz $20,25 \geq c$.

Összegzés: Az egyenletnek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha $c \leq 20,25$.



2.11. ábra $c \leq 20,25$

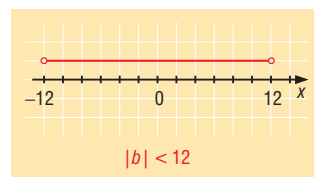


4. példa Határozzuk meg a b valós paraméter értékét úgy, hogy a $3x^2 + bx + 12 = 0$ másodfokú egyenletnek ne legyen valós megoldása!

Megoldás:

Egy másodfokú egyenletnek pontosan akkor nincs valós megoldása, ha a diszkrimináns negatív, azaz $D = b^2 - 4ac < 0$. Az egyenletben szereplő együtthatók $a = 3$, $c = 12$ és a b paraméter. Így $D = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = b^2 - 144$, mely negatív értékű. Így $b^2 - 144 < 0$, azaz $b^2 < 144$. Ebből kapjuk, hogy $|b| < 12$, tehát $-12 < b < 12$.

Összegzés: A $3x^2 + bx + 12 = 0$ másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása, ha $-12 < b < 12$.



2.12. ábra Ábrázolás számegyenesen

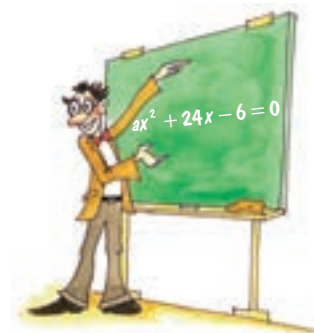


5. példa Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az $ax^2 + 24x - 6 = 0$ egyenletnek egy valós megoldása legyen!

Megoldás:

Az egyenletben szereplő együtthatók a $b = 24$, $c = -6$ és az a paraméter. Az $ax^2 + 24x - 6 = 0$ egyenlet nem feltétlenül másodfokú. Ha $a = 0$, akkor a $24x - 6 = 0$ elsőfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldása $x = \frac{1}{4}$. Ha $a \neq 0$, akkor az egyenlet másodfokú. Ebben az esetben pontosan akkor van egy valós megoldása, ha a diszkriminánsa 0, azaz $D = b^2 - 4ac = 24^2 - 4a(-6) = 576 + 24a = 0$. Ebből $a = -24$.

Összegzés: Az $ax^2 + 24x - 6 = 0$ egyenletnek egy valós megoldása van, ha $a = 0$ vagy $a = -24$.



2.13. ábra Figyeljünk a főegyütthatóra!



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



Oldjuk meg!

- Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!
a) $x^2 - 2x - 35 = 0$ b) $5x^2 - 9x - 2 = 0$ c) $-8x^2 + 2x + 3 = 0$
d) $2x^2 - 4x - 5 = 0$ e) $4x^2 + 60x + 225 = 0$ f) $3x^2 - 16x + 22 = 0$
g) $-5x^2 + 14x - 10 = 0$
- Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a racionális számok halmazán!
a) $(x-7) \cdot (x+3) + (x-1) \cdot (x+5) = -2x - 2$
b) $(3x-4)^2 - (6x+7)^2 = 48 - 216x$
c) $(7-2x) \cdot (7+2x) = (2x+3)^2 - 12x$
d) $(11-7x)^2 - (6x-5) \cdot (6x+5) + (2x+9)^2 - 10 = (3-5x)^2$
- Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!
a) $\frac{2x+10}{3x} - \frac{2x+2}{x^2} = 0$ b) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{20x}{x^2-9}$
c) $\frac{2x}{x+2} - \frac{x+2}{2-x} = \frac{10+x^2-x}{x^2-4}$ d) $3 - \frac{2x}{x-5} = \frac{-25}{x^2-10x+25}$
- Határozzuk meg az a , b , illetve c valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenleteknek két különböző valós megoldása legyen!
a) $ax^2 - 14x + 5 = 0$ b) $2x^2 - bx + 18 = 0$ c) $5x^2 + 10x - c = 0$
- Határozzuk meg az a , b , illetve c valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenleteknek egy valós megoldása legyen!
a) $ax^2 + 21x - 14 = 0$ b) $11x^2 + bx - 33 = 0$ c) $x^2 - 15x + c = 0$
- Határozzuk meg az a , b , illetve c valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenleteknek ne legyen valós megoldása!
a) $ax^2 + 7x - 21 = 0$ b) $5x^2 + bx + 45 = 0$ c) $3x^2 - 23x - c = 0$

3. Másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatok



3.1. ábra A park látványterve díszburkolattal



1. példa

Egy 100 m hosszú, 75 m széles, téglalap alakú parkot keretszerűen, egy meghatározott szélességű járdával vesznek körül, melyet díszburkolattal borítanak be. A burkolat négyzetmétere 3200 Ft-ba kerül. Mekkora a járda szélessége, ha a beborításához szükséges díszburkolat ára 2 880 000 Ft?

Megoldás:

A négyzetméterárból és a teljes költségből kiszámolhatjuk a járda területét: $T = 2880000 : 3200 = 900 \text{ m}^2$.

Készítsünk ábrát! (3.2. ábra) A járda szélességét jelöljük d -vel!

Az ábrán a -val jelölt szakasz hossza 100 m, a b -vel jelölt 75 m. Így a nagyobb területű téglalap hosszabbik oldala $100 + 2d$, a másik $75 + 2d$. A járda területét megkapjuk, ha a teljes területből kivonjuk a füves rész területét. Ennek alapján írhatjuk fel az egyenletet.

$$(100 + 2d)(75 + 2d) - 100 \cdot 75 = 900$$

Végezzük el a beszorzást, majd redukáljuk nullára az egyenletet!

$$100 \cdot 75 + 200d + 150d + 4d^2 - 100 \cdot 75 = 900$$

$$4d^2 + 350d - 900 = 0$$

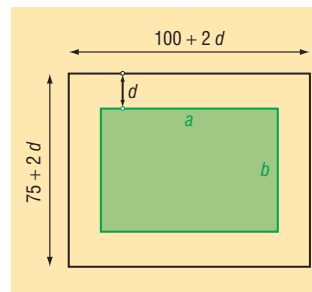
$$2d^2 + 175d - 450 = 0$$

Az egyenlet diszkriminánsa

$$D = b^2 - 4ac = 175^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-450) = 34\,225 = 185^2,$$

$$\text{így } d_{1,2} = \frac{-175 \pm 185}{4} \Rightarrow d_1 = 2,5 \text{ és } d_2 = -90. \text{ A feladat feltételeinek}$$

csak a 2,5 felel meg. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk ennek helyességéről. A járda szélessége tehát 2,5 m.



3.2. ábra A park tervrajza



2. példa

Egy kertészet faiskolájában háromféle gyümölcsfacsemetét nevelnek (alma, barack és meggy) három téglalap alakú területen. A barackfák parcellájában 17-tel több sor van, mint ahány oszlop. Az almafák parcellájában 2-vel több sor és 4-gyel több oszlop van, mint a meggyfák területén 6-tal kevesebb sor és 7-tel kevesebb oszlop, mint az almafákén. A teljes gyümölcsfaállományban hány százaléka almafa, ha abból 1106-tal kevesebb van, mint a másik két fajtából összesen? (A végeredményt két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg!)



3.3. ábra Faiskola

Megoldás:

Mivel a barackfák parcellájában 17-tel több sor van, mint ahány oszlop, ezért célszerű az itt lévő oszlopok számát x -szel jelölni. Készítsünk egy táblázatot, amelyet a feladat szövege alapján értelemszerűen kitöltünk.

	Barack	Alma	Meggy
Oszlop	x	$x + 4$	$x + 4 - 7 = x - 3$
Sor	$x + 17$	$x + 17 + 2 = x + 19$	$x + 19 - 6 = x + 13$
Darabszám	$x \cdot (x + 17)$	$(x + 4) \cdot (x + 19)$	$(x - 3) \cdot (x + 13)$

A feladat szövege szerint az almafák számához 1106-ot adva megkapjuk a másik két fajta darabszámát. Ez alapján az egyenlet:

$$(x + 4) \cdot (x + 19) + 1106 = x \cdot (x + 17) + (x - 3) \cdot (x + 13)$$

Végezzük el a beszorzást, vonjunk össze, és redukáljunk nullára!



3.4. ábra A jól végzett munka gyümölcszei



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



3.5. ábra Szezon végi kiárusítás



3.6. ábra Elégedett vásárló

$$x^2 + 4x + 19x + 76 + 1106 = x^2 + 17x + x^2 - 3x + 13x - 39$$

$$x^2 + 23x + 1182 = 2x^2 + 27x - 39$$

$$0 = x^2 + 4x - 1221$$

Az egyenlet diszkriminánsa:

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot (-1221) = 4900 = 70^2, \text{ így}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 70}{2} \Rightarrow x_1 = 33 \text{ és } x_2 = -37.$$

A -37 nem felel meg a feladat feltételeinek. Így barackfából $33 \cdot 50 = 1650$, almafából $37 \cdot 52 = 1924$ és meggyfából $30 \cdot 46 = 1380$ darab van a kertészetben. Ellenőrzéssel meg lehet győződni az adatok helyességéről. A teljes gyümölcsfaállományban 4954 db fa van. Ennek $1924 : 4954 \cdot 100 \approx 38,84\%$ -a almafa.



3. példa Egy kereskedő a nyári ruhákat 75%-os haszonnal adja el. A szezon közepétől kétszer csökkenti az árakat. Másodszorra kétszer akkora százalékkal, mint először, de még így is 26%-os haszonra tesz szert. Hány százalékosak az egyes árleszállítások?

Megoldás:

Mivel 75%-os haszonnal adja el a nyári ruhákat a kereskedő, ezért az eladási ár a beszerzési árnak a 175%-a, azaz 1,75-szorosa. Jelöljük x -szel az első árleszállítás százalékbán megadott értékének a századrészét! Az x értéke 0 és 1 közé esik. Ekkor az első árleszállítás után az aktuális ár az $(1-x)$ -szeresére, a második árleszállítás után $(1-2x)$ -szeresére változik. Foglaltuk táblázatba az adatokat!

Beszerzési ár:	y
Eladási ár:	$1,75y$
Első árleszállítás utáni ár:	$1,75y \cdot (1-x)$
Második árleszállítás utáni ár:	$1,75y \cdot (1-x) \cdot (1-2x)$
	$1,26y$

A második árleszállítás utáni árat kétféleképpen fejeztük ki. Ennek alapján írhatjuk fel az egyenletet.

$$1,75y \cdot (1-x) \cdot (1-2x) = 1,26y$$

Mivel az y pozitív, és mindkét oldalon szerepel szorzótényezőként, ezért az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk vele. Így az

$$1,75(1-x) \cdot (1-2x) = 1,26$$

egyismeretlenes egyenlethez jutunk. Végezzük el a beszorzást, majd redukáljunk nullára!

$$1,75 - 3,5x - 1,75x + 3,5x^2 = 1,26$$

$$3,5x^2 - 5,25x + 0,49 = 0$$

Az egyenlet diszkriminánsa

$$D = b^2 - 4ac = 5,25^2 - 4 \cdot 3,5 \cdot 0,49 = 20,7025 = 4,55^2,$$

$$\text{így } x_{1,2} = \frac{5,25 \pm 4,55}{7} \Rightarrow x_1 = 1,4 \text{ és } x_2 = 0,1. \text{ Ebből csak a második}$$

felel meg a feladat követelményeinek. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott érték helyességéről. Tehát az első áruszállítás 10%-os, a második 20%-os volt.



4. példa Egy személygépkocsi az eredetileg tervezettnél

$20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val kisebb átlagsebességgel tudott haladni, így a tervezettnél 42 perccel hosszabb idő alatt tette meg a 168 km-es utat. Mennyi volt az eredetileg tervezett átlagsebesség és menetidő?

Megoldás:

A feladat megoldásához a fizikából már jól ismert út = átlagsebesség · idő összefüggést használjuk fel. Az utat kilométerben, a sebességet

$\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban, az időt órában mérjük. Ezért váltsuk át a 42 percet órára:

42 min = 0,7 h. Mivel az eredetileg tervezett sebességet keressük, ezért jelöljük ezt x -szel! ($x > 20$)

Készítsünk táblázatot!

	Sebesség	Út	Idő
Tervezett	x	168	$\frac{168}{x}$
Megvalósult	$x - 20$	168	$\frac{168}{x - 20}$

Az egyenletet az idő oszlopa alapján írhatjuk fel. Tudjuk, hogy 0,7 h-val tovább tartott az út a tervezettnél, ezért a tényleges idő 0,7 h-val több a tervezettnél. Így a $\frac{168}{x} + 0,7 = \frac{168}{x - 20}$ egyenletet kapjuk. Szorozzuk

meg az egyenlet mindkét oldalát az $x(x - 20)$ közös nevezővel, majd vonjunk össze és redukáljuk nullára az egyenletet! Természetesen az x sem 0, sem 20 nem lehet.

$$168(x - 20) + 0,7x \cdot (x - 20) = 168x$$

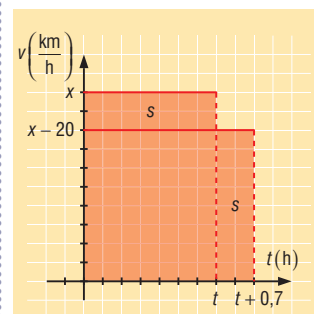
$$168x - 3360 + 0,7x^2 - 14x = 168x$$

$$0,7x^2 - 14x - 3360 = 0$$

$$x^2 - 20x - 4800 = 0$$



3.7. ábra Vajon még odaérek?



3.8. ábra Ábrázoljuk a sebességet az idő függvényében!



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



3.9. ábra Lehet, hogy nem kellene ennyire sietni?!

Az egyenlet diszkriminánsa

$$D = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \cdot (-4800) = 19600 = 140^2,$$

így $x_{1,2} = \frac{20 \pm 140}{2} \Rightarrow x_1 = 80$ és $x_2 = -60$. Ebből a feladat feltételeinek csak a 80 felel meg, melyről ellenőrzéssel meggyőződhetünk. A tervezett sebesség $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a tervezett menetidő 2,1 h.



5. példa Miklós egy tudományos pályázatra tanulmányt készít. Jó barátok lévén, Fanni felajánlja, hogy segít neki legépelni. Miklós egyedül 5 órával hosszabb idő alatt végezne a munkával, mint Fanni. Mindketten reggel 8-kor kezdték el a gépelést. Miklós fél óra ebédszünetet tartott, és 16 óra 30 perckor fejezte be a munkát. Fanninak délben el kellett mennie egy órára, és mivel este színházba ment, 15 órakor befejezte a gépelést. Így aznap a dolgozat 80%-ával végeztek.

- Hány óra alatt tudnák külön-külön legépelni a tanulmányt?
- Másnap Fanninak el kell utaznia, így Miklósnak kell egyedül befejeznie a gépelést. Ha reggel 8 órakor kezd, akkor végez-e ebédig a hátralevő munkával?



3.10. ábra Miklós és Fanni

Megoldás:

a) Ha gondosan végigolvassuk a feladat szövegét, akkor meg tudjuk mondani, hogy ki hány órát dolgozott a megadott napon. Mivel 8 órakor kezdtek, és Miklós fél óra ebédszünettel 16 óra 30 perckor fejezte be a gépelést, ezért ő 8 órát gépelt. Fanni egy óra szünettel, 15 órakor befejezte a munkát, ezért 6 órát dolgozott. Jelöljük x -szel azt az időt, amennyi alatt Fanni egyedül gépelné le a tanulmányt, ekkor Miklós önálló gépelési ideje $x+5$. Természetesen a gépelési időt órában mérjük. Az ilyen jellegű, együttes munkáról szóló feladatokban nagyon fontos az egységnyi idő alatt – itt egy óra alatt – elvégzett munkára, vagyis a teljesítményre visszavezetni a megoldást. Mivel Fanni x óra alatt végezne a munkával, ezért egy óra alatt a munka $\frac{1}{x}$ -ed részét

végezné el, míg Miklós $\frac{1}{x+5}$ -öd részét. Így az adott napon Fanni a munka $\frac{6}{x}$ -ed részével, Miklós a $\frac{8}{x+5}$ -öd részével végez. Mivel ketten együtt a dolgozat 80%-át gépelik le azon a napon, ezért az alábbi egyenletet írhatjuk fel

$$\frac{6}{x} + \frac{8}{x+5} = 0,8$$

ahol $x > 0$. Szorozzuk meg az egyenlet két oldalát a közös nevezővel, majd összevonás után redukáljuk nullára az egyenletet!

	A munka-végzés ideje	Egy óra alatt elvégzett munka
Miklós	$x + 5$	$\frac{1}{x+5}$
Fanni	x	$\frac{1}{x}$

3.11. ábra Foglaljuk táblázatba!

$$6(x+5)+8x=0,8x \cdot (x+5)$$

$$6x+30+8x=0,8x^2+4x$$

$$0=0,8x^2-10x-30$$

$$0=x^2-12,5x-37,5$$

Az egyenlet diszkriminánsa

$$D=b^2-4ac=(-12,5)^2-4 \cdot (-37,5)=306,25=17,5^2,$$

így:

$$x_{1,2}=\frac{12,5 \pm 17,5}{2} \Rightarrow x_1=15 \text{ és } x_2=-2,5.$$

A feladat feltételeinek csak a 15 felel meg, melyről behelyettesítéssel meggyőződhetünk. Tehát Fanni 15 óra alatt, Miklós 20 óra alatt gépelné le egyedül a tanulmányt.

b) Mivel a munka 20%-a maradt másnapra, ezért Miklós $t=20 \cdot 0,2=4$ h alatt befejezi a gépelést. Tehát végez ebédig.



3.12. ábra Segíthetek?



Oldjuk meg!

1. Egy tört számlálója 4-gyel nagyobb a nevezőjénél. Ha a törthöz hozzáadjuk a reciprokát, akkor $\frac{58}{21}$ -et kapunk. Melyik ez a tört?
2. Egy téglalap alakú fénykép körül egyenlő szélességű keret van. A teljes kép két oldala 20 cm, illetve 25 cm. A teljes kép területének 60%-a a fénykép területe. Mekkora a fénykép oldalai, milyen széles a keret?
3. Egy osztály háromnapos kirándulásra megy, melynek busz költsége összesen 210 000 Ft. Mivel közben öten lemondta a kirándulást, ezért az eredetileg egy főre tervezett költséget 1400 Ft-tal meg kellett növelni. Hány fő megy kirándulni, és hány forintot kell befizetniük fejenként?
4. Egy kosztüm árát először felemelték valahány százalékkal, majd háromszor annyi százalékkal csökkentették, mint amennyivel emelték, így 23%-kal olcsóbb lett, mint eredetileg. Hány százalékkal emelték az árát először?
5. Egy kétjegyű szám számjegyeinek az összege 9. Ha a számot megszorozzuk a számjegyei felcserélésével kapott számmal, akkor eredményként 1944-et kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?
6. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelyben az átlók és oldalak számának az összege 253?
7. Mekkora annak a rombusznak a területe, melynek a kerülete 104 cm, és az egyik átlója 28 cm-rel nagyobb, mint a másik?
8. Egy kereszteződés két egymásra merőleges útjának egyikén egy $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másikon egy $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességű autó közeledik a kereszteződés felé. Egy időpontban a távolságuk 5 km. Amikor a nagyobb sebességű autó áthalad a kereszteződésen, a másik még 1,6 km távolságra van tőle. Milyen messze voltak a kereszteződéstől, amikor a távolságuk 5 km volt?

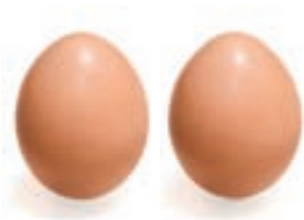


Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

9. Egy városból attól 180 km-re lévő másik városba egyszerre indul egy teherautó és egy személygépkocsi. A személygépkocsi, melynek sebessége $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val nagyobb, 36 perccel ér hamarabb célba, mint a teherautó. Mekkora az egyes autók sebessége, és mennyi a menetidejük?
10. Ha két csővön egyszerre folyik a víz egy medencébe, akkor 8 óra alatt a medence 90%-át töltik meg. Mennyi idő alatt töltik meg külön-külön a medencét, ha az egyiknek 4 órával kevesebb időre lenne szüksége ehhez, mint a másiknak?

4. A gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés

4.1. A gyöktényezős alak



4.1. ábra Ez is azonosság

A 2. lecke 1. példájában szerepelt az $x^2 - 10x + 16 = 0$ másodfokú egyenlet, melyet teljes négyzetté kiegészítéssel oldottunk meg. Az egyenlet bal oldalán szereplő másodfokú polinomot szorzattá alakítottuk, így az $(x-8) \cdot (x-2) = 0$ egyenlethez jutottunk. Ebből kaptuk a megoldásokat: $x_1 = 8$, $x_2 = 2$. A teljes négyzetté kiegészítéssel történő szorzattá alakítás alapján felírhatjuk, hogy $x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8)$. Ez az egyenlőség minden valós x esetén fennáll, azaz **azonosság**. A jobb oldalon szereplő mindkét tényező második tagjában a másodfokú polinom egy-egy gyöke szerepel. Ezért ezt a szorzatalakot a másodfokú polinom **gyöktényezős alakjának** nevezzük. A példa sugallja, hogy egy másodfokú polinomot valós gyökei ismeretében – feltéve, hogy léteznek – szorzattá alakíthatunk.



Tétel

Legyen a $p(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom – ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$ – olyan, amelynek léteznek nem feltétlenül különböző, valós gyökei, azaz létezik az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletnek valós megoldása. Legyenek ezek x_1 és x_2 . Ekkor a polinom felírható $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ alakban, amelyet a másodfokú polinom **gyöktényezős alakjának** nevezünk.



4.2. ábra Be lehet ezt bizonyítani?

Bizonyítás: Mivel a $p(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú polinomnak létezik valós gyöke, ezért a $D = b^2 - 4ac$ diszkrimináns nemnegatív. Így a másodfokú egyenlet megoldóképletének levezetése során látottak alapján felírhatjuk, hogy $ax^2 + bx + c = a \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$ minden valós x -re.

Mivel $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ és $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, így $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ minden valós x -re.

A gyöktényezős alak lehetőséget ad arra, hogy a másodfokú polinomokat viszonylag egyszerűen szorzattá alakíthassuk.



1. példa Írjuk fel elsőfokú tényezők szorzataként a $p(x) = 3x^2 + x - 10$ másodfokú polinomot!

Megoldás:

Keressük meg a polinom megoldásait, azaz oldjuk meg a $3x^2 + x - 10 = 0$ másodfokú egyenletet! A diszkrimináns $D = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) = 121$, tehát:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{-1 \pm 11}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} \text{ és } x_2 = -2.$$

Ennek alapján:

$$3x^2 + x - 10 = 3 \left(x - \frac{5}{3} \right) \cdot (x + 2) = (3x - 5) \cdot (x + 2).$$



2. példa Egyszerűsítsük a $\frac{2x^2 - 5x - 7}{x^2 + 8x + 7}$ algebrai törtet!

Megoldás: Először határozzuk meg a tört értelmezési tartományát! Mivel a nevező nem lehet 0, ezért számítsuk ki a nevező gyökeit, azaz oldjuk meg az $x^2 + 8x + 7 = 0$ egyenletet! A $D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 36$, így $x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-8 \pm 6}{2}$, tehát $x_1 = -1$ és $x_2 = -7$. Az értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{-7, -1\}$.

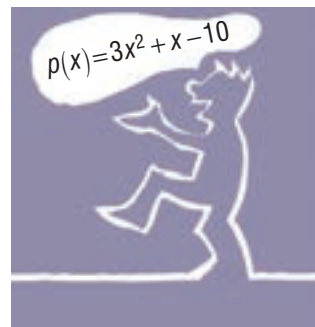
Ahhoz, hogy egyszerűsíteni tudjuk az algebrai törtet, szorzattá kell alakítani a számlálóját és a nevezőjét is. Használjuk fel a gyöktényezős alakot! Mivel a nevező gyökei -1 , illetve -7 , így $x^2 + 8x + 7 = (x + 1) \cdot (x + 7)$. Határozzuk meg a számláló gyökeit! Ehhez megoldjuk a $2x^2 - 5x - 7 = 0$ másodfokú egyenletet. A $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 81$, tehát:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{5 \pm 9}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{7}{2} \text{ és } x_2 = -1.$$

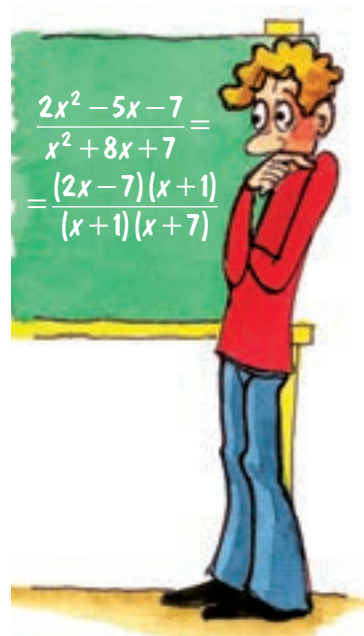
A számláló szorzat alakja

$$2x^2 - 5x - 7 = 2 \left(x - \frac{7}{2} \right) \cdot (x + 1) = (2x - 7) \cdot (x + 1).$$

Tehát: $\frac{2x^2 - 5x - 7}{x^2 + 8x + 7} = \frac{(2x - 7) \cdot (x + 1)}{(x + 1) \cdot (x + 7)} = \frac{2x - 7}{x + 7}$.



4.3. ábra Alakítsuk szorzattá!



4.4. ábra A szorzattá alakítás után már egyszerűsíthetünk



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

4.2. Összefüggés a gyökök és együtthatók között



François Viète

(1540–1603) kiváló francia matematikus. Jogászként dolgozott, először III. Henrik, majd IV. Henrik ügyészeként. A politikai ellenfelei intrikáinak köszönhetően kegyvesztett lett, ezért látott neki élete fő műve, az *In artem analyticam isogage* (Bevezetés az analízis tudományába) című könyve megírásához. Az egyenletek megoldásának általános módszereit kereste, ezért vezette be az algebrai egyenletek felírására a szimbólumokat. Az ismeretlen mennyiségeket magánhangzókkal, az együtthatókat mássalhangzókkal jelölte. A jelölésrendszere egy kicsit nehézkes volt, de így is jelentős érdeme van az algebraiban használatos jelölésrendszer kidolgozásában.

4.5. ábra Egy kis matematika-történet

A másodfokú egyenlet megoldóképlete egyfajta összefüggést jelent a másodfokú polinom együtthatói és gyökei között. Nagyon sok feladat megoldásában jól alkalmazható, de vannak olyan problémák, melyek megoldásához a gyökök és együtthatók közötti egyszerűbb összefüggésre van szükségünk. Ennek megismeréséhez használjuk fel a másodfokú polinom gyöktényező alakját!

Legyen a $p(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom – ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$ – olyan, amelynek léteznek nem feltétlenül különböző, valós gyökei. Ezek legyenek x_1 és x_2 . Ekkor minden valós x esetén fennáll, hogy $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$. Végezzük el a jobb oldali kifejezésben az összesorzást!

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = a \cdot x^2 - a \cdot x_1 \cdot x - a \cdot x_2 \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2 =$$
$$= a \cdot x^2 - a \cdot (x_1 + x_2) \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2.$$

Ennek alapján minden valós x esetén fennáll, hogy $ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a \cdot x_1 \cdot x_2$. Ez az egyenlőség akkor és csak akkor teljesülhet, ha a megfelelő együtthatók egyenlők, azaz $b = -a \cdot (x_1 + x_2)$ és $c = a \cdot x_1 \cdot x_2$. Ebből $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, melyet a másodfokú polinom **gyökei és együtthatói közötti összefüggésnek**, vagy **Viète-formuláknak** is nevezünk.

Igazoltuk tehát az alábbi tételt.



Tétel

Legyen a $p(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom – ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$ – olyan, amelynek léteznek nem feltétlenül különböző, valós gyökei, legyenek ezek x_1 és x_2 ! Ekkor a polinom együtthatói és gyökei között fennállnak az $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ összefüggések, az ún. **Viète-formulák**.



3. példa

Adjunk meg olyan másodfokú polinomot, amelynek gyökei -2 és 11 !

Megoldás:

1. módszer:

Használjuk a másodfokú polinom gyöktényező alakját! Az a együtthatót tetszőleges, 0-tól különböző számnak választhatjuk, ezért legyen

$a = 1!$ Mivel $x_1 = -2$ és $x_2 = 11$, így $(x+2) \cdot (x-11) = x^2 + 2x - 11x - 22 = x^2 - 9x - 22$. Tehát a keresett polinom $p(x) = x^2 - 9x - 22$. Ez természetesen azt is jelenti, hogy az $x^2 - 9x - 22 = 0$ egyenlet valós megoldásai -2 és 11 .

2. módszer:

Használjuk a másodfokú polinomra felírt Viète-formulákat! Legyen $a = 1!$

Ekkor az $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ alapján $-b = -2 + 11 = 9$, azaz $b = -9$,

és az $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ alapján $c = -2 \cdot 11 = -22$. Tehát a keresett polinom:

$$p(x) = x^2 - 9x - 22.$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c;$$

$$a \neq 0; D \geq 0$$

$$\text{Ekkor } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

4.6. ábra Viète-formulák



4. példa Adjuk meg a $7x^2 + 15x - 14 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásainak

- a) reciprokösszegét, b) négyzetösszegét,
c) különbségét, d) köbösszegét
a megoldások meghatározása nélkül!

Megoldás:

a) Az együtthatók $a = 7$, $b = 15$ és $c = -14$. Mivel $D = 15^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-14) = 225 + 392 = 617$, ezért az egyenletnek két valós megoldása van. Írjuk fel a megoldások reciprokösszegét, és végezzük el a kijelölt műveleteket!

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} \quad \text{A számlálóban megjelent a két megoldás össze-}$$

ge, a nevezőben a két megoldás szorzata. Ez sugallja, hogy használjuk

a Viète-formulákat. Az $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, így $x_1 + x_2 = -\frac{15}{7}$ és $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$,

$$\text{így } x_1 \cdot x_2 = \frac{-14}{7} = -2. \text{ Ennek alapján: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-\frac{15}{7}}{-2} = \frac{15}{14}.$$

b) Fejezzük ki a két megoldás négyzetösszegét is a két megoldás összegével, ill. szorzatával! Alkalmazzuk a jól ismert teljes négyzetté kiégészítést!

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2.$$

Így:

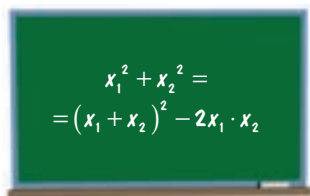
$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{15}{7}\right)^2 - 2 \cdot (-2) = \frac{225}{49} + 4 = \frac{421}{49}.$$

Az egyenlet megoldása nélkül?



4.7. ábra Használjuk a Viète-formulákat!

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



4.8. ábra Fontos összefüggés

c) Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_2 < x_1$, ezért $0 < x_1 - x_2$. Így $x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2}$. Ennek alapján

$$x_1 - x_2 = \sqrt{\frac{421}{49} - 2 \cdot (-2)} = \sqrt{\frac{617}{49}} = \frac{\sqrt{617}}{7}.$$

d) Használjuk fel a 9. osztályból ismert $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 + b^2 - ab)$ azonosságot! Ennek alapján

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2) = -\frac{15}{7} \left(\frac{421}{49} - (-2) \right) = -\frac{7785}{343}.$$



5. példa Az $x^2 + px + 9 = 0$ másodfokú egyenletben határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet megoldásainak négyzetösszege 31 legyen!

Megoldás:

Először vizsgáljuk meg, hogy a p valós paraméter mely értéke esetén lesz az egyenletnek valós megoldása! Az együtthatók $a = 1$, $b = p$ és $c = 9$.

Az egyenlet diszkriminánsa $D = p^2 - 4 \cdot 9 = p^2 - 36$. A másodfokú egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz $p^2 - 36 \geq 0$. Ebből $p^2 \geq 36$, azaz $|p| \geq 6$.

Fejezzük ki a két megoldás négyzetösszegét, a Viète-formulákat felhasználva, az egyenlet együtthatóival! Mivel $x_1 + x_2 = -p$ és $x_1 x_2 = 9$, valamint $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$, így $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 18$.

Figyelembe véve a feltételt, azt kapjuk, hogy $p^2 - 18 = 31$, ahonnan $p_1 = 7$, $p_2 = -7$. Erre a két értékre teljesül, hogy abszolút értékben nagyobbak hatnál, tehát megfelelnek a feladat feltételeinek.



6. példa Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + 2(p+3)x + p+9 = 0$ egyenletnek két különböző pozitív valós megoldása legyen!

Megoldás:

Először határozzuk meg, hogy a p valós paraméter mely értékei esetén lesz az egyenletnek két különböző valós megoldása! Ez pontosan akkor teljesül, ha az egyenlet diszkriminánsa pozitív. Mivel $a = 1$, $b = 2(p+3)$ és $c = p+9$, így a diszkrimináns

$$D = (2p+6)^2 - 4(p+9) = 4p^2 + 24p + 36 - 4p - 36 = 4p^2 + 20p.$$

Tehát az egyenletnek két valós megoldása van akkor és csak akkor, ha $4p^2 + 20p > 0$. Alakítsuk szorzattá a bal oldalt, és használjuk fel,



4.9. ábra Ahogyan a közlekedésben, úgy a matematikafeladatok megoldása közben is legyünk körültekintőek!

hogy egy szorzat pontosan akkor pozitív, ha mindkét tényezője azonos előjelű!

$$4p \cdot (p+5) > 0 \Leftrightarrow (4p > 0 \text{ és } p+5 > 0) \text{ vagy } (4p < 0 \text{ és } p+5 < 0)$$

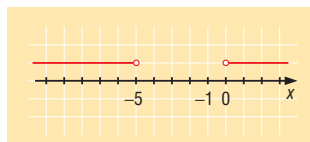
Az első két egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $p > 0$ és $p > -5$, ami pontosan akkor igaz, ha $p > 0$. A másik kettőből következik, hogy $p < 0$ és $p < -5$, ami pontosan akkor igaz, ha $p < -5$. Tehát az egyenletnek két valós megoldása van, ha $p < -5$ vagy $0 < p$.

A feladat második részének megoldásához használhatnánk a megoldóképletet, de ez négyzetgyökös kifejezést tartalmazó, úgynevezett irracionális egyenlőtlenség megoldására vezet, ami nem egyszerű. Vegyük észre, hogy két szám akkor és csak akkor pozitív, ha összegük és szorzatuk is pozitív! Ezért használjuk fel inkább a Viète-formulákat.

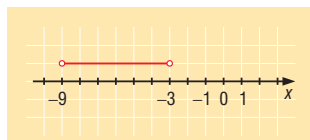
Tehát annak kell teljesülnie, hogy $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2(p+3) > 0$ és

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = p+9 > 0$. Ezekből kapjuk, hogy $-9 < p < -3$. Ezt összevetve azzal a feltétellel, hogy az egyenletnek két valós megoldása legyen, azt kapjuk, hogy $-9 < p < -5$.

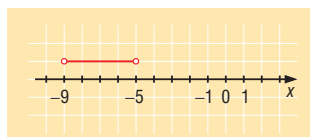
Összegzés: Az $x^2 + 2(p+3)x + p+9 = 0$ másodfokú egyenletnek két különböző pozitív megoldása van, ha $-9 < p < -5$.



4.10. ábra Két különböző valós megoldása van, ha $p < -5$ vagy $0 < p$



4.11. ábra $x_1 + x_2 > 0$ és $x_1 \cdot x_2 > 0$, ha $-9 < p < -3$



4.12. ábra Két különböző pozitív megoldása van, ha $-9 < p < -5$



Oldjuk meg!

1. Írjuk fel elsőfokú polinomok szorzataként az alábbi másodfokú polinomokat!

- a) $x^2 - 8x - 33$ b) $x^2 - x - 56$ c) $x^2 + 17x + 60$
d) $2x^2 + 21x - 11$ e) $8x^2 - 10x + 3$ f) $10x^2 + 29x + 21$

2. Egyszerűsítsük az alábbi algebrai törtet, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza!

- a) $\frac{x^2 - 6x - 55}{x^2 - 3x - 88}$ b) $\frac{x^2 + 13x + 30}{x^2 + 15x + 36}$ c) $\frac{6x^2 + 23x + 20}{2x^2 + 9x + 10}$ d) $\frac{12x^2 + 17x - 7}{4x^2 + 27x + 35}$

3. Adjunk meg olyan másodfokú polinomot, amelynek gyökei:

- a) 2 és -5; b) 6 és 3; c) -11 és -7; d) $\frac{2}{3}$ és 5; e) $-\frac{7}{4}$ és $-\frac{8}{3}$!

4. Határozzuk meg a $2x^2 - 7x - 5 = 0$ másodfokú egyenlet esetén

- a) a megoldások reciprokösszegét;
b) a megoldások négyzetösszegét;
c) az $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ értékét, ahol x_1 és x_2 az egyenlet megoldásai;
d) a megoldások négyzetének a különbségét;
e) a megoldások köbének a különbségét!



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

5. Adjunk meg olyan másodfokú egyenletet, amelynek egyik megoldása hárommal nagyobb, mint a $3x^2 + 5x - 8 = 0$ kisebb megoldása, a másik hárommal kisebb, mint a $3x^2 + 5x - 8 = 0$ egyenlet nagyobb megoldása!
6. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + 3x + p = 0$ egyenlet megoldásainak a négyzetösszege 5 legyen!
7. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + (p+2)x + 1 = 0$ egyenlet megoldásaira teljesüljön, hogy $x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 = 8!$
8. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + (p+4)x + 2p + 20 = 0$ egyenlet
a) valós megoldásai pozitívak;
b) valós megoldásai negatívak legyenek!

5. Másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenletek



5.1. ábra Alhazen (965–1039?)



Magasabb fokú egyenletek megoldásával már a VII. században találkozunk Kínában. Vang Hsziao-tungnál kerül elő az alábbi feladat: „Adott egy derékszögű háromszög befogóinak a szorzata, valamint az átfogó és az egyik befogó különbsége. Határozzuk meg az oldalakat!” A probléma harmadfokú egyenletre vezet, melynek megoldási módszere már a *Matematika kilenc fejezetben* című műben is szerepel. A módszer részletes magyarázata a XIII. században Csin Csiu-sao kínai matematikusnál található meg az $x^4 - 763200x^2 + 4064256000 = 0$ egyenlet kapcsán.

Al-Kashi arab matematikus harmadfokú egyenleteket oldott meg iterációval (a fokozatos közelítés módszerével) 1420 körül. Európában ez a módszer csak a XVI. században jutott el arra a szintre, amilyen szinten az arabok alkalmazták a XV. században.

Alhazen (X.–XI. sz.), a középkori Egyiptomban élő arab matematikus többek között fénytani problémák megoldásával foglalkozott. *Optika* című könyvében szerepel a következő feladat: „Keressük meg a gömbtükrön azt a pontot, ahová be kell esnie egy adott fénysugárnak ahhoz, hogy egy másik adott ponton haladjon keresztül!” A feladat negyedfokú egyenletre vezet, melyet geometriai módszerrel oldott meg.

Európában a XV. század végén Luca Pacioli a *Summa de Arithmetica* című művét még azzal a megállapítással fejezte be, hogy a harmadfokú egyenletek megoldása a tudomány akkori állása szerint lehetetlen.

Ebben az időben kezdődtek meg a bolognai matematikusok kutatásai, melyek nagy előrelépést jelentettek a harmad-, ill. negyedfokú egyenletek megoldása terén. A kutatásra ösztönzőleg hatottak a kor divatja szerint megrendezett tudományos viták. Scipio del Ferro



5.2. ábra Niccolo Tartaglia (1499–1557)

professzor megtalálta az $x^3 + px = q$ ($p > 0$, $q > 0$) alakú egyenletek megoldásának módját. Eredményét nem közölte senkivel, hogy a tudományos vitákban előnyhöz juthasson. Csak élete végén árulta el egyik tanítványának, Fiorénak a legnagyobb titoktartás mellett. Fiore 1535-ben tudományos párbajra hívta ki Niccolo Tartaglia (1500–1557) velencei számolómestert. Tartaglia tudta, hogy Fiore birtokában van a megoldási módszernek, ezért hozzálátott a harmadfokú egyenletek vizsgálatához. Ennek eredményeként ő is felfedezte a Ferro által megtalált módszert, így a párbajt megnyerte. Ebben az időben Girolamo Cardano (1501–1576) milánói orvos is a harmadfokú egyenletek megoldási módszerét kereste. Minden eszközt bevett, hogy megismerje Tartaglia módszerét, és végül próbálkozásait siker koronázta. Meg kellett ígérnie, hogy a titkot nem adja tovább. Cardano megszegte ígéretét, és az 1554-ben megjelent *Ars magna...* című könyvében teljes egészében közölte azt. Ez elkeseredett vitát váltott ki Cardano és Tartaglia között. (Ugyan a könyvben Cardano nem tulajdonította magának a megoldási módszert, mégis a harmadfokú egyenlet megoldóképletét Cardano-képletnek szokás nevezni.) A vitában Cardano mellé állt egyik tanítványa, Ferrari is, aki a negyedfokú egyenletek megoldásának módszerét dolgozta ki, melyet ugyancsak belevett könyvébe Cardano.

A matematikusokat mindig is foglalkoztatta a magasabb fokú egyenletek megoldhatósága. Az idő előrehaladtával mind többen gondolták úgy, hogy nem is létezik megoldóképlet az ötöd-, ill. annál magasabb fokú egyenletek megoldására. Erre vonatkozólag először Ruffini (1765–1822) közölt bizonyítást 1799-ben, melynek hiányosságait 1826-ban Abel (1802–1829) küszöbölte ki. A problémakör ezzel még nem zárult le, a teljes megoldás a tragikus körülmények között, fiatalon elhunyt matematikus, Galois (1811–1832) nevéhez fűződik.

Vannak azonban olyan speciális magasabb fokú egyenletek, amelyek bizonyos módszerekkel megoldhatók. Nézzünk erre néhány példát!



1. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $x^4 + 2x^2 - 99 = 0$ b) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$

Megoldás:

a) Az első egyenlet egy hiányos negyedfokú egyenlet, mert nem tartalmaz harmadfokú és elsőfokú tagokat. Mivel $x^4 = (x^2)^2$, ezért tekinthetjük x^2 -re nézve másodfokú egyenletnek is. Célszerű az x^2 helyett egy új ismeretlent bevezetni, legyen pl. $y = x^2$! Így az $y^2 + 2y - 99 = 0$ egyenletből kell meghatároznunk y értékét, amiből kiszámolhatjuk x -et.



5.3. ábra Girolamo Cardano
(1501–1576)



5.4. ábra Paolo Ruffini
(1765–1822)



5.5. ábra Niels Henrik Abel
(1802–1829)



5.6. ábra Évariste Galois
(1811–1832)



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

Az egyenlet diszkriminánsa $D = 2^2 - 4 \cdot (-99) = 4 + 396 = 400$. Így

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{-2 \pm 20}{2} \Rightarrow y_1 = 9 \text{ és } y_2 = -11. \text{ Ebből } x^2 = 9 \Rightarrow$$

$|x| = 3$, azaz $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Az $x^2 = -11$ egyenlet nem szolgáltat megoldást a valós számok halmazán. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.

b) A második egy hiányos hatodfokú egyenlet, melyet az $x^6 = (x^3)^2$ miatt, a $z = x^3$ helyettesítéssel visszavezethetünk másodfokú egyenletre. A $z^2 + 19z - 216 = 0$ egyenletet megoldva, a z értékéből határozhatjuk meg az x -et. A diszkrimináns $D = 19^2 - 4 \cdot (-216) = 1225$.

$$\text{Így } z_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{-19 \pm 35}{2} \Rightarrow z_1 = 8 \text{ és } z_2 = -27. \text{ Ebből}$$

$x^3 = 8 \Rightarrow x_1 = 2$, ill. $x^3 = -27 \Rightarrow x_2 = -3$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.



Megjegyzés: Az $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ ($a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$) alakú egyenlet $y = x^n$ helyettesítéssel visszavezethető másodfokú egyenletre. Ebből meghatározhatjuk az y értékeit, amelyekből n -edik gyökvonással kiszámolhatjuk az egyenlet megoldásait.



5.7. ábra Egy ügyes helyettesítéssel ez a probléma is könnyebben megoldható



2. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $(x+2)^4 - 6(x+2)^2 + 5 = 0$

b) $(x^2 - 4x)^2 - (x-2)^2 + 4 = 0$

c) $(x^2 + 8x + 2) \cdot (x^2 + 8x - 26) + 187 = 0$

d) $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+4) \cdot (x+5) = 4$

Megoldás:

A négy egyenlet egyikében sem érdemes elvégezni a kijelölt műveleteket, mert olyan negyedfokú egyenlethez jutnánk, amelyet az eddigi eszközökkel nem tudunk megoldani. Ezért célszerű mindegyik esetben egy-egy megfelelő helyettesítéssel élni, és ezzel másodfokúvá redukálni az egyenletet.

a) Mivel $(x+2)^4 = [(x+2)^2]^2$, ezért $y = (x+2)^2$ helyettesítéssel az egyenlet másodfokúvá alakítható. Így kapjuk, hogy $y^2 - 6y + 5 = 0$. Az egyenlet diszkriminánsa $D = 6^2 - 4 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$. Az egyenlet

gyökei $y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow y_1 = 1$ és $y_2 = 5$. Ezekből meghatározhatjuk az x értékét.

Ha $y_1 = 1$, akkor $(x+2)^2 = 1 \Rightarrow |x+2| = 1 \Rightarrow x+2 = 1$ vagy $x+2 = -1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -3$. Ha $y_2 = 5$, akkor $(x+2)^2 = 5 \Rightarrow |x+2| = \sqrt{5} \Rightarrow x+2 = \sqrt{5}$ vagy $x+2 = -\sqrt{5} \Rightarrow x_3 = -2+\sqrt{5}, x_4 = -2-\sqrt{5}$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.

b) Mivel $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, ezért ha $y = x^2 - 4x$, akkor $(x-2)^2 = y + 4$. Ezzel a helyettesítéssel az $y^2 - y = 0$ egyenlethez jutunk. Szorzattá alakítással megoldva, kapjuk az egyenlet megoldásait, melyek $y_1 = 0, y_2 = 1$. Ezekből az értékekből meghatározhatjuk az x -et. Ha $y_1 = 0$, akkor $(x-2)^2 = 4 \Rightarrow |x-2| = 2 \Rightarrow x-2 = 2$ vagy $x-2 = -2 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 0$. Ha $y_2 = 1$, akkor $(x-2)^2 = 5 \Rightarrow |x-2| = \sqrt{5} \Rightarrow x-2 = \sqrt{5}$ vagy $x-2 = -\sqrt{5} \Rightarrow x_3 = 2+\sqrt{5}, x_4 = 2-\sqrt{5}$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.

c) Vegyük észre, hogy az $x^2 + 8x + 2$ és az $x^2 + 8x - 26$ csak konstansban tér el egymástól. A köztük lévő különbség 28. Így ha $y = x^2 + 8x + 2$, akkor $y - 28 = x^2 + 8x - 26$. Ezzel a helyettesítéssel az $y^2 - 28y + 187 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek diszkriminánsa $D = 28^2 - 4 \cdot 187 = 36$. Így a megoldásai $y_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{28 \pm 6}{2} \Rightarrow y_1 = 17, y_2 = 11$. Ha $y_1 = 17$, akkor $x^2 + 8x + 2 = 17$, azaz $x^2 + 8x - 15 = 0$. Ennek az egyenletnek a diszkriminánsa $D = 8^2 - 4 \cdot (-15) = 64 + 60 = 124$. Így az egyenlet megoldásai $x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{124}}{2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{31}}{2} \Rightarrow x_1 = -4 + \sqrt{31}, x_2 = -4 - \sqrt{31}$.

Ha $y_2 = 11$, akkor $x^2 + 8x + 2 = 11$, azaz $x^2 + 8x - 9 = 0$. Ennek az egyenletnek a diszkriminánsa $D = 8^2 - 4 \cdot (-9) = 64 + 36 = 100$. Így a megoldások $x_{3,4} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2} \Rightarrow x_3 = 1, x_4 = -9$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.

d) Vegyük észre, hogy $(x+1) \cdot (x+5) = x^2 + 6x + 5$ és $(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$. A két kifejezés csak konstansban tér el egymástól, a különbségük 3. Ha az első y -nal helyettesítjük, akkor a második helyébe $y+3$ -at írhatunk. Így az $y^2 + 3y - 4 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai $y_1 = 1, y_2 = -4$. Ha $y_1 = 1$, akkor $x^2 + 6x + 5 = 1$, azaz



5.8. ábra Az életben is van nehezebb módszer...



5.9. ábra ...és könnyebb!



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



5.10. ábra Szép és szimmetrikus, mint a következő egyenlet:
 $2x^4 - 9x^3 + 13x^2 - 9x + 2 = 0$



5.11. ábra Az órai példák után már a házi feladat is könnyebben megy

$x^2 + 6x + 4 = 0$. Ennek a megoldásai $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{5}$. Ha $y_2 = -4$, akkor $x^2 + 6x + 5 = -4$, azaz $x^2 + 6x + 9 = 0$. Ennek a megoldása $x_3 = -3$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.



3. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$2x^4 - 9x^3 + 13x^2 - 9x + 2 = 0$$

Megoldás:



Vegyük észre, hogy az egyenletben szereplő együtthatók szimmetrikusak a másodfokú tag együtthatójára nézve, ezért szokás az ilyen egyenleteket **szimmetrikus egyenleteknek** nevezni.

Az ilyen szimmetrikus egyenletek esetén jól alkalmazható megoldási módszer, hogy elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát x^2 -tel. Mivel az $x=0$ nem megoldása az egyenletnek, ezért ezt tehetjük, hiszen nem veszítünk megoldást.

Ekkor rendezés után a $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 13 = 0$ egyenlethez

jutunk. Mivel $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, így $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$.

Tehát ha $y = x + \frac{1}{x}$, akkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Ezzel a helyettesítéssel rendezés után a $2y^2 - 9y + 9 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai $y_1 = 3, y_2 = \frac{3}{2}$. Ha $y_1 = 3$, akkor $x + \frac{1}{x} = 3$, azaz $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Ennek megoldásai $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ha $y_2 = \frac{3}{2}$, akkor $x + \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$, azaz

$2x^2 - 3x + 2 = 0$. Ennek a diszkriminánsa $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7$, azaz az egyenletnek nincs valós megoldása. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.



Megjegyzés:

Mivel az eredeti egyenlet megoldásait az $x^2 - 3x + 1 = 0$ egyenletből kaptuk, ezért a Viète-formulák alapján igaz, hogy $x_1 \cdot x_2 = 1$, azaz a két megoldás egymás reciproka. Ezért a 3. példában szereplő egyenletet szokás **reciprok egyenletnek** is nevezni.

**Oldjuk meg!**

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $x^4 - 85x^2 + 324 = 0$

b) $x^4 - 27x^2 + 50 = 0$

c) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

d) $x^6 - 3x^3 - 40 = 0$

e) $x^8 - 14x^4 - 32 = 0$

f) $x^{10} + 37x^5 + 160 = 0$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $(x+3)^4 - 2(x+3)^2 - 63 = 0,$

b) $(x^2 + 2x)^2 + 3(x+1)^2 = 21$

c) $(x^2 + 4x - 2)^2 + (x-1) \cdot (x+5) = 9,$

d) $(x^2 + 5x + 2) \cdot (x^2 + 5x - 1) - 4 = 0$

e) $\frac{6}{x^2 + 6x + 7} + (x+3)^2 = 7$

f) $1 - \frac{x^2 - 6x}{1 - x^2 + 6x} = \frac{5}{x^2 - 6x + 5}$

g) $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6) - 160 = 0$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2x^4 - x^3 - 11x^2 - x + 2 = 0$

b) $15x^4 + 44x^3 + 10x^2 + 44x + 15 = 0$

c) $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$

6. Másodfokú egyenlőtlenségek

Már az előző tanévben foglalkoztunk azzal, hogy ha kifejezéseket a $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ jelekkel kapcsolunk össze, akkor egyenlőtlenségeket kapunk. Ha a kifejezések másodfokú polinomok, akkor másodfokú egyenlőtlenséghez jutunk. Az alábbiakban az ilyen típusú egyenlőtlenségek megoldásával ismerkedünk meg.



1. példa Határozzuk meg, hogy az alábbi függvényeknek mely valós számok esetén pozitív, és melyek esetén negatív a helyettesítési értékük?

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^2 - 12x - 27$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2 + 4x + 6$

d) $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i(x) = -x^2 + 8x - 19$

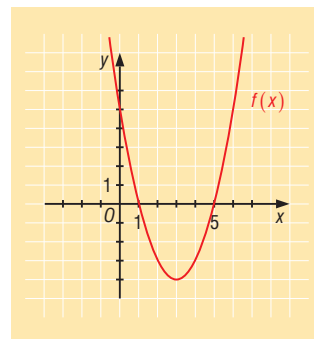
Megoldás:

A választ könnyen megadhatjuk, ha ábrázoljuk a függvényeket.

a) Egészítsük ki teljes négyzetté a függvény hozzárendelési szabályát!

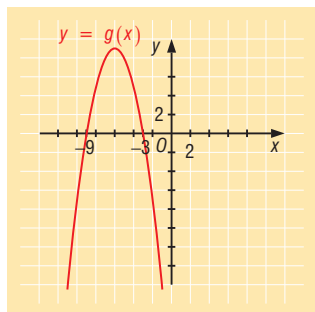
$$f(x) = x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 4$$

Az f függvény képe pozitív irányba nyíló parabola.

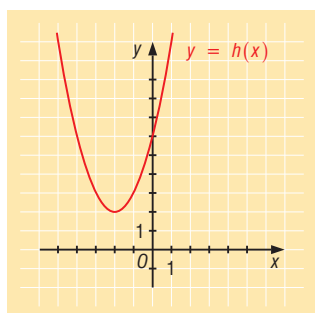


6.1. ábra $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$
 $f(x) = x^2 - 6x + 5$

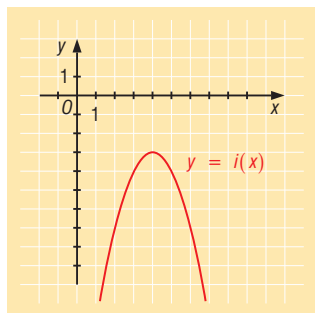
Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



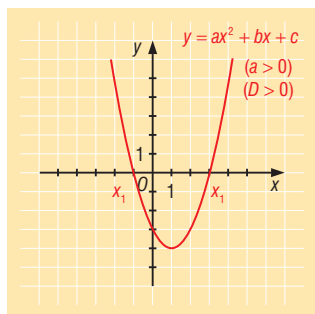
6.2. ábra $y = -x^2 - 12x - 27$



6.3. ábra $y = x^2 + 4x + 6$



6.4. ábra $y = -x^2 + 8x - 19$



6.5. ábra A két zérushely közötti számokhoz negatív függvényérték tartozik

Az 1. ábráról leolvasható, hogy ha $x < 1$ vagy $5 < x$, akkor a függvény pozitív, ha $1 < x < 5$, akkor a függvény negatív értéket vesz fel.

b) Teljes négyzetté kiegészítés után kapjuk, hogy

$$g(x) = -(x^2 + 12x + 36 - 36) - 27 = -(x + 6)^2 + 9.$$

A g függvény képe negatív irányba nyíló parabola.

A 2. ábráról leolvasható, hogy ha $x < -9$ vagy $-3 < x$, akkor a függvény negatív értéket vesz fel, ha $-9 < x < -3$, akkor a függvényértékek pozitívak.

c) Egészítsük ki a h függvény hozzárendelési szabályát is teljes négyzetté!

$$h(x) = x^2 + 4x + 6 = x^2 + 4x + 4 + 2 = (x + 2)^2 + 2$$

A h függvény képe pozitív irányba nyíló parabola és a 3. ábráról leolvasható, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén pozitív az értéke. Negatív értéket sehol sem vesz fel.

d) Az i függvény hozzárendelési szabálya teljes négyzetté kiegészítés után:

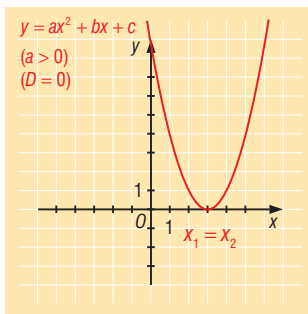
$$i(x) = -x^2 + 8x - 19 = -(x^2 - 8x + 16 - 16) - 19 = -(x - 4)^2 - 3.$$

Az i függvény képe negatív irányba nyíló parabola, és minden valós x esetén negatív a helyettesítési értéke. Pozitív értéket sehol sem vesz fel.

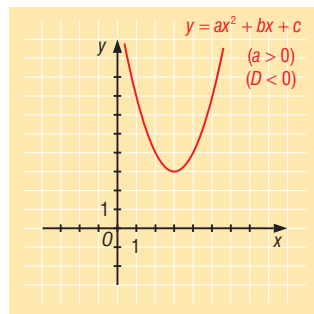


Összegzés: Ha a másodfokú függvény hozzárendelési szabályában a főegyüttható pozitív ($a > 0$), és a függvénynek van két zérushelye, akkor azok közötti x -ekre a függvény negatív, az azon kívüli x -ekre a függvény pozitív értéket vesz fel. Ha ilyen esetben egy zérushelye van, akkor minden függvényérték nemnegatív, ha nincs zérushelye a függvénynek, akkor minden értéke pozitív.

Ha a másodfokú függvény hozzárendelési szabályában a főegyüttható negatív ($a < 0$), és van két zérushelye, akkor azok közötti x -ekre a függvény értéke pozitív, az azon kívüli x -ekre negatív. Ha ilyen esetben egy zérushelye van, akkor minden függvényérték nempozitív, ha nincs zérushelye a függvénynek, akkor a függvény érték minden valós x -re negatív.

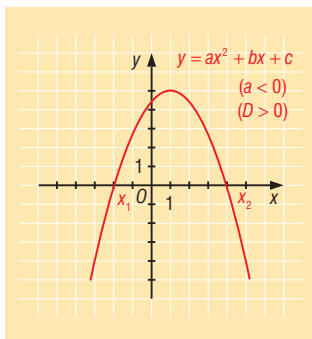


6.6. ábra Minden függvényérték nemnegatív

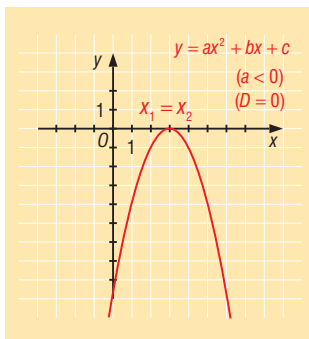


6.7. ábra Minden függvényérték pozitív

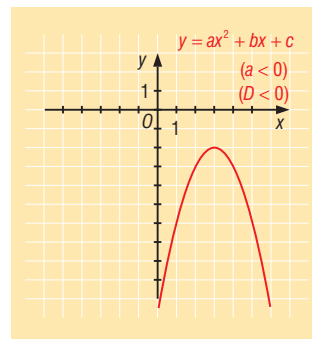
$$ax^2 + bx + c = 0$$



6.8. ábra A két zérushely közötti számokhoz pozitív függvényérték tartozik



6.9. ábra Minden függvényérték nempozitív



6.10. ábra Minden függvényérték negatív



2. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $(x-1)^2 + x^2 - 5x - 6 \leq 2x + 2 + (x+3)^2$

b) $2(4-x)^2 - 5 \geq (x-5) \cdot (x+5) + 20$

Megoldás:

a) Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd rendezzük nullára az egyenlőtlenséget!

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 5x - 6 \leq 2x + 2 + x^2 + 6x + 9$$

$$2x^2 - 7x - 5 \leq x^2 + 8x + 11$$

$$x^2 - 15x - 16 \leq 0$$

Mivel a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 15x - 16$ függvény képe pozitív irányba nyíló parabola, ezért a két zérushely – feltéve, hogy van – közötti értékekre vesz fel a függvény negatív értékeket. Határozzuk meg a függvény zérushelyeit, azaz oldjuk meg az $x^2 - 15x - 16 = 0$ egyenletet!

A diszkrimináns $D = (-15)^2 - 4(-16) = 289$. Így az egyenlet meg-

oldásai $x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{15 \pm 17}{2} \Rightarrow x_1 = 16$ és $x_2 = -1$. Az egyen-

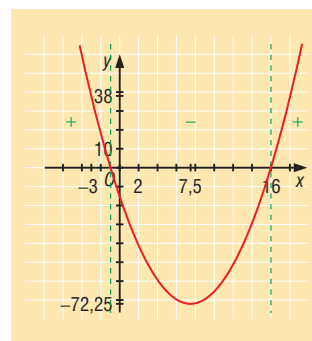
lőtlenség tehát $-1 \leq x \leq 16$ számokra teljesül, azaz a megoldáshalmaza: $M = [-1; 16]$.

b) Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd rendezzük nullára az egyenlőtlenséget!

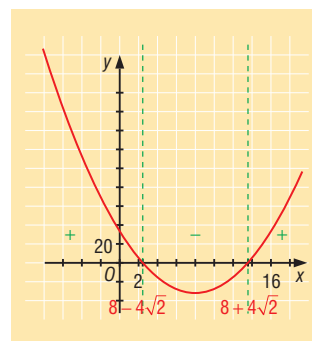
$$2(16 - 8x + x^2) - 5 \geq x^2 - 25 + 20$$

$$2x^2 - 16x + 27 \geq x^2 - 5$$

$$x^2 - 16x + 32 \geq 0$$

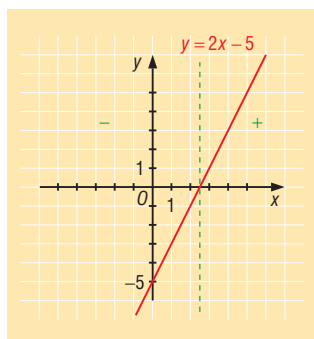


6.11. ábra $y = x^2 - 15x - 16$

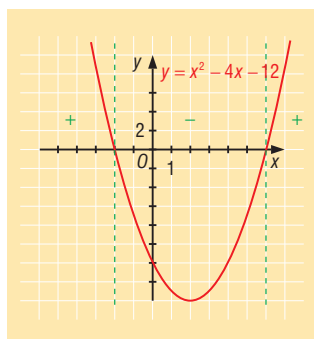


6.12. ábra $y = x^2 - 16x + 32$

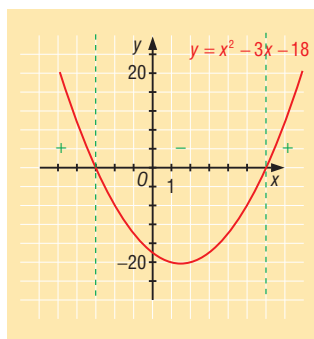
Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



6.13. ábra A 3. a) példa számlálójának előjelviszonyai



6.14. ábra A 3. a) példa nevezőjének előjelviszonyai



6.15. ábra A 3. b) példa számlálójának előjelviszonyai

Mivel a valós számok halmazán értelmezett $g(x) = x^2 - 16x + 32$ függvény képe pozitív irányba nyíló parabola, ezért ha létezik két zérushelye a függvénynek, akkor a zérushelyeken kívüli x -ek esetén lesz a függvény helyettesítési értéke pozitív. Határozzuk meg a függvény zérushelyeit, azaz oldjuk meg az $x^2 - 16x + 32 = 0$ egyenletet! A diszkrimináns $D = (-16)^2 - 4 \cdot 32 = 128$. Így az egyenlet megoldá-

sai $x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{128}}{2} = \frac{16 \pm 8\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 = 8 + 4\sqrt{2}$ és $x_2 = 8 - 4\sqrt{2}$. Az

egyenlőtlenség tehát az $x \leq 8 - 4\sqrt{2}$ vagy $8 + 4\sqrt{2} \leq x$ számokra teljesül, azaz a megoldáshalmaza: $M =]-\infty; 8 - 4\sqrt{2}] \cup [8 + 4\sqrt{2}; \infty[$.

3. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget!

$$a) \frac{2x-5}{x^2-4x-12} < 0 \quad b) \frac{x^2-3x-18}{2+x-x^2} > 0$$

Megoldás:

a) 9. osztályban már foglalkoztunk törtes egyenlőtlenségekkel. Ennek alapján tudjuk, hogy az ilyen típusú problémák megoldásában sokat segít egy előjel táblázat készítése. Először keressük meg a számláló és a nevező zérushelyeit!

A számláló zérushelye: $x = 2,5$. Ha $x < 2,5$, akkor a számláló negatív, ha $x > 2,5$, akkor a számláló pozitív értéket vesz fel. (6.13. ábra)

A nevező egy másodfokú polinom, melynek diszkriminánsa: $D = (-4)^2 - 4 \cdot (-12) = 64$. Ez alapján a zérushelyei:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}, \text{ azaz } x_1 = 6 \text{ és } x_2 = -2. \text{ Mivel a valós szá-}$$

mok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 4x - 12$ függvény képe pozitív irányba nyíló parabola, ezért a két zérushely között negatív, azon kívül pozitív a függvény helyettesítési értéke. (6.14. ábra) Ennek alapján készítsük el az előjel táblázatot!

x	$]-\infty; -2[$	-2	$]-2; 2,5[$	$2,5$	$]2,5; 6[$	6	$]6; \infty[$
számláló	-	-	-	0	+	+	+
nevező	+	0	-	-	-	0	+
tört	-	nincs értelmezve	+	0	-	nincs értelmezve	+

Az utolsó sorból leolvasható az egyenlőtlenség megoldása: $M =]-\infty; -2[\cup]2,5; 6[$.

b) A számláló diszkriminánsa $D = (-3)^2 - 4 \cdot (-18) = 81$, így a zérushelyei $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = 6$ és $x_2 = -3$. Mivel a va-

lós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 3x - 18$ grafikonja egy pozitív irányba nyíló parabola, ezért a két zérushely közötti x -ekre negatív, az azon kívüli x -ekre pozitív a függvény helyettesítési értéke. (3.15. ábra) A nevező diszkriminánsa $D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 9$, így

a zérushelyei $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \Rightarrow x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. Mivel a

valós számok halmazán értelmezett $g(x) = 2 + x - x^2$ függvény képe

lefelé irányba nyíló parabola, ezért a két zérushely között pozitív, azon kívül pedig negatív a függvény helyettesítési értéke. (3.16. ábra) Ennek alapján elkészíthetjük az előjelábrázolást.

x	$]-\infty; -3[$	-3	$]-3; -1[$	-1	$]-1; 2[$	2	$]2; 6[$	6	$]6; \infty[$
számláló	+	0	-	-	-	-	-	0	+
nevező	-	-	-	0	+	0	-	-	-
tört	-	0	+	nincs értelmezve	-	nincs értelmezve	+	0	-

A táblázat utolsó sorából leolvashatjuk az egyenlőtlenség megoldását: $M =]-3; -1[\cup]2; 6[$.



4. példa A q valós paraméter mely értékei esetén teljesül, hogy az alábbi egyenletnek legfeljebb egy valós megoldása van?
 $(3q - 2)x^2 - (q - 3)x + 1 = 0$

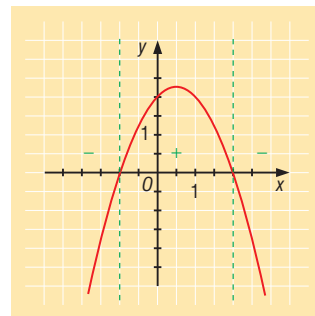
Megoldás:

A legfeljebb egy valós megoldás jelentése az, hogy az egyenletnek egy vagy nulla valós megoldása van. Mivel a másodfokú tag együtthatója is tartalmaz paramétert, ezért az egyenlet nem feltétlenül másodfokú.

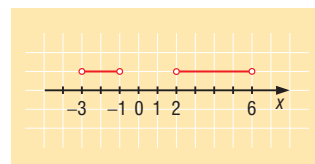
Ha $3q - 2 = 0$, azaz $q = \frac{2}{3}$, akkor a $\frac{7}{3}x + 1 = 0$ elsőfokú egyenlethez jutunk, melynek az $x = -\frac{3}{7}$ a megoldása.

Ha $q \neq \frac{2}{3}$, akkor az egyenlet másodfokú. Egy másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor van legfeljebb egy valós megoldása, ha a diszkriminánsa nempozitív. Mivel a szokásos jelölésekkel az együtthatók $a = 3q - 2$, $b = q - 3$ és $c = 1$, ezért

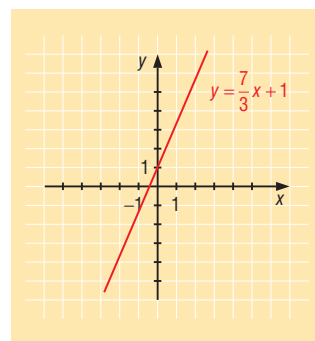
$$D = (q - 3)^2 - 4 \cdot (3q - 2) \cdot 1 = q^2 - 6q + 9 - 12q + 8 = q^2 - 18q + 17.$$



6.16. ábra A 3. b) példa nevezőjének előjelviszonyai

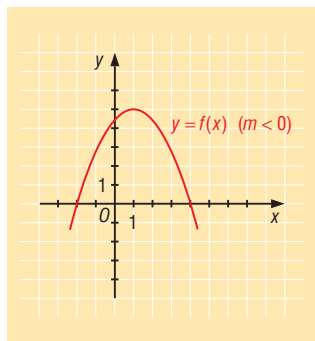


6.17. ábra $M =]-3; -1[\cup]2; 6[$

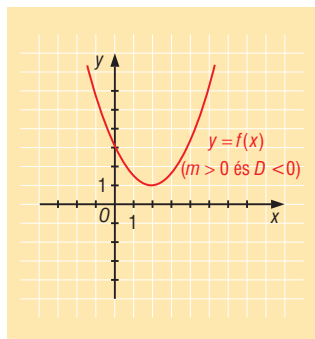


6.18. ábra A $\frac{7}{3}x + 1 = 0$ egyenletnek egy valós megoldása van

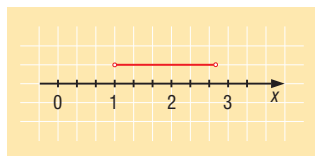
Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



6.19. ábra Van olyan intervallum, ahol az f függvény negatív értéket vesz fel



6.20. ábra Az f függvény minden helyettesítési értéke pozitív



6.21. ábra $M = \left[1; \frac{25}{9}\right[$

Így a $q^2 - 18q + 17 \leq 0$ egyenlőtlenséget kell megoldani. Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(q) = q^2 - 18q + 17$ függvény zérushelyeit. Ebben az esetben a diszkrimináns $D = (-18)^2 - 4 \cdot 17 = 256$, így a zérushelyek $q_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{18 \pm 16}{2} \Rightarrow q_1 = 17$ és $q_2 = 1$. Mivel az f függvény képe egy pozitív irányba nyíló parabola, ezért az egyenlőtlenség megoldása $1 \leq q \leq 17$.

Összegzés: A $(3q - 2)x^2 - (q - 3)x + 1 = 0$ egyenletnek legfeljebb egy valós megoldása van, ha $q = \frac{2}{3}$ vagy $1 \leq q \leq 17$.

5. példa Határozzuk meg az m valós paraméter értékét úgy, hogy az $mx^2 - (3m - 5)x + 1 > 0$ egyenlőtlenség minden valós x -re teljesüljön!

Megoldás: Az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül minden valós x -re, ha a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = mx^2 - (3m - 5)x + 1$ függvény értéke minden valós x -re pozitív.

Ha $m = 0$, akkor az $f(x) = 5x + 1$ hozzárendelési szabályú elsőfokú függvényt kapjuk, amelynek pl. a -2 helyen felvett helyettesítési értéke: $f(-2) = -9$. Tehát nem minden valós szám esetén lesz a helyettesítési értéke pozitív.

Ha $m \neq 0$, akkor az f függvény másodfokú. Ebben az esetben csak úgy lehet az f függvény minden valós helyen felvett helyettesítési értéke pozitív, ha a függvény grafikonja pozitív irányba nyíló parabola, és a függvénynek nincs zérushelye. Az első feltétel akkor teljesül, ha $m > 0$, a második pedig abban az esetben, ha $D = (3m - 5)^2 - 4m = 9m^2 - 30m + 25 - 4m = 9m^2 - 34m + 25 < 0$.

A valós számok halmazán értelmezett $g(m) = 9m^2 - 34m + 25$ függvény képe „felfelé” nyíló parabola, így a két zérushely között lesz a függvény értéke negatív. A zérushelyek $m_{1,2} = \frac{34 \pm \sqrt{256}}{18} = \frac{34 \pm 16}{18} \Rightarrow$

$m_1 = 1$ és $m_2 = \frac{25}{9}$. Az egyenlőtlenség megoldása tehát $1 < m < \frac{25}{9}$.

Mivel az $m > 0$ is teljesül, ezért az eredeti egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül minden valós x -re, ha $1 < m < \frac{25}{9}$.

**Oldjuk meg!**

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - x - 6 > 0$

b) $x^2 + 3x - 4 \leq 0$

c) $-2x^2 - 3x + 9 \leq 0$

d) $-4x^2 + 5x + 6 > 0$

e) $x^2 + 12x + 36 > 0$

f) $4x^2 - 20x + 25 \leq 0$

g) $-6x^2 + 2x - 3 > 0$

h) $5x^2 - 4x + 12 > 0$

i) $-16x^2 + 24x - 9 \geq 0$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $(x+5)^2 - 16 \geq (2-x)^2$

b) $2(x+2)^2 - 5(3x-3) > x^2 + 25 + 2(5-x)^2$

c) $(2x-3)^2 - 6(x+5) < (1-2x)^2 + 4x - 3$

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{6x-8}{x^2-14x+48} > 0$

b) $\frac{-2x^2+5x-3}{5-x} < 0$

c) $\frac{2x^2+5x-7}{x^2-4x+3} \leq 0$

d) $\frac{x^2-7x+10}{15-2x-x^2} \geq 0$

e) $\frac{x^2-10x+25}{3x^2+x-10} < 0$

f) $1 < \frac{2x^2-7x-29}{x^2-11x+30}$

g) $\frac{9x^2+4x+2}{5x^2-8x-4} < 2$

4. A p valós paraméter mely értékeinél van két különböző megoldása az alábbi egyenleteknek?

a) $(p-2)x^2 - (p-5)x + 1 = 0$

b) $x^2 + (3p+7)x + 2p^2 + 5p - 9 = 0$

5. Határozzuk meg az m valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenlőtlenségeknek minden valós x megoldása legyen!

a) $(m-1)x^2 + (2m+7)x + m - 2 < 0$

b) $(m+3)x^2 + (2m-6)x + 1 > 0$

6. Határozzuk meg a q valós paraméter értékét úgy, hogy a $(q-4)x^2 + (2q+11)x + q + 1 > 0$ egyenlőtlenségnek ne legyen valós megoldása!

7. Négyzetgyökös egyenletek, egyenlőtlenségek

Eddig olyan egyenletekkel, illetve egyenlőtlenségekkel foglalkoztunk, melyekben az ismeretleneket és a számokat csak a négy alpművelet kapcsolta össze. Ebben a leckében olyan típusú egyenletek és egyenlőtlenségek kerülnek elő, melyekben az ismeretlen négyzetgyök alatt szerepel.

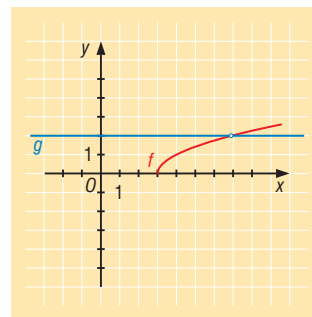


1. példa Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{x-3} = 2$

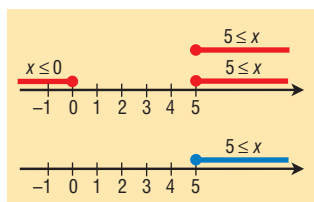
b) $\sqrt{x-5} = \sqrt{x^2-5x}$

c) $\sqrt{x^2-6x+9} = 7-2x$



7.1. ábra Az 1. a) példa grafikus megoldása

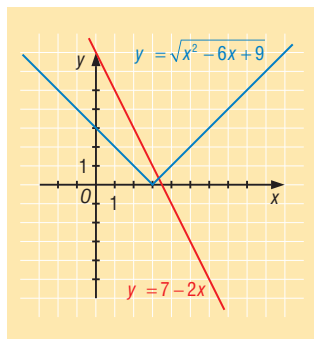
Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



7.2. ábra Az egyenlet értelmezési tartománya az $[5; \infty[$ intervallum

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

7.3. ábra Ne felejtjük el!



7.4. ábra Tehát az egyenlet megoldása $x = \frac{10}{3}$. Az 1. c) példa grafikus megoldása

Megoldás:

A négyzetgyökös egyenletek megoldásánál arra törekszünk, hogy ki-küszöböljük a négyzetgyököt. Ez általában négyzetre emeléssel történik.

a) Mielőtt négyzetre emelnénk az egyenlet mindkét oldalát, határozzuk meg az értelmezési tartományát! Mivel a négyzetgyökjel alatt csak nemnegatív szám állhat, így teljesülnie kell, hogy $x - 3 \geq 0$, azaz $x \geq 3$. Tehát az értelmezési tartomány a $[3; \infty[$ intervallum. Végezzük el a négyzetre emelést, ekkor kapjuk, hogy $x - 3 = 4$, azaz $x = 7$. Ez megoldása az egyenletnek, melyről visszahelyettesítéssel is meggyőződhetünk.

b) Az egyenlet megoldását kezdjük megint az értelmezési tartomány meghatározásával! Tudjuk, hogy a négyzetgyökjel alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért $x - 5 \geq 0$ és $x^2 - 5x \geq 0$. Az első egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $x \geq 5$. A második egy másodfokú egyenlőtlenség. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 5x$ hozzárendelési szabályú függvény zérushelyeit az $x(x - 5) = 0$ egyenlet megoldásával határozhatjuk meg. Ebből $x_1 = 0$ és $x_2 = 5$. Mivel a függvény képe egy pozitív irányba nyíló parabola, ezért az egyenlőtlenség az $x \leq 0$ vagy $5 \leq x$ számok esetén teljesül. Ezt egybevetve az első egyenlőtlenség megoldásával kapjuk, hogy az értelmezési tartomány az $[5; \infty[$ intervallum. Végezzük el a négyzetre emelést és redukáljunk nullára!

$$x - 5 = x^2 - 5x \Rightarrow 0 = x^2 - 6x + 5$$

Az egyenlet diszkriminánsa: $D = 6^2 - 4 \cdot 5 = 16$. Ebből: $x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \Rightarrow x_1 = 5$ és $x_2 = 1$. Ezen utóbbi szám nem eleme az értelmezési tartománynak, tehát az egyenlet megoldása az 5.

c) Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldalán álló négyzetgyök alatti kifejezés egy teljes négyzet, azaz $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Így a bal oldalra teljesül, hogy

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|.$$

Ez alapján az $|x - 3| = 7 - 2x$ egyenlethez jutunk. Alkalmazzuk az abszolút érték definícióját! Két esetet kell megvizsgálnunk.

I. $x \geq 3$

Ekkor $|x - 3| = x - 3$, így az $x - 3 = 7 - 2x$ egyenlethez jutunk, melynek megoldása $x = \frac{10}{3}$, és ez megfelel az $x \geq 3$ feltételnek.

II. $x < 3$

Ekkor $|x - 3| = 3 - x$, így a $3 - x = 7 - 2x$ egyenletet kapjuk. Ennek megoldása $x = 4$, mely nem felel meg az $x < 3$ feltételnek.



2. példa Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $15 - 2x = 7\sqrt{x}$ b) $\sqrt{10 - x} + 4 = x$

Megoldás:

a) A négyzetgyök kiküszöbölésére az 1. a) példában két módszert is mutatunk.

1. módszer: Adjuk meg az értelmezési tartományt! Mivel négyzetgyökjel alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért az egyenlet értelmezési tartománya: $\mathbb{R}_0^+$. Ezután négyzetre emeléssel a következő egyenlethez jutunk: $(15 - 2x)^2 = 49x$. Bontsuk fel a zárójelet, majd redukáljunk nullára!

$$225 - 60x + 4x^2 = 49x \Rightarrow 4x^2 - 109x + 225 = 0$$

Az egyenlet diszkriminánsa

$$D = 109^2 - 4 \cdot 4 \cdot 225 = 8281 = 91^2.$$

Ebből $x_{1,2} = \frac{109 \pm 91}{8} \Rightarrow x_1 = 25$ és $x_2 = 2,25$. Az egyenlet értelmezési

tartományában mindkét szám benne van, így joggal gondolhatjuk, hogy mindkét szám megoldása az eredeti egyenletnek. Ellenőrizzük le!

$x = 25$	$x = 2,25$
bal oldal: $15 - 2 \cdot 25 = -35$	bal oldal: $15 - 2 \cdot 2,25 = 10,5$
jobb oldal: $7 \cdot \sqrt{25} = 35$	jobb oldal: $7 \cdot \sqrt{2,25} = 7 \cdot 1,5 = 10,5$
Nem áll fenn az egyenlőség.	Fennáll az egyenlőség.

Az egyenletnek csak az $x = 2,25$ a megoldása, ami azt jelenti, hogy a négyzetre emelés miatt hamis megoldást is kaptunk. Ennek oka jól látszik az ellenőrzésnél. Ha $x = 25$, akkor az egyik oldal értéke -35 , a másiké 35 , mely számoknak a négyzete egyenlő. Így a négyzetre emeléssel kapott $(15 - 2x)^2 = 49x$ egyenletnek megoldása a 25 , de az eredetinek nem. A $15 - 2x = 7\sqrt{x}$ egyenlet és a négyzetre emeléssel kapott $(15 - 2x)^2 = 49x$ egyenlet **nem ekvivalens** (egyenértékű) az $\mathbb{R}_0^+$ halmazon, mert a két egyenletnek nem ugyanazok a megoldásai ezen a halmazon. Az átalakítást úgy tudjuk ekvivalenssé tenni, ha olyan halmazon végezzük el a négyzetre emelést, ahol az egyenlet két oldala azonos előjelű. Mivel a $7\sqrt{x}$ mindig nemnegatív értékű, ezért a $15 - 2x$ -re is ennek kell fennállnia, ami akkor teljesül, ha $x \leq 7,5$. Emiatt legyen az egyenlet értelmezési tartománya a $[0; 7,5]$ intervallum! Ennek a halmaznak nem eleme a 25 , csak a $2,25$. Így az átalakítás során

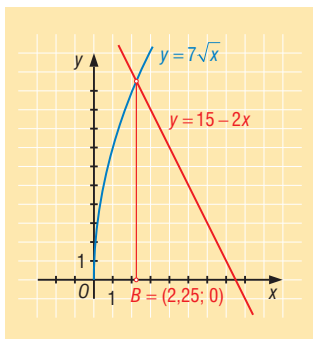


7.5. ábra Jól jegyezzük meg!

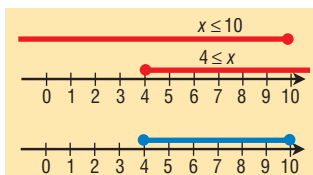


7.6. ábra Vajon melyik hamis?

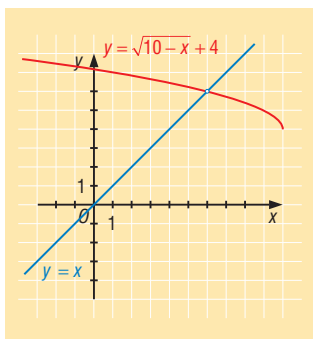
Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



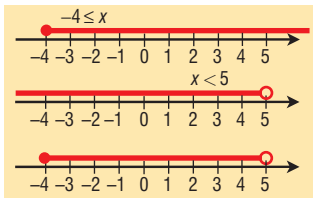
7.7. ábra A 2. a) példa grafikus megoldása



7.8. ábra Az egyenlet értelmezési tartománya a $[4;10]$



7.9. ábra A 2. b) példa grafikus megoldása



7.10. ábra A megoldáshalmaz: $M = [-4; 5[$

kapott egyenleteknek ugyanazok a megoldásai, azaz a $[0;7,5]$ intervallumon minden átalakítás ekvivalens volt.

Az egyenletek megoldásához szervesen hozzátartozik annak megmutatása, hogy a kapott eredmények az eredeti egyenletnek megoldásai. Ezt úgy végezhetjük el, hogy bebizonyítjuk, a megoldás során csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, vagy a kapott számokat behelyettesítjük az eredeti egyenletbe.

2. módszer: Az egyenlet négyzetre emelése megnehezítheti a megoldást, ezért ha van rá mód, érdemes elkerülni. Mivel x a $\sqrt{x}$ négyzete, ezért $y = \sqrt{x}$ helyettesítéssel y -ra nézve másodfokú egyenlethez jutunk:

$15 - 2y^2 = 7y$. Redukáljuk nullára: $2y^2 + 7y - 15 = 0$. Az egyenlet diszkriminánsa $D = 7^2 - 4 \cdot (-15) \cdot 2 = 169 = 13^2$. Így

$$y_{1,2} = \frac{-7 \pm 13}{4} \Rightarrow y_1 = 1,5 \text{ és } y_2 = -5. \text{ Ebből } \sqrt{x} = 1,5, \text{ így } x = 2,25.$$

A $\sqrt{x} = -5$ egyenletnek viszont nincs valós megoldása. Tehát a megoldás $x = 2,25$. Mivel az átalakítások ekvivalensek voltak, ezért a 2,25 és csak a 2,25 a megoldás.

b) Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy a bal oldalon csak a négyzetgyökös kifejezés szerepeljen: $\sqrt{10-x} = x - 4$! Adjuk meg az egyenlet értelmezési tartományát, és biztosítsuk, hogy a két oldal azonos előjelű legyen! Mivel a négyzetgyökjel alatt csak nemnegatív szám állhat, és a bal oldal nemnegatív értékű, ezért fenn kell állnia a $10 \geq x$ és az $x \geq 4$ egyenlőtlenségeknek. Ennek alapján az egyenletet a $[4; 10]$ intervallumon oldjuk meg! Négyzetre emelhetünk, mert a megadott intervallumon az átalakítás ekvivalens lesz.

$$10 - x = (x - 4)^2 \Rightarrow 0 = x^2 - 7x + 6$$

Az egyenlet diszkriminánsa $D = 7^2 - 4 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$. Ebből

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 6 \text{ és } x_2 = 1. \text{ Az 1 nem eleme a megadott intervallumnak, így az nem megoldás. A 6 viszont igen. Mivel az átalakítások ekvivalensek voltak, ezért 6 és csak a 6 az eredeti egyenlet megoldása.}$$



3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán, és ábrázoljuk a megoldást számegyenesen!

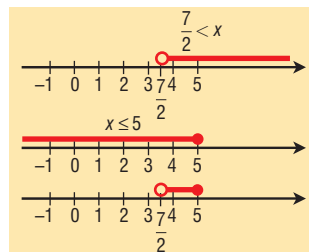
$$\text{a) } \sqrt{x+4} < 3 \quad \text{b) } \frac{5-x}{\sqrt{2x-7}} \geq 0$$

Megoldás:

a) Adjuk meg az egyenlőtlenség értelmezési tartományát! Mivel a négyzetgyökjel alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért $-4 \leq x$. Tehát az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a $[-4; \infty[$ intervallum. Mivel a nemnegatív számok halmazán a másodfokú függvény szigorúan mono-

ton növekvő, ezért amilyen értelmű az egyenlőtlenség két nemnegatív szám között, ugyanolyan értelmű egyenlőtlenség áll fenn a négyzeteik között. Emiatt az egyenlőtlenség két oldalának négyzetre emelése után az $x+4 < 9$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ebből $x < 5$. Ezt összevetve az értelmezési tartománnyal kapjuk, hogy a megoldáshalmaz: $M = [-4; 5[$.

b) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya az előzőek alapján a $\left[\frac{7}{2}; \infty\right[$ intervallum. A nevező pozitív értékű, így a tört pontosan akkor nemnegatív a megadott halmazon, ha a számláló nemnegatív. Tehát $5-x \geq 0$, azaz $5 \geq x$. Ezt egybevetve az értelmezési tartománnyal kapjuk, hogy $\frac{7}{2} < x \leq 5$. Tehát a megoldáshalmaz: $M = \left[\frac{7}{2}; 5\right]$.



7.11. ábra A megoldáshalmaz: $M = \left[\frac{7}{2}; 5\right]$

4. példa Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

- a) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 5$
 b) $\sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2-4x-4} = \sqrt{x^2-4x-1}$

Megoldás:

a) A négyzetre emelést nem kerülhetjük el, de előtte mindkét oldalból vonjuk ki az egyik négyzetgyökös kifejezést, mert így négyzetre emelés után egyszerűbb egyenletet kapunk. Átrendezés után a $\sqrt{x-3} = 5 - \sqrt{x+2}$ egyenlethez jutunk. Határozzuk meg az egyenlet értelmezési tartományát, és biztosítsuk, hogy a két oldal azonos előjelű legyen! Ennek alapján fenn kell állnia az $x \geq 3$, $x \geq -2$ és az $5 \geq \sqrt{x+2}$ egyenlőtlenségeknek. Az utóbbiból az előző példa alapján négyzetre emelés és rendezés után a $23 \geq x$ egyenlőtlenséget kapjuk. A három együtt a $[3; 23]$ intervallumon teljesül. Az egyenlet négyzetre emelése most már ekvivalens átalakítás lesz.

$$x-3 = (5 - \sqrt{x+2})^2 \Rightarrow x-3 = 25 - 10\sqrt{x+2} + x+2$$

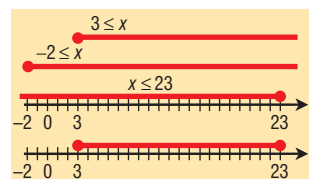
Az utóbbi egyenletet rendezve kapjuk, hogy $10\sqrt{x+2} = 30$, azaz $\sqrt{x+2} = 3$. Ebből újabb négyzetre emeléssel és rendezéssel kapjuk, hogy $x = 7$. Mivel a 7 eleme a megadott intervallumnak, és az átalakítások ekvivalensek voltak, ezért ez, és csak ez a megoldás.

b)

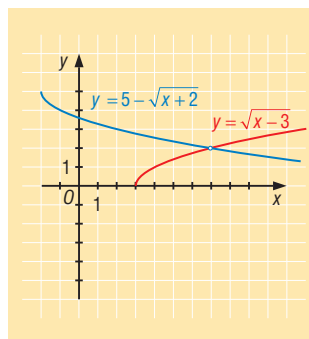


Vegyük észre, hogy a négyzetgyök alatti kifejezések első két tagja ugyanaz! Így célszerű ezt új ismeretlennel helyettesíteni.

Legyen $y = x^2 - 4x$! Ekkor a $\sqrt{y+4} - \sqrt{y-4} = \sqrt{y-1}$ egyenlethez jutunk. Határozzuk meg az egyenlet értelmezési tartományát, és vizsgáljuk meg a két oldal előjelét! Fenn kell állnia az $y \geq -4$, $y \geq 4$, $y \geq 1$ és a $\sqrt{y+4} \geq \sqrt{y-4}$ egyenlőtlenségeknek. Az utóbbi egyenlőtlenség minden megengedett y érték esetén fennáll, mert a négyzetgyökfügg-

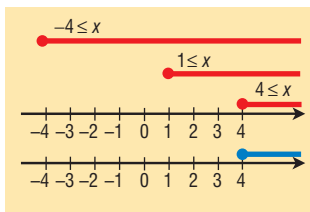


7.12. ábra A 4. a) egyenlet értelmezési tartománya a $[3; 23]$



7.13. ábra A 4. a) példa grafikus megoldása

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



7.14. ábra A 4. b) egyenlet értelmezési tartománya a $[4; \infty[$



7.15. ábra Behelyettesítéssel ellenőrizhetünk!

vény szigorúan monoton növekvő. Ennek alapján az egyenletet a $[4; \infty[$ intervallumon kell megoldani! Emeljünk négyzetre!

$$\begin{aligned} (\sqrt{y+4} - \sqrt{y-4})^2 &= y-1 \\ y+4 - 2\sqrt{y+4} \cdot \sqrt{y-4} + y-4 &= y-1 \\ y+1 &= 2\sqrt{y+4} \cdot \sqrt{y-4} \end{aligned}$$

A megadott intervallumon mindkét oldal nemnegatív, az újabb négyzetre emelés ekvivalens átalakítás lesz.

$$(y+1)^2 = 4(y^2 - 16) \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 4y^2 - 64$$

Ebből $0 = 3y^2 - 2y - 65$. Az egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-65) = 784 = 28^2.$$

Így $y_{1,2} = \frac{2 \pm 28}{6} \Rightarrow y_1 = 5$ és $y_2 = -\frac{13}{3}$. Az utóbbi nem eleme a $[4; \infty[$ intervallumnak, ezért az nem megoldás. Az 5 viszont igen. Tudjuk, hogy $y = x^2 - 4x$, ezért az $x^2 - 4x = 5$ egyenletet kell a továbbiakban megoldani. Redukáljuk nullára: $x^2 - 4x - 5 = 0$! Az egyenlet diszkriminánsa: $D = (-4)^2 - 4 \cdot (-5) = 36$. Így $x_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = 5$ és $x_2 = -1$. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.

5. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt{x+5} \geq x-1$ b) $\sqrt{2x+4} < x-2$

Megoldás:

a) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a $[-5; \infty[$ intervallum. A bal oldal csak nemnegatív értékeket vesz fel, ezért a jobb oldalra is ennek kell fennállnia ahhoz, hogy az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelhessük. Ez viszont nem minden értelmezési tartománybeli elem esetén teljesül, ezért a megoldást bontsuk két részre!

I. Ha $-5 \leq x < 1$, akkor a bal oldal nemnegatív, a jobb oldal negatív értékű, ezért ezen az intervallumon fennáll az egyenlőtlenség.

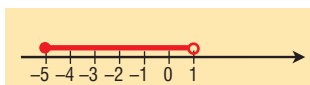
II. Ha $1 \leq x$, akkor mindkét oldal nemnegatív, így négyzetre emelhetünk.

$$x+5 \geq (x-1)^2$$

Mivel a másodfokú függvény a nemnegatív számok halmazán szigorúan monoton növekvő, ezért a relációjel iránya a négyzetre emelés után is megmarad. Bontsuk fel a zárójelet, és redukáljunk nullára!

$$\text{Tehát } x+5 \geq x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 0 \geq x^2 - 3x - 4.$$

Mivel a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 3x - 4$ hozzárendelési szabályú függvény képe egy „felfelé” nyíló parabola, ezért a



7.16. ábra Az I. rész megoldáshalmaza



7.17. ábra A II. rész megoldáshalmaza

$$ax^2 + bx + c = 0$$

két zérushely közötti értékek esetén vesz fel negatív értéket. Az eddigiek alapján könnyen kiszámolhatók a zérushelyek: $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Tehát $0 \geq x^2 - 3x - 4$, ha $-1 \leq x \leq 4$. Ezt egybevetve az $1 \leq x$ feltétellel kapjuk, hogy $1 \leq x \leq 4$.

A kiindulási egyenlőtlenség megoldása: $M = [-5; 4]$.

b) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a $[-2; \infty[$ intervallum.

Ha $-2 \leq x < 2$, akkor a bal oldal nemnegatív, a jobb oldal negatív. Ekkor nem állhat fenn az egyenlőtlenség.

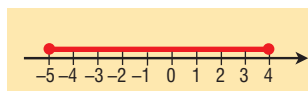
Ha $2 \leq x$, akkor a két oldal azonos előjelű, négyzetre emeléssel oldhatjuk meg az egyenlőtlenséget.

$$2x + 4 < (x - 2)^2$$

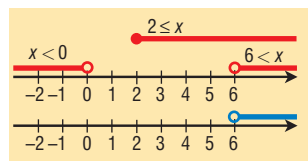
Bontsuk fel a zárójelet és redukáljunk nullára!

$$2x + 4 < x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 0 < x^2 - 6x$$

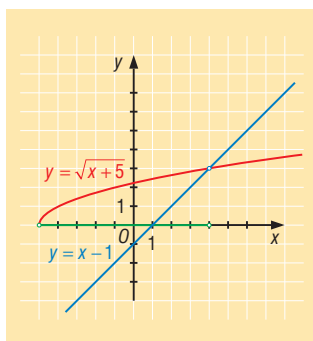
Mivel a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 6x$ hozzárendelési szabályú függvény képe egy „felfelé” nyíló parabola, ezért a két zérushelyen kívüli értékek esetén vesz fel pozitív értéket. Mivel a két zérushely a 0 és a 6, ezért a $0 < x^2 - 6x$ egyenlőtlenség megoldása $x < 0$ vagy $6 < x$. Ezt egybevetve a $2 \leq x$ feltétellel kapjuk, hogy az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza az $M =]6; \infty[$ intervallum.



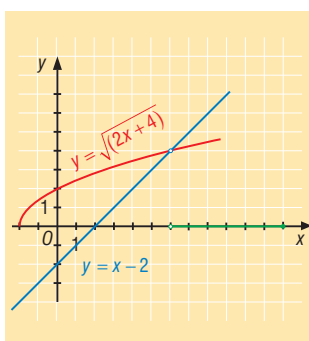
7.18. ábra Az 5. a) példa egyenlőtlenségének megoldása



7.19. ábra. Az 5. b) példa megoldáshalmaza: $M =]6; \infty[$



7.20. ábra Az 5. a) példa grafikus megoldása $M = [-5; 4]$



7.21. ábra Az 5. b) példa grafikus megoldása



Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{2x-3} = 7$

b) $\sqrt{5-3x} - 5 = 4$

c) $\frac{3}{2}\sqrt{8-2x} - 7 = 5$

d) $\sqrt{11-5x} = \sqrt{4+2x}$

e) $\sqrt{22+2x} - \sqrt{4-x} = 0$

f) $5\sqrt{8+3x} = \sqrt{150+50x}$

g) $2\sqrt{2x+5} = \sqrt{8x^2+20x}$

h) $\sqrt{x^2+2x} = \sqrt{x^2+16}$



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $3\sqrt{x} - 5 = 7 - 9\sqrt{x}$ b) $-2\sqrt{x} + 15 = x$ c) $3x + 8\sqrt{x} = 3$
d) $\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 5} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$ e) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 5} = \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 12$ b) $\sqrt{x^2 + 24x + 144} = 3$
c) $\sqrt{9x^2 - 30x + 25} - 11 = 10$ d) $\sqrt{121 + 22x + x^2} = 2x + 3$

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{3x + 1} = 3 - x$ b) $\sqrt{2x - 5} + 4 = x$ c) $\sqrt{x + 3} - 2x = 3$
d) $7 - \sqrt{17 - 2x} = x$ e) $\sqrt{6x^2 + 5x + 2} = 3x + 2$

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $2 \leq \sqrt{x - 5}$ b) $\sqrt{7x + 2} \leq 3$ c) $5 - \sqrt{8 - 3x} < 2$
d) $0 < 6 + \sqrt{4 - 5x}$ e) $-\frac{7}{\sqrt{8 - 2x}} < 0$ f) $\frac{3 - 2x}{\sqrt{x + 2}} < 0$
g) $\frac{\sqrt{7x + 5}}{x - 2} \geq 0$ h) $\frac{\sqrt{x + 6}}{|x - 5|} > 0$ i) $\frac{|x + 1|}{\sqrt{2x + 7}} \leq 0$

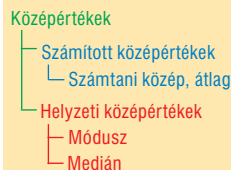
6. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 3} = 4$ b) $\sqrt{2x + 6} - \sqrt{9 - x} = 2$
c) $\sqrt{x + 3} + \sqrt{3x - 2} = \sqrt{6x + 13}$ d) $\sqrt{5x - 10} - \sqrt{23 - 2x} = \sqrt{2x - 10}$
e) $\sqrt{x^2 + 3x + 12} - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = \sqrt{x^2 + 3x - 3}$
f) $\sqrt{2x^2 - 5x + 13} + \sqrt{2x^2 - 5x + 1} = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 6}$

7. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt{3x + 13} > x + 3$ b) $5 - x \geq \sqrt{2x - 7}$ c) $x + 7 > \sqrt{4x + 33}$
d) $\sqrt{9 - 2x} \geq x - 3$ e) $\sqrt{x^2 - 6x} > x + 2$

8. Számított középértékek



8.1. ábra Emlékeztető

Már az előző tanévben, a statisztikában találkoztunk a középérték elnevezéssel. Ott a középértékeket két csoportra osztottuk, a helyzeti és a számított középértékek csoportjára. Az előbbihez soroltuk a móduszt és a mediánt, az utóbbihoz a számítási közepet. A továbbiakban a számított középértékek körét bővítjük néhány fogalommal.

8.1. Számítási és mértani közép



1. példa Tihamér tanyájának udvarán egy 16 méter hosszú, 9 méter széles, téglalap alakú veteményeskert található, ahol Tihamér saját fogyasztásra zöldségeket termeszt. Tavasszal az udvarrendezési munkálatok során úgy látta, hogy praktikusabb lenne, ha a veteményeskert négyzet alakú volna. Hogyan változik az elkerített terület nagysága, ha az eredeti kert kerítését teljes mértékben fel akarja használni? Hány százaléka az új terület a réginek?

Megoldás:

Az eredeti veteményeskert oldalai legyenek $a = 9$ m és $b = 16$ m!

Az új kert oldalát jelöljük a_1 -gyel! Mivel az eredeti kerítést teljes mértékben fel akarja használni, ezért a két kert kerülete egyenlő. Ennek alapján felírhatjuk, hogy $4a_1 = 2(a + b)$. Ebből kifejezhetjük az a_1 -et.

Tehát az új kert oldalának a hossza $a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{9+16}{2} = 12,5$ m. A területe: $T_1 = 12,5^2 \text{ m}^2 = 156,25 \text{ m}^2$. Az eredeti terület $T = ab = 144 \text{ m}^2$.

A kert területe $12,25 \text{ m}^2$ -rel nőtt. Az új terület az eredeti területnek $156,25 : 144 \cdot 100 \approx 1,085 \cdot 100 = 108,5\%$ -a.



2. példa Mikor Tihamér kiszámolta az elkerített területet, úgy gondolta, hogy így már túl sok helyet foglalna el az udvartól. Ezért úgy döntött, hogy az eredeti területet megtartva készít négyzet alakú kertet. Elég-e az új terület körbekerítéséhez a régi kerítés?

Megoldás:

Használjuk az előző példabeli jelöléseket, de az új kert oldalának hosszát jelöljük most a_2 -vel! Ahhoz, hogy eldönthessük, elég-e az eredeti kerítés, ki kell számolni az új kert oldalának hosszát. Mivel most a terület változatlan, ezért felírhatjuk, hogy $a_2^2 = ab$, azaz $a_2 = \sqrt{ab}$. Ebből $a_2 = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$ (m). Az előző feladatban kiszámoltuk, hogy változatlan terület mellett az új oldalhossz $12,5$ m, így elég lesz a kerítés.



Az első példában használt $a_1 = \frac{a+b}{2}$ kifejezést az a és b pozitív valós

számok **számítási közepének**, míg a másodikban használt $a_2 = \sqrt{ab}$ formulát az a és b pozitív valós számok **mértani közepének** nevezzük.



8.2. ábra Új kerítés kellene!



8.3. ábra Készítsünk tervet!

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



8.4. ábra Hány ötösöm van matematikából?

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$" = " \Leftrightarrow a = b$$

8.5. ábra Fontos egyenlőtlenség

Definíció Két pozitív valós szám **számtani közepén** összegüknek a felét értjük, azaz $A_2 = \frac{a+b}{2}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Definíció Két pozitív valós szám **mértani közepén** szorzatuknak a négyzetgyökét értjük, azaz $G_2 = \sqrt{ab}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Mindkét fogalom megadható több szám esetén is. Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$! Ezen számok számtani közepén az

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

formulát, míg mértani közepén a

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

formulát értjük.

Az első példában a négyzet oldala $a_1 = \frac{a+b}{2} = 12,5$ (m), míg a másodikban $a_2 = \sqrt{ab} = 12$ (m) volt. Azaz az ott szereplő számok számtani közepe nagyobb a mértani közepüknél. Az alábbiakban ezzel kapcsolatban bizonyítunk be egy tételt.

Tétel Az a és b pozitív valós számok mértani közepe nem nagyobb a számtani közepüknél, azaz $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b$.

Bizonyítás:

Induljunk ki a bizonyítandó egyenlőtlenségből, és ekvivalens átalakításokkal hozzuk olyan alakra, amelyről biztosan állíthatjuk, hogy igaz! Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, ezért annak négyzetre emelésével az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk.

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

Végezzük el a négyzetre emelést a jobb oldalon, majd szorozzuk mindkét oldalt 4-gyel, és redukáljuk nullára az egyenlőtlenséget!

$$ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

$$0 \leq (a-b)^2$$

Mivel az utolsó egyenlőtlenség igaz a megengedett értékekre, és az átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért a kiindulási egyenlőtlenség is igaz. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az utolsó egyenlőtlenségénél is fennáll, azaz ha $a = b$.



3. példa Bizonyítsuk be, hogy az adott kerületű téglalapok közül a négyzet területe a legnagyobb!

Megoldás:

Jelölje a vizsgált téglalapok oldalát a , illetve b , az adott kerületet K !

Ekkor felírhatjuk, hogy $\frac{K}{4} = \frac{a+b}{2}$. Felhasználva a számtani és mértani

közép közötti egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy $\frac{K}{4} = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = \sqrt{T}$,

ahol T jelöli a vizsgált téglalapok területét. Mivel mindkét oldal pozitív, így négyzetre emeléssel az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséghez

jutunk: $\left(\frac{K}{4}\right)^2 \geq T$. Ez azt jelenti, hogy adott kerületű téglalap esetén

a téglalap területe nem nagyobb a kerület negyedének négyzeténél. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, azaz a terület akkor és csak akkor maximális, amikor a számtani és mértani közép között is egyenlőség áll fenn, tehát amikor $a = b$. Ez pontosan azt jelenti, hogy ekkor a téglalap négyzet.



4. példa Bizonyítsuk be, hogy adott területű téglalapok közül a négyzet kerülete a legkisebb!

Megoldás:

Jelölje a vizsgált téglalapok oldalát a , illetve b , az adott területet T !

A téglalap területe $T = ab$. Ennek alapján a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával felírhatjuk, hogy

$\sqrt{T} = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{K}{4}$. Ebből kapjuk, hogy $4\sqrt{T} \leq K$, azaz adott

területű téglalapok kerülete nem kisebb a terület négyzetgyökének négyszeresénél. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, azaz a kerület akkor és csak akkor minimális, amikor a számtani és mértani közép között is egyenlőség áll fenn, tehát amikor $a = b$. Ez pontosan azt jelenti, hogy a téglalap négyzet.

Vajon mikor lesz
a terület maximális?



8.6. ábra Területszámítás kerületből

Vajon hogyan spórolhatnák
kerítést, hogy közben a terület
ne változzon?

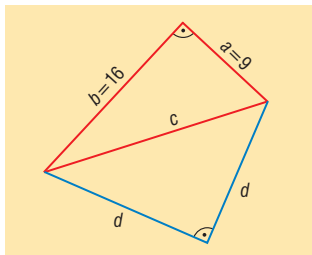


8.7. ábra Készítsünk rajzot!



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

8.2. Négyzetes és harmonikus közép (Kiegészítő anyag)



8.8. ábra Háromszögek



5. példa Az ABC derékszögű háromszög két befogója $a = 9$, illetve $b = 16$ egység. Határozzuk meg azon egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóit, amelynek átfogója egyenlő az ABC háromszög átfogójával!

Megoldás:

Jelölje az ABC háromszög átfogóját c ! Ekkor a Pitagorasz-tétel alapján felírhatjuk, hogy $c^2 = a^2 + b^2$. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója legyen d ! Ekkor ugyancsak Pitagorasz tétele alapján felírhatjuk, hogy $2d^2 = c^2$. A két egyenlőségből adódik, hogy $2d^2 = a^2 + b^2$, azaz

$$d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{\frac{9^2 + 16^2}{2}} \approx 12,98 \text{ egység.}$$



A feladat megoldásában szereplő $d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ kifejezést az a és b pozitív valós számok **négyzetes közepének** nevezzük.



Definíció Két pozitív valós szám **négyzetes közepén** a négyzetösszegük felének négyzetgyökét értjük, azaz $Q_2 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$.



8.9. ábra Útkarbantartás



6. példa Útkarbantartási munkálatok miatt egy teherautó az útja első felét $9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, míg második felét $16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ átlagsebességgel tette meg. Mekkora az egész útra számolt átlagsebessége?

Megoldás:

Fizikából jól ismert, hogy a mozgás átlagsebességét úgy számolhatjuk ki, hogy a teljes utat elosztjuk a megtételhez szükséges idővel. Jelöljük most az út első, illetve második felét is s -sel, a sebességek pedig legyenek $v_1 = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ és $v_2 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$! Ekkor az út első felének megtételéhez

szükséges idő $t_1 = \frac{s}{v_1}$, míg a második felének megtételéhez szükséges

idő $t_2 = \frac{s}{v_2}$. Így a teljes utat $t = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}$ idő alatt teszi meg a

teherautó. Ennek felhasználásával az egész útra számolt átlagsebes-

ség $v = \frac{2s}{t} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}}$. Egyszerűsítsünk s -sel, majd hozzuk egyszerűbb

alakra a törtet: $v = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{v_2 + v_1}{v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_2 + v_1}$. Ebből kiszámolhatjuk

az átlagsebességet: $v = \frac{2 \cdot 9 \cdot 16}{9 + 16} = 11,52 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$.



A feladat megoldásában használt $v = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_2 + v_1}$ kifejezést két

pozitív szám **harmonikus közepének** nevezzük.



Definíció Két pozitív valós szám **harmonikus közepén** a reciprokaik számtani közepének a reciprokat értjük, azaz

$$H_2 = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}}, \text{ ahol } a, b \in \mathbb{R}^+.$$

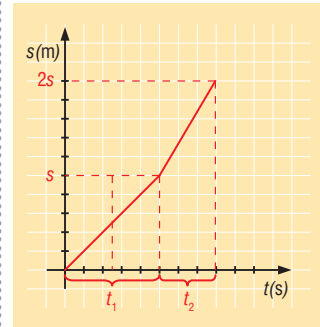
A kifejezést egyszerűbb alakra hozva kapjuk, hogy

$$H_2 = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

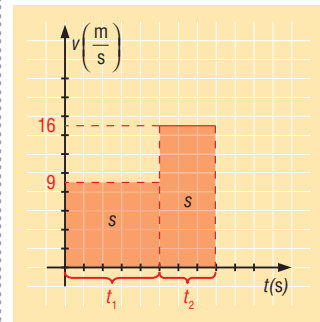
Természetesen értelmezhetjük több pozitív szám négyzetes és harmonikus közepét is az alábbi módon. Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$! Ezen szá-

mok négyzetes közepe $Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$, harmonikus közepe

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$



8.10. ábra A mozgás út–idő grafikonja



8.11. ábra A mozgás sebesség–idő grafikonja



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



8.12. ábra Püthagorasz
(Kr. e. 582–496)

Ha az 5. és 6. példában kapott eredményt összevetjük az első két példa eredményével, azt tapasztaljuk, hogy az ott szereplő két szám harmonikus közepe a legkisebb, utána a mértani közép, majd a számtani, és végül a négyzetes közép jön. Ennek általánosítását fogalmazza meg az alábbi tétel, melyet most nem bizonyítunk.



Tétel

Legyen $a \leq b$ két pozitív valós szám! Ekkor $a \leq H_2 \leq G_2 \leq A_2 \leq Q_2 \leq b$. Egyenlőség mindenütt akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b$.



A pitagoreusok számmissztikájához tartozott az is, hogy a különböző középértékeknek nagy jelentőséget tulajdonítottak. Ők vezették be a számtani, a mértani és a harmonikus közép fogalmát.



Oldjuk meg!

1. Határozzuk meg az alábbi számok számtani és mértani közepét!

a) 9 és 25 b) 32 és 18 c) 21 és 41 d) $\frac{12}{5}$ és $\frac{5}{3}$ e) $\frac{8}{27}$ és $\frac{3}{2}$

2. Két szám számtani közepe 23. Az egyik 8-cal nagyobb, mint a másik. Melyik ez a két szám?

3. Egy számnak és a 6-nak a mértani közepe 18. Melyik ez a szám?

4. Az ABC derékszögű háromszög két befogója $a = 8$ cm és $b = 18$ cm. Mekkora annak az egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynek területe egyenlő az ABC háromszög területével?

5. Az ABC derékszögű háromszög két befogója $a = 8$ cm és $b = 18$ cm. Mekkora annak az egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az átfogója, amely befogóinak az összege egyenlő az ABC háromszög befogóinak az összegével?

6. Azon derékszögű háromszögek közül, melyek befogóinak az összege 36 cm, melyiknek legnagyobb a területe?

7. Azon derékszögű háromszögek közül, melyek területe 18 cm^2 , melyiknél legkisebb a befogók összege?

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív valós szám és a szám reciprokának az összege legalább 2!

9. A 8. feladat felhasználásával határozzuk meg az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2} + 2$ függvény minimumát és minimumhelyét!

10. Számítsuk ki az 1. feladatban megadott számok négyzetes és harmonikus közepét!

11. Egy autó az útja az első felét $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, míg második felét $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel tette meg. Mennyi a két sebesség átlagának az egész útra számolt átlagsebességtől való eltérése?

12. Legyen a és b két pozitív valós szám, ahol $a \leq b$! Bizonyítsuk be, hogy

- a) $a \leq H_2$; b) $H_2 \leq G_2$; c) $A_2 \leq Q_2$; d) $Q_2 \leq b$!

13. Azon derékszögű háromszögek közül, melyek befogóinak összege 22 cm, melyiknek a legkisebb az átfogója?

9. Szélsőérték-feladatok

A fejezet első leckéjében foglalkoztunk másodfokú függvények vizsgálatával. Az alábbiakban az ott tapasztaltakat alkalmazzuk néhány gyakorlati és matematikai problémában.



1. példa Miután Tihamér a tanyája udvarának rendezése során átalakította a veteményeskertet, a megmaradt részen lehetősége nyílt egy téglalap alakú baromfiudvar kialakítására 100 m hosszú kerítés felhasználásával. Az elkerített részt az oldalaihoz is használt kerítéssel, a 9.2. ábrán látható módon három egyenlő területű, téglalap alakú részre akarta osztani. A négy párhuzamos kerítésszakasz hosszát jelöljük x -szel, az erre merőleges oldalt y -nal!

a) Határozzuk meg azt a függvényt, amely megadja a baromfiudvar területét az x függvényében!

b) Határozzuk meg azt a függvényt, amely megadja a baromfiudvar területét az y függvényében!

c) Hogyan válasszuk meg az x és y értékét, hogy az elkerített rész maximális területű legyen? Mekkora a maximális terület?



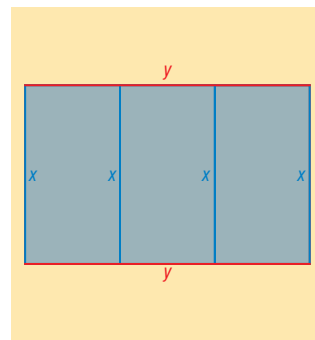
9.1. ábra A baromfiudvar

Megoldás:

a) Az ábráról leolvasható, hogy a kerítés 4 darab x és 2 darab y hosszúságú szakaszból áll. Így felírhatjuk, hogy $2y + 4x = 100$. A baromfiudvar területe $t = xy$. Ebben a részben a területet az x függvényeként kell megadni, ezért az első összefüggésből fejezzük ki y -t: $y = 50 - 2x$. Ezt beírva a terület képletébe, olyan algebrai kifejezést kapunk, melyben csak az x szerepel ismeretlenként $t_1(x) = x(50 - 2x) = 50x - 2x^2$. Vegyük figyelembe, hogy mind az x , mind az y pozitív! Ennek alapján a keresett függvény értelmezési tartománya a $]0; 25[$ intervallum. Tehát a függvény:

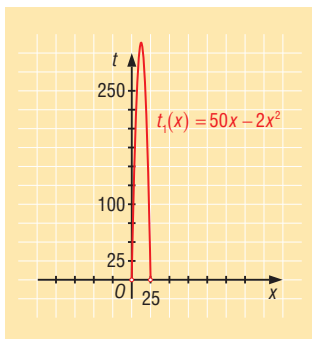
$$t_1 :]0; 25[\rightarrow \mathbb{R}, t_1(x) = 50x - 2x^2.$$

b) Ebben a részben a területet az y függvényeként kell megadni, ezért most x -et fejezzük ki: $x = \frac{50-y}{2} = 25 - \frac{y}{2}$. Ennek alapján azt kapjuk a területre, hogy $t_2(y) = y\left(25 - \frac{y}{2}\right) = 25y - \frac{y^2}{2}$. Mivel mind az x , mind

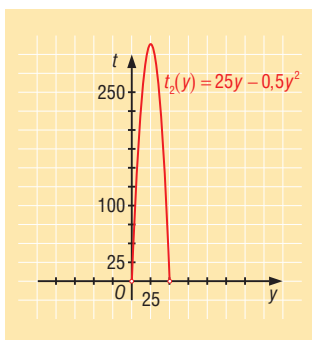


9.2. ábra A baromfiudvar tervrajza

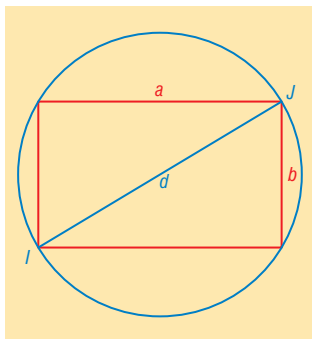
Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



9.3. ábra $t_1 :]0; 25[\rightarrow \mathbb{R}$,
 $t_1(x) = 50x - 2x^2$ függvény grafi-
konja



9.4. ábra $t_2 :]0; 50[\rightarrow \mathbb{R}$,
 $t_2(y) = 25y - \frac{1}{2}y^2$ függvény grafi-
konja



9.5. ábra A játszótér alaprajza

az y pozitív, ezért az értelmezési tartománya a $]0; 50[$ intervallum. Tehát a keresett függvény:

$$t_2 :]0; 50[\rightarrow \mathbb{R}, t_2(y) = 25y - \frac{1}{2}y^2.$$

c) Azt váránk, hogy mindkét függvény esetében ugyanarra az eredményre jussunk, azaz ugyanazon x és y esetén legyen maximális a vizsgált terület. Nézzük meg, hogy ez tényleg így van-e!

Először az a) részben kapott függvényénél keressük meg a maximumhelyet és a maximumot! Másodfokú függvényről lévén szó ezt teljes négyzetté kiegészítéssel tehetjük meg.

$$\begin{aligned} t_1(x) &= 50x - 2x^2 = -2(x^2 - 25x) = \\ &= -2\left[(x - 12,5)^2 - 156,25\right] = \\ &= -2(x - 12,5)^2 + 312,5 \end{aligned}$$

Mivel a függvény értelmezési tartománya a $]0; 25[$ intervallum, a maximumát $x = 12,5$ esetén veszi fel. (Lásd a 9.3. ábrát!)

Ekkor $y = 50 - 2x = 25$. Tehát a maximális területű téglalap oldalai 12,5 m és 25 m, a maximális terület 312,5 m².

Most nézzük a második függvényt!

$$\begin{aligned} t_2(y) &= 25y - \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}(y^2 - 50y) = \\ &= -\frac{1}{2}\left[(y - 25)^2 - 625\right] = -\frac{1}{2}(y - 25)^2 + 312,5 \end{aligned}$$

A függvény értelmezési tartománya a $]0; 50[$ intervallum, ezért a maximumát $y = 25$ esetén veszi fel. (Lásd a 9.4. ábrát!) Ekkor

$$x = 25 - \frac{y}{2} = 12,5.$$

Tehát azt kaptuk, amit vártunk.



2. példa Egy kör alakú füves tér sugara 25 m. A téren téglalap alakú játszótér szeretnének elkeríteni a rendelkezésre álló 140 m hosszú kerítéssel. Meg lehet-e választani úgy a játszótér méreteit, hogy annak körbekerítésére mind a 140 m-t felhasználják?

Megoldás:

A téglalap alakú játszótér szomszédos oldalai legyenek az ábrának megfelelően a és b , átlója d . A kerítés hossza 140 méter, amely egyben az elkerített rész maximális kerülete is. Egy téglalapot akkor lehet elhelyezni a 25 m sugarú körben, ha az átlója nem nagyobb, mint a kör átmérője, azaz 50 m. A kérdés tehát az, hogy a 140 m kerületű téglalapok között van-e olyan, melynek átlója nem nagyobb 50 m-nél. Ehhez határozzuk meg, hogy mennyi az ilyen téglalapok átlójának a minimuma!

Az előző feladathoz hasonlóan adjuk meg az átlót az egyik oldal függvényében! Mivel az oldalak a és b , ezért $2a + 2b = 140$, azaz

$a+b=70$. Ebből $a=70-b$. Pitagorasz tétele alapján írhatjuk, hogy $d=\sqrt{a^2+b^2}$. Kifejezhetjük az átlót a b oldallal:

$$d(b)=\sqrt{(70-b)^2+b^2}=\sqrt{2b^2-140b+4900}. \text{ Mivel } a \text{ és } b \text{ po-}$$

zitív, ezért a függvény értelmezési tartománya a $]0;70[$ intervallum. Tudjuk, hogy a négyzetgyökfüggvény szigorúan monoton növekvő, ezért elég az

$$f:]0;70[\rightarrow \mathbb{R}; f(b)=2b^2-140b+4900$$

függvény minimumát és minimumhelyét megkeresni. Egészítsük ki teljes négyzetté!

$$\begin{aligned} f(b) &= 2b^2 - 140b + 4900 = 2(b^2 - 70b + 2450) = \\ &= 2[(b-35)^2 + 1225] = 2(b-35)^2 + 2450 \end{aligned}$$

Mivel a függvény értelmezési tartománya a $]0;70[$ intervallum, ezért a minimumhelye $b=35$, a minimuma $f(35)=2450$. Ekkor $a=35$. Ebből négyzetgyökvonással megkapható az átló, amely $d \approx 49,50$ m. Tehát éppen fel tudják használni a teljes kerítést a játszótér bekerítéséhez.



9.6. ábra De jó, hogy ilyen nagy játszótérünk van!



3. példa Egy internetszolgáltató cég az általa nyújtott csomag havi díját szeretné megállapítani úgy, hogy bevétele maximális legyen. Tapasztalatuk szerint havi 8000 Ft-os díj esetén 2000 előfizetőjük van, és minden 200 Ft-os csökkentés átlagban újabb 100 fővel növeli az előfizetők számát.

Határozzuk meg azt a függvényt, amely megadja a bevételt a csökkentések száma függvényében!

Mennyi legyen a havi díj, hogy maximális legyen a bevétel? Mennyi ekkor a várható bevétel és az előfizetők száma?

Megoldás:

a) Jelöljük a csökkentések számát x -szel! Ekkor a havi díj $8000-200x$, az előfizetők száma $2000+100x$, ahol $x \in \mathbb{N}$. A bevételt az x függvényében megadó összefüggés:

$$\begin{aligned} f(x) &= (8000-200x)(2000+100x) = \\ &= 16\,000\,000 + 400\,000x - 20\,000x^2. \end{aligned}$$

A keresett függvény:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 16\,000\,000 + 400\,000x - 20\,000x^2.$$

b) Egészítsük ki teljes négyzetté a másodfokú kifejezést!

$$\begin{aligned} f(x) &= 16\,000\,000 + 400\,000x - 20\,000x^2 = \\ &= -20\,000(x^2 - 20x - 800) = -20\,000(x-10)^2 + 18\,000\,000 \end{aligned}$$

Ennek az értéke maximális, ha $x=10$. Mivel a 10 eleme az f függvény értelmezési tartományának, ezért ez a függvény maximumhelye. Ahhoz, hogy a bevétel maximális legyen, a havi díjnak 6000 Ft-nak kell lennie. Ekkor a várható bevétel 18 000 000 Ft, az előfizetők száma 3000.



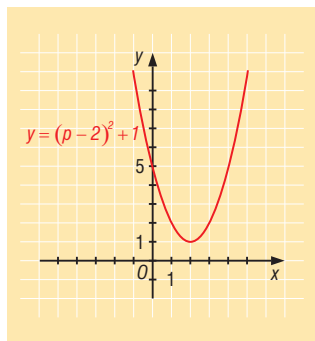
9.7. ábra Internet

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (a \neq 0)$$

9.8. ábra Viète-formulák



9.9. ábra A függvény minimumhelye $p = 2$, minimuma $f(2) = 1$

4. példa Adott az $x^2 + (p-1)x + p-2 = 0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

a) Határozzuk meg azt a függvényt, amely megadja a megoldásainak négyzetösszegét a p paraméter függvényében!

b) Mely valós p esetén lesz a megoldások négyzetösszege minimális? Mennyi ez a minimális érték?

Megoldás:

a) A fejezet 3. leckéjében már foglalkoztunk olyan problémákkal, ahol a másodfokú egyenlet megoldásainak négyzetösszegét kellett meghatározni. Ebben a Viète-formulák nyújtottak segítséget. Ahhoz, hogy ezeket alkalmazhassuk, a diszkriminánsnak nemnegatívnak kell lennie! Írjuk fel az egyenlet diszkriminánsát!

$$D = b^2 - 4ac = (p-1)^2 - 4(p-2) =$$

$$= p^2 - 2p + 1 - 4p + 8 = p^2 - 6p + 9 = (p-3)^2$$

Mivel a diszkrimináns teljes négyzet, ezért minden valós p esetén nemnegatív az értéke.

Tudjuk, hogy $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$, valamint a Viète-formulák alapján: $x_1 + x_2 = -(p-1)$ és $x_1x_2 = p-2$.

Így:

$$x_1^2 + x_2^2 = [-(p-1)]^2 - 2(p-2) = p^2 - 2p + 1 - 2p + 4 = p^2 - 4p + 5.$$

A keresett függvény:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(p) = p^2 - 4p + 5.$$

b) Teljes négyzetté kiegészítéssel megkereshetjük a minimumát és minimumhelyét.

$$f(p) = p^2 - 4p + 5 = (p-2)^2 + 1$$

Tehát a gyökök négyzetösszege $p = 2$ esetén minimális, és a minimum $f(2) = 1$. (9.7. ábra)

5. példa Most az $x^2 + 2(p+1)x + p^2 - 2 = 0$ egyenlettel kapcsolatban válaszoljunk az előző példában feltett kérdésekre!

Megoldás:

A feladatban szereplő egyenlet diszkriminánsa

$$D = b^2 - 4ac = 4(p+1)^2 - 4(p^2 - 2) =$$

$$= 4p^2 + 8p + 4 - 4p^2 + 8 = 8p + 12,$$

ami pontosan akkor nemnegatív, ha $p \geq -\frac{3}{2}$. Az egyenlet megoldásainak négyzetösszege:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= (2(p+1))^2 - 2(p^2 - 2) = \\&= 4p^2 + 8p + 4 - 2p^2 + 4 = 2p^2 + 8p + 8.\end{aligned}$$

Így a keresett függvény:

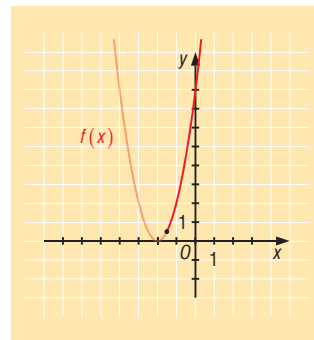
$$f: \left[-\frac{3}{2}; \infty\right] \rightarrow \mathbb{R}; f(p) = 2p^2 + 8p + 8.$$

A másodfokú kifejezés az alábbi alakra hozható.

$$f(p) = 2p^2 + 8p + 8 = 2(p+2)^2$$

Mivel $-2 < -\frac{3}{2}$ és a másodfokú tag együtthatója pozitív, így a függvény a megadott intervallumon szigorúan monoton növekvő, tehát a minimumát $p = -\frac{3}{2}$ -nél veszi fel. (Lásd a 9.10. ábrát!) Az egyenlet

megoldásainak négyzetösszege tehát $p = -\frac{3}{2}$ esetén minimális és a minimum $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$.



9.10. ábra $f: \left[-\frac{3}{2}; \infty\right] \rightarrow \mathbb{R};$
 $f(x) = 2x^2 + 8x + 8$



Oldjuk meg!

- Egy függőlegesen felfelé kilőtt testnek a kilövés helyétől való távolságát méterben mérve a $d(t) = bt - at^2$ összefüggés adja meg az idő függvényében, ahol az időt másodpercben mérjük.
 - Határozzuk meg az a és b számértékét, ha tudjuk, hogy az indulástól számított 1 másodperc elteltével 25 m-re, 2 másodperc elteltével 40 m-re van a földtől a lövedék!
 - Mikor lesz újra a kilövés helyén a lövedék?
 - Jelöljük a b) részben meghatározott időpontot t_0 -lal! Ábrázoljuk a $d: [0; t_0] \rightarrow \mathbb{R}, d(t) = bt - at^2$ függvényt az a) részben meghatározott a és b érték esetén!
 - Mely időpillanatban lesz legtávolabb a kilövés helyétől a lövedék? Milyen magasan van ekkor?
- Egy 50 m hosszú téglalap oldalánál el akarnak keríteni egy téglalap alakú részt 40 m hosszú kerítéssel, hogy játszótérrel hozzanak létre. A fal felől nincs kerítés. A téglalap falra merőleges oldalait jelölje a , a házfalal párhuzamos oldalát b !
 - Határozzuk meg azt a függvényt, amely megadja az elkerített rész területét az a oldal függvényében!
 - Határozzuk meg azt a függvényt, amely megadja az elkerített rész területét a b oldal függvényében!
 - Maximálisan mekkora területet lehet elkeríteni?
- Egy téren téglalap alakú füves parkot szeretnének kialakítani úgy, hogy azt keretszerűen körbevegyék díszburkolattal. A díszburkolat szélessége mindenütt 2 m, területe 400 m^2 . Hogyan válasszuk meg a téglalap méreteit, hogy a területe maximális legyen?
- Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú karton befogóinak hossza 30 cm. A kartonból kivágunk egy téglalapot úgy, hogy a téglalap egyik csúcsa a derékszögű csúcsba, a vele szomszédosak a befogókra, a negyedik csúcsa az átfogóra essen. Hogyan válasszuk meg a téglalap méreteit, hogy a hulladék minimális legyen?
- Mi a válasz az előző feladatban feltett kérdésre, ha úgy vágjuk ki a téglalapot, hogy két csúcs az átfogón, egy-egy csúcsa pedig egy-egy befogón legyen? Melyik esetben keletkezik kevesebb hulladék?



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

6. Egy 20 cm hosszú szakaszt két részre osztunk, mindkét rész fölé egy-egy négyzetet szerkesztünk. Hogyan válasszuk meg a két rész hosszát, hogy a két síkidom területének az összege minimális legyen?
7. Mi a válasz az előző feladatban feltett kérdésre, ha az egyik rész fölé egy szabályos háromszöget, a másik fölé egy szabályos hatszöget szerkesztünk?
8. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz az $x^2 - px + 3x + p + 3 = 0$ egyenlet megoldásainak négyzetösszege minimális?

10. Másodfokú egyenletrendszerek



1. példa Egyszer egy fiatal matematikustól megkérdezték, hány éves. Ő ezt válaszolta: „Ha az éveim kétjegyű számához hozzáadjuk a számjegyei felcserélésével kapott kétjegyű számot, akkor a korom számjegyei összegének a négyzetét kapjuk. Ha az előző két szám szorzatát vesszük, akkor eredményül 2668-at kapunk.” Hány éves a matematikus?



10.1. ábra Melyik a „fiatal” matematikus?

Megoldás:

Jelölje a matematikus korának első számjegyét x , a második számjegyét y , ahol x és y nullától különböző számjegy, mivel kétjegyű számokról szól a feladat. Ennek alapján a keresett kétjegyű szám: $10x + y$, ahol $y; x \in \{1; 2; \dots 9\}$. A számjegyei felcserélésével kapott szám: $10y + x$. A feladat szövege alapján írjuk fel az egyenleteket! Ebben segít az alábbi táblázat:

Szavakkal kifejezve:	Az algebra nyelvén:
Ha az éveim számához hozzáadjuk a számjegyei felcserélésével kapott számot, akkor a korom számjegyei összegének a négyzetét kapjuk.	$(10x + y) + (10y + x) = (x + y)^2$
Ha az előző két szám szorzatát vesszük, akkor eredményül 2668-at kapunk.	$(10x + y) \cdot (10y + x) = 2668$

Alakítsuk át az első egyenletet!

$$11x + 11y = (x + y)^2$$

$$11(x + y) = (x + y)^2$$

Mivel $x + y$ nem nulla, ezért eloszthatjuk vele az egyenlet mindkét oldalát, így azt kapjuk, hogy $x + y = 11$.

Tehát az alábbi kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ (10x + y)(10y + x) = 2668 \end{cases}$$

A megoldásnál alkalmazzuk a 9. osztályból jól ismert behelyettesítő módszert, azaz fejezzük ki az első egyenletből az egyik ismeretlent, majd helyettesítsük be a második egyenletbe!

Mivel $y = 11 - x$, így

$$(10x + 11 - x)[10(11 - x) + x] = 2668$$

$$(9x + 11)(110 - 9x) = 2668$$

$$990x - 81x^2 + 1210 - 99x = 2668$$

$$-81x^2 + 891x - 1458 = 0$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát -81 -gyel!

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

A diszkrimináns $D = b^2 - 4ac = 11^2 - 4 \cdot 18 = 49 = 7^2$, így a megoldá-

sok $x_{1,2} = \frac{11 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 9$ és $x_2 = 2$. Ebből $y_1 = 2$ és $y_2 = 9$. Tehát két

darab kétjegyű számot kapunk, az egyik 92, a másik 29. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy mindkettő megfelel a matematikus által elmondottaknak. Mivel a feladat szövege szerint a matematikus fiatal, így 29 éves.



10.2. ábra Nem lehetek 92 éves!



2. példa Egy derékszögű háromszög egyik befogójának háromszorosa 13 cm-rel nagyobb a másik befogójánál. Mekkora a háromszög területe, ha átfogója 149 cm?

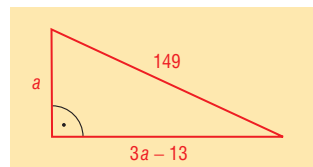
Megoldás:

Jelöljük az egyik befogót a -val, a másikat b -vel! Ha meghatározzuk a befogókat, akkor a területét is ki tudjuk számolni. Egyik egyenletként felírhatjuk a befogókra a Pitagorasz-tételt.

$$a^2 + b^2 = 149^2$$

$$a^2 + b^2 = 22201$$

A másik egyenletet a feladat első mondata alapján írhatjuk fel.



10.3. ábra Készítsünk ábrát!

Szavakkal kifejezve:	Az algebra nyelvén:
Egy derékszögű háromszög egyik befogójának háromszorosa 13 cm-rel nagyobb a másik befogójánál.	$3a = b + 13$

Ennek alapján az alábbi kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszerhez jutunk.



Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

$$\left. \begin{array}{l} 3a - b = 13 \\ a^2 + b^2 = 22201 \end{array} \right\} a, b \in \mathbb{R}^+$$

Használjuk megint a behelyettesítő módszert! Az első egyenletből fejezzük ki b -t, hisz azt egyszerűbb, majd helyettesítsük be a másodikba!

$$b = 3a - 13$$

Így $a^2 + (3a - 13)^2 = 22201$. Végezzük el a négyzetre emelést, és rendezzük az egyenletet!

$$a^2 + 169 - 78a + 9a^2 = 22201$$

$$10a^2 - 78a - 22032 = 0$$

A diszkrimináns

$$D = b^2 - 4ac = 78^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-22032) = 887364 = 942^2, \text{ így a meg-}$$

$$\text{oldások } a_{1,2} = \frac{78 \pm 942}{20} \Rightarrow a_1 = 51 \text{ és } a_2 = -43,2.$$

A második nem felel meg a feladat követelményeinek. Tehát a derékszögű háromszög befogói $a = 51$ cm, $b = 140$ cm. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk ezek helyességéről.

$$\text{A háromszög területe } t = \frac{ab}{2} = 3570 \text{ cm}^2.$$



10.4. ábra Egyenletrendszerek megoldásának egyik módja



3. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x^2 - 6x + y^2 + 2y = 15 \\ x - 2y = -5 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x^2 + 10x + y^2 - 2y = -1 \\ x^2 - 8x + y^2 + 4y = 5 \end{array} \right\}$$

Megoldás:

a) Alkalmazzuk a behelyettesítő módszert!

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 6x + y^2 + 2y = 15 \\ x - 2y = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2y - 5$$

Helyettesítsünk be az első egyenletbe!

$$(2y - 5)^2 - 6(2y - 5) + y^2 + 2y = 15$$

Végezzük el a négyzetre emelést, az összevonásokat, és redukáljunk nullára!

$$4y^2 - 20y + 25 - 12y + 30 + y^2 + 2y = 15$$

$$5y^2 - 30y + 40 = 0$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

A diszkrimináns $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 8 = 4 = 2^2$, így a megoldások

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow y_1 = 4 \text{ és } y_2 = 2. \text{ Az } x \text{ értékei } x_1 = 3 \text{ és } x_2 = -1.$$

A megoldások: $M_1(3; 4)$, $M_2(-1; 2)$. Erről behelyettesítéssel meggyőződhetünk.

b) Mivel mindkét egyenlet másodfokú, ezért egyelőre még nem érdemes alkalmazni a behelyettesítő módszert.

Először küszöböljük ki a másodfokú tagokat! Ehhez vonjuk ki az első egyenletből a másodikat!

$$\left. \begin{aligned} x^2 + 10x + y^2 - 2y &= -1 \\ x^2 - 8x + y^2 + 4y &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 18x - 6y = -6$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát osszuk végig 6-tal!

$$3x - y = -1$$

Ezzel megkaptuk az egyenletrendszer egyenleteinek egy következő egyenletét. Ennek megoldásai között megtalálhatók az eredeti egyenletrendszer megoldásai, feltéve, hogy azok léteznek. Ezért innentől kezdve az eredeti egyenletrendszer egyik egyenlete és a következő egyenlet által alkotott egyenletrendszert oldjuk meg!

$$\left. \begin{aligned} 3x - y &= -1 \\ x^2 - 8x + y^2 + 4y &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 3x + 1$$

Helyettesítsünk be a második egyenletbe!

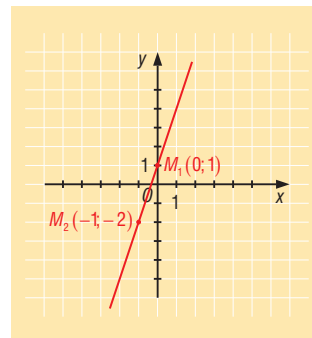
$$x^2 - 8x + (3x + 1)^2 + 4(3x + 1) = 5$$

$$x^2 - 8x + 9x^2 + 6x + 1 + 12x + 4 = 5$$

$$10x^2 + 10x = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$

Ebből $x_1 = 0$ és $x_2 = -1$. Ebből az y értékei $y_1 = 1$ és $y_2 = -2$. A megoldások: $M_1(0; 1)$, $M_2(-1; -2)$. Ezek helyességéről behelyettesítéssel meggyőződhetünk.



10.5. ábra A $3x - y = 1$ egyenlet megoldásai között megtalálhatók az eredeti egyenletrendszer megoldásai



4. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\left. \begin{aligned} x + y + xy &= 49 \\ x^2 y + xy^2 &= 468 \end{aligned} \right\}$$

Megoldás:

Vegyük észre, hogy a második egyenletből kiemelhetünk xy -t!

$$\left. \begin{aligned} x + y + xy &= 49 \\ xy(x + y) &= 468 \end{aligned} \right\}$$

Vezessünk be új ismeretlent! Legyen $a = x + y$ és $b = xy$! Ekkor az

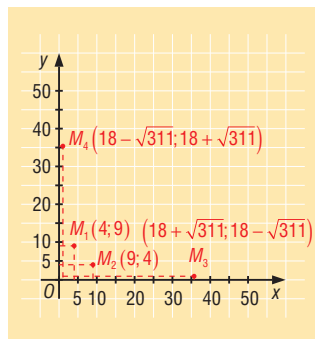
$$\left. \begin{aligned} a + b &= 49 \\ ab &= 468 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = 49 - a$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ezt oldjuk meg a behelyettesítő módszerrel! Ekkor az $a^2 - 49a + 468 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek megoldásait a szokott úton meghatározhatjuk, ezek: $a_1 = 13$, $b_1 = 36$ és $a_2 = 36$, $b_2 = 13$.



10.6. ábra Oldjuk meg a feladatot!

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek



10.7. ábra Ábrázoljuk a megoldásokat koordináta-rendszerben!

Ezután az alábbi egyenletrendszereket kell megoldani:

I.	II.
$\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36 \end{cases} \Rightarrow y = 13 - x$ $x(13 - x) = 36$ $0 = x^2 - 13x + 36$	$\begin{cases} x + y = 36 \\ xy = 13 \end{cases} \Rightarrow y = 36 - x$ $x(36 - x) = 13$ $0 = x^2 - 36x + 13$
Megoldásai:	Megoldásai:
$x_1 = 4, x_2 = 9$	$x_1 = 18 + \sqrt{311}, x_2 = 18 - \sqrt{311}$
Ebből az y értékei:	Ebből az y értékei:
$y_1 = 9, y_2 = 4$	$y_1 = 18 - \sqrt{311}, y_2 = 18 + \sqrt{311}$

Az egyenletrendszer négy megoldása:

$$M_1(4;9), M_2(9;4),$$

$$M_3(18 + \sqrt{311}; 18 - \sqrt{311}),$$

$$M_4(18 - \sqrt{311}; 18 + \sqrt{311}).$$

Oldjuk meg!

- Határozzuk meg az x és y valós számokat, ha
 - a két szám összege 17 és a szorzata 30,
 - a két szám különbsége 17 és szorzata 630,
 - a két szám négyzetösszege 153 és szorzata 36!
- Egy tört számlálójának és a nevezője kétszeresének az összege 26. Ha a számlálójához kettőt, a nevezőjéhez tizenhetet adunk, akkor a tört reciprokát kapjuk. Melyik ez a tört?
- Egy rombusz kerülete 104 cm, területe 480 cm². Mekkora a rombusz átlói?
- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

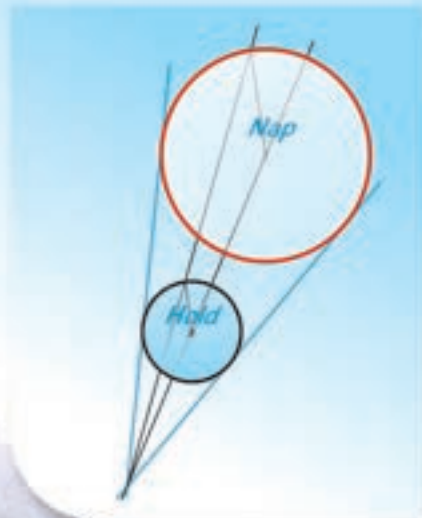
$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x + 3y = 11 \\ x^2 + 2x + y^2 = 17 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 4x - y + 9 = 0 \\ x^2 - 3x + y^2 + 2y = 39 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 4x^2 - 6x + 2y^2 + 3y = 69 \end{cases} \end{array}$$

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x^2 - x + y^2 + 2y = 0 \\ x^2 + 4x + y^2 - 3y = 15 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x^2 + 2x + y^2 - 3y = -2 \\ x^2 + 2x + \frac{y^2}{2} - y = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{array}$$

III. fejezet

Hasonlóság és alkalmazásai



A látszat néha csal!

1. Vizsgálódás a térben

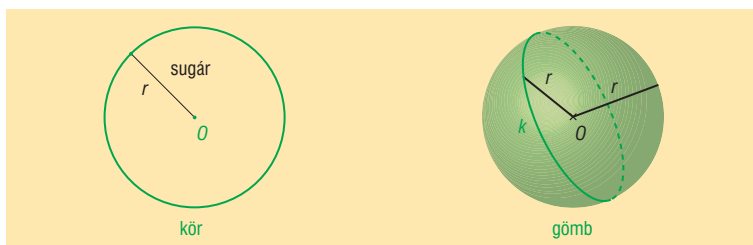


1.1. ábra Milyen útvonalat válasszon az a repülőgép, amelyik Rómából Los Angelesbe szeretne eljutni? Miért megy el a Róma–Los Angeles közvetlen repülőjárat Grönland fölött?

A 9. osztályban a síkbeli ponthalmazokról sok információt összegyűjtöttünk. Ezek rendszerezése közben tekintsünk most ki a térbe is!

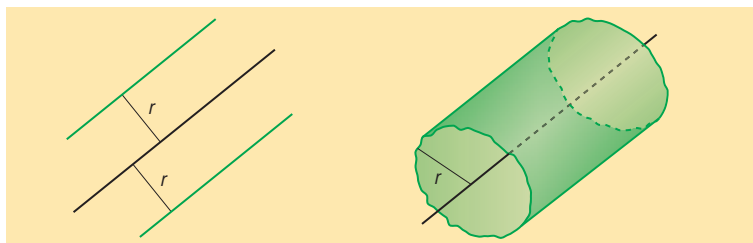
A síkban egy adott ponttól adott egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a kör, a térben a gömb.

O : a gömb középpontja, r : a gömb sugara, k : a gömb egy főköre (olyan kör, amelynek a sugara egyenlő a gömb sugarával, és középpontja egybeesik a gömb középpontjával).



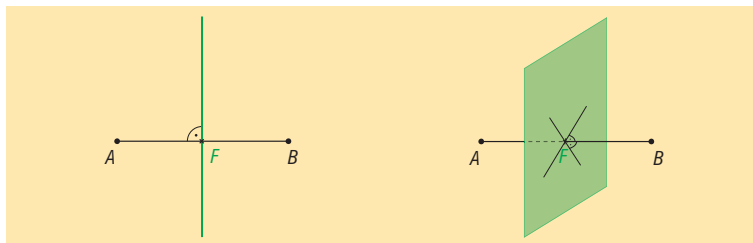
1.2. ábra Egy ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza síkban és térben

A síkban egy adott egyenestől adott egyenlő távolságra lévő pontok halmaza két (az eredetivel is) párhuzamos egyenes, a térben egy végtelen hengerfelület.



1.3. ábra Egy egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza síkban és térben

Két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a két pontot összekötő szakasz felezőmerőleges egyenese, a térben a szakasz felezőmerőleges síkja.

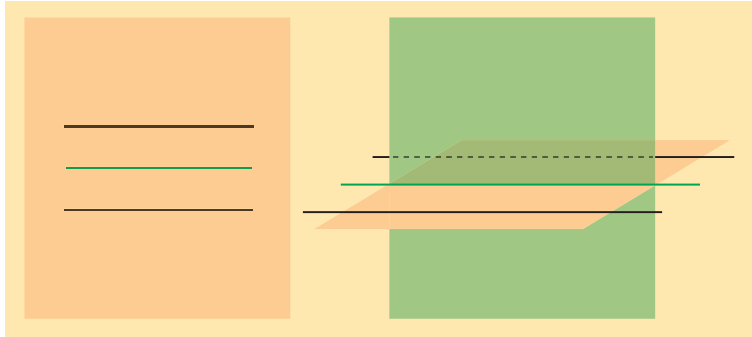


1.5. ábra Két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza síkban és térben



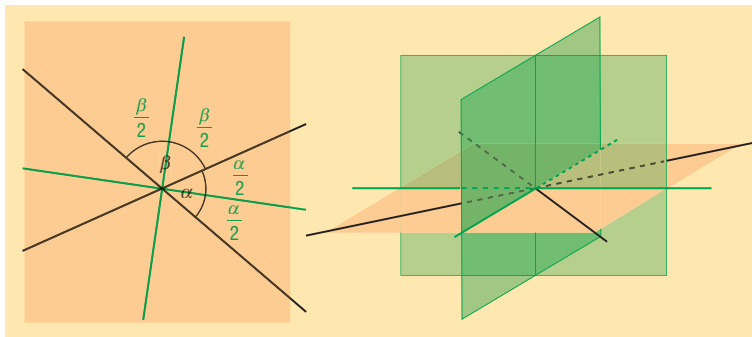
1.4. ábra Koaxiális kábel csatlakozója

Két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a középpárhuzamos, a térben az erre illeszkedő sík, amely merőleges az egyenesek síkjára.



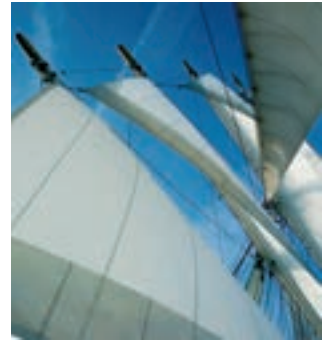
1.6. ábra Két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza síkban és térben

Két metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a két egyenes két szögfelező egyenese, a térben az ezekre illeszkedő síkok, amelyek merőlegesek az egyenesek síkjára.

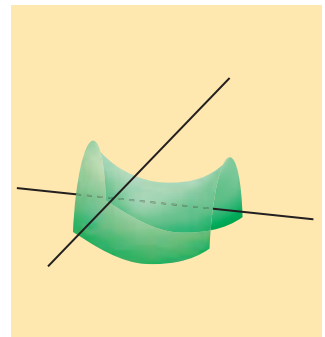


1.8. ábra Két metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza síkban és térben

Térben kitérő is lehet két egyenes. Ekkor egy görbült felületen helyezkednek el azok a pontok, amelyek egyenlő távolságra vannak a két egyenestől (nyeregfelület).



1.7. ábra Vitorlák a szélben, síkok a térben



1.9. ábra Két kitérő egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza síkban és térben

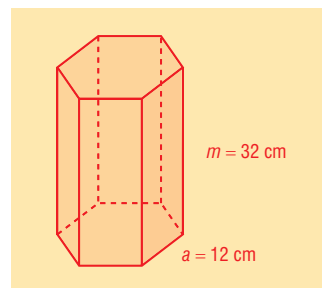


1. példa Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alap-éle 12 cm, magassága 32 cm. Számítsuk ki a hasáb felszínét, térfogatát, valamint két legtávolabbi pontjának távolságát!

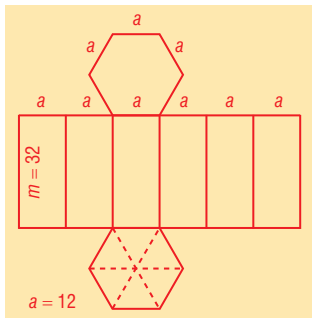
Megoldás:

A hasáb felszíne egyenlő a hasábot határoló lapok területének összegével:

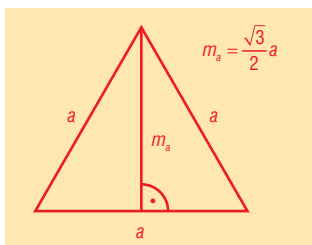
$A = 2T_{\text{alaplapp}} + 6T_{\text{oldallap}}$. A szabályos hatszög alakú alaplapp területe egyenlő 6 darab egybevágó szabályos háromszög területének összegével.



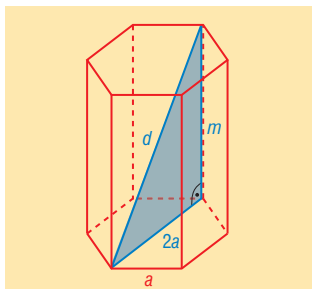
1.10. ábra Szabályos hatszög alapú egyenes hasáb



1.11. ábra A szabályos hatszög alapú hasáb kiterített hálójá



1.12. ábra Szabályos háromszög



1.13. ábra A derékszögű háromszög befogóinak hossza $2a$ és m , átfogója d

(Emlékeztető: az a oldalú szabályos háromszög magassága $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.)

$$T_{\text{alaplapp}} = 6 \cdot \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Az oldallapok területét a téglalapok jól ismert területképletével számoljuk. A felszín tehát:

$$\begin{aligned} A &= 2T_{\text{alaplapp}} + 6T_{\text{oldallap}} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 + 6 \cdot a \cdot m = \\ &= 3\sqrt{3} \cdot 12^2 + 6 \cdot 12 \cdot 32 = 432\sqrt{3} + 2304 \approx 3052,2 \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Térfogata:

$$V = T_{\text{alaplapp}} \cdot m = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot m = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 144 \cdot 32 = 6912\sqrt{3} \approx 11972 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Két legtávolabbi pontja az egyik alaplapp egyik csúcsa és a szemközti alaplapp szemközti csúcsa. Az ezeket összekötő szakasz egy derékszögű háromszög átfogója (lásd 1.13. ábra), így hosszát kiszámíthatjuk a Pitagorasz-tétel segítségével.

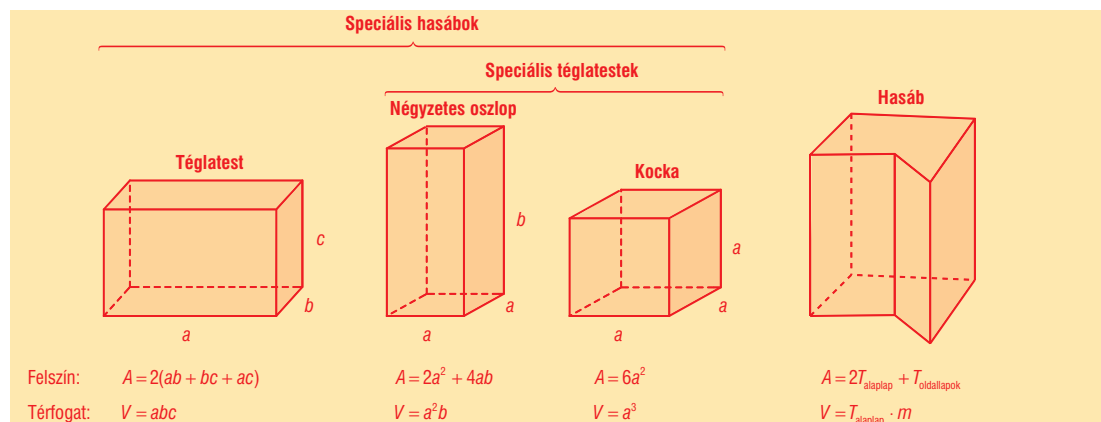
$$d^2 = (2a)^2 + m^2 = 24^2 + 32^2 = 1600,$$

így $d = 40$ (cm).

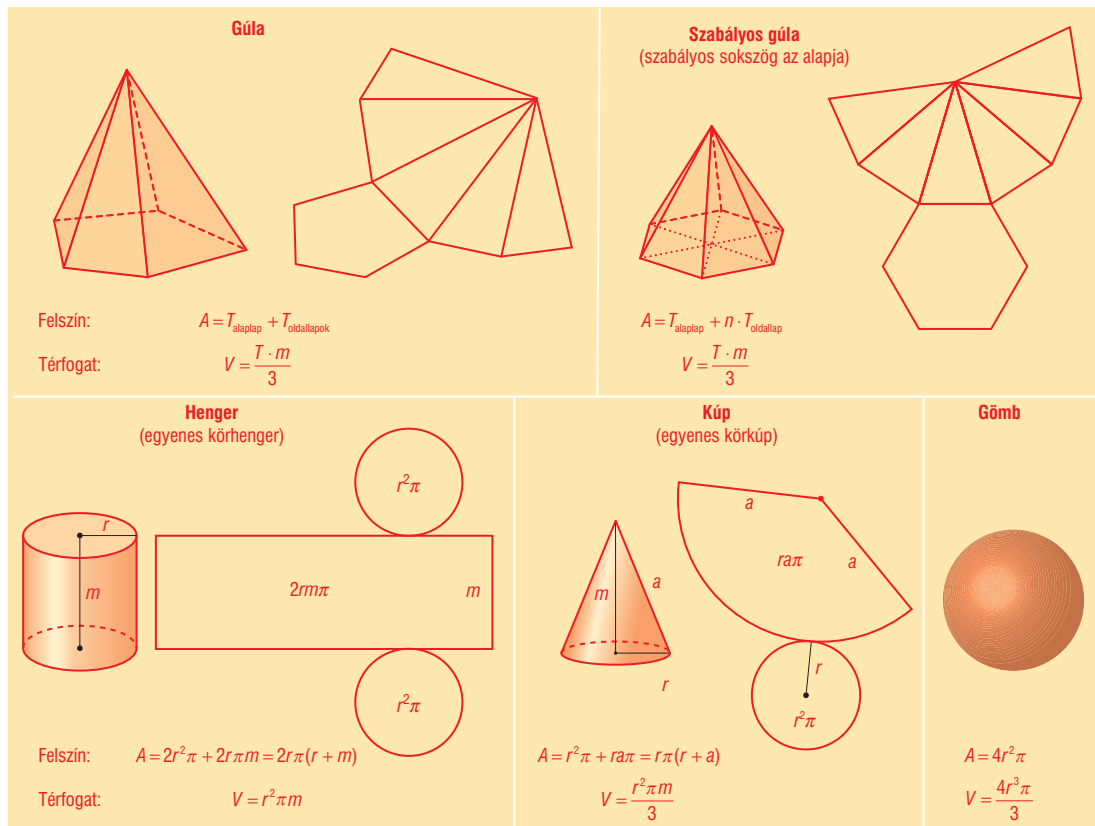
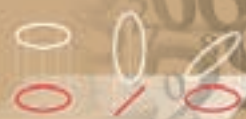


Az általános iskolában már tanultuk néhány test felszínének, térfogatának kiszámítási módját. Ismételjük át ezeket!

Síklapokkal határolt testek (poliéderek) felszíne egyenlő a határoló lapok felszínének összegével.



1.14. ábra Hasábok felszíne és térfogata



1.15. ábra További felszín- és térfogatképletek



2. példa Egy légy szeretne átrepülni

- egy 4 m széles, 12 m hosszú és 3 m magas (téglatest alakú) terem;
 - egy 4 m élű kocka alakú terem
- egyik sarkából az átlételes sarokba.

Milyen hosszú a lehető legrövidebb út, amelyen repülhet?

- Egy pók is szeretne eljutni a kocka alakú terem átlételes sarkába, de ő nem tud repülni, csak mászni a kocka falán. Neki milyen hosszú a legrövidebb útja?

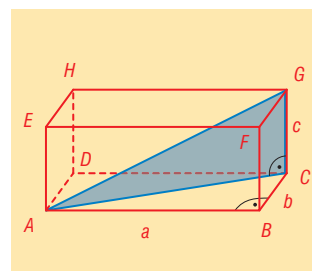
Megoldás:

a) Az AG testátló hosszát kell kiszámolnunk. Ez átfogója az ACG derékszögű háromszögnek, amelynek AC oldalát ki tudjuk számolni, hiszen AC az ABCD téglalap átlója, melynek ismerjük oldalait. Írjuk fel az ABC derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt!

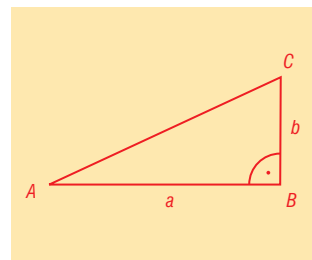
$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ azaz } AC^2 = 12^2 + 4^2 = 144 + 16 = 160$$

$$AC = \sqrt{160}$$

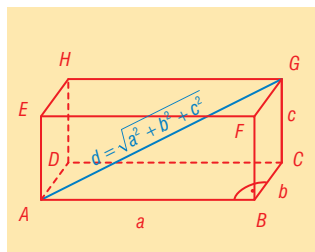
Majd alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az ACG derékszögű háromszögre!



1.16. ábra A téglatest alakú terem



1.17. ábra Először rajzoljuk ki az ABC derékszögű háromszöget!



1.18. ábra Térbeli Pitagorasz-tétel

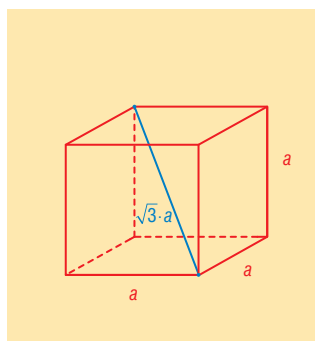
$$AG^2 = AC^2 + CG^2, \text{ azaz } AG^2 = (\sqrt{160})^2 + 3^2 = 160 + 9 = 169$$

$$AG = 13 \text{ m}$$

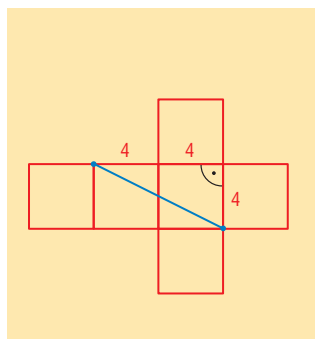
Az a) esetben tehát legalább 13 m-t kell repülnie a légynek.



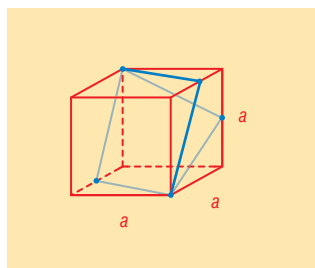
Vegyük észre, hogy a testátló kiszámításához nem volt szükségünk magára az alaplap átlójára, csak annak négyzetére.



1.19. ábra Az a élű kocka testátlójának hossza $\sqrt{3}a$



1.20. ábra A kocka hálóján a legrövidebb út



1.21. ábra Rajzoljuk meg a pók útját!

Ha a téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek hossza a , b és c , akkor a d testátló hosszának négyzete: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, így a testátló hossza: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ezt az összefüggést térbeli Pitagorasz-tételnek is szokták emlegetni. Minden téglatestnek négy testátlója van, és ezek hossza egyenlő.

b) Előző eredményünket speciálisan kockára alkalmazva azt kapjuk, hogy a kocka testátlója $\sqrt{3}$ -szorososa a kocka élének. $d = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot a$. Így a kocka alakú teremben legalább $4 \cdot \sqrt{3}$ m-t kellett repülnie a légynek.

c) Jelöljük meg a szóban forgó testátló két végpontját kékkel! Rajzoljunk a kocka felületére a két kék csúcs között különböző utakat, majd hajtogassuk ki a kocka lapjait egy síkba! Minden, a felületre rajzolt vonal hossza ugyanakkora marad a kihajtogatás után. Így nyilvánvalóvá válik, hogy a síkban fekvő két kék csúcs közti legrövidebb utat keressük, ami egy szakasz. Rajzoljuk ezt be, majd hajtogassuk vissza a kockát térbe! Az egyik kék csúctól egy vele nem szomszédos él felezőpontjához kell mennie a póknak, majd onnan tovább a másik kék csúcsba. A kiterített hálón (1.20. ábra) könnyen kiszámíthatjuk a pók legrövidebb útjának hosszát. A szakasz egy derékszögű háromszög átfogója, hossza tehát: $\sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} \approx 8,94$ (m).

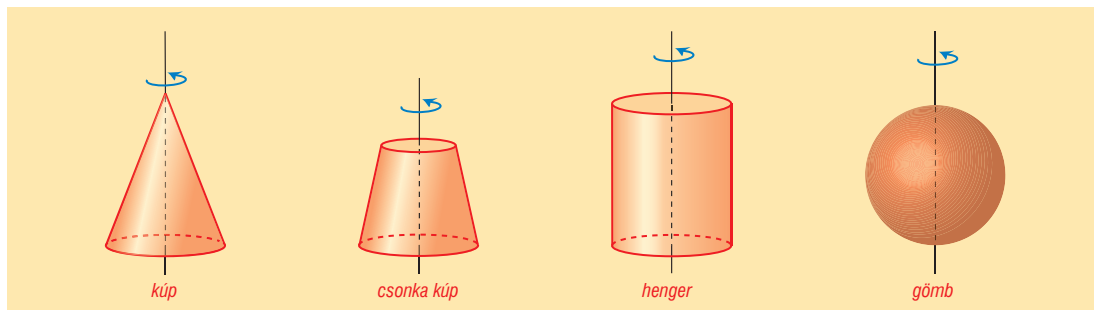
Egybevágósági transzformációk a térben

Minden tanult egybevágósági transzformáció ugyanúgy értelmezhető a térben, mint a síkban. Az újdonságot az jelentheti, hogy a térben értelmezhetünk tengely körüli, adott szögű elforgatást és síkra vonatkozó tükrözést is.

Ezzel a testek, térbeli pontthalmazok szimmetriáiról is beszélhetünk.

Pl. egy szabályos hatoldalú gúla (szabályos hatszög alapú egyenes gúla, amelynek oldallapjai egybevágó, egyenlő szárú háromszögek) tengely körüli hatodrendű forgásszimmetriával rendelkezik.

Az egyenes körkúpot pedig forgáskúpnak is nevezzük. A tengely körül akármekkora szöggel elforgatva önmagába megy át. Minden olyan testet forgástestnek nevezünk, amely rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.



1.22. ábra Forgástestek



3. példa Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 60 cm és 17,5 cm. Forgassuk meg a háromszöget

- a rövidebb befogója körül,
- a hosszabb befogója körül,
- az átfogója körül!

Írjuk le minél pontosabban, milyen forgástest keletkezik! Számítsuk ki a három test térfogatát!

Megoldás:

Az a) és a b) esetben egy-egy kúpot kapunk, amelynek magassága az a befogó, amely körül forgattunk, alapkörének sugara pedig a másik befogó. Legyen $a = 60$ cm és $b = 17,5$ cm.

Az a) esetben a térfogat:

$$V = \frac{a^2 b \pi}{3} = \frac{60^2 \cdot 17,5 \pi}{3} = 21000\pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 65973 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{A b) esetben: } V = \frac{b^2 a \pi}{3} = \frac{17,5^2 \cdot 60 \pi}{3} = 6125\pi \text{ (cm}^3\text{)} \approx 19242 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A c) esetben egy kettős kúpot kapunk (két kúp alaplapjával összefordítva). (1.24. ábra) Térfogata a két kis kúp térfogatának összege, amelyek magasságát külön-külön ugyan nem tudjuk (bár ki tudnánk számolni), de a megoldás során látni fogjuk, hogy nincs is rá szükség, csak az összegükre. Szükségünk lesz viszont a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságára (amely a két kúp alapkörének közös sugara).

Utóbbi az átfogó meghatározása után megállapíthatjuk, pl. a területképletek alapján.

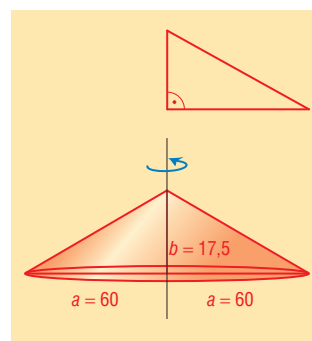
$$c^2 = a^2 + b^2 = 60^2 + 17,5^2 = 3906,25$$

$$c = 62,5 \text{ (cm)}$$

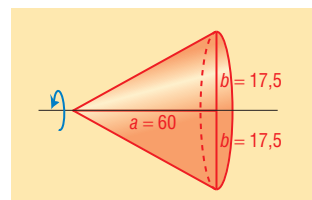
$$2T = ab = c \cdot m_c$$

$$m_c = \frac{ab}{c} = \frac{60 \cdot 17,5}{62,5} = 16,8 \text{ (cm)}$$

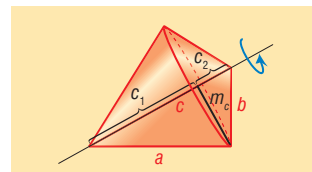
$$\begin{aligned} V &= \frac{m_c^2 c_1 \pi}{3} + \frac{m_c^2 c_2 \pi}{3} = \frac{m_c^2 (c_1 + c_2) \pi}{3} = \frac{m_c^2 c \pi}{3} = \\ &= \frac{16,8^2 \cdot 62,5 \pi}{3} = 5880\pi \approx 18473 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$



1.23. ábra A rövidebb befogó körül forgatva



1.24. ábra A hosszabb befogó körül forgatva



1.25. ábra Az átfogó körül forgatva

Oldjuk meg!

1. A szélességi és hosszúsági körök közül melyek a Föld főkörei?
2. Milyen hosszú a 7 cm élű kocka testátlója?
3. Mekkora egy-egy lapátlója annak a kockának, amelynek testátlója $\sqrt{75}$?
4. Mekkora a testátlója annak a téglatestnek, amelynek egy csúcsból kiinduló élei 8 dm, 11 dm és 17 dm hosszúak? Hány százalékkal nagyobb a testátló az egyes lapátlóknál?
5. Írjuk le minél pontosabban, milyen forgástest keletkezik, ha megforgatunk
 - a) egy téglalapot az egyik oldala körül,
 - b) egy téglalapot az egyik középvonala körül,
 - c) egy négyzetet az átlója körül,
 - d) egy szimmetrikus trapézt a szimmetriatengelye körül,
 - e) egy szimmetrikus trapézt a hosszabbik alapja körül,
 - f) egy szimmetrikus trapézt a rövidebbik alapja körül,
 - g) egy kört az egyik átmérője körül!
6. Hogyan változik meg egy kocka térfogata, ha az éleit az ötszörösére növeljük?
7. Mutassuk meg, hogy egy kocka egy csúcsból kiinduló három élének másik végpontjai szabályos háromszöget alkotnak!
8. Egy téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek hossza: 9, 12 és 7 egység. Egy pók szeretne eljutni a lehető legrövidebb úton a téglatest egyik sarkából az átellenes sarokba. Merre menjen, ha csak a téglatest oldalán tud mászni?

2. Középpontos hasonlóság



1. példa Egy modellautó 1:14 arányú kicsinyítése az eredetinek. Határozzuk meg az eredeti autó hozzávetőleges méreteit, ha a modellautó hossza 30 cm, magassága 11 cm, szélessége 13 cm!



2.1. ábra Modellautó

Megoldás:

A modellen mért minden méretet értelemszerűen 14-gyel kell megszo-
rozunk, hogy az eredeti méreteket kapjuk. Ennek megfelelően: az ere-
deti autó hossza körülbelül 4,2 m, magassága 1 m 54 cm, szélessége
1 m 82 cm.



Természetesen a modellautón mérhető adatok nem adnak felvilágo-
sítást az autó végsebességéről, gyorsulásáról, fogyasztásáról, hiszen
minden modell csak bizonyos szempontból tudja leképezni a valóságot.
Ugyanakkor az eredeti méretek kiszámítása nélkül is viszonylag pontos

képet kaphatunk az autó méretarányairól, mivel azok megegyeznek a modellen látható arányokkal.

Ma már természetes, hogy körül vesszük magunkat a környező világ egyes részleteinek kicsinyített vagy éppen nagyított modelljeivel: képekkel, makettekkel, fotókkal. Ennek egészen az ősember barlangrajzáig nyúlik vissza a története.

Most viszont nézzük egy kicsit matematikai szemmel a kicsinyítés-nagyítás fogalmát!

Középpontos hasonlóság

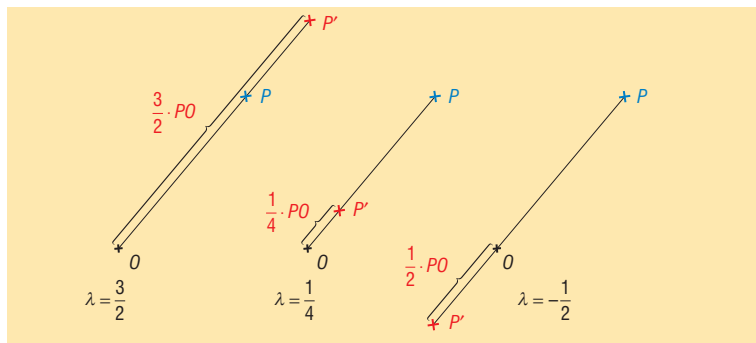
Definíció A középpontos hasonlóság olyan geometriai transzformáció, amelynél adott egy O pont és egy λ (lambda, görög betű) nullától különböző valós szám. A sík (tér) minden P pontjához úgy rendeljük hozzá a képét, a P' pontot, hogy teljesüljenek az alábbi tulajdonságok:

$$O' = O;$$

$P' \in OP$ egyenesnek úgy, hogy $P'O = |\lambda| \cdot PO$ és ha $\lambda > 0$, akkor az O pont nem választja el a P és a P' pontot, míg ha $\lambda < 0$, akkor az O pont a P és a P' közé esik.

O -t a középpontos hasonlóság középpontjának nevezzük, λ -t pedig a középpontos hasonlóság arányának.

Például:

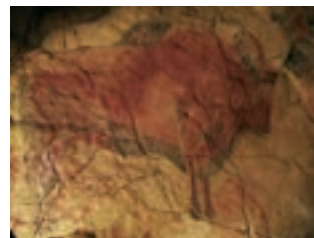


2.4. ábra Középpontos hasonlóság különböző arányszámok esetén

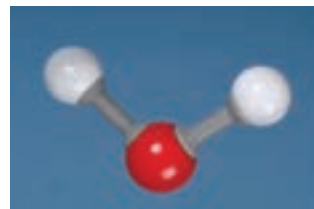
Ha $|\lambda| > 1$, akkor nagyításról beszélünk, ha $|\lambda| < 1$, akkor pedig kicsinyítésről. Ha $\lambda = 1$, akkor speciálisan az identitást kapjuk (a helyben hagyást), ha pedig $\lambda = -1$, akkor az O pontra való középpontos tükrözést.

Bebizonyíthatók a középpontos hasonlóság alábbi tulajdonságai:

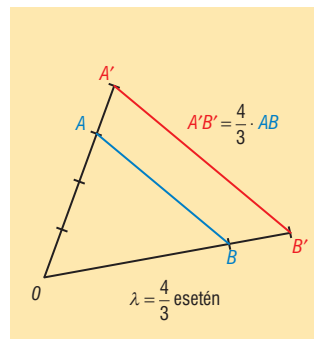
- ▶ bármely egyenes képe az eredetivel párhuzamos egyenes, ennek következtében:
- ▶ szögtartó is,



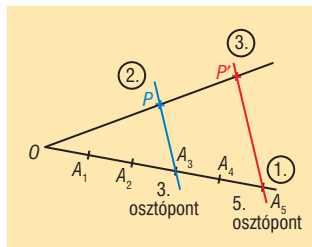
2.2. ábra Barlangrajz



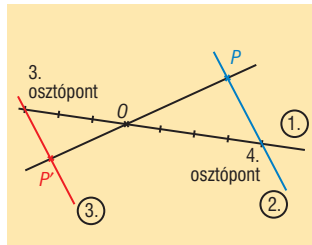
2.3. ábra A vízmolekula modellje



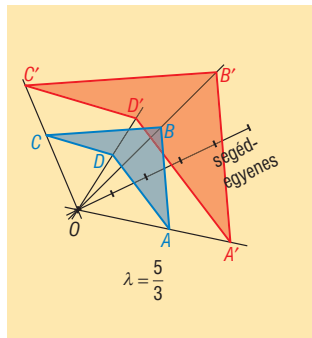
2.5. ábra Szakas $\frac{4}{3}$ arányú nagyítása



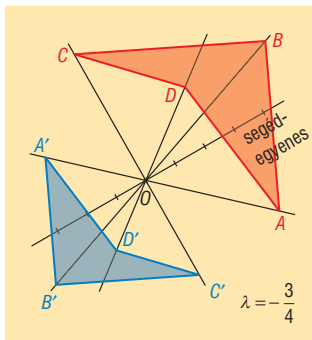
2.6. ábra A szerkesztés lépései



2.7. ábra 2. a) példa $\lambda = -\frac{3}{4}$



2.8. ábra 2. b) példa $\lambda = \frac{5}{3}$



2.9. ábra 2. b) példa $\lambda = -\frac{3}{4}$

- bármely szakasz képe az eredetivel párhuzamos szakasz, amelynek hossza az eredeti szakaszhoz $|\lambda|$ -szerese (emiat nevezük arány-tartónak); tehát ha $|\lambda| \neq 1$, akkor nem távolságtartó,
- körüljárásirány-tartó,
- a transzformáció egyetlen fixpontja a középpont, ha $\lambda \neq 1$,
- invariáns egyenesei a középponton áthaladó egyenesek.



2. példa Szerkesszük meg egy

- P pont,
- egy $ABCD$ konkáv négyszög

O középpontú, $\lambda = \frac{5}{3}$ arányú középpontos hasonlósággal kapott képét!

Hajtsuk végre a szerkesztést $\lambda = -\frac{3}{4}$ aránnyal is!

Megoldás:

a) Húzzuk meg az OP félegyenest! Pozitív λ esetén ezen a félegyenesen lesz a P' pont. Vegyünk fel O -n át egy segédegyenest! Erre mérjünk fel O -tól kezdődően öt egyenlő hosszúságú szakaszt! (Végpontjai: $O, A_1, A_2, \dots, A_5$.) A keletkezett öt pont közül a harmadikat kössük össze egy egyenessel, P -vel, majd ezzel húzzunk párhuzamot az ötödik ponton át! Ahol ez metszi az OP félegyenest, ott lesz a P' pont. Mivel a szakasz képe az eredetivel párhuzamos szakasz, ezért az A_3P szakasz képe párhuzamos A_3P' -vel. A_3 képe az O középpontú $\lambda = \frac{5}{3}$ arányú hasonlóságra nézve A_5 . Tehát P' rajta van az A_5 osztóponton átmenő A_3P' -vel párhuzamos egyenesen. Húzzunk tehát párhuzamot az ötödik osztóponton (A_5 -ön) át az A_3P szakasszal. (2.6. ábra)

A $\lambda = -\frac{3}{4}$ arány esetén a P' -t az OP egyenes P -t nem tartalmazó oldalán kell megszerkesztenünk. A szerkesztés ötletét a 2.7. ábráról leolvashatjuk.

b) Az a) részben leírt eljárást alkalmazhatjuk a négyszög minden csúcsára. Majd összeköthetjük egy-egy szakasszal (a megfelelő sorrendben) az A', B', C' és D' pontokat, hiszen szakasz képe szakasz.



Vegyük észre, hogy ezt az eljárást bármely sokszög nagyítására, illetve kicsinyítésére tudjuk alkalmazni: minden csúcs képét megszerkesztjük, majd összekötjük a megfelelő csúcsokat.



3. példa Nagyítsunk egy kört a háromszorosára

- a) a középpontjából,
 - b) egy tetszőleges pontból!
- Milyen ponthalmazt kapunk?

Megoldás:

Mivel nem tudjuk a kör végtelen sok pontján végrehajtani a transzformációt, ezért célszerű előbb végiggondolni, mit kapunk eredményül. A kör minden P pontja r távolságra van a kör C középpontjától, ezért mindegyik pont képe (P') $3 \cdot r$ távolságban lesz a középpont C' képétől. Tehát a kör pontjainak képe illeszkedik egy C' középpontú $3 \cdot r$ sugarú k' körre. (A középpontos hasonlóság aránytartó tulajdonságát használtuk fel.) Ugyanakkor a k' kör minden Q pontja megjelenik képpontként, hiszen meg tudjuk mondani, melyik Q_0 pontnak a képe. (A Q_0 a Q pont ösképe.) Tehát: mindkét esetben kört kapunk. Az a) esetben az eredetivel koncentrikus (egyközepű) kört.



4. példa Adott két négyzet. Mi a feltétele annak, hogy legyen olyan középpontos hasonlóság, amely egyik négyzetet a másikba viszi?

Megoldás:

Ha két négyzet oldalai páronként nem párhuzamosak, akkor biztosan nincs ilyen középpontos hasonlóság, hiszen a szakasz képének az eredetivel párhuzamos szakasznak kellene lennie. Az tehát, hogy a két négyzet párhuzamos helyzetű legyen, szükséges feltétele annak, hogy lehessen középpontos hasonlóság, amely egyik négyzetet a másikba viszi. Az ábrán látható rajzzal rámutatunk, hogy ez elegendő is.

A hasonlóság aránya nyilván $\frac{b}{a}$ vagy $-\frac{b}{a}$ lehet (ha az a oldalú

négyzetet akarjuk átvinni a b oldalú négyzetbe). (2.11. ábra)

Készítsünk rajznagyító szerkezetet!

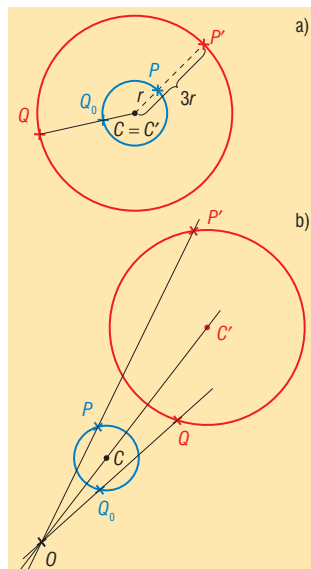
A készülék az A, B, C, D pontokban csuklós, de az OB és a BR rúd merev, és OB rúd az O pontban rögzített. $AB = DC$ és $AD = BC$. A D ponttal végigpásztázzuk az eredeti rajzot, és az R pontba tett rajzolóhegy elkészíti a nagyított rajzot. (2.12. ábra)



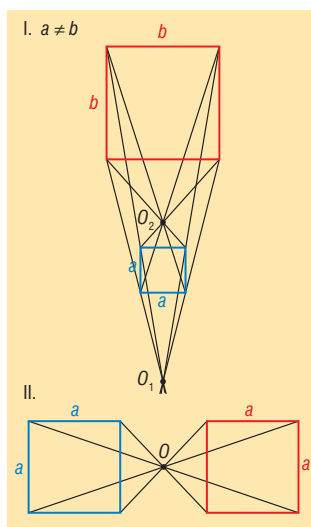
5. példa Szerkesszünk kört, amely érinti egy szög szarvait és atmegy egy, a szögtartomány belsejében lévő adott P ponton!

Megoldás:

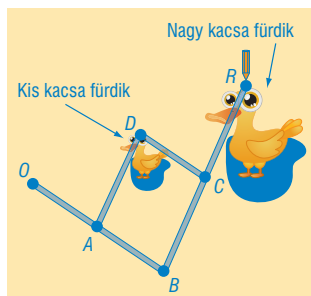
Ha megtalálnánk a keresett kör középpontját, akkor már magát a kört is meg tudnánk szerkeszteni, hiszen adott a körvonal egy pontja.



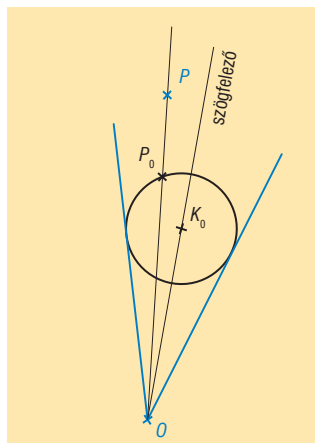
2.10. ábra 3. példa



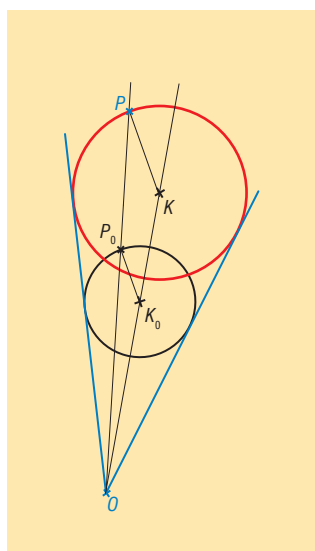
2.11. ábra 4. példa



2.12. ábra Rajznagyító (pantográf)



2.13. ábra Vegyünk fel egy a szög-szárakat érintő tetszőleges kört!



2.14. ábra Az első megoldás



2.15. ábra Finom hasonlóság



Vegyük észre, hogy egyszerűbb dolgunk van, ha a feladatban előforduló két feltétel teljesülését nem egyszerre, hanem egymás után vizsgáljuk! A keresett körnek érintenie kell mindkét szögcsúcsat. Ilyen körből végtelen sok van. De mind átvihető egymásba valamely O középpontú középpontos hasonlósággal. (O a szög csúcsa.) Ha kiszemelünk ezek közül egy tetszőleges kört, akkor azt már csak nagyítanunk vagy kicsinyítenünk kell O középponttal, hogy a P -n átmenő kört kapjuk végül. Ehhez pedig már csak a nagyítás arányát kell tudnunk.

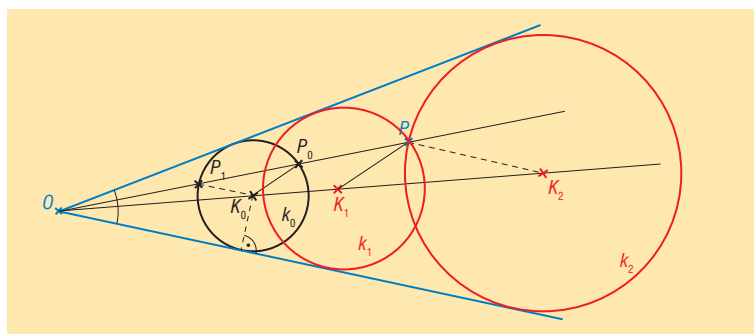
Keressük meg a tetszőlegesen felvett körön a P pont ösképét: a P_0 pontot (ez eleme az OP félegyenestnek is)! Az $\frac{OP}{OP_0}$ arány lesz a középpontos hasonlóság aránya. Ilyen aránnyal hajtsuk végre a felvett kör középpontján a középpontos hasonlóságot! Ezzel megszerkesztettük a keresett kör középpontját.



Vegyük észre, hogy az OP félegyenestnek két közös pontja is van a felvett körrel, tehát a P pontnak két ösképe is lehet! Természetesen más arányú középpontos hasonlósághoz tartozik a két öskép. A másik ösképpel való szerkesztést az ábrán láthatjuk.

Írjuk le a megvalósítás konkrét lépéseit!

1. Szerkesszük meg a szög szögfelezőjét!
2. Ennek egy tetszőleges K_0 pontja körül szerkesszünk érintőkört (k_0) a szögcsúcsához, sugara: a K_0 pont és a szárak távolsága (r_0).
3. Húzzuk meg az OP félegyenest! Ennek a k_0 körrel vett metszéspontjai: P_0 és P_1 .
4. Húzzunk párhuzamost a P_0K_0 és a P_1K_0 szakasszal a P ponton át! Ezeknek a szögfelezővel vett metszéspontjai (K_1 és K_2) lesznek a keresett két kör két lehetséges középpontja.
5. Megszerkesztjük a K_1 és K_2 középpontú, P -n átmenő köröket, ezek érinteni fogják a szögcsúcsakat.



2.16. ábra Két megoldás van

Oldjuk meg!

1. Nagyítsunk egy háromszöget az egyik csúcsából a kétszeresére!
2. Kicsinyítsünk egy háromszöget a súlypontjából $-\frac{1}{2}$ aránnyal! Mit figyelhetünk meg?
3. Két adott körhöz keressünk olyan pontot, amely középpontja lehet egy olyan középpontos hasonlóságnak, amely az egyik kört a másikba viszi át!
Vizsgáljuk meg, hogyan függ a lehetséges középpontok száma a két kör elhelyezkedésétől és sugarától!
4. Szerkesszünk háromszöget, amelynek oldalai
a) 2 cm, 3 cm és 4 cm;
b) 3 cm, 4 cm és 5 cm hosszúak!
Nagyítsuk ezt a háromszöget a magasságpontjából $\frac{4}{3}$ aránnyal!
5. Adott a síkon egy kör, valamint két pont: A és B . Mi az ABC háromszögek súlypontjainak halmaza, ha a C pont befutja az adott kört? Sejtésünket indokoljuk!

3. Hasonlósági transzformáció



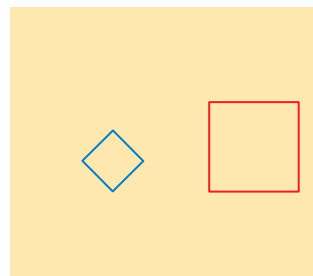
1. példa Meg tudunk-e adni olyan geometriai transzformációt, amely két különböző oldalhosszúságú, nem párhuzamos helyzetű négyzet egyikét a másikba viszi át? (3.1. ábra)

Megoldás:

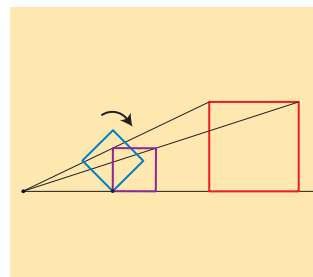
Az előző lecke 4. példája alapján tudjuk, hogy ha két négyzet párhuzamos helyzetű, akkor van olyan pont, amelyből az egyik négyzet felnagyítható a másikba. Először tehát hajtsunk végre a kisebbik négyzeten egy elforgatást (pl. az egyik csúcsa körül) úgy, hogy a kapott négyzet párhuzamos helyzetű legyen a nagy négyzettel! Ezt követően nagyítsuk! Ezzel megadtunk egy geometriai transzformációt, amellyel a kisebb négyzet átvihető a nagyobbba. (Gondoljuk végig, hogyan vinnénk át a nagyobb négyzetet a kisebbbe!)



Definíció Egy egybevágósági transzformáció és egy középpontos hasonlósági transzformáció egymásutánját **hasonlósági transzformációnak** nevezzük. A végrehajtott középpontos hasonlósági transzformáció arányának abszolút értéke a **hasonlósági transzformáció aránya**.



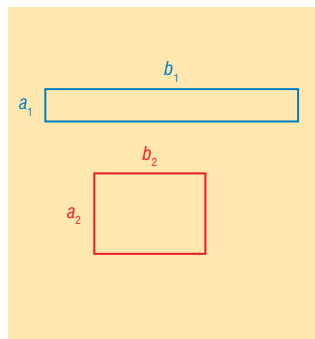
3.1. ábra A megadott négyzetek



3.2. ábra Egy elforgatás és egy középpontos hasonlóság egymásutánja



3.3. ábra Egy kis móka



3.4. ábra A két téglalap nem hasonló

Megjegyzés:

Nem feltétlenül egyezik meg a középpontos hasonlóság és a hasonlóság aránya (előjelben eltérhetnek egymástól).

Az egybevágósági transzformációk és a középpontos hasonlóság ismert tulajdonságai alapján megállapíthatjuk, hogy a hasonlósági transzformáció:

- ✦ egyenestartó (egyenes képe egyenes);
- ✦ szögtartó;
- ✦ aránytartó.

A körjárási irány megváltozhat, ugyanis egy tengelyes tükrözés megfordíthatja azt.

Az előző példában tehát egy hasonlósági transzformációt találtunk, amely egyik négyzetet a másikba viszi át. Vagyis a két négyzet hasonló.

Definíció Két pontthalmazt **hasonló**nak nevezünk, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi át.
Jele: $\sim$.

Ezzel ismét egy relációt értelmeztünk a pontthalmazok között csakúgy, mint az egybevágóság értelmezésekor. Vizsgáljuk meg tehát, hogy a pontthalmazok hasonlóságának mint relációnak milyen tulajdonságai vannak!

Legyen A , B és C egy-egy pontthalmaz (síkidomok, testek)!

Minden pontthalmaz hasonló önmagához.	$A \sim A$
Ha egy pontthalmaz hasonló egy másikhoz, akkor a másik is hasonló az előzőhöz.	Ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$.
Ha egy pontthalmaz hasonló egy másikhoz, a második pedig egy harmadikhoz, akkor az első pontthalmaz is hasonló a harmadikhoz.	Ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$.

Az előzőekben bebizonyítottuk, hogy bármely két kör hasonló egymáshoz, és azt is, hogy bármely két négyzet hasonló egymáshoz.

2. példa Igaz-e, hogy bármely két téglalap hasonló egymáshoz?

Megoldás:

Ha a két téglalap hasonló volna, akkor a megfelelő oldalak hányadosának egyenlőnek kellene lennie. Jelölje az egyik téglalap két szomszédos oldalának hosszát a_1 és b_1 , a másik téglalap két szomszédos oldalának hosszát pedig a_2 és b_2 . A hasonlósági transzformáció aránytartó tulajdonsága miatt tehát $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$ -nek teljesülnie kellene. Ezt átrendezve a

$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ egyenlőséget kapnánk, ami azt jelentené, hogy a két téglalap szomszédos oldalainak aránya egyenlő. Ez nyilván nem igaz bármely két téglalap esetén. Tehát a válasz nemleges.



A háromszögek sem mind hasonlóak, hiszen a hasonlósági transzformáció szögtartó tulajdonsága alapján akkor csak olyan háromszögek lehetnének, amelyek szögeikben megegyeznek. (Nem lehetne pl. egyik háromszög derékszögű, egy másik pedig hegyesszögű.)

Foglaljuk össze a háromszögek hasonlóságának alapeseteit!



Tétel

Két háromszög hasonló,

- ha mindhárom megfelelő oldalpárjuk hosszának aránya egyenlő,

$$\left(\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \right)$$

- ha két-két oldaluk hosszának aránya és az ezek által közbezárt szög egyenlő,

$$\left(\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \text{ és } \gamma_1 = \gamma_2 \right)$$

- ha két-két oldaluk hosszának aránya és a hosszabbakkal szemközti szög egyenlő,

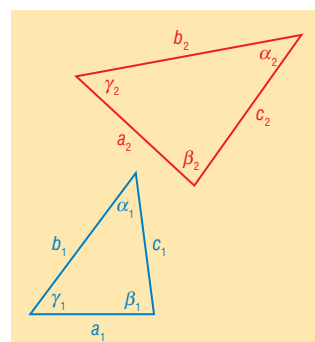
$$\left(\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}, b_1 > a_1 \text{ és } \beta_1 = \beta_2 \right)$$

- ha két szögük egyenlő.

$$(\alpha_1 = \alpha_2 \text{ és } \beta_1 = \beta_2).$$



3.5. ábra Hasonlóak vagyunk?



3.6. ábra Hasonló háromszögek

Ugyanakkor megállapíthatjuk, hogy ha két háromszög hasonló, akkor a felsorolt tulajdonságok mindegyike teljesül rájuk.



3. példa

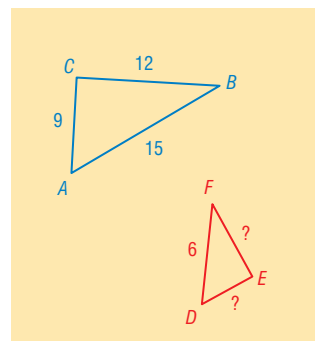
Az ABC és a DEF háromszög hasonló. Mekkora a DEF háromszög hiányzó oldalai, ha leghosszabb oldala 6 cm, az ABC háromszög oldalai pedig 15 cm, 9 cm és 12 cm hosszúságúak? Mekkora a DEF háromszög legnagyobb szöge?

Megoldás:

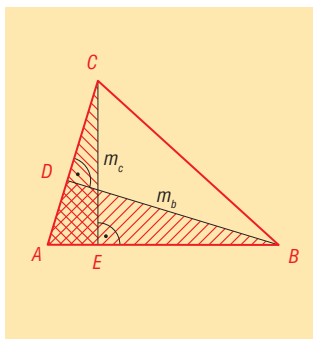
Mivel a DEF háromszög 6 cm-es oldala a leghosszabb, ezért tudjuk, hogy az ABC háromszög 15 cm-es oldalának felel meg. Ebből a hasonlóság aránya: $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. Ennek ismeretében kiszámítható a másik két

oldal hossza is: a 9 cm-es oldalnak a $9 \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{5}$ cm hosszúságú oldal

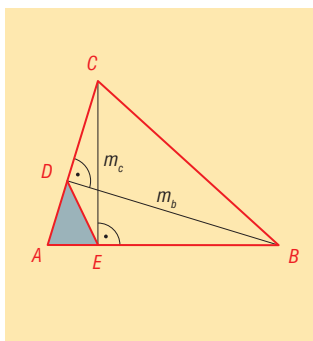
felel meg, a 12 cm-es oldalnak pedig a $12 \cdot \frac{2}{5} = \frac{24}{5}$ cm-es.



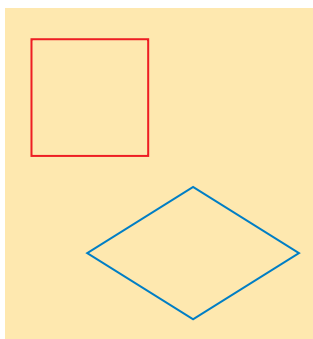
3.7. ábra 3. példa



3.8. ábra A két satírozott háromszög hasonló



3.9. ábra Az $ADE\Delta$ hasonló az $ABC\Delta$ -höz



3.10. ábra A négyzet és a rombusz általában nem hasonló

A DEF háromszög legnagyobb szöge ugyanakkora, mint az ABC háromszög legnagyobb szöge, amely derékszög a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint (hiszen $9^2 + 12^2 = 15^2$).



4. példa Az ABC háromszög m_b és m_c magasságvonalának talppontja legyen rendre D és E pont.

- Bizonyítsuk be, hogy az ABD és az ACE háromszög hasonló!
- Bizonyítsuk be azt is, hogy az ADE háromszög hasonló az ABC háromszöghöz!

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát! Az ABD és az ACE háromszögnek van egy közös szöge A -nál, továbbá mindkét háromszög derékszögű is, tehát van még egy egyenlő nagyságú szögük. A két háromszög így valóban hasonló. A 3.6 ábra a hegyesszögű háromszög esetét mutatja be. Gondoljuk végig a bizonyítást azokra az esetekre is, melyekben valamelyik csúcsnál tompaszög van! Mit mondhatunk abban az esetben, ha a háromszög derékszögű?

b) Az a) esetben igazolt hasonlóság miatt az ABD és az ACE háromszög oldalainak aránya egyenlő: $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$. Ez átrendezve az $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

összefüggéssel egyenértékű. Ez éppen azt jelenti, hogy az ADE és az ABC háromszög megfelelő oldalainak aránya egyenlő, és az ezek által közbezárt szög közös. Tehát e két háromszög hasonló.



5. példa Azt már láttuk a 2. példában, hogy négyszögeknél a szögek egyenlősége nem biztosítja a négyszögek hasonlóságát. Vajon az oldalak arányának egyenlősége elegendő-e a két négyszög hasonlóságához?

Megoldás:

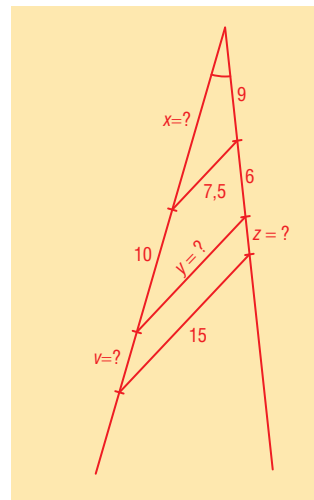
Erre is gyorsan találunk ellenpéldát: egy rombusz és egy négyzet megfelelő oldalainak aránya egyenlő, de nyilván nem hasonló a két négyszög, ha a rombusz nem derékszögű.



Tétel Két sokszög hasonlóságának feltétele, hogy a megfelelő oldalak hosszának aránya egyenlő legyen, és a megfelelő szögek is egyenlők legyenek, vagy az, hogy a megfelelő oldalak hosszának aránya és a megfelelő átlók aránya is egyenlő legyen.

Oldjuk meg!

- Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő szárú derékszögű háromszögből az egyik szögfelezője az eredetihez hasonló háromszöget vág le! Van-e másik olyan egyenlő szárú háromszög, amely rendelkezik ezzel a tulajdonsággal?
- Állapítsuk meg, milyen hosszúak a 3.11. ábrán a hiányzó szakaszok! (A szögszárazakat párhuzamos egyenesekkel metsztük.)
- Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak-e vagy sem!
 - Két derékszögű háromszög hasonló, ha van egy egyenlő nagyságú hegyesszögük.
 - Két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha van két egyenlő szögük.
 - Két egyenlő szárú háromszög hasonló, ha szárszögük egyenlő.
 - Bármely két szabályos háromszög hasonló.
 - Két derékszögű háromszög hasonló, ha valamely két oldaluk aránya egyenlő.
- Mutassuk meg, hogy ha két téglalap szomszédos oldalainak az aránya egyenlő, akkor a két téglalap hasonló!
- Állapítsuk meg, hogy egy hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének (azaz a magasságvonalak talppontjai által meghatározott háromszögnek) mekkorák a szögei, ha az eredeti háromszög szögei: α , β , γ ! Fogalmazzunk meg analóg állítást tompaszögű háromszögre is!



3.11. ábra 2. feladat

4. A hasonlóság alkalmazásai

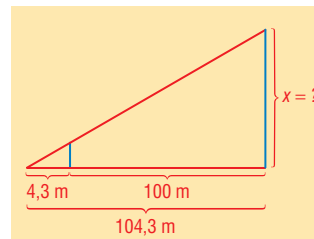


1. példa Egy torony magasságát szeretnénk megmérni. Ehhez leszúrunk a földre egy 2 m hosszú karót, és megjelöljük a földön azt a pontot, amelyik egy egyenesbe esik a karó tetejével és a torony tetejével. Milyen magas a torony, ha a földön a megjelölt pont 4 m 30 cm-re van a karótól, a torony alja pedig kb. 100 m-re?

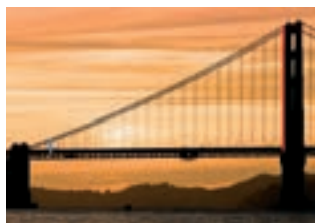
Megoldás:

Készítsunk ábrát! (4.1. ábra) Két hasonló derékszögű háromszög megfelelő oldalainak arányát írhatjuk föl, ahol csak a torony magassága az ismeretlen. Arra kell figyelni, hogy a földön megjelölt pont már nem 100 méterre van a torony aljától, hanem 104,3 m-re. Jelöljük a torony magasságát x -szel!

$$\frac{x}{104,3} = \frac{2}{4,3}$$



4.1. ábra Készítsünk ábrát!



4.2. ábra A hídpillér magassága is meghatározható

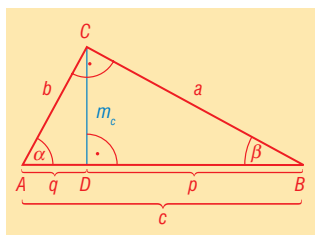
Innen $x = 104,3 \cdot \frac{2}{4,3} \approx 48,5$. Tehát a torony közelítőleg 48,5 méter magas.



Távolságok meghatározására (vagy becslésére) évezredek óta használják a hasonlóságot. Ezzel a későbbiekben gyakran találkozunk majd.



2. példa Mutassuk meg, hogy a derékszögű háromszöget az átfogóhoz tartozó magassága két olyan háromszögre bontja, amelyek hasonlóak az eredeti háromszöghöz!



4.3. ábra 2. példa

Megoldás:

Használjuk az 4.3. ábra jelöléseit! A BDC háromszög derékszögű, és ezenkívül van egy közös szöge az ABC háromszöggel (β). Tehát e két háromszög hasonló, mert két szögük egyenlő. Ugyanígy igazolható az is, hogy az ADC háromszög hasonló az eredetihez.

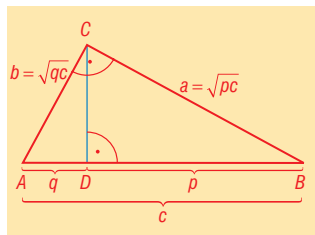


Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két részre bontja: a p és a q szakaszra. Ezek rendre az a és a b befogók *merőleges vetületei*.



Vegyük észre, hogy az előző feladatot ugyan megoldottuk, de ha a hasonlóság alapján felírjuk a megfelelő oldalak arányának egyenlőségét, akkor újabb érdekes és hasznos összefüggésekre bukkanhatunk.

Hogy biztosan ne tévesszük el, melyik oldal hol szerepeljen az arány felírásakor, készítsünk egy táblázatot, amelyben feltüntetjük, hogy melyik háromszög oldalai szerepelnek a számlálóban és melyik a nevezőben! Azt is figyelemmel tudjuk kísérni, hogy melyik szöggel szemközti oldalak arányát írtuk föl.

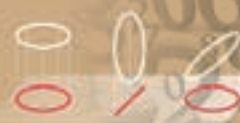


4.4. ábra Ügyeljünk a jelölésre!

		α
	↓	↓
BDC_{Δ}	→ $\frac{a}{c}$	$= \frac{p}{a}$
ABC_{Δ}	→ $\frac{a}{c}$	

Innen átrendezéssel az $a^2 = p \cdot c$ összefüggést kapjuk, vagy másként az $a = \sqrt{p \cdot c}$ összefüggést. (4.4. ábra)

Ezt szavakban így fogalmazhatjuk meg:



Tétel

A derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának.

Ez a **befogótétel**.

Természetesen akármelyik befogóra felírhattuk volna, így az is igaz, hogy $b = \sqrt{q \cdot c}$.



3. példa

Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogót egy 81 mm-es és egy 144 mm-es részre osztja. Mekkora a háromszög befogói?

Megoldás:

Használjuk az előző ábra jelöléseit! Az átfogó:

$$c = 81 + 144 = 225 \text{ (mm)}.$$

A befogótétel alapján a két befogó:

$$a = \sqrt{p \cdot c} = \sqrt{81 \cdot 225} = \sqrt{18225} = 135 \text{ (mm)};$$

$$b = \sqrt{q \cdot c} = \sqrt{144 \cdot 225} = \sqrt{32400} = 180 \text{ (mm)}.$$



Vegyük észre, hogy a fenti ábrán az ADC háromszög is hasonló a BDC háromszöghöz, hiszen mindkét háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. Írjuk föl ezekre is a megfelelő oldalak arányát!

		α		β
		$\downarrow$		$\downarrow$
ADC_{Δ}	$\longrightarrow$	$\frac{m_c}{p}$	$=$	$\frac{q}{m_c}$
BDC_{Δ}	$\longrightarrow$	p		m_c

Itt átrendezéssel az $m_c^2 = pq$, illetve $m_c = \sqrt{pq}$ összefüggést kapjuk. (4.6. ábra)

Ezzel bebizonyítottuk a **magasságtételt**.

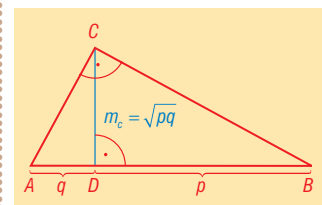


Tétel

A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogót két részre bontja, a magasság hossza egyenlő ezen két rész mértani közepével.



4.5. ábra Derékszögű háromszögek az iskolában



4.6. ábra A magasságtétel



4. példa Határozzuk meg a területét annak a derékszögű háromszögnek, amelynek 26 cm hosszú átfogóját az ahhoz tartozó magasság 9 : 4 arányban osztja két részre!

Megoldás:

Osszuk fel a 26 cm-t 9:4 arányban: az egyik rész $\frac{9}{13} \cdot 26 = 18$ cm, a másik így nyilván 8 cm. Az átfogóhoz tartozó magasság:

$$m_c = \sqrt{pq} = \sqrt{18 \cdot 8} = \sqrt{144} = 12 \text{ (cm)}.$$

A háromszög területe tehát: $T = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{26 \cdot 12}{2} = 156 \text{ (cm}^2\text{)}.$

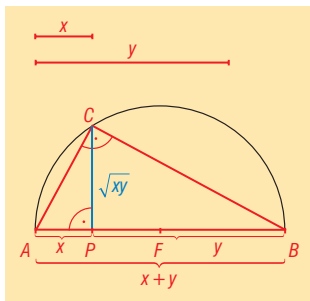


5. példa Szerkesszük meg két adott szakasz (x és y) mértani közepét!

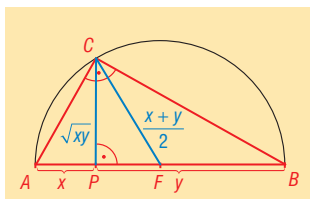
Megoldás:

Mind a befogó-, mind a magasságtételt használhatnánk erre a célra. Alkalmazzuk most az utóbbit!

Vegyünk fel egy $x + y$ hosszúságú AB szakaszt (4.7. ábra), megjelölve rajta az x és y közti osztópontot (P)! AB mint átmérő fölé szerkesszünk Thalész-kört! P -ben állítsunk merőleget a fölvett szakaszra! A Thalész-tétel szerint ennek a merőlegesnek és a Thalész-körnek a metszéspontjából (C) a szakasz derékszögben látszik. A PC szakasz tehát az ABC derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága. Az átfogó darabjai pedig éppen x és y , így $PC = \sqrt{x \cdot y}$, vagyis a két adott szakasz mértani közepe.



4.7. ábra 5. példa



4.8. ábra $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$,



Vegyük észre, hogy mivel az előző példában szereplő kör

átmérője $x + y$ hosszúságú, ezért sugara ennek fele: $\frac{x+y}{2}$,

ami az x és y szakasz számtani közepe! Ha megrajzoljuk az ábrán a C -hez tartozó sugarat is, akkor a számtani és a mértani közép közötti összefüggés geometriai szemléltetése jelenik meg a képen:

$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ahol egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha a P pont felezi az AB átmérőt, vagyis ha $x = y$. (4.8. ábra)



6. példa Mutassuk meg, hogy a trapéz átlóinak metszéspontján át az alapokkal párhuzamosan húzott egyenesnek a trapézba eső darabja $\frac{2ac}{a+c}$ hosszúságú (ahol a és c a trapéz alapjai), azaz a trapéz alapjainak harmonikus közepe.

Megoldás:

A párhuzamos helyzetű háromszögek hasonlóságát fölhasználva fölírhatjuk a következő arányok egyenlőségét: $\frac{x}{c} = \frac{AM}{AC} = \frac{a}{a+c}$. Az utóbbi egyenlőséget megkaphatjuk pl. úgy, hogyha az a alapot meghosszabbítjuk B -n túl c -vel, és ennek E végpontját összekötjük a C ponttal. Majd kihasználjuk, hogy a $BECD$ négyszög paralelogramma, s emiatt $DB \parallel CE$, ezután pedig felírjuk az AMB és az ACE hasonló háromszögek megfelelő oldalainak arányát. (4.9. ábra)

Azt kaptuk tehát, hogy $x = \frac{ac}{a+c}$. Nyilván ugyanilyen szerepet tölt be a trapézban az y szakasz is, tehát az is ugyanolyan hosszú. Együtt tehát $x + y = \frac{2ac}{a+c}$. Ezt szerettük volna bizonyítani.



Vegyük észre, hogy arra is rámutattunk, hogy a trapéz átlóinak metszéspontján át az alapokkal párhuzamosan húzott egyenesnek a trapézba eső szakaszát az átlók metszéspontja felezi.

A harmonikus közép fogalmával már találkoztunk 10. osztályban. Most szemléletesen láthatjuk az egyik ott említett összefüggést: két pozitív szám számtani közepe nagyobb vagy egyenlő, mint a harmonikus közepe. Az alapok számtani közepe a trapéz középvonalának a hossza. Az imént meghatározott szakaszhossz pedig az alapok harmonikus közepe. E szakasz nyilván közelebb van a kisebbik alaphoz (ha van kisebbik alap), így rövidebb is, mint a középvonal (4.10. ábra). (Ha a trapéz alapjai egyenlők, azaz paralelogramma, akkor átlói a középvonalon metszik egymást, így nyilván egyenlő a számtani és a harmonikus közép, amelyek értéke egyenlő az alapokkal is.)

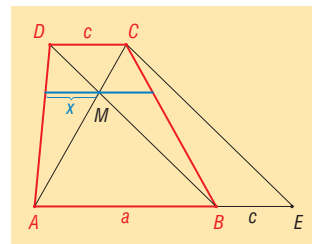


7. példa Egy háromszög oldalainak hossza 14, 18 és 24 egység.

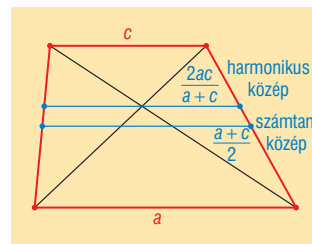
- Határozzuk meg, mekkora részekre osztja a 24 egységnyi oldalt a vele szemkölti szög szögfelezője!
- Állapítsuk meg, milyen arányban osztja két részre a beírt kör középpontja ezt a szögfelezőt!

Megoldás:

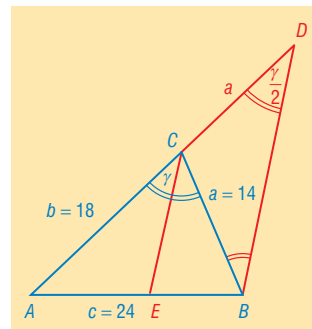
a) Használjuk a 4.11. ábra jelöléseit! Hosszabbítsuk meg az AC oldalt C -n túl az a oldal hosszával (CD szakasz)! A BCD háromszög egyenlő szárú, ezért az alapon fekvő szögei egyenlők. Ugyanakkor összegük egyenlő a BCD háromszög C -nél lévő külső szögével, amely viszont az ABC háromszög egyik belső szöge (γ). Így $\angle CDB = \frac{\gamma}{2}$, de mivel CE szögfelező, ezért $\angle ACE = \frac{\gamma}{2}$ is teljesül. Tehát $CE \parallel DB$, így az



4.9. ábra $x = \frac{ac}{a+c}$



4.10. ábra $\frac{2ac}{a+c} \leq \frac{a+c}{2}$



4.11. ábra 7. a) példa



4.12. ábra Általános érvényű megállapítás

ACE és az ADB háromszög hasonló. A megfelelő oldalak aránya tehát egyenlő:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AD}, \text{ vagyis } \frac{AE}{AB} = \frac{b}{b+a}.$$

Az arányt így is kifejezhetjük valamely k pozitív valós szám segítségével: $AE = bk$ és $AB = (b+a) \cdot k$.

Ekkor $EB = AB - AE = (b+a) \cdot k - bk = ak$.

$$\text{Tehát } \frac{AE}{EB} = \frac{bk}{ak} = \frac{b}{a}.$$



Vegyük észre, hogy eddig minden megállapításunk általános érvényű volt (a háromszög adataitól független). A kapott eredmény tehát máskor is alkalmazható. Ezzel bebizonyítottuk az ún. **szögfelezőtételt**.



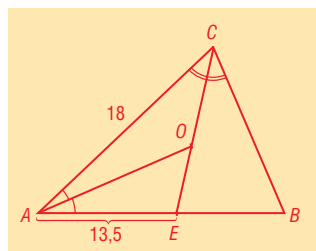
Tétel A háromszög egyik szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak hosszának arányában osztja két részre.

Alkalmazzuk is mindjárt a példa adataival!

A CE szögfelező az AB oldalt az AC és a BC oldal hosszának arányában osztja két részre. $AC : BC = 18 : 14 = 9 : 7$, ilyen arányban osztja a szögfelező az AB oldalt. Így $AE = \frac{9}{9+7} \cdot 24 = 13,5$ egység,

$$BE = \frac{7}{9+7} \cdot 24 = 10,5 \text{ egység hosszúságú. (4.11. ábra)}$$

b) Itt is a szögfelezőtételt használhatjuk, hiszen a beírt kör középpontja (O) a szögfelezők metszéspontja. Így az AO szögfelező az AEC háromszög A -ból induló oldalainak arányában osztja két részre a CE szakaszt. $CO : OE = AC : AE = 18 : 13,5 = 36 : 27 = 4 : 3$. A beírt kör középpontja 4:3 arányban osztja két részre a CE szögfelezőt.



4.13. ábra 7. b) példa



Oldjuk meg!

1. Az ABC egyenlő szárú háromszög beírt körének középpontja K . A beírt körnek az AB alappal vett érintési pontja E , a BC szárral vett érintési pontja F . Mutassuk meg, hogy $AEC \sim KFC$! Számítsuk ki a beírt kör sugarát, ha a háromszög alapja 16 cm, szárai 17 cm hosszúak!
2. Számítsuk ki az egyenlő szárú háromszög körülírt körének sugarát, ha alapja 14 cm, szárai 25 cm hosszúak! Keressünk hasonló háromszögeket!
3. Hogyan változik meg a) egy négyzet, b) egy háromszög, c) egy kör kerülete és területe, ha végre hajtunk rajta egy 3, egy $\frac{2}{3}$, egy λ arányú hasonlóságot?

4. Mutassuk meg, hogy az ABC háromszögben $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CE}$, ahol E az A csúcsból induló szögfelező metszéspontja a szemközti oldallal!

5. Hasonló síkidomok kerülete és területe, hasonló testek felszíne és térfogata



1. példa Az ABC egyenlő szárú háromszög két oldalának hossza 18 cm és 41 cm.

- Számítsuk ki a háromszög alaphoz tartozó magasságát, kerületét, területét, körülírt körének sugarát és annak a területét!
- Nagyítsuk ezt a háromszöget a háromszorosára ($A'B'C'$ háromszög), és számítsuk ki az így kapott háromszögnek ugyanezen adatait!
- Foglaljuk táblázatba az – előzőekben kapott – eredményeket, majd hasonlítsuk össze a két háromszög megfelelő adatait, és ezek hányadosát is tüntessük fel a táblázatban!

Megoldás:

a) Nyilvánvaló, hogy a 18 cm hosszúságú oldalak nem lehetnek a szá-
rak, mert összegük nem lenne nagyobb 41 cm-nél. A háromszög alapja
18 cm, szárai 41 cm hosszúak.

(1) Kezdjük a kerülettel! $K = 18 + 41 + 41 = 100$ (cm).

(2) Az egyenlő szárú háromszögek alaphoz tartozó magassága az F
pontban felezi az alapot, így ismerjük az ABF derékszögű háromszög
egyik befogóját (9 cm) és átfogóját (41 cm). Ebből ki tudjuk számol-
ni a Pitagorasz-tétel segítségével a másik befogó hosszát, amely egy-
ben az ABC háromszög alaphoz tartozó magassága: $BF^2 + 9^2 = 41^2$,
 $BF = m_b = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (cm). (5.2. ábra)

(3) Az ABC háromszög területe: $T_{ABC} = \frac{AC \cdot m_b}{2} = \frac{18 \cdot 40}{2} = 360$ (cm²).

(4) A háromszög körülírt körének középpontja legyen O ! Így az ol-
dalfelező merőlegesek O -ban metszik egymást. 9. osztályban az
ilyen feladatokat már megoldottuk úgy, hogy csak a Pitagorasz-tételt
használtuk. Most gyakoroljuk inkább a hasonlóság alkalmazását! Le-
gyen E az AB oldal felezőpontja! (5.3. ábra) Ekkor $BEO_{\Delta} \sim BFA_{\Delta}$,
mivel szögeik egyenlők. Ebből következően a megfelelő oldalak
aránya is egyenlő: $\frac{BO}{BE} = \frac{AB}{BF}$. Itt BO éppen a körülírt kör sugara:

$$BO = \frac{AB}{BF} \cdot BE = \frac{41}{40} \cdot \frac{41}{2} = 21,0125 \text{ (cm)}.$$

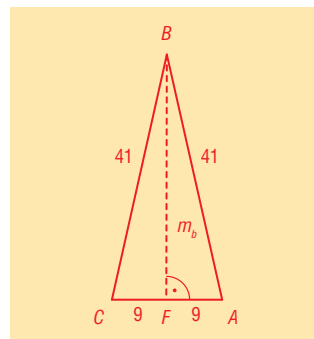
(5) Az ABC háromszög körülírt körének (k) területe:

$$T_k = BO^2 \pi = 21,0125^2 \pi \approx 1387 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

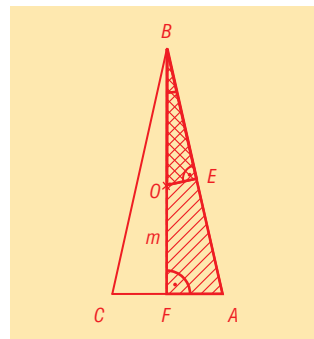
b) A háromszög 3-szoros nagyítása során minden oldal hossza a három-
szorosára nő. Az $A'B'C'$ háromszög oldalai: 54 cm, 54 cm és 123 cm
hosszúak. Az egyes számításokat olyan módon hajtjuk végre, mint az
a) esetben.



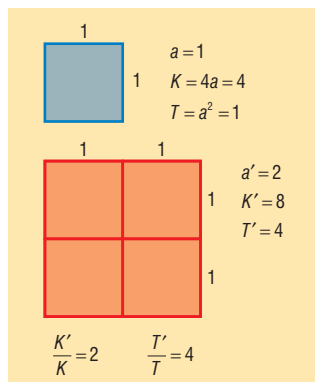
5.1. ábra Hány egyenlő szárú háromszöget fedezhetünk fel a képen?



5.2. ábra 1. a) példa



5.3. ábra $BEO_{\Delta} \sim BFA_{\Delta}$



5.4. ábra Egyszerű szemléltetés

(1) A $A'B'C'$ háromszög kerülete: $K' = 54 + 123 + 123 = 300$ (cm).

(2) $B'F' = m' = \sqrt{123^2 - 27^2} = 120$ (cm)

(3) Az $A'B'C'$ háromszög területe:

$$T_{A'B'C'} = \frac{A'C' \cdot m'}{2} = \frac{54 \cdot 120}{2} = 3240 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

(4) A körülírt kör sugara:

$$B'O' = \frac{A'B'}{B'F'} \cdot B'E' = \frac{123}{120} \cdot \frac{123}{2} = 63,0375 \text{ (cm)}.$$

(5) Az $A'B'C'$ háromszög körülírt körének területe:

$$T_k = B'O'^2 \pi = 63,0375^2 \pi \approx 12484 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

c)

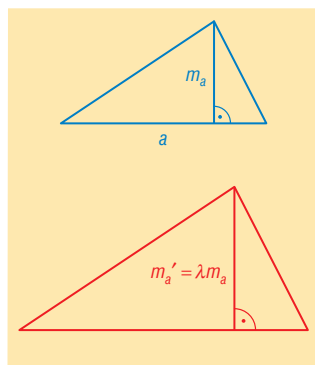
	ABC_{Δ}	$A'B'C'_{\Delta}$	arány
Szárak	41 cm	123 cm	3
Alap	18 cm	54 cm	3
Alaphoz tartozó magasság	40 cm	120 cm	3
Kerület	100 cm	300 cm	3
Terület	360 cm ²	3240 cm ²	9
Körülírt kör sugara	21,0125 cm	63,0375 cm	3
Körülírt kör területe	1387 cm ²	12484 cm ²	9



Vegyük észre, hogy minden hosszúságadat a hasonlóság arányában változott (a feladatban a 3-szorosára). Ez a hasonlóság aránytartó tulajdonságából következik! A területek aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő (a feladatban ez 9). Ez azért van így, mert két távolságadatot szorzunk össze egymással, és mindkettő a háromszorosára növekedett. A szorzat így nyilván 9-szeresére változott.



Tétel Hasonló síkidomok területének aránya egyenlő a hasonlóság arányának négyzetével.

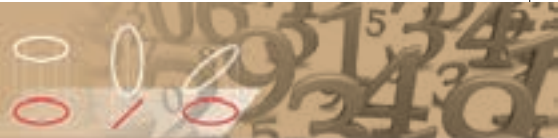


5.5. ábra $a' = \lambda a$, $T' = \lambda^2 \cdot T$

A bizonyítást általánosan nem tudjuk elvégezni, de sokszögekre és körre meg tudjuk mutatni az állítás igazságát.

Háromszögekre igaz az állítás az előbb elmondottak szerint. Írjuk le most képletekkel is azt, amit az imént szavakban is megfogalmaztunk! (A hasonlóság arányát λ -val jelöljük.)

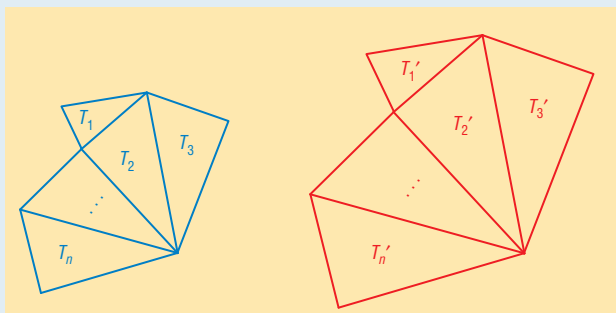
$$T'_{\Delta} = \frac{a' \cdot m'_a}{2} = \frac{\lambda a \cdot \lambda m_a}{2} = \lambda^2 \cdot \frac{a \cdot m_a}{2} = \lambda^2 \cdot T_{\Delta}$$



Minden sokszöget fel tudunk bontani véges sok háromszögre. Jelöljük ezek területét $T_1, T_2, \dots, T_n$ -nel, képük területét pedig $T'_1, T'_2, \dots, T'_n$ -vel! Ekkor

$$\begin{aligned} T' &= T'_1 + T'_2 + \dots + T'_n = \lambda^2 \cdot T_1 + \lambda^2 \cdot T_2 + \dots + \lambda^2 \cdot T_n = \\ &= \lambda^2 \cdot (T_1 + T_2 + \dots + T_n) = \lambda^2 \cdot T. \end{aligned}$$

Tehát tetszőleges sokszögre teljesül az állítás.



5.6. ábra

Körre még egyszerűbben adódik az állítás:

$$T' = r'^2 \pi = (\lambda r)^2 \pi = \lambda^2 \cdot r^2 \pi = \lambda^2 \cdot T.$$



5.7. ábra Nagyítás



2. példa Norbi apukája éppen egy gömb alakú óriás lufit próbál fölfújni. Körülbelül 80 cm átmérőjű a léggömb, amikor az apa kifulladásra megszólal:

- Ugye ennyi már elég lesz, kisfiam?
- Apa, légy szíves, fújd még egy nagyon kicsit! Legalább akkorára, hogy ne férjen ki az ablakon! (Az ablak 1 méter széles.)
- Ne kérj lehetetlent, Norbikám!

Miért válaszolhatta ezt Norbi apukája?

Az addig befújt levegőmennyiségnek hány százalékát kellene még belefújnia a lufiba az apukának, hogy teljesítse fia kívánságát? Először tippeljünk, majd számoljunk!

Megoldás:

A lufi átmérőjének 80 cm-ről legalább 100 cm-re kellene nőnie.

A 80 cm átmérőjű léggömb térfogata $V_1 = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4 \cdot 40^3\pi}{3} = \frac{256000}{3}\pi \approx 268083 \text{ cm}^3 \approx 268 \text{ dm}^3$, azaz eddig már kb. 268 liter levegőt fújt bele Norbi apukája.

A 100 cm átmérőjű léggömb térfogata $V_2 = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4 \cdot 50^3\pi}{3} = \frac{500000}{3}\pi \approx 523599 \text{ cm}^3 \approx 524 \text{ dm}^3$, vagyis körülbelül még ugyan-



5.8. ábra „Ne kérj lehetetlent...!”



5.9. ábra Egy szép és még ép léggömb

annyi levegőt kellene fújni a léggömbbe, mint addig összesen. Az addigi levegőmennyiségnek tehát körülbelül a 100%-át kellene még befújni Norbi apukájának. (Arról nem is beszélve, hogy közben a befújt levegőre egyre nagyobb nyomást gyakorol a léggömb gumifala, így egyre nehezebb is a fújás, és még többet is kell befújni a remélt méret eléréséhez.)



Vegyük észre, hogy a léggömb térfogatváltozását úgy is ki tudtuk volna számolni, hogy a konkrét térfogatértékeket nem számoljuk ki!

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4r_2^3\pi}{3}}{\frac{4r_1^3\pi}{3}} = \frac{r_2^3}{r_1^3} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{2r_2}{2r_1}\right)^3$$

Vagyis a két gömb térfogatának aránya egyenlő sugaraik (vagy átmérőik) arányának köbével.

Innen ugyanazt az értéket kapjuk, mint a fenti megoldásból:

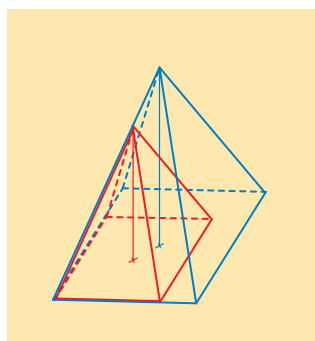
$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{2r_2}{2r_1}\right)^3 = \left(\frac{10}{8}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} \approx 1,95.$$



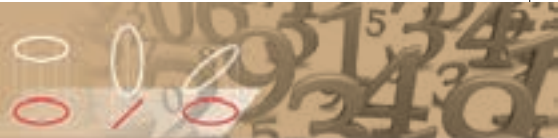
3. példa Hányszorosára változik a felszíne és a térfogata annak a szabályos négyoldalú gúlának, amelynek minden élét 25%-kal csökkentjük?

Megoldás:

Ha minden élét 25%-kal, azaz az $\frac{1}{4}$ -ével csökkentjük, akkor minden él hosszát a $\frac{3}{4}$ -ére változtatjuk. Így az eredetihez hasonló gúlát kapunk, ahol a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{3}{4}$. A gúlákat határoló megfelelő sokszögek is hasonlóak (ugyanilyen hasonlósági aránnyal). A felszínnél tehát egyszerű dolgunk van: hivatkozhatunk az előző tételre. Eszerint az egyes sokszögek területe úgy aránylik egymáshoz, mint a hasonlóság arányának négyzete. Minden egyes lap területe $\lambda^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ -szeresére változik, így ezek összege, a felszín is. Mielőtt a térfogatok arányát kiszámítanánk, megállapítjuk, hogy a gúla magassága is a $\frac{3}{4}$ -ére változik (a hasonlóság aránytartó tulajdonsága miatt). Az új térfogat így:



5.10. ábra 3. példa



$$V' = \frac{T' \cdot m'}{3} = \frac{\lambda^2 \cdot T \cdot \lambda \cdot m}{3} = \frac{\lambda^3 \cdot T \cdot m}{3} = \lambda^3 \cdot V, \quad \text{vagyis} \quad \text{a} \quad \text{térfogat}$$

$$\lambda^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \text{-szörösére változik.}$$

A felszín tehát a $\frac{9}{16}$ -ára (56,25%-ára), a térfogat pedig a $\frac{27}{64}$ -ére (kb. 42,19%-ára) csökken.

Az előző feladatok a következő tétel egy-egy speciális esetét igazolták.



Tétel

Hasonló testek felszínének aránya egyenlő a hasonlóság arányának négyzetével, térfogatuk aránya pedig egyenlő a hasonlóság arányának a köbével.

$$A' = \lambda^2 \cdot A \quad \text{és} \quad V' = \lambda^3 \cdot V$$

Ezek az összefüggések nemcsak síklapokkal határolt testekre teljesülnek, hanem bármely két hasonló testre. (Lásd pl. 2. példa.)



5.11. ábra A gyémánt értéke egyenesen arányos a tömegének a négyzetével



4. példa

Egy egyenes körkúp alapkörének sugara 12 cm, magassága 30 cm. A kúpból az alapjával párhuzamos síkkal egy kis kúpot vágunk le, melynek térfogata $\frac{1}{27}$ -ed része az eredeti kúp térfogatának. (5.12. ábra)

Milyen magas a megmaradt test (csonka kúp), mekkora a felszíne és a térfogata?

Megoldás:

Mivel az alaplappal párhuzamos síkkal vágtuk el a nagy kúpot, így a levágott kis kúp hasonló lesz az eredetihez. A hasonlóság arányának

köbe: $\lambda^3 = \frac{1}{27}$. Vagyis a hasonlóság aránya: $\lambda = \frac{1}{3}$.

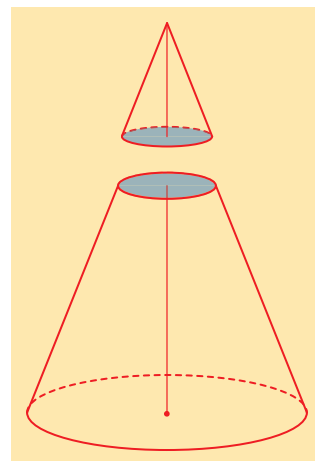
Így az eredeti magasságnak is a harmadrésze kerül a kis kúpba, vagyis a kis kúp 10 cm magas, alapkörének (amely egyben a csonka kúp fedőköre is) sugara 4 cm. A csonka kúp magassága tehát 20 cm.

Térfogatát közvetlenül a feladat adatai alapján is kiszámíthatjuk, hiszen

az eredeti kúp térfogatának $\frac{26}{27}$ -ed része.

$$V_{\text{csonka kúp}} = \frac{26}{27} \cdot \frac{T_{\text{alapkör}} \cdot m}{3} = \frac{26}{27} \cdot \frac{12^2 \cdot \pi \cdot 30}{3} = \frac{4160\pi}{3} \approx 4356 \text{ (cm}^3\text{)}$$

A csonka kúp felszíne egyenlő alap- és fedőkörének területe plusz a palástjának területe. A palást területét úgy kaphatjuk meg, ha kivonjuk



5.12. ábra Kúp és csonka kúp



5.13. ábra Királyi palást

az eredeti kúp palástjának területéből a kis kúp palástjának területét.

Mivel a kis kúp $\lambda = \frac{1}{3}$ aránnyal hasonló a nagy kúphoz, ezért palástja is ugyanilyen aránnyal hasonló a nagyéhoz. (Könnyen belátható, hogy ez a kiterített palástokra is igaz.) Így a kis kúp palástjának területe $\lambda^2 = \frac{1}{9}$ -ed része a nagy kúpénak.

A nagy kúp palástjának területe:

$P_{\text{nagy kúp}} = 12a\pi = 12\sqrt{30^2 - 12^2} \cdot \pi \approx 12 \cdot 27,5\pi \approx 1036,6 \text{ cm}^2$. Itt a kúp alkotójának hosszát a Pitagorasz-tétellel számoltuk ki.

$$P_{\text{kis kúp}} = \frac{1}{9} \cdot P_{\text{nagy kúp}} = \frac{1}{9} \cdot 1036,6 \text{ cm}^2 \approx 115,2 \text{ cm}^2$$

Így a csonka kúp palástjának területe:

$$P_{\text{csonka kúp}} = P_{\text{nagy kúp}} - P_{\text{kis kúp}} \approx 921,4 \text{ cm}^2.$$

A csonka kúp felszíne tehát

$$A_{\text{csonka kúp}} = 12^2\pi + 4^2\pi + P_{\text{csonka kúp}} \approx 1424 \text{ cm}^2.$$



5. példa Egy téglatestből egy síkkal levágtunk egy darabot, amely hasonló az eredetihez. Mit mondhatunk a téglatest éleiről, ha az eredeti test térfogata 216 cm^3 , felszíne pedig 228 cm^2 ?

Megoldás:

Ha a levágott darab hasonló az eredetihez, akkor az is téglatest lesz, tehát az eredeti téglatest valamelyik lapjával párhuzamosan kellett vágnunk. Így két élének a hossza változatlan marad a vágás során, csak a harmadik lesz rövidebb, mint eredetileg volt.

Ha az eredeti téglatest élei közti reláció: $a \leq b \leq c$ volt, akkor csak a legnagyobbat vághattuk el (c'). A levágott téglatest élei közti re-

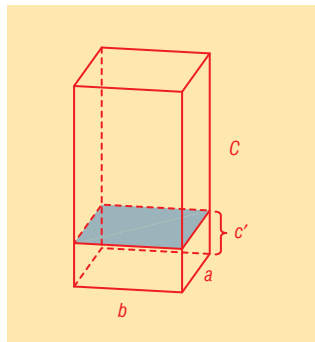
láció: $c' \leq a \leq b$. A megfelelő élek aránya: $\frac{c'}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \lambda$. Ebből adódik, hogy $c' = \lambda a$, $a = \lambda b$, $b = \lambda c$, így $c' = \lambda a = \lambda^2 b = \lambda^3 c$ (így nyilván $0 < \lambda \leq 1$).

A térfogat ismeretében felírhatjuk a következőt: $V = abc$, tehát $216 = \lambda^2 c \cdot \lambda c \cdot c = \lambda^3 c^3 = (\lambda c)^3 = b^3$. Ebből tudjuk, hogy a nagyság

szerint középső él hossza $b = 6 \text{ cm}$. Ennek a segítségével kifejezhetjük

$$\begin{aligned} \text{a felszínt: } A &= 2(ab + ac + bc) = 2\left(\lambda b \cdot b + \lambda b \cdot \frac{b}{\lambda} + \frac{b}{\lambda} \cdot b\right) = \\ &= 2\left(36 \cdot \lambda + 36 + \frac{36}{\lambda}\right) = 72\left(\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

A felszín ismeretében pedig kiszámíthatjuk λ értékét.



5.14. ábra 5. példa



$$72\left(\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}\right) = 228 \quad / : 72$$

$$\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda} = \frac{19}{6} \quad / \cdot \lambda$$

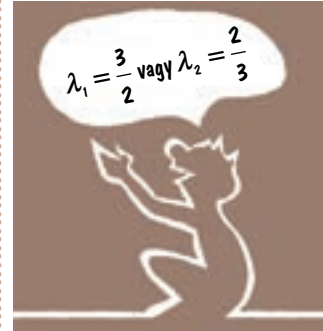
$$\lambda^2 - \frac{13}{6}\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{13}{6} \pm \sqrt{\frac{169}{36} - 4}}{2} = \frac{\frac{13}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36}}}{2} = \frac{\frac{13}{6} \pm \frac{5}{6}}{2} = \frac{13 \pm 5}{12}$$

Innen λ -ra két érték adódik: $\lambda_1 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ és $\lambda_2 = \frac{2}{3}$. De ezek közül

csak az 1-nél kisebb szám felel meg a feladat feltételeinek.

Így $a = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ cm, $b = 6$ cm és $c = 6 : \frac{2}{3} = 9$ cm.



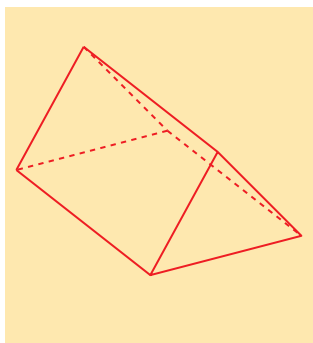
5.15. ábra Csak a $\frac{2}{3}$ felel meg a feltételnek

Oldjuk meg!

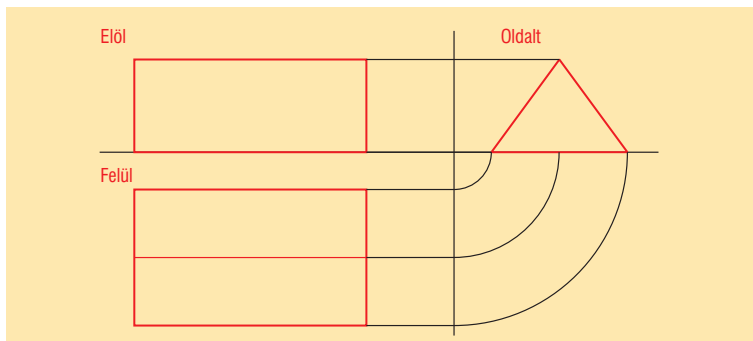
- Hányszorosára változik egy háromszög kerülete és területe, ha minden oldalát a) a 2-szeresére, b) a 3-szorosára, c) a $\frac{3}{4}$ -szeresére, d) az 1,1-szeresére változtatjuk? A megfelelő adatokat foglaljuk táblázatba!
- Hányszorosára változik egy kocka felszíne és térfogata, ha minden élét a) 2-szeresére, b) 3-szorosára, c) $\frac{3}{4}$ -szeresére, d) 1,1-szeresére változtatjuk? A megfelelő adatokat foglaljuk táblázatba!
- Kössük össze egy négyzet szomszédos oldalfelező pontjait! Hányadrésze az így kapott négyszög területe az eredetiének? Mit mondhatunk ezek alapján a két négyszög oldalainak arányáról?
- Adott háromszög egyik oldalával párhuzamosan szerkesszünk olyan egyenest, amely két egyenlő területű részre bontja a háromszöget!
- Egy szabályos hatoldalú gúlát elmetszünk a magasság csúcs felőli negyedelőpontján át az alaplapal párhuzamos síkkal. Határozzuk meg, hogyan aránylanak egymáshoz
 - a levágott kis gúla és az eredeti nagy gúla élei;
 - a kis gúla és a nagy gúla alaplapjának területe;
 - a kis gúla és a nagy gúla felszíne;
 - a kis gúla és a nagy gúla térfogata;
 - a kis gúla és a nagy gúla beírt gömbjének sugara;
 - a kis gúla és a nagy gúla beírt gömbjének felszíne;
 - a kis gúla és a nagy gúla beírt gömbjének térfogata;
 - a kis gúla és a nagy gúla körülírt gömbjének sugara;
 - a kis gúla és a nagy gúla szomszédos oldalélei által bezárt szögek!

6. Egyéb nem egybevágósági transzformációk (Kiegészítő anyag)

1. példa Milyen az a test, amelynek felül-, elől-, illetve oldalnézetét a 6.1. ábrán látjuk?



6.2. ábra A keresett test



6.1. ábra 1. példa

Megoldás:

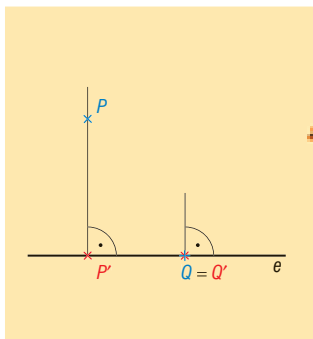
Lehet pl. a 6.2. ábrán látható sátorforma.



6.3. ábra Műszaki rajz

Vegyük észre, hogy ez a probléma hasonlít ahhoz, amelyben a derékszögű háromszög átfogójára vetítettük merőlegesen a befogókat! A műszaki rajzokban meg szokták adni a látható éleket és a rejtett éleket is a felül-, elől- és oldalnézeti képeken, hogy pontosan vissza lehessen állítani e képek segítségével az eredeti testet. Többek közt ebben különböznek a műszaki rajzok egy merőleges vetülettől.

Miután már van egy képünk a merőleges vetítésről, próbáljuk most pontosan meghatározni ennek a fogalmát!



6.4. ábra Pontok merőleges vetülete

Definíció Az **egyenesre vett merőleges vetítés** olyan geometriai transzformáció a síkban, amelynél adott egy egyenes, és a sík minden P pontjához úgy rendeljük hozzá a P' -vel jelölt pontot, hogy P' a P pontból az adott egyenesre állított merőleges szakasznak a talppontja legyen. (6.4. ábra)

Értelemszerűen az egyenes minden pontjának a képe önmaga.

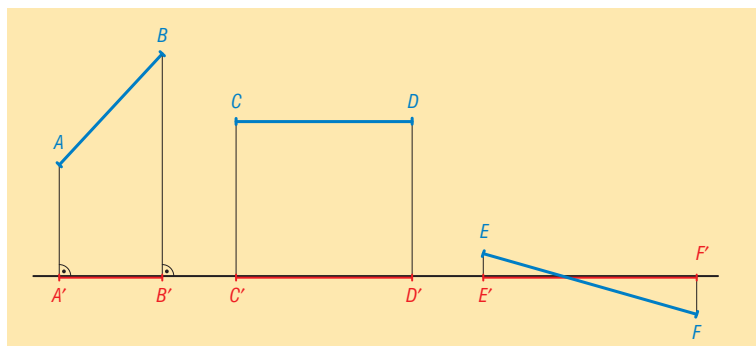
Nézzük mindjárt a térbeli merőleges vetítést is!



Definíció A síkra vett merőleges vetítés olyan geometriai transzformáció, amelynél adott egy sík, és a tér minden P pontjához úgy rendeljük hozzá a P' -vel jelölt pontot, hogy P' a P pontból az adott síkra állított merőleges szakasznak a talppontja legyen.

A merőleges vetítés tulajdonságai:

- Az adott egyenes (sík) minden pontjának képe önmaga.
- Bármely egyenes képe egyenes, ha az egyenes nem merőleges az adott egyenesre (síkra), és egyetlen pont, ha merőleges rá.
- Ez összhangban van azzal a tulajdonsággal, hogy a merőleges vetítés nem kölcsönösen egyértelmű transzformáció, azaz a képpontok segítségével nem tudjuk megmondani az eredeti pont helyét (csak annak egyenesét). Éppen ezért szoktak több nézetet is megadni a műszaki rajzoknál. Olykor még a három fő koordinátasíkon kívüli újabb síkokra merőleges nézeteket is megszerkesztik.
- Bármely szakasz képe legfeljebb olyan hosszú szakasz, mint az eredeti (vagy a kép egyetlen pont, ha a szakasz merőleges az adott egyenesre, illetve síkra). És csak pontosan akkor egyenlő a szakasz és képének a hossza, ha a szakasz párhuzamos az adott egyenessel, illetve síkkal.



6.7. ábra Szakaszok és vetített képtük



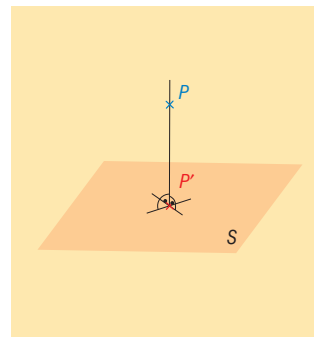
2. példa Mi egy kör merőleges vetülete egy egyenesre?

Megoldás:

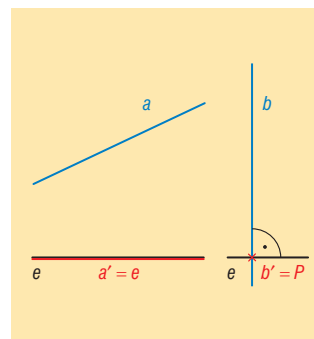
Egy átmérő hosszúságú szakasz.



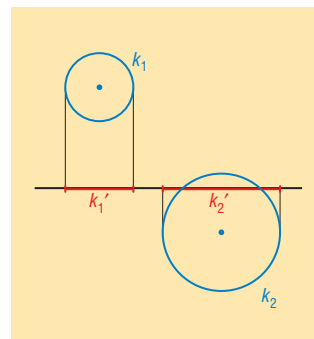
Megjegyzés: Egy kör síkra vetett merőleges vetülete vagy kör lesz, ha a kör síkja párhuzamos a megadott síkkal, vagy egy átmérő hosszúságú



6.5. ábra A P pont merőleges vetülete: P'



6.6. ábra Egy egyenes képe lehet egyenes vagy pont

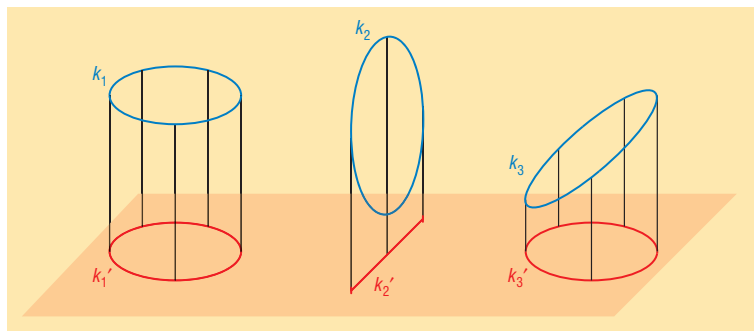


6.8. ábra Körök vetületei egyenesre



6.9. ábra Honnan süt a nap? Az árnyékok segítenek

szakasz, ha a síkja merőleges az adott síkra, vagy pedig minden más esetben ellipszis.

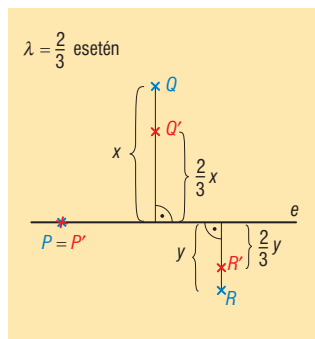


6.10. ábra Különböző helyzetű körök vetületei

Az eddig elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy a merőleges vetítés nem egybevágósági transzformáció.

A tavaszi és őszi napéjegyenlőség idején déli 12-kor merőlegesen süt a nap az egyenlítő környékén a vízszintes talajra. A tárgyak merőleges vetülete nem más, mint az árnyékuk.

Nézzünk egy másik példát nem egybevágósági transzformációra!



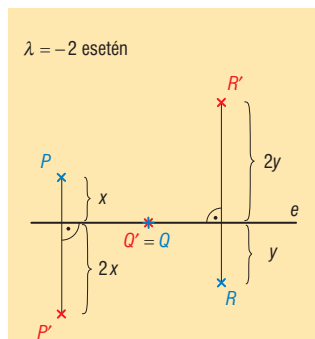
6.11. ábra Merőleges affinitás, ha $\lambda > 0$



Definíció Adott egy e egyenes és egy λ 0-tól különböző valós szám. Rendeljük hozzá a sík minden egyes P pontjához azt a P' pontot, amelyre teljesülnek a következők:

- I. ha $P \in e$, akkor $P' = P$;
- II. ha $P \notin e$, akkor $PP' \perp e$;
- $d(P'; e) = |\lambda| \cdot d(P; e)$; továbbá
- P és P' ugyanabba az e -re vonatkozó félsíkba esik, ha $\lambda > 0$, és különböző félsíkba, ha $\lambda < 0$.

Ezt a transzformációt az e egyenesre vonatkozó λ arányú **merőleges affinitásnak** nevezzük. Az e egyenest a merőleges affinitás tengelyének hívjuk.



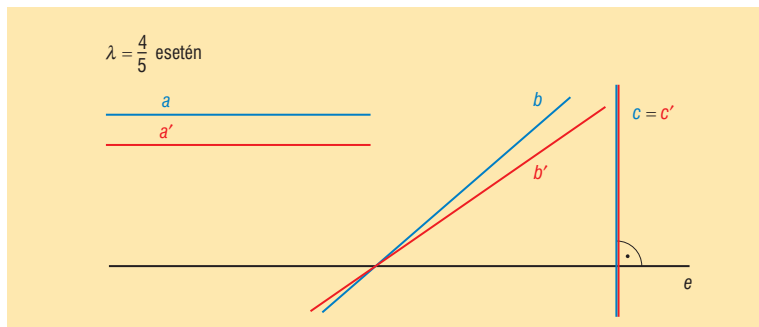
6.12. ábra Merőleges affinitás, ha $\lambda < 0$



Vegyük észre, hogy a merőleges affinitás definíciója nagyon hasonlít a középpontos hasonlóság definíciójára! Abban az egy dologban különbözik, hogy a középpontos hasonlóságnál egy pont adott, itt pedig egy egyenes.

Figyeljük meg, milyen tulajdonságokkal rendelkezik a merőleges affinitás!

Bármely egyenes képe egyenes. (Ezt nem bizonyítjuk, bár nem nehéz igazolni.)



6.13. ábra Különböző helyzetű egyenesek merőleges affinitással kapott képe

Ezen belül: a tengellyel párhuzamos egyenes képe is párhuzamos lesz a tengellyel; a tengelyt metsző egyenes képe pedig ugyanabban a pontban metszi a tengelyt, mint az eredeti egyenes.

Nyilván nem távolságtartó a transzformáció, ha $|\lambda| \neq 1$. Elég pl. egy, az adott egyenesre merőleges szakaszra gondolnunk, amelynek egyik végpontja az egyenesen van (6.14. ábra). De ebben az esetben a merőleges affinitás még **az aránytartó tulajdonsággal sem rendelkezik**, hiszen egy, az affinitás tengelyével párhuzamos szakasz képe egyenlő hosszú az eredeti szakasszal, míg a többi szakasz hossza megváltozik.

Ugyanakkor az megállapítható, hogy felezőpontot felezőpontba visz át.

Ha viszont $\lambda = 1$, akkor speciálisan az identikus transzformációt kapjuk. Ha $\lambda = -1$, akkor a tengelyes tükrözést.

Ha $\lambda \neq 1$, akkor a transzformáció fixpontjai a tengely pontjai, invariáns egyenesei pedig (a tengelyen kívül) a tengelyre merőleges egyenesek.



3. példa

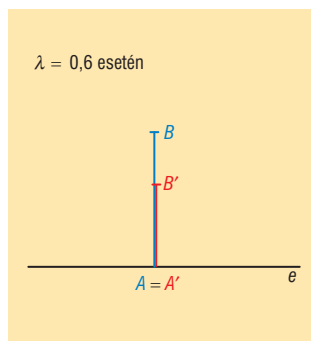
Mi lehet egy a oldalú négyzet $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitással kapott képe?
Mitől függ a válasz?

Megoldás:

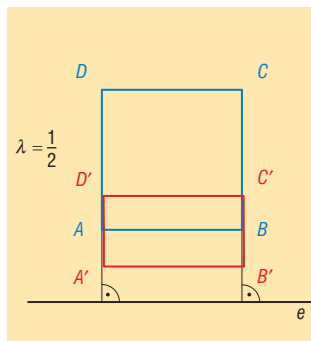
Már említettük, hogy az egyenlő hosszúságú szakaszok képe sem feltétlenül egyenlő. Így nyilván függ a négyzet és a tengely kölcsönös elhelyezkedésétől, hogy mi lesz a négyzet képe.

Ha a négyzet valamely két oldala párhuzamos a tengellyel, akkor ezen oldalak képe is párhuzamos lesz a tengellyel, képük hossza is a , csak feleolyan távol fog elhelyezkedni a tengelytől. Ekkor a másik két oldal viszont merőleges a tengelyre, így képük is merőleges lesz a tengelyre, de hosszuk a felére változik. Így tehát egy téglalapot kapunk,

melynek szomszédos oldalai a és $\frac{a}{2}$ hosszúságúak.



6.14. ábra A merőleges affinitás nem aránytartó

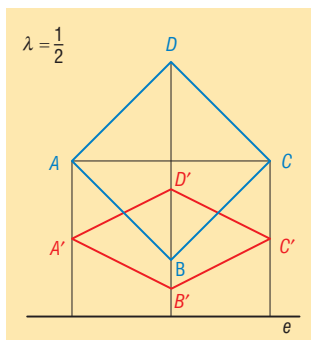


6.15. ábra Ebben az esetben téglalap

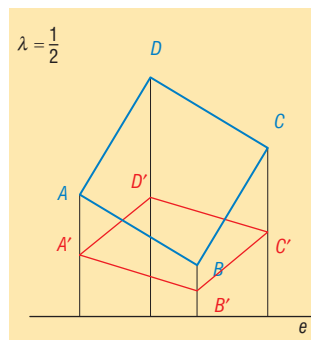


6.16. ábra „Síkra vetítés” egy pontból

Ha a négyzet egyik átlója párhuzamos a tengellyel (ekkor a másik merőleges), akkor olyan négyszöget kapunk, melynek átlói szintén merőlegesek egymásra, de a tengelyre merőleges átló feleolyan hosszú, mint eredetileg. Ekkor tehát egy rombuszt kapunk képként.



6.17. ábra Ebben az esetben rombusz



6.18. ábra Ebben az esetben paralelogramma

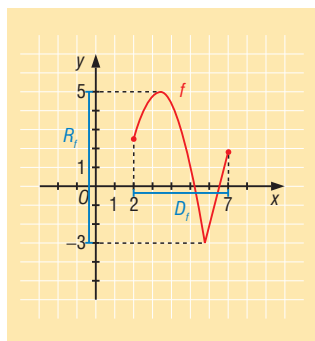
A többi elhelyezkedés esetén paralelogrammát kapunk (6.18. ábra), hiszen a keletkező négyszög átlói úgyszintén felezni fogják egymást.



A merőleges affinitás tehát nem szögtartó, így általában az sem igaz, hogy a síkidomok merőleges affinitással kapott képe hasonló volna az eredeti síkidomhoz.



4. példa Olvassuk le a 6.19. ábrán látható függvénygrafikon alapján a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!



6.19. ábra Az értelmezési tartomány és az értékkészlet könnyen leolvasható

Megoldás:

A feladat nem új, nem is bonyolult. Csak azért szerepel itt, hogy észrevegyük, hogy a függvény értelmezési tartománya a grafikonjának mint pontthalmaznak az x tengelyre eső merőleges vetülete, a konkrét függvénynél a $[2; 7]$ intervallum. Az értékkészlete a függvény grafikonjának mint pontthalmaznak az y tengelyre vett merőleges vetülete, példánkban a $[-3; 5]$ intervallum.

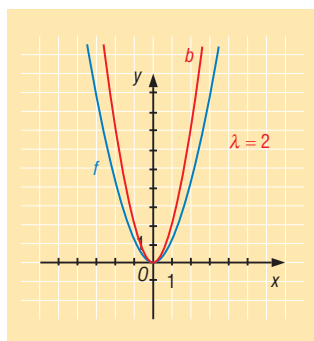


5. példa Milyen geometriai transzformációkat kell végrehajtani az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2$ függvény grafikonján, hogy az alábbi valós függvények grafikonját kapjuk eredményül?

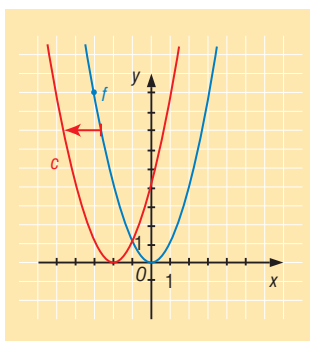
a) $a(x) = x^2 + 3$; b) $b(x) = 2x^2$; c) $c(x) = (x + 2)^2$; d) $d(x) = -\frac{1}{3}x^2$

Megoldás:

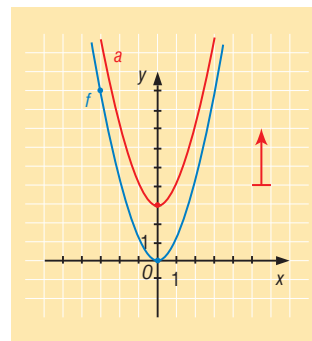
Az f függvény grafikonját az y tengellyel párhuzamosan el kell tolni pozitív irányba 3 egységgel, hogy az a függvény grafikonját kapjuk. A b függvény képét az f képéből egy olyan merőleges affinitással kapjuk meg, amelynek tengelye az x tengely, aránya pedig 2. Ezt y tengely menti (y tengellyel párhuzamos irányú) kétszeres nyújtásnak szoktuk nevezni. A c függvény képét úgy kapjuk meg, hogy az f képét az x tengellyel párhuzamosan eltoljuk negatív irányba 2 egységgel. A d képét az f képéből szintén egy merőleges affinitással kapjuk, amelynek tengelye az x tengely, aránya pedig $-\frac{1}{3}$. Ez két lépésben is megvalósítható: egy y tengellyel párhuzamos irányú, $\frac{1}{3}$ arányú zsugorítással és az x tengelyre tükrözéssel.



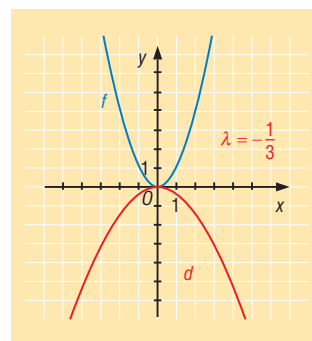
6.21. ábra Merőleges affinitás



6.22. ábra Eltolás



6.20. ábra Eltolás



6.23. ábra Merőleges affinitás



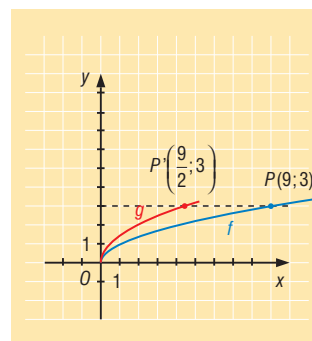
6. példa Milyen geometriai transzformációt kell végrehajtani az $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonján, hogy a $g(x) = \sqrt{2x}$ hozzárendelési szabályú függvényt kapjuk?

Megoldás:

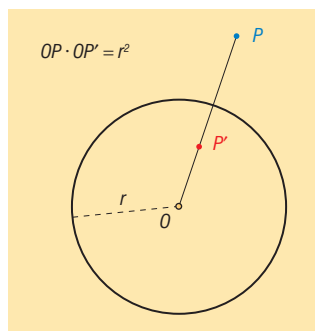
Korábban már tanultuk, hogy ez egy „ x tengely menti zsugorítás a felére”, vagyis egy olyan merőleges affinitás, amelynek a tengelye az y tengely, az aránya pedig $\frac{1}{2}$.



Ahogy újabb és újabb geometriai transzformációkat ismertünk meg, egyre kevesebb „jó” tulajdonsággal rendelkeztek. De az összes eddigi transzformációnak volt egy közös tulajdonsága: mindegyik egyenestartó. Jogosan vetődik föl a kérdés, hogy léteznek-e olyan geometriai transzformációk, amelyeknél egyenes képe nem egyenes.



6.24. ábra Merőleges affinitás



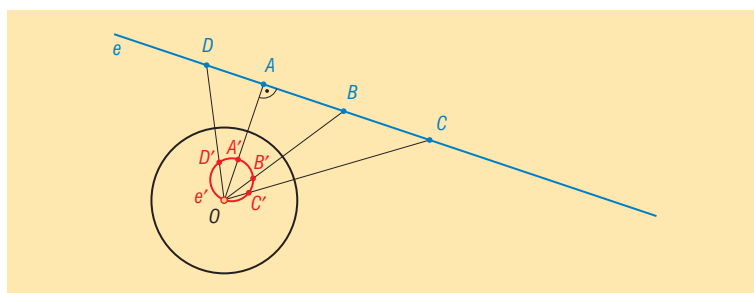
6.25. ábra A körre vonatkozó inverzió

A hétköznapi életből könnyedén találunk ilyen példát (görbe tükrözés). Nézz utána az interneten mit jelent az anamorfózis kifejezés.

A matematikában is értelmezünk ilyet, pl. ilyen a körre vonatkozó inverzió.

Definíció A **körre vonatkozó inverzió** olyan geometriai transzformáció, amelynél adott egy kör a középpontjával (O), és a kör síkjának minden P pontjához (kivéve O -t) úgy rendeljük hozzá a P' -t, hogy P' az OP félegyenesen legyen az O -tól olyan távolságra, hogy teljesüljön rá az $OP \cdot OP' = r^2$ összefüggés, ahol r a kör sugara.

Ennél a transzformációnál valóban nem lehet minden egyenes képe egyenes, hiszen ha veszünk egy olyan egyenest, amelynek minden pontja a körön kívül esik, akkor a képének minden pontja a körön belül kell, hogy essen, így valóban nem lehet egyenes.



6.26. ábra Egy egyenes, amelynek képe kör

Oldjuk meg!

1. Szerkesszük meg egy háromszögnek egy egyenesre vett merőleges vetületét! Mutassuk meg, hogy az így kapott szakasz nem lehet hosszabb a háromszög egyik oldalánál sem!
2. Adjunk meg olyan merőleges affinitást (tengelyével és arányával), amely az e tengelyű, $\lambda = -\frac{2}{3}$ arányú affinitással kapott képpontok mindegyikéhez az eredeti pontot rendeli hozzá! (Azaz: keressük meg az adott merőleges affinitás inverz transzformációját!)
3. Mutassuk meg, hogy a merőleges affinitás kölcsönösen egyértelmű geometriai transzformáció!
4. Igaz-e, hogy minden paralelogrammához található olyan merőleges affinitás, amelynél a paralelogramma képe négyzet lesz?
5. Milyen hozzárendelési szabálya van annak a függvénynek, amelynek a képét az $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x}$ függvény képéből
 - a) olyan merőleges affinitással kapjuk meg, melynek tengelye az x tengely és aránya 3;
 - b) olyan merőleges affinitással kapjuk meg, melynek tengelye az y tengely és aránya 3?



6. Milyen transzformációt kapunk két egyenlő arányú merőleges affinitás szorzataként, ha a két tengely merőleges egymásra?
7. Mutassuk meg, hogy helyes az alábbi szerkesztési eljárás! A feladat egy P pont adott körre vonatkozó inverz képének megszerkesztése.
 I. eset: Ha a P pont külső pontja a körnek, akkor szerkesszünk érintőt a P -n át a körhöz, majd az érintési pontból állítsunk merőlegest az OP félegyenésre! Ennek talppontja P . (O az adott kör középpontja.)
 II. eset: Ha a P belső pontja a körnek, akkor az OP félegyenésre állítsunk merőlegest P -ben, majd ennek a körrel vett valamelyik metszéspontjában szerkesszünk érintőt a körhöz! Ahol az metszi az OP félegyenest, ott lesz a P' pont. (Az adott kör pontjai fixpontok.)

7. Kerületi és középponti szögek (Kiegészítő anyag)

Ebben a leckében rendhagyó módon egyetlen probléma megoldását igyekszünk megtalálni, közben érdekes összefüggésekre bukkanunk.



1. példa Egy úszómedence vízfelszíne téglalap alakú. Hova üljön a parton az úszómester, hogy a medence szemközti oldalát a lehető legnagyobb szögben lássa?

Megoldás:

Ha mérések segítségével a gyakorlatban akarjuk megoldani a problémát, akkor hamar rájövünk a válaszra, amit úgy is ellenőrizhetünk, ha elmegyünk úszni. Az úszómester leggyakrabban a medence hosszabbik oldalának közepénél szokott tartózkodni. (Ez persze azzal is magyarázható, hogy ha mentenie kellene, akkor a medence legtávolabbi pontjáig mért távolság ebben az esetben a legkisebb. Ennek belátását az olvasóra bízuk.)

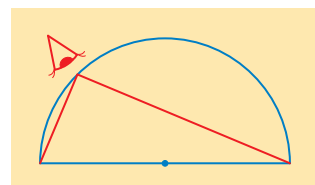
Ahhoz azonban, hogy matematikai eszközökkel meg tudjuk közelíteni ezt a feladatot, néhány kérdést még fel kell tennünk, és persze meg kell válaszolnunk. Próbálkozzunk a választ elősegítő „jó” kérdések megfogalmazásával!

Ilyenek lehetnek például:

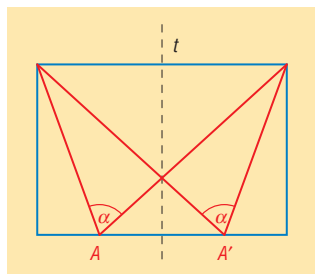
- Meg tudjuk-e keresni az úszómester partjának azt a pontját (azokat a pontjait), amely(ek)ből egy bizonyos szögben látszik a túlsó part?
- A part mely pontjaiból látszik ugyanolyan szögben a túlsó part?
- Mely pontokból látszik egyenlő szögben a túlsó part? (Nem feltétlenül csak a part pontjaiból.)
- Hogyan változik a látószög, miközben az úszómester sétál a parton?
- Lehet-e a rövidebb oldalon az a pont, ahonnan a szemközti oldal a legnagyobb szögben látszik?



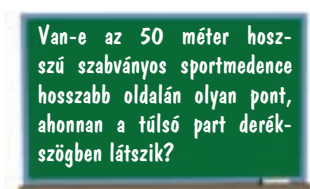
7.1. ábra Hova üljek?



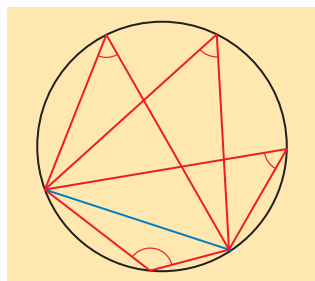
7.2. ábra Látószög



7.3. ábra A medence két pontja, ahonnan a túlsó part azonos szögben látszik



7.4. ábra Keressük meg a neten a szabványos sportmedence méreteit!



7.5. ábra Egy húrhoz tartozó kerületi szögek

Sorolhatnánk még további kérdéseket. Érdekes önállóan foglalkozni egy kicsit a kérdések megválaszolásával is. Itt most csak egy-két egyszerű választ adunk meg.

A második kérdésre például van egy olyan biztos válaszunk, hogy a szemközti oldalak közös felezőmerőlegesére vonatkozó szimmetria miatt a part bármelyik pontjából ugyanakkora szögben látszik a túlsó part, mint annak a tükörképéből. Így az oldalfelező pont kivételével mindegyik pontnak van egy párja, ahonnan ugyanakkora a látószög. Ezzel persze nem mondtuk azt, hogy csak pontosan két pont áll párban. De a méréseink alapján ezt sejtjük. Ennek alapján a negyedik kérdésre is egy sejtés fogalmazódik meg. Azt sejtjük (a mérések alapján), hogy ha az úszómester végigsétál a medence mellett, akkor egyre nagyobb szögben látja a túlsó partot egészen addig, amíg a part felezőpontjáig el nem jut. Onnan továbbsétálva pedig csökken a látószög.

Az első kérdésre is csak részben válaszolunk. Meg tudjuk keresni azokat a pontokat például, amelyekből derékszögben látszik a szemközti part, ha van ilyen pont egyáltalán. Hiszen tanultuk Thalész tételét, miszerint e pontok halmaza a túlsó partszakasz mint átmérő fölé emelt kör. Ha ennek a körnek van közös pontja az innenső parttal, akkor abból (vagy azokból) a pontokból derékszögben látszik a túlsó part. A parton tehát legfeljebb két ilyen pont lehet. Ha kicsit távolabb is elsétál az úszómester, akkor pedig végtelen sok: a körív minden pontja, amelyik arra a partoldalra esik. Ezzel közelebb kerültünk a harmadik kérdéshez is.

Az eddigiek alapján tehát természetesen vetődik föl a kérdés: Vajon teljesül-e más szögek esetén is, hogy azon pontok halmaza, amelyekből a túlsó partszakasz egyenlő szögben látszik, egy körív?

Minden eddig megfogalmazott részeredményünk összhangban lenne ezzel. (Az eddigiekből azonban korántsem következik ez az állítás.)

Vizsgáljuk meg először, teljesül-e, hogy egy körvonal minden pontjából ugyanakkora szögben látszik a kör egy húrja!

Először végezzünk itt is méréseket!

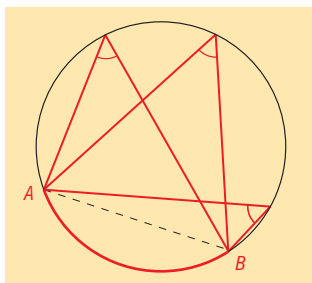
Láthatjuk, hogy ha a szakasz nem átmérő, akkor az egyik oldalán lévő körív pontjaiból hegyesszögben látszik a szakasz, míg a másik ív pontjaiból tompaszögben. A sejtésünket tehát finomítanunk kell.

A könnyebb tárgyalás érdekében vezessük be a kerületi szög fogalmát!

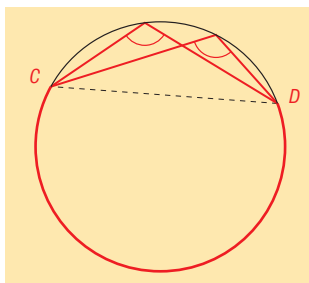


Definíció

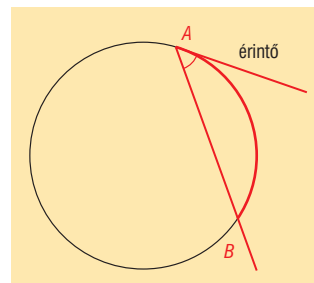
Kerületi szögnek nevezzük egy kör síkjában azt a szöget, amelynek a csúcsa a körvonalon van, szárai pedig tartalmazák a kör egy-egy húrját, vagy illeszkednek a kör egy érintőjére. Ha a kerületi szög valamely szára illeszkedik a kör egy érintőjére, akkor azt érintőszáru kerületi szögnek nevezzük.



7.6. ábra Néhány $\widehat{AB}$ ívhez tartozó kerületi szög



7.7. ábra Néhány $\widehat{CD}$ ívhez tartozó kerületi szög



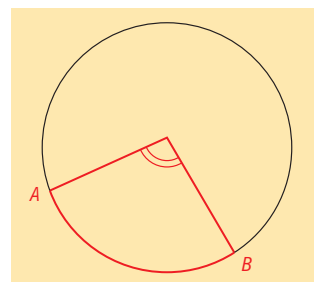
7.8. ábra Az $\widehat{AB}$ ívhez tartozó (egyik) érintőszárú kerületi szög (a másik a B csúcshoz)

Azt szoktuk mondani, hogy a kerületi szög ahhoz a körívhez tartozik, amelyiket a szárai kivágnak az adott körből, és amelyik a kerületi szög tartományában helyezkedik el. Egy körívhez végtelen sok kerületi szög tartozik. És az a sejtésünk, hogy ezek mind egyenlők.

Nyilvánvaló, hogy kerületi szögről csak egy adott kör esetében van értelme beszélni. Hasonló a középponti szög fogalma is, amellyel 9. osztályban ismerkedtünk meg. Emlékeztetőül felidézzük a definícióját.



Definíció Egy kör síkjában lévő szöget **középponti szögnek** nevezünk, ha a csúcsa a kör középpontja. (Szárjai tehát tartalmazzák a kör egy-egy sugarát.)

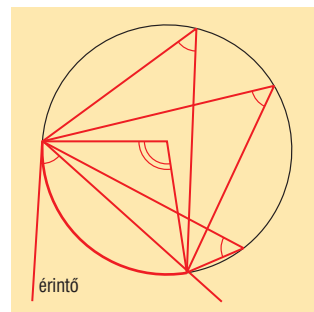


7.9. ábra Az $\widehat{AB}$ ívhez tartozó középponti szög

A középponti szögből viszont csak egy van. Ha tehát jogos a sejtésünk, és egy adott ívhez csupa egyenlő kerületi szög tartozik, akkor ezek mindegyikének ugyanolyan kapcsolatban kell állnia az egyetlen középponti szöggel. Végezzünk ismét néhány mérést!

Vegyünk fel egy kört és abban egy középponti szöget! Rajzoljunk be néhány kerületi szöget, amely ugyanahhoz az ívhez tartozik, mint a középponti szög! (7.10. ábra) Mérjük meg a középponti szög és a kerületi szögek nagyságát is! Eljárásunkat ismételjük meg másik középponti szöggel és ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögekkel!

Eddigi tapasztalataink alapján egyre valószínűbbnek látszik, hogy a sejtés helyes. Fogalmazzuk meg először a legutóbb fölfedezett összefüggést! Ez a **kerületi és középponti szögek tétele**.



7.10. ábra Ugyanazon ívhez tartozó középponti szög és kerületi szögek



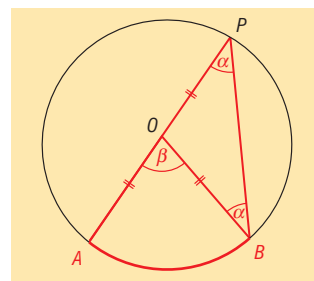
Tétel Egy kör egy ívéhez tartozó középponti szög nagysága kétszerese az ugyanezen ívhez tartozó kerületi szögeknek.

Bizonyítás:

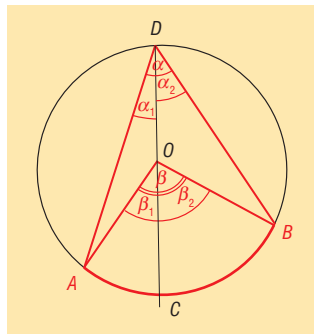
I. eset:

A kör középpontja illeszkedik a kerületi szög egyik száraira.

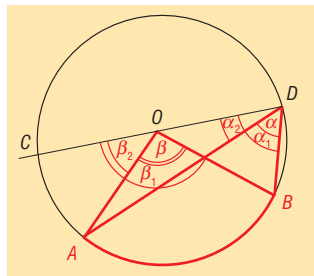
$OP = OB$ (a kör sugara), ezért az OPB háromszög egyenlő szárú. Az alapon fekvő szögei tehát egyenlők: $OPB\angle = OBP\angle = \alpha$. Ugyanakkor



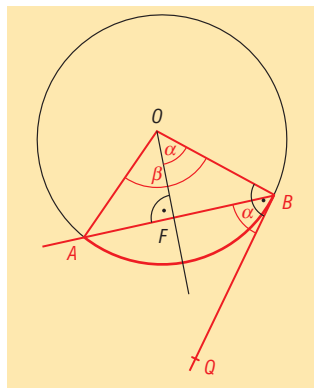
7.11. ábra $\beta = 2\alpha$



7.12. ábra $\beta_1 = 2\alpha_1$, $\beta_2 = 2\alpha_2$
 $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha$



7.13. ábra $\beta_1 = 2\alpha_1$, $\beta_2 = 2\alpha_2$
 $\beta = \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha$



7.14. ábra
 $\angle FOA = \angle BOQ$, $\beta = 2\alpha$

az $\angle AOB$ külső szöge az $\triangle OPB$ háromszögnek, nagysága így egyenlő az $\triangle OPB$ háromszög két nem mellette fekvő szögének összegével. $\angle AOB = 2\alpha$. Ebben az esetben tehát teljesül a tétel állítása.

II. eset:

A kör középpontja a kerületi szög tartományának (belső) pontja. Kössük össze a kerületi szög csúcsát és a kör középpontját egy egyenessel! Ennek a körvonallal vett (P -től különböző) metszéspontja legyen C ! A C pont két ívre bontja az $\widehat{AB}$ ívet. Az $\widehat{AC}$ ívhez tartozó $\angle APC$ kerületi szög ugyanolyan helyzetben van az $\angle AOC$ középponti szöghöz képest, mint az I. esetben szereplő szögek. Ugyanígy a $\widehat{CB}$ ívhez tartozó szögek. Ezekre a szögekre tehát egyenként teljesül a tétel állítása. $\beta_1 = 2\alpha_1$ és $\beta_2 = 2\alpha_2$. Így $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$.

Erre az esetre is igazoltuk az állítást.

III. eset:

A kör középpontja nem pontja a kerületi szög tartományának. Alkalmazzunk itt is az előzőhöz hasonló eljárást! Kössük össze a kerületi szög csúcsát és a kör középpontját egy egyenessel! A körvonallal való metszéspont legyen itt is C ! Ekkor kiegészítettük egy-egy szöggel a kerületi és a középponti szöget is olyanra, mint az első esetben szereplő. És a kiegészítő szögek is olyanok, így ismét alkalmazhatjuk az első eset eredményét. $\beta = \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha$.

IV. eset:

Az adott ívhez tartozó kerületi szög érintőszárú.

Most az AB szakaszt és annak felezőmerőlegesét húzzuk meg! (Az AB szakasz felezőpontja legyen F !) Az $\angle FOB$ és az $\angle ABQ$ szög merőleges szárú hegyesszögek. (Legalábbis az ábrán hegyesszögek.) Így nagyságuk egyenlő. De OF éppen felezi az $\angle AOB$ középponti szöget, így ebben az esetben is teljesül az állítás.

Tehát nem volt véletlen, hogy mindig kétszer akkorának mértük a középponti szöget, mint az ugyanazon ívhez tartozó kerületi szöget.

A tételből közvetlenül következik, hogy ha az egy adott körívhez tartozó minden kerületi szög fele az ugyanezen ívhez tartozó középponti szögnek, akkor ezeknek a kerületi szögeknek egymással mind egyenlőnek kell lenniük.



Tétel Egy körben egy adott körívhez tartozó kerületi szögek nagysága egyenlő.

Ez a kerületi szögek tétele.

Egy másik közvetlen következmény az az állítás is, hogy egy körben az egyenlő nagyságú ívekhez tartozó minden kerületi szög egymással.



2. példa Állapítsuk meg, mekkora szögben látszanak a szabályos kilencszög oldalai az egyik csúcsából!

Megoldás:

Ezt természetesen ki tudnánk számolni korábbi ismereteinkre támaszkodva is. Most azonban használjuk inkább a kerületi szögek tételét! A szabályos kilencszög csúcsai a kilencszög köré írt kört kilenc egyenlő ívre bontják. Az ezekhez tartozó kerületi szögek tehát mind egyenlők. (Köztük szerepel két érintőszárú kerületi szög is.) Mivel a kilenc egyenlő szög összege az egyenesszög, egy-egy ilyen szög nagysága 20° .



Eleget tudunk-e már az első példa megoldásához? Tudjuk, hogy egy körív minden pontjából ugyanakkora szögben látszik a túlsó part, de nem tudjuk még, hogy két különböző körív esetén lehet-e ugyanakkora a látószög.

Vizsgáljuk meg egy adott kör belső pontjait! Mekkora szögben látszik a körív (illetve a húr) ezekből a pontokból? Hosszabbítsuk meg az AC szögszárát a körvonalig (P pont)! Legyen az $APB\angle = \alpha$! Az $ACB\angle$ -et vizsgáljuk, ez pedig külső szöge a PCB háromszögnek, így nagysága egyenlő a PCB háromszög P -nél és B -nél lévő szögének összegével. Tehát az $ACB\angle$ a B -nél lévő szöggel nagyobb α -nál.

Nézzük most a körön kívül eső pontokat! Az AD szakasz P -ben metszi a körívet. $APB\angle = \alpha$, és ez külső szöge a DPB háromszögnek. Tehát a D -nél lévő szög pedig kisebb α -nál.

Azt kaptuk tehát, hogy az AB szakasz csak a körív pontjaiból látszik ugyanakkora szögben. Annyival viszont ki kell egészítenünk eddigi gondolatainkat, hogy az AB szakaszt tartalmazó egyenesre szimmetrikusan két jó körív is létezik.

Ezzel a tétel megfordítását bizonyítottuk.



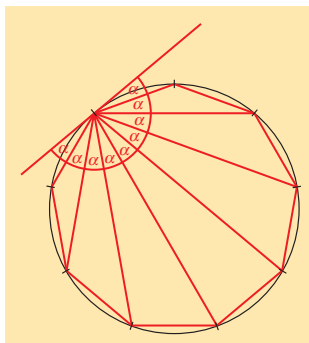
Tétel Ha egy szakasz egy pontból α szögben látszik, akkor az a pont két körív valamelyikén helyezkedik el, az ún. **látószögeköríveken**.

Előző két tételünket egyben is meg tudjuk fogalmazni.

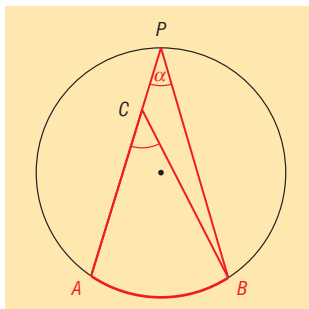


Tétel Egy szakasz akkor és csak akkor látszik egy pontból α szögben, ha az a pont két körív valamelyikén helyezkedik el, a látószögeköríveken.

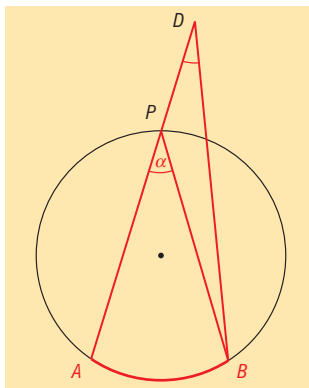
Most már minden kétséget kizáróan meg tudjuk oldani az első példát.



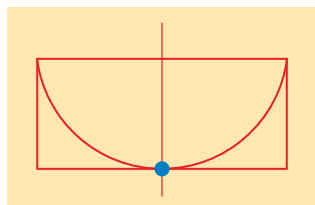
7.15. ábra Kilenc egybevágó ív, kilenc egyenlő kerületi szög. $\alpha = 20^\circ$



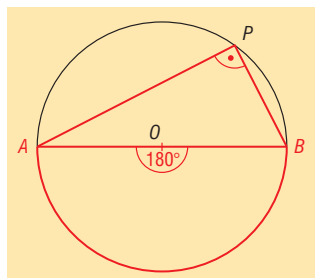
7.16. ábra A kör belső pontjaiból nagyobb szögben látszik az $\widehat{AB}$ ív, mint a körvonal pontjaiból



7.17. ábra A kör külső pontjaiból kisebb szögben látszik az $\widehat{AB}$ ív, mint a körvonal pontjaiból



7.18. ábra Az úszómester a part felezőpontjából látja a legnagyobb szögben a tulsó partot



7.19. ábra A félkörívhez tartozó kerületi szög 90° (Thalész-tétel)

Ha egy körív – amelynek húrja a téglalap egyik oldala – metszi a szemközti oldalt, akkor a két metszéspont közötti szakasz minden pontjából nagyobb szögben látszik a tulsó part, mint a körív pontjaiból. Tehát nem szabad, hogy messe a körív az innenső partot. A körnek és a téglalapnak viszont kell, hogy legyen egy közös pontja, tehát a kör csak érintheti a téglalapot, hogy a maximális szöget találjuk meg. Ez az érintési pont pedig valóban az innenső part felezőpontja lesz.



Vegyük észre, hogy egy félkörívhez tartozó középponti szög éppen 180° -os, így a kerületi szög (a kerületi és középponti szögek tétele alapján) 90° -os. Vagyis speciális esetként megkaptuk a Thalész-tételt. Ha pedig egy pontból 90° -os szögben látszik egy szakasz, akkor az a pont két olyan körív valamelyikén helyezkedik el, amelyekhez tartozó középponti szög 180° , tehát éppen két egymást teljes körre kiegészítő félkörívről van szó. Ez pedig azt jelenti, hogy a tétel megfordítása speciális esetként tartalmazza a Thalész-tétel megfordítását.



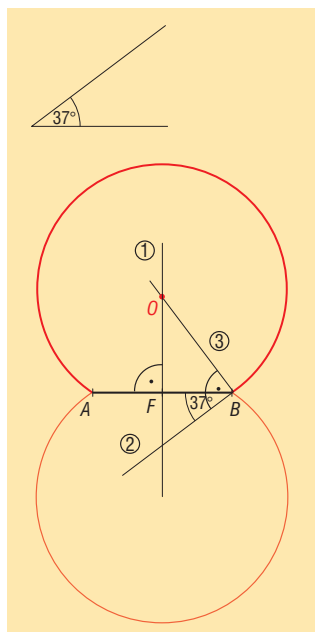
3. példa Szerkesszük meg egy adott szakasz 37° -os látószögmérőjét! (A 37° -os szög felvételéhez használjunk szögmérőt!)

Megoldás:

Nézzük meg azt az ábrát, amelynek a segítségével az érintőszárú kerületi szögről igazoltuk, hogy fele a hozzá tartozó középponti szögnek. (7.20. ábra) Ha a kör középpontját meg tudjuk szerkeszteni, akkor készen vagyunk, hiszen a körvonal egy-egy pontja adott.

A kör középpontja egyrészt rajta van az adott szakasz felezőmerőleges egyenesén, másrészt rajta van azon az egyenesen, amelyik az érintőszárú kerületi szög érintőszárára az érintési pontban merőleges. Ezek metszéspontja tehát a kör középpontja.

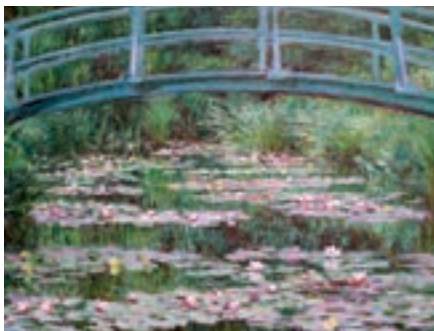
A szerkesztéshez föl kell vennünk egy 37° -os szöget, amelynek a csúcsa az adott szakasz egyik végpontja, egyik szára pedig tartalmazza az adott szakaszt. A többi lépés az imént leírtak szerint hajtandó végre.



7.20. ábra Látószögmérő szerkesztése

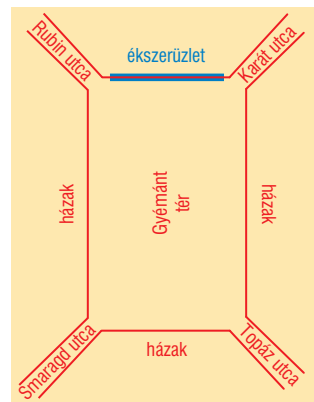
Oldjuk meg!

1. Vegyünk fel egy 3 cm sugarú körben egy 80° -os középponti szöget! Szerkesszünk néhány kerületi szöget ahhoz az ívhez, amelyet a 80° -os szög szárai metszenek ki a körből! Legyen a kerületi szögek között érintőszárú is!
2. Hány fokos kerületi szög tartozik ahhoz a körívhez, amelyhez
a) 48° -os, b) 70° -os, c) 120° -os, d) 180° -os, e) 270° -os, f) 139° -os középponti szög tartozik?
3. Szerkesszünk egy adott szakaszhoz
a) 60° -os, b) 23° -os, c) 90° -os, d) 108° -os látószögművet!
4. Az ABC háromszögben az A csúcsnál 73° -os szög van. A háromszög körülírt körének középpontja K . Határozzuk meg, mekkora a $BKC\angle$!
5. Claude Monet francia festő (1840–1926) mintegy hatvan képet készített vízililiumokról. Ezek közül néhány kivételesen nagy méretű festményt a párizsi Musée de l'Orangerie-ben állítanak ki 1927 óta. (Különös körülményekkel kellett megoldani a múzeum renoválását, megújítását, mivel a képeket – méretük miatt – nem tudták a helyszínről elszállítani.)
Az egyik ilyen képe $200\text{ cm} \times 1275\text{ cm}$, vagyis kis híján 13 méter széles. (A fal valamelyest görbül a kép alatt, de ez itt most elhanyagolható.) A képpel párhuzamosan a terem közepén elhelyeztek néhány padot egymás mellett. Szerkesszük meg, hogy a padokon ülve melyik lehet az a pont, ahonnan a legnagyobb szögben látszik a festmény? (Mi lehet a festmény címe?)



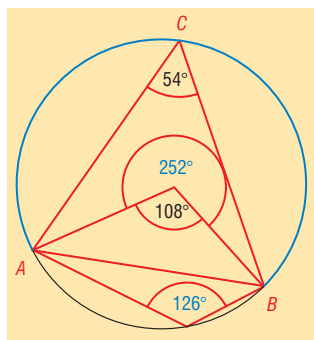
7.21. ábra Claude Monet egyik vízililiumos képe

6. Keressük meg, hol található Munkácsy Mihály Honfoglalás című képének eredeti színvázlata! Az adott helyen mekkora a lehető legnagyobb szög, amiből a képet láthatjuk?
7. Hova szereljük fel a házfalra a térfigyelő kamerát, ha azt szeretnénk, hogy az ékszerüzlet kirakatát a lehető legnagyobb szögben lássa? (7.22. ábra)

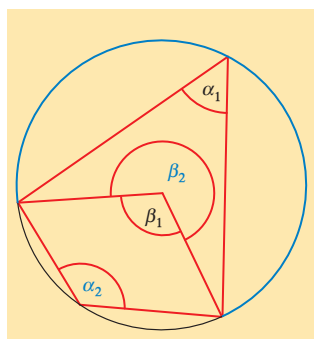


7.22. ábra 7. feladat

8. Húrnégyszögek, alkalmazások (Kiegészítő anyag)



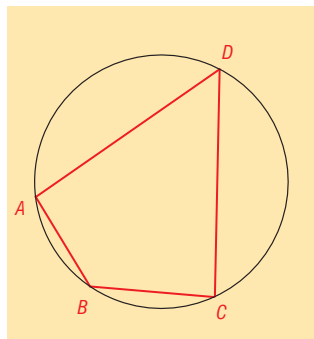
8.1. ábra 1. példa



8.2. ábra

$$\beta_1 + \beta_2 = 360^\circ$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2} = 180^\circ$$



8.3. ábra Húrnégyszög

1. példa Egy kör AB húrja a nagyobbik $\widehat{AB}$ körív pontjaiból 54° -os szögben látszik. Hány fokos szögben látszik ugyanez a húr a kisebbik $\widehat{AB}$ ív pontjaiból?

Megoldás:

Az előző leckében már érintettük ezt a problémát. Ott egy méréssel azt állapítottuk meg, hogy az egyik körívből hegyesszögben látszik a húr, a másik körív pontjaiból tompaszögben.

Alkalmazzuk most a kerületi és középponti szögek tételét! Az 54° -os kerületi szöghöz tartozó középponti szög 108° -os. Ezt egy $360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$ -os szög egészíti ki teljes szöggé. Ez a 252° -os szög éppen a nagyobbik $\widehat{AB}$ ívhez tartozó középponti szög, vagyis a konkáv $AOB\angle$. Az ehhez tartozó kerületi szöget keressük, amely pedig fele ennek a középponti szögnek. A kisebbik $\widehat{AB}$ ív pontjaiból tehát $252^\circ : 2 = 126^\circ$ -os szögben látszik az AB húr.



Vegyük észre az általánosítás kézenfekvő lehetőségét!

Két egymást teljes körre kiegészítő ívhez tartozó középponti szög összege 360° . Így az ugyanezen ívekhez tartozó kerületi szögek (mindkettő a középponti szögek nagyságának fele) összege is fele a 360° -nak, azaz 180° . Tehát nyilván az a mérésünk sem volt véletlen, hogy a körvonal ugyanazon húrját a körívnek a húr egyik oldalára eső ívéből hegyesszögben, a másik oldali ívből tompaszögben látjuk. (Feltéve, hogy a húr nem átmérő.)

A most bizonyított tételt másképpen is meg lehet fogalmazni. Ehhez elevenítsük fel a húrnégyszögek általános iskolából már ismert fogalmát!

Definíció Az olyan négyszöget nevezzük **húrnégyszögnek**, amelyhez létezik olyan kör, amelyre a négyszögnek mind a négy csúcsa illeszkedik.

Azért nevezzük húrnégyszögnek, mert minden oldala ennek a körülírt körnek a húrja.



Tétel A húrnégyszög szemközti szögeinek összege 180° .



2. példa Egy húrnégyszög két szöge 65° és 102° .

- Mutassuk meg, hogy a két adott szög a húrnégyszög valamely két szomszédos szöge!
- Számítsuk ki a másik két szög nagyságát!

Megoldás:

- A húrnégyszög szemközti szögei 180° -ra egészítik ki egymást, így a két megadott szög nem lehet szemközti, mivel nem 180° az összegük.
- A 65° -os szöggel szemközt $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ -os szög áll, a 102° -ossal szemközt pedig $180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$ -os.



Bizonyítsuk be, hogy ennek a tételnek a megfordítása is igaz!



Tétel Ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180° , akkor az húrnégyszög.

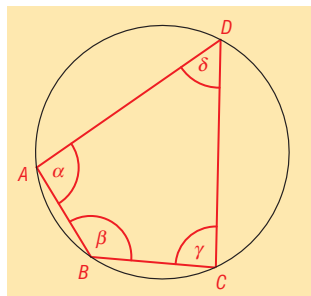
Bizonyítás:

Indirekt módon próbálkozunk a bizonyítással (mint oly gyakran a tételek megfordításánál). Közben használjuk fel a húrnégyszögek tételét és a látószögekörívnél tárgyalatakat!

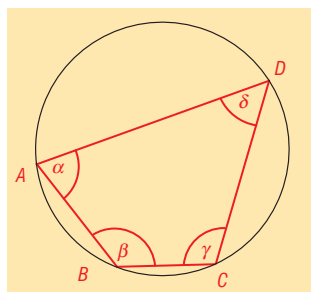
Tegyük fel, hogy van egy négyszög, amelyben a szemközti szögek összege 180° , mégsem húrnégyszög. Biztosan van három csúcsa, amely nem esik egy egyenesbe (legyenek ezek az A , B és C csúcsok), ezek köré pedig pontosan egy kört tudunk írni. A feltevésünk szerint a negyedik csúcs (D) nem illeszkedik erre a körre. A D csúcsnak mindenképp az AC átlónak B -től különböző oldalára kell esnie, különben D -nél konkáv szög lenne, amit már nem lehet 180° -ra kiegészíteni.

Ha a D pont belül van a körön, akkor D -ből nagyobb szögben látszik az AC húr, mint a B -t nem tartalmazó körív pontjaiból. Márpedig ezen pontok mindegyikéből $180^\circ - \beta$ szögben látszik az AC húr, ha a B pontból β szögben. Tehát a D pont nem lehet a körön belül, mert akkor nem lenne a szemközti szögek összege 180° .

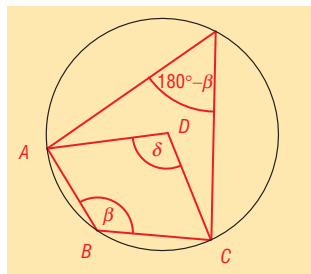
Így csak a körön kívül lehetne, de ebben az esetben ugyanígy adódik, hogy D -ből $180^\circ - \beta$ -nál kisebb szögben látszana az AC átló. Így azt kaptuk, hogy a D pont sehol sem lehet: sem a körön, sem a körön belül, sem a körön kívül. Ez az ellentmondás jelenti az indirekt feltevésünk hamis voltát. Tehát az eredeti állítás igaz.



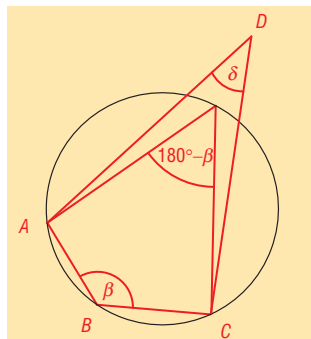
8.4. ábra Ha $ABCD$ húrnégyszög, akkor $\alpha + \gamma = 180^\circ$ (és $\beta + \delta = 180^\circ$)



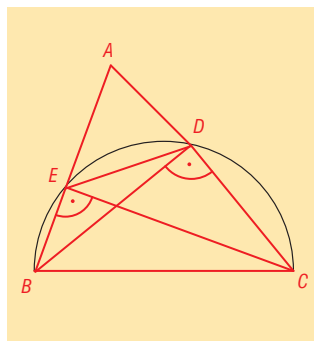
8.5. ábra Ha $\alpha + \gamma = 180^\circ$, akkor $ABCD$ húrnégyszög



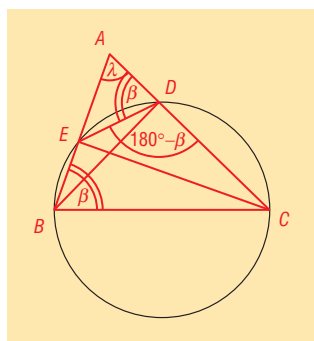
8.6. ábra $\delta > 180^\circ - \gamma$ lenne, de az nem lehet



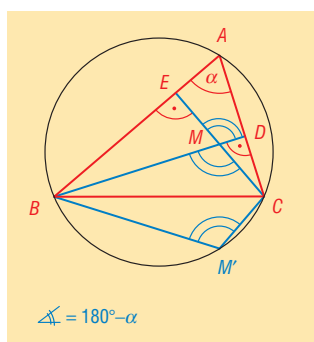
8.7. ábra $\delta < 180^\circ - \gamma$ lenne, de az sem lehet



8.8. ábra BCDE húrnégyszög



8.9. ábra Keressük meg a hasonló háromszögeket



8.10. ábra A magasságpont tükörképe a körülírt körre illeszkedik

3. példa Bizonyítsuk be, hogy egy hegyesszögű háromszög két magasságvonalának a talppontja és a háromszög harmadik csúcsa által alkotott háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz!

Megoldás:

Használjuk az ábra jelöléseit! (8.8. ábra) Azt szeretnénk tehát bizonyítani, hogy $AED \sim ABC$.

Ehhez elegendő például azt megmutatnunk, hogy a szögeik páronként egyenlők. Mivel a BEC és a BDC is derékszög, ezért a Thalész-tétel megfordítása szerint rajta vannak a BC átmérőjű körön. Vagyis a $BCDE$ négyszög húrnégyszög. A húrnégyszögek tétele alapján pedig tudjuk, hogy szemközti szögek összege 180° . Tehát ha a B csúcsnál lévő szög β , akkor $EDC = 180^\circ - \beta$. Ennek mellékszöge az EDA , így $EDA = \beta$.

Az ADE háromszögnek van A -nál egy közös szöge az ABC háromszöggel (α), és van még egy egyenlő nagyságú szögük (β), tehát a két háromszög valóban hasonló.

Gyakorlásképpen bizonyítsuk be, hogy az AED háromszög és az ABC háromszög akkor is hasonló egymáshoz, ha az A vagy a B csúcsnál tompaszög van. (A D és az E pont rendre az m_b és az m_c magasságvonal talppontja.)

4. példa Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontjának a háromszög bármelyik oldalegyenesére vonatkozó tükörképe a háromszög körülírt körére illeszkedik!

Megoldás:

Használjuk a 8.10. ábra jelöléseit! Az $AEMD$ négyszög két szemközti szöge derékszög, ezért a másik két szög összege is 180° . (Tehát az $AEMD$ négyszög húrnégyszög, de ezt itt a továbbiakban nem használjuk ki.) Így $EMD = 180^\circ - \alpha$. Ennek csúcsszöge a BMC , így az is $180^\circ - \alpha$ nagyságú. A tengelyes tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt a $BM'C$ is ugyanekkora, tehát az $ABM'C$ négyszög két szemközti szögének összege 180° . Ezért a húrnégyszögek tételének megfordítása szerint az $ABM'C$ négyszög húrnégyszög, vagyis van olyan kör, amelyikre a négyszögnek mind a négy csúcsa illeszkedik. Ez viszont csak a háromszög körülírt köre lehet, hiszen azt már egyértelműen meghatározza az A , B és C csúcs.

Ezzel igazoltuk, hogy a magasságpontnak a BC oldalra vonatkozó tükörképe a körülírt körre illeszkedik. Mivel a BC oldal semmilyen speciális tulajdonságát nem használtuk fel, ezért a bizonyítás nyilván mindegyik oldalra érvényes.

Azt érdemes meggondolni, hogy derékszögű és tompaszögű háromszögben is alkalmazható-e az előzőekben mutatott bizonyítás minden lépése. Ezt már az olvasóra bízunk.

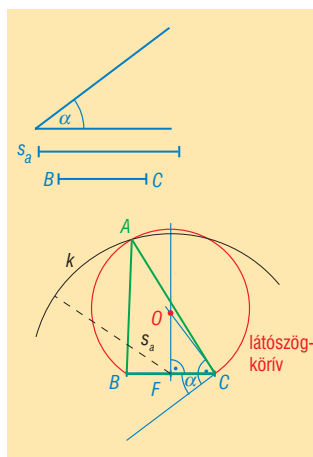


5. példa Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldalának és az ehhez tartozó súlyvonalának a hossza, valamint az adott oldallal szemközti szöge!

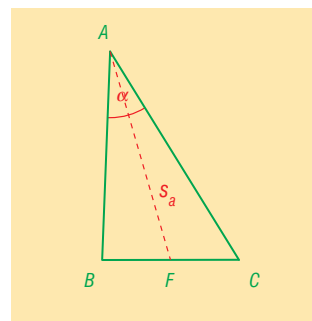
Megoldás:

Vegyük fel a megadott oldalt, legyen ez a BC ! A háromszög A csúcsát keressük. Ez egyrészt súlyvonalnyi távolságra van a BC oldalfelező pontjától (F -től), tehát illeszkedik az F középpontú s_a sugarú körre (k). Másrészt illeszkedik a BC szakasz α szögű látószögműköreinek valamelyikére. A k kör és a látószögműkörvek metszéspontja lesz az A csúcs.

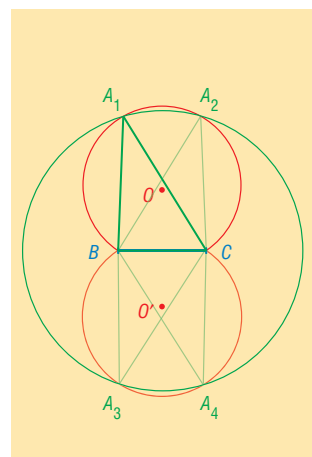
Mivel az ábra a BC oldal egyenesére is, és annak felezőmerőlegesére is szimmetrikus, ezért négy egybevágó háromszöget kaphatunk, ha a k kör metszi a látószögműkörveket.



8.12. ábra Az A pont szerkesztése



8.11. ábra 5. példa vázlatrajza



8.13. ábra A megoldás: négy egybevágó háromszög



Oldjuk meg!

1. Keressünk a speciális négyszögek között olyanokat, amelyek nem húrnégyszögek!
2. Rajzoljuk meg egy hegyesszögű háromszög mindhárom magasságvonalát! Keressünk minél több húrnégyszöget az elkészített ábrán!
Ismételjük meg a keresést tompaszögű háromszög esetén is!
3. Mutassuk meg, hogy ha egy húrnégyszögnek az egyik csúcsánál derékszöge van, akkor az ezzel szomszédos csúcsokból kiinduló szögfelezők vagy párhuzamosak vagy egy egyenesbe esnek!
4. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontjának bármelyik oldalfelező pontra vett tükörképe a háromszög körülírt körére illeszkedik!
5. Húzzunk érintőt és szelőt egy adott körhöz egy külső P ponton át! Az érintési pont legyen E , a szelőnek a metszéspontjai a körrel legyenek A és B ! (A P -hez közelebbi legyen A , a távolabbi legyen B !) Mutassuk meg, hogy $PEA \sim PBE$! (Ötlet: keressünk egyenlő nagyságú kerületi szögeket!)



Hasonlóság és alkalmazásai

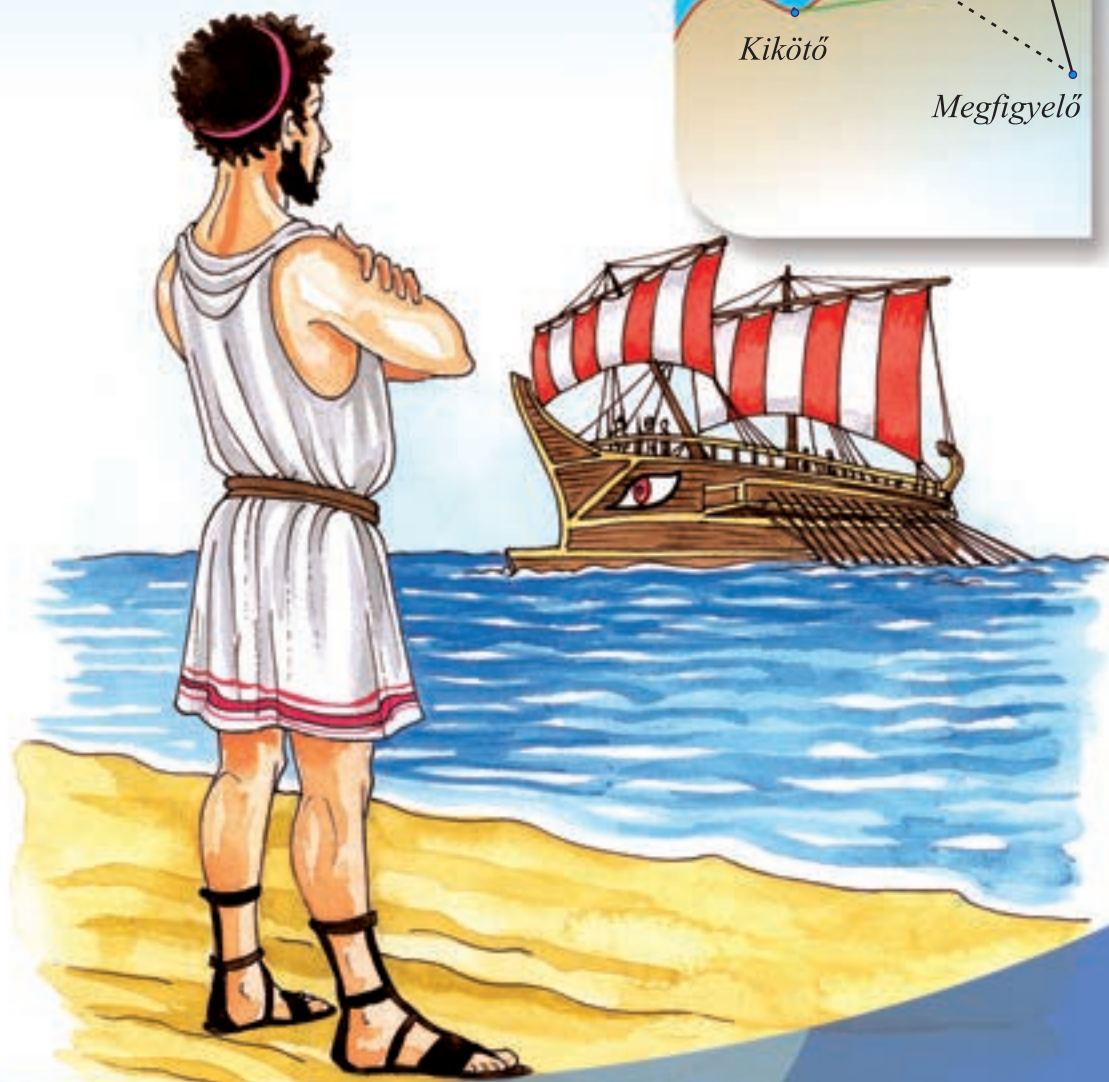
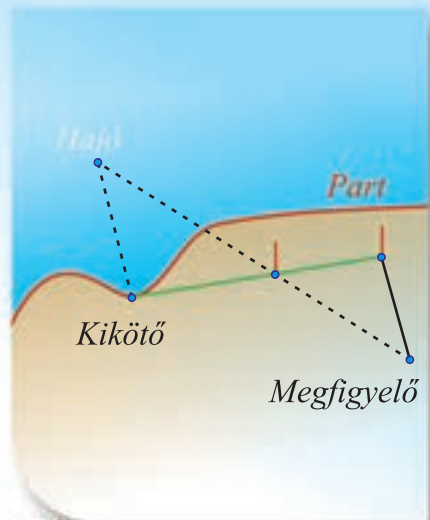
6. Az előző feladat felhasználásával mutassuk meg, hogy egy külső pontból a körhöz húzott szelő szeletei hosszának mértani közepe az érintő szakasz hossza! (Az előző feladat jelöléseivel: $PE = \sqrt{PA \cdot PB}$.)
7. Az előző feladatok alapján mutassuk meg, hogy egy külső pontból a körhöz húzott szelők szeletei hosszának szorzata állandó!
8. Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldalának és az ehhez tartozó magasságának a hossza, valamint az adott oldallal szemközti szöge!
9. Mutassuk meg, hogy a háromszög C csúcsából induló szögfelezője felezi a háromszög körülírt körének C -re nem illeszkedő $\widehat{AB}$ ívét!



8.14. ábra Most már értjük a geometriát!

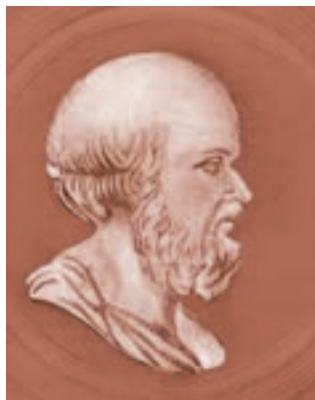
IV. fejezet

Trigonometria



Milyen távol van?

1. Távolságok meghatározása arányokkal



1.1. ábra Eratoszthenész



Eratoszthenész (görögül Ἐρατοσθένης) (Küréné, Kr. e. 276 – Alexandria, Kr. e. 194) hellenisztikus matematikus, földrajztudós, csillagász, filozófus, költő, zenész. Irigyei eleinte Bétának hívták, arra utalva, hogy sok mindennel foglalkozik ugyan, de mindenben csak a második legjobb tud lenni (a görög ábécében a béta a második betű). Később tisztelői inkább az öttusázó atlétát jelentő Pentatlosz ragadványneven emlegették sokoldalúságáért. A mai Líbia területén található Kürénében született, de tanulmányait már Alexandriában kezdte meg, főként a nagy könyvtár akkori igazgatója, Kallimakhosz költő irányításával. Húszéves korától tíz évig Athénban képezte magát tovább, ahol a sztoikus khioszi Arisztón, a szkeptikus Arkeszilaosz, a festő Apellész és Bion, a szellemes író voltak mesterei. Kr. e. 246-ban III. Ptolemaiosz Euergetész, Alexandria királya hazahívta, és Kallimakhosz utódként megbízta a könyvtár vezetésével, majd ötvenéves korában rábízta a trónörökös nevelését is. Itt barátkozott össze Arkhimédésszel, akivel később is levelezett: Arkhimédész hozzá írta a *Módszer* néven híressé vált levelét. Öregkorában megvakult, és e fölött érzett elkeseredésében halálra éhezettette magát. Műveiből csak töredékeket és kivonatokat ismerünk.

Hatékony módszert talált a prímszámok kiválogatására nem túl nagy sokaságokból; ezt a módszert róla nevezték el Eratoszthenész szitájának.

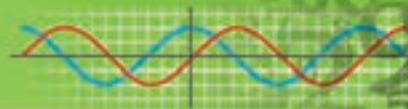
Ő volt az első görög tudós, aki mai értelemben is világtérképnek nevezhető térképet (1.2. ábra) készített Alexandriában.



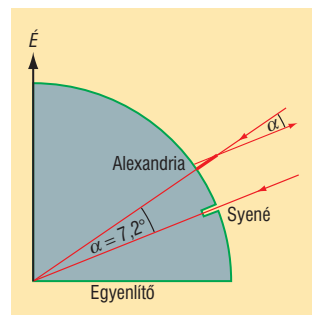
1.3. ábra Pentatlon: birkózás, stadionfutás, távolugrás, gerelyhajítás, diszkoszvetés



1.2. ábra Eratoszthenész világtérképe



Eratoszthenész hírességét nem csak ez a térkép alapozta meg. Ő volt az első, aki a gömb alakú Föld kerületét és sugarát meghatározta. Úgy érvelt, hogy mivel a Föld gömbölyű, a Nap sugarai (párhuzamos egyenesek) segítségével kiszámítható a Föld kerülete. Eratoszthenész vagy valamelyik tanítványa Syenébe (a mai Asszuán közelébe) utazott, ott talált egy pontot, ahol a nyári napfordulón, pontosan délben éppen a fejük fölött állt a Nap. Ez az a pillanat, amikor a Nap eléri az év során befutott pályája legészakibb pontját. Ekkor egy függőlegesen tartott pálca ott nem vet árnyékot. Pontosan ugyanebben a pillanatban Alexandriában, Egyiptom legészakibb városában, ahol Eratoszthenész a nagy könyvtár vezető könyvtárosa volt, szintén megmérték egy másik pálca által vetett árnyék szögét. Az eredmény $7^{\circ}12'$ volt. (1.4. ábra)



1.4. ábra Eratoszthenészi mérés

A Földet gömb alakúnak feltételezve, aránypárt állított fel a távolságok és a szögek alapján:

a két város távolsága : Föld kerülete = mért szög : 360° .

Eratoszthenész az utazók elbeszélései alapján 5000 sztadionra becsülte a két város távolságát. Ezek alapján a Föld kerülete:

$$(5000 \times 360) : 7,2 = 250\,000 \text{ sztadion.}$$

Sztadionnak nevezett hosszsmértékből több is volt, és nem tudjuk, hogy Eratoszthenész melyiket használta. Ha a 192,28 méteres olümpiai sztadiont, akkor a Föld kerülete ezzel a számítással mintegy 48 070 km, a valós értéknél úgy 19%-kal több – ha viszont a mindössze 157 méteres egyiptomi sztadiont használta, akkor eredménye 39 250 km, ami a ténylegesnél mindössze 2%-kal kevesebb. Méréseinek számos hibája volt (a szögmérés, a két város távolsága és az, hogy a két város nem pontosan azonos délkörön fekszik), ezek azonban szerencséjére kiejtették egymást. A mérés meglehetősen pontosnak mondható, ha arra gondolunk, hogy a férfi, aki elvégezte, csupán két pálcára és egy térképmérő kerékre, az ún. hodométerre (1.6. ábra) támaszkodhatott a két ókori egyiptomi városban.



1.5. ábra Olümpia – Sztadion

A fentiekből látszik, hogy Eratoszthenész olyan távolságot határozott meg, amelyet közvetlenül nem tudtak megmérni.

Az automatákhoz kell sorolnunk **Hérón hodométerét** (útmérő), amely lényegében a mai taxaméter őse, csak éppen nem a fizetendő összeget mutatja, hanem a megtett utat. A hodométer a kocsni négy keréke mellé szerelt doboz, amelynek legalsó fogaskerekét a kocsikerekekre erősített rúd fordítja el minden kerékforduláskor. A hodométer négyszeres fogaskerek-áttétellel működik, a legfelső számlálólap a végeredményt, vagyis a megtett római mérföldek vagy sztadionok számát jegyzi. Vitruvius a legfelső számlálólapra körben lyukakat vágott, mindegyik lyukba golyót helyezett, s amint a lap fordult, a golyó leesett a lap alá helyezett csövön át a készülék aljában levő fémdobozba. Az út végén a leesett golyók számából is megállapíthatták a megtett út hosszát. (Révai József: *A százarcú ókor*) Másfél évezred múlva, amikor ismét elkezdtek foglalkozni a gömbölyű Föld eszméjével, annak méretét Eratoszthenésznél jóval pontatlanabban, többnyire jelentősen kisebbnek becsülték – egyebek közt Kolumbusz is ebben a hitben vágott neki első útjának.



1.6. ábra Hodométer



1.7. ábra Kőből készült mérőrudak és derékszög Deir el Medinából, és fából készült építésírányító eszközök és függők (Luxor Múzeum)



1.8. ábra Egyiptomi piramisok

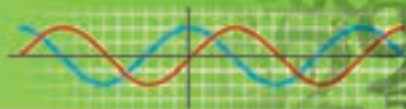
Bizonyos távolságok, magasságok kijelölése, meghatározása minden korban fontos feladat volt. Már az ókorban külön foglalkozássá vált a földmérés. Az alsó- és felső-egyiptomi királyság egyesülése idejében (kb. Kr. e. 3200) hamar kialakult a fejlett államigazgatás. Tudni kellett a parcellák pontos helyét és határait, mert a föld és a termés volt az adózás alapja. Abban az időben a Nílus minden évben kiáradt, és iszap borította el a földeket. Ezért az ókori földmérőknek a földrészleteket minden évben újra ki kellett tűzniük. Ezt a munkát a harpedonaptok végezték, akik földmérők és Amon isten papjai voltak. Kövekkel (sztélék) jelölték meg a városok és földbirtokok határait, a kövek közötti távolságokat a királyi hivatalokban tartották nyilván. A nagy építkezések megkezdése előtt az építési főirányt (1.7. ábra) a papság földmérői tűzték ki, azonban ez csak akkor vált hivatalossá, amikor ünnepélyes keretek között maga a fáraó (a legfőbb földmérő) is elvégezte a rituális kitűzést. A nagy építkezések egyike (1.8. ábra), a Kheopsz-piramis (kb. Kr. e. 2600) építése volt, amelynek oldalait 1-5' hibával a négy égtáj felé tájolták. A piramis egy-egy oldala 230 méter, magassága 147 méter volt. (Szűcs László főiskolai adjunktus: *Földmérés és térképezés az ókori Egyiptomban, Szent István Egyetem Ybl Miklós Műszaki Főiskolai Kar*)

Az építészet, a kereskedelem, a hajózás és a hadászat egyre pontosabb távolság- és helymeghatározási módszereket kívánt, és kíván ma is.

Az információ-, az űr- és számítógép-tudomány fejlődésével a hagyományos földméréstan megváltozott. A földmérés és geodézia mint a legősibb geometriai tudomány napjainkra az információ tudományává fejlődött. A geomatika megjelenése a földmérés és geodézia integrációját jelenti a fotogrammetriával és távérzékeléssel, kartográfiával, a GIS/LIS-sel és a multimédiás kommunikációval. A geomatika minden olyan tudományterületet magában foglal, amely a térbeli adatok és térbeli információk függvénye, mint például a környezetvédelem, a tervezés, a mezőgazdaság, az építőmérnöki alkalmazások, a navigáció, a geodézia, a geofizika, az óceánkutatás, a földrendezés, a turizmus.

A geodéziában megkülönböztetnek vízszintes és magassági szög-mérést, mindkettő elvégzésének az eszköze a teodolit (1.9. ábra, 1.10. ábra), a szintezőműszer mellett a legáltalánosabban használt geodéziai mérőműszer.

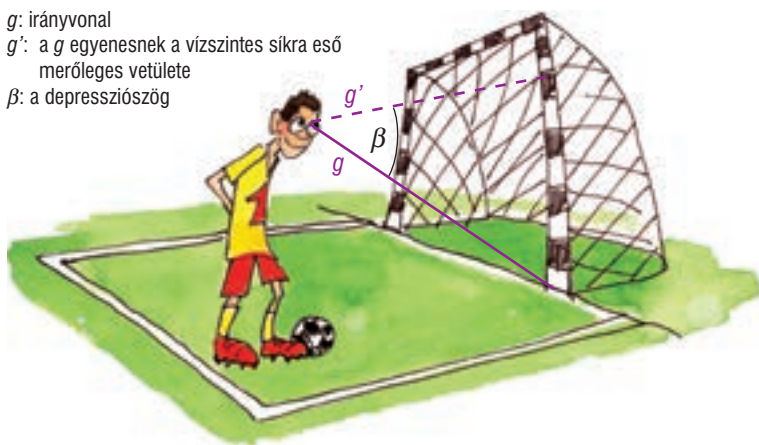
A vízszinteshez képest általában lefelé vagy felfelé látjuk a tárgyat. Ha „lefelé nézünk”, akkor az iránynak a vízszintes síkkal bezárt (lefelé irányuló) szögét **depressziószögnek** mondjuk. **Emelkedési szögnek** hívjuk a vízszintes síkkal bezárt, „felfelé irányuló” szöget. Mind az emelkedési, mind a depressziószög nagysága a $[0^\circ; 90^\circ]$ intervallumba esik. Például a 11-es vonalán álló játékos a kapufa jobb felső sarkát emelkedési, jobb alsó sarkát depressziószögben látja. (1.11. ábra). (A földméréstanban egy tetszőleges iránynak a függőleges síkban a vízszintes iránnyal bezárt előjeles szögét nevezik **magassági szögnek**.)



f : irányvonal
 f' : az f egyenesnek a vízszintes síkra eső merőleges vetülete
 α : az emelkedési szög



g : irányvonal
 g' : a g egyenesnek a vízszintes síkra eső merőleges vetülete
 β : a depressziószög



1.11. ábra Emelkedési (eleváció-) szög és depresszió- (lehajlási) szög



1. példa Egy kikötő világítótornyából, a tengerszint felett 50 méter magasságból egy hajó 30° -os depressziószögben látszik. Mekkora a világítótorony és a hajó távolsága?

Megoldás:

Készítsünk ábrát! (1.13. ábra) Célszerű olyan rajzot készíteni, amely minden adatot tartalmaz a szövegből.

Szemléltesse a világítótornyot a VV' szakasz, a hajó helyzetét jelölje a H pont! A szöveg alapján $VV' = 50$ m, a V -nél levő depressziószög 30° . Jelöljük x -szel a világítótorony és a hajó távolságát!

A problémát most már lefordíthatjuk a matematika nyelvére: a $VV'H$ derékszögű háromszögben adott egy hegyesszög és az ezzel a szöggel szemközti befogó. Mekkora a szög melletti befogó?



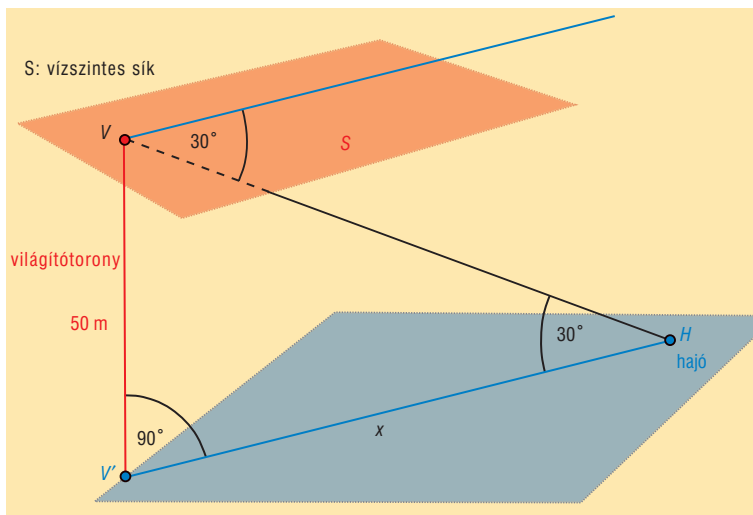
1.9. ábra Teodolit régen (Starke-Kammerer gyártmányú teodolit a XX. század elejéről)



1.10. ábra Teodolitok napjainkban



1.12. ábra Világítótorony

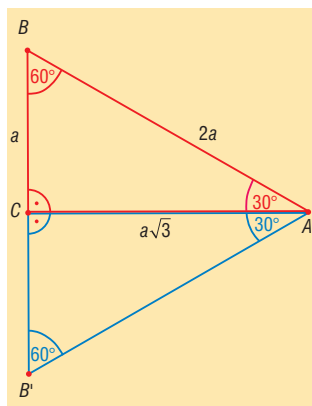


1.13. ábra Az 1. példa megoldásához

A depressziószögnek a $V'HV$ emelkedési szög váltószöge, így $V'HV \sphericalangle = 30^\circ$. (A V pontból a H pont ugyanakkora depressziószögben látszik, mint amekkora emelkedési szögben a H pontból a V pont.)



Vegyük észre, hogy a $VV'H$ derékszögű háromszög szögei 30° , 60° és 90° -osak. Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy a szabályos háromszöget egy magassággal két olyan egybevágó derékszögű háromszögre bonthatjuk, amelyeknek a szögei 30° , 60° és 90° -osak, az oldalai aránya $1:\sqrt{3}:2$. (1.14. ábra)



1.14. ábra A szabályos háromszög két egybevágó derékszögű háromszögre bontva

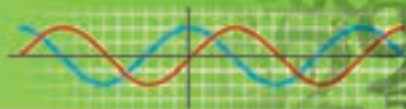
A $VV'H$ háromszög és a BCA háromszög hasonló, mert a derékszögön kívül egy-egy hegyesszögben is megegyeznek. Hasonló háromszögek megfelelő oldalainak az aránya egyenlő, így

$$\frac{30^\circ\text{-os szög melletti befogó } VV'H \triangle\text{-ben}}{30^\circ\text{-os szöggel szemközti befogó } VV'H \triangle\text{-ben}} = \frac{30^\circ\text{-os szög melletti befogó } BCA \triangle\text{-ben}}{30^\circ\text{-os szöggel szemközti befogó } BCA \triangle\text{-ben}}$$

Az 1.10. ábra alapján $a \frac{30^\circ\text{-os szög melletti befogó}}{30^\circ\text{-os szöggel szemközti befogó}} = \frac{a\sqrt{3}}{a} =$

$= \sqrt{3}$, tehát minden 30° -os szöget tartalmazó derékszögű háromszögben a szög melletti befogó és a szöggel szemközti befogó aránya $\sqrt{3}$. Így a $VV'H$ háromszög esetén a megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{x}{50} = \sqrt{3},$$



ahonnan $x = 50\sqrt{3} \text{ m} \approx 86,60 \text{ m}$.

Tehát a világítótorony és a hajó távolsága $50\sqrt{3} \text{ m}$, megközelítőleg 86,60 m.



2. példa Egy templomtorony csúcsa a vízszintes terepen, a torony lábától 50 méter távolságban és a terepszint felett 2 méter magasságban levő megfigyelési pontból $22,5^\circ$ -os emelkedési szögben látszik. Milyen magas a torony?

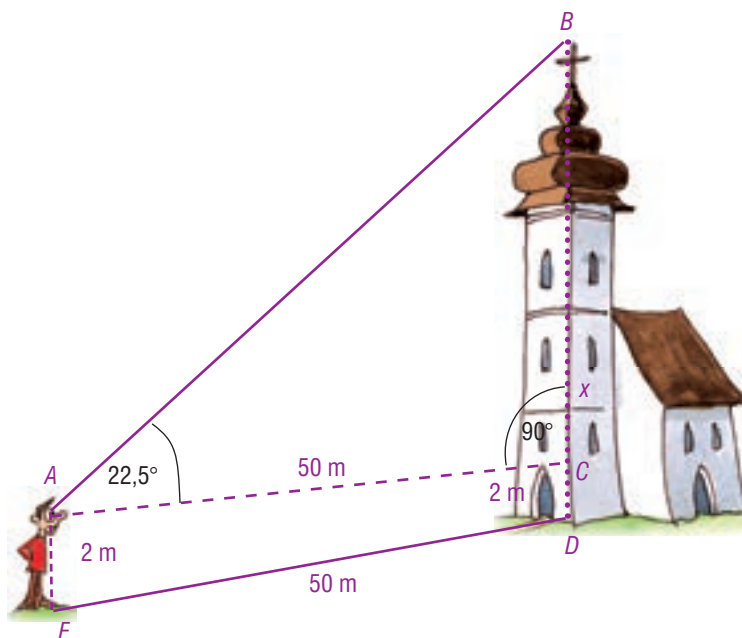
Megoldás:

Készítsünk ábrát (1.16. ábra) az adatok feltüntetésével, a szöveg alapján! Szemléltesse a templomtoronyt a BD szakasz, a megfigyelési pontot jelölje az A pont, az A pont merőleges vetületét a terepszinten az E pont! A szöveg alapján $DE = 50 \text{ m}$, az A -nál levő emelkedési szög $22,5^\circ$. Jelöljük x -szel az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hosszát, ekkor a templomtorony magassága $x + 2$ méter.

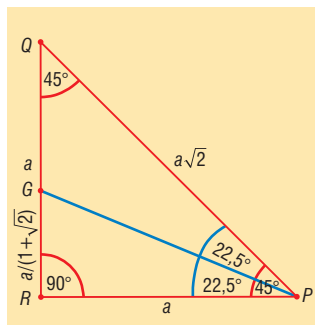
A probléma a matematika nyelvén: az ABC derékszögű háromszögben adott egy hegyesszög és az e szög melletti befogó. Mekkora a szöggel szemközti befogó?



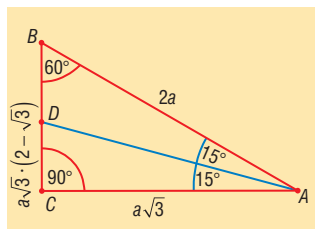
1.15. ábra Szent Péter-bazilika Rómában



1.16. ábra A 2. példa megoldásához



1.17. ábra A 2. példa megoldásához



1.18. ábra A 15°-os szöget tartalmazó derékszögű háromszög

Vegyük észre, hogy ennek a háromszögnek is „speciálisak” a hegyesszögei! A $22,5^\circ$ ugyanis a 45° fele, így ez a háromszög kapcsolatba hozható az egyenlő szárú derékszögű háromszöggel. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög szögei 45° , 45° és 90° -osak, oldalainak aránya $1:1:\sqrt{2}$.

Az 1.17. ábrán a 45° -os szög PG szögfelezője a PQR egyenlő szárú derékszögű háromszöget két háromszögre bontja. Az így keletkező PGR háromszög és a 1.16. ábrán látható ABC háromszög hasonló, mert két-két szögük páronként egyenlő nagyságú. Hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő, ezért

$$\begin{aligned} & \frac{22,5^\circ\text{-os szöggel szemközti befogó } PGR \triangle\text{-ben}}{22,5^\circ\text{-os szög melletti befogó } PGR \triangle\text{-ben}} = \\ & \frac{22,5^\circ\text{-os szöggel szemközti befogó } ABC \triangle\text{-ben}}{22,5^\circ\text{-os szög melletti befogó } ABC \triangle\text{-ben}}, \text{ azaz} \\ & \frac{GR}{RP} = \frac{BC}{CA}. \end{aligned}$$

A szögfelező tétel szerint:

$$\frac{GR}{RQ} = \frac{RP}{RP + PQ}.$$

Mivel $RQ = RP$ és $\frac{GR}{RP} = \frac{BC}{CA}$, ezért a $\frac{BC}{CA} = \frac{a}{a + a\sqrt{2}}$ egyenlőséget

kapjuk. Tehát minden olyan derékszögű háromszögben, melynek egyik belső szöge $22,5^\circ$ -os, a szöggel szemközti befogó és a szög melletti befogó aránya $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$. Innen $\frac{x}{50} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ összefüggés-

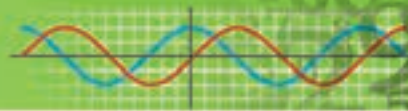
hez jutunk, ahonnan $x = \frac{50}{1 + \sqrt{2}} = 50(\sqrt{2} - 1) \approx 20,71$ adódik. Tehát a

templomtorony (terepszint feletti) magassága $50\sqrt{2} - 48$ méter, amely megközelítőleg 22,71 méter.



Eddigi példáinkban olyan derékszögű háromszögekhez jutottunk, amelyekben az oldalak arányának pontos értékét meg tudtuk adni. Vajon a fent említett szögeken kívül más szögeknél is meg tudjuk határozni az oldalak pontos arányát? Jelenlegi ismereteink szerint (a 2. példa alapján) a szögfelezőre vonatkozó tétel alkalmazásával megadható például a $30^\circ : 2 = 15^\circ$ -os szöget tartalmazó derékszögű háromszögben az oldalak arányának pontos értéke. (1.18. ábra) Ezt az eljárást folytatva további szögeknél is felírhatóak az arányok.

Mit tehetünk abban az esetben, ha az oldalak arányát nem tudjuk pontosan meghatározni? Nézzünk erre egy példát!



3. példa Milyen magas az a domb, amelyre egy 1700 méter hosszú egyenes út vezet, ha az út emelkedési szöge 7° ?

Megoldás:

Készítsünk ábrát (1.19. ábra) az adatok feltüntetésével a szöveg alapján! Szemléltesse az út nyomvonalát az AB , a domb magasságát a BC szakasz! A szöveg alapján $AB = 1700$ m, az A -nál levő emelkedési szög 7° . Jelöljük x -szel a magasságot! A feladat most már a következő: az ABC derékszögű háromszögben adott egy hegyesszög és az átfogó. Mekkora a szöggel szemben levő befogó?

Most még nem ismerünk olyan összefüggéseket, amelyek segítségével az adatokból ki tudnánk számolni a keresett befogót, s ezt a távolságot közvetlenül nem tudjuk lemérni. Kicsinyítsuk az ABC derékszögű háromszöget! Ekkor a kapott PQR háromszög (1.20. ábra) és az ABC háromszög hasonlóak, a megfelelő oldalai aránya megegyezik,

azaz $\frac{x(\text{m})}{1700(\text{m})} = \frac{p(\text{cm})}{6,8(\text{cm})}$. A PQR háromszög RQ befogóját lemérjük:

$p \approx 0,8$ cm. Tehát minden olyan derékszögű háromszögben melynek egyik belső szöge 7° -os, a szöggel szemközti befogó és az átfogó aránya közelítőleg

$\frac{0,8}{6,8} = \frac{2}{17}$. Innen $x \approx 200$ m. A szerkesztés és

a mérés pontatlansága miatt a domb magasságát csak megközelítőleg tudjuk meghatározni. Azt mondhatjuk tehát, hogy a domb körülbelül 200 m magas.

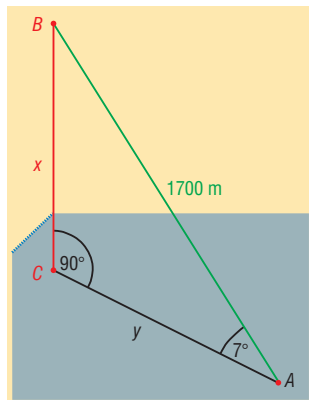


A fent említett példákból is látszik, hogy az ehhez hasonló problémák megoldásában nagy segítségünkre lenne egy olyan gyűjtemény, amely a hegyesszögek esetén tartalmazná a derékszögű háromszögek oldalai arányát.

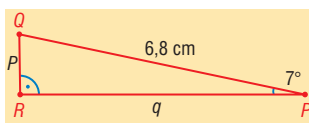


Oldjuk meg!

- Határozzuk meg a 15° -os szöget tartalmazó derékszögű háromszögben az oldalak arányának pontos értékét!
- Egy domb tetején levő kápolnához 120 méter hosszú egyenes út vezet, az út emelkedési szöge 15° . Milyen magas a domb?
- Egy felhőkarcoló 90 méter magasságban levő ablakából egy, az utcán sétáló ismerőst veszünk észre, akinek a talajon levő lábát 80° -os depressziószög alatt látunk. Milyen távol van az ismerősünk az épület aljától?
- Egy antenna 48 méter hosszú drótkötéllel van kikötve, és a kötélt hajlásszöge a vízszintes talajhoz képest 60° . Ha az antennát 24 méterrel távolabbról akarjuk kikötni, akkor milyen hosszú drótkötélre van szükségünk?



1.19. ábra A 3. példa megoldásához

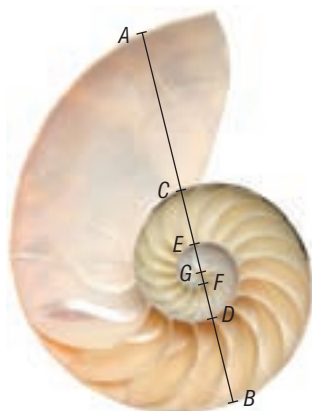


1.20. ábra Kicsinyítés után



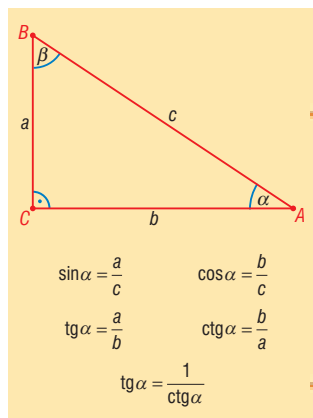
1.21. ábra Tokió felhőkarcolói

2. A hegyesszögek szögfüggvényei, összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között



2.1. ábra Arany arány

A Nautilus egy tengeri csigafaj. Bárhogyan is húzunk vonalat a középponton áthaladva, az $AC : BD = CE : DF$ teljesül (aranymet-szés)



2.2. ábra Derékszögű háromszög

Az előző leckében, bizonyos távolságok meghatározásában a hasonló derékszögű háromszögek oldalainak aránya segített. Mivel két derékszögű háromszög pontosan akkor hasonló, ha egy-egy hegyesszögük egyenlő, ezért **egy derékszögű háromszög bármely két oldalának arányát egyik hegyesszögének nagysága egyértelműen meghatározza.**

A gyakorlati életben ezen arányokkal való számolás olyan fontos, hogy az egyes arányok külön elnevezéseket kaptak. A derékszögű háromszög hegyesszögétől függő arányokat a hegyesszög szögfüggvényeinek nevezzük. A definíciók megadásánál a 2.2. ábra jelöléseit használjuk.

Definíció Derékszögű háromszögben az α hegyesszöggel szemközti befogó hosszának és az átfogó hosszának az arányát az α szög szinuszának nevezzük. Jelölése: $\sin \alpha$.

Rövidebben: $\sin \alpha = \frac{\text{az } \alpha \text{ szöggel szemközti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}} = \frac{a}{c}.$

Definíció Derékszögű háromszögben az α hegyesszög melletti befogó hosszának és az átfogó hosszának az arányát az α szög koszinuszának nevezzük. Jelölése: $\cos \alpha$.

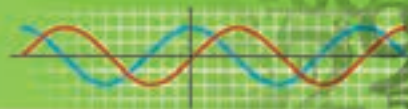
Rövidebben: $\cos \alpha = \frac{\text{az } \alpha \text{ szög melletti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}} = \frac{b}{c}.$

Definíció Derékszögű háromszögben az α hegyesszöggel szemközti befogó hosszának és az α hegyesszög melletti befogó hosszának az arányát az α szög tangensének nevezzük. Jelölése: $\text{tg } \alpha$.

Rövidebben: $\text{tg } \alpha = \frac{\text{az } \alpha \text{ szöggel szemközti befogó hossza}}{\text{az } \alpha \text{ szög melletti befogó hossza}} = \frac{a}{b}.$

Definíció Derékszögű háromszögben az α hegyesszög melletti befogó hosszának és az α hegyesszöggel szemközti befogó hosszának az arányát az α szög kotangensének nevezzük. Jelölése: $\text{ctg } \alpha$.

Rövidebben: $\text{ctg } \alpha = \frac{\text{az } \alpha \text{ szög melletti befogó hossza}}{\text{az } \alpha \text{ szöggel szemközti befogó hossza}} = \frac{b}{a}.$



Vegyük észre, hogy a definíciókból következik, hogy egy hegyesszög szinusza, koszinusa 1-nél kisebb pozitív szám, tangense és kotangense tetszőleges pozitív szám lehet. Észrevehetjük továbbá, hogy a definíciók miatt **egy hegyesszög tangense és kotangense egymás reciprokai, azaz a matematika nyelvén kifejezve $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$.**



1. példa A 2.2. ábra jelöléseit használva, adjuk meg a β szög szögfüggvényeit! Milyen kapcsolat fedezhető fel a derékszögű háromszög hegyesszögeinek szögfüggvényei között?

Megoldás:

A fenti definíciók és a 2.2. ábra alapján:

$$\sin \beta = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}.$$

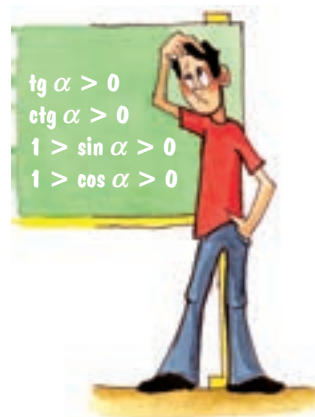


Vegyük észre, hogy $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta$, $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta$ és $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta$. A derékszögű háromszög két hegyesszöge 90° -ra egészíti ki egymást, azaz egymás pótszögei. Így a kapott azonosságok alapján kijelenthetjük, hogy a pótszögek szögfüggvényei nem függetlenek egymástól. Helyettesítsünk a β helyére $(90^\circ - \alpha)$ -t!

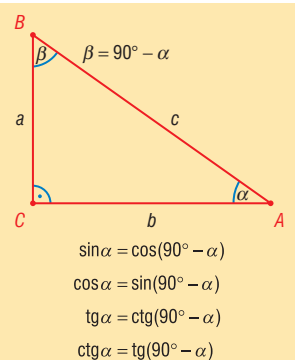
Ekkor a **pótszögek szögfüggvényei** közötti összefüggések az alábbiak:

A matematika nyelvén:	Szavakkal kifejezve:
$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$	Bármely hegyesszög szinusza egyenlő pótszögének koszinuszával.
$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$	Bármely hegyesszög koszinusa egyenlő pótszögének szinuszával.
$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha)$	Bármely hegyesszög tangense egyenlő pótszögének kotangensével.
$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)$	Bármely hegyesszög kotangense egyenlő pótszögének tangensével.

A hegyesszögek pótszögének szögfüggvényeire kapott azonosságok lehetővé teszik, hogy két táblázatból kiolvasható egy hegyesszög mind a négy ismertett szögfüggvényértéke, és a szögfüggvényérték alapján a hegyesszög is meghatározható.



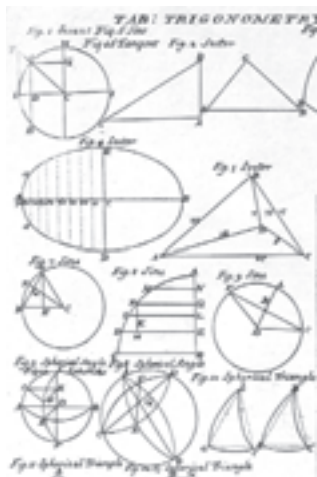
2.3. ábra A hegyesszögek szögfüggvényértékei



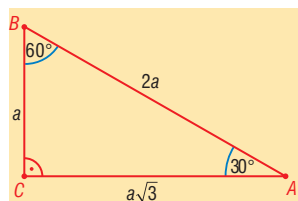
2.4. ábra Pótszögek



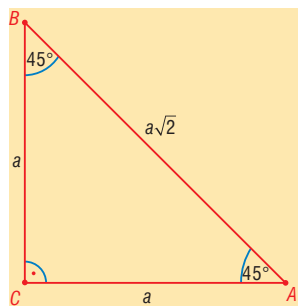
2.5. ábra Szögfüggvénytáblázatok



2.6. ábra A trigonometria táblájának részlete, Cyclopaedia 1728



2.7. ábra A 30° és 60° szögfüggvényértékei az ábra alapján meghatározhatók



2.8. ábra A 45° szögfüggvényértéke az ábra alapján meghatározható

2. példa Határozzuk meg a 30°, a 45° és a 60° pontos szögfüggvényértékeit!

Megoldás:

A 30°, a 45° és a 60° két speciális derékszögű háromszög hegyesszögei, korábbi tanulmányainkban mindkét háromszöggel találkoztunk már. Az egyik derékszögű háromszögnek a szögei 30°, 60° és 90°-osak, az oldalainak aránya $1 : \sqrt{3} : 2$ (2.7. ábra). A másik derékszögű háromszögnek a szögei 45°, 45° és 90°-osak, az oldalainak aránya $1 : 1 : \sqrt{2}$ (2.8. ábra).

A 30° és a 60° egymás pótszögei, a 45° pótszöge 45°. Így a pótszögek szögfüggvényeire kapott összefüggések miatt:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ, \cos 30^\circ = \sin 60^\circ, \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ, \\ \operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ, \sin 45^\circ = \cos 45^\circ, \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ.$$

Tehát elegendő a 30° szögfüggvényértékeit és a 45° szinuszt, tangensét meghatározni. Így a definíciók és az ábrák alapján:

$$\sin 30^\circ = \frac{30^\circ\text{-os szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ,$$

$$\cos 30^\circ = \frac{30^\circ\text{-os szög melletti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ,$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{30^\circ\text{-os szöggel szemközti befogó}}{30^\circ\text{-os szög melletti befogó}} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{ctg} 60^\circ,$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{30^\circ\text{-os szög melletti befogó}}{30^\circ\text{-os szöggel szemközti befogó}} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ,$$

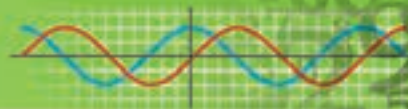
$$\sin 45^\circ = \frac{45^\circ\text{-os szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ,$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{45^\circ\text{-os szöggel szemközti befogó}}{45^\circ\text{-os szög melletti befogó}} = \frac{a}{a} = 1 = \operatorname{ctg} 45^\circ.$$

A kapott eredményeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2.9. ábra Nevezetes szögek szögfüggvényértékei



A szögek és a szögfüggvényértékek meghatározására a manapság használatos számológépek is lehetőséget nyújtanak, a következő néhány feladatban ezt mutatjuk be.



3. példa Számológép segítségével határozzuk meg az alábbi szögfüggvényértékeket négy tizedesjegy pontossággal!
a) $\sin 50,86^\circ$ b) $\cos 34^\circ 57'$ c) $\operatorname{tg} 76,31^\circ$ d) $\operatorname{ctg} 12,45^\circ$

Megoldás:

A közelítő szögfüggvényértékek meghatározását mutatjuk be lépésről lépésre, két különböző „logikájú” számológépen.*

Az „A” típusnál:

a)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	DRG	DEG
2. lépés: a szögmérték bevitele	5 0 . 8 6	50,86
3. lépés: a szög szinusza	sin =	$\sin 50,86^\circ = 0,7756$

b)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	DRG	DEG
2. lépés: a szögpercek átváltása tizedfokokra	5 7 : 6 0 = + 3 4 =	0,95 34,95
3. lépés: a szög koszinusza	cos =	$\cos 34,95^\circ = 0,8197$

c)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	DRG	DEG
2. lépés: a szögmérték bevitele	7 6 . 3 1	76,31
3. lépés: a szög tangense	tan =	$\operatorname{tg} 76,31^\circ = 4,1053$

$$\sin 30^\circ \quad \cos 60^\circ$$

$$\sin 60^\circ \quad \operatorname{ctg} 60^\circ$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ$$

$$\sin 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ \quad \cos 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ$$



2.10. ábra Nevezetes szögek szögfüggvényei „lépten-nyomon”



2.11. ábra Számológép „A”

* A fent ismertetett számológépeken kívül sokféle számológép van forgalomban. A feladatmegoldást meggyorsíthatja a kalkulátor használata, ezért célszerű a saját gépünk megismerése.



2.12. ábra Milyen az én számológépem?



2.13. ábra Számológép „B”

Kotangens billentyű a számológépeken nem található. Egy szög kotangensének meghatározásához felhasználjuk, hogy egy hegyesszög tangense és kotangense egymás reciprokai, azaz $\text{ctg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$.

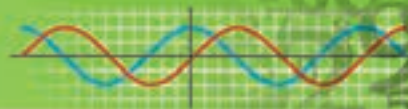
d)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	DRG	DEG
2. lépés: a szögérték bevitele	1 2 . 4 5	12,45
3. lépés: a szög tangense	tan =	$\text{tg } 12,45^\circ = 0,2208$
4. lépés: a szög kotangense	1/x =	$\text{ctg } 12,45^\circ = 4,5294$

A „B” típus esetén:

a)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	SHIFT MODE	1: MthIO 2: LineIO 3: Deg 4: Rad :
	3	D
2. lépés: az adatok bevitele a szög szinusza	5 0 . 8 6 = sin	$\sin 50,86^\circ = 0,7756$

b)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	SHIFT MODE	1: MthIO 2: LineIO 3: Deg 4: Rad :
	3	D
2. lépés: a szögpercek átváltása tizedfokokra, a szög koszinusza	cos 3 4 ° ' " = 5 7 ° ' "	$\cos 34,95^\circ = 0,8197$

c)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	SHIFT MODE	1: MthIO 2: LineIO 3: Deg 4: Rad :
	3	D



2. lépés: az adatok bevittele a szög tangense	tan 7 6 · 3 1 =	$\text{tg } 76,31 = 4,1053$
---	--	-----------------------------

d)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegysé- gének beállítása	SHIFT MODE 3	1: MthIO 2: LineIO 3: Deg 4: Rad :
2. lépés: az adatok bevittele a szög tangense	tan 1 2 · 4 5 =	$\tan 12,45^\circ = 0,2208$
3. lépés: a szög kotangense	1/x =	$\text{ctg } 12,45^\circ = 4,5294$



2.14. ábra A kavicstól...



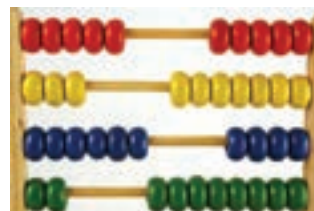
4. példa Számológép segítségével határozzuk meg az α hegyesszög nagyságának közelítő értékét, ha
a) $\sin \alpha = 0,8$; b) $\cos \alpha = 0,1298$; c) $\text{tg } \alpha = 23,53$;
d) $\text{ctg } \alpha = 1,986$.

Megoldás:

A hegyesszögek meghatározását mutatjuk be lépésről lépésre, két különböző „logikájú” számológépen. Minden esetben a szögfüggvényértékből keressük vissza azt a hegyesszöget, amelynek az adott szögfüggvénye az adott értékkel egyenlő. Például a $\sin \alpha = 0,8$ esetén keressük azt a hegyesszöget, amelynek szinusza 0,8-del egyenlő. A számológépeken ezt a funkciót a $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ és a $\tan^{-1}$ paranccsal lehet elérni.

Az „A” típusnál:

a)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegysé- gének beállítása	DRG	DEG
2. lépés: a szög szinuszá- nak bevittele	0 · 8	0,8
3. lépés: a szög meghatározása	2ndF sin	$53,13^\circ (= \alpha)$



2.15. ábra ...az Abakuszon át...



2.16. ábra ...a számológépen,...



2.17. ábra ..., a tudományos számológépeken...



2.18. ábra ...és a számítógépeken keresztül...

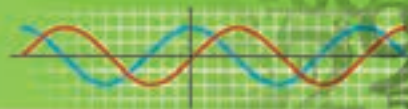
b)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységeinek beállítása	DRG	DEG
2. lépés: a szög koszinuszának bevitele	0 . 1 2 9 8	0,1298
3. lépés: a szög meghatározása	2ndF cos	$82,54^\circ (= \alpha)$

c)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységeinek beállítása	DRG	DEG
2. lépés: a szög tangensének bevitele	2 3 . 5 3	23,53
3. lépés: a szög meghatározása	2ndF tan	$87,57^\circ (= \alpha)$

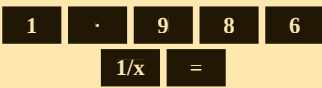
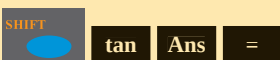
Kotangens billentyű a számológépeken nem található, így a kotangens értékből a hegyesszöget nem tudjuk visszakeresni. Ismét felhasználjuk, hogy egy hegyesszög tangense és kotangense egymás reciprocai, azaz

$$\text{ctg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}.$$

d)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységeinek beállítása	DRG	DEG
2. lépés: a szög kotangensének bevitele	1 . 9 8 6	1,986
3. lépés: a szög tangensének kiszámítása	1/x	$0,5035 (= \text{tg } \alpha)$
4. lépés: a szög meghatározása	2ndF tan	$26,73^\circ (= \alpha)$

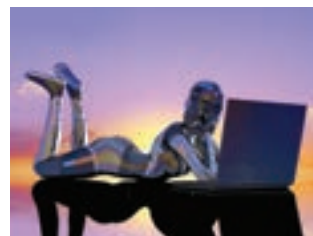


A „B” típus esetén:

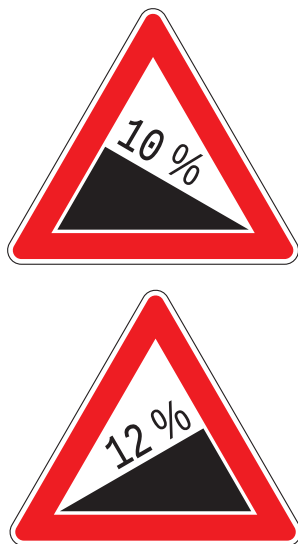
a)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása		1: MthIO 2: LineIO 3: Deg 4: Rad ⋮
	3	D
2. lépés: az adatok bevitele a szög meghatározása		$\sin^{-1}$ $53,13^{\circ}(=\alpha)$
b)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása		1: MthIO 2: LineIO 3: Deg 4: Rad ⋮
	3	D
2. lépés: az adatok bevitele a szög meghatározása		$\cos^{-1}$ $82,54^{\circ}(=\alpha)$
c)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása		1: MthIO 2: LineIO 3: Deg 4: Rad ⋮
	3	D
2. lépés: az adatok bevitele a szög meghatározása		$\tan^{-1}$ $87,57^{\circ}(=\alpha)$
d)	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása		1: MthIO 2: LineIO 3: Deg 4: Rad ⋮
	3	D
2. lépés: az adatok bevitele a szög tangensének meghatározása		$1,986^{-1} = 0,5035$
3. lépés: a szög meghatározása		$26,73^{\circ}(=\alpha)$



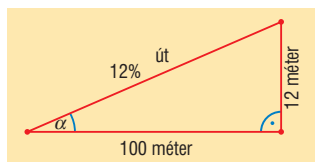
2.19. ábra ...egészen a robotokig



2.20. ábra A jövő világa?



2.21. ábra A táblákon levő számok a veszélyes útszakasz legnagyobb lejtésének (10%), illetve emelkedésének (12%) a százalékos mértékét jelzik



2.22. ábra Hegyi út emelkedése



2.23. ábra Ptolemaiosz Klaudiosz (Kr. u. 100–170)



5. példa Egy hegyi út emelkedése 12%. Mekkora szöggel hajlik az út a vízszintes síkhoz?

Megoldás:

Mielőtt ábrát készítünk, érdemes megfejteni, hogy mit is jelent az a feltétel, hogy az út emelkedése 12%. **A lejtő (vagy emelkedő) lejtésének (vagy emelkedésének) százalékos mértéke egyenlő a lejtésszög (vagy emelkedési szög) tangensével százalékban megadva.** Például a 12%-os emelkedés azt jelenti, hogy az út emelkedési szögének tangense 0,12. Hétköznapi nyelven pedig azt mondhatjuk, hogy 100 méteren 12 métert emelkedik az út (2.22. ábra).

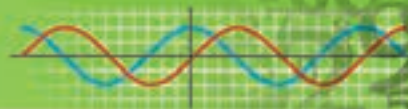
Felírhatjuk tehát, hogy $\operatorname{tg} \alpha = 0,12$. Keressük azt a hegyesszöget, amelynek tangense 0,12-dal egyenlő, ahonnan $\alpha = 6,84^\circ$. Tehát az út a vízszintes síkhoz $6,84^\circ$ -os szögben hajlik.



A derékszögű háromszögek oldalai és szögei közötti összefüggésekkel a matematika egyik ága, a trigonometria foglalkozik. **Násziraddin at-Túsi** (1201–1274) perzsa matematikus volt az első, aki a trigonometriát a csillagászatól elválasztott, önálló matematikai területként tárgyalta. **Bartholemaeus Pitiscus** matematikus 1595-ben megjelent munkájában használta először a trigonometria szót. (Elnevezése a $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\varsigma$ / *trigonosz* – „háromszög”, és $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\omicron\nu$ / *metron* – „mérés” szavakból származik.)

A trigonometriát mint a matematika számos új területét a gyakorlat igénye szülte, a csillagászat segédeszközeként jött létre. Csírái már a görögök előtti korszakban is fellelhetők, a babiloni vagy az egyiptomi csillagászatban is számoltak hasonló háromszögek oldalhányadosaival. A trigonometria alkalmazásának első írásos említése a hellenizmus korában élt görög matematikustól, **Hipparkhosztól** (Kr. e. 180?–125) származik kb. Kr. e. 150-ből, aki húr táblázatot készített, azaz egy meghatározott sugarú kör középponti szögeinek és a hozzájuk tartozó húrok hosszának értékét táblázatba foglalta. **Ptolemaiosz Klaudiosz** (Kr. u. 100 körül–170 táján) *Almagest* I. könyvének nagy részét az a táblázat töltötte ki, amelyben $0,5^\circ$ szögnövekedéssel 0° -tól 180° -ig meg lehetett találni a szögekhez tartozó húrértékeket. Ez a könyv a csillagászok nélkülözhetetlen segédeszköze lett, több mint egy évezredig. **Al-Battáni** (858–929) arab csillagász, matematikus érdeme, hogy a görög szinuszfogalom (2.25. ábra – egy középponti szöghöz a hozzá tartozó húr hossza) és a hindu szinuszfogalom (2.26. ábra – egy középponti szöghöz a kétszer akkora középponti szög húrjának a fele tartozik) versengésében a hindu felfogás győzött.

A *sinus* szó maga is a hindu *jiva* (jelentése: húr) szó hibás fordításából ered. Az arab fordító ezt a szót *jibá*-nak vette át. Az arab írás azonban a magánhangzókat nem tünteti fel, tehát a *jiba* szót csak



jb-nek írja. Az arabról latinra fordító Chesteri Robert a *jb*-t *jaib*-nak olvasta *jiba* helyett. Az arab *jaib* szó pedig azt jelenti, hogy öböl, és ezt Robert a latin *sinus* szóval fordította, amelynek jelentése öböl, öl. Így történhetett, hogy a magyarosítás korában a *sinus* szóból *kebel* lett, a *cosinus*-ból *pótkebel* a Kazinczy korabeli diákok nagy örömére. Ma már a *szinusz* szó matematikai szakkifejezés, amelyből a matematikusok tudni vélik, hogy hűrt jelent.

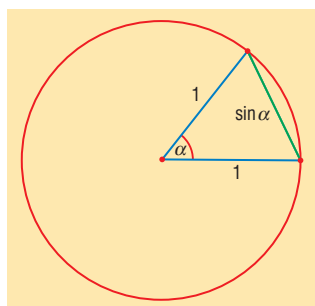
(Sain Márton: Nincs királyi út!)



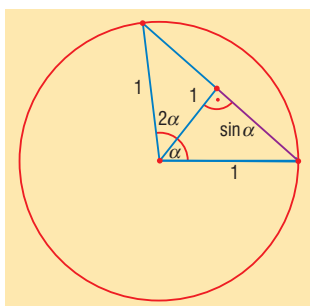
2.24. ábra Kazinczy Ferenc



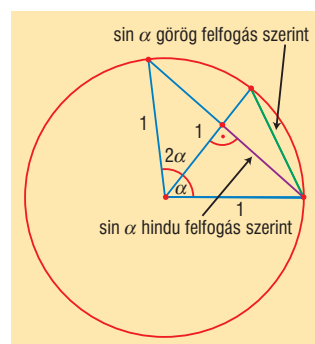
Kazinczy Ferenc (Érsemjén, 1759. október 27 – Széphalom, 1831. augusztus 23), író, költő, a nyelvújítás vezéralakja, az MTA tagja. Nyelvújító és irodalomszervezői tevékenységével a reformkor előtti évtizedekben a nemzeti felemelkedés és önállósulás ügyét szolgálta.



2.25. ábra A görög szinuszfogalom



2.26. ábra A hindu szinuszfogalom



2.27. ábra A görög és a hindu szinuszfogalom



Oldjuk meg!

1. Határozzuk meg négy tizedesjegy pontossággal az alábbi szögek szinusztát, koszinusztát, tangensét, kotangensét!

- a) $56,49^\circ$; b) $87^\circ 42'$; c) $18^\circ 35'$; d) $3^\circ 32'$; e) $\frac{\pi}{8}$; f) $\frac{\pi}{5}$; g) $\frac{\pi}{7}$.

2. Határozzuk meg azt a hegyesszöget, amelynek tangense

- a) $\sqrt{3}$; b) $\frac{15}{7}$; c) 0,0078; d) 123,89; e) 1; f) $\sqrt{6}$!

3. Határozzuk meg azt a hegyesszöget, amelynek kotangense

- a) $\sqrt{2}$; b) $\frac{11}{7}$; c) 0,2078; d) 0,0894; e) 15,26; f) $\frac{\pi}{4}$!

4. Határozzuk meg azt a hegyesszöget, amelynek szinusza

- a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 0,1278; d) 0,894; e) $\sqrt{3}$; f) $\frac{\pi}{6}$!

5. Határozzuk meg azt a hegyesszöget, amelynek koszinusza

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{8}{7}$; c) 0,8783; d) 0,0089; e) 0,2632; f) $\frac{\pi}{5}$.

6. Számológép és függvénytáblázat használata nélkül adjuk meg egyetlen valós számként az alábbi kifejezések értékét!

- a) $4 \cos 30^\circ \sin 45^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ$
 b) $(\operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ)$
 c) $\frac{\sin 30^\circ + \sin 60^\circ}{\sqrt{3} \operatorname{tg} 45^\circ - \sqrt{2} \cos 45^\circ}$
 d) $2(2 \sin 45^\circ - 3 \operatorname{ctg} 60^\circ) \cdot (\cos 45^\circ + \cos 30^\circ)$

7. Egy dombtetőre vezető egyenes út a vízszintessel 12° -ot zár be. Az út hossza a domb aljától a dombtetőig 720 méter. Milyen magas a domb? Hány %-os az út emelkedése?

8. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik hegyesszögét osszuk három egyenlő részre! A szakaszok mekkora részekre osztják a háromszög szemközti oldalát?

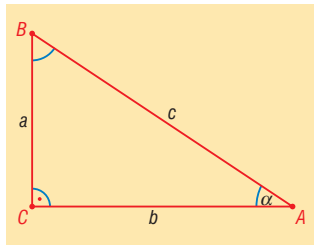
9. Egy világítótoronyból a tengerszint felett 54 méter magasságból egy hajó $6^\circ 36'$ -es depressziószög alatt látszik. Milyen távolságban van a hajó a világítótornyától?

10. Egy 150 méter hosszú lejtő aljáról a lejtő tetején álló emlékművet $1^\circ 32'$ -es szög alatt látjuk, a lejtő hajlásszöge $24^\circ 18'$. Milyen magas az emlékmű?

3. Összefüggések egy hegyesszög szögfüggvényei között

Az előző leckében már beláttuk, hogy a pótszögek szögfüggvényei nem függetlenek egymástól. Most alapvető összefüggéseket keresünk a hegyesszögek szögfüggvényei között.

3.1. Összefüggés egy tetszőleges hegyesszög szinusa és koszinusa között



3.1. ábra Az ABC derékszögű háromszög a szokásos jelölésekkel

Tekintsük az ABC derékszögű háromszöget (3.1. ábra). A szögfüggvények definíciója és a 3.1. ábra jelölései alapján:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ és } \cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

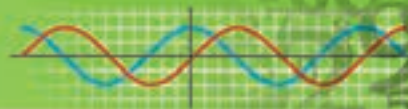
Mindkét egyenlőséget c -vel (az átfogóval) megszorozva:

$$a = c \cdot \sin \alpha \text{ és } b = c \cdot \cos \alpha \text{ adódik. (3.2. ábra)}$$

Pitagorasz tétele szerint:

$$(c \cdot \sin \alpha)^2 + (c \cdot \cos \alpha)^2 = c^2,$$

$$\text{ahonnan } c^2 \cdot (\sin \alpha)^2 + c^2 \cdot (\cos \alpha)^2 = c^2.$$



Az egyenlet mindkét oldalát c^2 -tel ($c^2 \neq 0$) elosztva:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \text{ adódik.}$$

A $(\sin \alpha)^2$ jelölésére a $\sin^2 \alpha$ -t használjuk, és szinusz négyzet alfának olvassuk. Hasonlóan egy szög koszinuszának négyzetét $\cos^2 \alpha$ -val jelöljük, és koszinusz négyzet alfának olvassuk.

Röviden: $(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$.

Ezekkel a jelölésekkel a fent kapott összefüggés, a trigonometria egyik legfontosabb tétele, azonossága:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Szavakkal kifejezve:



Tétel Bármely hegyesszög szinuszának és koszinuszának négyzetösszege 1.



1. példa Határozzuk meg az α hegyesszög koszinuszát az α meghatározása nélkül, ha tudjuk, hogy $\sin \alpha = \frac{12}{13}$!

Megoldás:

1. módszer:

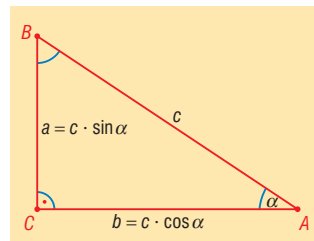
Az ilyen és ehhez hasonló feladatok megoldásánál érdemes feltenni a következő kérdést. Milyen összefüggést ismerünk egy hegyesszög adott és keresett szögfüggvényértéke között? Egy hegyesszög szinusza és koszinusza között a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ összefüggés áll fenn. Így tekintettel arra, hogy a hegyesszögek koszinusza pozitív,

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13} \text{ adódik.}$$

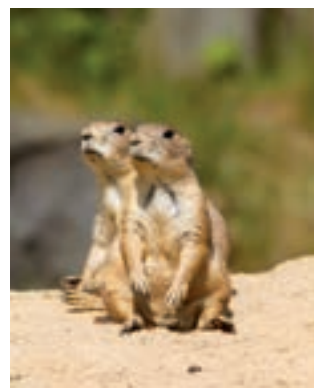
2. módszer:

A definíció szerint az α hegyesszög szinusza az α hegyesszöggel szemközti befogó hosszának és az átfogó hosszának az aránya. A feladat feltétele miatt az α hegyesszöggel szemközti befogó hossza $12x$, az átfogó hossza $13x$, ahol $x > 0$ teljesül (3.4. ábra). Pitagorasz tétele alapján:

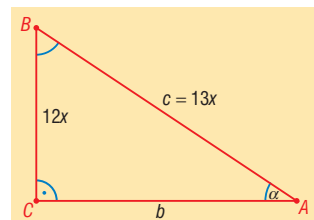
$(12x)^2 + b^2 = (13x)^2$, ahonnan $b = 5x$ adódik. Így az α hegyesszög koszinuszának definíciója szerint $\cos \alpha = \frac{5x}{13x} = \frac{5}{13}$.



3.2. ábra A befogók az átfogóval és a szögfüggvényekkel kifejezve

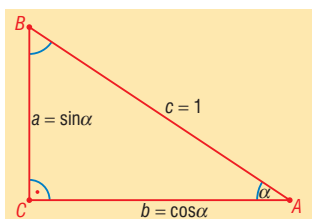


3.3. ábra Azonosság

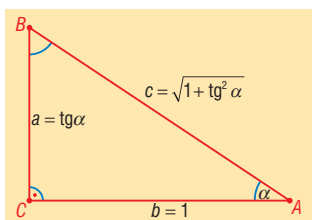


3.4. ábra A $\sin \alpha$ definíciója szerint

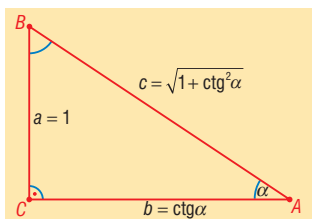
3.2. Összefüggés egy hegyesszög tangense, kotangense, szinusza és koszinusza között



3.5. ábra Az α hegyesszög szinusza és koszinusza szakaszhozzúságokkal szemléltetve



3.6. ábra Az α hegyesszög tangense szakaszhozzúságokkal szemléltetve



3.7. ábra Az α hegyesszög kotangense szakaszhozzúságokkal szemléltetve

Az előző leckében a definíciókból adódott, **hogy egy hegyesszög tangense és kotangense egymás reciprokai, azaz** $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$.

A $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ összefüggés alapján lehetőségünk van arra, hogy a $\sin \alpha$ és a $\cos \alpha$ arányokat egy egységnyi átfogójú derékszögű háromszög befogóinak hosszúságaként szemléltessük (3.5. ábra).

Az α hegyesszög tangensének és kotangensének definíciói és a 3.5. ábra alapján:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ és } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

A matematika nyelvén:	Szavakkal kifejezve:
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	Bármely hegyesszög tangense egyenlő a szög szinuszának és koszinuszának hányadosával.
$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	Bármely hegyesszög kotangense egyenlő a szög koszinuszának és szinuszának hányadosával.

Az α hegyesszög tangensét és kotangensét is szemléltethetjük szakaszhozzúságokkal, a szögfüggvények definíciója alapján, ha a megfelelő befogót egységnyinek választjuk (3.6. ábra, 3.7. ábra).



2. példa Határozzuk meg az α hegyesszög szinusztát, koszinusztát, tangensét az α meghatározása nélkül, ha tudjuk, hogy $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{15}{8}$!

Megoldás:

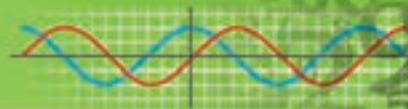
1. módszer:

Milyen összefüggés van egy hegyesszög kotangense és tangense, kotangense és szinusza, kotangense és koszinusza között?

A hegyesszögek kotangense és tangense között a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$ azonosságot ismerjük, amelyből a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$ adódik.

A hegyesszögek kotangense és szinusza között fennáll a $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ összefüggés, amelyből a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosság és a $\cos \alpha > 0$ felhasználásával

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \text{ azonosságot kapjuk.}$$



Négyzetre emelés után (ez az átalakítás ekvivalens, mert a kifejezések pozitívak):

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Szorozunk be a nevezővel, majd mindkét oldalhoz adjuk hozzá a $\sin^2 \alpha$ -t:

$$\sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

A bal oldalon emeljük ki a $\sin^2 \alpha$ -t:

$$\sin^2 \alpha \cdot (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) = 1.$$

A $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1$ ($\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 \neq 0$) kifejezéssel elosztva az egyenlet mindkét oldalát: $\sin^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}$, ahonnan négyzetgyökvonás után a

$$\sin \alpha > 0 \text{ és a } \operatorname{ctg} \alpha > 0 \text{ miatt } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2}} = \frac{8}{17}$$

adódik.

A fentiek alapján:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}}.$$

$$\text{Innen } \cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}} = \frac{\frac{15}{8}}{\sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 + 1}} = \frac{15}{17}.$$



2. módszer:



Vegyük észre, hogy a 3.7. ábra és a definíciók alapján

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{8}{15}, & \sin \alpha &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}} = \frac{8}{17} & \text{és} & \cos \alpha = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}} = \frac{15}{17} & \text{könnyedén adódik.} \end{aligned}$$

3. módszer:

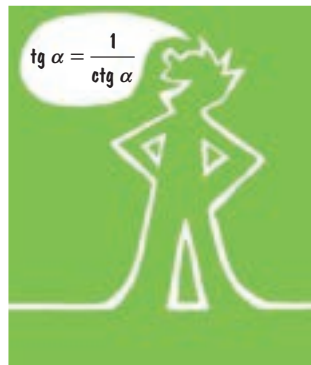
Milyen összefüggés van egy hegyesszög szögfüggvényei között?

A tanult azonosságok és a feladat feltétele alapján:

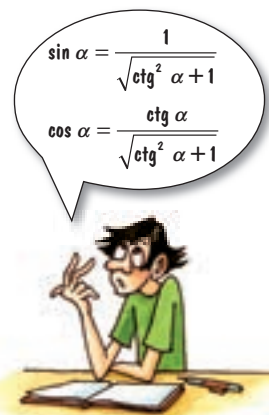
$$(1) \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$(2) \quad \frac{15}{8} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\frac{15}{8}}.$$



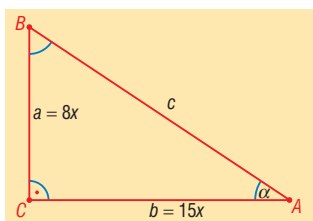
3.8. ábra Összefüggés a hegyesszög tangense és kotangense között



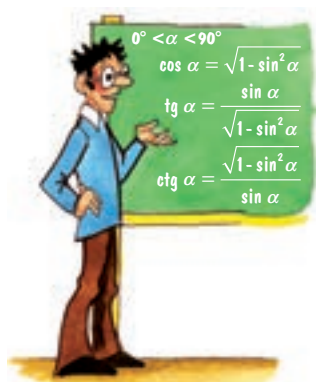
3.9. ábra Hegyesszög szinusza, koszinusa kifejezhető a szög kotangensével



3.10. ábra Egy hegyesszög kotangense



3.11. ábra A $\text{ctg } \alpha$ definíciója szerint



3.12. ábra A trigonometria kezdetén

A (3) alatti egyenletből $\text{tg } \alpha = \frac{8}{15}$ -öt kapjuk. Az (1) és a (2) alatti egyenletekből álló egyenletrendszert kell megoldanunk, az egyik ismeretlenünk a szög szinusza, a másik a szög koszinusza. A (2) alatti egyenletből kifejezzük a $\cos \alpha$ -t: $(2) \cos \alpha = \frac{15}{8} \sin \alpha$, majd behelyettesítjük az (1) alatti egyenletbe:

$$(1) \sin^2 \alpha + \left(\frac{15}{8} \sin \alpha \right)^2 = 1.$$

A műveletek elvégzése és rendezés után kapjuk, hogy $\sin^2 \alpha = \frac{64}{289}$.

Innen négyzetgyökvonás után a $\sin \alpha > 0$ miatt $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ adódik.

A $\cos \alpha = \frac{15}{8} \sin \alpha$ formulába helyettesítve a kapott szinuszértéket, $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ -et kapjuk.

4. módszer:

A definíció szerint az α hegyesszög kotangense az α hegyesszög melletti befogó hosszának és az α hegyesszöggel szemközti befogó hosszának az aránya. A feladat feltétele miatt az α hegyesszög melletti befogó hossza $15x$, az α hegyesszöggel szemközti befogó hossza $8x$, ahol $x > 0$ teljesül (3.11. ábra).

Pitagorasz tétele alapján:

$$(15x)^2 + (8x)^2 = c^2, \text{ ahonnan } c = 17x \text{ adódik. Így az } \alpha \text{ hegyesszög szögfüggvényeinek definíciói szerint } \text{tg } \alpha = \frac{8x}{15x} = \frac{8}{15},$$

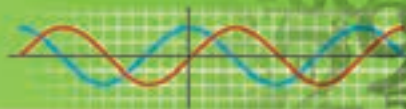
$$\sin \alpha = \frac{8x}{17x} = \frac{8}{17} \text{ és } \cos \alpha = \frac{15x}{17x} = \frac{15}{17}.$$

Ennek a feladatnak a megoldásából is látszik, hogy bármely hegyesszög valamelyik szögfüggvényértékéből az összes többi meghatározható.



Kezdetben a trigonometriában csak a szinusz szögfüggvényt használták.

Alighanem **Abul-Vafa** (940–998) arab matematikus és asztronómus volt az első, aki mindegyik szögfüggvényt használta, definiálta azokat az egység sugarú kör segítségével, és ismerte a közöttük fennálló összefüggéseket is. Ő állította össze elsőként tangenstáblázatot. Lefordította és magyarázta Euklidész és Diophantos munkáit. Nevét őrzi a Hold egyik krátere is. (Sain Márton: Nincs királyi út!)



3. példa Mutassuk meg, hogy bármely α hegyesszög esetén

$$(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{2}{\sin^2 \alpha}!$$

Megoldás:

Hogyan igazolható egy azonosság? Kiindulunk az egyenlőség egyik oldalából, és azonos átalakításokkal előállítjuk a másik oldalt. Most a bal oldalból indulunk, elvégezzük a kijelölt műveleteket, összevonunk:

$$(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 1 + 2 \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 - 2 \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 2 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

A bizonyítandó azonosság jobb oldalán az α hegyesszög szinusza szerepel. Ezért célszerű a $\operatorname{ctg}^2 \alpha$ -t kifejezni a $\sin \alpha$ segítségével.

Tehát $\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$ a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosság felhasználásával.

Behelyettesítve, az egyenlet bal oldala:

$$(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 2 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = 2 + \frac{2 - 2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Közös nevezőre hozunk, és összevonunk a számlálóban:

$$(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{2 - 2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

$$(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{2}{\sin^2 \alpha}.$$

A $\frac{2}{\sin^2 \alpha}$ éppen a jobb oldalon álló kifejezés. Tehát azt kaptuk, hogy a bal oldal bármely α hegyesszög esetén egyenlő a jobb oldallal. Ezzel az állítást beláttuk.



4. példa Bizonyítsuk be, hogy bármely $0^\circ < x < 30^\circ$ esetén

$$\cos 3x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 3x}}!$$

Megoldás:

1. módszer:

Ismét egy azonosságot kell belátnunk. Ha $0^\circ < x < 30^\circ$, akkor $0^\circ < 3x < 90^\circ$. Azaz a $3x$ hegyesszög.

Négyzetre emelés (ez az átalakítás ekvivalens, mert a kifejezések pozitívak) és nevezővel való beszorzás után:

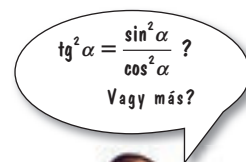
$$\cos^2 3x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 3x) = 1.$$

Végezzük el a kijelölt műveletet:

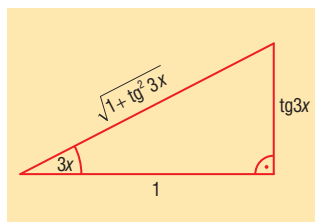
$$\cos^2 3x + \cos^2 3x \cdot \operatorname{tg}^2 3x = 1!$$



3.13. ábra A tangens szó érintőt jelent. A tango 3, tetigi, tactum = megérint szóból származik



3.14. ábra Hogy is van a pontos képlet?



3.15. ábra Ábra a 4. példa 2. módszerű megoldásához

A bizonyítandó állításban ugyanazon hegyesszög koszinusza és tangense szerepel. Milyen kapcsolat van közöttük? Tudjuk, hogy $\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$, ezt behelyettesítve: $\cos^2 3x + \cos^2 3x \cdot \frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} = 1$,

$$\cos^2 3x + \sin^2 3x = 1 \text{ azonosság adódik.}$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, és az átalakítások végén egy azonossághoz jutottunk, ezért a kiinduló egyenletünk is azonosság. Ezzel az állítást beláttuk.

2. módszer:

Ha $0^\circ < x < 30^\circ$, akkor $0^\circ < 3x < 90^\circ$. Azaz a $3x$ hegyesszög.

A 3.6. ábra és a koszinusz szögfüggvény definíciója alapján:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Innen az $\alpha = 3x$ (3.15. ábra) helyettesítéssel, éppen a bizonyítandó

azonosság, a $\cos 3x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 3x}}$ adódik.



Oldjuk meg!

1. Határozzuk meg az α hegyesszög többi szögfüggvényértékét az α meghatározása nélkül, ha

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$; 0,75; $\frac{2}{\sqrt{a^2 + 4}}$ ($a > 0$); b) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0,45; $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$ ($a > 0$);

c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{23}{15}$; $\sqrt{3}$; 0,25; $\frac{\sqrt{a^2 - 4}}{2}$ ($a > 2$); d) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{8}$; 1; 10,25; $\frac{5}{\sqrt{4a^2 - 25}}$ ($a > \frac{5}{2}$).

2. Bizonyítsuk be, hogy bármely α hegyesszög esetén

a) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2$; b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;

c) $2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} + \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$; d) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

3. Táblázat és számológép használata nélkül adjuk meg egyetlen valós számként a következő kifejezések értékét!

a) $\sin 20^\circ - \cos 50^\circ + \cos^2 60^\circ - \cos 70^\circ + \cos^2 30^\circ + \sin 40^\circ$

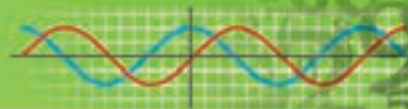
b) $(1 - \cos 36^\circ) \cdot (1 + \sin 54^\circ) + \cos 54^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \operatorname{ctg} 36^\circ$

c) $(\operatorname{tg} 72^\circ \cdot \operatorname{ctg} 18^\circ + 1) \cdot \cos^2 72^\circ$ d) $\cos^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{6}$

4. Szerkesszük meg az α hegyesszöget, ha tudjuk, hogy

a) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$; b) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$; c) $\operatorname{tg} \alpha = 4$; d) $\operatorname{ctg} \alpha = 0,5$;

e) $\sin 2\alpha = \frac{2}{5}$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$); f) $\cos 2\alpha = \frac{4}{7}$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$); g) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 2,5$.



4. Síkgeometriai számítások

A következőkben a szögfüggvények alkalmazását mutatjuk be néhány példán keresztül.



1. példa Egy derékszögű háromszög 15 cm hosszúságú átfogóját a hozzá tartozó magasság 1:4 arányú részekre bontja. Mekkora a háromszög befogói és hegyesszögei?

Megoldás:

1. módszer:

Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével!

Az ábra elkészítésekor érdemes feltenni néhány kérdést. A kérdések egy része segíthet a feladat szövegének megértésében, illetve annak kiderítésében, hogy a szöveg alapján milyen adatok adóttak. Ilyenek lehetnek: Milyen síkidomról van szó? Milyen információkat, adatokat ismerünk a szöveg szerint? Milyen feltételei vannak a feladatnak?

E feladat feltételei: a háromszög derékszögű, és a 15 cm hosszúságú átfogót a hozzá tartozó magasság 1:4 arányú részekre bontja. Tehát egy derékszögű háromszöget rajzolunk, amelynek átfogója 15 cm hosszúságú. Mivel a hozzá tartozó magasság 1:4 arányban osztja az átfogót, ezért $AT = \frac{1}{5}c = \frac{15}{5} = 3$ cm és $BT = \frac{4}{5}c = \frac{4 \cdot 15}{5} = 12$ cm hosszúságú. (4.1. ábra)

A kérdések másik része már a megoldásban játszhat szerepet: Mit kell meghatározni? Milyen összefüggéseket ismerünk az adott és keresett adatok között? Megoldás közben érdemes feltenni ezeket és ezekhez hasonló kérdéseket.

Ebben az esetben a befogókat és a hegyesszögeket keressük. Célzerű az ábrán mind az adott, mind a keresett adatokat megjeleníteni. (4.1. ábra) Milyen összefüggéseket ismerünk a derékszögű háromszög befogói és az átfogó, illetve az átfogó két szelete között? Hogyan határozhatók meg a hegyesszögek?

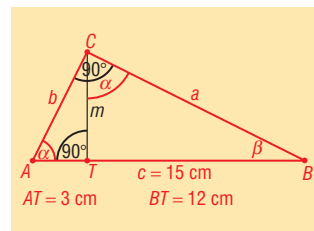
A befogótétel szerint a derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogónak az átfogóra eső merőleges vetülete hosszának. A 4.1. ábra alapján, a matematika nyelvén:

$$a = \sqrt{12 \cdot 15} = 6\sqrt{5} \text{ cm} \approx 13,42 \text{ cm} \text{ és } b = \sqrt{3 \cdot 15} = 3\sqrt{5} \text{ cm} \approx 6,71 \text{ cm.}$$

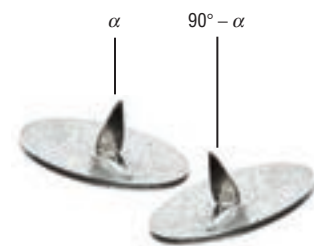
Derékszögű háromszög hegyesszögei egymás pótszögei, ezért elegendő az egyik szöget meghatározni. Írjuk fel az α hegyesszög tangensét:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{6\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = 2. \text{ Innen } \alpha \approx 63,43^\circ, \text{ ahonnan } \beta = 90^\circ - \alpha \approx 26,57^\circ \text{ adódik.}$$

Tehát a háromszög befogói: $a = 6\sqrt{5}$ cm, $b = 3\sqrt{5}$ cm hosszúságúak, hegyesszögei: $\alpha \approx 63,43^\circ$, $\beta \approx 26,57^\circ$.



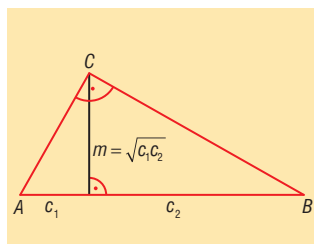
4.1. ábra Derékszögű háromszög



4.2. ábra Szög és pótszög

2. módszer:

Vegyük észre, hogy a 4.1. ábrán a $CAT \triangle$ és a $BCT \triangle$ egy-egy befogójának hosszát ismerjük, és a háromszögek másik befogói egybeesnek. A befogók aránya pedig a derékszögű háromszögekben levő hegyesszög tangensével vagy kotangensével egyezik meg.



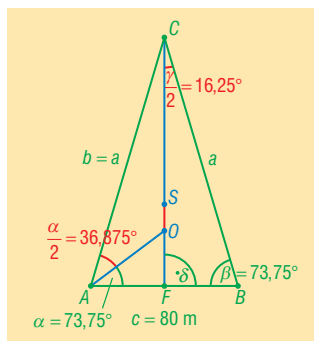
4.3. ábra Magasságtétel

Írjuk fel tehát mindkét háromszögben az α szög tangensét: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{3}$ és $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{m}$. Innen $\frac{m}{3} = \frac{12}{m}$, ahonnan $m^2 = 36$ (magasságtétel, 4.3. ábra), $m > 0$ felhasználásával $m = 6$ cm adódik.

Visszahelyettesítve: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{3} = 2$, így a háromszög szögei: $\alpha \approx 63,43^\circ$ és $\beta = 90^\circ - \alpha = 26,57^\circ$. Az ABC háromszögben: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ és $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, ahonnan a befogók: $a = 15 \sin 63,43^\circ \approx 13,42$ cm és $b = 15 \cos 63,43^\circ \approx 6,71$ cm.



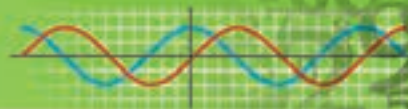
2. példa Egy háromszög alakú, vízszintes síkon fekvő telek egyik határszakaszának hossza 80 m, a rajta fekvő szögek $73^\circ 45'$ -esek. A tulajdonos a telek súlypontjába egy szilvafát ültetett. A fa öntözéséhez egy locsolófejet helyezett el a telek azon pontjában, amely egyenlő távolságra van a telek határvonalaitól. Legalább milyen hatótávolságú öntözőfejet kell telepítenie ahhoz, hogy a szilvafa öntözését biztosítani tudja?



4.4. ábra Egyenlő szárú háromszög

Megoldás:

Készítsünk ábrát! A feladat szövege szerint a 80 m hosszúságú oldalon fekvő szögek egyenlő nagyságúak, ezért a háromszög egyenlő szárú. A háromszög súlypontja a fentiek és a súlypontra vonatkozó tétel szerint az alaphoz tartozó magasság (CF) F ponthoz közelebbi harmadolópontja (S). Így az S pontban található a szilvafa. A locsolófej a háromszög oldalaitól egyenlő távolságra van, a háromszög belső szögfelezőire vonatkozó tétel alapján ez a pont a háromszögbe írható kör középpontja (O , a belső szögfelezők közös pontja). Tehát a locsolófejet az O pontban helyezték el, így az SO szakasz hosszát kell meghatározni. (4.4. ábra) Az SO szakasz hossza előáll az SF és az OF szakaszok hosszának különbségként. Az S pont az $ABC \triangle$ súlypontja, így $SF = \frac{CF}{3}$. Az AFC derékszögű háromszögben ismerjük az α szöget, az α szög melletti befogót, és keressük az α szöggel szemközti befogót. Felírjuk az α szög tangensét: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{CF}{AF}$, innen $CF = AF \cdot \operatorname{tg} \alpha = 40 \cdot \operatorname{tg} 73,75^\circ \approx 137,23$ m, ahonnan $SF \approx 45,74$ m. Az AFO derékszögű háromszögben ismerjük az $\frac{\alpha}{2} = 36,875^\circ$ szöget, e szög melletti befogót, és keressük a



szöggel szemközti befogót. Felírjuk az $\frac{\alpha}{2} = 36,875^\circ$ szög tangensét:
 $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{OF}{AF}$, innen $OF = 40 \cdot \operatorname{tg} 36,875^\circ \approx 30,01$ m. Tehát az öntözőfej
 legalább $SO = SF - OF = 15,73$ m hatótávolságú.



3. példa A Bermuda-háromszög a Florida keleti partján lévő Miami, a Bermuda-szigetek és Puerto Rico által határolt területen található.

A Bermuda-szigetek–Puerto Rico távolság: 1500 km, a Bermuda-szigetek – Miami távolság: 1510 km, a Bermuda szigetektől a Puerto Rico és Miami által meghatározott szakasz $55^\circ 52'$ -es szög alatt látszik. Egy-egy közlekedési eszköz eltűnésekor hány km^2 területet kellett átkutatni a túlélők megtalálása érdekében?

A kapott értéket hasonlítsuk össze a térképészek által megadott 704000 km^2 nagyságú területtel!



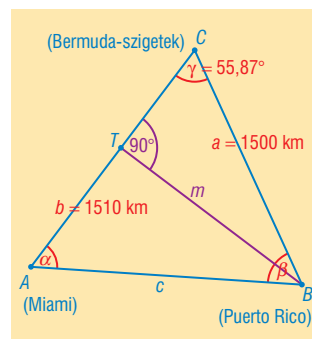
4.5. ábra Bermuda-háromszög
 A fenti térképen megjelölt három kis terület a csúcsa annak a háromszögnek, amelyet az Ördög elveszett tornácának, a Titokzatos félhomálynak, Varázslatos tengeri zónának és az Ördög háromszögének is neveznek

Megoldás:

Készítsünk ábrát! A szöveg szerint adott a háromszög két oldala (a, b), az általuk bezárt szög (γ), és keressük a háromszög területét (T). A háromszög területének kiszámításához meg kell határozni az egyik ismert oldalhoz tartozó magasságot. Melyik magasságot célszerű berajzolni? Mivel γ hegyesszög és $b > a$ miatt $\beta > \alpha$ teljesül, ezért a B csúcsból induló magasság a háromszögön belül halad. Húzzuk be tehát a B csúcsból induló magasságot! (4.6. ábra)

A CTB derékszögű háromszögben $\sin \gamma = \frac{m}{a}$, ahonnan $m = a \cdot \sin \gamma$.

Így az ABC_Δ területe: $T = \frac{b \cdot m}{2} = \frac{b \cdot a \cdot \sin \gamma}{2}$.



4.6. ábra A 3. példa megoldásához



Tétel A háromszög területe kiszámítható egy hegyesszöge és az ezt a szöget közrefogó két oldalának segítségével:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}.$$

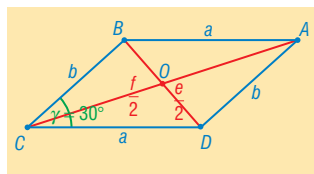
Vajon milyen összefüggést kapunk a területre, ha a γ szög derékszög, illetve tompaszög? Ennek a kérdésnek a megválaszolására később még visszatérünk.

A feladat adatait behelyettesítve a terület kifejezésébe, a Bermuda-háromszög területére $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{1500 \cdot 1510 \cdot \sin 55,87^\circ}{2} = 937\,445,76 \text{ km}^2$ adódik.

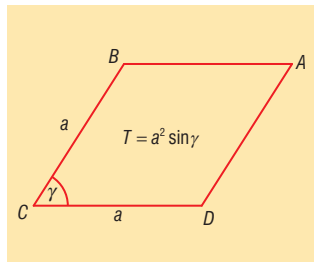
A területre kapott érték nagymértékben eltér a megadott 704000 km^2 értéktől! Mi lehet a magyarázat az eltérésre? A valóság-



4.7. ábra Rejtélyes eltűnések a Bermuda-háromszögben



4.8. ábra Paralelogramma



4.9. ábra Rombusz területe

ban a Bermuda-háromszög a földgömb felszínén van, tehát egy gömbfelület egy bizonyos részének területét kellene kiszámítani. A kiszámításhoz a térképészetben használatos gömbháromszögtani ismeretekre lenne szükségünk. Síkmértani módszerekkel ilyen nagyságú távolságok esetén nagy eltérés adódik. Csak akkor szabad földdarabok területét így módon kiszámítani, ha a távolságok nem túl nagyok, mert ilyenkor a gömbfelszín kicsiny darabja jól közelíthető egy síkidommal.



4. példa Egy paralelogramma kerülete 50 cm, területének nagysága 72 cm^2 , egyik szöge 30° . Mekkora az oldalai?

Megoldás:

Készítsünk ábrát! (4.8. ábra)

A feladat szövege szerint a paralelogramma kerülete 50 cm, a 4.6. ábra alapján (1) $2a + 2b = 50$ egyenlet áll fenn. A paralelogramma felbontható az egyik átlója (BD) segítségével két egybevágó háromszögre.



Tétel A paralelogramma területe meghatározható egy hegyesszöge és az ezt a szöget közrefogó két oldalának segítségével:

$$T = 2 \cdot \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = a \cdot b \cdot \sin \gamma.$$

A feladatban szereplő paralelogramma területe 72 cm^2 , a terület formulájába helyettesítve: (2) $a \cdot b \cdot \sin 30^\circ = 72$ egyenlet teljesül.

Az (1) és a (2) alatti egyenletekből álló egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszer:

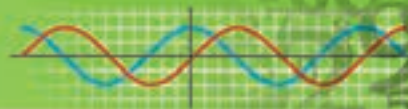
$$(1) \quad a + b = 25$$

$$(2) \quad a \cdot b = 144.$$

Az (1) alatti egyenletből kifejezzük az a -t: $a = 25 - b$, majd behelyettesítünk a (2) alatti egyenletbe: $(25 - b)b = 144$. A kijelölt műveletek elvégzése és rendezés után $b^2 - 25b + 144 = 0$ adódik, ahonnan $b_1 = 9 \text{ cm}$, $b_2 = 16 \text{ cm}$. Így $a_1 = 16 \text{ cm}$, $a_2 = 9 \text{ cm}$. Tehát a paralelogramma oldalai: 9 cm, 16 cm, 9 cm, 16 cm.



5. példa Három falu (A, B, C) egy hegyesszögű háromszög három csúcsában fekszik. A három falu közösen egy pihenőhelyet épített. A pihenő mindhárom falutól 3,4 km távolságban van. A B falu a másik két falutól 5 és 6 kilométer távolságban van. Mekkora a távolság az A és a C falu között?



Megoldás:

Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével! Mivel a pihenő mindhárom falutól egyenlő (3,4 km) távolságban van, ezért a pihenő a falvak által meghatározott háromszög köré írt körének középpontjában (O) van. A köré írt kör középpontja a háromszög oldalfelező merőlegeseinek közös pontja, amely hegyesszögű háromszög esetén a háromszög belső pontja. Ennek megfelelően a 4.10. ábrán D , E , F pontok felezőpontok, és a D , E , F -nél jelölt szögek derékszögek. A szokásos jelölésekkel élve az $ABC\Delta$ A csúcsánál levő belső szög α , a B csúcsnál β , a C csúcsnál γ . A középponti és kerületi szögek tétele alapján $COB\angle = 2\alpha$, így $COE\angle = \alpha$. Hasonlóan adódik, hogy $AOF\angle = \beta$ és $BOD\angle = \gamma$.

Az OEC derékszögű háromszögben $\sin \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$, ahonnan

$a = 2R \cdot \sin \alpha$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $b = 2R \cdot \sin \beta$, $c = 2R \cdot \sin \gamma$.



Tétel Egy hegyesszögű háromszög bármelyik szöge, e szöggel szemközti oldala és köré írt körének sugara között $a = 2R \cdot \sin \alpha$, $b = 2R \cdot \sin \beta$, $c = 2R \cdot \sin \gamma$ összefüggések állnak fenn.

Ha az α szög derékszög vagy tompaszög, akkor vajon milyen összefüggést írhatunk fel a , R , α között? E kérdés megválaszolására később még visszatérünk.

Alkalmazhatjuk a feladatunk megoldásában az imént kapott összefüggéseket: $5 = 6,8 \cdot \sin \alpha$, $b = 6,8 \cdot \sin \beta$, $6 = 6,8 \cdot \sin \gamma$. Innen $\alpha \approx 47,33^\circ$, $\gamma \approx 61,93^\circ$ és $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 70,74^\circ$, ahonnan $b = 6,8 \cdot \sin \beta = 6,8 \cdot \sin 70,74^\circ \approx 6,42$ km. Tehát az A és a C falu között a távolság 6,42 km.

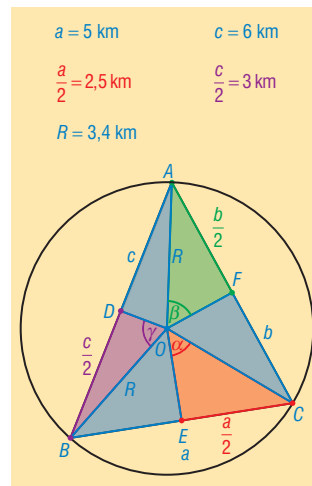


6. példa A közúton használatos stoptábla mérete 60 cm $\times$ 60 cm-es, az iskolai közlekedési parkokban használatosaké pedig 30 cm $\times$ 30 cm-es (4.11. ábra).

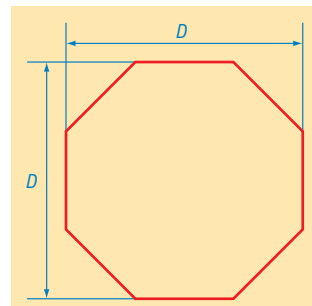
- Legalább mekkora legyen annak a kör alakú lemeznek a sugara, amelyből egy 60 cm $\times$ 60 cm-es stoptáblát (egy szabályos nyolcszöget) ki tudunk vágni? Hány dm² hulladék keletkezik?
- Ha egy adag piros festékkel az iskolai parkban használatos táblák közül 24-et tudunk befesteni, akkor hány táblára elegendő ez a közúton használatosak közül?

Megoldás:

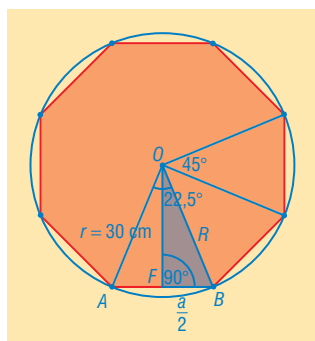
a) A szöveg szerint keressük a nyolcszög köré írt kör sugarát (R), a keletkező körszeletek területét, és a 4.11. ábra alapján ismerjük a beírt kör átmérőjét: 60 cm. Páros sok oldalú szabályos sokszögekre vonatkozó



4.10. ábra Hegyesszögű háromszög és köré írt köre



4.11. ábra Szabályos nyolcszög alakú jelzőtábla mérete: ($D \times D$)



4.12. ábra Szabályos nyolcszög

feladatok megoldásánál gyakran vezet célra, ha a sokszög szimmetriaközéppontja (O) és valamely oldalának végpontjai (A, B) által meghatározott egyenlő szárú háromszöggel dolgozunk. (4.12. ábra)

Ekkor az n oldalú szabályos sokszög esetén a középponti szög:

$$\angle BOA = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ, \quad OB = OA = R \text{ és } OF = r \text{ (ahol } F \text{ az } AB \text{ szakasz felezőpontja).}$$

A BOF derékszögű háromszögben $\cos 22,5^\circ = \frac{r}{R} = \frac{30}{R}$, ahonnan $R \approx 32,47$ cm. Tehát a kör alakú lemez sugara legalább 32,47 cm. A hulladékmennyiség egyenlő a nyolc egybevágó körszelet területének összegével. Egy körszelet területének nagysága egyenlő $T_{AOB\Delta} - T_{\text{körcikk}}$.

Az előző példa alapján: $T_{AOB\Delta} = \frac{R \cdot R \cdot \sin 45^\circ}{2} = \frac{32,47^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \approx 372,75 \text{ cm}^2$. A körcikk területe $T_{\text{körcikk}} = \frac{R^2 \pi}{360^\circ} \alpha$, ahol α a körcikk középponti szöge fokban megadva, behelyettesítve ebbe a kifejezésbe: $T_{\text{körcikk}} = \frac{32,47^2 \pi}{360^\circ} 45^\circ \approx 414,02 \text{ cm}^2$. A körszelet területe:

$$T_{\text{körszelet}} = T_{AOB\Delta} - T_{\text{körcikk}} = 41,27 \text{ cm}^2 = 0,4127 \text{ dm}^2.$$

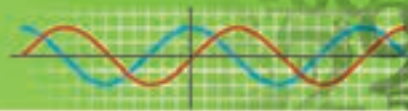
Így a keletkezett hulladék 3,302 dm².

b) A két tábla hasonló, a hasonlóság aránya 1:2, tehát a területük aránya 1:4. A festék tehát negyedannyi, azaz 6 darab közúton használatos táblára elegendő.



Oldjuk meg!

- Egy derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság 9:16 arányú részekre bontja. A háromszög legkisebb oldalának hossza 12 cm. Mekkora a háromszög hiányzó oldalai és szögei?
- A P külső pontból a 13 cm sugarú körhöz húzott szelő a kört A és B pontokban metszi. A szelő és a kör K középpontjának távolsága 12 cm. A szelő hosszabbik szeletének hossza 21 cm.
 - Milyen hosszú érintőszakasz húzható a P pontból a körhöz?
 - Mekkora a PK ?
 - Mekkora szöget zár be PK az érintővel?
- Egy háromszög két oldalának hossza a és b , az általuk bezárt szög γ . Mekkora a háromszög területe, ha
 - $a = 5$ cm; $b = 6$ cm; $\gamma = 70^\circ$;
 - $a = 9,2$ dm; $b = 68$ cm; $\gamma = 56^\circ 26'$;
 - $a = 1,2$ m; $b = 98$ cm; $\gamma = 66,73^\circ$?
- Egy paralelogramma két szomszédos oldalának hossza a és b , az általuk bezárt szög γ . Mekkora a paralelogramma területe, ha
 - $a = 9$ cm; $b = 6$ cm; $\gamma = 32,5^\circ$;
 - $a = 8,2$ dm; $b = 78$ cm; $\gamma = 60^\circ$;
 - $a = 2,2$ m; $b = 153$ cm; $\gamma = 76^\circ 45'$
 - $a = b = 10,3$ cm; $\gamma = 36^\circ 25'$



5. Mekkora a háromszög köré írt kör sugara, ha adott (a szokásos jelölésekkel):
- $a = 5 \text{ cm}$, $\alpha = 70^\circ$;
 - $b = 6,8 \text{ dm}$, $\beta = 57^\circ 24'$;
 - $c = 15,2 \text{ m}$, $\gamma = 66,73^\circ$?
6. Karcsi deltoid alakú papírsárkányt készít. A deltoid két szemközti szöge: 30° és 150° , egyik oldalának hossza 25 cm .
- Milyen hosszúságú pálcákat kell az átlók mentén elhelyezni?
 - Hány cm^2 papírt kell vásárolnia a sárkány befedéséhez, ha a felhasznált papírmennyiség 10%-a hulladék?
7. Az n oldalú szabályos sokszög köré írt körének sugara 1 m hosszúságú. Számítsd ki a szabályos sokszögnek az oldalát és a legrövidebb átlójának hosszát! Hány százaléka lesz a sokszög területe a kör területének ha
- $n = 3$;
 - $n = 6$;
 - $n = 9$;
 - $n = 12$?

5. Térgeometriai számítások

Az alábbiakban néhány térbeli alkalmazást mutatunk be. A térgeometriai feladatok megoldásakor megfelelő síkmetszeteket, derékszögű háromszögeket keresünk. Ezek segítségével határozzuk meg a keresett szakaszokat, szögeket.



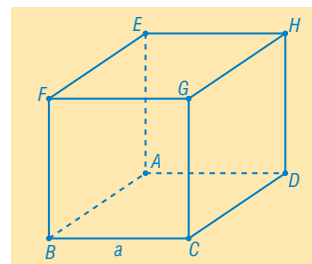
1. példa Mekkora szöget zár be a kocka (5.1. ábra)

- AD és FB éle?
- EC testátlója és $ABCD$ lapja?

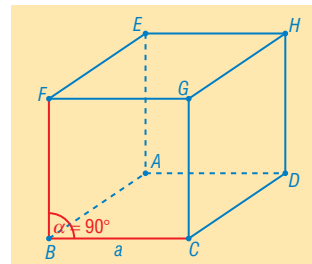
Megoldás:

a) Az AD és FB kitérő élek. Hajlásszögük egyenlő a tér egy tetszőleges pontjába eltoltt képek hajlásszögével. Legyen ez a tetszőleges pont a kocka B csúcsa, ekkor az AD él képe a BC él, az FB képe önmagának. (5.2. ábra) Tehát az AD és az FB élek hajlásszöge 90° .

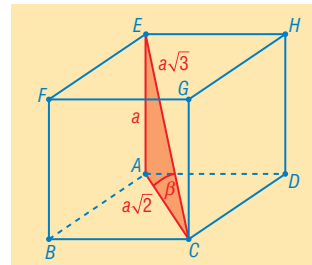
b) A szöveg szerint egy egyenes és egy sík hajlásszögét keressük. Mit is értünk egy egyenes és egy sík hajlásszögén? Ha az egyenes nem merőleges a síkra, akkor e két terelem hajlásszögén az egyenes és az egyenes síkra vonatkozó merőleges vetületének szögét értjük. EC nyilvánvalóan nem merőleges az $ABCD$ síkjára, EC szakasz merőleges vetülete $ABCD$ síkra az AC szakasz. A keresett hajlásszög az 5.3. ábrán β -val jelölt szög. Korábbi ismereteinkből tudjuk, hogy az $ABCD$ négyzet átlója kifejezhető a négyzet oldalával (a kocka élével): $a\sqrt{2}$. A CEA derékszögű háromszögben $\text{tg } \beta = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ahonnan $\beta \approx 35,26^\circ$. Tehát az EC testátló és $ABCD$ lap hajlásszöge $35,26^\circ$.



5.1. ábra Kocka



5.2. ábra Kitérő élek hajlásszöge



5.3. ábra Egyenes és sík hajlásszöge



5.4. ábra XIX. századi felvétel a Kr. e. XXVI. században épült piramisról



Az **el-gízai piramis**, más néven **Hufu-piramis** vagy **Kheopsz-piramis**, az egyiptomi óbirodalmi Hufu fáraóról (*Ahet Hufu*, „Hufu horizontja, fényhegye”) elnevezett piramis. **Ókori**



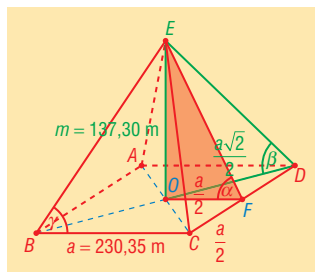
neve:

Az el-gízai piramis a legrégebbi és egyben az egyedüli fennmaradt csoda az ókori világ hét csodája közül. Magassága 146,7 méter, alapéleinek hossza 232,4 méter volt. Anyaga helyi mészkő, asszuáni gránit, turai mészkő. A mai egyiptomi főváros, Kairó közvetlen közelében áll, és a Föld egyik legismertebb turistalátványossága. Az el-gízai piramismezőt alkotó három királpiramis egyike.



2. példa Az egyiptomi Kheopsz-piramis szabályos négyoldalú gúla, mai magassága 137,3 méter, alapéle 230,35 méter hosszúságú.

- Mekkora szöget zár be
- az oldallap és az alaplap?
 - az oldalél és az alaplap?
 - az oldalél és az alapél?



5.5. ábra Szabályos négyoldalú gúla

Megoldás:

Készítsünk ábrát! A feladat a) részében két metsző sík, a b) részében egyenes és sík, a c) részében két egyenes hajlásszögére vagyunk kíváncsiak. Mit értünk metsző síkok hajlásszögén? Tekintsük a két sík metszésvonalának egy tetszőleges pontját! Ebben a pontban mindkét síkban merőlegest állítunk a metszésvonalra, a két sík hajlásszögén e két merőleges hajlásszögét értjük. Ennél a feladatnál az oldallap és az alaplap hajlásszöge az 5.5. ábra α -val jelölt szöge. Az oldalél és az alaplap hajlásszöge az 5.5. ábra β -val jelölt szöge, az oldalél és az alapél hajlásszöge az 5.6. ábra γ -val jelölt szöge.

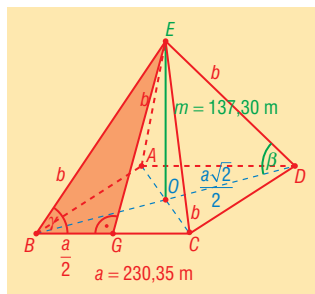
a) Az EOF derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{\frac{a}{2}} = \frac{137,3}{115,175} \approx 1,1921$.

Innen az oldallap és az alaplap hajlásszöge $\alpha \approx 50,01^\circ$.

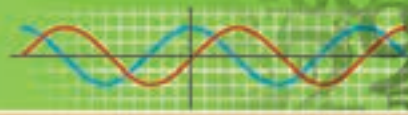
b) A DEO derékszögű háromszögben a β szög melletti befogó feleakkora hosszúságú, mint az alaplap átlója: $OD = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{230,35\sqrt{2}}{2} \approx 162,88$ m, így $\operatorname{tg} \beta = \frac{m}{OD} = \frac{137,3}{162,88} \approx 0,8429$. Így az oldalél és az

alaplap hajlásszöge $\beta \approx 40,13^\circ$.

c) A γ szög meghatározásához először az oldalél hosszát számítjuk ki. (5.6. ábra) Alkalmazzuk Pitagorasz tételét a DEO derékszögű három-



5.6. ábra Alapél-oldalél szöge β



szög: $b = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 213,03 \text{ m}$. A BGE derékszögű háromszögben $\cos \gamma = \frac{2}{b} = \frac{a}{2b} \approx 0,5407$, innen az oldalél és az alapél hajlásszöge $\gamma \approx 57,27^\circ$.



3. példa Valamely CT templomtorony C tetőpontja a T talpponttal egy vízszintes síkban levő 40 m hosszúságú AB alapszakasz A pontjából 60° -os, az AB szakasz F felezőpontjából 45° -os emelkedési szögben látszik. Tudjuk továbbá, hogy $ATB \angle = 90^\circ$.

- Mekkora a torony magassága?
- Mekkora emelkedési szög alatt látszik a torony tetőpontja a B pontból?

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát! Jelöljük a torony magasságát x -szel! (5.7. ábra) $ACTF \Delta$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $TF = CT = x$.

Az $ABT \Delta$ derékszögű, így Thalész tétele értelmében $TF = \frac{AB}{2} = 20 \text{ m}$.

A fentiek miatt a torony magassága 20 m .

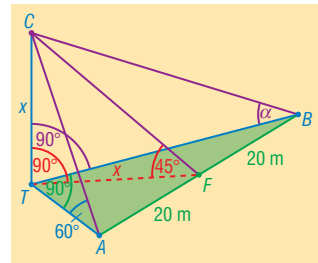
b) Az α szög meghatározásához a BCT derékszögű háromszög BC vagy TB oldalát kell kiszámítani. A TB oldal az ABT derékszögű háromszögnek is oldala. Így ha a TA befogót meghatározzuk, akkor Pitagorasz tételének alkalmazásával (ABT derékszögű háromszögre) TB kiszámítható. Az ACT derékszögű háromszögben $\tan 60^\circ = \frac{20}{AT}$, innen

$$AT = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ m} \approx 11,55 \text{ m}.$$

ABT derékszögű háromszögre alkalmazzuk Pitagorasz tételét:

$$TB = \sqrt{40^2 - \left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{20\sqrt{33}}{3} \approx 38,30 \text{ m}.$$

A BCT derékszögű háromszögben $\tan \alpha = \frac{CT}{TB} = \frac{20}{38,30} \approx 0,5222$, innen a keresett emelkedési szög $27,58^\circ$.



5.7. ábra A torony magassága

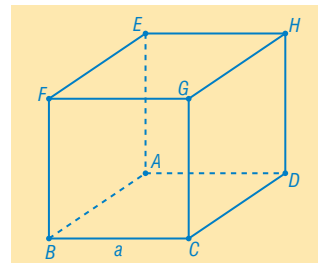


5.8. ábra A szegedi Dóm



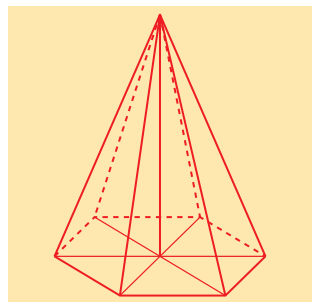
Oldjuk meg!

- Mekkora szöget zár be a kocka (5.9. ábra)
 - AG testátlója és FB éle?
 - AG testátlója és CH lapátlója?
- Mekkora a szabályos tetraéder két lapjának hajlásszöge?



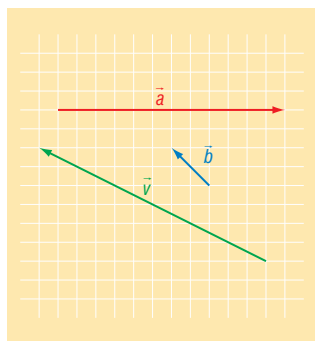
5.9. ábra Kocka

3. Valamely torony C tetőpontja a T talpponttal egy vízszintes síkban levő 80 m hosszúságú AB alapon A pontjából 30° -os, az AB szakasz F felezőpontjából 45° -os emelkedési szögben látszik. Tudjuk továbbá, hogy $TBA\alpha = 90^\circ$.
- Mekkora a torony magassága?
 - Mekkora emelkedési szög alatt látszik a torony magassága a B pontból?
4. Szabályos hatoldalú gúla alapéle 10 cm, oldaléle $10\sqrt{2}$ cm hosszúságú. (5.10. ábra) Mekkora szöget zár be
- az oldallap és az alaplap?
 - az oldalél és az alaplap?
 - az oldalél és az alapél?
 - két szomszédos oldallap?



5.10. ábra Szabályos hatoldalú gúla

6. Vektorok a koordinátasíkon



6.1. ábra Az 1. példához

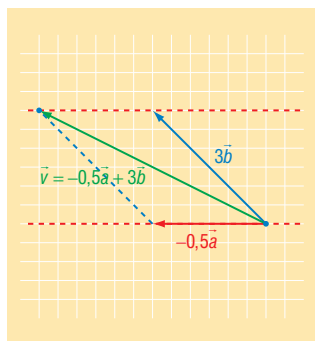
Korábbi tanulmányaink során megismerkedtünk már a vektor fogalmával, alkalmaztuk a vektorműveletekről és azok néhány tulajdonságáról tanult ismereteinket, illetve vektorokat bontottunk fel különböző irányú összetevőkre. Az alábbi példában néhány fontos részletet elevenítettünk fel.



1. példa Bontsuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{a}$ vektorral és $\vec{b}$ vektorral párhuzamos összetevőkre! (6.1. ábra; A könnyebb összehasonlítás végett egy négyzetrácson ábrázoltuk a vektorokat.)

Megoldás:

Húzzunk párhuzamost a $\vec{v}$ vektor kezdő- és végpontján át az adott $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorral. A 6.2. ábra alapján az $\vec{a}$ vektorral párhuzamos összetevő (komponens): $-0,5\vec{a}$, a $\vec{b}$ vektorral párhuzamos összetevő: $3\vec{b}$. Így $\vec{v} = -0,5\vec{a} + 3\vec{b}$.

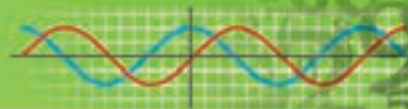


6.2. ábra Az összetevők nem feltétlenül egyállásúak a megadott vektorokkal



Vegyük észre, hogy $\vec{v}$ előállítható $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ alakban, ahol α és β valamilyen valós szám. (A konkrét példában $\alpha = -0,5$ és $\beta = 3$.) **Ilyenkor azt mondjuk, hogy a $\vec{v}$ (α és β együtthatókkal vett) lineáris kombinációja az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektoroknak.**

A fentiek tükrében az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg:



Tétel Ha adottak a síkban az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ nullvektortól különböző, nem párhuzamos vektorok, akkor a sík bármely $\vec{v}$ vektora (az összetevők sorrendjétől eltekintve) egyértelműen felbontható $\vec{a}$ vektorral és $\vec{b}$ vektorral párhuzamos összetevőkre.

Másképpen fogalmazva: Ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nullvektortól különböző, nem párhuzamos vektorok (bázisvektorok) a síkban, akkor bármely velük egy síkra illeszkedő (egysíkú) $\vec{v}$ vektorhoz pontosan egy olyan $(\alpha; \beta)$ valós számpár található, amelyre $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$.

Bizonyítás:

Húzzunk párhuzamost a $\vec{v}$ vektor kezdő- és végpontján át az adott $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorral. (6.3. ábra)

Az $\vec{OA}$ az $\vec{a}$ vektorral, az $\vec{OB}$ a $\vec{b}$ vektorral párhuzamos, ezért $\vec{OA} = \alpha \vec{a}$ és $\vec{OB} = \beta \vec{b}$. Mivel $\vec{v} = \vec{OA} + \vec{OB}$, ezért $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$. Ezzel beláttuk, hogy a felbontás létezik, már csak azt kell megmutatnunk, hogy más felbontás nem állíthatja elő ezt a $\vec{v}$ vektort.

Tegyük fel, hogy van egy másik felbontás is: $\vec{v} = \alpha' \cdot \vec{a} + \beta' \cdot \vec{b}$, ahol α', β' olyan valós számok, amelyekre $\alpha \neq \alpha', \beta \neq \beta'$ feltételek közül legalább az egyik teljesül, például a $\beta \neq \beta'$.

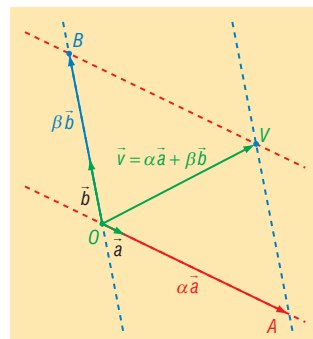
Vegyük a két felbontás különbségét:

$$\vec{0} = (\alpha - \alpha') \cdot \vec{a} + (\beta - \beta') \cdot \vec{b}$$

Mivel $\beta \neq \beta'$, ezért $\beta - \beta' \neq 0$ -vel oszthatunk, így rendezés után kapjuk, hogy

$$\vec{b} = -\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'} \cdot \vec{a}.$$

Így a $\vec{b}$ vektor az $\vec{a}$ vektorral párhuzamos vektor vagy nullvektor lenne, ez a feltevésünknek ellentmond. Emiatt $\beta \neq \beta'$ nem állhat fenn, azaz $\beta = \beta'$. Hasonlóan $\alpha = \alpha'$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy egyetlen felbontás létezik.



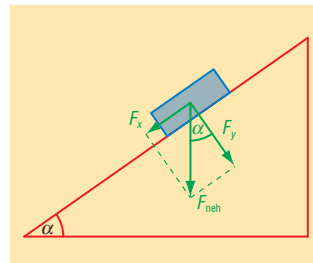
6.3. ábra Vektor felbontása adott vektorokkal párhuzamos összetevőkre

A természettudományok számos területén teszi egyszerűbbé a vektorokkal való műveletek elvégzését a vektorok egymásra merőleges komponensekre való bontása, koordináta-rendszerbe helyezése. (6.4. ábra) Ebben a leckében megismerkedünk a sík vektorainak, a vektorokkal végzett műveletek eredményeinek koordináta-rendszerben történő megadásával.

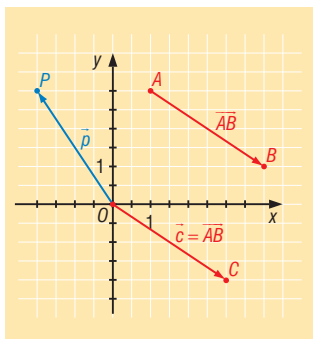
Egy vektorhoz a definíció értelmében végtelen sok olyan irányított szakasz van, amely azt meghatározza. Ezen irányított szakaszok közül bármelyik kiválasztható a vektor szemléltetésére. A kiválasztott, irányított szakaszt a vektor **reprezentálásának** hívjuk.

A koordináta-rendszerben két módon adhatjuk meg (reprezentálhatjuk) a vektorokat:

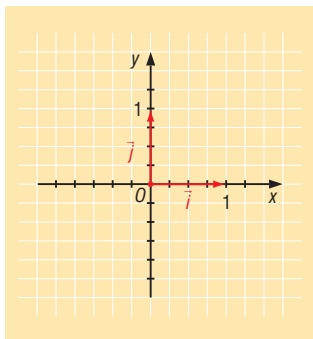
a) Az origó kezdőpontú, valamely P végpontú irányított szakaszt a P pont **helyvektorának** nevezzük. Általában a végpont betűjelének kisbetűjével jelöljük: $\vec{p}$. Az origó helyvektora a nullvektor.



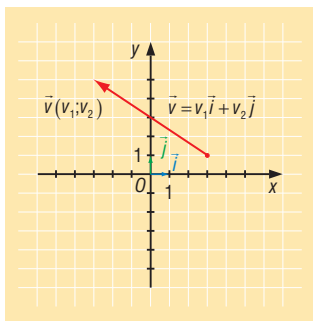
6.4. ábra A lejtőn levő testre ható nehézségi erő felbontása a lejtővel párhuzamos (F_x) és a lejtőre merőleges komponensekre (F_y)



6.5. ábra A P pont helyvektora ($\overrightarrow{OP} = \vec{p}$), az $\overrightarrow{AB}$ szabad vektor és origó kezdőpontú reprezentánsa ($\overrightarrow{OC} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$)



6.6. ábra Bázisvektorok



6.8. ábra Vektor koordinátái

A helyvektor fogalmát a koordináta-rendszertől függetlenül is használjuk: bármely kijelölt, rögzített O (vonatkoztatási) pontból a sík (a tér) pontjaiba mutató irányított szakaszokat is helyvektoroknak nevezzük.

b) A nem origó kezdőpontú irányított szakaszokat **szabad vektoroknak** hívjuk. **A vektorok fogalmából adódik, hogy bármely szabad vektorhoz pontosan egy vele azonos helyvektor tartozik.** Ezt a helyvektort a szabad vektor **origó kezdőpontú reprezentánsának** hívjuk. (6.5. ábra) Célszerű a szabad vektorokat e reprezentánsukkal szemléltetni.

Legyenek az $(1;0)$ és a $(0;1)$ koordinátájú pontok helyvektorai az $\vec{i}$ és a $\vec{j}$ vektorok, ekkor az $\vec{i}$ és a $\vec{j}$ vektorok egységnyi hosszúságúak (egységvektorok), és egymásra merőlegesek. A választásnak megfelelő $\vec{i}$ és $\vec{j}$ vektorok az (x,y) koordinátásík bázisvektorai (nem párhuzamosak, nem nullvektorok; 6.6. ábra). A fentiekből tudjuk, hogy bármely velük egysíkú vektor egyértelműen előáll lineáris kombinációjuként.



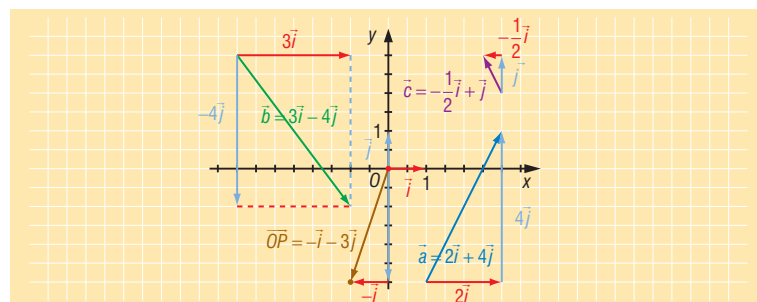
2. példa Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben az

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}, \quad \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} \quad \text{és az} \quad \overrightarrow{OP} = -\vec{i} - 3\vec{j} \quad \text{vektorokat!}$$

Megoldás:

A vektor definíciója alapján $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorok kezdőpontja a koordinátasík bármely pontja lehet, az $\overrightarrow{OP}$ vektor kezdőpontja az origó.

A megoldást a 6.7. ábrán láthatjuk.



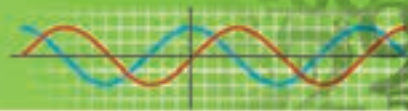
6.7. ábra Vektor szorzása valós számmal, vektorok összeadása



Tudjuk, hogy egy vektorhoz pontosan egy felbontás ($\vec{i}$ -ral és $\vec{j}$ -ral párhuzamos összetevőkre való) és egy felbontáshoz pontosan egy vektor tartozik. Minden vektorhoz hozzárendelhetjük az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ együtthatóiból álló rendezett számpárt. Pontosabban:



Definíció Az (x,y) koordinátasík $\vec{v}$ vektorának $v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ alakú előállításában a v_1 együtthatót a $\vec{v}$ vektor első, a v_2 együtthatót a $\vec{v}$ vektor második koordinátájának nevezzük. (A $\vec{v}$ vektor koordinátái: a $(v_1; v_2)$ rendezett számpár.) Jelölése: $\vec{v}(v_1; v_2)$.



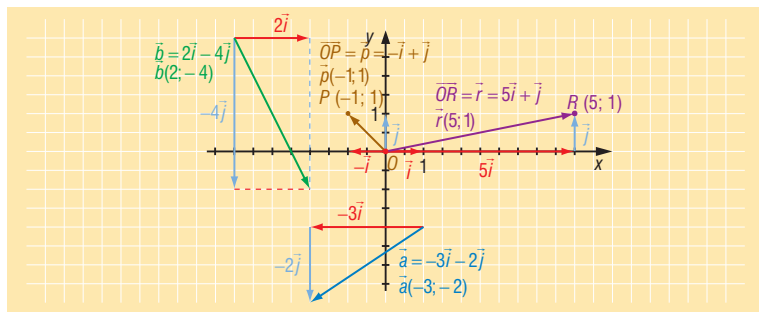
Belátható, hogy az $\vec{i}$ vektor koordinátái (1;0), a $\vec{j}$ vektoré (0;1) és a nullvektor koordinátái (0;0).



3. példa Határozzuk meg az $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorok és a $P(-1;1)$, illetve az $R(5;1)$ pontok helyvektorainak koordinátáit! (6.9. ábra)

Megoldás:

Rajzoljuk be a $P(-1;1)$, illetve az $R(5;1)$ pontok $\vec{p}$, $\vec{r}$ helyvektorait! (6.10. ábra) A vektorokat bontsuk fel $\vec{i}$ -ral és $\vec{j}$ -ral párhuzamos összetevőkre: $\vec{a} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{p} = -\vec{i} + \vec{j}$ és $\vec{r} = 5\vec{i} + \vec{j}$ (6.10. ábra). A vektor koordinátáinak definíciója alapján $\vec{a}(-3;-2)$, $\vec{b}(2;-4)$, $\vec{p}(-1;1)$ és $\vec{r}(5;1)$.



6.10. ábra Vektorok felbontása, vektor koordinátái



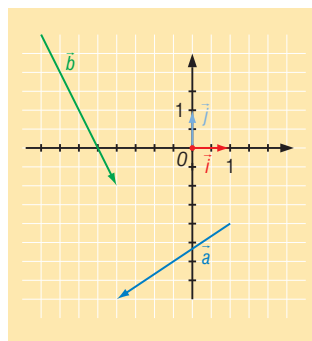
Vegyük észre, hogy a P , Q pontok és a hozzájuk tartozó $\vec{p}$, $\vec{r}$ helyvektorok koordinátái azonosak. Ez a tulajdonság a pontok és a vektorok koordinátáinak definíciója miatt mindig igaz. **A koordinátáson bármely pont és a pont helyvektorának koordinátái megegyeznek.**



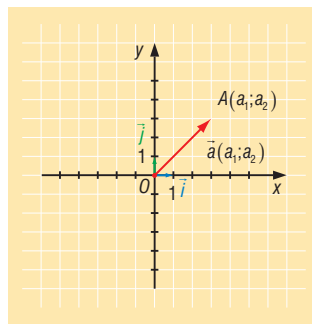
4. példa Tükrözzük az $A(12;5)$ pont helyvektorát az x , az y tengelyekre és az origóra! Határozzuk meg az így kapott vektorok koordinátáit!

Megoldás:

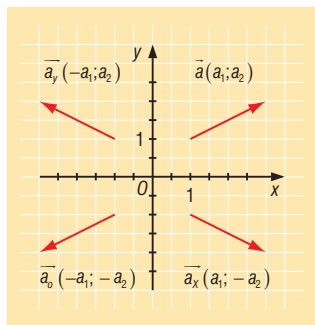
Ábrázoljuk az $\vec{OA}$ vektort! Az említett tükrözéseknél az O pont fix-pont, az $A(a_1;a_2)$ pont tükörképei rendre: $A'(a_1;-a_2)$, $A''(-a_1;a_2)$, $A'''(-a_1;-a_2)$. Az $\vec{OA}(a_1;a_2)$ helyvektor x tengelyre vonatkozó tükörképe az $\vec{OA}'(a_1;-a_2)$ vektor. Szavakkal: az $\vec{OA}'$ első koordinátája egyenlő az $\vec{OA}$ vektor első koordinátájával, a második koordinátája



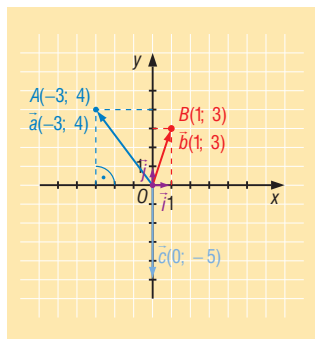
6.9. ábra A 3. példához



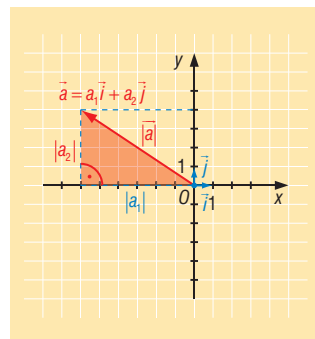
6.11. ábra Az A pont és helyvektorának koordinátái



6.13. ábra Vektor tükörképei az origóra és az x , y tengelyekre vonatkozóan

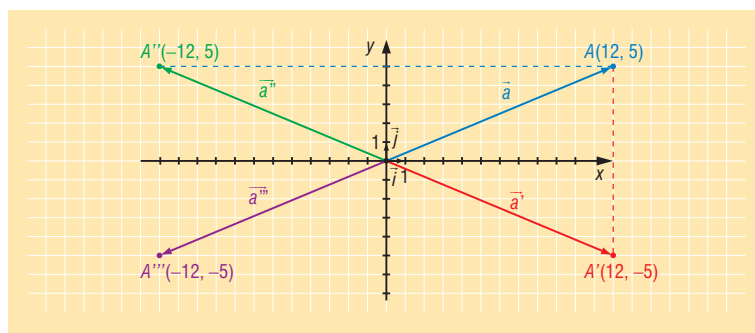


6.14. ábra Vektor hossza



6.15. ábra Vektor hossza

pedig az $\overrightarrow{OA}$ vektor második koordinátájának ellentettje. Az y tengelyre vonatkozó tükörkép $\overrightarrow{OA''}(-a_1; a_2)$ és az origóra vonatkozó tükörkép $\overrightarrow{OA'''}(-a_1; -a_2)$. Így a keresett vektorok: $\overrightarrow{OA'}(12; -5)$, $\overrightarrow{OA''}(-12; 5)$ és $\overrightarrow{OA'''}(-12; -5)$. (6.12. ábra)



6.12. ábra Helyvektor tükörképei



5. példa Legyen $\vec{a}(-3; 4)$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$ és $\vec{c} = -5\vec{j}$! Számítsuk ki, milyen hosszú az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és a $\vec{c}$ vektor!

Megoldás:

Mivel az $\vec{i}$ és a $\vec{j}$ két egymásra merőleges egységvektor, ezért a vektorok velük párhuzamos összetevői is merőlegesek egymásra. Így az $\vec{a}$ hossza egy 3 és 4 egység oldalhosszúságú téglalap átlójának hossza. Vagyis $|\vec{a}|^2 = 3^2 + 4^2$, ahonnan $|\vec{a}| \geq 0$ miatt $|\vec{a}| = 5$.

Hasonlóan adódik, hogy $|\vec{b}|^2 = 1^2 + 3^2 = 10$, $|\vec{b}| = \sqrt{10}$. A vektor valós számmal való szorzásának értelmezése szerint $|\vec{c}| = 5|\vec{j}| = 5$. (6.14. ábra)

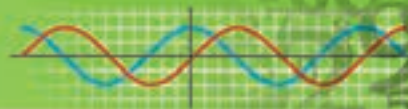


Tétel Az $\vec{i}$, $\vec{j}$ bázisvektorú, (x, y) koordinátáson egy tetszőleges $\vec{a}(a_1; a_2)$ vektor hossza egyenlő a vektor koordinátáinak négyzetösszegéből vont négyzetgyökkel, a matematika nyelven: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Bizonyítás:

I. eset: az $\vec{a}$ párhuzamos valamelyik bázisvektorral.

Ha az $\vec{a}$ párhuzamos az $\vec{i}$ -ral, akkor $\vec{a} = a_1\vec{i} = a_1\vec{i} + 0\vec{j}$ és $|\vec{a}| = |a_1| \cdot |\vec{i}| = |a_1|$. Ekkor az $\vec{a}$ koordinátái $(a_1; 0)$. Mivel



$|\vec{a}| = |a_1| = \sqrt{a_1^2} = \sqrt{a_1^2 + 0^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, ezért $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Hasonlóan adódik az állítás akkor is, ha az $\vec{a}$ párhuzamos a $\vec{j}$ -ral.

II. eset: az $\vec{a}$ nem párhuzamos sem az $\vec{i}$ -ral, sem a $\vec{j}$ -ral. Ekkor az $\vec{a}$ hossza egy $|a_1\vec{i}| = |a_1|$ és $|a_2\vec{j}| = |a_2|$ egység oldalhosszúságú téglalap átlójának hossza, azaz $|\vec{a}| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. (6.15. ábra)



Tétel

Adottak az $\vec{a}(a_1; a_2)$ és $\vec{b}(b_1; b_2)$ vektorok, és a λ valós szám.

Mutassuk meg, hogy az $\vec{a} + \vec{b}$, az $\vec{a} - \vec{b}$ és a $\lambda \vec{a}$ vektorok koordinátái rendre $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$ és $(\lambda a_1; \lambda a_2)$!

Bizonyítás:

A vektorok összeadására, valós számmal történő szorzására vonatkozó azonosságok és a vektor koordinátáinak definíciója alapján:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) + (b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + b_1\vec{i} + b_2\vec{j} = \\ &= a_1\vec{i} + b_1\vec{i} + a_2\vec{j} + b_2\vec{j} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j},\end{aligned}$$

ahonnan $\vec{a} + \vec{b}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

Szavakkal: összegvektor koordinátái az összeadandó vektorok megfelelő koordinátáinak az összegei.

Hasonlóan

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) - (b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} - b_1\vec{i} - b_2\vec{j} = \\ &= a_1\vec{i} - b_1\vec{i} + a_2\vec{j} - b_2\vec{j} = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j},\end{aligned}$$

ahonnan $\vec{a} - \vec{b}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Szavakkal: az $\vec{a} - \vec{b}$ különbségvektor koordinátái az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok megfelelő koordinátáinak a különbségei.

A vektorok valós számmal történő szorzására vonatkozó azonosságok és a vektor koordinátáinak definíciója alapján:

$$\lambda \vec{a} = \lambda(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) = \lambda(a_1\vec{i}) + \lambda(a_2\vec{j}) = \lambda a_1\vec{i} + \lambda a_2\vec{j},$$

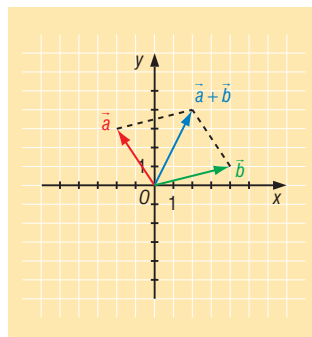
ahonnan $\lambda \vec{a}(\lambda a_1; \lambda a_2)$.

Szavakkal: vektor λ -szorosának koordinátái a koordináták λ -szorosai.

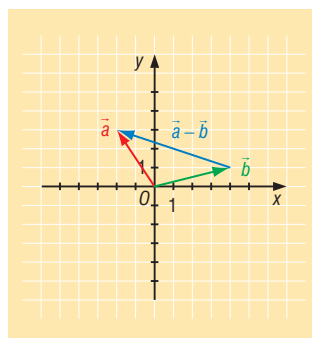


6. példa

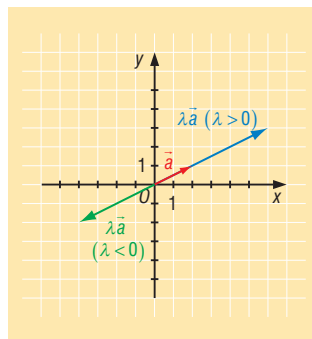
Legyenek adottak az $A(-2; 3)$ és a $B(5; 4)$ pontok, helyvektoraik rendre legyenek: $\vec{a}$ és $\vec{b}$. Adjuk meg a következő vektorok koordinátáit: a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{AB}$; c) $\frac{2}{3}\vec{a}$; d) $-\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$.



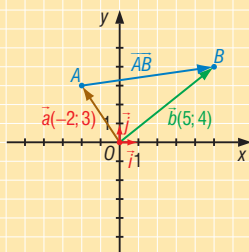
6.16. ábra Vektorok összege



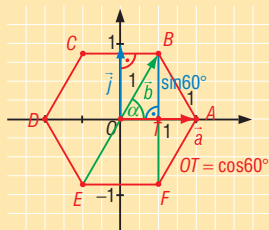
6.17. ábra Vektorok különbsége



6.18. ábra Vektor szorzása valós számmal



6.19. ábra Szabad vektor kifejezhető a végpontjába és a kezdőpontjába mutató helyvektorokkal



6.20. ábra Szabályos hatszög csúcsai

Megoldás:

Egy pont és a pont helyvektorának koordinátái megegyeznek, így $\vec{a}(-2; 3)$ és $\vec{b}(5; 4)$.

a) Az összegvektor koordinátáira vonatkozó szabály szerint: $\vec{a} + \vec{b}(-2 + 5; 3 + 4)$, azaz $\vec{a} + \vec{b}(3; 7)$.

b) A vektorok különbségének értelmezése szerint az $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ (6.19. ábra), azaz **szabad vektor egyenlő a végpontjához húzott helyvektor és a kezdőpontjához tartozó helyvektor különbségével**. A különbségvektor koordinátáira vonatkozó szabály szerint: $\overrightarrow{AB}(5 - (-2); 4 - 3)$, azaz $\overrightarrow{AB}(7; 1)$.

c) Vektor számszorosának koordinátáira vonatkozó szabály szerint: $\frac{2}{3}\vec{a}\left(-\frac{4}{3}; 2\right)$.

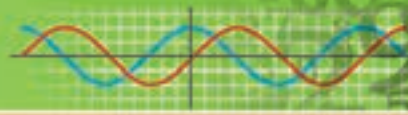
d) Vektor számszorosának és a vektorok összegének koordinátáira vonatkozó szabály szerint: $-\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}\left(-\frac{3}{2}(-2) + \frac{4}{5}5; -\frac{3}{2}3 + \frac{4}{5}4\right)$, azaz $-\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}\left(7; -\frac{13}{10}\right)$.



7. példa Az $ABCDEF$ egységnyi oldalhosszúságú szabályos hatszög szimmetria-középpontja az origó, a hatszög A csúcsa az x tengely pozitív félegyenesére illeszkedik. Adjuk meg a csúcspontok helyvektorainak koordinátáit és hosszát!

Megoldás:

Ábrázoljuk az $ABCDEF$ hatszöget a koordináta-rendszerben! (6.20. ábra) A szabályos hatszög egy-egy oldalához tartozó középponti szöge 60° -os és $OA = OB = OC = OD = OE = OF$. Ezért a szimmetria-középpont és egy-egy oldal két végpontja által meghatározott háromszögek szabályosak, így $OA = OB = OC = OD = OE = OF = 1$ és $\overrightarrow{OA}(1; 0)$, $\overrightarrow{OD}(-1; 0)$. Innen adódik, hogy a csúcspontok helyvektorainak hossza egységnyi. (A csúcspontok helyvektorai egységvektorok.) A hatszögnek az x és az y tengely szimmetriatengelye, így a B pont x tengelyre vonatkozó tükörképe az F pont, az y tengelyre vonatkozó tükörképe a C pont. Az origóra vonatkozó középpontos tükrözés a B pontot az E pontba viszi át. Tehát a B pont koordinátáinak ismeretében, a tükrözések tulajdonságainak felhasználásával a hiányzó helyvektorok megadhatók lesznek. A BOT egységnyi átfogójú derékszögű háromszögben a 60° -os szöggel szemkötti befogó $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a 60° -os szög melletti befogó $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, így $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Innen kapjuk, hogy



$C\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $E\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és $F\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Tehát a csúcspontok helyvektorainak koordinátái: $\overrightarrow{OA}(1;0)$, $\overrightarrow{OB}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{OC}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{OD}(-1;0)$, $\overrightarrow{OE}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és $\overrightarrow{OF}\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



Oldjuk meg!

1. Az $ABCD$ paralelogramma középpontja K , $\overrightarrow{KA}$ és $\overrightarrow{KB}$ vektorok legyenek rendre $\vec{a}$ és $\vec{b}$! Fejezzük ki $\vec{a}$ és $\vec{b}$ segítségével a $\overrightarrow{BC}$, a $\overrightarrow{CD}$, az $\overrightarrow{AC}$, a $\overrightarrow{BD}$, az $\overrightarrow{AK}$ és a $\overrightarrow{HD}$ vektorokat! (H az AB oldal A csúcsához közelebbi harmadolópontja.)

2. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi vektorokat!

a) $\vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ b) $\vec{b}(2;3)$ c) $\vec{c}(\cos 30^\circ; \sin 30^\circ)$

3. Állítsuk párba a felbontásukkal megadott vektorokat a velük egyenlő, koordinátaikkal megadott vektorokkal!

$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ $\vec{m}(\sqrt{2}; -1)$

$\vec{b} = -5\vec{j} + \vec{i}$ $\vec{n}(-5;1)$

$\vec{c} = -\frac{7}{3}\vec{j} + \frac{5}{2}\vec{i}$ $\vec{p}(4;2)$

$\vec{d} = \sqrt{2}\vec{i} - \vec{j}$ $\vec{q}\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{3}\right)$

$\vec{e} = -5\vec{i} + \vec{j}$ $\vec{r}(1; -5)$

4. Számítsuk ki az alább megadott vektorok hosszát!

a) $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$ b) $\vec{b}(2; -3)$ c) $\vec{c}\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ d) $\vec{d}(\cos 30^\circ; \sin 30^\circ)$

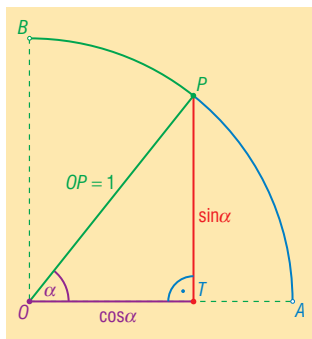
e) $\vec{e}(\cos 45^\circ; \sin 45^\circ)$ f) $\vec{f}(1; \tan 60^\circ)$

5. A derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-3;6)$, a $B(2;-6)$ és a $C(8;2)$ pontok. Helyvektoraik legyenek rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$! Adjuk meg az alábbi vektorok koordinátáit és hosszát!

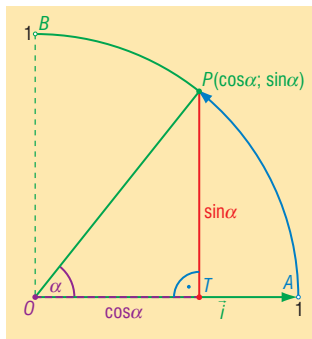
a) $3\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{7}{2}\vec{c}$ b) $\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{CB}$ d) $-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\vec{a}$

6. Az egységnyi oldalhosszúságú szabályos nyolcszög szimmetria-középpontja az origó, a nyolcszög egyik csúcsa az x tengely pozitív félegyenesére illeszkedik. Adjuk meg a csúcspontok helyvektorainak koordinátáit és hosszát!

7. A szinusz és a koszinusz szögfüggvények általános értelmezése



7.1. ábra Az α hegyesszög szinusz- és koszinusza szakaszhosszúságokkal szemléltetve



7.2. ábra Az $\vec{i}$ egységvektor α hegyesszöggel való elforgatásakor kapott egységvektor koordinátái

Az eddigiekben a hegyesszögek szögfüggvényeivel foglalkoztunk. Korábban azt kaptuk, hogy a háromszög területe kiszámítható egy hegyesszöge és az ezt a szöget közrefogó két oldalának segítségével
$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$
. Ha azonban a szóban forgó szög derékszög vagy tompaszög, akkor ennek az összefüggésnek jelenlegi ismereteink szerint nincs értelme. Hasonló a helyzet, ha a háromszög valamelyik szöge, e szöggel szemközti oldala és köré írt körének sugara közötti összefüggést tekintjük ($c = 2R \cdot \sin \gamma$).

Vajon értelmezhetjük-e a derékszög, a tompaszög, illetve egy tetszőleges szög szögfüggvényeit? Hogyan általánosíthatjuk a szögfüggvények fogalmát?

Először is hogyan értelmezhetünk, illetve állíthatunk elő tetszőleges nagyságú szögeket? Elevenítsük fel a forgásszögről tanultakat!

Ha a síkban egy félegyenest a kezdőpontja körül valamilyen irányban elforgatunk, akkor a félegyenes kezdő- és véghelyzete mint szárazak által meghatározott szöget **forgásszögnek** neveztük. **A forgásszög pozitív, ha az óramutató járásával ellentétes irányban, és negatív, ha megegyező irányban forgatunk.** Tehát a forgásszögek segítségével bármilyen nagyságú szöget előállíthatunk. A forgásszögeket mérhetjük fokban és ívmértékben.

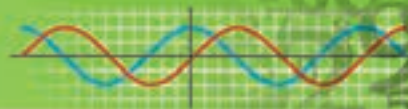
Most már „csak” olyan értelmezést kellene adni tetszőleges szög szögfüggvényeire, amely mellett a hegyesszögek szögfüggvényeire adott definíciók és összefüggések érvényben maradnak.

Induljunk ki a hegyesszögekből! Legyen az α forgásszög $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ nyugvó szára az OA! A P pont illeszkedjen a forgásszög forgó szárára és az O középpontú AB negyed körívre. Ekkor az α forgásszög (hegyesszög) szinuszát és koszinuszát a PT és az OT szakasz-hosszúságokkal szemléltethetjük! (7.1. ábra)



Vegyük észre, hogy az OT és a PT szakasz-hosszúságok az O origójú, OA (x tengely) és OB (y tengely) „tengelyű” derékszögű koordináta-rendszerben éppen a P pont első és második koordinátái.

Helyezzük be az α forgásszöget a derékszögű koordináta-rendszerbe úgy, hogy a forgásszög csúcspontja az origóval essen egybe, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$ és $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ teljesüljön! Ekkor az $\vec{i}$ egységvektor α szöggel való elforgatásakor kapott egységvektor az $\overrightarrow{OP}$ vektor, amelynek koordinátái: $\overrightarrow{OP}(\cos \alpha; \sin \alpha)$. (7.2. ábra) Kaptuk, hogy az $\vec{i}$ egységvektor α he-



gyesszöggel való elforgatásakor kapott egységvektor első koordinátája az α szög koszinusza, a második koordinátája az α szög szinusza.

Nyilvánvaló, hogy ez a megállapítás összhangban van a hegyesszögek szögfüggvényeire adott definícióval. Ugyanakkor lehetőséget biztosít az általánosításra is, mert bármilyen α szög esetén, az $\vec{i}$ vektor α szöggel való elforgatásakor kapott egységvektornak léteznek a koordinátái.



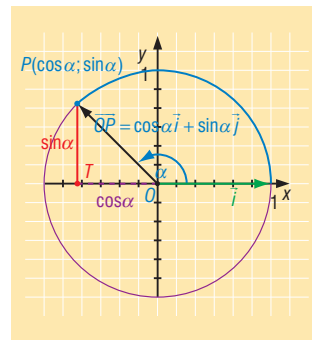
Definíció

Egy tetszőleges α szög szinusza a koordinátságokon az $\vec{i}$ egységvektor α szöggel való elforgatásakor kapott egységvektor második koordinátáját értjük. (7.3. ábra)



Definíció

Egy tetszőleges α szög koszinusa a koordinátságokon az $\vec{i}$ egységvektor α szöggel való elforgatásakor kapott egységvektor első koordinátáját értjük. (7.3. ábra)



7.3. ábra Az $\vec{i}$ egységvektor tetszőleges α szöggel való elforgatásakor kapott egységvektor koordinátái (a szinusz és a koszinusz szögfüggvény szemléletes általánosítása)

Az alábbiakban a **szögek szinusza** és **koszinusa** néhány fontos tulajdonságát mutatjuk be.

A definíciókból látható, hogy az $\vec{i}$ egységvektor tetszőleges α szöggel való elforgatásakor kapott egységvektor koordinátái a $[-1; 1]$ intervallum elemei. Azaz:

Bármely szög szinusza és koszinusa értéke legalább -1 és legfeljebb 1 . A matematika nyelvén: Bármely α szög esetén $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ és $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ teljesül.

A hegyesszögek szinusza és koszinusa között fennálló, fontos összefüggés volt a $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ azonosság. A tetszőleges szög szinusza és koszinusa adott definíciók összhangban voltak a hegyesszögekre adottakkal, ezért azt várjuk, hogy ez az azonosság tetszőleges szögekre is fennáll. Vizsgáljuk meg!



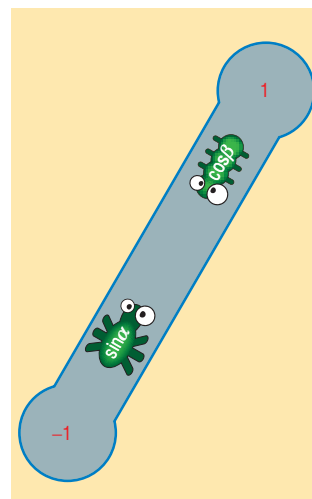
Tétel

Tetszőleges szög szinusza és koszinusa négyzetösszege 1 . A matematika nyelvén:

Bármely α szög esetén fennáll a $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ összefüggés.

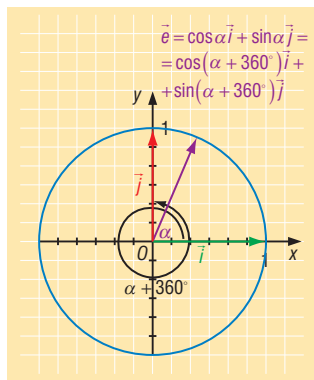
Bizonyítás:

Mivel vektor hossza egyenlő a vektor koordinátáinak négyzetösszegéből vont négyzetgyökkel, ezért az $\vec{i}$ egységvektor tetszőleges α szöggel való elforgatásakor kapott $\vec{e}(\cos \alpha; \sin \alpha)$ egységvektor hossza: $|\vec{e}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$, innen négyzetre emelés (ekvivalens átalakítás) után a $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ azonosságot kapjuk. Ezzel az állítást beláttuk.

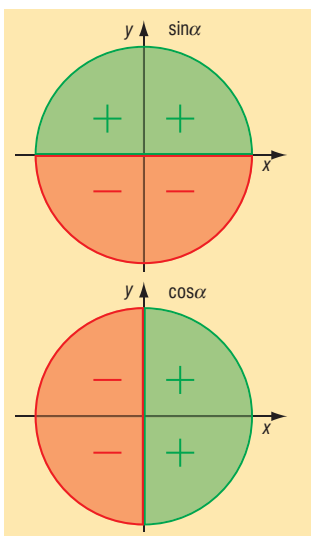


7.4. ábra Szögek szinusza, koszinusa

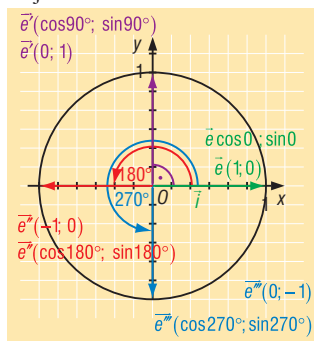




7.5. ábra A szinusz- és a koszinuszértékek 360° -onként ismétlődnek



7.6. ábra Szögfüggvényértékek előjele



7.7. ábra Az $\vec{i}$ egységvektor 0° , 90° , 180° , 270° -os szögekkel való elforgatásakor kapott egységvektorok

Az $\vec{i}$ egységvektor tetszőleges α szöggel való elforgatásakor kapott $\vec{e}$ egységvektort az O körül pozitív irányban 360° -kal forgatva (tehát egy teljes körfordulás után) ugyanazt az $\vec{e}$ egységvektort kapjuk. Így az α és az $\alpha + 360^\circ$ forgásszögeknél az egységvektornak ugyanazok a koordinátái, vagyis az α és az $\alpha + 360^\circ$ forgásszögekhez ugyanaz a szinusz-, illetve koszinuszérték tartozik:

$$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha + 360^\circ) = \cos \alpha \quad (7.5. \text{ ábra}).$$

Szavakkal: **A szinusz- és a koszinuszértékek 360° -onként ismétlődnek.**



Az imént kapott összefüggés alapján a $[0^\circ; 360^\circ[$ intervallumba eső szögek szinuszával, koszinuszával bármely szög szinusza, koszinusza meghatározható. Erre nézünk most néhány példát!



1. példa Határozzuk meg a 790° , 3792° , -1139° és a -965° -os szögek szinuszával, koszinuszának előjelét!

Megoldás:

Mivel a szinusz- és a koszinuszértékek 360° -onként ismétlődnek, ezért a 790° , 3792° , -1139° és a -965° -os szögek helyett olyan szögeket keresünk, amelyek a 790° , 3792° , -1139° és a -965° -os szögektől a 360° egész számú többszörösében térnek el és a $[0^\circ; 360^\circ[$ intervallumba esnek. A 790 -et 360 -nal osztva a hányados 2 , a maradék 70 , azaz $790 = 2 \cdot 360 + 70$. Hasonlóan $3792 = 10 \cdot 360 + 192$, $-1139 = -3 \cdot 360 - 59 = -4 \cdot 360 + 301$ és $-965 = -2 \cdot 360 - 245 = -3 \cdot 360 + 115$.

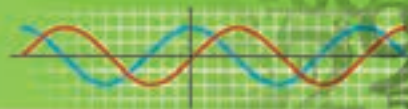
Tehát 790° , 3792° , -1139° és a -965° -os szögek helyett rendre a 70° , a 192° , a 301° és a 115° szinuszával, koszinuszának előjelét kell meghatározni. Észrevehető, hogy ezek a szögek a koordinátasík egy-egy negyedébe esnek. A 7.6. ábra alapján tehát: az első negyedbe eső 790° -os forgásszög szinusza, koszinusza pozitív; a második negyedbe eső -965° -os szög szinusza pozitív, koszinusza negatív; a harmadik negyedbe eső 3792° -os szög szinusza, koszinusza negatív és a negyedik negyedbe eső -1139° -os szög szinusza negatív, koszinusza pozitív.



2. példa Határozzuk meg négy tizedesjegy pontossággal az α szög szinuszt és koszinuszt, ha $\alpha = 0^\circ$; 65° ; 90° ; 153° ; 180° ; 257° ; 270° ; 343° ; 2130° ; -876° !

Megoldás:

Az $\vec{i}$ egységvektor 0° , 90° , 180° , 270° -os szögekkel való elforgatásakor kapott egységvektorok a koordináta-rendszer valamely tengelyé-



re illeszkednek. A definíciók és a 7.7. ábra alapján a szögfüggvényértékeket könnyedén felírhatjuk, táblázatba foglalhatjuk:

α	0°	90°	180°	270°
$\sin \alpha$	0	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	0	-1	0

Az $\vec{i}$ egységvektor 65° , 153° , 257° , 343° -os szögekkel való elforgatásakor kapott egységvektorok rendre a koordinátásík I., II., III. és IV. negyedébe esnek. (7.8. ábra)

A hegyesszögek szögfüggvényeinél tanultakat felhasználva a 65° keresett szögfüggvényértékei: $\sin 65^\circ = 0,9063$, $\cos 65^\circ = 0,4226$. A 153° , 257° , 343° -os szögek szinus- és koszinuszértékeit visszavezetjük hegyesszögek szögfüggvényértékeire.

A helyvektor y tengelyre vonatkozó tükörképének koordinátái, a forgásszög szinuszának és koszinuszának definíciói és a 7.9. ábra alapján a $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ és a $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ **azonosságokat** kapjuk. Ezen azonosságok szerint a **II. negyedbe eső α szög szinuszának, koszinuszának értékét visszavezethetjük a $180^\circ - \alpha$ hegyesszög szögfüggvényértékeire.**

Tehát $\sin 153^\circ = \sin(180^\circ - 153^\circ) = \sin 27^\circ = 0,4540$, és $\cos 153^\circ = -\cos(180^\circ - 153^\circ) = -\cos 27^\circ = -0,8910$.

A helyvektor origóra vonatkozó tükörképének koordinátái, a forgásszög szinuszának és koszinuszának definíciói és a 7.10. ábra alapján a $\sin \alpha = -\sin(\alpha - 180^\circ)$ és a $\cos \alpha = -\cos(\alpha - 180^\circ)$ **azonosságokat** kapjuk. Ezen azonosságok szerint a **III. negyedbe eső α szög szinuszának, koszinuszának értékét visszavezethetjük a $\alpha - 180^\circ$ hegyesszög szögfüggvényértékeire.** Tehát $\sin 257^\circ = -\sin(257^\circ - 180^\circ) = -\sin 77^\circ = -0,9744$ és $\cos 257^\circ = -\cos(257^\circ - 180^\circ) = -\cos 77^\circ = -0,2250$.

A helyvektor x tengelyre vonatkozó tükörképének koordinátái, a forgásszög szinuszának és koszinuszának definíciói és a 7.11. ábra alapján: a $\sin \alpha = -\sin(360^\circ - \alpha)$ és a $\cos \alpha = \cos(360^\circ - \alpha)$ **azonosságokat** kapjuk. Ezen azonosságok szerint a **IV. negyedbe eső α szög szinuszának, koszinuszának értékét visszavezethetjük a $360^\circ - \alpha$ hegyesszög szögfüggvényértékeire.**

Tehát $\sin 343^\circ = -\sin(360^\circ - 343^\circ) = -\sin 17^\circ = -0,2924$ és $\cos 343^\circ = \cos(360^\circ - 343^\circ) = \cos 17^\circ = 0,9563$.

Az előzőekben leírtak alapján:

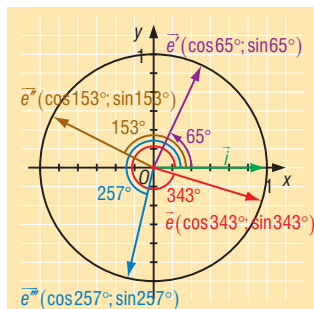
$$\sin 2130^\circ = \sin(5 \cdot 360^\circ + 330^\circ) = \sin 330^\circ = -\sin(360^\circ - 330^\circ) =$$

$$= -\sin 30^\circ = -0,5 \text{ és } \cos 2130^\circ = \cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660$$

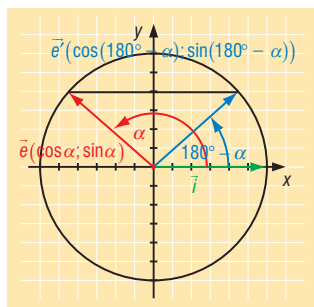
és

$$\sin(-876^\circ) = \sin(-3 \cdot 360^\circ + 204^\circ) = \sin 204^\circ = -\sin(204^\circ - 180^\circ) =$$

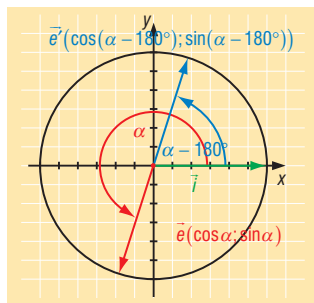
$$= -\sin 24^\circ = -0,4067 \text{ és } \cos(-876^\circ) = \cos 204^\circ = -\cos 24^\circ = -0,9135.$$



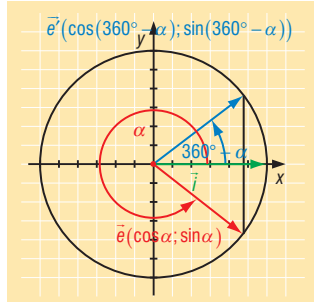
7.8. ábra Az $\vec{i}$ egységvektor elforgatásakor kapott egységvektorok



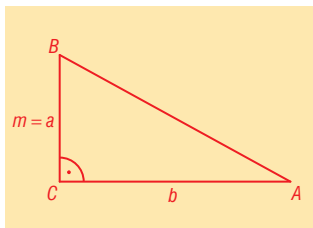
7.9. ábra Az egységvektor és az y tengelyre vonatkozó tükörképe. Forgásszög a II. negyedben



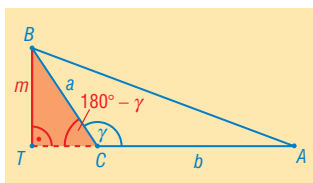
7.10. ábra Az egységvektor és az origóra vonatkozó tükörképe. Forgásszög a III. negyedben



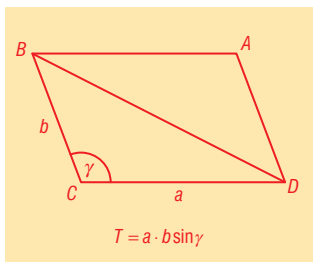
7.11. ábra Az egységvektor és az x tengelyre vonatkozó tükörképe. Forgásszög a IV. negyedben



7.12. ábra Derékszögű háromszög



7.13. ábra Tompaszögű háromszög



7.14. ábra Paralelogramma

A ma használatos számológépek segítségével tetszőleges forgásszög szögfüggvényeinek közelítő értéke meghatározható, a forgásszög szögfüggvényeinek hegyesszög szögfüggvényeire visszavezetése nélkül.



Korábban kérdések merültek fel a háromszög $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$ területképletével és a $c = 2R \cdot \sin \gamma$ összefüggéssel kapcsolatban:

Vajon milyen összefüggéseket kapunk a területre és a c oldalra, ha a γ derékszög, illetve tompaszög? Az alábbiakban azt vizsgáljuk, hogy milyen értelme van a fenti két összefüggésnek a szinuszfüggvény általánosítása után, derékszögek, illetve tompaszögek esetén.

Legyen a háromszög két oldalának hossza a és b , az általuk bezárt szög nagysága γ ! Határozzuk meg a háromszög területét!

Már láttuk, hogy ha a γ hegyesszög, akkor a háromszög területe $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$.

Ha $\gamma = 90^\circ$, akkor a háromszög derékszögű, befogói a és b , területe $T = \frac{a \cdot b}{2}$. (7.12. ábra) Mivel $\sin \gamma = \sin 90^\circ = 1$, ezért $T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$.

Ha γ tompaszög, akkor a BTC derékszögű háromszögből (7.13. ábra) $m = a \cdot \sin(180^\circ - \gamma)$. A $\sin x = \sin(180^\circ - x)$ azonosság alapján $m = a \cdot \sin \gamma$, ezért a háromszög területe: $T = \frac{m \cdot b}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$.

A fentieket összefoglalva:

Bármely háromszög területe kiszámítható két oldalának és az általuk bezárt szögnek a segítségével: $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$.



3. példa Egy háromszög két oldala $a = 8$ cm, $b = 7$ cm, az általuk bezárt szög $\gamma = 112^\circ$. Határozzuk meg a háromszög területét!

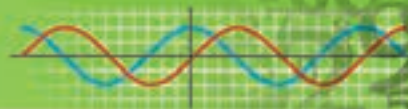
Megoldás:

A háromszög területére vonatkozó formula szerint: $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \sin 112^\circ}{2} \approx 25,96 \text{ cm}^2$.



Legyen a háromszög egyik oldalának hossza c , az oldallal szemközti szög nagysága γ és a köré írt kör sugarának hossza R ! Fejezzük ki a c -t a γ és az R segítségével!

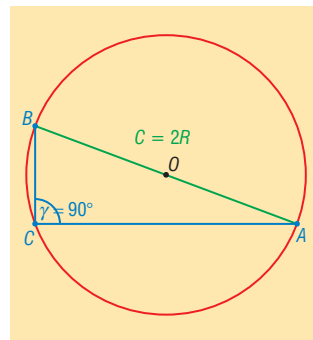
Most is három esetet különböztetünk meg:



Korábbról tudjuk, hogy ha a γ hegyesszög, akkor $c = 2R \cdot \sin \gamma$ teljesül.

Ha $\gamma = 90^\circ$, akkor a háromszög derékszögű, a derékszöggel szemközi oldal (c) Thalész tétele alapján a háromszög köré írt körének (egyik) átmérője, tehát $c = 2R$. Mivel $\sin \gamma = \sin 90^\circ = 1$, ezért $c = 2R = 2R \cdot \sin \gamma$. (7.15. ábra)

Ha γ tompaszög, akkor a BFO derékszögű háromszögből (7.16. ábra) $\frac{c}{2} = R \cdot \sin(180^\circ - \gamma)$. A $\sin x = \sin(180^\circ - x)$ azonosság alapján $c = 2R \cdot \sin \gamma$. Azt kaptuk, hogy **bármely háromszög bármelyik szöge, e szöggel szemközi oldala és köré írt körének sugara között** $a = 2R \cdot \sin \alpha$, $b = 2R \cdot \sin \beta$, $c = 2R \cdot \sin \gamma$ összefüggések állnak fenn.



7.15. ábra A derékszögű háromszög köré írt kör



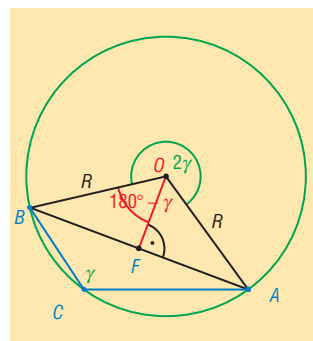
4. példa Egy háromszög egyik oldala $a = 6$ dm, a háromszög köré írt kör sugara $R = 50$ cm. Határozzuk meg az oldallal szemközi szög (α) nagyságát!

Megoldás:

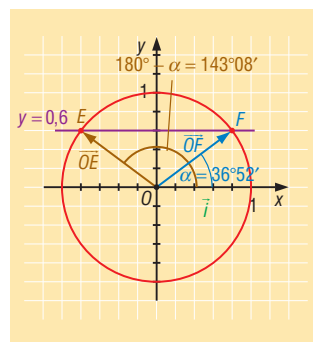
Az $a = 2R \cdot \sin \alpha$ összefüggés alapján $\sin \alpha = \frac{a}{2R} = \frac{6}{10} = 0,6$ adódik, ahol α a háromszög belső szöge ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). A $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ azonosság alapján az α -nak és a $(180^\circ - \alpha)$ -nak ugyanakkora a szinusza, mivel mindkét szög lehet a háromszög belső szöge, így két megoldás van: $\alpha_1 = 36,87^\circ$, $\alpha_2 = 143,13^\circ$.



A 4. példában kerestük azt a konvex szöget, amelynek szinusza 0,6. Most tegyük fel azt a kérdést, hogy melyek azok a forgásszögek, amelyeknek a szinusza egyenlő 0,6-del. Gondoljunk a forgásszög szinuszának definíciójára! A definíció szerint minden olyan szög megfelelő, amellyel $\vec{i}$ vektorhoz képest az egységvektort elforgatva, a kapott vektor második koordinátája 0,6 lesz. Tudjuk azonban, hogy az elforgatáskor kapott egységvektort 360° egész számú többszöröseivel forgatva, a kiindulási helyzetébe kerül vissza. Emiatt végtelen sok megoldást várunk. Azok a pontok a koordinátasíkon, amelyeknek második koordinátájuk 0,6, az $y = 0,6$ egyenletű egyenesre illeszkednek. Ennek az egyenesnek és az egységkörnek a közös pontjai az elforgatáskor kapott vektorok végpontjai. (7.17. ábra) A szinusztáblázatból a 0,6 visszakeresése $36^\circ 52'$ -os szöget ad, a II. negyedbeli szög meghatározásakor ezt 180° -ból kivonjuk. Számológép használatakor az I. negyedbeli szöget a gép kijelzőjéről olvashatjuk le, a II. negyedbeli szög meghatározásakor ezt a szöget kivonjuk 180° -ból. Mivel a szinusztértek 360° -onként ismétlődnek, a $\sin \alpha = 0,6$ esetén az α lehetséges értékei $\alpha_1 = 36,87^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\alpha_2 = 143,13^\circ + n \cdot 360^\circ$ ($n \in \mathbb{Z}$) alakban adhatók meg.



7.16. ábra A tompaszögű háromszög köré írt kör



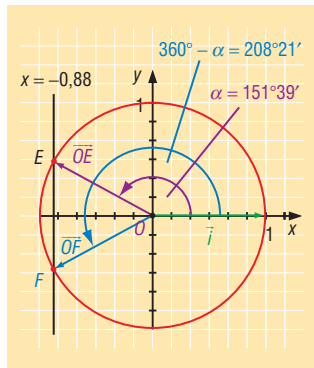
7.17. ábra A forgásszög visszakeresése a szög szinuszának értékéből

5. példa Határozzuk meg mindazokat a forgásszögeket, amelyekre $\cos \alpha = -0,88$!

Megoldás:

A definíció szerint minden olyan szög megfelelő, amellyel az $\vec{i}$ vektorhoz képest az egységvektort elforgatva, a kapott vektor első koordinátája $-0,88$ lesz. Azok a pontok a koordinátasíkon, amelyeknek az első koordinátájuk $-0,88$, az $x = -0,88$ egyenletű egyenesre illeszkednek. Ennek az egyenesnek és az egységkörnek a közös pontjai az elforgatás-kor kapott vektorok végpontjai. (7.18. ábra)

A koszinusztáblázatból a $0,88$ visszakeresése $28^\circ 21'$ -os szöget ad, a II. negyedbeli szög meghatározásakor ezt 180° -ból kivonjuk, a III. negyedbeli meghatározásakor ezt 180° -hoz hozzáadjuk. Számológép használatakor a II. negyedbeli szöget a gép kijelzőjéről olvashatjuk le, a III. negyedbeli szög meghatározásakor ezt a szöveget kivonjuk 360° -ból. Mivel a koszinusztértékek 360° -onként ismétlődnek, az α lehetséges értékei: $\alpha_1 = 151,64^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\alpha_2 = 208,36^\circ + n \cdot 360^\circ$ ($n \in \mathbb{Z}$).

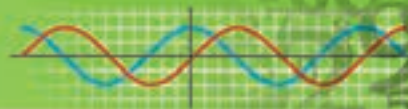


7.18. ábra A forgásszög visszakeresése a szög koszinuszának értékéből

Oldjuk meg!

- Határozzuk meg a megfelelő hegyesszögre történő visszavezetéssel négy tizedesjegy pontossággal az α szög szinusztát és koszinusztát, ha
 $\alpha = 405^\circ$; 2391° ; 1323° ; 110° ; 257° ; 2850° ; -315° ; -9130° ; -876° !
- Határozzuk meg a következő szögfüggvényértékekhez tartozó szögeket!
 - $\sin \alpha = -0,602$; -1 ; $0,279$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{11}}{3}$; $0,005$; 0 ; 1 ; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-0,5$
 - $\cos \alpha = -0,6543$; 1 ; $0,879$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$; $0,0125$; 0 ; -1 ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-3,5$
- Keressük meg az alább felsorolt kifejezések között az azonos kifejezéseket!
 $\sin(180^\circ - \alpha)$; $\cos 90^\circ + \sin 180^\circ$; $\sin(180^\circ + \alpha)$; $\cos(180^\circ - \alpha)$; $\cos(-\alpha) - \cos \alpha$;
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$; $\sin \alpha$; $\cos(180^\circ + \alpha)$; $\sin 150^\circ - \cos 240^\circ$; $\sin(-\alpha)$.
- Egy háromszög két oldalának hossza a és b , az általuk bezárt szög nagysága γ . Határozzuk meg a háromszög területét!
 - $a = 18$ cm, $b = 7$ cm, $\gamma = 120^\circ$
 - $a = 5,8$ dm, $b = 71$ cm, $\gamma = 18^\circ$
 - $a = 13$ mm, $b = 4,23$ cm, $\gamma = 162^\circ$
 - $a = 38,6$ m, $b = 18,95$ m, $\gamma = 90^\circ$
- Egy háromszög egyik oldalának hossza a , az oldalal szemközti szög nagysága α , és a háromszög köré írt kör sugarának hossza R . Töltsük ki az alábbi táblázat üresen hagyott rovatait!

a	R	α
	4 cm	135°
3,2 dm		72°
7,92 cm	3,96 cm	
6	5	
92,18		173°



6. Jelöljük egy háromszög oldalainak hosszát a, b, c , az oldalakkal szemközti szögeket rendre α, β, γ , területét T és körülírt körének sugarát R betűvel! Mutassuk meg, hogy

$$a) T = \frac{R^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma);$$

$$b) T = \frac{abc}{4R};$$

$$c) T = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma;$$

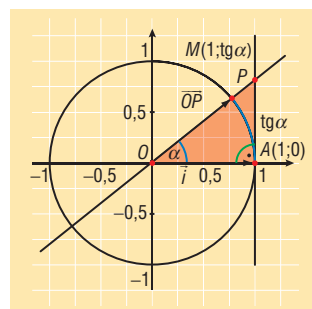
$$d) T = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin \alpha}!$$

8. A tangens és a kotangens szögfüggvények általános értelmezése

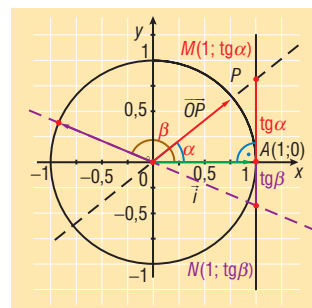
Az előző leckében általánosítottuk a szinusz és a koszinusz szögfüggvényeket. Ebben a leckében megvizsgáljuk azt, hogy hogyan terjeszthető ki a tangens és a kotangens szögfüggvények fogalma.

Most is ügyelnünk kell arra, hogy az értelmezés olyan legyen, amely mellett a hegyesszögek esetén a régi és új definícióval kapott szögfüggvényértékek azonosak (egyenlők).

Induljunk ki a hegyesszögek tangens értékeinek szakaszhosszal való szemléltetéséből! Az α forgásszög ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) csúcsa az origó, nyugvó szára az $\vec{i}$ egységvektor egyenese. (8.1. ábra) Az ábra alapján az α hegyesszög tangensét a koordinátasíkon az AM szakaszhosszal szemlélteti. Másképpen fogalmazva: **Az α hegyesszög tangense az M pont második koordinátája.** Ez olyan megállapítás, amely összhangban van a hegyesszögek tangensére adott definícióval, és majdnem minden szögre értelmezhető. Ezek alapján általánosítjuk a tangens szögfüggvényt.



8.1. ábra Az α hegyesszög tangense az M pont második koordinátája



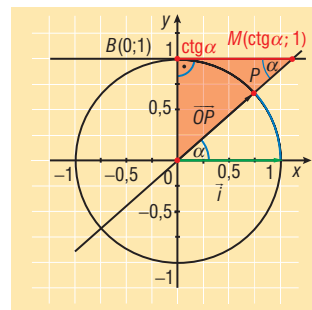
8.2. ábra A tangens szögfüggvény általánosításának szemléltetése

Definíció Ha $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor az α szög tangense annak a pontnak a második koordinátája, amelyet az $\vec{i}$ egységvektor α szöggel elforgatott egységvektorának egyenese az origó középpontú, egység sugarú kör $(1;0)$ pontjába húzott érintőből kimetsz. (8.2. ábra)

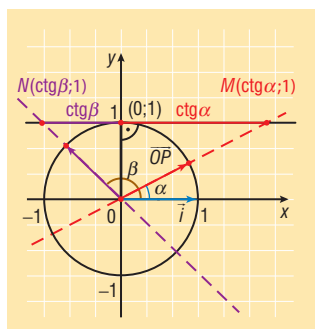
Ha $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor az α szögekkel elforgatott egységvektor egyenese párhuzamos az érintővel, ilyenkor nincs közös pontjuk, így ezeknek a szögeknek nem értelmezzük a tangensét.

A tangens szögfüggvényhez hasonlóan a kotangens szögfüggvény általános értelmezése is szemléletesen tehető. Az α hegyesszög kotangensét a koordinátasíkon a BM szakaszhosszal szemléltetjük. **Az α hegyesszög kotangense az M pont első koordinátája.** (8.3. ábra)

Itt is elmondható, hogy ez a megállapítás olyan, amely összhangban van a hegyesszögek kotangensére adott definícióval, és majdnem minden szögre értelmezhető. Ezek alapján általánosítjuk a kotangens szögfüggvényt.



8.3. ábra Az α hegyesszög kotangense az M pont első koordinátája



8.4. ábra A kotangens szögfüggvény általánosításának szemléltetése



Definíció Ha $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor az α szög kotangense annak a pontnak az első koordinátája, amelyet az $\vec{i}$ egységvektor α szöggel elforgatott egységvektorának egyenese az origó középpontú, egység sugarú kör $(0;1)$ pontjába húzott érintőből ki-metsz. (8.4. ábra)

Ha $\alpha = k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor az α szöggel elforgatott egységvektor egyenese párhuzamos az érintővel. Metszéspontjuk nincs, így ezeknek a szögeknek nem értelmezzük a kotangensét.

A hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezéséből adódtak a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ és a $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ azonosságok. Belátható, hogy ezek az összefüggések a tangens és a kotangens szögfüggvény definícióiból következnek, és ezen összefüggésekből a tangens és kotangens szögfüggvény definíciója következik.



Tétel Az α szög tangense az α szög szinuszának és kosinuszának hányadosa, ha ez a hányados értelmezhető:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



Tétel Az α szög kotangense az α szög kosinuszának és szinuszának hányadosa, ha ez a hányados értelmezhető:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq k \cdot 180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



8.5. ábra „Bármit felveszek.”
A $\operatorname{tg} \alpha$ értéke bármilyen valós szám lehet ($\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$)

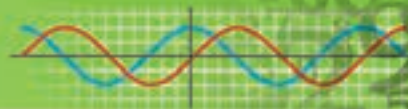
Az alábbiakban a **tangens és a kotangens szögfüggvények néhány fontos tulajdonságát mutatjuk be.**

A tangens szögfüggvény szemléletes definíciójából látható, hogy a forgó egységvektor egyenese és az egység sugarú kör $(1;0)$ pontjába húzott érintő közös pontjának y koordinátája bármilyen értéket felvehet. Azaz: $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) **szög tangense bármilyen valós szám lehet. A tangens szögfüggvény értékkészlete a valós számok halmaza.**

Hasonlóan adódik, hogy $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) **szög kotangense bármilyen valós szám lehet. A kotangens szögfüggvény értékkészlete a valós számok halmaza.**



A hegyesszögek tangense és kotangense között a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$ azonosság állt fenn. A definíciókból látszik, hogy ez az azonosság minden



olyan α szögre fennáll, amelyre a jobb és bal oldalnak van értelme, azaz $\alpha \neq k \cdot 90^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) esetén.



Az $\vec{i}$ egységvektor tetszőleges α szöggel való elforgatásakor kapott $\vec{e}$ egységvektort az O körül pozitív irányban 180° -kal forgatva, az $\vec{e}$ egységvektor ellentett vektorát kapjuk. Így az α és az $(\alpha + 180^\circ)$ forgásszögekhez tartozó egységvektorok ugyanarra az egyenesre illeszkednek, vagyis az α és az $\alpha + 180^\circ$ forgásszögekhez ugyanaz a tangens-, illetve kotangensérték tartozik (8.6. ábra, 8.7. ábra): $\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{ctg} \alpha$.

Szavakkal: **A tangens- és a kotangensértékek 180° -onként ismétlődnek.**

Mivel a tangens- és a kotangensértékek 180° -onként ismétlődnek és $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, $\alpha \neq k \cdot 90^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), ezért majdnem minden szög tangense, kotangense kifejezhető a $]0^\circ; 180^\circ[\setminus 90^\circ$ halmazba eső szögek tangensével. Tehát a koordinátasík I. és II. negyedébe eső forgásszögek tangensértékeit kell meghatároznunk csupán. Nézzünk erre példát!



1. példa

Határozzuk meg négy tizedesjegy pontossággal az α szög tangensét és kotangensét, ha $\alpha = 153^\circ; 180^\circ; 227^\circ; 2070^\circ; -876^\circ$!

Megoldás:

A szögek tangensértékeit **viSSzavezetjük hegyesszögek tangensértékeire.**

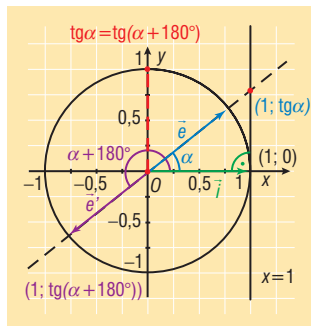
Mivel a tangens- és a kotangensértékek 180° -onként ismétlődnek, ezért a $153^\circ, 180^\circ, 227^\circ, 2070^\circ, -876^\circ$ -os szögek helyett rendre a $153^\circ, 0^\circ, 47^\circ, 90^\circ, 24^\circ$ -os szögek tangens-, kotangensértékeit kell meghatároznunk. A definíciókból adódik, hogy $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, $\operatorname{tg} 90^\circ$ és $\operatorname{ctg} 0^\circ$ nem értelmezhető, $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$. A hegyesszögekre vonatkozó ismereteink alapján $\operatorname{tg} 24^\circ \approx 0,4452$, $\operatorname{ctg} 24^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 24^\circ} \approx 2,2460$ és $\operatorname{tg} 47^\circ \approx 1,0724$,

$$\operatorname{ctg} 47^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 47^\circ} \approx 0,9325.$$

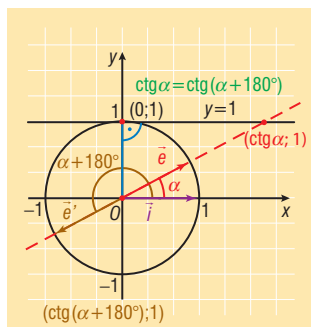
A helyvektor y tengelyre vonatkozó tükörképének koordinátái, a forgásszög tangensének és kotangensének definíciói és a 8.8. ábra alapján a $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$ és a $\operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$ **azonosságokat** kapjuk.

Ezen azonosságok szerint a **II. negyedbe eső α szög** tangensének és kotangensének **értékét visszavezethetjük a $180^\circ - \alpha$ hegyesszög** szögfüggvényértékeire.

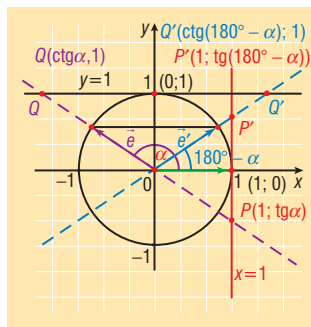
$$\begin{aligned} \text{Tehát} \quad \operatorname{tg} 153^\circ &= -\operatorname{tg}(180^\circ - 153^\circ) = -\operatorname{tg} 27^\circ \approx -0,5095 \quad \text{és} \\ \operatorname{ctg} 153^\circ &= -\operatorname{ctg}(180^\circ - 153^\circ) = -\operatorname{ctg} 27^\circ = -\frac{1}{\operatorname{tg} 27^\circ} \approx -1,9626. \end{aligned}$$



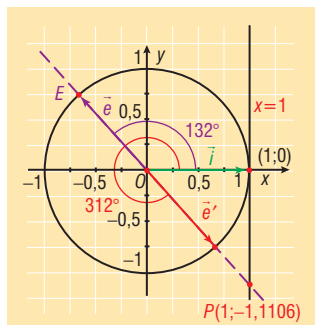
8.6. ábra A tangensértékek 180° -onként ismétlődnek



8.7. ábra A kotangensértékek 180° -onként ismétlődnek



8.8. ábra Forgásszög a II. negyedben



8.9. ábra A forgásszög visszakeresése a szög tangensének értékéből

A mai számológépek megadják a szögfüggvények közelítő értékét, így használatukkal a visszavezetés elkerülhető.



2. példa Határozzuk meg mindazokat az α szögeket, amelyekre $\operatorname{tg} \alpha = -1,1106$ teljesül!

Megoldás:

A tangens szögfüggvény definíciója szerint a forgó egységvektor egyenese és az egység sugarú kör $(1;0)$ pontjába húzott érintő közös pontjának y koordinátája $-1,1106$. A közös pont (P) és az origó által meghatározott egyenes a forgó egységvektor egyenesével esik egybe. A tangensértéknek megfelelő egységvektorok a koordinátáinak II. és IV. negyedébe esnek. (8.9. ábra) Mivel a tangensértékek 180° -onként ismétlődnek, ezért a II. negyedbe (vagy a IV. negyedbe) eső forgásszög segítségével megadhatjuk az α szög összes lehetséges értékét. A tangenstáblázatból az $1,1106$ visszakeresése 48° -os szöget ad, a II. negyedbeli szög meghatározásakor ezt 180° -ból kivonjuk. Számológép használatakor a IV. negyedbe eső szöget olvashatjuk le a kijelzőről (-48°). Így az α szög összes lehetséges értékei: $\alpha = 132^\circ + k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).



Oldjuk meg!

- Határozzuk meg négy tizedesjegy pontossággal az α szög tangensét és kotangensét, ha $\alpha = 405^\circ; 450^\circ; 1323^\circ; 110^\circ; 257^\circ; 360^\circ; -315^\circ; -9130^\circ; -876^\circ$!
- Határozzuk meg a következő szögfüggvényértékekhez tartozó szögeket!
 - $\operatorname{tg} \alpha = -0,602; 20,279; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{11}}{3}; 0,005; 0; -1; -0,5$
 - $\operatorname{ctg} \alpha = -0,43; 1; 0,879; -\sqrt{3}; \frac{\sqrt{5}}{3}; 0,0125; 0; -3,5$
- Keressük meg az alább felsorolt kifejezések között az azonosakat!

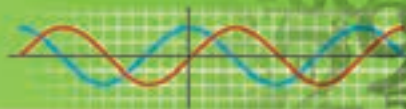
$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha); \operatorname{ctg} 90^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ; \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha); \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha); \operatorname{ctg}(-\alpha) + \operatorname{ctg} \alpha; \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha; -\operatorname{ctg} \alpha; \operatorname{tg}(-\alpha); \frac{(\operatorname{tg} 240^\circ - \operatorname{ctg} 135^\circ) \cdot (\operatorname{ctg} 390^\circ + \operatorname{tg} 315^\circ)}{2}.$$

- Töltsük ki az alábbi táblázatok üresen hagyott rovatait!

α (radián)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
α (fok)									
$\cos \alpha$									
$\operatorname{tg} \alpha$									

α (radián)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
α (fok)									
$\sin \alpha$									
$\operatorname{ctg} \alpha$									



9. A szinusz- és a koszinuszfüggvény grafikonja, jellemzése

Mindennapi életünk elképzelhetetlen lenne elektromosság nélkül. Háztartási gépeink, elektromos berendezéseink váltakozó feszültséget adó hálózatról működnek. A váltakozó feszültség az időnek szinuszos függvénye, $U = U_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$. A hálózatok frekvenciája (f) eltérő lehet, Európában ez a frekvencia 50 Hz, Amerikában 60 Hz.

A természetben előforduló leggyakoribb mozgás, a rezgés matematikai modelljét a szinusz- és a koszinuszfüggvények segítségével adják meg. A harmonikus rezgőmozgásnál a kitérés-idő kapcsolata szinuszos: $y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$.

Az előzőekben megismertük a szögfüggvények fogalmának általánosítását. Ha a forgásszögeket ívmértékükkel, azaz valós számokkal adjuk meg, akkor a szögfüggvényeket is egy-egy valós függvénynek tekinthetjük. Tehát már definiáltuk az $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \operatorname{tg} x$ és $k(x) = \operatorname{ctg} x$ valós függvényeket, az ún. **trigonometrikus függvényeket**. Függvénytani vizsgálatokban a szöget mindig radiánban mérjük.



Definíció Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvényt szinuszfüggvénynek nevezzük.



Definíció Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ függvényt koszinuszfüggvénynek nevezzük.

E függvények vizsgálata, grafikonjaik megadása előtt elevenítsünk fel néhány fontos függvénytani alapfogalmat!



1. példa Ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ($D_f = [-10; 10]$), a $g(x) = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$ ($D_g = \mathbb{R}$) és a $h(x) = 4$ ($D_h = \mathbb{R}$) függvényeket!

A függvények közül melyek párosak, páratlanok?

Megoldás:

Ábrázoljuk a függvényeket közös koordináta-rendszerben! Az f függvény képe a köbgyökfüggvény grafikonjának a $[-10; 10]$ intervallumhoz tartozó része. A g függvény grafikonját megkaphatjuk úgy, hogy a törtrész-függvény ($D = \mathbb{R}$) képét az x tengely mentén kétszeresére nyújtjuk. A h függvény konstans függvény, grafikonja x tengellyel párhuzamos egyenes.



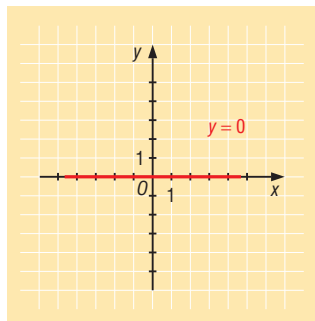
9.1. ábra Meg kellett volna venni 5 \$-ért azt az átalakító berendezést!



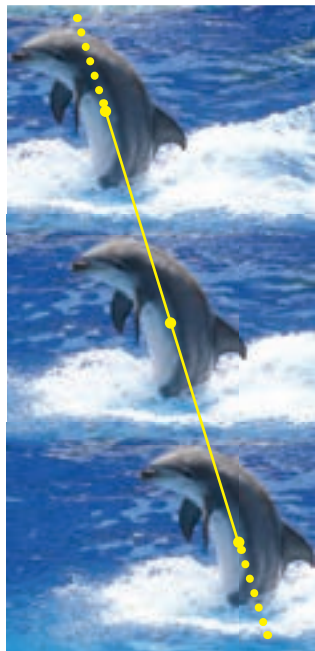
9.2. ábra Kellemetlen rezonanciajelenségek



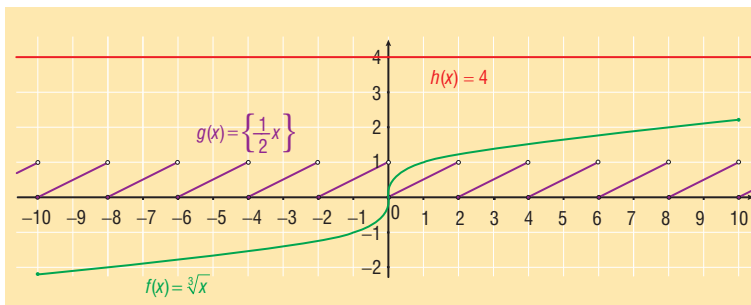
9.3. ábra Hasznos rezonancia: húros hangszereink hangját a hangszer testének rezonanciája erősíti fel



9.5. ábra Az $f(x) = 0$ ($D_f = \mathbb{R}$) függvény páros is, páratlan is, és periodikus is



9.6. ábra Eltolási szimmetria

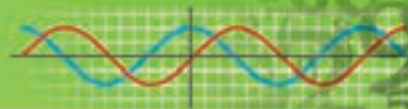


9.4. ábra Grafikonjukkal adott függvények

Az f függvény **páratlan**, mert az értelmezési tartományának minden elemével együtt annak ellentettje is eleme (ha $x \in D_f$, akkor $-x \in D_f$), és minden értelmezési tartománybeli elem ellentettjéhez az eredeti elemhez rendelt függvényérték ellentettjét rendeli (minden $x \in D_f$ esetén $f(-x) = -f(x)$). Így az f függvény grafikonja az origóra szimmetrikus. A h függvény **páros**, mert az értelmezési tartományának minden elemével együtt annak ellentettje is eleme (ha $x \in D_h$, akkor $-x \in D_h$), és minden értelmezési tartománybeli elemhez és ellentettjéhez ugyanazt az értéket rendeli (minden $x \in D_h$ esetén $h(-x) = h(x)$). Így a h függvény grafikonja az y tengelyre szimmetrikus. A g függvény nem páros, és nem páratlan.

Vegyük észre, hogy az f függvény grafikonja középpontos szimmetriával, a h függvény képe tengelyre vonatkozó szimmetriával, a g és a h függvények grafikonjai eltolási szimmetriával rendelkeznek. A g függvény grafikonja esetén látható, hogy újra meg újra az ugyanahhoz a 2 egység hosszúságú intervallumhoz tartozó grafikonrész ismétlődik. Ez azt jelenti, hogy az értelmezési tartományában bárhol tekintjük is a függvény értékét, a 2-vel (vagy 2 bármely többszörösével) nagyobb helyen ugyanaz lesz az értéke. A matematika nyelvén: bármely $x \in D_g$ esetén fennáll az $x+2 \in D_g$ és a $g(x+2) = \left\{\frac{1}{2}x+1\right\} = \left\{\frac{1}{2}x\right\} = g(x)$ egyenlőség.

Így ha a g függvény képét a $\vec{v}(2;0)$ vektorral (vagy a $\vec{v}(2;0)$ egész számszorosaival) eltoljuk, akkor a függvény képe önmagába megy át. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a g függvény periodikus, a g függvény 2 szerint periodikus. A h függvény grafikonja esetén tetszőleges hosszúságú intervallumhoz tartozó grafikonrész (szakasz) ismétlődik. Azaz bármely $x \in D_h$ esetén fennáll az $x+p \in D_h$ ($p > 0$) és a $h(x+p) = 4 = h(x)$ egyenlőség. Így ha a h függvény képét a $\vec{v}(p;0)$ vektorral eltoljuk, akkor a függvény képe önmagába megy át. Az f függvény periodikus.



Definíció

Egy függvényt periodikusnak nevezünk, ha létezik olyan $p > 0$ szám, amelyre teljesülnek az alábbiak:

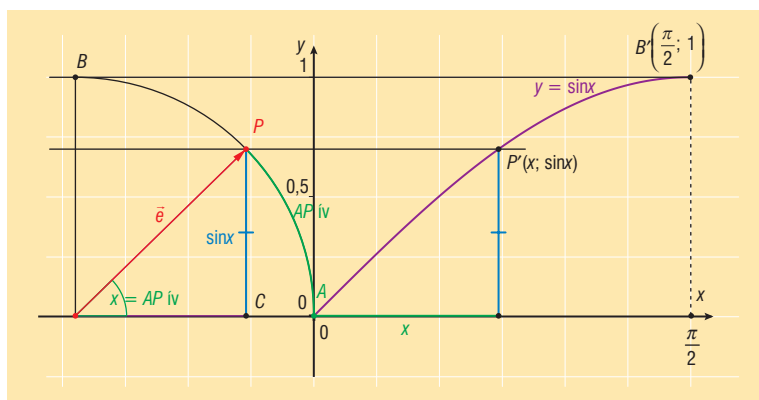
- ha a függvény értelmezve van x -re, akkor értelmezve van $(x + p)$ -re is, és
- ugyanazt a függvényértéket veszi fel x -nél, mint $(x + p)$ -nél.

Ha a p a legkisebb olyan szám, amelyre ez teljesül, akkor a p konstans a függvény periódusának nevezzük.

Belátható, hogy a g függvény periódusa 2, és a h függvénynek nem létezik periódusa.

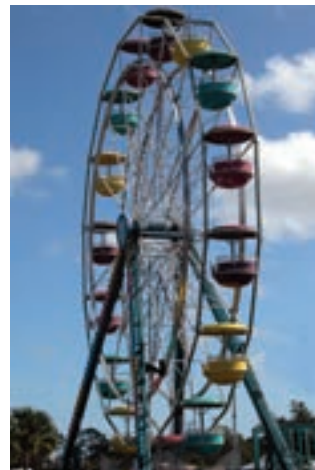
Periodikus függvény jellemzéséhez elegendő egy, a periódussal azonos hosszúságú intervallumon vizsgálnunk a függvényt, mert a függvény tulajdonságai periódusonként ismétlődnek. A függvény egy periódus hosszúságú intervallumon megrajzolt képét az x tengely mentén a periódus egész számú többszörösével eltolva, a függvény grafikonját kapjuk meg.

A függvények jellemzőinek a vizsgálatát megkönnyíti ábrázolásuk, ezért először megrajzoljuk a szinuszfüggvény képét, majd segítségével összefoglaljuk a függvény legfontosabb tulajdonságait. A szinuszfüggvény periodikus, periódusa 2π , a fentiek értelmében grafikonját elegendő a $[0; 2\pi]$ intervallumon megrajzolni. A definíció szerint a $\sin x$ az $\vec{i}$ egységvektor x szöggel való elforgatásakor kapott egységvektor második koordinátája. A grafikon szerkesztését a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon ez alapján végezzük el (9.7. ábra).

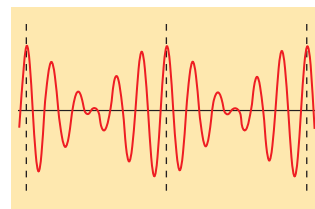


9.7. ábra A grafikon egy pontjának (P') szerkesztése

A grafikon pontjainak szerkesztésén kívül az ábrázoláshoz készíthetünk értéktáblázatot. A későbbiekben való ábrázolás miatt praktikus a nevezetes szögek szinusztértékeit tekinteni a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon:



9.8. ábra Az óriáskerék mozgása is periodikus



9.9. ábra Periodikus függvény fizikából (lebegés)

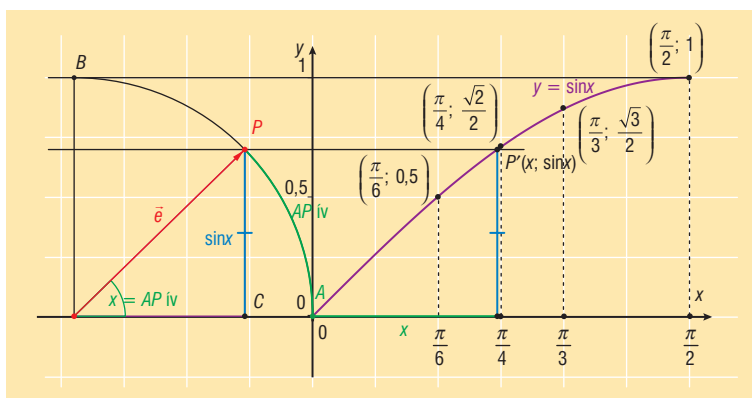


9.12. ábra Megforgatjuk az egységvektort



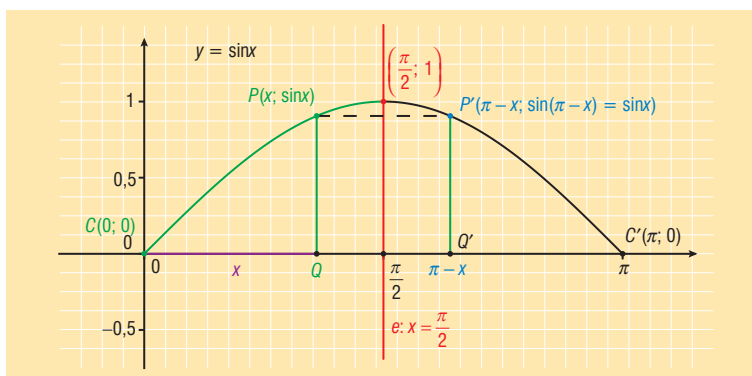
9.13. ábra Hullámvasút

x (radián)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660$	1



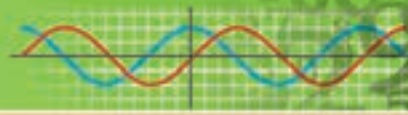
9.10. ábra Ábrázolás a nevezetes szögek szinuszértékeivel és szerkesztéssel

Legyen P pont a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon kapott grafikon tetszőleges pontja! A $\sin x = \sin(\pi - x)$ azonosság miatt a $P(x; \sin x)$ tükörképe az $e \left(x = \frac{\pi}{2} \text{ egyenletű}\right)$ egyenesre a $P'(\pi - x; \sin(\pi - x))$. Így függvény-grafikonja a $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ intervallumon a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon kapott görbe tükörképe az e egyenesre. (9.11. ábra)

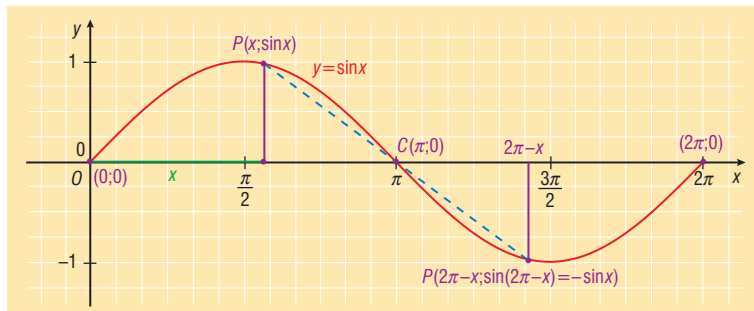


9.11. ábra A szinuszfüggvény grafikonja a $[0; \pi]$ intervallumon

Ha a P pont a $[0; \pi]$ intervallumon kapott grafikon tetszőleges pontja, akkor a $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ azonosság miatt a $P(x; \sin x)$ tükörképe

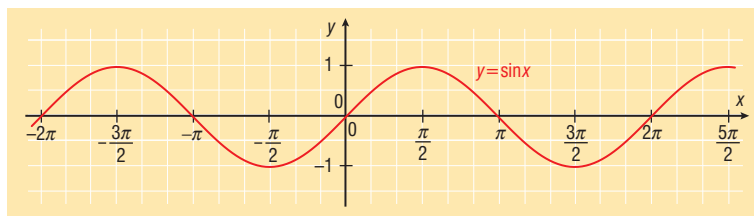


a $C(\pi;0)$ pontra a $P^*(2\pi - x; \sin(2\pi - x))$. Így függvénygrafikonja a $[\pi; 2\pi]$ intervallumon a $[0; \pi]$ intervallumon kapott görbe tükörképe a $C(\pi;0)$ pontra. (9.14. ábra)



9.14. ábra A szinuszfüggvény grafikonja a $[0; 2\pi]$ intervallumon

A szinuszfüggvény $[0; 2\pi]$ intervallumon megrajzolt képét az x tengely mentén a 2π egész számú többszörösével eltolva, a függvény grafikonját kapjuk meg. (9.15. ábra)



9.15. ábra A szinuszfüggvény grafikonja – szinuszhullám

Korábbi ismereteink és a 9.15. ábra alapján jellemezzük a szinuszfüggvényt!

Jellemzés:

Értelmezési tartománya: a valós számok halmaza. ($D_f = \mathbb{R}$)

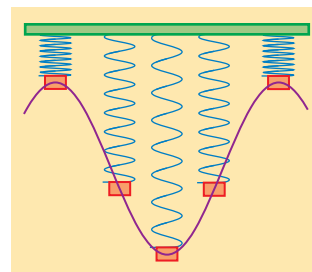
Értékkészlete: a $[-1; 1]$ zárt intervallum. ($R_f = [-1; 1]$)

Periodicitása: periodikus, periódusa 2π .

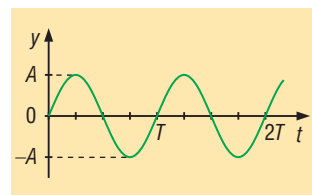
Zérushelyei: az x ($x \in D_f$) azon értékei, amelyekre $\sin x = 0$.

A szinuszfüggvény a 0 függvényértéket a π egész számú többszöröséhez rendeli, ezért a függvény zérushelyeit $x = k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) alakban írhatjuk fel.

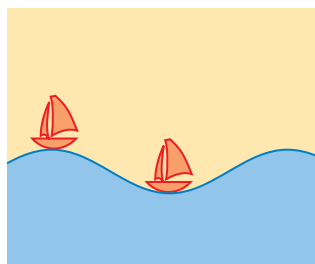
Szélsőérték	Maximumhelyek: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
	A maximuma: 1.
	Minimumhelyek: $x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
	A minimuma: -1.



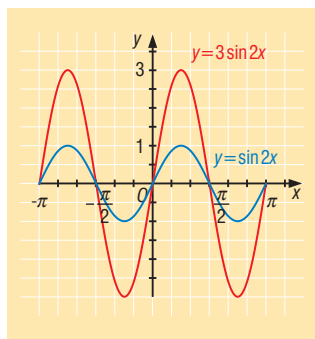
9.16. ábra Harmonikus rezgést végző test mozgásának fázisai



9.17. ábra Egy harmonikus rezgést végző test kitérés-idő függvénye



9.18. ábra „Hullámozó Balaton tetején”



9.19. ábra Az f függvény grafikonja

Monotonitás

$$\left[-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right] \text{ intervallumon } (k \in \mathbb{Z})$$

szigorúan monoton nő.

$$\left[\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right] \text{ intervallumon } (k \in \mathbb{Z})$$

szigorúan monoton csökken.

Paritása: a szinuszfüggvény periódusa 2π , ezért a $\sin(-x) = \sin(2\pi - x)$ bármely x -re fennáll. A $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ azonosságot felhasználva adódik a $\sin(-x) = -\sin x$ azonosság. Mivel a szinuszfüggvény értelmezési tartománya minden elemével együtt annak ellentettjét is tartalmazza, és a $\sin(-x) = -\sin x$ minden x -re fennáll, ezért a függvény **páratlan**. Grafikonja az origóra szimmetrikus.



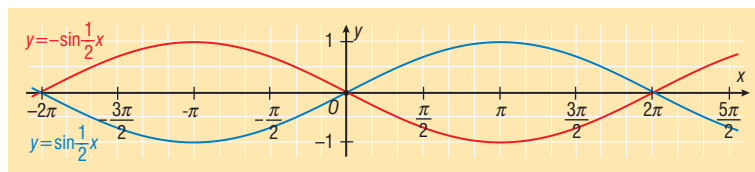
2. példa Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = 3 \sin 2x, \quad g(x) = -\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \text{ függvényeket!}$$

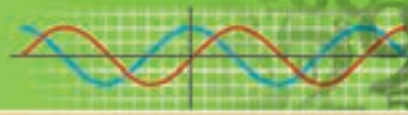
Megoldás:

Mindkét függvény grafikonját megkaphatjuk az $x \mapsto \sin x$ ($D = \mathbb{R}$) alapfüggvényből kiindulva függvénytranszformációk segítségével. A tanultak alapján az $x \mapsto \sin 2x$ ($D = \mathbb{R}$) függvény feleakkora x -ekhez rendeli ugyanazokat a függvényértékeket, mint a szinuszfüggvény. Az $x \mapsto \sin 2x$ ($D = \mathbb{R}$) függvény képét megkapjuk, ha a szinuszfüggvény grafikonját az x tengely mentén felére zsugorítjuk. Az f függvény ugyanazon x -ekhez 3-szor akkora függvényértéket rendel, mint az $x \mapsto \sin 2x$ ($D = \mathbb{R}$) függvény. Így ha az $x \mapsto \sin 2x$ ($D = \mathbb{R}$) függvény grafikonját y tengely mentén 3-szorosára nyújtjuk, akkor az f függvény grafikonját kapjuk. (9.19. ábra)

A $h(x) = \sin \frac{1}{2}x$ ($D = \mathbb{R}$) függvény kétszer akkora x -ekhez rendeli ugyanazokat a függvényértékeket, mint a szinuszfüggvény. Ez azt jelenti, hogy a $h(x) = \sin \frac{1}{2}x$ ($D = \mathbb{R}$) függvény képét megkapjuk, ha a szinuszfüggvény grafikonját az x tengely mentén a kétszeresére nyújtjuk. A $g(x) = -h(x)$, így ha a $h(x)$ függvény grafikonját az x tengelyre tükrözzük, akkor a g függvény grafikonját kapjuk. (9.20. ábra)



9.20. ábra A g függvény grafikonja



3. példa Mutassuk meg, hogy bármely α valós számra

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha \text{ teljesül!}$$

Bizonyítás:

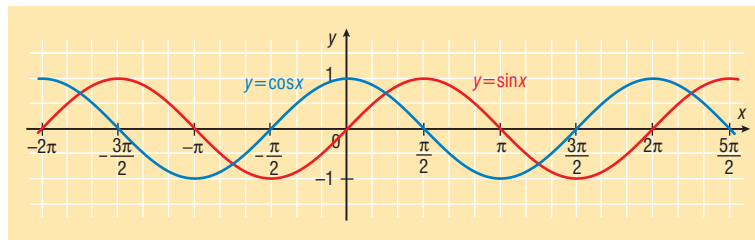
Tekintsük az $\vec{e}(\cos \alpha; \sin \alpha)$ egységvektort, és forgassuk el az origó körül $\frac{\pi}{2}$ -vel! A forgatás miatt az $\vec{e}'$ vektor koordinátái: $(-\sin \alpha; \cos \alpha)$, az $\vec{e}'$ vektor koordinátái a szinusz- és a koszinuszfüggvény definíciója értelmében: $\left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right); \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ (9.21. ábra). Ezért a $-\sin \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ és a $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ teljesül.



Vegyük észre, hogy a fenti két összefüggés alapján a szinuszfüggvény felírható a koszinuszfüggvény, és a koszinuszfüggvény felírható a szinuszfüggvény segítségével.

Ábrázoljuk és jellemezzük a koszinuszfüggvényt!

A $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ azonosság és a függvénytranszformációkról tanultak értelmében a koszinuszfüggvény grafikonját megkaphatjuk, ha a szinuszfüggvény grafikonját az x tengely mentén, a negatív irányban $\frac{\pi}{2}$ -vel eltoljuk. (9.22. ábra)



9.22. ábra A koszinuszfüggvény grafikonja

Jellemzés:

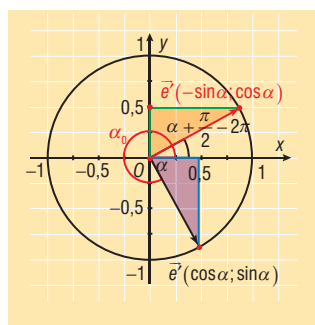
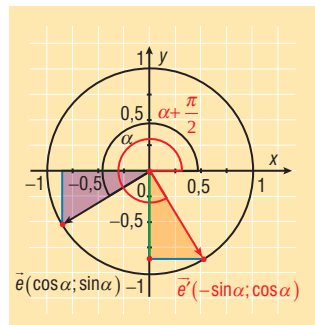
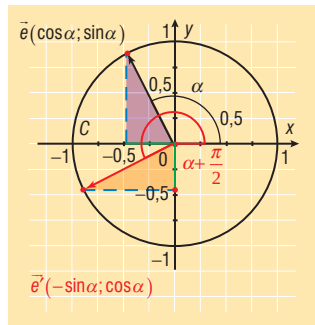
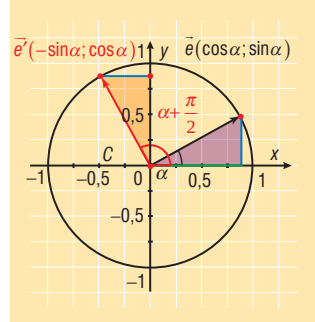
Értelmezési tartománya: a valós számok halmaza. ($D_f = \mathbb{R}$)

Értékkészlete: a $[-1; 1]$ zárt intervallum. ($R_f = [-1; 1]$)

Periodicitása: periodikus, periódusa 2π .

Zérushelyei: a koszinuszfüggvény a 0 értéket π -ként veszi fel, így a

függvény zérushelyei: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.



9.21. ábra Helyvektor az origó körül $\frac{\pi}{2}$ -vel elforgatva



9.23. ábra Miért van az, hogy Kata haja szigorúan monoton nő?!



9.24. ábra Oldjuk meg grafikusán!

Szélsőérték	Maximumhelyek: $x = k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. A maximuma: 1.
	Minimumhelyek: $x = \pi + k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. A minimuma: -1.
Monotonitás	$[-\pi + k \cdot 2\pi; k \cdot 2\pi]$ intervallumon ($k \in \mathbb{Z}$) szigorúan monoton nő.
	$[k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi]$ intervallumon ($k \in \mathbb{Z}$) szigorúan monoton csökken.

Paritása: **páros**, mert értelmezési tartománya minden elemével együtt annak ellentettjét is tartalmazza, és a $\cos(-x) = \cos(2\pi - x) = \cos x$ minden x -re fennáll. Grafikonja az y tengelyre szimmetrikus.



4. példa Mely valós számokra teljesülnek az alábbi relációk?

a) $4\cos^2 x = 3$ b) $\sin x \leq \frac{1}{2}$

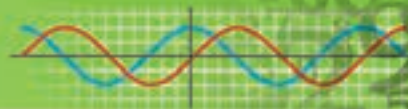
Megoldás:

a) A $4\cos^2 x = 3$ egyenlet egy hiányos ($\cos x$ -re nézve) másodfokú egyenlet, $\cos^2 x$ -re rendezve: $\cos^2 x = \frac{3}{4}$, ahonnan négyzetgyökvonás után a $|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ adódik. Innen $\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tehát keressük azokat a (radiánban mért) szögeket, amelyeknek koszinusza $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. A $[0; 2\pi[$ intervallumon a megoldások: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. A $\frac{7\pi}{6}$ és a $\frac{\pi}{6}$ különbsége π , az $\frac{11\pi}{6}$ és a $\frac{5\pi}{6}$ különbsége π , így a megoldásokat összefoglalhatjuk: $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $x_2 = \frac{5\pi}{6} + l \cdot \pi$ ($l \in \mathbb{Z}$).

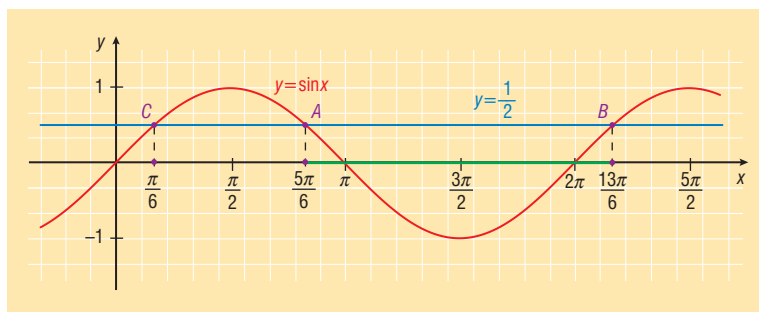
b) A $\sin x \leq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldásakor keressük azokat a (radiánban mért) szögeket, amelyeknek szinusza $\frac{1}{2}$ vagy annál kisebb.

1. módszer:

Oldjuk meg grafikusán! A jobb oldalnak megfelelő függvény a szinuszfüggvény ($f(x) = \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$), a bal oldalnak megfelelő függvény a konstans függvény ($g(x) = \frac{1}{2}$, $D_g = \mathbb{R}$). Keressük az x azon értékeit, amelyekhez a g függvény nem kisebb függvényértéket



rendel, mint az f függvény. A két grafikonnak a $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ intervallumon két közös pontja van: $x = \frac{5\pi}{6}$ -nál és $x = \frac{13\pi}{6}$ -nál. (9.25. ábra)
A szinuszfüggvény periódusa és az ábra alapján az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{13\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).



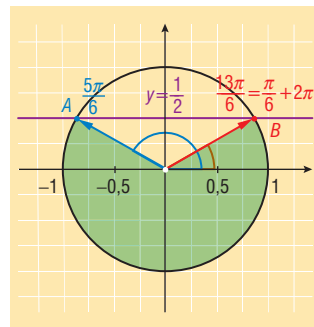
9.25. ábra Grafikus megoldás

2. módszer:

A definíció értelmében a $\sin x \leq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldásakor keressük azokat a forgásszögeket, amelyekkel az $\vec{i}$ egységvektort elforgatva, a kapott egységvektor második koordinátája legfeljebb $\frac{1}{2}$. Az egység sugarú kör A és B pontjaiba húzott egységvektorok második koordinátája $\frac{1}{2}$, az $\widehat{AB}$ ív belső pontjaiba húzott egységvektorok második koordinátája $\frac{1}{2}$ -nél kisebb. (9.27. ábra) Így az egyenlőtlenség megoldása $\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{13\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).



9.26. ábra Forgásszögek és pizzaszzeletek



9.27. ábra Megoldás az egység sugarú kör segítségével



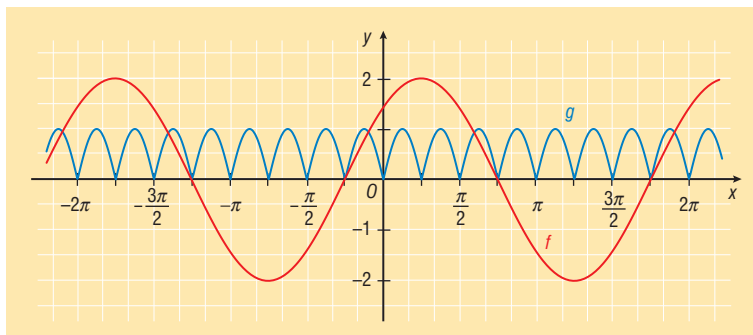
5. példa A 9.18. ábrán olyan trigonometrikus függvények grafikonjai láthatóak, amelyeknek az értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Az f függvény teljes grafikonja 2π egység nagyságú, a g függvény teljes grafikonja $\frac{\pi}{4}$ egység nagyságú, x tengellyel párhuzamos eltolással önmagába megy át. Írjuk fel a függvények egy-egy hozzárendelési szabályát

- a szinuszfüggvény;
- a koszinuszfüggvény segítségével!

Először
keverjük jól össze az
alapanyagokat!



9.30. ábra Végül a tortát díszítjük transzformált szinuszfüggvényekkel!



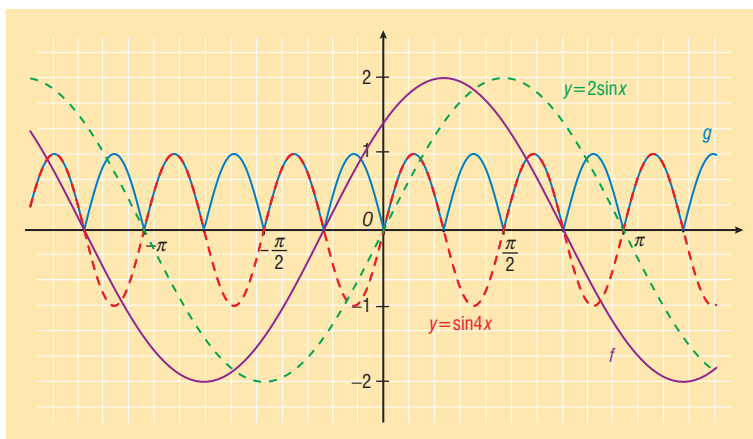
9.28. ábra A 4. példához

Megoldás:

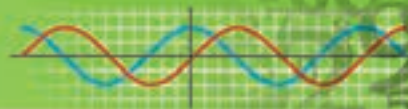
Az f függvény periódusa 2π , a g függvényé $\frac{\pi}{4}$. Mindkét függvény periodikus, ezért figyelembe véve a periódusokat, elegendő a függvényeket a $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ intervallumon vizsgálni.

Az f függvény grafikonját az x tengely mentén pozitív irányba $\frac{\pi}{4}$ -gyel eltolva, az $x \mapsto 2 \sin x$ ($D = \mathbb{R}$) függvény grafikonját kapjuk meg (9.29. ábra). Így $f : \mathbb{R} \rightarrow [-2; 2]$, $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

A $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$, $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumokon a g függvény grafikonját az x tengelyre tükrözve, a $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ egyéb részhalmazain a grafikont változtatlanul hagyva, az $x \mapsto \sin 4x$ függvény grafikonját kapjuk meg. (9.29. ábra) Tehát $g : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$, $g(x) = |\sin 4x|$.



9.29. ábra Függvénytranszformáció



b) Az a) részben kapott eredményeinket és a $\sin \alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ azonosságot felhasználva,

$$\alpha = x + \frac{\pi}{4} \text{ helyettesítésével: } f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2 \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -2 \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

$$\text{Az } \alpha = 4x \text{ helyettesítésével: } g(x) = |\sin 4x| = \left| -\cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) \right|. \text{ Tehát a keresett függvények:}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-2; 2], \quad f(x) = -2 \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1], \quad g(x) = \left| \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) \right|.$$



9.31. ábra Mestermű



Oldjuk meg!

1. Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényeket!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 3$

b) $g: [-2\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = -2 \cos 3x$

c) $h: \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{2} - \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

d) $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i(x) = 1 - 2 \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

2. Adjuk meg a szinuszfüggvény segítségével az alábbi függvények hozzárendelési szabályát! ($D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$)

a) $f(x) = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

b) $g(x) = 3 \cos 2x$

c) $h(x) = \cos\left(\pi - \frac{2}{3}x\right)$

3. Számítsuk ki az alábbi függvények értékét az $x = \frac{5\pi}{6}$ és az $x = -\frac{4\pi}{3}$ helyeken! ($D_f = D_g = \mathbb{R}$)

a) $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$

b) $g(x) = 4 \sin^2\left(6x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

4. Az alábbi állítások közül melyek igazak, melyek hamisak?

a) Ha egy függvény páratlan, akkor grafikonja szimmetrikus az origóra.

b) Két páros függvény összege páros függvény.

c) Két páratlan függvény szorzata olyan függvény, amelynek grafikonja az origóra szimmetrikus.

d) Nincs olyan függvény, amely páros is, és páratlan is.

e) Minden periodikus függvénynek van periódusa.

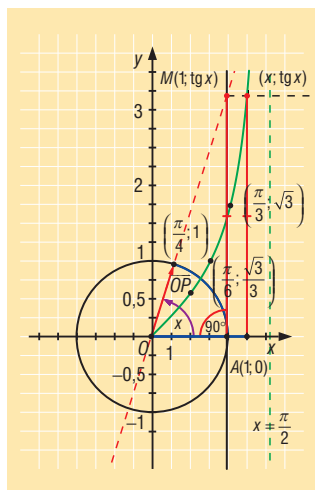
f) Az $f(x) = \sin(2010x)$ periódusa $\frac{\pi}{1005}$. ($D_f = \mathbb{R}$).

g) A $g(x) = \cos \frac{x}{1005}$ periódusa 2010π . ($D_g =]-2\pi; 2\pi[$).

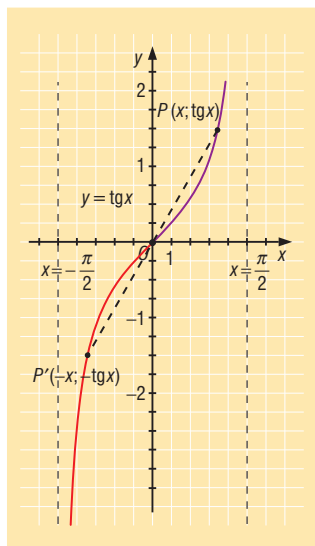
5. Mely valós számokra teljesülnek az alábbi relációk?

a) $2 \cos^2 x = 1$ b) $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{2} \cos x - 1 < 0$ d) $2 \sin x < \sqrt{3}$ e) $1 - 8 \sin^3 x = 0$ f) $4 \cos^2 x \geq 3$

10. A tangens- és a kotangensfüggvény grafikonja, tulajdonságai



10.1. ábra A tangensfüggvény ábrázolása a nevezetes szögek tangensértékeivel és szerkesztéssel a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon



10.2. ábra A tangensfüggvény grafikonja a $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon

Ebben a leckében értelmezzük és megvizsgáljuk a tangens- és a kotangensfüggvényeket.

Definíció

Az $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvényt **tangensfüggvénynek** nevezzük.

Definíció

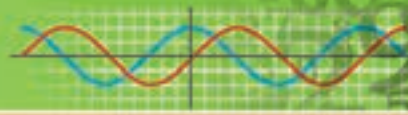
Az $f : \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvényt **kotangensfüggvénynek** nevezzük.

Ábrázoljuk és jellemezzük a tangensfüggvényt!

A tangensfüggvény periodikus, periódusa π , így grafikonját elegendő egy π hosszúságú intervallumon megrajzolni. A függvény értelmezési tartományát is figyelembe véve, célszerű a függvényt a $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon vizsgálni. A definíció szerint egy tetszőleges α szög tangense annak a pontnak az y koordinátája, amelyet az $\vec{i}$ egységvektorhoz képest α szöggel elforgatott egységvektor egyenese az origó középpontú, egység sugarú kör $(1; 0)$ pontjába húzott érintőből kimetsz. A grafikon szerkesztését a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon ez alapján és a nevezetes szögek tangens értékeinek felhasználásával végezzük el (10.1. ábra). A nevezetes szögek tangensértékeit az alábbi táblázatban tüntettük fel.

x (radián)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,5774$	1	$\sqrt{3} \approx 1,7321$	Nincs értelme.

Ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor a $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ azonosság és a tangensfüggvény periódusa (π) alapján $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy a **tangensfüggvény páratlan**, így a függvény grafikonja az origóra szimmetrikus. A $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ intervallumon a függvény görbéje a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon kapott görbe tükörképe az origóra. (10.2. ábra)



A tangensfüggvény π szerint periodikus, ezért a $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon megrajzolt képét az x tengely mentén a π egész számú többszörösével eltolva, a függvény grafikonját kapjuk meg. (10.3. ábra)

Korábbi ismereteink és a 10.3. ábra alapján jellemezzük a tangensfüggvényt!

Jellemzés:

Értelmezési tartománya: a valós számok halmaza, kivéve belőle a $\frac{\pi}{2}$ páratlan többszörösöit. $\left(D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$

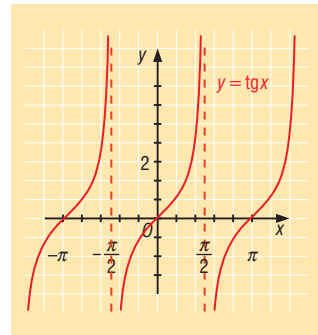
Értékkészlete: a valós számok halmaza. $(R_f = \mathbb{R})$

Periodicitása: periodikus, periódusa π .

Zérushelyei: az x ($x \in D_f$) azon értékei, amelyekre $\operatorname{tg} x = 0$. A tangensfüggvény a 0 függvényértéket a π egész számú többszöröséhez rendeli, ezért a függvény zérushelyei: $x = k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Monotonitás: a $\left]-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right[$ intervallumon ($k \in \mathbb{Z}$) szigorúan monoton nő.

Paritása: a tangensfüggvény páratlan függvény.



10.3. ábra A tangensfüggvény grafikonja



1. példa Mutassuk meg, hogy bármely $\alpha \neq k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

valós számra a $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$ teljesül!

Megoldás:

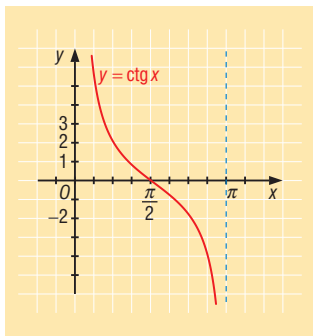
Ha $\alpha \neq k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor az állításban szereplő tangens- és kotangensfüggvények értelmezhetők. A tangensfüggvény definíciójának értelmében

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

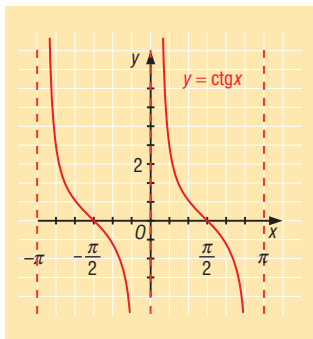
A szinusz- és koszinuszfüggvények között fennálló $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ és $-\sin \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ azonosságokat, valamint a kotangensfüggvény definícióját felhasználva, $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.



10.4. ábra Csak nyugalom, a végén minden érthető lesz!



10.5. ábra A kotangensfüggvény grafikonja a $]0; \pi[$ intervallumon



10.6. ábra A kotangensfüggvény grafikonja



10.7. ábra Hasonlóság



Vegyük észre, hogy a fenti összefüggés alapján a kotangensfüggvény felírható a tangensfüggvény segítségével, és ez fordítva is igaz. A felírt összefüggés alapján a tangensfüggvény grafikonjából megkaphatjuk a kotangensfüggvény grafikonját.

Ábrázoljuk és jellemezzük a kotangensfüggvényt!

A $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$ azonosság és a függvénytranszformációkról tanultak értelmében a kotangensfüggvény grafikonját megkaphatjuk, ha a tangensfüggvény grafikonját az x tengely mentén negatív irányban $\frac{\pi}{2}$ -vel eltoljuk, majd az így kapott görbét az x tengelyre tükrözzük. (10.5. ábra, 10.6. ábra)

Jellemzés:

Értelmezési tartománya: a valós számok halmaza, kivéve belőle a π egész számú többszöröseit. $(D_f = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$

Értékkészlete: a valós számok halmaza. $(R_f = \mathbb{R})$

Periodicitása: periodikus, periódusa π .

Zérushelyei: az x ($x \in D_f$) azon értékei, amelyekre $\operatorname{ctg} x = 0$.

A kotangensfüggvény a 0 függvényértéket a $]0; \pi[$ intervallumon a $\frac{\pi}{2}$ -höz rendeli, ezért a függvény zérushelyei: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Monotonitása: a $]k \cdot \pi; \pi + k \cdot \pi[$ intervallumon ($k \in \mathbb{Z}$) szigorúan monoton csökken.

Paritása: ha $x \neq k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor a $\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$ azonosság és a kotangensfüggvény periódusa (π) alapján $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy a kotangensfüggvény páratlan, így a függvény grafikonja az origóra tükrös.



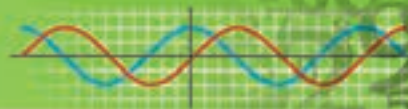
2. példa Ábrázoljuk a következő függvényeket!

a) $f(x) = -2 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + 2$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k \cdot 3\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

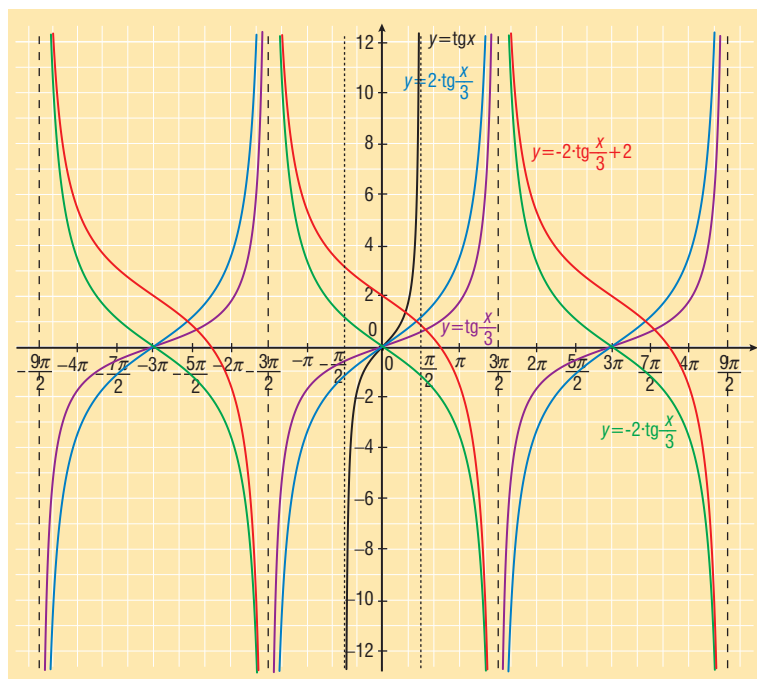
b) $g(x) = \frac{1}{2} \left| \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right|$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Megoldás:

a) Az f függvény képét megkaphatjuk függvénytranszformációk segítségével, az $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $\left(D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$ alapfüggvény



grafikonjából kiindulva. Az $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $\left(D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$ alapfüggvény grafikonját az x tengely mentén 3-szorosára nyújtjuk $\left(f_1(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{3}, D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k3\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$, majd a kapott görbét az y tengely mentén 2-szeresére nyújtjuk $\left(f_2(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{3}, D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k3\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$. Az $f_3(x) = -2 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$, $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k3\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ grafikonja az $f_2(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ függvény grafikonjának az x tengelyre vonatkozó tükörképe. Végül az $f(x) = -2 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + 2$ képéhez jutunk akkor, ha az $f_3(x) = -2 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ grafikonját az y tengely mentén 2 egységgel pozitív irányban eltoljuk. (10.8. ábra)



10.8. ábra A 2. a) példa megoldásához

b) A g függvény grafikonjának megrajzolásához induljunk ki az $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ alapfüggvény grafikonjából!



10.9. ábra Mi legyen a műveletek sorrendje?



10.10. ábra Könnyen eltévedhetünk!

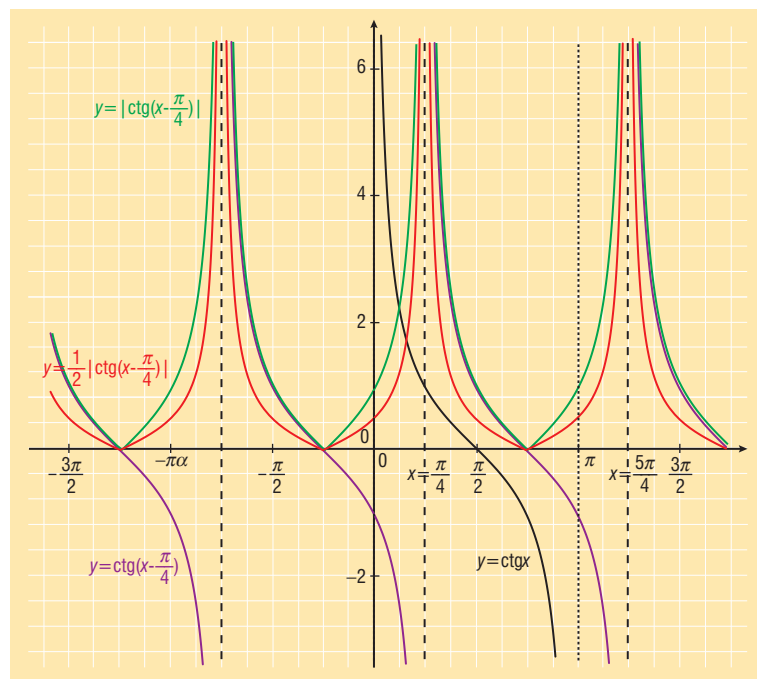


10.12. ábra A függvények alakja a műveletek hatására változik, mint a mester keze alatt az agyag



10.13. ábra Fáradozásunk eredménye

Az $x \mapsto \operatorname{ctg} x$, $(D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$ alapfüggvény grafikonját az x tengely mentén pozitív irányban $\frac{\pi}{4}$ -gyel eltoljuk $\left(g_1(x) = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right), D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$. Azokon az intervallumokon, amelyeken az imént kapott függvény negatív értékeket vesz fel, tükrözzük a grafikonját (g_1 képét) az x tengelyre, a grafikon többi részét változatlanul hagyjuk. Ekkor a $g_2(x) = \left|\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$, $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ függvény képét kapjuk meg. A g_2 függvény grafikonjából az g képét úgy kapjuk meg, hogy a g_2 grafikonját az y tengely mentén felére zsugorítjuk. (10.11. ábra)



10.11. ábra A 2. b) példa megoldásához

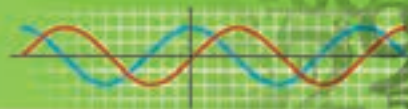


3. példa

Mely valós számokra teljesülnek az alábbi relációk?

a) $\operatorname{tg}^2 2x = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{ctg} x \leq \frac{8}{5}$



Megoldás:

a) A $\operatorname{tg}^2 2x = \frac{1}{2}$ egyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

A $\operatorname{tg}^2 2x = \frac{1}{2}$ egyenletből négyzetgyökvonás után a $|\operatorname{tg} 2x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ adódik. Innen $\operatorname{tg} 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tehát keressük azokat a (radiánban mért) szögeket, amelyeknek tangense $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. A $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ intervallumon a megoldások négy tizedesjegy pontossággal: 0,6155; -0,6155. Így az egyenlet megoldása: $x_1 = 0,6155 + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $x_2 = -0,6155 + l \cdot \pi$ ($l \in \mathbb{Z}$).

b) A $\operatorname{ctg} x \leq \frac{8}{5}$ egyenlőtlenség értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

A $\operatorname{ctg} x \leq \frac{8}{5}$ egyenlőtlenség megoldásakor keressük azokat a (radiánban mért) szögeket, amelyeknek kotangense $\frac{8}{5}$ vagy annál kisebb.

1. módszer:

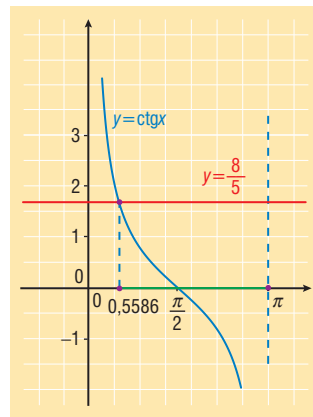
Oldjuk meg grafikusan! A jobb oldalnak megfelelő függvény a kotangensfüggvény ($f(x) = \operatorname{ctg} x$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$), a bal oldalnak megfelelő függvény a konstans függvény ($g(x) = \frac{8}{5}$, $D_g = \mathbb{R}$).

Keressük az x azon értékeit, amelyekhez a g függvény nem kisebb függvényértéket rendel, mint az f függvény. A két grafikonnak a $]0; \pi[$ intervallumon egy közös pontja van $x \approx 0,5586$ -nál. (10.14. ábra) A kotangensfüggvény periódusa és az ábra alapján az egyenlőtlenség megoldása:

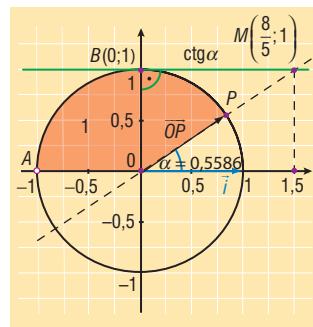
$$0,5586 + k \cdot \pi \leq x < \pi + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. módszer:

A definíció értelmében az egyenlőtlenség megoldásakor keressük azokat a forgásszögeket, amelyekkel az $\vec{i}$ egységvektort elforgatva, a kapott egységvektor egyenese és az egység sugarú kör $(0;1)$ pontjába húzott érintő közös pontjának x koordinátája legfeljebb $\frac{8}{5}$. A P pontba húzott egységvektor egyenesének és az érintő (e) közös pontjának (M) x koordinátája $\frac{8}{5}$, a $\widehat{PA}$ ív belső pontjaiba húzott egységvektorok egyenesei az érintőt $(e-t)$ olyan pontokban metszik, amelyek x koordinátája $\frac{8}{5}$ -nél kisebb. (10.13. ábra) Így az egyenlőtlenség megoldása: $0,5586 + k \cdot \pi \leq x < \pi + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).



10.14. ábra Az egyenlőtlenség grafikus megoldása



10.15. ábra Az egyenlőtlenség megoldása az egység sugarú kör segítségével

Oldjuk meg!

1. Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényeket!

a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 3, \quad x \neq \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ b) $g(x) = -2 \operatorname{ctg} 3x, \quad x \neq k \cdot \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$

c) $h(x) = \frac{1}{2} - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right), \quad x \neq \pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ d) $i(x) = 1 - \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad x \neq -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2. Számítsuk ki az alábbi függvények értékét az $x = \frac{5\pi}{6}; -\frac{3\pi}{4}$ helyeken! $\left(D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right),$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

a) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \operatorname{ctg}(-3x)$ b) $g(x) = 4 \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{ctg} 2x$

3. Mely valós x számokra teljesülnek az alábbi relációk?

a) $\operatorname{tg}^2 x = 1$ b) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 1 < 0$ c) $3 \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ d) $\operatorname{ctg}^2 x - 3 \geq 0$

4. A valós számok halmazának mely legbővebb részhalmazán nem értelmezhetők az alábbi kifejezések?

a) $\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1}$ b) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x$ c) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x$

d) $\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x + 1}$ e) $\frac{\operatorname{ctg} 6x}{2 \sin x - 1}$ f) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}x\right) + \operatorname{ctg} 4x$

5. Az alábbi állítások közül melyek igazak, melyek hamisak?

a) Az $f(x) = \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x, \quad x \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$ függvény páratlan.

b) Az $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} x, \quad x \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$ függvény páratlan.

c) Az $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ függvény páros.

d) Az $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x + 1$ függvény páros, 2π szerint periodikus.

6. Mutassuk meg, hogy bármely $\alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$ valós számra a $\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha$ teljesül!

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, akkor

a) $\sin \alpha < \alpha;$ b) $\alpha < \operatorname{tg} \alpha;$ c) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} \leq \sin \frac{\alpha + \beta}{2};$ d) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2} \geq \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$

V. fejezet

Gondolkodási módszerek, kombinatorika, valószínűségszámítás



Van még esély?

1. Skatulyaelv, tétel és megfordítása, egyszerű gráfelméleti fogalmak



1.1. ábra Skatulyák I.



1.2. ábra Skatulyák II.



1. példa Egy dobozban 6 piros, 8 fehér és 10 zöld színű, egyforma méretű és súlyú golyó van. Hány golyót kell csukott szemmel kihúzni a dobozból ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük

- valamelyik színből legalább kettő,
- valamelyik színből legalább öt?

Megoldás:

a) Ha csak három golyót vennénk ki a dobozból, akkor még előfordulhatna, hogy mindegyik színből egy-egy golyót húznánk ki. Ha viszont 4 golyót húzunk ki, akkor már biztosan lesz olyan szín, amelyikből két golyót választottunk ki.

Erre a feladatra az alábbi modellt készíthetjük. Van három darab skatulya – ezek felelnek meg a háromfajta színnek – és van 4 darab tárgy, melyeket elhelyezünk a skatulyákban. Ekkor legalább egy skatulyába legalább két tárgy kerül.

A modell általánosításával kapjuk a skatulyaelv egyik megfogalmazását.



Skatulyaelv Adott n darab skatulya, melyekben legalább $n + 1$ darab tárgyat helyezünk el. Ekkor legalább egy skatulyába legalább két tárgy kerül.

b) Mivel $3 \cdot 4 = 12$, ezért ennyi golyó kiválasztása esetén még előfordulhat, hogy mindegyik színből csak négyet vettünk ki. Ha viszont 13 golyót veszünk ki a dobozból, akkor már biztosan lesz olyan szín, amelyikből legalább ötöt húztunk ki. Erre a problémára is készíthetünk modellt. Továbbra is három darab skatulya van, de most 13 darab tárgyat helyezünk el a skatulyákban. Mivel $13 = 3 \cdot 4 + 1$, ezért biztosan lesz olyan skatulya, amelybe legalább 5 tárgy kerül.

Az előbbi modellből kiindulva általánosabban is megfogalmazhatjuk a skatulyaelvet.



A skatulyaelv általánosítása Van n darab skatulya és legalább $n \cdot k + 1$ darab tárgy, melyeket elhelyezünk a skatulyákban. Ekkor legalább egy skatulyába legalább $k + 1$ darab tárgy kerül.





2. példa Az előző feladatban szereplő dobozból legalább hány golyót kell kihúzni csukott szemmel ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük

- a) mindegyik színből legalább egy,
- b) legalább egy zöld,
- c) fehér **és** piros,
- d) fehér **vagy** piros golyó?

Megoldás:

a) Nézzük meg, hogy melyik kétfajta színből van a legtöbb a dobozban! Mivel 10 zöld, 8 fehér és 6 piros golyó található benne, ezért 18 golyó kihúzása esetén még nem biztos, hogy lesz köztük mindhárom színből. Ha viszont 19 golyót veszünk ki a dobozból, akkor már biztosan lesz mindhárom színből legalább egy a kihúzottak között.

b) 14 golyó kiválasztása esetén előfordulhat, hogy csak a fehér és a piros golyókat vettük ki a dobozból. Viszont ha 15 golyót húzunk ki, már biztosan lesz köztük zöld is.

c) A feladatban szereplő **és** kötőszó azt jelenti, hogy mindkét színű golyóból kell szerepelnie legalább egynek a kihúzottak között. Ez akkor teljesül biztosan, ha 19 golyót választunk ki a dobozból, mert 18 esetén előfordulhat, hogy a 10 zöld és a 8 fehér golyót vettük ki.

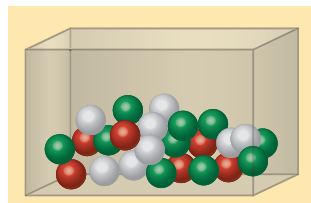
d) Ebben a feladatban a **vagy** kötőszó szerepel, amely azt jelenti, hogy a piros, illetve a fehér golyók közül legalább az egyik fajtának szerepelnie kell a kihúzottak között. Mivel 10 zöld golyó van a dobozban, ezért 10 golyó kihúzásakor előfordulhat, hogy csak zöld golyót választottunk ki. Így 11 golyó kiválasztása esetén biztosan lesz a kihúzottak között fehér vagy piros.



3. példa Egy 34 fős osztályból mindenki írt matematika-dolgozatot. Legalább hány olyan diák van az osztályban, aki azonos osztályzatot kapott a dolgozatára, ha csak egyes érdemjegyet nem kapott senki?

Megoldás:

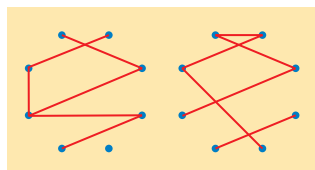
Csak egyes érdemjegyet nem kapott senki, ezért a maradék négy osztályzatot tekintsük egy-egy skatulyának, a diákokat a bennük elhelyezendő tárgyaknak. Mivel $34 = 4 \cdot 8 + 2$, ezért a skatulyaelv általános megfogalmazása alapján legalább 9 olyan tanuló volt az osztályban, aki azonos osztályzatot kapott a dolgozatára.



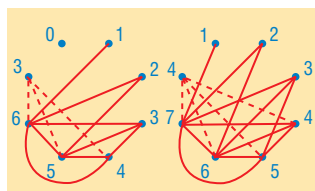
1.3. ábra Vajon mennyit kell kihúzni?



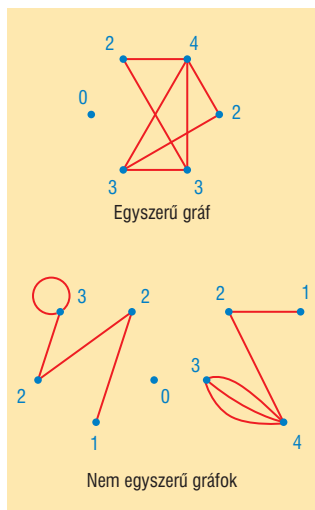
1.4. ábra Dolgoztatás



1.5. ábra A 4. példa két lehetséges megoldása



1.6. ábra A pontok melletti szám a csúcsok fokszáma



1.7. ábra Gráfok



4. példa Vegyünk fel a síkon 8 darab különböző pontot, és kössük össze közülük néhányat egymással! Igaz-e, hogy van közöttük legalább két olyan pont, melyeket ugyanannyi másikkal kötöttünk össze a felvett pontok közül? (Bármely két pontot legfeljebb egy vonallal kötünk össze.) (1.5. ábra)

Megoldás:

Némi próbálkozás után úgy sejtjük, hogy mindig van legalább két ilyen pont.

Bármelyik pontot is tekintjük, azt 0 vagy 1 vagy 2 vagy ... 7 másik ponttal köthetjük össze. Ha van olyan pont, melyet egyikkel sem kötöttünk össze, akkor nem lehet közöttük olyan, melyet 7 másikkal kötöttünk össze. Így vagy az lehet, hogy 0, 1, 2, ..., 6 vonal indul ki egy-egy pontból, vagy az, hogy 1, 2, 3, ..., 7. Ez mindkét esetben 7 lehetőséget jelent. Ezeket tekintsük egy-egy skatulyának, a 8 darab pontot pedig a bennük elhelyezendő tárgyaknak. Ekkor a skatulyaelv alapján lesz legalább két olyan pont, amelyből azonos számú vonal indul ki, azaz amelyeket azonos számú másik ponttal kötöttünk össze a felvett pontok közül. Ezzel a feladatot megoldottuk.



Ha felveszünk a síkon n db pontot, és ezek közül néhányat, akár egyet sem, összekötünk valamilyen folytonos vonallal, akkor az így keletkező alakzatot **gráfnak** nevezzük. A pontok a gráf **csúcsai** vagy szögpontjai, a pontpárokat összekötő vonalak a gráf **élei**. Az egy csúcsból kiinduló élek számát a csúcs **fokszámának** nevezzük. Ha egy gráfban bármely két pontot legfeljebb egy él köt össze, és bármely él két különböző pontot köt össze, akkor azt a gráfot **egyszerű gráfnak** nevezzük. Ennek alapján az előző feladatot az alábbi módon tétel formájában is megfogalmazhatjuk.



Tétel Egy nyolccsúcsú, egyszerű gráfban van legalább két olyan csúcs, melynek fokszáma egyenlő.

Ezután kézenfekvő a kérdés, hogy a tétel csak nyolcpontú egyszerű gráfra igaz-e. Erre megkaphatjuk a választ, ha a lecke utáni 12. feladatot megoldjuk.



5. példa A Szeged és Budapest között közlekedő vonat egyik fülkéjében 8 ember utazik. Igaz-e, hogy van közöttük legalább kettő olyan, akinek ugyanannyi ismerőse van a fülkében ülők között? (Az ismeretség kölcsönös.)



Megoldás:

Mivel lehet köztük olyan, aki senkit sem ismer, és egy ember legfeljebb 7-et ismerhet közülük, az egyes emberekhez rendelhető ismeretszámok 0, 1, 2, ..., 7 lehetnek. Ha van köztük olyan, aki senkit sem ismer, akkor nem lehet köztük olyan, aki mindenkit ismer a fülkéből. Így az ismeretszámok vagy 0, 1, 2, ..., 6 vagy 1, 2, 3, ..., 7 lehetnek. Ez mindkét esetben 7 lehetőséget jelent. Ezeket tekintjük egy-egy skatulyának, a 8 embert pedig a bennük elhelyezendő tárgyaknak. Így a skatulyaelv értelmében biztosan lesz köztük legalább két olyan ember, akiknek azonos számú ismerőse van a fülkében ülők között.



A 4. és az 5. példa megoldása lényegében megegyezik. Ez sugallja azt, hogy érdemes az 5. példát egy megfelelő matematikai modell alapján megközelíteni. Eszerint tekintsük a 8 embert egy nyolcsúcsú gráf szögpontjainak, a köztük fennálló ismeretségeket pedig szemléltessék a gráf élei. Ennek alapján a problémát visszavezettük a 4. példára. Nagyon sokszor segít a feladatok megoldásában egy megfelelő matematikai modell megalkotása, mert olykor-olykor ezzel ismert matematikai problémára, tételre vezetjük vissza a feladatot. Most csak felvillantottunk néhány gondolatot a matematika, ezen belül a kombinatorika egyik nagyon fontos területéről a gráfelméletből. A 11. osztályban ezzel behatóbban foglalkozunk.



1.8. ábra Ismerjük egymást?



6. példa Legalább hány egész számot kell megadni ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük legalább kettő, melyek különbsége osztható 5-tel?

Megoldás:

Azt már a 9. osztályból tudjuk, hogy ötös maradék szempontjából az egész számok öt páronként diszjunkt halmazba (osztályba) sorolhatók. Az elsőbe azok tartoznak, melyek 5-tel oszthatók, a másodikba azok, melyek 5-ös maradéka 1, a harmadikba azok, melyeké 2, a negyedikbe tartozóké 3, az ötödikbe tartozóké pedig 4. Nyilvánvalónak tűnik az alábbi állítás:



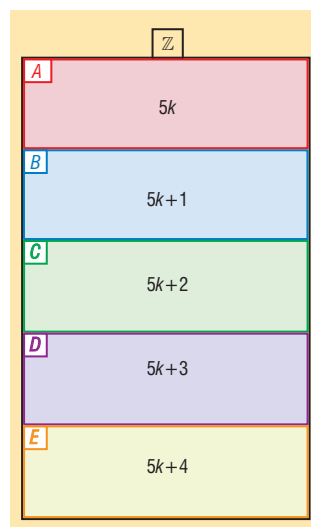
Tétel Ha két egész szám ötös maradéka egyenlő, akkor a különbségük osztható öttel.

Bizonyítás:

Legyen n és m két egész szám!

Legyen $n = 5a + r$ és $m = 5b + r$, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$ és $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ekkor $n - m = 5a + r - (5b + r) = 5(a - b)$, ami nyilván osztható öttel, mert a, b egész számok. Ezt kellett bizonyítani.



1.9. ábra Egész számok halmazai 5-ös maradék szempontjából



1.10. ábra A tiszta hajhoz elégséges a sampon



1.11. ábra Sokaknak a selyemesebb hajhoz balzsam is szükséges



1.12. ábra A balzsamtól és a sampontól lesz ilyen selymes és tiszta a hajad

Igaz ezen állítás megfordítása is:



Tétel Ha két egész szám különbsége osztható öttel, akkor a két szám ötös maradéka egyenlő.

Bizonyítás:

Legyen n és m két egész szám!

Legyen $n = 5a + r$ és $m = 5b + q$, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$ és $r, q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Tudjuk, hogy $5 \mid (n - m)$, azaz $5 \mid (5a + r - [5b + q])$.

Mivel $5a + r - [5b + q] = 5(a - b) + (r - q)$, ahol $5(a - b)$ osztható 5-tel, ezért ha $5 \mid (5a + r - [5b + q])$ akkor $5 \mid (r - q)$.

Tudjuk, hogy $r, q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, ezért $|r - q| < 5$.

Emiatt ha $5 \mid (r - q)$, akkor $r - q = 0$, azaz $r = q$. Ezt kellett bizonyítani.

Ezt a két állítást egyben is megfogalmazhatjuk:



Tétel Két egész szám különbsége akkor és csak akkor osztható öttel, ha ötös maradékuk egyenlő.

Ennek alapján öt egész szám még nem elég, mert előfordulhat, hogy páronként különböző maradékot adnak öttel osztva, ezért az előzőek alapján nem biztos, hogy lesz köztük kettő, melyek különbsége osztható öttel. Hat viszont a skatulyaelv és az előző tétel alapján már elég, mert lesz köztük kettő, melyek ötös maradéka egyenlő, és ezek különbsége osztható öttel.



A feladat megoldása során megfogalmaztunk három állítást, melyek szoros kapcsolatban vannak egymással. Az első állítás:



Tétel Ha két egész számnak egyenlő az ötös maradéka, akkor a különbségük osztható öttel.

Ezt az állítást nevezhetjük *szükséges feltételnek*, mert az alábbi módon is megfogalmazhatjuk:



Tétel Ha két egész szám ötös maradéka egyenlő, akkor szükségképpen öttel osztható a különbségük.



A tétel megfordítása:



Tétel Ha két egész szám különbsége osztható öttel, akkor a két szám ötös maradéka egyenlő.

Ezt az állítást nevezhetjük *elégséges* feltételnek is az alábbiak miatt:



Tétel Annak, hogy két egész szám ötös maradéka egyenlő legyen, elégséges feltétele az, hogy különbségük osztható 5-tel.

Természetesen ha a két állítást együtt mondjuk ki, akkor kapjuk a *szükséges és elégséges* feltételt.



Tétel Két egész szám különbsége akkor és csak akkor osztható öttel, ha egyenlő az ötös maradékuk.

Ezzel az elkövetkezendő tanévekben még foglalkozunk a logika témakörén belül.



7. példa Bizonyítsuk be, hogy bármely három négyzetszám között van kettő, melyek különbsége osztható hárommal.

Megoldás:

A 9. osztályban tanultuk az alábbi tételt.



Tétel Ha egy természetes szám négyzetszám, akkor hármas maradéka 0 vagy 1.

Tekintsük ezt a kétféle hármas maradékot egy-egy skatulyának, a három négyzetszámot pedig a bennük elhelyezendő tárgyaknak! Így a skatulyaelv értelmében három négyzetszám között lesz legalább kettő, melyek hármas maradéka egyenlő. Ezek különbsége biztosan osztható hárommal. Ezt kellett bizonyítani.



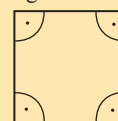
8. példa Fogalmazzuk meg az előző feladat megoldásában szereplő tétel megfordítását! Döntsük el, hogy igaz-e ez a megfordítás!



1.13. ábra Ez szükségképpen leesik?

Állítás:

Ha egy négyszög négyzet, akkor minden szöge derékszög.

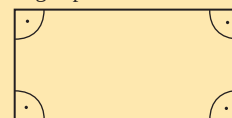


négyzet

Megfordítása:

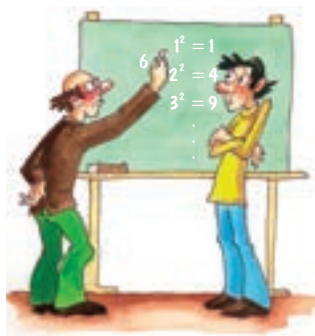
Ha egy négyszög minden szöge derékszög, akkor négyzet.

Nem igaz pl.:



lehet téglalap, ami nem négyzet

1.14. ábra Nem minden állítás megfordítása igaz



1.15. ábra A 6-os nem négyzet-szám

Megoldás:

Az állítás:

Ha egy természetes szám négyzetszám, akkor a hármas maradéka 0 vagy 1.

A megfordítása:

Ha egy természetes szám hármas maradéka 0 vagy 1, akkor a szám négyzetszám.

A megfordítás nem igaz, hiszen a 6-nak is 0 a hármas maradéka, mégsem négyzetszám.



9. példa Egy téglatest alakú doboz alapja 32 cm oldalú négyzet. A dobozban 129 db hangyát tartanak megfigyelés céljából. A hangyák csak a doboz alján mászkálnak, mert az oldallapok belső felét bekenték hangyariasztó szerrel. Bizonyítsuk be, hogy minden időpillanatban van három hangya, melyek közül bármely kettő távolsága kisebb, mint 57 mm!

Megoldás:

Mivel a feladat szerint azt kell belátni, hogy minden időpillanatban létezik három hangya, melyek közül bármely kettő távolsága kisebb, mint 57 mm, ezért célszerű annyi „skatulyát” kialakítani, hogy mindig biztosan legyen olyan, amelyikben legalább három hangya tartózkodik. Mivel $129 = 2 \cdot 64 + 1$, ezért a skatulyaelv általánosítása alapján célszerű 64 „skatulyát” kialakítani. Tudjuk, hogy $64 = 8 \cdot 8$ és $32 = 4 \cdot 8$, ezért osszuk az alaplapon oldalait – gondolatban – 8 db 4 cm hosszú szakaszra, és ezzel az alaplapon 64 db 4 cm · 4 cm-es négyzetre. Így mindig lesz olyan négyzet, amelyben legalább három hangya tartózkodik. Mivel egy négyzetben bármely két pont közötti távolság nem lehet nagyobb a négyzet átlójánál, ezért e három hangya közül bármely kettő közötti d távolságra igaz, hogy $d \leq 4\sqrt{2} \text{ cm} < 5,7 \text{ cm} = 57 \text{ mm}$. Ezt kellett bizonyítani.



1.16. ábra Hangyák a dobozban



Oldjuk meg!

- Egy zacskóban négyfajta savanyú cukor (citromos, narancsos, barackos, málnás) van, összesen 40 db, mindegyikből ugyanannyi. Legalább hány darabot kell csukott szemmel kihúzni, hogy biztosan legyen közöttük
 - valamelyikből legalább kettő;
 - valamelyikből legalább három;
 - mindegyikből legalább három;
 - valamelyikből az összes;
 - citromos és málnás;
 - narancsos vagy barackos?



2. Egy zsákban 10 pár fekete és 15 pár barna, ugyanolyan méretű kesztyű van. (Az egy párban levők nincsenek összekötve.) Legalább hány darabot kell csukott szemmel kihúzni a zsákból, hogy biztosan legyen köztük
 - a) két darab különböző színű kesztyű,
 - b) egy pár azonos színű kesztyű,
 - c) egy pár nem feltétlenül azonos színű kesztyű?
3. Legalább hány fős az az osztály, amelyikben van biztosan legalább négy olyan diák, aki ugyanabban a hónapban ünnepli a születésnapját?
4. Egy osztályba hajszín szempontjából négyféle diák jár. Szőke, barna, fekete és vörös hajú. Hány fős az osztály, ha tudjuk, hogy kiválasztható 8 diák úgy, hogy az csak szőke, vagy csak barna, vagy csak fekete, vagy csak vörös hajú legyen, de bárhogy is választunk ki 25 diákot, mindig lesz köztük mind a négy hajszínűből legalább egy?
5. Igaz-e, hogy 11 egész szám között mindig van kettő, melyek különbsége osztható tízzel?
6. Bizonyítsuk be, hogy $n+1$ darab egész szám között mindig van kettő, melyek különbsége osztható n -nel!
7. Bizonyítsuk be, hogy 21 darab egész szám között mindig van öt, amelyek összege osztható öttel!
8. Bizonyítsuk be, hogy öt egész szám között mindig van kettő, melyek összege vagy különbsége osztható héttel!
9. Bizonyítsuk be, hogy bármely négy négyzetszám között van kettő, melyek különbsége osztható öttel!
10. Szemléltessünk gráfon olyan öttagú társaságot, amelyben egy embernek 4, kettőnek 3, és kettőnek 2 ismerőse van!
11. Az egyik ballagó osztályban egy hatfős baráti társaság elhatározza, hogy mindenki mindenkivel tablóképet cserél. Előfordulhat-e olyan állapota ennek a folyamatnak, hogy ketten már mindenkivel képet cseréltek, egy ember hárommal, ketten kettővel, egy pedig eggyel cserélt képet?
12. Bizonyítsuk be, hogy bármely egyszerű gráfban van két olyan csúcs, melyeknek azonos a fokszáma!
13. Fogalmazzuk meg az alábbi állítások megfordítását! Döntsük el mindegyik esetben, hogy igaz-e az állítás, illetve annak megfordítása!
 - a) Ha egy négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást.
 - b) Ha egy háromszög egyik súlyvonala merőleges az egyik oldalra, akkor a háromszög egyenlő szárú.
 - c) Ha egy háromszög belső szögeinek az aránya 1:2:3, akkor az egyik oldala fele egy másik oldalnak.
 - d) Ha egy négyszög két szögének az összege 180° , akkor van köré írható köre.
 - e) Ha egy négyszög két átlója merőlegesen felezi egymást, akkor oldalai egyenlők.
 - f) Ha két pozitív egész szám legkisebb közös többszöröse 45, akkor az egyik osztható 9-cel.
14. Bizonyítsuk be, hogy a lecke 9. példájában minden időpillanatban van három olyan hangya, melyek által meghatározott háromszög területe nem nagyobb 8 cm^2 -nél!
15. Egy 1 méter oldalú négyzetben felvesszünk 201 db pontot. Bizonyítsuk be, hogy van köztük három, melyek lefedhetők 160 cm^2 területű körrel!

2. Bevezető kombinatorikafeladatok, szorzási és összeadási szabály



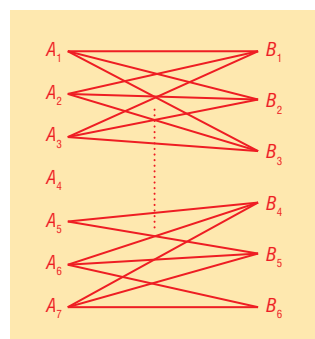
2.1. ábra Vívóversenyzők



1. példa Egy vívóversenyen két egyesület vívói küzdenek meg egymással. Az egyik egyesület csapatában 7, a másikban 6 versenyző vesz részt. Hány párost lehet összeállítani a két csapat versenyzőiből, ha a páros egyik tagja az egyik, a másik tagja a másik csapatból kerül ki?

Megoldás:

A feladat szerint a páros egyik tagját az első, a másik tagját a második csapatból választjuk ki. Mivel az első csapatból hétféleképpen választhatunk ki egy embert, és bárkit is választunk ki ebből a csapatból, a másiktól mellé hatféleképpen választhatunk társat, ezért összesen $7 \cdot 6 = 42$ párost lehet összeállítani.

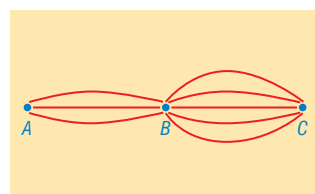


2.2. ábra A párosítás szemléltetése gráffal

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
B_1	$A_1; B_1$	$A_2; B_1$	$A_3; B_1$	$A_4; B_1$	$A_5; B_1$	$A_6; B_1$	$A_7; B_1$
B_2	$A_1; B_2$	$A_2; B_2$	$A_3; B_2$	$A_4; B_2$	$A_5; B_2$	$A_6; B_2$	$A_7; B_2$
B_3	$A_1; B_3$	$A_2; B_3$	$A_3; B_3$	$A_4; B_3$	$A_5; B_3$	$A_6; B_3$	$A_7; B_3$
B_4	$A_1; B_4$	$A_2; B_4$	$A_3; B_4$	$A_4; B_4$	$A_5; B_4$	$A_6; B_4$	$A_7; B_4$
B_5	$A_1; B_5$	$A_2; B_5$	$A_3; B_5$	$A_4; B_5$	$A_5; B_5$	$A_6; B_5$	$A_7; B_5$
B_6	$A_1; B_6$	$A_2; B_6$	$A_3; B_6$	$A_4; B_6$	$A_5; B_6$	$A_6; B_6$	$A_7; B_6$



Az előző feladatban rendezett elempárokat hoztunk létre. Az elempár első tagjának kiválasztása nem befolyásolta a második kiválasztását, a kettő egymástól függetlenül zajlott. Ilyen esetben alkalmazhatjuk a kombinatorika egyik fontos szabályát, az úgynevezett **szorzási szabályt**. Ha a rendezett elempár első tagját m -féleképpen választhatjuk ki, a másodikat n -féleképpen, akkor az elempárokat a megadott sorrendben $m \cdot n$ -féleképpen.



2.3. ábra A feladatban szereplő úthálózat matematikai modellje egy gráf



2. példa Hányféleképpen juthatunk el A városból a C városba B városon keresztül, ha azokat a mellékelt úthálózat köti össze?

Megoldás:

Az A-ból a C-be két egymást követő útszakaszon keresztül lehet eljutni. Az első szakaszt az A-t a B-vel összekötő 3 útból, a másodikat a B-t a C-vel összekötő 5 útból lehet választani. A két választás egymástól független, így alkalmazhatjuk a szorzási szabályt. Tehát $3 \cdot 5 = 15$ -féleképpen juthatunk el A-ból C-be a B-n keresztül.



3. példa A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány négyjegyű számot készíthetünk, ha

- egy számjegyet legfeljebb csak egyszer használhatunk fel,
- egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

Megoldás:

a) Már a 9. osztályban is foglalkoztunk ilyen jellegű összeszámlálási feladattal. A felsorolt hat számjegy közül választunk ki négyet, a négyjegyű szám négy helyi értékére. Az első helyre nem kerülhet a 0, ezért oda csak öt számjegy közül választhatunk. A második helyre már választhatjuk a 0-t, de azt a számot, amit az első helyre írunk, már nem, mert egy számjegyet legfeljebb csak egyszer használhatunk fel. Tehát bármelyik megengedett számot írjuk az első helyre, a másodikra öt szám közül választhatunk, így a szorzási szabályt alkalmazva ez $5 \cdot 5 = 25$ lehetőség. Folytassuk tovább a kiválasztást! Bármelyik két különböző számot is tesszük az első két helyre, a harmadikra már csak négy szám közül választhatunk, mert az első két helyi értéken szereplőt már nem tehetjük oda. A szorzási szabályt alkalmazva kapjuk, hogy ez eddig $25 \cdot 4 = 100$ lehetőség. Az utolsó helyre már csak 3 számjegy közül választhatunk, így a szorzási szabály alapján $100 \cdot 3 = 300$ olyan négyjegyű szám készíthető a megadott számokból, melyekben a számjegyek nem ismétlődnek.

b) Ebben a feladatban sem tehetjük a 0-t az első helyre, így oda csak öt számjegy közül választhatunk. Mivel a feladat megengedi a számjegyek ismétlődését, ezért a további helyek mindegyikére bármelyik felsorolt számjegyet tehetjük, így a szorzási szabály alapján $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$ olyan négyjegyű szám készíthető a megadott számjegyekből, melyekben a számjegyek ismétlődhetnek.



4. példa Az előző feladat a) részében szereplő négyjegyű számok között hány olyan van, amelyik osztható öttel?

Megoldás:

A kilencedik osztályban tanultuk, hogy a tizes számrendszerbeli egész számok öttel oszthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy a szám 0-ra vagy 5-re végződjön, azaz az alábbi tételt fogalmaztuk meg:



Tétel

Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha az utolsó számjegye 0 vagy 5.

Tehát meg kell adnunk az előző feladat a) részében szereplő négyjegyű számok közül a 0-ra vagy 5-re végződők számát. Az összeszámlálást bontsuk két részre! Először az 5-re, majd a 0-ra végződő számokat szá-

a)

1. hely 2. hely 3. hely 4. hely
5 lehetőség 5 lehetőség 4 lehetőség 3 lehetőség

A szorzási szabály értelmében ez $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ darab olyan négyjegyű szám van, melyben a számjegyek nem ismétlődnek.

b)

1. hely 2. hely 3. hely 4. hely
5 lehetőség 6 lehetőség 6 lehetőség 6 lehetőség

A szorzási szabály értelmében ez $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$ darab olyan négyjegyű szám van, melyben a számjegyek ismétlődhetnek.

2.4. ábra Alkalmazzuk a szorzási szabályt a 3. példára!

1. hely 2. hely 3. hely 5
4 lehetőség 4 lehetőség 3 lehetőség 1 lehetőség

A szorzási szabály értelmében ez $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 48$ darab olyan négyjegyű szám van, amely 5-re végződik.

1. hely 2. hely 3. hely 0
5 lehetőség 4 lehetőség 3 lehetőség 1 lehetőség

A szorzási szabály értelmében ez $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ darab olyan négyjegyű szám van, amely 0-ra végződik.

Az összeadási szabály alapján $48 + 60 = 108$ darab olyan ötöl osztható négyjegyű szám létezik, mely a feladatnak megfelel.

2.5. ábra Alkalmazzuk a szorzási szabályt a 4. példára!



2.6. ábra Végre megnézünk egy jó filmet

1. hely 6 lehetőség	2. hely 5 lehetőség	3. hely 4 lehetőség
4. hely 3 lehetőség	5. hely 2 lehetőség	6. hely 1 lehetőség

A szorzási szabály értelmében ez $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ esetet jelent.

$\underline{F}$ 3 lehetőség	$\underline{L}$ 3 lehetőség	$\underline{F}$ 2 lehetőség
$\underline{L}$ 2 lehetőség	$\underline{F}$ 1 lehetőség	$\underline{L}$ 1 lehetőség

A szorzási szabály értelmében ez $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 36$ esetet jelent.

$\underline{L}$ 3 lehetőség	$\underline{F}$ 3 lehetőség	$\underline{L}$ 2 lehetőség
$\underline{F}$ 2 lehetőség	$\underline{L}$ 1 lehetőség	$\underline{F}$ 1 lehetőség

A szorzási szabály értelmében ez $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 36$ esetet jelent. Az összeadási szabály alapján $36 + 36 = 72$ -féle módon helyezkedhetnek el úgy, hogy fiú fiú mellé, lány lány mellé nem ülhet.

2.7. ábra Alkalmazzuk helyesen a két alapszabályt!

moljuk össze! Mivel egy, a feladatnak megfelelő öttel osztható négyjegyű szám vagy az egyik, vagy a másik csoportba tartozik, ezért az így kapott két értéket össze kell adni. Ez a kombinatorika **összeadási szabálya**. Az előző feladat a) részében szereplő négyjegyű számok közül az ötre végződők száma $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 48$. Felhasználtuk, hogy az utolsó helyre csak egy számjegy kerülhet, és az első helyre nem kerülhet a 0, valamint a végén szereplő 5-ös. A 0-ra végződők esetén ugyancsak egy számjegy kerülhet a végére a 0, de az első helyre öt szám közül választhatunk, mert a 0-t már kizártuk azzal, hogy a végére tettük. Így ezek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$. Tehát a feladatnak megfelelő ötten osztható négyjegyű számok száma $48 + 60 = 108$.



Ha egy A „objektumot” n -féle módon lehet megvalósítani, egy másik B „objektumot” pedig m -féle módon, de a kettő együtt nem valósulhat meg, akkor a „vagy A , vagy B ” megvalósítása $n + m$ -féle módon lehetséges. Ezt a szabályt nevezzük a **kombinatorika összeadási szabályának**.



5. példa Egy hatfős baráti társaság – három fiú és három lány – moziba megy.

- Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé?
- Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha fiú fiú mellé és lány lány mellé nem akar ülni?

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy a moziban a helyek számozottak, tehát nem mindegy, hogy ki melyik helyre ül. A korábbi feladatokban megismert gondolatmenetet és a szorzási szabályt alkalmazva kapjuk, hogy az első helyre 6 ember közül választhatunk, és bárki is ül az első helyre, a másodikra már csak 5 ember közül kerülhet valaki, és így tovább, míg az utolsó helyre már csak 1 ember marad, azaz a lehetséges leülések száma $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. A számításban megjelent az első hat pozitív egész szám szorzata, amelyet röviden úgy jelölünk, hogy $6!$, és hat **faktoriális**-nak olvasunk.

b) Mivel fiú fiú mellé, lány lány mellé nem ülhet, ezért vagy az FLFLFL, vagy az LFLFLF lehetőség valósul meg. Mivel mind a fiúk, mind a lányok hárman-hárman vannak, ezért a szorzási szabály és az eddigi gondolatmenet alkalmazásával kapjuk, hogy mindkét elhelyezkedés $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 9 \cdot 4 = 36$ -féle módon valósulhat meg. Az összeadási szabályt alkalmazva kapjuk, hogy összesen $36 + 36 = 72$ -féle módon helyezkedhetnek el a feltételeknek megfelelően.





Definíció Az első $n(>1)$ darab pozitív egész szám szorzatát, azaz az $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ szorzatot **n faktoriálisnak** nevezzük. Jelölés: $n!$

A későbbiek szempontjából fontos megállapodni abban, hogy $1! = 1$ és $0! = 1$.



6. példa Egyszerűsítsük az alábbi kifejezéseket, és ahol lehet, számítsuk ki a pontos értéküket!

a) $\frac{10!}{8!}$ b) $\frac{1}{8!} : \frac{1}{9!}$ c) $\frac{5}{4!} - \frac{1}{5!}$ d) $\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!} \quad n \in \mathbb{Z}^+$

Megoldás:

a) A faktoriális definíciója alapján

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 8! \cdot 9 \cdot 10.$$

Így $\frac{10!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!} = 9 \cdot 10 = 90.$

b) A törtek osztására vonatkozó szabály és a faktoriális definíciója alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{1}{8!} : \frac{1}{9!} = \frac{1}{8!} \cdot 9! = \frac{8! \cdot 9}{8!} = 9.$$

c) A kivonás elvégzése előtt meg kell keresni a két tört nevezőjének a legkisebb közös többszörösét! Mivel az $5! = 5 \cdot 4!$, ezért ötszöröse a $4!$ -nak, így a legkisebb közös többszörösük az $5!$. Ennek alapján

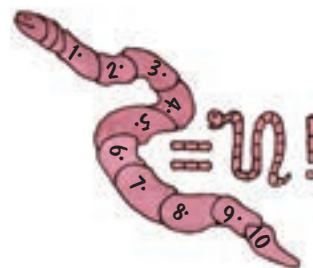
$$\frac{5}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{25-1}{5!} = \frac{24}{4! \cdot 5} = \frac{24}{24 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

d) Először végezzünk egyszerűsítést! Mivel $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ és $n! = (n-1)! \cdot n$, ezért mindkét törtben egyszerűsíthetünk. Ennek alapján

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!} &= \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot n} - \frac{n!}{n! \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \\ &= \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$



2.8. ábra Ebben állapodtunk meg



2.9. ábra Ez hosszabb:
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$
Ez rövidebb: $10!$



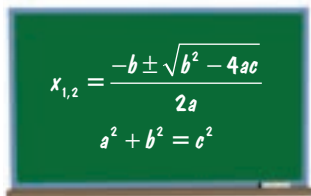
Oldjuk meg!

1. Egy osztályban 16 fiú és 14 lány van. Hányféleképpen választhatunk ki egy kétfős diákparlamenti küldöttséget, ha lennie kell benne lánynak is, és fiúnak is?
2. Hányféleképpen állíthatjuk össze az előző küldöttséget, ha mindkét tagja
a) fiú, b) lány?
3. A páros számjegyekből hány háromjegyű szám készíthető? Ezek közül hány végződik hárommal osztható számjegyre?

Gondolkodási módszerek, kombinatorika, valószínűségszámítás

4. Egy hegy tetejére hat különböző meredekségű turistaút vezet.
- Hányféle útvonalat választhat a turista, ha felmászik csúcsra, majd lejön onnan?
 - Hányféle útvonalat választhat, ha nem szeretne azon lejönni, amin felment?
 - Hányféleképpen választhat útvonalat abban az esetben, ha legfeljebb olyan meredekségűn szeretne lejönni, mint amilyenén felment?
5. Egy dobókockával kétszer dobunk egymás után. A dobott eredményeket leírjuk.
- Hányféle kétjegyű számot kaphatunk?
 - Ezek között hány olyan lehet, melyekben a számjegyek összege kisebb ötnél?
 - Hány olyan lehet köztük, melyben a számjegyek szorzata páratlan?
 - Hány olyan lehet köztük, melyben a számjegyek szorzata páros?
 - Hány olyan szám lehet köztük, amelynek az egyik számjegye osztója a másiknak?
6. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával elkészítjük az összes háromjegyű számot. Hány olyan szám van közöttük, amelyben
- mindhárom számjegy páros,
 - egy számjegy páratlan, kettő páros,
 - egy számjegy páros, kettő páratlan,
 - mindhárom számjegy páratlan,
- ha egy számjegyet csak egyszer használhatunk fel?
7. Válaszoljunk az előző feladat kérdéseire, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk!
8. A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával hány olyan hétjegyű számot készíthetünk, amelyben nincs két egyenlő számjegy? Ezek között hány olyan van, amelyben nincs két páros számjegy egymás mellett?
9. Öt diák, három fiú és két lány, nyáron dolgozni szeretne az egyik városban. Három különböző üzemből keresnek a gépek mellé fiúkat, és az egyikben takarítói állásra lányokat. Két vendéglőben konyhai kisegítő állásra fiúkat és lányokat egyaránt alkalmaznának. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha egyik helyen sincs létszámkorlátozás? Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a két lány nem szeretne ugyanazon a munkahelyen dolgozni?
10. Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket, és ahol lehet, adjuk meg egyetlen racionális számként!
- a) $\frac{100!}{99!} - \frac{98!}{97!}$ b) $\frac{10!}{7!3!}$ c) $\frac{20!}{16!4!} \cdot \frac{16!}{18!}$ d) $\frac{18!}{9!} : \frac{16!}{8!}$ e) $\frac{150}{6!} - \frac{1!}{4!}$ f) $\frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{n!}$

3. Variációk



3.1. ábra Emlékeztető

Az előző leckében néhány egyszerű összeszámlálási problémán keresztül megismerkedtünk a kombinatorika két nagyon fontos szabályával, a szorzási és az összeadási szabállyal. A matematikában gyakran tesszük azt, hogy az egyes problémátípusokat, tételeket általánosan tárgyaljuk, majd a kapott eredményeket alkalmazzuk konkrét esetekben. Gondoljunk akár a másodfokú egyenlet megoldóképletére, vagy geometriából Pitagorasz tételére! A kombinatorikában is vannak bizonyos összeszámlálási problémák, melyek különösen gyakran fordulnak elő. Ezeket három fő csoportba oszthatjuk, melyekkel a következő leckékben ismerkedünk meg.



3.1. Ismétlés nélküli variációk



1. példa Egy futóverseny döntőjébe nyolc versenyző jutott. Az első helyezett arany-, a második ezüst-, a harmadik bronzérmet nyer. Hányféleképpen lehet kiosztani az érmeket?

Megoldás:

Az első helyen nyolc versenyző végezhet, és bárki is lesz az első, a másodikra már csak 7 versenyző kerülhet, és akármelyik két versenyző is kerül az első két helyre, a harmadik már csak hat versenyző közül kerülhet ki. A szorzási szabály alkalmazásával kapjuk, hogy az érmeket $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ -féleképpen oszthatjuk ki.



2. példa Az 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számjegyekből hány négyjegyű szám készíthető, ha egy számjegyet legfeljebb csak egyszer használhatunk fel? Ezek közül hányban szerepel az 5-ös számjegy?

Megoldás:

Az első kérdésre az előző feladatban és a 2. lecke 3. példájában szereplő gondolatmenetet alkalmazva adhatjuk meg a választ. A megadott hét számjegy közül választunk ki négyet a négyjegyű szám négy helyi értékére. Bármelyiket is választjuk az első helyre, a másodikra már csak hat, a harmadikra öt, a negyedikre pedig négy számjegy közül választhatunk. A szorzási szabály értelmében $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ olyan négyjegyű szám készíthető a megadott számjegyekből, melynek minden számjegye különböző.

A feladat második részére két megoldást adunk.

1. módszer:

Mivel egy számjegyet csak egyszer használhatunk fel, ezért csak egy 5-ös szerepelhet a számban. Ez az ötös lehet az ezresek, a százások, a tízesek, illetve az egyesek helyén. Mindegyik esetben a maradék három helyre $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ -féleképpen írhatunk számjegyeket. Így összesen $4 \cdot 120 = 480$ ilyen szám képezhető.

2. módszer:

A 9. osztályban már találkoztunk az úgynevezett komplementer módszerrel. Ha az összes eset számából kivonjuk a feladat szempontjából kedvezőtlen esetek számát, akkor megkapjuk a kedvező esetek számát. Most kedvezőtlennek tekintjük azokat a négyjegyű számokat, melyek számjegyei között nem szerepel 5-ös számjegy. Mivel az 5-öt elhagyva hat számjegy közül választunk ki négy darabot, így a szorzási szabály értelmében $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ szám van a feladatbeli négyjegyű számok



3.2. ábra Futóverseny

aranyérem	ezüstérem	bronzérem
8 lehetőség	7 lehetőség	6 lehetőség

A szorzási szabály értelmében $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ -féleképpen osztathatjuk ki az érmeket.

3.3. ábra Alkalmazzuk a szorzási szabályt az 1. példára

1. hely	2. hely	3. hely	4. hely
7 lehetőség	6 lehetőség	5 lehetőség	4 lehetőség

A szorzási szabály értelmében ez $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ darab olyan négyjegyű szám, melyben a számjegyek nem ismétlődnek.

3.4. ábra Alkalmazzuk a szorzási szabályt a 2. példára

A döntőbe jutott versenyzők halmaza:

$\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.

Három lehetséges elemhármas pl.

$(A, B, D); (B, D, A); (B, H, A)$.

Mindhárom a megadott nyolc elem egy-egy harmadosztályú ismétlés nélküli variációja.

A számjegyek halmaza:

$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Például a 3675 a megadott hét elem egy negyedosztályú ismétlés nélküli variációja.

3.5. ábra Példák ismétlés nélküli variációkra



Magyarország



Bulgária

3.6. ábra Számít a színek sorrendje

halmazában, melyek számjegyei között nincs 5-ös. Így $840 - 360 = 480$ olyan négyjegyű szám van ebben a halmazban, melynek a számjegyei között szerepel 5-ös.



Az első feladatban megadtuk, hogy a döntőbe jutott nyolc versenyző halmazából hányféleképpen választhatunk ki hármat az összes lehetséges módon úgy, hogy különböző kiválasztási sorrend különbözőnek számít. Ez azt jelenti, hogy az így létrehozott két elemhármas akkor és csak akkor tekintjük különbözőnek, ha a bennük szereplő valamelyik elemben, vagy azok sorrendjében különböznek. Ezeket az elemhármasokat nevezzük **nyolc elem harmadosztályú ismétlés nélküli variációinak**. Eszerint a második feladat első részében hét elem negyedosztályú ismétlés nélküli variációinak a számát adtuk meg.



Definíció

Adott egy n -elemű halmaz. Ezen n darab elemből kiválasztott k darab ($k \leq n$) különböző elem egy sorrendjét az **n elem egy k -adosztályú, ismétlés nélküli variációjának** nevezzük, ahol $n; k \in \mathbb{N}$.

Ha k darab elem egy sorrendjét rendezett k -snak nevezzük, akkor az n elem k -adosztályú ismétlés nélküli variációi az n különböző elemből képezhető rendezett k -sok.



Tétel

Egy n elemű halmaz k -adosztályú, ismétlés nélküli variációinak a száma:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Bizonyítás:

A bizonyítás a konkrét példákban alkalmazott gondolatmenet felhasználásával történhet. Az n darab különböző elem közül kell kiválasztanunk k darab különbözőt, így az első helyre n elem közül választhatunk, és bármelyiket is választottuk az első helyre, a második helyre $n-1$ elem közül lehet választani, és így tovább, míg a k -adik helyre már csak $n - (k-1) = n - k + 1$ elem közül választhatunk, mivel $k-1$ darabot már kiválasztottunk. A szorzási szabályt alkalmazva kapjuk, hogy $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$. Ha ezt bővítjük $(n-k)!$ -sal, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} V_n^k &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Ezt kellett bizonyítani.



3. példa Egy 30 fős osztályban osztálytitkárt, sportfelelőst és osztálypénztárost választanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha egy diák egyszerre legfeljebb egy funkciót tölthet be?

Megoldás:

A 30 fős osztály diákjai közül hármat választanak ki úgy, hogy számít mind az, hogy kit választanak ki, mind az, hogy kit milyen posztra. Ezért 30 elem harmadosztályú ismétlés nélküli variációinak a számát keressük, ami $V_{30}^3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$.



3.7. ábra A három legalkalmasabb jelölt

3.2. Ismétléses variációk



4. példa Magyarországon 1947 óta igen népszerű szerencsejáték a totó. Egészen 1964-ig egyoszlopos szelvényen lehetett 12 mérkőzésre tippelni, a ma is használatos 1, 2, x jelekkel. Az ilyen fajta totó esetén hány szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan legyen telitalálatunk? Hány évig tartana ezek kitöltése, ha egy szelvény kitöltéséhez szükséges idő átlagosan 3 perc lenne? (Ennek értékét egy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg!)

Megoldás:

Akkor lehetünk biztosak abban, hogy van telitalálatunk, ha pontosan annyi totószelvényt töltünk ki különbözőképpen, ahányféleképpen ki lehet tölteni egy totószelvényt. Mivel mind a 12 helyre 3 lehetőség közül választhatunk egymástól függetlenül, így a szorzási szabály alapján $3^{12} = 531441$ -féleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt. Ha egy szelvény kitöltése átlagosan 3 percig tart, akkor ez 1 594 323 percet, $1\,594\,323 : 60 = 26\,572,05$ órát, $26\,572,05 : 24 = 1107,16875$ napot, $1107,16875 : 365 \approx 3,0$ évet vesz igénybe.



A feladatban szereplő totószelvényen 12 helyre kell az 1, 2, x szimbólumok valamelyikét beírni. Ez egy rendezett „tizenkettő egység hosszú” jelsorozat felírását jelenti. Tehát a feladat megadja, hogy az 1, 2, x jelekből hányféle rendezett „tizenkettő egység hosszúságú” jelsorozatot hozhatunk létre. Egy ilyet a megadott **három elem tizenkettedosztályú ismétléses variációjának** nevezünk.

Újpest – Ferencváros	x
Kispest – Vasas	1
Erzsébeti MTK – MTK	1
Csepel – SZAC Barátság	2
Elektromos – Mateosz	x
Szolnok – Haladás	x
Salgótarjáni BTC – Debreceni VSC	2
Hatvani BTC – ErSo Madisz	2
Békéscsabai Előre – Orosházi MTK	x
Soproni VSC – Tatabányai BSC	2
Diósgyőri VTK – Pécset	1
Győri MÁV DAC – Postás	1

3.8. ábra Az 1947. október 19-i totószelvény egy lehetséges kitöltése. Ez az 1, 2, x elemek egy tizenkettedosztályú ismétléses variációja



3.9. ábra Variációk egy témára



Definíció Adott egy n ($n \in \mathbb{N}^+$) elemű halmaz. Ha úgy hozunk létre rendezett k -sokat ($k \in \mathbb{N}$), hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk, akkor az n elem k -adosztályú ismétléses variációit kapjuk.



Tétel Egy n -elemű halmaz k -adosztályú ismétléses variációinak a száma $V_n^{k(i)} = n^k$.

Bizonyítás: Mivel a k hely mindegyikére egymástól függetlenül n darab elem közül választhatunk, ezért a szorzási szabály értelmében a k -adosztályú ismétlés nélküli variációk száma $V_n^{k(i)} = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ db}} = n^k$.



3.10. ábra Dobókocka



5. példa Egy dobókockával négyszer dobunk egymás után, és a dobott számokat leírjuk egymás mellé.

- Hány különböző négyjegyű számot kaphatunk ily módon?
- Mennyi e számok összege?

Megoldás:

a) A keletkező négyjegyű számok az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz elemeiből képezhető negyedosztályú ismétléses variációk, mivel olyan rendezett négyeseket hozunk létre, melyekben egy elemet többször is felhasználhatunk. Ezek száma $V_6^{4(i)} = 6^4 = 1296$.

b) Először számítsuk ki, hogy hány ezrest, százast, tízest és egyest adunk össze, mikor kiszámoljuk e számok összegét! Mivel az ezres helyi értékre mind a hat számot írhatjuk, és mindegyik esetén a maradék három helyre összesen $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ -féleképpen írhatunk számjegyeket, ezért összesen $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 216 = 4536$ ezrest adunk össze. Ezek összértéke $4536 \cdot 1000 = 4536000$. Mivel az ezresek helyi értékének nincs kitüntetett szerepe a többi helyi értékhez viszonyítva, így a százaskok, a tízesek és az egyesek száma is 4536. Ezt foglaljuk táblázatba!

	ezresek	százaskok	tízesek	egyesek
száma	4536	4536	4536	4536
értéke	4536000	453600	45360	4536

A teljes összeg:

$$4536000 + 453600 + 45360 + 4536 = 4536 \cdot 1111 = 5039496$$

Tehát az a) részben szereplő számok összege 5039496.



3.11. ábra Az összes számot megtaláltam?



Oldjuk meg!

1. Egy 32 fős osztályban öt különböző tárgyat szeretnénk szétosztani. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha egy diák
a) csak egy, b) több tárgyat is kaphat?
2. Egy 32 lapos magyar kártyából egymás után kihúzzunk 4 lapot, és a húzás sorrendjében letesszük egymás mellé az asztalra. Hányféleképpen lehetséges ez?
3. Mi a válasz az előző feladat kérdésére, ha a kihúzás után visszatesszük a kihúzott lapot, de a kihúzás sorrendjében felírjuk azokat egy papírra?
4. A 2. feladatban kihúzott lapok között hány esetben lesz legalább egy ász? Hány esetben nem lesz piros?
5. Egy dobókockával ötször dobunk egymás után, és a kapott számokat a dobás sorrendjében leírjuk egymás mellé. Hány esetben lehet a dobott számok között:
a) legalább egy kettes; b) hármas vagy kettes; c) négyes és ötös?
6. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan négyjegyű szám készíthető, amelyben legalább egy számjegy ismétlődik?
7. Tíz cédulára felírtuk a tíz számjegyet, majd beletesszük azokat egy dobozba. Ezután kihúzzunk öt cédulát, melyeket a húzás sorrendjében letesszünk egymás mellé.
a) Hány olyan ötjegyű szám keletkezhet, melynek minden számjegye páratlan?
b) Hány olyan ötjegyű szám keletkezhet, melynek minden számjegye páros?
c) Hány olyan ötjegyű szám keletkezhet, melynek van páros számjegye?
d) Hány olyan ötjegyű szám keletkezhet, amely osztható négygyel?
e) Hány olyan ötjegyű szám keletkezhet, amely osztható öttel?
8. Határozzuk meg azon ötjegyű számok összegét, melyek az előző feladatban keletkezhetnek!
9. Az 1_2_3_4_5_6_7 számok közé az üres helyekre a + és a – műveleti jelek valamelyikét írjuk. Hányféle végeredménye lehet a műveletsornak? Ezek közül melyik a legnagyobb, ill. a legkisebb? Lehet-e az eredmény 0? Lehet-e 3?
10. Tudjuk, hogy n elem másodosztályú ismétlés nélküli variációinak a száma 1260. Mennyi az n ?

4. Permutációk, kombinációk

4.1. Permutációk

4.1.1. Ismétlés nélküli permutációk



1. példa Az európai parlamenti választáson 2009-ben Magyarországon nyolc pártnak sikerült listát állítania. Azt, hogy ezek a pártok milyen sorrendben szerepelnek a szavazócédulán, sorsolással dönti el az Országos Választási Bizottság. Hányféle sorrendje lehet a listát állító nyolc pártnak?



4.1. ábra 2004. május 1-től Magyarország is tagja az Európai Uniónak



4.2. ábra Választás

Megoldás:

Mivel a nyolc párt összes lehetséges sorrendjének a számát kell megadni, ezért nyolc helyre kell választani úgy, hogy egy elemet csak egyszer választhatunk ki. A nyolc elem közül bármelyik is kerül az első helyre, a másodikra hét elem közül lehet választani és így tovább, a nyolcadik helyre már csak egy elem marad. A szorzási szabály értelmében az összes lehetséges sorrend $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$. A korábban tanultak alapján az előző szorzatot rövidebben $8!$ (nyolc faktoriális) alakban írhatjuk le.



A második leckében megadott definíció alapján a nyolc párt egy sorrendje lényegében egy rendezett nyolcas. Ezzel tehát nyolc elem nyolcadosztályú ismétlés nélküli variációinak a számát határoztuk meg. Mivel mind a nyolc elemet felhasználtuk, ezért két ilyen variációt akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha bennük az elemek sorrendje más. Az ilyen variációkat a nyolc elem **ismétlés nélküli permutációi**-nak nevezzük.



4.3. ábra Vajon hányféleképpen állhatunk sorba?

Definíció Egy n ($n \in \mathbb{Z}^+$) elemű halmaz elemeiből képezett rendezett n -eseket az **n elem ismétlés nélküli permutációinak** nevezzük.

Ha $n=1$, akkor a permutációk száma 1, ami egyenlő $1!$ -sal. Ha $n > 1$, akkor a permutációk számának meghatározását visszavezetjük az ismétlés nélküli variációk kiszámítására. Mivel n különböző elem n -edosztályú ismétlés nélküli variációi megegyeznek az n elem ismétlés nélküli permutációival, így ezek száma az előző lecke első részében bizonyított tétel alapján

$$V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+1) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

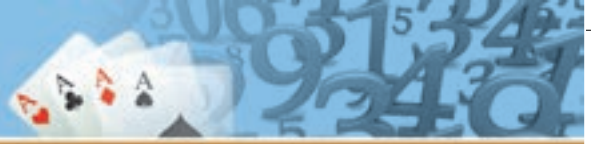
Megállapodás szerint az n különböző elem permutációinak a számát P_n -nel jelöljük. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt.

Tétel Egy n elemű halmaz ismétlés nélküli permutációinak a száma $P_n = n!$.



4.4. ábra Baráti társaság

2. példa Egy ötfős baráti társaság – A, B, C, D, E – beszélget egy padon.
a) Hányféleképpen helyezkedhetnek el?
b) Mivel A -nak és E -nek meg kell beszélnie valamit, ezért szeretnének egymás mellé ülni. Hány ilyen elhelyezkedés lehetséges?



Megoldás:

- a) Az öt ember egy-egy elhelyezkedése egy ötelemű halmaz egy-egy ismétlés nélküli permutációjának felel meg és viszont. Az elhelyezkedések száma $P_5 = 5! = 120$.
- b) Ha A és E egymás mellett szeretne ülni, akkor célszerű őket első közelítésben egy „objektumnak” tekinteni. Így a négy „objektumot” $P_4 = 4! = 24$ -féleképpen tehetjük sorba. De a többiektől függetlenül A és E is változtathatja a helyét egymáshoz képest, így a szorzási szabály alapján az előző értéket még meg kell szorozni $2! = 2$ -vel. Tehát a feladatnak megfelelő elhelyezkedések száma $P_4 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! = 48$.



3. példa Az előző társaság az egyik pénteken diszkóba megy, ahol egy kört alkotva táncolnak. Hányféleképpen helyezkedhetnek el a kör mentén? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy ember, akinek legalább az egyik szomszédja más a két elhelyezkedésben, azaz a forgatással egymásba vihető eseteket nem különböztetjük meg.)

Megoldás:

1. módszer:

Először tekintjük úgy, mintha a körön a helyek számozottak lennének. Ekkor a feladat megegyezik az előző feladat a) részével, mert aki egy sorba rendezésnél az első helyen áll, azt az 1. sorszámú helyre, aki a második helyen, azt a 2. sorszámú helyre stb. állítjuk a körvonalon. Így a sorszámozott helyre történő állítások és a lehetséges permutációk párba állíthatók, tehát mindkettőből ugyanannyi van. Az ilyen elhelyezkedések száma tehát $5!$. Ha megszüntetjük a számozást, akkor ezek közül az esetek közül a forgatással egymásba vihetőket azonosnak vesszük, azokat egy csoportba sorolhatjuk. Így például a 4.6. ábrán látható öt esetből egy lesz.

Ennek alapján az esetek száma az ötödére csökken, azaz a feladatnak megfelelő elhelyezkedések száma

$$\frac{5!}{5} = 4! = 24.$$

2. módszer:

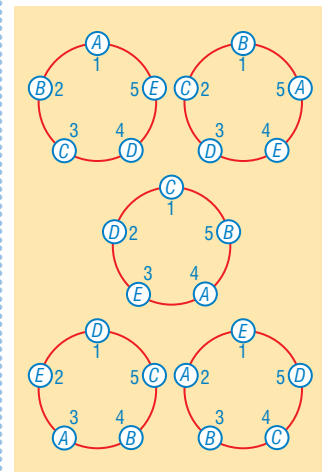
Helyezzük el valamelyiket, pl. A -t a kör mentén valahova! Az első lerakáskor a különböző helyek nem kitüntetettek. A maradék 4 elem $4!$ -féleképpen foglalhat helyet.

Az alábbi két elhelyezkedésben A és E egymás mellett ül, és a két permutáció csak A és E egymáshoz viszonyított helyzetében tér el.

$\underbrace{A, E}, \underbrace{B, C}, \underbrace{D};$

$\underbrace{E, A}, \underbrace{B, C}, \underbrace{D}$

4.5. ábra A lényeg, hogy A és E egymás mellett legyen!

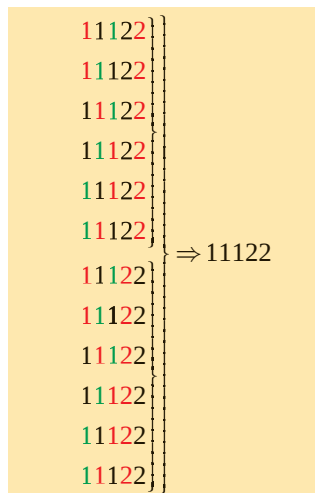


4.6. ábra Ha megszüntetjük a számozást, forgatással egymásba vihető eseteket kapunk, tehát ez az öt lehetőség egynek számít

4.1.2. Ismétléses permutációk



4. példa Az 1, 1, 1, 2, 2, számjegyek mindegyikének felhasználásával hány ötjegyű szám készíthető?



4.7. ábra Ha a szín is számít

Megoldás:

Mivel mindegyik számjegyet fel kell használni, ezért a keresett ötjegyű számok a megadott számjegyek lehetséges sorrendjeivel egyeznek meg. Ha mind különbözők lennének, akkor a sorba rendezések száma $5!$ lenne. Induljunk ki ebből! Tegyük fel, hogy a három egyest is, és a két kettést is megkülönböztetjük egymástól, pl. színezéssel. Ekkor az előzőek alapján 120 ötjegyű szám készíthető. Ha megszüntetjük a színezést, akkor pl. a 4.7. ábrán látható 12 számból egy szám lesz.

Azaz az esetek száma annyiadrészére csökken, ahányféleképpen cserélgethetnénk egymás között a három egyest, ill. a két kettést, ha különbözőek lennének. Mivel ezek a cserék egymástól függetlenek, ezért a szorzási szabály értelmében a nem különböző sorrendek száma $3! \cdot 2!$. Így a megadott öt számjegyből képezhető ötjegyű számok száma

$$\text{ma } \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10.$$



A 4. példában is elemek sorrendjét képeztük az összes lehetséges módon, csak abban különbözött az előzőektől, hogy az elemek között voltak azonosak. Ezért az így kapott sorba rendezéseket **ismétléses permutációknak** nevezzük.



4.8. ábra Egy jó tanács

Definíció Adott n darab ($n \in \mathbb{N}$) elem, melyek közül n_1 egyforma, n_2 egyforma, de az előzőektől különböző, n_3 egyforma, de az előzőektől különböző, ..., n_k egyforma ($n_i \in \mathbb{N}$; $i = 1, 2, 3, \dots, k$), de az előzőektől különböző, ahol $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$. Ezen n darab elem egy lehetséges sorrendjét az n elem egy **ismétléses permutációjának** nevezzük.



Tétel

Az előző definícióban megadott n elem esetén az

$$\text{ismétléses permutációk száma } P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Bizonyítás:

Az első, második, ... k -adik típusú elemek egymás közötti felcserélését egymástól függetlenül végezhetjük. Ezért a szorzási szabály értelmében a megadott n elem bármely permutációjában $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$ számú cserét lehet végrehajtani anélkül, hogy az megváltozna. Ezért az $n!$ számú permutációt olyan csoportokra oszthatjuk, melyek mindegyike $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$ számú elemből áll, így az adott n elemből készíthető

$$\text{ismétléses permutációk száma } P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$



5. példa Hányféle gyöngysort készíthetünk 8 piros, 4 zöld és 3 fehér gyöngyből, ha a gyöngyök legfeljebb csak színükben különböznek egymástól? Ezek között hány olyan van, amelyben nincs két piros gyöngy egymás mellett?

Megoldás:

Az első kérdésre az eddigiek alapján könnyen megadhatjuk a választ. Mivel gyöngysort kell készíteni, ezért a 15 elem ismétléses permutáció-

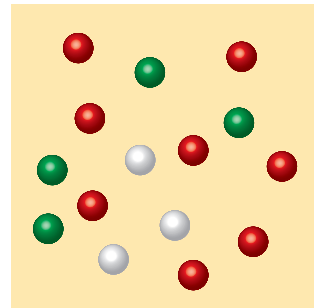
inak a számát kell megadni. Ez pedig $P_{15}^{(8,4,3)} = \frac{15!}{8! \cdot 4! \cdot 3!} = 225225$.

Először tegyük le a „válaszfalakat” jelentő zöld és fehér gyöngyöket valamilyen sorrendben!

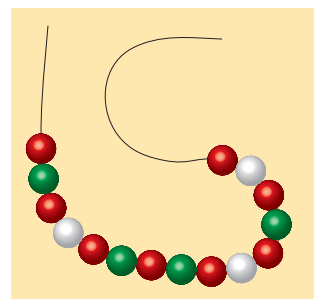
Pl. _Z_F_F_Z_F_Z_

A piros gyöngyöket az aláhúzással jelölt helyekre lehet tenni úgy, hogy egy helyre legfeljebb csak egy gyöngyöt tehetünk. Mivel 8 piros gyöngyünk van, ezért ezek elhelyezése már egyértelmű. Tehát a gyöngysorok számát a zöld, ill. fehér gyöngyök lehetséges sorrendjeinek a száma adja meg. Így a feladatnak megfelelő gyöngysorok száma

$$P_7^{3,4} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35.$$



4.9. ábra Ebből készítsünk gyöngysort!



4.10. ábra Gyöngyfűzér

4.2. Kombinációk



6. példa Az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ hatelemű halmaznak hány kételemű részhalmaza van?

Megoldás:

Mivel egy hatelemű halmaz kételemű részhalmazait hozzuk létre, ezért a kiválasztásnál nem számít különbözőnek a kiválasztott elemek különböző sorrendje.

A részhalmazok számának meghatározására nézzünk két megoldást!

1. módszer:

Közelítsük meg a problémát az ismétlés nélküli variációk oldaláról! Hat elem másodosztályú ismétlés nélküli variációinak a száma $V_6^2 = 6 \cdot 5$. Azt tudjuk, hogy $\{a, b\} = \{b, a\}$, és a variációk definíciójából következik, hogy $(a, b) \neq (b, a)$. Tehát a variációk számából úgy kaphatjuk a kételemű részhalmazok számát, ha azt elosztjuk $2!$ -sal, azaz azzal a számmal, ahányféleképpen sorba rendezhetünk két különböző elemet. Így egy hatelemű halmaz kételemű részhalmazainak a száma

$$\frac{6 \cdot 5}{2!} = \frac{30}{2} = 15.$$

Az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz kételemű részhalmazai:
 $\{a, b\}$ $\{a, c\}$ $\{a, d\}$ $\{a, e\}$ $\{a, f\}$
 $\{b, c\}$ $\{b, d\}$ $\{b, e\}$ $\{b, f\}$
 $\{c, d\}$ $\{c, e\}$ $\{c, f\}$
 $\{d, e\}$ $\{d, f\}$
 $\{e, f\}$

4.11. ábra 6. példa 1. módszer

	$\{a, b, c, d, e, f\}$
$\{a, b\}$	1, 1, 0, 0, 0, 0
$\{a, c\}$	1, 0, 1, 0, 0, 0
$\{a, d\}$	1, 0, 0, 1, 0, 0
$\{a, e\}$	1, 0, 0, 0, 1, 0
$\{a, f\}$	1, 0, 0, 0, 0, 1
$\{b, c\}$	0, 1, 1, 0, 0, 0
$\{b, d\}$	0, 1, 0, 1, 0, 0
$\{b, e\}$	0, 1, 0, 0, 1, 0
$\{b, f\}$	0, 1, 0, 0, 0, 1
$\{c, d\}$	0, 0, 1, 1, 0, 0
$\{c, e\}$	0, 0, 1, 0, 1, 0
$\{c, f\}$	0, 0, 1, 0, 0, 1
$\{d, e\}$	0, 0, 0, 1, 1, 0
$\{d, f\}$	0, 0, 0, 1, 0, 1
$\{e, f\}$	0, 0, 0, 0, 1, 1

4.12. ábra 6. példa 2. módszer

2. módszer:

Ebben a megoldásban az ismétléses permutációk kiszámítására vezetjük vissza a részhalmazok számának meghatározását. Tekintsük a négy darab nullából és két darab egyesből álló hat egység hosszúságú jelsorozatot, melyeket az oldalt látható táblázat alapján feleltessünk meg kölcsönösen egyértelműen a kételemű részhalmazoknak!

A táblázatból kiolvasható, hogy egy betű alatt akkor és csak akkor található 1-es, ha az szerepel a kételemű részhalmazban. Így pontosan annyi kételemű részhalmaz van, ahány hatelemű jelsorozat. Ezen utóbbiak száma pedig $P_6^{2,4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$.



Az előző feladatban két különböző módon jutottunk ugyanarra a végeredményre. Ez is jelzi, hogy a kombinatorika alapproblémái között szoros kapcsolat van. A hatelemű halmaz kételemű részhalmazait a hat elem másodosztályú **ismétlés nélküli kombinációinak** nevezzük. Ezek

számát C_6^2 szimbólummal jelöljük. Tehát azt kaptuk, hogy $C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!}$,

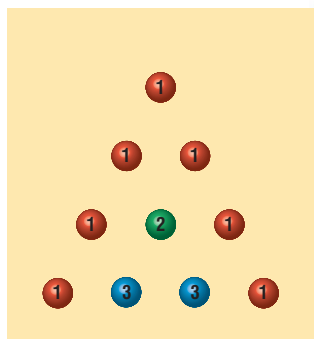
amit a matematikában röviden a $\binom{6}{2}$ szimbólummal jelölünk, és úgy olvasunk ki, hogy „hat alatt kettő”.



Definíció Egy n ($n \in \mathbb{N}$) elemű halmaz k ($k \in \mathbb{N}, k \leq n$) elemű részhalmazait az **n elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak** nevezzük.



Definíció Az $\binom{n}{k}$ (olv.: n alatt k) szimbólummal az $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ -t jelöljük, ahol $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ és $k \leq n$. Az $\binom{n}{k}$ -t **binomiális együtthatónak** nevezzük.



4.13. ábra A binomiális együtthatók értékeinek itt látható elrendezését Pascal-háromszögnek nevezzük, mellyel 11. osztályban foglalkozunk részletesebben

Mivel $0! = 1$, ezért $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$ és $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$.

Mivel n elemű halmaz k elemű részhalmazai azonosak az n elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációival, ezért a továbbiakban a két kifejezést egymás szinonimájaként használjuk.



Tétel

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a

$$\text{száma } C_n^k = \binom{n}{k}.$$

A bizonyítást a lecke utáni 11. feladat megoldásával az olvasóra bízunk.



7. példa

A 2008-as pekingi olimpián a férfi 200 m-es vegyes úszás elődöntőjébe a 16 versenyző közé Cseh László magyar úszó is bejutott. Az elődöntőből a döntőbe a legjobb nyolc eredményt elérő versenyző kerülhet.

- Hányféleképpen alakulhat a döntő összetétele, ha nem foglalkozunk azzal, hogy ki hányadik helyen jutott be?
- Az összes lehetséges összetétel hányadrészében tagja a döntőnek Cseh László?

Megoldás:

a) Mivel nem foglalkozunk azzal, hogy ki hányadik helyen jutott a döntőbe, ezért nem számít a bekerülés sorrendje. Tehát egy tizenhat elemű halmaz nyolcelemű részhalmazainak a számára vagyunk kíváncsiak.

$$\text{Ez } C_{16}^8 = \binom{16}{8} = \frac{16!}{8! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot \dots \cdot 16}{8! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot \dots \cdot 16}{8!} = 12\,870.$$

b) Először nézzük meg, hogy hány összetételnek tagja Cseh László! Mivel egy hely foglalt a nyolc közül, ezért a maradék 7 helyre kell választani a maradék 15 ember közül, azaz egy tizenöt elemű halmaz hételemű részhalmazainak a számát kell

meghatározni. Ez $C_{15}^7 = \binom{15}{7} = \frac{15!}{7! \cdot 8!}$. Ennek az értékét most

ne számoljuk ki, mert a feladat a $\frac{C_{15}^7}{C_{16}^8}$ hányadost kérdezi! Ez

$$\frac{C_{15}^7}{C_{16}^8} = \frac{\frac{15!}{7! \cdot 8!}}{\frac{16!}{8! \cdot 8!}} = \frac{15!}{7! \cdot 8!} \cdot \frac{8! \cdot 8!}{16!} = \frac{15! \cdot 7! \cdot 8}{7! \cdot 15! \cdot 16} = \frac{1}{2}.$$

Tehát az összes lehetséges összetétel felében Cseh László is tagja a döntőnek.



Megjegyzés: A pekingi olimpián a férfi 200 m-es vegyes úszás döntőjében 1 perc 56,52 másodperces európai csúccsal Cseh László ezüstérmes lett, Michael Phelps amerikai úszófenomén mögött.



4.14. ábra Úszóverseny



4.15. ábra Michael Phelps (arany), Cseh László (ezüst), Ryan Lochte (bronz)

Oldjuk meg!

1. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek mindegyikének felhasználásával hány ötjegyű szám készíthető? Ezek közül hány osztható négygyel?
2. Egy négy házaspárból álló baráti társaság moziba megy.
 - a) Hányféleképpen ülhet le a nyolc ember egymás mellé?
 - b) Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha mindenki a házastársa mellett szeretne ülni?
 - c) Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha mindenki a házastársa mellett szeretne ülni, de férfi férfi mellé és nő nő mellé nem akar ülni?
3. A mozi után elmennek vacsorázni. A vendéglőben egy kör alakú asztalhoz ülnek. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy ember, akinek legalább az egyik szomszédja más a két elhelyezkedésben?
4. Mi a válasz az előző kérdésre, ha a házastársak egymás mellé szeretnének ülni?
5. A 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2 számjegyeknek hány permutációja van? Ezek között hány olyan van, amely nyolcjegyű számot ad? A kapott nyolcjegyű számok hányadrésze osztható hattal?
6. A „lehetetlen” szó betűinek hány permutációja van?
7. Egy harmincfős osztály tanulói között négy koncertjegyet sorsolnak ki. Hányféleképpen alakulhat a sorsolás végeredménye?
8. Hányféleképpen lehet kitölteni
 - a) a hatos,
 - b) az ötöslottó egy szelvényét?
9. Kilenc cédulára ráírtuk 1-től 9-ig a számjegyeket, majd elhelyeztük azokat egy dobozban. Csukott szemmel kihúzva közülük ötöt, és azokat a kihúzás sorrendjében egymás mellé rakva, hány olyan ötjegyű számot kaphatunk, amelyben a számjegyek csökkenő sorrendben követik egymást?
10. Az előző feladatbeli cédulák közül kihúzva ötöt, és azokat egymás mellé téve, hány olyan ötjegyű számot kaphatunk, amelyben a számjegyek nem csökkenő sorrendben követik egymást?
11. A lecke 6. példájában szereplő megoldási ötleteket felhasználva bizonyítsuk be, hogy egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a száma $C_n^k = \binom{n}{k}$!

5. Vegyes feladatok a kombinatorika köréből



5.1. ábra Táncoló párok



1. példa Egy osztályba 13 fiú és 17 lány jár. Hányféleképpen választhatunk ki közülük

- a) 13
- b) 5

olyan párt, akik egyszerre táncolnak?

Megoldás:

a) Mivel 13 táncoló párt kell létrehoznunk, ezért minden fiúnak táncolnia kell. Így a fiúk mellé kell 13 lányt kiválasztani. Nem mindegy, hogy



melyik fiúval melyik lány táncol! Ez azt jelenti, hogy 17 elem 13-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak a számát kell meghatároznunk.

Tehát a táncoló párok száma $V_{17}^{13} = \frac{17!}{4!} = 1\,482\,030\,950\,400$.

b) Először válasszuk ki azt az öt fiút, aki táncol! Mivel nem számít különbözőnek a kiválasztások különböző sorrendje, ezért egy tizenhárom elemű halmaz ötelemű részhalmazainak a számát kell megadnunk. Ez $C_{13}^5 = \binom{13}{5}$. Bármelyik öt fiút is választjuk ki, melléjük öt

lányt kell kiválasztani a 17-ből úgy, hogy különbözőnek számít a kiválasztás különböző sorrendje. Így a szorzási szabály értelmében $C_{13}^5 \cdot V_{17}^5 = \binom{13}{5} \cdot \frac{17!}{12!} = \frac{13!}{5! \cdot 8!} \cdot \frac{17!}{12!} = \frac{13 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 13}{5!} = 955\,674\,720$ -féle

leképben választhatunk ki 5 olyan párt, akik egyszerre táncolnak.



2. példa Az 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 5, 5 számjegyek felhasználásával hány különböző kilencjegyű szám készíthető? Ezek között hány olyan van, amelyben nincs két 1-es egymás mellett?

Megoldás:

A megadott számjegyekből készíthető kilencjegyű számok a megadott számjegyek ismétléses permutációi.

$$\text{Ezek száma } P_9^{(2;3;4)} = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260.$$

Ahogy az előző lecke 5. példájának megoldásában, most is tegyük le először a „válaszfalakat” valamilyen sorrendben.

Pl. 2 5 2 2 5 2

Az aláhúzással jelölt hét hely közül kell háromra letenni az 1-es számjegyeket. A három hely kiválasztásának különböző sorrendje nem számít különbözőnek, így ezt $C_7^3 = \binom{7}{3}$ tehetjük meg. Mivel a „válaszfalakat” minden esetben $P_6^{(2;4)} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ -féleképpen tehetjük le,

ezért a keresett kilencjegyű számok száma a szorzási szabály alapján

$$C_7^3 \cdot P_6^{(2;4)} = \binom{7}{3} \cdot 15 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 15 = 35 \cdot 15 = 525.$$



3. példa Egy 33 fős osztály harmada lány. Az iskolai diákszállásba hatfős küldöttséget kell delegálni az osztályból.

- Hányféleképpen lehet olyan küldöttséget összeállítani, amelyben a lányok és a fiúk számának aránya 1:2?
- Hányféle olyan küldöttség állítható össze, amelynek kevesebb, mint a harmada lány?
- Hányféle olyan küldöttség állítható össze, amelyben van fiú is, és lány is?



5.2. ábra Az egyik kilencjegyű szám



5.3. ábra Lányok jelöltjei



5.4. ábra Fiúk jelöltjei

Megoldás:

a) A feladat szövegéből kiderül, hogy a küldöttségbe két lányt és négy fiút kell delegálni. Az osztályba 11 lány és 22 fiú jár. Mivel a kiválasztás sorrendje nem számít, ezért a két lányt $C_{11}^2 = \binom{11}{2}$, a négy fiút ettől

függetlenül $C_{22}^4 = \binom{22}{4}$ -féleképpen választhatjuk ki. Így a lehetséges delegációk száma

$$C_{11}^2 C_{22}^4 = \binom{11}{2} \cdot \binom{22}{4} = \frac{11!}{2! \cdot 9!} \cdot \frac{22!}{4! \cdot 18!} = \frac{11 \cdot 10}{2} \cdot \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{4!} = 402\,325.$$

b) Ebben a feladatban a delegáltak harmadánál kevesebb a lányok száma, így legfeljebb 1 lány lehet a küldöttek között. Ez azt jelenti, hogy vagy nincs lány a hat fő között, vagy pontosan 1 lány van közöttük. Az első esetben mind a hat diákot a fiúk közül választjuk, ez

$$C_{22}^6 = \binom{22}{6} = \frac{22!}{6! \cdot 16!} = 74\,613\text{-féleképpen lehetséges. A második esetben}$$

1 főt a lányok közül, ötöt a fiúk közül, ez a szorzási szabály alapján

$$C_{11}^1 C_{22}^5 = \binom{11}{1} \binom{22}{5} = \frac{11!}{1! \cdot 10!} \cdot \frac{22!}{5! \cdot 17!} = 11 \cdot \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{5!} = 289\,674\text{-}$$

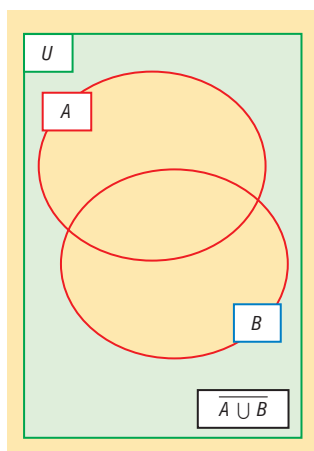
féleképpen lehetséges. Így az összeadási szabály alapján az összes lehetőség száma $74\,613 + 289\,674 = 364\,287$.

c) Ha van a küldöttek között lány is, és fiú is, akkor legalább 1 fiúnak lennie kell köztük, és legfeljebb 5 fiú lehet közöttük. Ez elég sok eset megvizsgálását igényli, ezért érdemes a komplementermódszert alkalmazni. Az összes eset száma $C_{33}^6 = \binom{33}{6} = \frac{33!}{6! \cdot 27!} = 1\,107\,568$.

Kedvezőtlen az, amikor csak fiúkból, ill. csak lányokból áll a küldöttség. Ebből az első az előző részben már meghatároztuk, a második pedig

$$C_{11}^6 = \binom{11}{6} = \frac{11!}{6! \cdot 5!} = 462\text{-féleképpen lehetséges. Tehát}$$

$1\,107\,568 - 74\,613 - 462 = 1\,032\,493$ olyan küldöttség állítható össze, amelyben van fiú is, és lány is.



5.5. ábra $U = \{\text{A lehetséges lapötösök}\}$

$A = \{\text{Piros lapot tartalmazó lapötösök}\}$

$B = \{\text{Ászt tartalmazó lapötösök}\}$

$A \cup B = \{\text{Azon lapötösök, amelyekben nincs ász sem, és piros sem}\}; A \cup B = U \setminus (\overline{A \cup B})$



4. példa Egy 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúzzunk egymás után találomra 5 lapot.

- Hány esetben lesz a kihúzott lapok között piros vagy ász?
- Hány esetben lesz a kihúzott lapok között piros és ász?

Megoldás:

a) A feladat szerint piros és ász közül legalább az egyiknek lennie kell a kihúzott lapok között. Ezt a problémát is célszerűbb úgy megoldani, hogy az összes eset számából kivonjuk a számunkra kedvezőtlen esetek számát, azaz amikor nincs egyik sem az öt lap között. Ezen utóbbit nem



nehéz összeszámolni, mert 21 olyan lap van, amelyek se nem piros, se nem ász, és közülük kell kihúzni az öt lapot. Mivel a sorrend nem számít, ezért ezt $C_{21}^5 = \frac{21!}{5! \cdot 16!} = 20349$ -féleképpen tehetjük meg.

A 32 lapból pedig $C_{32}^5 = \frac{32!}{5! \cdot 27!} = 201376$ -féleképpen választunk ki ötöt. Így $201376 - 20349 = 181027$ -féleképpen húzhatunk ki egymás után öt lapot a 32 lapos magyar kártyából, hogy legyen közöttük piros vagy ász.

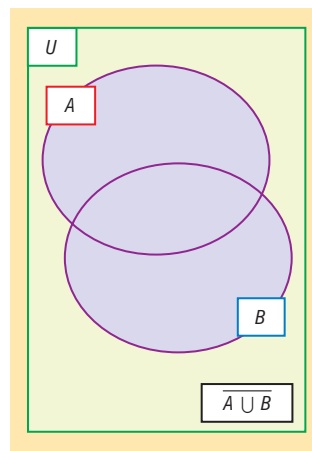
b) Alkalmazzuk ebben az esetben is az előbbi módszert! A feladat szempontjából kedvezőtlen esetek azok, melyekben piros és ász közül legalább az egyik fajta nincs a kihúzott öt lap között. Számoljuk össze, hány esetben nincs közöttük ász! Mivel négy ász van egy pakliban,

ezért 28 lapból kell kiválasztani ötöt. Ez $C_{28}^5 = \frac{28!}{5! \cdot 23!} = 98280$

esetben lehetséges. Mivel 24 olyan lap van a pakliban, melyek közül

egyik sem piros, ezért $C_{24}^5 = \frac{24!}{5! \cdot 19!} = 42504$ -féleképpen húz-

hatunk ki öt lapot úgy, hogy ne legyen közöttük piros. Ha ezt a két értéket összeadjuk, akkor azokat a húzásokat, melyek esetében sem piros, sem ász nincs a kihúzott lapok között, kétszer számoltuk, tehát azt ki kell vonni a kapott összegből, hogy megkapjuk a kedvezőtlen esetek számát. (Itt a szitaformulát alkalmaztuk.) Felhasználva az a) részben kiszámolt értéket kapjuk, hogy $98280 + 42504 - 20349 = 120435$ olyan eset van, mikor a kihúzott lapok között nincs ász vagy nincs piros. Tehát $201376 - 120435 = 80941$ esetben van a kihúzott lapok között ász és piros.



5.6. ábra $U = \{A \text{ lehetséges lap-ötösök}\}$

$A = \{\text{Piros lapot nem tartalmazó lapötösök}\}$

$B = \{\text{Ászt nem tartalmazó lapötösök}\}$

$\overline{A \cup B} = U \setminus (A \cup B) = \{\text{Piros és ász tartalmazó lapötösök}\}$



Oldjuk meg!

1. Egy ülésen öt ember – A, B, C, D, E – szólal fel. Hányféle sorrendben tehetik ezt meg, ha A és B nem szólalhat fel közvetlenül egymás után? Hányféle sorrendben szólalhatnak fel, ha A nem szólalhat fel korábban, mint B ?
2. Egy zászlón három vízszintes sáv van. Hányféleképpen lehet a zászlót kiszínezni a piros, fehér és zöld színekkel, ha legalább két színt fel kell használni, és két szomszédos csík nem lehet azonos színű?
3. Hány néggyel osztható négyjegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk? Ezek között hány olyan van, amelyben van 1-es?
4. Az 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek mindegyikének felhasználásával hány olyan nyolcjegyű szám készíthető, amelyben nincs két kettes egymás mellett?
5. Töltsünk ki gondolatban minden lehetséges módon egy lottószelvényt, melyen 90 szám közül ötöt kell megjelölni. Hány esetben lesz legalább négyes találatunk? Ez hány százaléka az összes esetnek?
6. A magyar vonatokon a vasúti fülkékben kétszer négy ülés van egymással szemben. Egy fülkében helyet foglaló 8 ember között van három, aki menetiránnyal megegyező irányban és kettő, aki me-

Gondolkodási módszerek, kombinatorika, valószínűségszámítás

netiránynak háttal ülni. A többi utas számára közömbös az elhelyezkedés. Hányféleképpen ülhet le ez a nyolc utas a fülkében?

7. Mi a válasz az előző kérdésre, ha csak egy olyan van, aki menetiránynak háttal és kettő olyan, aki menetiránnyal megegyező irányban akar ülni, a többinek közömbös az elhelyezkedés?
8. Egy sportiskolában az osztályok között röplabdabajnokságot rendeznek. A 10. osztályba 18 fiú és 13 lány jár. Hányféleképpen tudnak tartalékokkal együtt nyolcfős csapatot kiállítani, ha pontosan három lánynak kell lennie a nyolc fő között?
9. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából az összes lehetséges módon kihúzzunk 6 lapot.
 - a) Hány esetben van a kihúzott lapok között egy felső, két ász és egy király?
 - b) Hány esetben van a kihúzott lapok között legfeljebb három piros?
 - c) Hány esetben van a lapok között piros vagy zöld?
 - d) Hány esetben van a kihúzott lapok között piros és zöld?
10. Egy könyvkötőnek 14 könyvet kell bekötnie piros, sárga és kék színű kötés valamelyikébe.
 - a) Hányféleképpen teheti ezt meg?
 - b) Hányféleképpen teheti ezt meg, ha mindhárom színt fel kell használnia?
11. Egy 30 fős osztály négynapos kirándulásra megy a hegyekbe. Egy kulcsosházban szállnak meg, ahol teljesen önellátóak. Minden nap kijelölnek 6 embert, akik ellátják a konyhai munkákat. Hányféleképpen tehetik ezt meg úgy, hogy mindenki legfeljebb csak egyszer segítsen a konyhában?
12. Mi a válasz az előző kérdésre, ha azt követeljük csak meg, hogy ne legyen két olyan nap, amikor pontosan ugyanazt a hat embert jelöltük ki?
13. Egy konvex húszszög csúcsai hány
 - a) egyenest,
 - b) háromszöget,
 - c) négyszögethatároznak meg?
14. Egy konvex húszszög átlói legfeljebb hány pontban metszhetik egymást?
15. Egy dobókockát háromszor egymás után feldobunk, majd a kapott számokat összeadjuk. Az összes lehetséges hármass között hány esetben lehet a dobott számok összege
 - a) 10;
 - b) 9;
 - c) legfeljebb 6?

6. Valószínűségi kísérletek, a valószínűség szemléletes fogalma

„Egy dohányos férfinak mintegy 23-szor nagyobb **esélye** van a tüdőrák és 15-ször nagyobb esélye a más típusú rákos megbetegedésekre.”

„A II. típusú cukorbeteg testvéreiben, gyermekeiben a betegség **valószínűsége** 40-50 százalék is lehet.”

„A hatos lottón az 5+1 találat elméleti **valószínűsége** 1:1357510.”

6.1. ábra Az esély és a valószínűség jelentése a hétköznapi életben

A hétköznapi életben, újságcikkekben, tanulmányokban, interneten sokszor találkozunk az „esély”, illetve a „valószínűség” szavakkal. (6.1. ábra)

Mindemellett lépten-nyomon látunk az alábbihoz hasonló felhívásokat:

„Nyerj a lábadra való Adidas futócipőt! Az Adidas és az Online Edzésnapló együttműködésében újtúra indítjuk „neked való Adidas találatra” című nyereményjátékunkat.”

Az említett példák is jelzik, hogy fontos megismerni a „valószínűség” szó és a nyereményjátékok mögött megbújó matematikai tartalmat. A matematikának azt a fiatal ágát, amely segít eligazodni a véletlen jelenségek világában, **valószínűségszámításnak** nevezzük.



A valószínűségszámítás gyakorlati problémákon keresztül fejlődött ki, hiszen gyökerei a szerencsejátékok vizsgálatáig nyúlnak vissza. Az első ismert valószínűségszámítási feladat 1494-ből származik, Pacioli *Summa de Arithmetica* című könyvében olvasható. A feladattal Tartaglia is foglalkozott, de mindketten hibásan oldották meg. Cardano és Galilei azonban már helyesen oldottak meg speciális valószínűségszámítási feladatokat. Az egyik ilyen problémát Toscana hercege vetette fel egyik, Galileihez írt levelében. Mivel nagy híve volt a szerencsejátékoknak, ezért sok időt töltött velük. A játékok során volt ideje megfigyelni, hogy három egyforma kockával dobva gyakrabban jön ki a 10-es összeg, mint a 9-es, pedig az ő meglátása szerint mindkettő hatféleképpen áll elő „kockaszámok” összegeként. (Ezt szokás három kocka problémájának is nevezni.)

A valószínűségszámítás önálló tudományággá való válása Blaise Pascal és Pierre Fermat 1654-ben megindult levelezése nyomán kezdődött el. A tudomány szempontjából gyümölcsöző levelezést de Méré lovag ugyancsak kockajátékkal kapcsolatos kérdése indította el. Megfigyelte, előnyösebb arra fogadni, hogy egy kockával négyszer dobva lesz legalább egy hatos, mint arra, hogy két kockával dobva az első 24 dobás között lesz legalább egy dupla hatos. Ez azért okozott számára fejtörést, mert számításai szerint mindkettőnek azonos az esélye.

Pascal és Fermat levelezéséről Christiaan Huygens is értesült, melynek eredményeként 1657-ben megjelent *De ratiociniis in ludo aleae* (A kockajátékokra vonatkozó megfontolásokról) című munkája, melyben a Fermat és Pascal által tárgyalt problémák részletesebb kifejtése található.

Johann de Witt 1671-ben, majd Edmund Halley 1693-ban olyan életjáradék-táblázatot szerkesztett, mely valószínűségszámítási alapokon nyugodott.

Huygens munkájához csatlakozott Jacob Bernoulli *Ars conjectandi* (A találgatás tudománya) című könyve, mely csak halála után, 1713-ban jelent meg. A mű első része Huygens munkáját kommentálja, és teljes megoldást ad az általa felvetett és megoldás nélkül közölt kérdésekre. A könyv legjelentősebb része a negyedik, amely a nagy számok törvényének legegyszerűbb esetével foglalkozik.

A valószínűségszámítás alkalmazási területe a XVIII. században kibővült, elkezdtek foglalkozni biztosítási ügyekkel, a kereskedelmi nyereség és kockázat kérdéseivel, és a Buffon-féle tűprobléma nyomán megjelent a geometriai valószínűség fogalma is. A XVIII–XIX. században Laplace, Moivre, Legendre, Bayes, Gauss és Poisson érték el jelentős eredményeket a valószínűségszámítás területén.

A XIX. század végén az orosz matematikusok, Csebisev, Markov tettek sokat a valószínűségszámítás fejlődéséért.

A tudományág axiomatikus felépítését Kolmogorov orosz matematikus dolgozta ki az 1933-ban megjelent munkájában. Ezzel a valószínűségszámítás a matematika többi ágával egyenrangú tudománnyá vált.



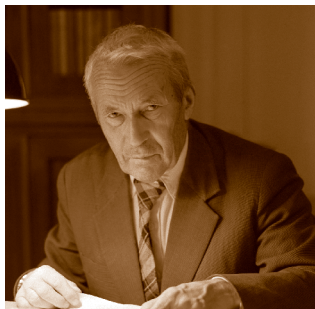
6.2. ábra Galileo Galilei (1564–1642)

A dobott számok összege: 9		A dobott számok összege: 10	
1 + 2 + 6	1 + 3 + 5	1 + 3 + 6	1 + 4 + 5
1 + 4 + 4	2 + 2 + 5	2 + 2 + 6	2 + 4 + 4
2 + 3 + 4	3 + 3 + 3	2 + 3 + 5	3 + 3 + 4

6.3. ábra A 9-es és a 10-es is hatféleképpen áll elő „kockaszámok” összegeként, a tapasztalat mégis azt mutatja, hogy három egyforma kockával dobva gyakrabban jön ki a 10-es összeg, mint a 9-es. Vajon miért?



6.4. ábra Christian Huygens (1629–1695)



6.5. ábra Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903–1987)



6.6. ábra Számít, hogy különböző a színük?



6.7. ábra Kockával már az ókorban is játszottak

„Sokak számára ez rossz hír lesz, de igazán jó pókerjátékos csak abból lehet, aki jó matekból is. Különösen valószínűesszámításból...
...a játék későbbi részeiben már muszáj egyedi döntéseket hozni az aktuális nyerési **esélyek** alapján.”

6.8. ábra Játék és matematika



1. példa Dobjunk fel egy piros és egy zöld dobókockát (lapjai 1-től 6-ig számozottak, és a szemközti lapokon levő számok összege 7) 450-szer! Vizsgáljuk a két kockán dobott szám összegét!
a) Készítsünk táblázatot, amely tartalmazza annak gyakoriságát, illetve relatív gyakoriságát (két tizedesjegyre kerekítve), hogy a dobott számok összege osztható hárommal az első 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400 dobás esetén.
b) Ábrázoljuk a táblázatban szereplő dobásszámokhoz tartozó relatív gyakoriságokat vonaldiagramon!

Megoldás:

a) Mivel két kockával dobva a dobott pontok összege legalább 2 és legfeljebb 12, ezért csak úgy lehet hárommal osztható az összeg, ha az 3, 6, 9 vagy 12.

dobásszám	gyakoriság	relatív gyakoriság
50	15	0,30
100	34	0,34
150	48	0,32
200	66	0,33
250	85	0,34
300	97	0,32
350	121	0,35
400	136	0,34
450	149	0,33

b)



6.9. ábra A relatív gyakoriságot ábrázoló vonaldiagram



2. példa Egy piros és egy zöld dobókockát feldobunk.

- Hányféleképpen valósulhat meg az összes lehetséges összeg?
- Hányféleképpen lehet a dobott számok összege hárommal osztható?
- A b) alpontban kapott érték hányadrésze az a) alpontban kapott értéknek?

Megoldás:

a) Mivel a két dobókocka különböző, ezért nem mindegy, hogy melyik számot melyik kockán dobjuk. Mindkettőn hatféle számot dobhatunk egymástól függetlenül, így a szorzási szabály értelmében $6 \cdot 6 = 36$ -féleképpen valósulhat meg az összes lehetséges eredmény. Ezt szemléltetjük a 6.10. ábrán, ahol a kis négyzetekbe írt számok a dobott számok összegét adják meg.

b) Nézzük meg a táblázatot! Kékkel színeztük azokat a mezőket, amelyekben a dobott pontok összege osztható 3-mal. Ezek száma 12, tehát a dobott pontok összege tizenkétféleképpen lehet hárommal osztható.

c) Az eddigiekből következik, hogy a dobott számok összege a lehetséges esetek harmadában lesz hárommal osztható.



Az 1. példában egy **véletlen jelenséget** idéztünk elő és figyeltünk meg többször egymás után, azaz **kísérletet** végeztünk.



Definíció **Valószínűségi kísérletnek** nevezünk egy olyan kísérletet, amelyre igazak az alábbiak:

- ★ Több kimenetele lehetséges.
- ★ Előre nem tudjuk megmondani, melyik következik be; kimenetele a véletlentől függ.
- ★ Azonos körülmények között akárhányszor megismételhető.

Amikor a két kockát feldobtuk, akkor eredményként két számot kaptunk. Ha megállapodunk abban, hogy a piros kockán dobott számot írjuk le először és a zöld kockán dobottat másodszor, akkor a kísérlet eredményeként egyértelműen meghatározott rendezett számpárokat kapunk. Például ha pirosan hármast, a zöldön egyest dobunk, akkor a (3; 1) számpárhoz jutunk. Ezeket a számpárokat a kísérlet lehetséges **kimeneteleinek** nevezzük. Ezek halmaza az **eseménytér**.



Definíció A kísérlet lehetséges kimeneteleinek a halmazát **eseménytérnek** nevezzük. Jele T .

	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	

6.10. ábra A táblázatból leolvasható, mely összegek hányszor valósulhatnak meg, pl. az 5 négyszer



6.11. ábra Lehet, hogy ez lesz a nyerőszelvény?



6.12. ábra Az ötös lottó lehetséges nyerőszámai?

(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

6.13. ábra A fenti táblázatban szereplő számpárok alkotják az 1. példához tartozó eseményteret

A kísérlet során a dobott pontok összegét figyeltük. Azt néztük meg, hogy egy adott dobásszám hányadrésztében kapunk olyan számpárt, amelyben a számok összege hárommal osztható. Az ennek megfelelő számpárok az $A = \{(1;2), (1;5), (2;1), (2;4), (3;3), (3;6), (4;2), (4;5), (5;1), (5;4), (6;3), (6;6)\}$ halmaz elemei. Az A halmaz a kísérlethez tartozó eseménytér egy részhalmaza, melyet **eseménynek** nevezünk.

Definíció Az eseménytér részhalmazait **eseményeknek** nevezzük. Az eseménytér egyelemű részhalmazait az **elemi események**.

Az eseményeket általában nagybetűvel jelöljük.

Definíció Azt az eseményt, amely mindenképpen bekövetkezik, **biztos eseménynek**, amely sohasem következik be, **lehetetlen eseménynek** nevezzük. A biztos esemény jele az I , a lehetetlen eseményé a $\emptyset$.



6.14. ábra Ez lehetetlen, úgy tudtam, hogy erre nem is élnek szarvasok!

Jelöljük az 1. példabeli kísérlethez tartozó eseményt A -val! Kiszámoltuk bizonyos dobásszámok esetén ennek relatív gyakoriságát. A vonal-diagram alapján úgy tűnik, hogy a relatív gyakoriság – a tapasztalatnak megfelelően – nagyjából a 2. példa c) részében kiszámolt $\frac{1}{3}$ körül ingadozik. Ha a kísérletek száma nagy, akkor az A esemény relatív gyakorisága nagy eséllyel egy, az adott kísérletre jellemző $[0;1]$ intervallumba eső szám közelében van. Ezt a számot az A esemény **valószínűségének** nevezzük, és $P(A)$ -val jelöljük. Ez a kissé homályosnak tűnő megközelítés matematikai definícióként nem fogadható el, de arra alkalmas, hogy a tapasztalat alapján valamilyen szemléletes képet kapjunk a valószínűség fogalmáról.

Az 1. példában a kísérletet két szabályos dobókockával végeztük, azaz az eseménytér minden elemét ugyanakkora valószínűséggel kaphattuk a dobás eredményeként. Ilyen esetekben könnyen kiszámolhatjuk egy esemény valószínűségét.

Ha egy kísérlethez tartozó elemi események száma véges, és azok egyenlő esélyűek, akkor egy A esemény valószínűségét a $P(A) = \frac{k}{n}$ képlet adja meg, ahol k az A eseményt megvalósító, n pedig az eseményteret alkotó elemi események száma. Ez a **valószínűségszámítás klasszikus modellje**.

Eszerint a 2. példa c) részében kiszámoltuk az 1. példa A eseményének valószínűségét, ami $P(A) = \frac{1}{3}$.



6.15. ábra Ha a pirosra és a feketére is teszünk, akkor biztosan nyerünk?



Laplace-tól származik a valószínűesszámítás klasszikus modellje, melyet ő az alábbi módon fogalmazott meg az 1821-ben megjelent munkájában:

„A valószínűesszámítás nem más, mint egyenlően valószínű esetek megszámlálása. Ha egy esemény valószínűségét akarjuk meghatározni, akkor meg kell keresnünk az összes olyan esetet, mely ezt az eseményt eredményezi. Ezek a kedvező esetek. Az esemény valószínűségét a kedvező esetek és az összes esetek számának a hányadosa adja meg.”



6.16. ábra Pierre Simon Laplace (1749–1827)

Természetesen a valószínűesszámítás tudományának mélyebb megismerése során pontosítani kell a valószínűség fogalmát, melyet 11. osztályban majd meg is teszünk, de az eddig leírtak segítséget nyújtanak az egyszerűbb feladatok megoldásában.



3. példa Három cédulára felírtuk az 1, 2, 3 számjegyeket, majd beletesszük a cetliket egy kalapba. Ezután csukott szemmel kihúzzuk, majd a húzás sorrendjében egymás mellé tesszük azokat. Az A esemény jelentse azt, hogy a kapott háromjegyű számban az 1 és a 2 egymás mellett szerepel!

- Adjuk meg az eseményteret!
- Adjuk meg az A eseményt!
- Számítsuk ki az A esemény valószínűségét!



6.17. ábra Húzzunk egy számot a kalapból!

Megoldás:

a) Az eseményteret az 1, 2, 3 számjegyek mindegyikének felhasználásával képezhető háromjegyű számok alkotják, mert ezek az elemi események. Tehát $T = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$.

b) Az A esemény $A = \{123, 213, 312, 321\}$.

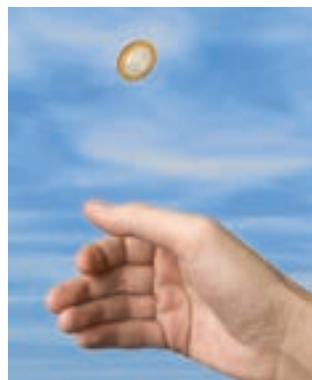
c) Feltételezhetjük, hogy bármelyik elemi esemény ugyanakkora valószínűséggel következik be, ezért alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűesszámítási modellt. Így $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.



4. példa Egy szabályos pénzérmét hatszor egymás után feldobunk, és leírjuk egymás után a dobások eredményét. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a hat dobás között lesz fej is, és írás is?

Megoldás:

A kísérlethez tartozó eseményteret a fejből és írásból képezhető rendezett hatosok alkotják. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobássorozatban van írás is, és fej is. Mivel mindegyik dobássorozat egyenlő valószínűségű, így alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűesszámítási modellt.



6.18. ábra Fej vagy írás?



6.19. ábra Ez a tombolajegy a tiéd

A fejből és írásból képezhető rendezett hatosok száma $V_6^{2(i)} = 2^6$. Ezek között kettő olyan van, amely csak írást, vagy csak fejet tartalmaz. Így a kedvező esetek száma $2^6 - 2$. Tehát az A esemény valószínűsége

$$P(A) = \frac{2^6 - 2}{2^6} = \frac{62}{64} = \frac{31}{32}.$$



5. példa Egy 28 fős osztályban a farsangi összejövetelen öt különböző tombolatárgyat sorsolnak ki. Mindenkinek pontosan egy tombolajegye van. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az osztályba járó Nagy Norbert megnyeri a tombolatárgyak valamelyikét?

Megoldás:

Legyen A a vizsgált esemény! Mivel különböző tombolatárgyakat sorsolnak ki, ezért számít a kiválasztás sorrendje. Így az eseményteret az osztály tanulóiból képezhető rendezett ötösök alkotják. Ezek mind egyenlően valószínűek, melyek száma $V_{28}^5 = 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24$. Még a kedvező esetek számát kell megadnunk! Nagy Norbert ötféleképpen nyerhet tárgyat, és minden esetben mellé $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24$ -féleképpen választhatunk 4 nyertest. A szorzási szabály alapján a kedvező esetek száma $5 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24$. A keresett valószínűség a klasszikus modell alapján

$$P(A) = \frac{5 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24} = \frac{5}{28}.$$



6. példa Oldjuk meg az előző feladatot olyan feltétel mellett, hogy a tombolatárgyak egyformák!

Megoldás:

Az eseményt most is jelöljük A -val! Mivel a tárgyak egyformák, nem számít a kiválasztás sorrendje. Az eseményteret az osztály tanulóiból egyenlő valószínűséggel képezhető ötelemű halmazok alkotják, ezek száma $C_{28}^5 = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{5!}$. A kedvező esetek számát a Nagy Norbert osztálytársaiból képezett négyelemű halmazok száma adja, mert öt már kiválasztottuk. Ez pedig $C_{27}^4 = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{4!}$. A keresett valószínűség

$$P(A) = \frac{C_{27}^4}{C_{28}^5} = \frac{\frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{4!}}{\frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{5!}} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24} \cdot \frac{5!}{4!} = \frac{5}{28}.$$



6.20. ábra Nyereménytárgyak



Tehát azt a meglepő eredményt kaptuk, hogy akár megkülönböztetjük a tombolatárgyakat, akár nem, a vizsgált esemény valószínűsége egyenlő. Ezekben az esetekben a végeredmény szempontjából nem számított, hogy figyelembe vettük-e a sorrendet vagy sem. Ezt azonban óvatosan kell kezelni. A modellalkotással kapcsolatos problémákra a 11. osztályban részletesen kitérünk.



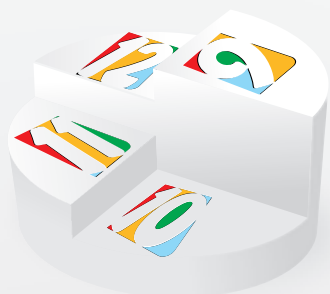
Oldjuk meg!

1. Egy pénzérmét ötször egymás után feldobunk, és a dobások eredményét leírjuk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy
 - a) nem dobtunk fejet;
 - b) kétszer fejet és háromszor írást dobtunk?
2. Anna, Béla, Cecília, Dezső, Elemér véletlenszerűen leülnek egy padra. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a két lány egymás mellé ül?
3. Mekkora a valószínűsége az előző feladatban annak, hogy semelyik két fiú nem ül egymás mellett?
4. Négy kártyára felírjuk a 0, 1, 2, 3 számjegyeket, majd betesszük azokat egy dobozba. Ezután kihúzzunk belőlük kettőt egymás után, majd a húzás sorrendjében letesszük azokat az asztalra. Adjuk meg az eseményteret! Az A jelentse azt az eseményt, hogy hárommal osztható kétjegyű számot kapunk. Mekkora az A esemény valószínűsége?
5. Egy dobókockát négyszer egymás után feldobunk, majd a dobott számokat leírjuk egymás mellé. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kapott négyjegyű szám
 - a) osztható négygyel;
 - b) nem tartalmaz két egyforma számjegyet;
 - c) tartalmaz legalább két egyforma számjegyet;
 - d) számjegyei között nincs sem ötös, sem négyes;
 - e) a számjegyek között nincs kettes, vagy nincs hármas?
6. Egy iskolában 60 diák tanulja emelt szinten a matematikát, közülük 25-en 11.-esek és 35-en 12.-esek. Egy felmérés alkalmával találomra kiválasztanak a hatvan diák közül ötöt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy közülük kettő 11.-es és három 12.-es?
7. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy lottószelvénnel játszva az ötös lottón
 - a) telitalálatunk;
 - b) négyesünk;
 - c) hármasunk van?
8. Öt különböző hosszúságú pálcika hossza 1 cm, 3 cm, 4 cm, 6 cm és 8 cm. Találomra kiválasztva hármat, mekkora annak a valószínűsége, hogy belőlük háromszög készíthető?



<i>alapkör*</i>	103	<i>háromszög trigonometrikus területképlete*</i>	192
<i>aránytartó*</i>	106	<i>háromszögek hasonlóságának alapesetei *</i>	111
<i>azonosság*</i>	20, 44, 155	<i>hasáb*</i>	99
<i>bázisvektor</i>	181	<i>hasonló síkidomok területének aránya*</i>	120
<i>befogótétel*</i>	115, 171	<i>hasonló testek felszínének aránya*</i>	123
<i>depressziószög (lehajlási szög)</i>	148	<i>hasonló testek térfogatának aránya*</i>	123
<i>egyenesre vett merőleges vetítés</i>	126	<i>hasonlósági transzformáció*</i>	109
<i>egyenlet nullára redukálása*</i>	41	<i>~ aránya*</i>	109
<i>egyszeretlenes másodfokú egyenlet*</i>	45	<i>hegyesszög koszinusza*</i>	155
<i>ekvivalens egyenletek*</i>	75	<i>hegyesszög kotangense*</i>	155
<i>elégséges feltétel*</i>	223	<i>hegyesszög szinusza*</i>	155
<i>emelkedési szög (elevációs szög)</i>	148	<i>hegyesszög tangense*</i>	155
<i>emelkedő emelkedésének százalékos mértéke</i>	162	<i>helyvektor</i>	181
<i>faktoriális*</i>	228	<i>helyzeti középértékek*</i>	80
<i>felszín*</i>	99	<i>henger*</i>	98
<i>forgáskúp</i>	102	<i>húrnégyszög*</i>	140
<i>forgástest</i>	102	<i>húrnégyszögek tétele*</i>	141
<i>forgásszög*</i>	188	<i>húrnégyszögek tételének megfordítása*</i>	142
<i>forgásszög koszinusza*</i>	188	<i>inverz függvény*</i>	31
<i>forgásszög kotangense*</i>	195	<i>ismétlés nélküli kombináció*</i>	240
<i>forgásszög szinusza*</i>	188	<i>ismétlés nélküli permutáció*</i>	236
<i>forgásszög tangense*</i>	195	<i>ismétlés nélküli variáció*</i>	232
<i>gömb főköre</i>	98	<i>ismétléses permutáció*</i>	238
<i>gömb*</i>	98	<i>ismétléses variáció*</i>	233
<i>gráf*</i>	220	<i>kerületi és középponti szögek tétele*</i>	135
<i>gráf csúcsa*</i>	220	<i>kerületi szög*</i>	134
<i>gráf csúcsának fokszáma*</i>	220	<i>kerületi szögek tétele*</i>	175
<i>gráf éle*</i>	220	<i>két sokszög hasonlóságának feltétele</i>	112
<i>gúla*</i>	102	<i>kettős kúp</i>	103
<i>gyöktényezős alak*</i>	56	<i>kicsinyítés</i>	105
<i>harmonikus közép*</i>	85	<i>kitérő egyenesek*</i>	99, 177
<i>háromszög köré írt körének sugara*</i>	175	<i>kocka*</i>	25, 102, 177

<i>kombinatorika összeadási szabálya*</i>	228	<i>páratlan függvény</i>	200
<i>kombinatorika szorzási szabálya*</i>	226	<i>páros függvény</i>	200
<i>koszinuszfüggvény*</i>	199	<i>periodikus függvény</i>	201
<i>kotangensfüggvény*</i>	210	<i>periódus</i>	201
<i>körre vonatkozó inverzió</i>	132	<i>ponthalmazok hasonlósága*</i>	110
<i>középponti szög*</i>	135, 162	<i>pótszög szögfüggvényei*</i>	155
<i>középpontos hasonlóság*</i>	105	<i>reciprok egyenlet</i>	66
<i>~ középpontja*</i>	105	<i>segédegyenes</i>	106
<i>~ aránya*</i>	105	<i>síkra tükrözés</i>	102
<i>kúp*</i>	101	<i>síkra vett merőleges vetítés</i>	127
<i>különbségvektor koordinátái*</i>	185	<i>skatulyaelv*</i>	218
<i>lapátló*</i>	104, 179	<i>szabad vektor</i>	182
<i>látószögmörív*</i>	137	<i>szabályos n-oldalú gúla</i>	101
<i>lejtő lejtésének százalékos mértéke</i>	162	<i>szabályos n-oldalú hasáb</i>	100
<i>magasságtétel*</i>	115, 172	<i>szakasz felezőmerőleges síkja</i>	98
<i>másodfokú egyenlet diszkriminánsa*</i>	46	<i>számított középérték*</i>	80
<i>másodfokú egyenlet megoldóképlete*</i>	44, 230	<i>számítási közép*</i>	82, 116
<i>másodfokú függvény*</i>	39	<i>szimmetrikus egyenlet</i>	66
<i>medián*</i>	80	<i>szinuszfüggvény*</i>	201
<i>merőleges affinitás</i>	128	<i>szögfelezőtétel</i>	118
<i>~ aránya</i>	129	<i>sükséges feltétel*</i>	107, 222
<i>merőleges vetület</i>	114, 149	<i>tangensfüggvény*</i>	210
<i>mértani közép*</i>	81, 115, 171	<i>téglatest*</i>	100, 224
<i>modell</i>	104, 199, 218	<i>teljes négyzetté kiegészítés</i>	38
<i>módusz*</i>	80	<i>tengely körüli adott szögű elforgatás</i>	102, 188
<i>nagyítás</i>	105	<i>térfogat*</i>	25, 100
<i>n-edik gyökfüggvény*</i>	31	<i>testátló*</i>	101, 177
<i>n-edik gyök*</i>	25, 64	<i>testek hálójá</i>	100
<i>négyzetes oszlop*</i>	100	<i>végtelen hengerfelület*</i>	98
<i>négyzetgyök*</i>	13, 61, 167	<i>vektor hossza*</i>	184
<i>nevezetes szögek szögfüggvényértékei*</i>	156	<i>vektor koordinátái*</i>	182
<i>nyeregfelület</i>	99	<i>vektor reprezentánsa</i>	182
<i>összegvektor koordinátái*</i>	185	<i>vektorok lineáris kombinációja</i>	180
<i>palást*</i>	123	<i>vektor λ-szorosának koordinátái*</i>	185
<i>paralelogramma területképlete*</i>	174	<i>Viète-formulák*</i>	58



- Kiadja: Maxim Könyvkiadó Kft., 6728 Szeged, Kollégiumi út 11/H
- E-mail: info@maxim.co.hu
- Telefon: (62) 548 444
- Fax: (62) 548 443
- Felelős kiadó: Puskás Norbert
- Nyomda: Generál Nyomda Kft., felelős vezető: Hunya Ágnes