

Matematika



középszint

Matematika



Matematika



középszint



Kombinatorika, gráfok



**Hatvány, gyök,
logaritmus**



**A trigonometria
alkalmazásai**



Koordináta-geometria



**Valószínűség-számítás,
statisztika**

Út a tudáshoz

- A könyvet írta:
Ábrahám Gábor középiskolai tanár
Dr. Kosztolányiné Nagy Erzsébet középiskolai tanár
Tóth Julianna középiskolai tanár
- Lektorálta:
Tarcsay Tamás középiskolai tanár
Ványa István középiskolai tanár
- OH által kirendelt szakértő:
Hajba Tamás
Kónya István
- Felelős szerkesztő:
Szabóné Mihály Hajnalka
Tarcsay Tamás
- Műszaki szerkesztő:
Szűcs József
- Korrektúra:
Szuperákné Vörös Eszter
- Képek:
Nemzetközi képügynökségek
- Ábrák:
Kelcz Roland
- Illusztrációk:
Falcione Sarolta
- Borítóterv és layout:
Daróczi Sándor

Az első kiadás második utánnyomása

Tankönyvi engedélyszám: AK/577-4/2011 (2011. 03. 18. – 2016. 08. 31.)

Kiadói kód: MX-267

Kerettanterv: 17/2004 (V.20.) OM rendelet 3. számú melléklete

Tömeg: 382 g

Terjedelem: 216 oldal (19,31 ív)

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítást, a mű bővített, illetve rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli engedélye nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmilyen formában nem sokszorosítható.

ISBN 978 963 948 973 8

© Maxim Könyvkiadó



Matematika



középszint



$$N_t = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$





Már látjuk a célt!

Tankönyvünk a kiadó 9. és 10. osztályosok számára készült köteteire épülve a 11. osztályosokhoz szól. Folytatjuk azt a korábbi könyvekben megkezdett hagyományt, hogy megmutatjuk a matematika megérthető és megszerethető. Ennek az elvont tudománynak a fogalmait legtöbbször gyakorlati problémák bemutatásával készítettük elő, és csak ez után adtuk meg a pontos meghatározásukat. A tételek alkalmazhatóságát is igyekeztünk mindennapi példákon szemléltetni. Bőséges feladatanyaggal biztosítottunk lehetőséget a megszerzett ismeretek elmélyítésére, megszilárdítására.

Tizenegyedikes korra már látható távolságra kerül a középiskolai tanulmányok befejezése, az érettségi vizsga. Tudatosan kell készülni erre, ehhez az első lépés, hogy eldöntsük, milyen szintű vizsgával akarjuk zárni középiskolás éveinket. Ezt a könyvet azok számára írtuk, akik a középszintű érettségi vizsgára kívánnak felkészülni, ezért elsősorban a középszintű érettségi követelmény alapján állítottuk össze a tananyagot. Ott, ahol ettől eltértünk, a jelmagyarázatban leírt módon jeleztük. A fejezetek és leckék felépítésében a 9. és 10. osztályos könyvekben követett módszereinket alkalmaztuk. Igyekeztünk könnyen érthetőek és ugyanakkor pontosak is lenni. Sok példát és feladatot közöltünk, ezzel szeretnénk segíteni az érettségi vizsgára való sikeres felkészülést.

Hangsúlyozzuk, hogy a legjobb könyv sem lehet egyedüli eszköz az érettségi bizonyítvány megszerzéséhez. A lelkiismeretes tanulást nem pótolhatja semmi.

Kívánjuk, hogy könyvünk minél több segítséget adjon ehhez a lelkiismeretes tanuláshoz!

A Szerzők

Hogyan használjuk?

Jelmagyarázat

Tankönyvünk a kétszintű érettségi követelményrendszer alapján készült. A leckék felépítése, szerkezete egyszerű, jól áttekinthető. Igyekeztünk az új fogalmakat, tételeket, ismereteket minden esetben egy-egy matematikai, illetve hétköznapi életből vett problémán keresztül bevezetni, ezért a leckék többsége feladatokkal kezdődik.



1. példa A tananyagban szereplő kidolgozott **középszintű** példákat zöld háttérszínű keretbe foglaltuk. Ha a középszintű példának az egyik része emelt szintű, azt kék háttérrel jelöltük.



1. példa A tananyagban szereplő kidolgozott **emelt szintű** példákat jelölő ikont és a példa sorszámát kék színnel jelöltük a zöld háttérszínű keretben.



Közvetlenül a kidolgozott példák alatt szerepel azok részletes megoldása, melynek során **félkövér kiemelésekkel** hívtuk fel a figyelmet az újonnan megjelenő **fogalmakra, megállapításokra, módszerekre**.



Definíció Az új **középszintű** fogalmakat Definíció címszó alatt sárga háttérszínű keretbe foglaltuk. Itt írtuk le a fogalmakkal kapcsolatban használt matematikai jelöléseket is. Ezeknek a pontos ismerete mindkét szintű érettségi esetén alapkövetelmény.



Definíció Az új **emelt szintű** definíciókat jelölő ikont és a Definíció szót kék színnel jelöltük a sárga háttérszínű keretben



Tétel A **középszintű** tételeket, azonosságokat, tulajdonságokat narancssárga háttérszínű keretben foglaltuk meg. A tételek ismerete mind közép-, mind emelt szintű érettségi esetén elengedhetetlenül fontos.



Tétel Az **emelt szintű** tételeket jelölő ikont és a Tétel szót kék színnel jelöltük a narancssárga háttérszínű keretben.

A tételek többsége után azok bizonyítása is megtalálható. Ezeknek az ismerete minden esetben emelt szintű követelmény. Minden emelt szintű anyagrészre, illetve az „Oldjuk meg!” emelt szintű feladataira is világoskék háttérrel hívjuk fel a figyelmet.



A matematikai műveltség fontos részét képezi a matematika-történet ismerete, emellett ez a terület sok érdekességet is rejt magában. Ezért egy-egy anyagrészhez kapcsolódóan matematikatörténeti érdekességek jelennek meg krémszínű háttérrel.



Vegyük észre! Ezek a részek bizonyos fogalmak használatára hívják fel a figyelmet, miközben hasznos tanácsokat nyújtanak a feladatok megoldásához, az összefüggések megértéséhez. A fontos észrevételeket szürke háttérszínű keretben foglaltuk meg.

A matematikai ismeretek elmélyítésének leghatékonyabb módja az önálló problémamegoldás. Erre is nyílik lehetőség, hiszen minden lecke végén nagy mennyiségű feladatanyagot találhat az olvasó „Oldjuk meg!” címszó alatt. Egy részük megoldásához az internet használata sok segítséget nyújthat. A többségük viszont olyan, mely a számolási készséget, a kommunikációs, a tudásszerző és a gondolkodási képességet fejleszti. Ezek végeredménye megtalálható a kiadó www.olvas.hu honlapján.

A tankönyvben szereplő szakkifejezések jegyzéke a könnyebb áttekinthetőség, kereshetőség kedvéért a kötet végén a Függelékben található meg, amelyben csillaggal* jelöltük az érettségi követelményrendszerben is szereplő tartalmakat, és *dőlt* betűvel az új szakkifejezéseket. Újnak tekintjük azokat a szakkifejezéseket, amelyek az általános iskolában a tanítási gyakorlatban nem fordulnak elő, vagy megjelennek ugyan, de a középiskolai matematikai oktatásban mélyebb értelmet nyernek.



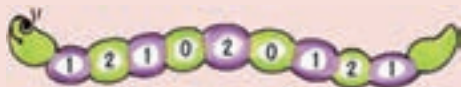


Tartalomjegyzék

I. KOMBINATORIKA, GRÁFOK

11

1. Sorba rendezési problémák (Ismétlés) 12



2. Részhalmaz-kiválasztási problémák, vegyes összeszámlálási feladatok (Ismétlés) 16

- 2.1. Ismétlés nélküli kombináció 16

- 2.2. Vegyes összeszámlálási feladatok 18

3. Binomiális együtthatók, Pascal háromszög 21

4. Gráfelméleti alapismeretek 30



II. HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

37

1. Az egész kitevőjű hatvány és az n -edik gyök (Ismétlés) 38

- 1.1. Az egész kitevőjű hatvány 38



- 1.2. Az n -edik gyök 39

2. A törtkitevőjű hatványok 43

3. Az irracionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény 50



4. Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek 56

- 4.1. Exponenciális egyenletek 56

- 4.2. Exponenciális egyenletrendszerek 62

- 4.3. Exponenciális egyenlőtlenségek 63

5. A logaritmus definíciója, a logaritmusfüggvény 65

- 5.1. A logaritmus definíciója 65

- 5.2. A logaritmusfüggvény 69

6. A logaritmus azonosságai 72

7. Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek 78



8. A matematikai jelölésrendszer és a hatványfogalom fejlődése, a logaritmus kialakulása (Történeti áttekintés – olvasmány) 84

5. Skaláris szorzat 118

6. Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között 125

- 6.1. A koszinusztétel 125

- 6.2. A szinusztétel 128

7. A trigonometria alkalmazása 131

III. A TRIGONOMETRIA ALKALMAZÁSAI 87

1. A trigonometriáról tanultak ismételése 88



2. Trigonometrikus egyenletek I. 98

3. Trigonometrikus egyenletek II. 107



4. Trigonometrikus egyenlőtlenségek (Kiegészítő, emelt szintű tananyag) 112

IV. KOORDINÁTA-GEOMETRIA 135

1. Vektorok a koordinátasíkon 136

2. Tájékozódás a koordináta-rendszerben 143

3. Helyvektorok 149



4. Az egyenes normálvektoros egyenlete 155

5. Az egyenes egyenlete más adatokból 159

6. Egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének feltétele, egyenesek metszéspontja 163



Tartalomjegyzék

7. Egyenesekkel kapcsolatos vegyes feladatok 167

8. A kör egyenlete 172

9. A körök és egyenesek kölcsönös helyzete 178



10. A parabola (Kiegészítő, emelt szintű tananyag) 185

V. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

189

1. Események, műveletek események között 190

1.1. Ismétlés 190

1.2. Események egyenlősége, műveletek események között 191



2. Klasszikus valószínűségi modell, visszatevési mintavétel 196

2.1. Események valószínűsége 196

2.2. A valószínűség-számítás klasszikus modellje 197



2.3. Visszatevési mintavétel 201

3. A szóródás mutatói 204



VI. FÜGGELÉK

212



Kiegészítés

212

A
B
C

Szakkifejezések listája

214



I. fejezet

Kombinatorika, gráfok

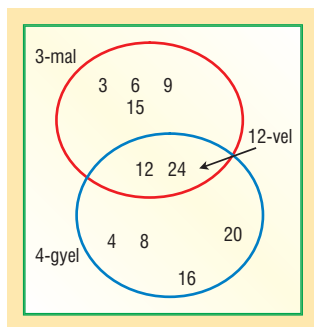


Ez egy jó kombináció!

1. Sorba rendezési problémák (Ismétlés)



1.1. ábra Egy hatjegyű szám



1.2. ábra Néhány szám csoportosítása oszthatóság alapján



1.3. ábra Egy permutáció

10. osztályban már foglalkoztunk összeszámlálási feladatokkal. Az alábbiakban néhány példán keresztül átismétljük az ott tanultakat.

1. példa Hány hatjegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek mindegyikének felhasználásával? Ezek közül hány osztható tizenkettővel? (1.1. ábra)

Megoldás:

Mivel mind a hat számjegyet fel kell használnunk a hatjegyű számok készítéséhez, ezért egy számjegy csak egyszer szerepelhet egy-egy számban. Tehát azt kell meghatároznunk, hogy hányféleképpen rendezhetjük sorba az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyeket. Mivel az első helyre hat elem közül választhatunk, és bármelyiket is tesszük ide, a második helyre minden esetben öt elem közül választhatunk, és így tovább, a hatodik helyre már csak egy elem marad, ezért a 10. osztályban tanult szorzási szabály értelmében az összes lehetséges sorrend száma $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$. Tehát 720 darab hatjegyű szám képezhető a megadott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával.

Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel, mert a 3 és a 4 relatív prímek (legnagyobb közös osztójuk 1), és szorzatuk 12 (1.2. ábra). Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal. Mivel $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, ezért a 720 darab szám mindegyike osztható 3-mal. Egy egész szám 4-gyel oszthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy az utolsó két számjegyből képezett szám osztható legyen 4-gyel. Ez alapján az utolsó két helyi értéken a 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64 számok állhatnak. Mindegyik esetben a maradék négy helyre $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ -féleképpen írhatunk számjegyeket. Így a szorzási szabály értelmében összesen $8 \cdot 24 = 192$ darab 12-vel osztható hatjegyű szám készíthető a megadott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával.



Az előző feladat a **sorba rendezési problémák** egyik alaptípusához, az **ismétlés nélküli permutációkhoz** tartozik (1.3. ábra). Elevenítsük fel az ehhez kapcsolódó definíciót és tételt!

Definíció Egy n ($n \in \mathbb{Z}^+$) elemű halmaz elemeiből képzett rendezett n -eseket az **n elem ismétlés nélküli permutációinak** nevezzük.



Tétel Egy n elemű halmaz permutációinak a száma
 $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.



2. példa A 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2 számjegyek mindegyikének felhasználásával hány kilencjegyű szám készíthető? Ezek közül hány darabra teljesül, hogy a szám egyenlő a számjegyei fordított sorrendjével felírt számmal? (Az ilyen számot nevezzük palindrom számnak.)

Megoldás:

Mivel mindegyik számjegyet fel kell használni, ezért a keresett számokat úgy kaphatjuk meg, hogy a felsorolt számjegyeket az összes lehetséges módon sorba tesszük, és elhagyjuk ezek közül azokat, melyek nullával kezdődnek. Ha a megadott számjegyek mind különbözőek lennének, akkor összesen $9!$ -féleképpen rendezhetnénk sorba azokat. Mivel bármelyik két 1-est, 2-est, illetve a két 0-t nem tudjuk megkülönböztetni egymástól, ezért az 1-esek, a 2-esek, illetve a 0-k egymás közötti cseréje nem jelent új esetet. Így a $9!$ -t osztani kell $4!$ -sal, $3!$ -sal, valamint $2!$ -sal. Tehát a felsorolt számjegyek összes lehetséges sorrendje

$$\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1260. \text{ Ezek közül a 0-val kezdődők száma } \frac{8!}{4! \cdot 3!} = 280.$$

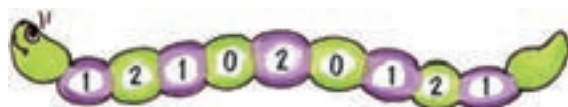
Így a lehetséges kilencjegyű számok száma $1260 - 280 = 980$.

Ha egy szám egyenlő a számjegyei fordított sorrendjével felírt számmal, akkor szimmetrikus (1.5. és 1.6. ábrák). Mivel ezek a számok kilencjegyűek és bennük három 2-es van, ezért a számok közepén 2-esnek kell állnia. A középső számjegy előtt és mögött egyaránt egy-egy 2-esnek és 0-nak, illetve két-két 1-esnek kell lennie. A szimmetria miatt a szám első négy helyi értékén álló számjegy meghatározza az utolsó négy helyi értéken álló számjegyet. Így azt elég meghatározni, hogy két darab 1-est, egy 0-t és egy 2-est hányféleképpen tehetünk sorba, majd ebből kivonjuk azon esetek számát, amikor 0 áll elől. Tehát a keresett

$$\text{palindrom számok száma } \frac{4!}{2!} - \frac{3!}{2!} = 9.$$



A 2. példában is elemek sorrendjét képeztük az összes lehetséges módon, csak voltak közöttük azonosak. Ezért az így kapott sorba rendezéseket **ismétléses permutációknak** nevezzük. Itt is elevenítsük fel az előző tanévben tanult definíciót és tételt!



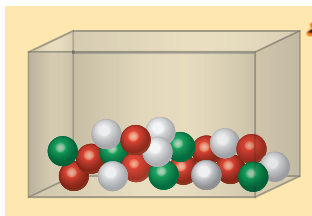
1.6. ábra Palindrom szám



1.4. ábra Vigyázat!



1.5. ábra Palindrom mondat



1.7. ábra Vannak egyforma elemek



Definíció Adott n darab elem, melyek közül n_1 egyforma, n_2 egyforma, de az előzőektől különböző, n_3 egyforma, de az előzőektől különböző, ..., n_k egyforma, de az előzőektől különböző, ahol $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$. Ezen n darab elem egy lehetséges sorrendjét az n elem egy **ismétléses permutációjának** nevezzük (1.7. ábra).



Tétel Az előző definícióban megadott n elem esetén az ismétléses permutációk száma

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$



3. példa Egy szabályos dobókockát négyszer feldobunk egymás után, majd a kapott eredményeket leírjuk egymás mellé. Így egy négyjegyű számot kapunk (1.8. ábra).

- Hányféle négyjegyű számot kaphatunk eredményként?
- Ezek között hány olyan van, amelyben nem ismétlődnek a számjegyek?
- Hány olyan szám van közöttük, amelyben legalább egy számjegy ismétlődik?



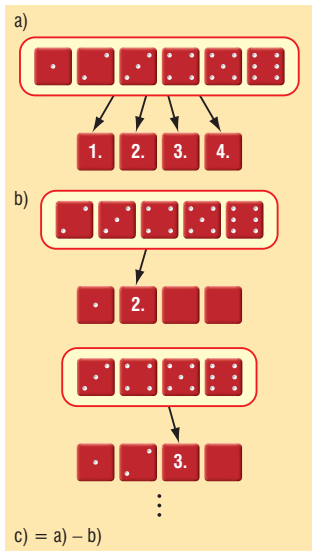
1.8. ábra A 4 dobás egyik lehetséges eredménye

Megoldás:

a) A keletkező négyjegyű számok az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz elemeiből képezhetők. Olyan rendezett négyeseket hozunk létre, melyekben egy elemet többször is felhasználhatunk, így mind a négy helyre 6 elem közül választhatunk, függetlenül attól, hogy az előtte levő helyre mit írtunk. Tehát az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből képezhető négyjegyű számok száma $6^4 = 1296$.

b) Mivel a számjegyek nem ismétlődhetnek, így bármelyiket is választjuk ki az első helyre, a másodikra csak 5 szám közül választhatunk, mert azt nem írhatjuk oda, amelyik az első helyen szerepel. A harmadik helyre már csak 4 szám kerülhet, mert amelyik az első két helyen szerepel, az nem kerülhet oda, míg a negyedik helyre már csak háromféle szám közül választhatunk. Így összesen $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ olyan négyjegyű szám van közöttük, melyben egyik számjegy sem ismétlődik.

c) Ha az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből képezhető négyjegyű számok közül elhagyjuk azokat, melyekben minden számjegy egyszer szerepel, akkor azokat kapjuk, amelyekben legalább egy számjegy ismétlődik. Így ezek száma $1296 - 360 = 936$ (1.9. ábra).



1.9. ábra Adott helyre választható számok

esetben hat elem negyedosztályú **ismétléses variációit** hoztuk létre, a másodikban pedig az **ismétlés nélküli variációit**. Elevenítsük fel az ezekkel kapcsolatos definíciókat és tételeket!



Definíció Adott egy n elemű halmaz. Ezen n darab elemből kiválasztott k darab ($k \leq n$) különböző elem egy sorrendjét az n elem egy **k -ad osztályú ismétlés nélküli variációjának** nevezzük.



Tétel Egy n elemű halmaz k -ad osztályú ismétlés nélküli variációinak a száma:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$



Definíció Adott egy n elemű halmaz. Ha úgy hozunk létre rendezett k -asokat, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk, akkor az n elem **k -ad osztályú ismétléses variációit** kapjuk.



Tétel Egy n elemű halmaz k -ad osztályú ismétléses variációinak a száma $V_n^{k(i)} = n^k$.



1.10. ábra Ki állhat a versenyzők közül a győzelmi dobogóra?



Oldjuk meg!

- Ádám, Béla, Csaba, Dóra és Eszter matematikatörténeti előadást készítettek. Azt beszélték meg, hogy délután három órakor találkoznak a városi könyvtárban.
 - Hányféleképpen érkezhettek meg, ha tudjuk, hogy nincs közöttük két olyan diák, akik egyszerre jönnek?
 - Hányféleképpen érkezhettek meg, ha Ádám és Dóra, valamint Csaba és Eszter egyszerre érnek a könyvtárba?
- Azért, hogy könnyebben meg tudják beszélni az előadás részleteit, egy kerek asztal köré ülnek le.
 - Hányféleképpen ülhetnek le, feltéve, hogy két leültetést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha forgatással nem vihetők egymásba?
 - Hányféleképpen ülhetnek le az előző feltételek mellett, ha Ádám Dóra mellé, míg Csaba Eszter mellé akar ülni?
- Az előadás anyagát öt témára osztják, és sorsolással döntenek el, hogy ki melyik témát kapja.
 - Hányféleképpen alakulhat a sorsolás eredménye?
 - Hányféleképpen alakulhat a sorsolás eredménye, ha Ádám ragaszkodik ahhoz, hogy az 1. vagy a 2. témát kapja?
- A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával hány öttel osztható hatjegyű szám képezhető? Ezek között hány olyan van, amelyben az 1, 2, 3 számjegyek valamilyen sorrendben egymás mellett szerepelnek?
- Az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4 számjegyek mindegyikének felhasználásával hány kilencjegyű szám képezhető? Ezek között hány olyan van, amely osztható 12-vel?

6. Válaszoljunk az előző feladatbeli kérdésekre az 1, 1, 2, 2, 3, 3, 0, 0, 0 számjegyek esetén!
7. Az 0, 1, 2, ..., 9 számjegyeket felírjuk egy-egy papírlapra, majd beletesszük egy urnába. Ezután visszatevés nélkül kihúzzunk ötöt, majd a számjegyeket a húzás sorrendjében felírjuk egy táblára.
 - a) Hány ötjegyű számot kaphatunk?
 - b) Ezek között hány olyan van, melynek a számjegyei között nincs 3-mal osztható?
 - c) Hány olyan ötjegyű számot kaphatunk, melynek a számjegyei között van 3-mal osztható?
 - d) Hány olyan ötjegyű számot kaphatunk, melynek a számjegyei között nincs sem 3-as, sem 4-es?
 - e) Hány olyan ötjegyű számot kaphatunk, melynek a számjegyei között van 3-as vagy 4-es?
 - f) Hány olyan ötjegyű számot kaphatunk, melynek a számjegyei között nincs 5-ös vagy 6-os?
 - g) Hány olyan ötjegyű számot kaphatunk, melynek a számjegyei között van 5-ös és 6-os?
8. Válaszoljunk a 7. feladat kérdéseire, ha a kihúzott papírlapokat minden húzás után visszatesszük!
9. Egy 32 lapos magyar kártyából kihúzzunk 6 lapot, majd a húzás sorrendjében egymás mellé tesszük azokat.
 - a) Hány esetben lehet a kihúzott lapok között pontosan egy király?
 - b) Hány olyan eset lehet, melyben nincs a kihúzott lapok között ász?
 - c) Hány esetben nem lehet a kihúzott lapok között piros?
10. Válaszoljunk a 9. feladat kérdéseire abban az esetben, ha minden húzás után visszatesszük a kihúzott lapot! (A kihúzott lapok különböző sorrendjeit különbözőnek tekintjük.)
11. Egy szabályos dobókockát ötször feldobunk, majd a kapott eredményeket leírjuk egymás mellé.
 - a) Hány ötjegyű számot kaphatunk így?
 - b) Ezek között hány olyan szám van, amelyben a számjegyek szorzata páros?
 - c) Hány olyan szám van közöttük, melynek a számjegyei között van prímszám?
 - d) Hány olyan szám van közöttük, melyre teljesül, hogy a számjegyek növekvő sorrendben követik egymást?
 - e) Hány olyan szám van közöttük, amelyre teljesül, hogy ha a számból kivonjuk a számjegyei felcserélésével kapott számot, akkor eredményül nullát kapunk?
 - f) Hány 40 000-nél kisebb, 4-gyel osztható szám van közöttük?

2. Részhalmaz-kiválasztási problémák, vegyes összeszámlálási feladatok (Ismétlés)

2.1. Ismétlés nélküli kombináció



2.1. ábra A díjazottak

10. osztályban ugyancsak foglalkoztunk részhalmaz-kiválasztási problémákkal, azaz ismétlés nélküli kombinációval. Az alábbiakban eleve-
nitsük fel a tavaly tanultakat!

1. példa Egy mamutvállalat a kimagasló munkát végző alkalmazottai elismerésére díjat alapított. A díjat a vele járó 1500 euró jutalommal együtt minden évben három alkalmazott kaphatja meg. Hányféleképpen lehet a díjakat kiadni abban az évben, amelyben 40 főt terjesztettek fel jutalomra?

Megoldás:

Mivel a díjak között nincs különbség, ezért mindegy, milyen sorrendben választják ki a díjazottakat, csak a kiválasztás ténye fontos. Ha a különböző kiválasztási sorrendeket különbözőnek tekintenénk, akkor a lehetőségek száma $40 \cdot 39 \cdot 38 = 59\,280$ lenne. Mivel nem számít különbözőnek a kiválasztott elemek különböző sorrendje, ezért ezt el kell osztani $3!$ -sal. Így a díjakat $\frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3!} = 9880$ -féleképpen lehet kiosztani.



Az előző feladatban szereplő negyven főt tekinthetjük egy negyvenelemű halmaznak, a három díjazottat pedig az ebből kiválasztott háromelemű részhalmaznak. Tehát a feladatban választ kaptunk arra, hogy egy negyvenelemű halmaznak hány háromelemű részhalmaza van. A negyvenelemű halmaz háromelemű részhalmazait a negyven elem harmadosztályú **ismétlés nélküli kombinációinak** nevezzük. Ezek száma $\frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3!} = \frac{40!}{3! \cdot 37!} = \binom{40}{3}$ alakban is megadható, amit úgy olvasunk ki, hogy „negyven alatt három”. Az alábbiakban elevenítsük fel a 10. osztályban tanult definíciókat és tételt!



2.2. ábra Kombinációs zár



Definíció Egy n ($n \in \mathbb{N}$) elemű halmaz k ($k \in \mathbb{N}, k \leq n$) elemű részhalmazait az n elem k -ad osztályú **ismétlés nélküli kombinációinak** nevezzük.



Definíció Az $\binom{n}{k}$ (olv.: **n alatt k**) szimbólummal az $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ -t jelöljük, ahol $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ és $k \leq n$. Az $\binom{n}{k}$ -t **binomiális együtthatónak** nevezzük.

Mivel $0! = 1$, ezért $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$ és $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$.



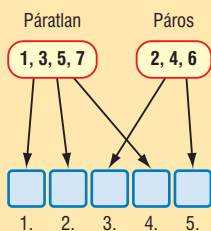
Tétel Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a száma $C_n^k = \binom{n}{k}$.



2.3. ábra Genovai lottó

2.2. Vegyes összeszámlálási feladatok

Ha a 3. és 5. helyen áll páros számjegy:



Ebben az esetben az ötjegyű számok száma $V_4^{3(i)} V_3^{2(i)} = 4^3 \cdot 3^2$.

2.4. ábra Így gondolkodhatunk



2.5. ábra Ötjegyű szám két páros számjeggyel

2. példa Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek felhasználásával hány olyan ötjegyű szám készíthető, melyben

- pontosan két páros számjegy;
- legalább két páros számjegy van, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

Megoldás:

a) Öt helyi érték közül pontosan két helyen páros és három helyen páratlan számjegynek kell lennie. Először nézzük meg, hogy hányféleképpen választhatjuk ki a páros számjegyek helyét. Mivel a kiválasztás

sorrendje nem számít, ezért ezt $C_5^2 = \binom{5}{2}$ -féleképpen tehetjük meg.

Most tekintsük pl. azt az esetet, amikor a 3. és 5. helyen áll páros számjegy, a többi helyen páratlan! Ekkor az 1., a 2. és a 4. hely mindegyikére a négy páratlan számjegy közül, míg a 3. és az 5. helyre a három páros számjegy közül választhatunk. Így ebben az esetben az ötjegyű számok száma $V_4^{3(i)} V_3^{2(i)} = 4^3 \cdot 3^2$.

Mivel az öt hely közül bárhol is áll a két páros számjegy, minden esetben $V_4^{3(i)} V_3^{2(i)} = 4^3 \cdot 3^2$ -féle ötjegyű számot készíthetünk, így a szorzási szabály értelmében összesen

$$C_5^2 V_4^{3(i)} V_3^{2(i)} = \binom{5}{2} 4^3 \cdot 3^2 = \frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot 4^3 \cdot 3^2 = 5760$$

darab olyan ötjegyű szám készíthető a megadott számjegyekből, amelyek pontosan két számjegye páros.

b) **1. módszer:**

A legalább két páros számjegy kijelentés alatt azt értjük, hogy pontosan kettő, vagy pontosan három, vagy pontosan négy, vagy pontosan öt páros számjegy van az ötjegyű szám számjegyei között. Az egyes esetekhez tartozó értékeket az a) rész alapján már könnyen meghatározhatjuk. Mivel ezek páronként kizárják egymást, ezért az összeadási szabály alapján a kapott értékek összege adja meg a helyes végeredményt.

$$\begin{aligned} & C_5^2 V_4^{3(i)} V_3^{2(i)} + C_5^3 V_4^{2(i)} V_3^{3(i)} + C_5^4 V_4^{1(i)} V_3^{4(i)} + C_5^5 V_4^{0(i)} V_3^{5(i)} = \\ & = \binom{5}{2} \cdot 4^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{3} \cdot 4^2 \cdot 3^3 + \binom{5}{4} \cdot 4^1 \cdot 3^4 + \binom{5}{5} \cdot 4^0 \cdot 3^5 = \\ & = 5760 + 4320 + 1620 + 243 = 11\,943 \end{aligned}$$

2. módszer:

A problémát úgy is megoldhatjuk, hogy az összes eset számából kivonjuk a feladat szempontjából kedvezőtlen esetek számát. A feladat szempontjából kedvezőtlen esetek azok, amikor a számjegyek között pontosan egy páros számjegy van, vagy nincs páros számjegy.

Ezek száma

$$\begin{aligned} C_5^0 V_4^{5(i)} V_3^{0(i)} + C_5^1 V_4^{4(i)} V_3^{1(i)} &= \\ = \binom{5}{0} \cdot 4^5 \cdot 3^0 + \binom{5}{1} \cdot 4^4 \cdot 3^1 &= \\ = 1024 + 3840 = 4864 \end{aligned}$$

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek felhasználásával képezhető ötjegyű számok száma $V_7^{5(i)} = 7^5 = 16807$. Így a feladatnak megfelelő ötjegyű számokból összesen $16807 - 4864 = 11943$ darab van.



3. példa Egy ládában 120 darab izzó van, amelynek 15%-a selejtes. Véletlenszerűen kiválasztunk közülük 10-et. Hány esetben lehet a kiválasztottak között
a) pontosan három selejtes; b) legfeljebb nyolc selejtes?

Megoldás:

a) A selejtesek száma $120 \cdot 0,15 = 18$. A 3 selejtet $\binom{18}{3}$ -féleképpen választhatjuk ki. Mindegyik esetben a 7 nem selejtet $\binom{102}{7}$ -féleképpen választhatjuk ki. A szorzási szabály alapján $\binom{18}{3} \binom{102}{7}$ -féleképpen választhatunk ki 10 izzót úgy, hogy pontosan 3 selejtes legyen közöttük.

b) A legfeljebb 8 selejtes azt jelenti, hogy 8 vagy annál kevesebb. Nyilván célszerűbb úgy összeszámolni, hogy az összes esetből elhagyjuk a feladat szempontjából kedvezőtlen eseteket. Ezek azok, amikor pontosan 9, illetve pontosan 10 selejtes van a kiválasztottak között.

Ezek száma $\binom{18}{9} \binom{102}{1} + \binom{18}{10} \binom{102}{0}$. Az összes eset száma $\binom{120}{10}$. Így azon esetek száma, amikor a kiválasztott izzók között legfeljebb 8 selejtes van $\binom{120}{10} - \binom{18}{9} \binom{102}{1} - \binom{18}{10} \binom{102}{0}$.



4. példa A 0-tól különböző számjegyek mindegyikének felhasználásával kilencjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon. Hány olyan szám van közöttük, melyben az 1, 2, 3 számjegyek közül semelyik kettő nincs egymás mellett?

Megoldás:

Írjuk le a „válaszfalakat” jelentő 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyeket. Ekkor a maradék három számjegyet kell beírunk egyesével az összes lehetsé-



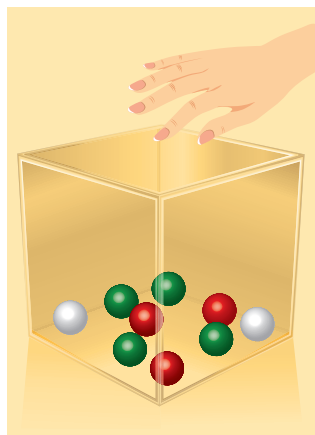
2.6. ábra Selejtes vagy nem?



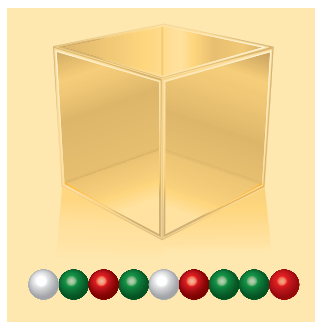
2.7. ábra Amelyik nem selejtes, az világít



2.8. ábra Egy jó szám



2.9. ábra Húzás az urnából



2.10. ábra Ilyen lett a húzási sorrend

ges módon a $_4_5_6_7_8_9_$ számsorba a vonalakra. A három számjegyet a hét vonalon $V_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ -féleképpen helyezhetjük el. Mivel ezt a 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek bármely sorrendje esetén ennyiszor tehetjük meg, ezért a feladatnak megfelelő kilencjegyű számok száma $V_7^3 \cdot P_6 = 210 \cdot 6! = 151\,200$.

5. példa Egy urnába 3 piros, 4 zöld és 2 fehér golyót helyezünk el. A golyók egyforma méretűek.

- Hányféle sorrendben húzhatjuk ki a golyókat az urnából?
- Ezek között hány olyan sorrend van, amelyben a 3 piros golyó közül semelyik 2 sincs egymás mellett?

Megoldás:

a) Mivel az azonos színű golyókat nem különböztetjük meg egymástól, ezért az összes lehetséges sorrend $P_9^{(2,3,4)} = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260$.

b) Mint azt az előző feladatban is tettük, tegyük le először a „válaszfalakat”, azaz a 4 zöld és 2 fehér golyót valamilyen sorrendben.

Pl: $_f_z_z_f_z_z_$

Az aláhúzással jelölt hét hely közül kell háromra letenni a piros golyókat. A három hely kiválasztásának különböző sorrendje nem számít különbözőnek, ezért ezt $C_7^3 = \binom{7}{3}$ -féleképpen tehetjük meg. Mivel

a „válaszfalakat” minden esetben $P_6^{(2,4)} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ -féleképpen tehetjük le, ezért a feladatnak megfelelő kihúzások száma a szorzási szabály alapján $C_7^3 \cdot P_6^{(2,4)} = 35 \cdot 15 = 525$.



Oldjuk meg!

- Hányféleképpen sorsolhatunk ki 4 egyforma könyvet 30 diák között, ha egy diák csak egy könyvet kaphat?
- Felvezünk a síkon egy szabályos húszszöget. Hány
 - háromszöget; b) négyszöget határoznak meg a húszszög csúcsai?
- Felvezünk egymással párhuzamosan két egyenest. Az egyiket kijelölünk 10, a másikon 8 pontot. Hány
 - háromszöget; b) négyszöget határoznak meg a pontok?
- A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 5 lapot?
- A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 5 lapot úgy, hogy a kiválasztott lapok között
 - pontosan 2; b) legalább 3 piros legyen?

6. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 6 lapot úgy, hogy a kiválasztott lapok között pontosan két király és egy ász legyen?
7. Hányféleképpen lehet a 32 lapos magyar kártyát szétosztani 4 játékos között úgy, hogy mindenki 8 lapot kapjon?
8. Hányféleképpen lehet a 32 lapos magyar kártyát szétosztani 4 játékos között úgy, hogy mindenki 8 lapot kapjon, és valamelyik játékosnál legyen a négy ász?
9. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyeket felírjuk egy-egy cédulára, majd a cétliket beletesszük egy urnába. Ezután kihúzzunk az urnából 5 cédulát, és azokat a húzás sorrendjében egymás mellé tesszük.
 - a) Hány olyan ötjegyű szám keletkezhet így, amelyben pontosan 2 páratlan számjegy van?
 - b) Hány olyan ötjegyű szám keletkezhet így, amelyben legalább 2 páratlan számjegy van?
10. Az előző feladatbeli cédulákat mind kihúzzuk.
 - a) Hány olyan hétjegyű szám keletkezhet, amelyben az 1, 2, 4 számjegyek egymás mellett szerepelnek?
 - b) Hány olyan hétjegyű szám keletkezhet, amelyben az 1, 2, 4 számjegyek közül semelyik kettő sem szerepel egymás mellett?
11. Egy szabályos dobókockát hatszor egymás után feldobunk, majd a dobások eredményét egymás mellé írjuk. Így egy hatjegyű számot kapunk.
 - a) Hány olyan hatjegyű szám keletkezhet, amelynek a számjegyei között pontosan 2 prímszám van?
 - b) Hány olyan hatjegyű szám keletkezhet, amelynek a számjegyei között legalább 3 prímszám van?
 - c) Hány olyan hatjegyű szám keletkezhet, amely számjegyeinek az összege legfeljebb 8?

3. Binomiális együtthatók, Pascal-háromszög

1. példa Hányféleképpen olvasható ki az alábbi táblázatból az algebra szó, ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk ki és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük meg?

A	L	G	E	B		
	L	G	E	B	R	
		G	E	B	R	A

Megoldás:

1. módszer:

A bal felső A betűből indulva vizsgáljuk meg, hogy hányféleképpen juthatunk el az egyes betűkhöz! Írjuk oda minden betű mellé az oda vezető utak számát!

Mind a két L betűhöz egyféleképpen juthatunk el. A két szélső G betűhöz is, míg a középsőhöz már kétféleképpen, mert a fölötte és a mellette levő L betűtől is oda juthatunk.

A ¹	L ¹	G ¹	E ¹	B ¹
L ¹	G ²	E ³	B ⁴	R ⁵
G ¹	E ³	B ⁶	R ¹⁰	A ¹⁵

A betűk melletti szám az oda vezető utak számát adja meg.

3.1. ábra Így is gondolkodhatunk a feladat megoldása során...

$$\begin{array}{ccccc} A \binom{0}{0} & L \binom{1}{0} & G \binom{2}{0} & E \binom{3}{0} & B \binom{4}{0} \\ L \binom{1}{0} & G \binom{2}{1} & E \binom{3}{1} & B \binom{4}{1} & R \binom{5}{1} \\ G \binom{2}{0} & E \binom{3}{1} & B \binom{4}{2} & R \binom{5}{2} & A \binom{6}{2} \end{array}$$

3.2. ábra ... és így is



A rómaiak az Kr. e. V. századtól a Kr. u. I. századig (köztársaság és a korai császárság kora) építették a legtöbb várost. Az új város szabályos alaprajzú volt. Először kijelöltek két egymásra merőleges főutat (cardus és decumanus); a többi utca pedig ezekkel párhuzamos volt. Négyyszögben szabályos tömbökben építették a házait. A két főút kereszteződésében volt a társadalmi és vallási élet központja. A két főút végén volt a város négy főkapuja.

Forrás: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Castrum>

3.3. ábra Egy kis történelem



3.4. ábra Pompeji egyenes utcái

A felső sorban levő E betűhöz egyféleképpen lehet eljutni. A második sorban levőhöz háromféleképpen, mert a felette levő G-n keresztül egy út vezet hozzá, míg a mellette levőn keresztül kettő. Hasonló megfontolások miatt az alsó E betűhöz is három út vezet.

A felső B-hez egy úton keresztül juthatunk el. A középső sorban levő B-hez a felette levő E-n keresztül egy út vezet, míg a mellette levő E-n keresztül három, így összesen négy. Az alsó sorban levő B-hez a két E-n keresztül három-három út vezet, így $3 + 3 = 6$ -féleképpen juthatunk el oda.

A második sorban levő R-hez $1 + 4 = 5$ út vezet, míg az alsó R-hez összesen $6 + 4 = 10$.

Így a jobb alsó sarokban levő A betűhöz a fölötté levő R-en keresztül ötféleképpen, míg a mellette levő R-en keresztül tízféleképpen juthatunk el, ami összesen 15. Tehát tizenötféleképpen olvashatjuk ki a táblázatból az algebra szót.

2. módszer:

Összesen hat lépéssel juthatunk el a táblázat bal felső A betűjétől a jobb alsó A betűjéhez. Ez a hat lépés négy jobbra (J) és két lefelé (L) lépésből áll. Minden egyes kiolvasásnak megfeleltethető a négy J betű és a két L betű pontosan egy sorrendje, valamint a J, illetve L betűk minden egyes sorrendjének pontosan egy kiolvasás felel meg. Tehát kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés hozható létre a kiolvasások és a J, illetve L betűk permutációinak halmaza között. Így mindkét halmaznak ugyanannyi

eleme van. Ezek száma pedig $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$.



Vegyük észre, hogy az előző gondolatmenet a táblázat bármely betűjére alkalmazható, így az egyes számok helyére beírhatjuk a megfelelő binomiális együtthatót! Ezt mutatja a 3.2. ábra.

Az antik római városok szabályos alaprajzú, közel négyzethálós útrendszerrel rendelkező városok voltak. Képzeljük el, hogy egy ilyen város főterén vagyunk, ahonnan el szeretnénk jutni a város valamely pontjához! Azon morfondírozunk, hogy melyik utat válasszuk, egyáltalán hány különböző úton juthatunk el oda. Az alábbiakban ilyen jellegű feladatokkal foglalkozunk. A probléma megoldásához célszerű megalkotni a város matematikai modelljét. Legyen a leírásban szereplő két merőleges főút a Descartes-féle koordináta-rendszer két tengelye, a főter az origó! Az úthálózatot szimbolizálják a rácsegyenesek!



2. példa

A koordináta-rendszer origójából indulva hányféleképpen juthatunk el a $P(5;4)$ koordinátájú rácspontba, ha csak rácsegyenesek mentén mozoghatunk, az x , illetve az y tengely pozitív irányába? Ezek közül melyik út a legrövidebb?

Megoldás:

Készítsünk ábrát! A 3.5. ábrán két lehetséges utat vázoltunk fel. Mindkét esetben az x tengely irányába öt, az y tengely irányába négy egységet kell haladnunk, hogy az origóból a $P(5;4)$ rácspontba jussunk. A megoldás az előzőhöz hasonlóan történhet. Szimbolizálja az öt x tengely menti egységet öt J, a négy y tengely menti egységet négy F betű. Minden egyes útnak megfeleltethető az öt J betű és a négy F betű pontosan egy sorrendje, valamint a J, illetve F betűk minden egyes sorrendjének pontosan egy út felel meg. Tehát kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés hozható létre az utak és a J, illetve F betűk permutációinak halmaza között. Így mindkét halmaznak ugyanannyi eleme van.

Ezek száma pedig $\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$. A lehetséges utak mind 9 egység hosszúak. Tehát ebből a szempontból mindegy, melyiket választjuk.



Vegyük észre, hogy az előző feladatban nincs kitüntetett szerepe a $P(5;4)$ pontnak. Ha azt vizsgáljuk, hogy hányféleképpen juthatunk el az origóból az I. síknegyed $P(p_1; p_2)$ ($p_1, p_2 \in \mathbb{N}$) rácspontjába, akkor is hasonlóan járhatunk el. Ez alapján a lehetséges utak száma $\binom{p_1 + p_2}{p_1}$.



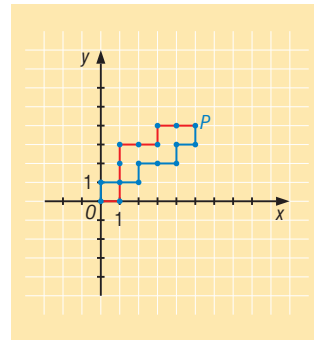
3. példa Hányféleképpen juthatunk el az előző feladatbeli módon az origóból az $y = 6 - x$ egyenletű egyenes első síknegyedbe és a koordinátatengelyekre eső rácspontjaiba?

Megoldás:

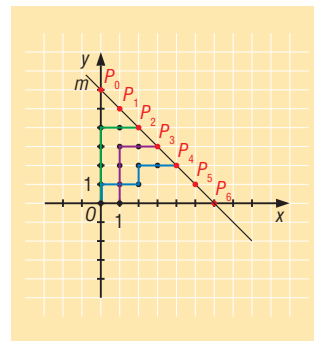
Megint készítsunk ábrát! Rajzoljunk be néhány utat!

Mivel a rácspontok rajta vannak az $y = 6 - x$ egyenletű egyenesen, ezért koordinátáik összege 6, és mindkét koordináta természetes szám, hiszen a pontok az első síknegyedben vannak. Az ábrán feltüntettük piros színnel azokat a rácspontokat, ahova érkezhetünk. Ezek a $P_0(0;6)$, a $P_1(1;5)$, a $P_2(2;4)$, a $P_3(3;3)$, a $P_4(4;2)$, a $P_5(5;1)$ és a $P_6(6;0)$ pontok. Az előző feladatban, illetve bekezdésben leírtak alapján ezekbe a pontokba rendre $\binom{6}{0}$, $\binom{6}{1}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{3}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{6}{5}$ és $\binom{6}{6}$ -féleképpen juthatunk el. Az összeadási szabály alapján e számok összege adja meg, hogy hányféleképpen juthatunk el az origóból az $y = 6 - x$ egyenletű egyenes első síknegyedbe eső rácspontjaiba. Így a keresett szám

$$\begin{aligned} & \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = \\ & = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64. \end{aligned}$$



3.5. ábra Lehetséges útvonalak a 2. példához



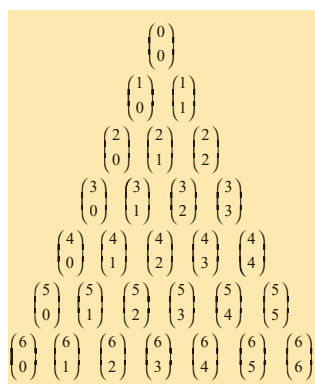
3.6. ábra Néhány út



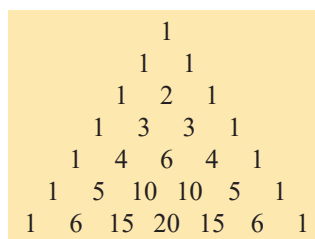
A rómaiak – mint mindent, ami görög – a pénz használatát is átvették a görögöktől, az első denariusokat Kr. e. 269-ben verték Rómában. Érdekessége abban állt, hogy az érmék hátoldalára Héra római megfelelőjének (Juno Moneta) a „vezetéknevét” (Moneta) verték. Mivel más nyelvekben nem létezett szó a pénzre, jobb híján „monetának” hívták az érméket. Innen eredeztethető a latin monetáris kifejezés, illetve a sok nyelvben mon- vagy man- kezdetű „pénz” jelentésű szó (például az angol money).

Forrás: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Pénz>

3.8. ábra A rómaiak is tanultak



3.9. ábra Binomiális együtthatók



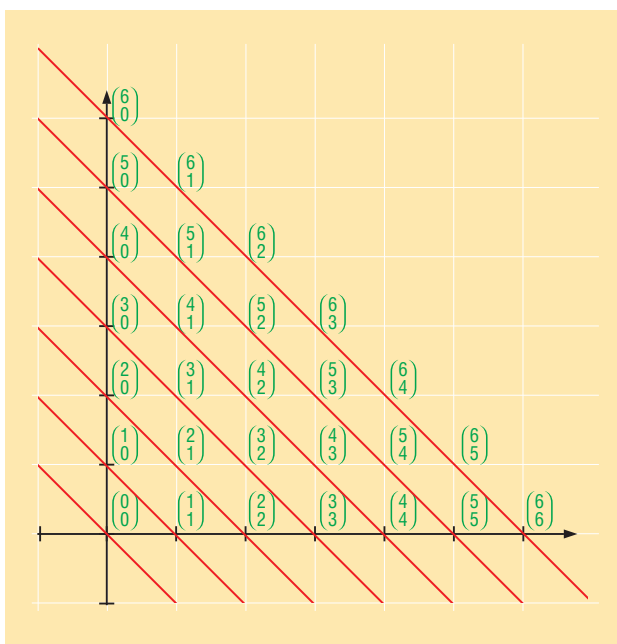
3.10. ábra Pascal-háromszög



4. példa Az x tengely, az y tengely és az $y = 6 - x$ egyenletű egyenesek által határolt háromszög belsejében és határán levő rácspontok mindegyikében pontosan annyi denarius (ókori római fizetési eszköz, 3.8. ábra) van, ahányféleképpen eljuthatunk az eddig leírt módon az origóból abba a pontba. Ha végigjárjuk a háromszögben és annak határán levő összes rácspontot, akkor hány denariust gyűjthetünk be?

Megoldás:

Készítsünk ábrát, amelyen feltüntetjük, hogy az egyes rácspontokba hányféleképpen juthatunk el (3.7. ábra)!



3.7. ábra A 4. példa ábrázolása

Először határozzuk meg egy-egy piros egyenes mentén a binomiális együtthatók értékét! Ehhez, a 3.7. ábrából kiindulva, rendezzük el háromszög alakban az együtthatókat a 3.9. ábrán látható módon!

Írjuk be az együtthatók értékét az előző háromszögbe (3.10. ábra)!

A binomiális együtthatók 3.10. ábrán látható elrendezését **Pascal-háromszögnek** nevezzük. A Pascal-háromszög egy-egy sorában levő számok összege fentről lefelé haladva rendre 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Így a keresett összeg $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$.



A binomiális együtthatók háromszögbe rendezésének legkorábbi ábrázolása a X. században bukkant fel, a *Chandas Shastra* című ókori indiai könyvhöz írott kommentárokból. Az ókori szanszkrit nyelvű könyvet Pingala írta valamikor Kr. e. V. és II. század között, de ez csak töredékesen maradt fenn.

Ugyanebben az időben Perzsiában is tárgyalták Al-Karadzsi matematikus (953–1029) és Omar Khajjám költő-csillagász-matematikos (1048–1131); ezért a háromszöget Iránban „Khajjám-háromszög” néven ismerik. A háromszöghöz kapcsolódóan több tétel is ismertek, köztük a binomiális tétel.

A XIII. században Yang Hui (1238–1298) bemutatta a számtani háromszöget, amely azonos volt a Pascal-háromszöggel. A háromszöget Kínában „Yang Hui-háromszög” néven ismerik.

Olaszországban „Tartaglia-háromszög” a neve, Niccolò Tartaglia matematikusról, aki egy évszázaddal Pascal előtt élt. Tartagliának tulajdonítják a harmadfokú egyenlet megoldását, mint arról már 10. osztályban írtunk.

1655-ben Blaise Pascal (3.12. ábra) a *Traité du triangle arithmétique* című értekezésében összegyűjtötte a háromszögre vonatkozó akkor ismert adatokat és valószínűség-számítási feladatok megoldására használta. A háromszöget utóbb Pierre Raymond de Montmort (1708) és Abraham de Moivre (1730) nevezte el Pascaltól.

Forrás: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Pascal-háromszög>



Vegyük észre, hogy a Pascal-háromszög szimmetrikus az 1, 2, 6, 20 számok által meghatározott képzeletbeli egyenesre, valamint bármely 1-től különböző elem a felette álló két szám összege, és az azonos sorban álló számok összege minden esetben kettőhatvány!

Az alábbiakban kombinatorikai úton vizsgáljuk meg ezt a három tulajdonságot!



5. példa

Mutassuk meg kombinatorikai úton, hogy $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$!

Megoldás:

A $\binom{6}{2}$ megadja egy hatelemű halmaz kételemű részhalmazainak a számát. Amikor egy hatelemű halmazból kiválasztunk egy kételemű részhalmazt, akkor a megmaradt elemek egy négyelemű részhalmazt alkotnak. Mivel a kételemű részhalmazok páronként különbözőek, így

圖方 乘七 法古



3.11. ábra Yang Hui-háromszög a XIII. századból



3.12. ábra Blaise Pascal (1623–1662)



3.13. ábra A hat üvegből kettőben kavicsok vannak

Legyen adott az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz! A halmaz két-, illetve négyelemű részhalmazainak párba állítását az alábbi táblázat mutatja.

Választott	Megmaradt
$\{a, b\}$	$\{c, d, e, f\}$
$\{a, c\}$	$\{b, d, e, f\}$
$\{a, d\}$	$\{b, c, e, f\}$
$\{a, e\}$	$\{b, c, d, f\}$
$\{a, f\}$	$\{b, c, d, e\}$
$\{b, c\}$	$\{a, d, e, f\}$
$\{b, d\}$	$\{a, c, e, f\}$
$\{b, e\}$	$\{a, c, d, f\}$
$\{b, f\}$	$\{a, c, d, e\}$
$\{c, d\}$	$\{a, b, e, f\}$
$\{c, e\}$	$\{a, b, d, f\}$
$\{c, f\}$	$\{a, b, d, e\}$
$\{d, e\}$	$\{a, b, c, f\}$
$\{d, f\}$	$\{a, b, c, e\}$
$\{e, f\}$	$\{a, b, c, d\}$

3.14. ábra Egy hatelemű halmaz kettő- és négyelemű párba állított részhalmazai

a négyelemű részhalmazokra is ez áll fenn. Bármely kételemű részhalmazhoz pontosan egy négyelemű részhalmaz tartozik és viszont (3.14. ábra). Így kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés hozható létre a kételemű részhalmazok és a négyelemű részhalmazok között, tehát párba állítottuk azokat, így számuk egyenlő. Mivel a négyelemű részhalmazok száma $\binom{6}{4}$, ezért $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$. Ezt kellett bizonyítani.



Az előző feladat megoldása alapján az alábbi tétel már könnyen bizonyítható kombinatorikai úton.



Tétel

Legyen $n, k \in \mathbb{N}$ és $k \leq n$! Ekkor $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.



6. példa

Mutassuk meg kombinatorikai úton, hogy

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}!$$

Megoldás:

A $\binom{6}{4}$ megadja egy hatelemű halmaz négyelemű részhalmazainak a számát. Legyen a hatelemű halmaz az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz! Az A halmaz négyelemű részhalmazait két csoportba osztjuk. Az egyikben legyenek azok, amelyeknek nem eleme az f , a másikban azok, amelyek elemei között megtalálható az f . Minden részhalmaz pontosan az egyik csoportban szerepel, így a két csoportban levő halmazok számának összege $\binom{6}{4}$ (3.15. ábra).

Az első csoportban levő részhalmazok száma $\binom{5}{3}$, hiszen az f mellé még ennyiféleképpen választhatunk 3 elemet a megmaradt 5 elemből.

A második csoportban levő részhalmazok száma $\binom{5}{4}$, hiszen az f -et elhagyva ötelemű halmazból kell négyelemű részhalmazokat kiválasztani.

Tehát $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$. Ezt kellett belátni.



Ezzel a gondolatmenettel bizonyítható kombinatorikai úton az alábbi tétel.



Tétel Legyen $n, k \in \mathbb{N}$ és $k \leq n-1$!

$$\text{Ekkor } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$



7. példa Lássuk be kombinatorikai úton, hogy egy hatelemű halmaz részhalmazainak száma 2^6 !

Megoldás:

Legyen a hatelemű halmaz az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz. Az A halmaz egy eleme vagy szerepel egy adott részhalmazban vagy nem. Ha szerepel benne, akkor írunk alá egy 1-et, ha nem szerepel, akkor 0-t. Így kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést hozhatunk létre a 0-kból és 1-esekből álló hathosszúságú jelsorozatok és a hatelemű halmaz részhalmazai között. Kételemű részhalmazok esetén a hozzárendelést a 3.16. ábra mutatja. Tehát párba állítottuk a hatelemű halmaz részhalmazait és a hat jelből álló 0-kat vagy 1-eseket tartalmazó jelsorozatokat, így a hatelemű halmaz részhalmazainak a száma egyenlő a jelsorozatok számával, ami nyilván 2^6 .



Ugyanezzel a gondolatmenettel bizonyíthatjuk az alábbi tételt, mellyel már 9. osztályban is foglalkoztunk.



Tétel Egy n elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n .

Ezt felhasználva már könnyen megoldhatjuk az alábbi feladatot.



8. példa Bizonyítsuk be, hogy a Pascal-háromszög hetedik sorában levő elemek összege 2^6 !

Megoldás:

A Pascal-háromszög hetedik sorában levő elemek $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}$ és $\binom{6}{6}$, amelyeknek az összege megadja a hatelemű halmaz

Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz f -et tartalmazó négyelemű részhalmazai:

$\{a, b, c, f\}; \{a, b, d, f\};$

$\{a, c, d, f\}; \{b, c, d, f\};$

$\{a, b, e, f\}; \{a, c, e, f\};$

$\{a, c, e, f\}; \{b, c, e, f\};$

$\{b, d, e, f\}; \{a, d, e, f\}.$

Ezek száma $\binom{5}{3} = 10$.

Az $\{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz f -et nem tartalmazó négyelemű részhalmazai:

$\{a, b, c, d\}; \{a, b, c, e\};$

$\{a, b, d, e\}; \{a, c, d, e\};$

$\{b, c, d, e\}.$

Ezek száma $\binom{5}{4} = 5$.

3.15. ábra Így gondolkodunk

	$\{a, b, c, d, e, f\}$
$\{a, b\}$	1, 1, 0, 0, 0, 0
$\{a, c\}$	1, 0, 1, 0, 0, 0
$\{a, d\}$	1, 0, 0, 1, 0, 0
$\{a, e\}$	1, 0, 0, 0, 1, 0
$\{a, f\}$	1, 0, 0, 0, 0, 1
$\{b, c\}$	0, 1, 1, 0, 0, 0
$\{b, d\}$	0, 1, 0, 1, 0, 0
$\{b, e\}$	0, 1, 0, 0, 1, 0
$\{b, f\}$	0, 1, 0, 0, 0, 1
$\{c, d\}$	0, 0, 1, 1, 0, 0
$\{c, e\}$	0, 0, 1, 0, 1, 0
$\{c, f\}$	0, 0, 1, 0, 0, 1
$\{d, e\}$	0, 0, 0, 1, 1, 0
$\{d, f\}$	0, 0, 0, 1, 0, 1
$\{e, f\}$	0, 0, 0, 0, 1, 1

3.16. ábra Kételemű részhalmazok

$$\begin{aligned} \binom{0}{0} &= 2^0 \\ \binom{1}{0} + \binom{1}{1} &= 2^1 \\ \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} &= 2^2 \\ \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} &= 2^3 \\ \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} &= 2^4 \\ \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} &= 2^5 \\ \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} &= 2^6 \end{aligned}$$

3.17. ábra A Pascal-háromszög soraiban levő számok összege



3.18. ábra Emlékeztető 9. osztályból

$(a+b)^1$	1 ; 1
$(a+b)^2$	1 ; 2 ; 1
$(a+b)^3$	1 ; 3 ; 3 ; 1
$(a+b)^4$	1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1
$(a+b)^5$	1 ; 5 ; 10 ; 10 ; 5 ; 1

3.19. ábra Kéttagúak hatványainak együtthatói

összes részhalmazainak számát. Erről az előző feladatban már láttuk, hogy 2^6 (3.17. ábra).



Ezt általánosan is megfogalmazhatjuk.



Tétel A Pascal-háromszög n -edik sorában levő elemek összege 2^{n-1} .

Már 9. osztályban foglalkoztunk kéttagú összegek második és harmadik hatványával. Ez alapján tudjuk, hogy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ és $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.



9. példa Az előző eredményeket felhasználva számítsuk ki az alábbi hatványokat:

a) $(a+b)^4$; b) $(a+b)^5$!

Megoldás:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (a+b)^4 &= (a+b)^2 \cdot (a+b)^2 = \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (a+b)^5 &= (a+b)^3 \cdot (a+b)^2 = \\ &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5. \end{aligned}$$



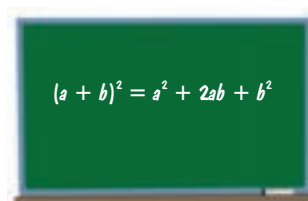
Írjuk le a kéttagú összegek hatványai mellé a megfelelő együtthatókat (3.19. ábra)!



Vegyük észre, hogy a kéttagú összegek (**binom**) hatványozásakor kapott polinomban szereplő együtthatók a Pascal-háromszög megfelelő sorában szereplő binomiális együtthatók. Ez alapján megfogalmazhatjuk az úgynevezett **binomiális tételt**, melynek bizonyítását most mellőzzük.

**Tétel**Ha n pozitív egész szám, akkor

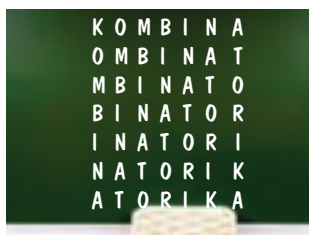
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

**3.20. ábra** $n = 2$ esetén

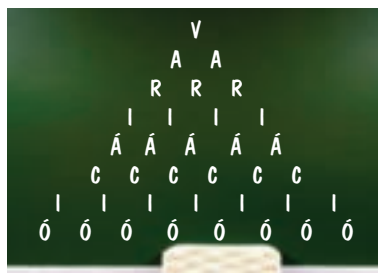
Ez a tétel indokolja a binomiális együttható elnevezést.

**Oldjuk meg!**

1. Hányféleképpen olvashatjuk ki a 3.21. táblázatból a kombinatorika szót, ha csak jobbra, illetve lefelé haladhatunk?

**3.21. ábra** Kombinatorika

2. Hányféleképpen olvashatjuk ki a 3.22. táblázatból a variáció szót, ha csak jobbra lefelé vagy balra lefelé haladhatunk?

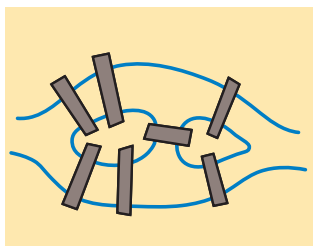
**3.22. ábra** Variáció

3. Hányféleképpen juthat el egy bolha a koordináta-rendszer origójából a $P(6;4)$ koordinátájú pontba, ha minden ugrása egy egység hosszú, és csak az x tengely vagy az y tengely pozitív irányába ugorhat?
4. Az előző feltételek mellett összesen hányféleképpen juthat el a bolha az $y + x = 8$ egyenletű egyenes első negyedbe eső rácspontjaira?

5. Számítsuk ki az alábbi hatványokat a Pascal-háromszög felhasználásával!

- a) $(x+1)^5$;
 b) $(a-2)^4$;
 c) $(a+b)^6$;
 d) $(x-1)^6$.

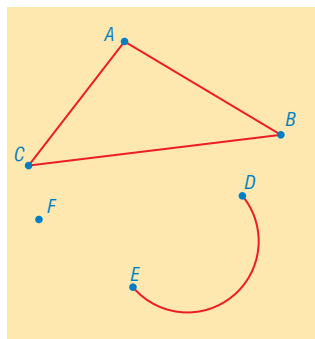
4. Gráfelméleti alapismeretek



4.1. ábra Königsbergi hidak



4.2. ábra Hatfős társaság



4.3. ábra Ez egy jó társaság

Már 10. osztályban foglalkoztunk néhány gondolat erejéig gráfokkal. Most felelevenítjük az ott tanultakat, és néhány gráfelméleti ismerettel bővítjük tudásunkat.



A gráfelmélet a matematika viszonylag fiatal ága. A gráfokkal kapcsolatos problémákkal először Leonhard Euler (1707–1783) foglalkozott. 1736-ban jelent meg az a dolgozata, melyben a königsbergi hidak néven ismertté vált feladatot tárgyalta. Sokáig úgy tűnt, hogy az ilyen jellegű problémák nem túlságosan jelentősek. A XIX. század végén, a XX. század elején a gráfelméletnek sok gyakorlati alkalmazását ismerték fel. Az első tudományos színvonalú gráfelméleti könyvet Kőnig Dénes (1884–1944) magyar matematikus írta 1936-ban. Világviszonylatban is sokáig ez mű volt az egyetlen komoly munka ezen a tudományterületen. A XXI. században már nagyon sok tudományban alkalmazzák a gráfelmélet eredményeit, ilyen területek a villamos, közlekedési és számítógépes hálózatok tervezése, térképszínezési problémák, logisztika, nyelvészet és genetika. Sok magyar matematikus ért el világszínvonalú eredményeket a gráfokkal kapcsolatos kutatásokban, például Gallai Tibor (1912–1992), Erdős Pál (1913–1996), Rényi Alfréd (1921–1970), Lovász László (1948–) és Pósa Lajos (1947–).

Már 10. osztályban is a gyakorlati életből vett problémákon keresztül ismerkedtünk meg a gráfelmélet alapvető definícióival. Nézzünk most is néhány olyan problémát, amely szorosan kötődik a hétköznapi élet-hez!



1. példa Létezik-e olyan hatfős társaság, melyben hárman két-két embert, ketten egy-egy embert ismernek a jelenlevők közül, míg van köztük olyan, aki senkit sem ismer? (Az ismeretség kölcsönös, akárcsak a többi hasonló feladatban.)

Megoldás:

Készítsünk matematikai modellt! Az embereknek feleltessünk meg a síkon pontokat, az ismeretséget szemléltessük a pontokat összekötő vonalakkal, azaz két pontot vonallal kötünk össze, ha a nekik megfelelő emberek ismerik egymást. Ezzel létrehoztunk egy **gráfot**. Készítsünk ábrát! A pontokat összekötő vonalaknak nem feltétlenül kell szakaszoknak lenniük.

A 4.3. ábra is mutatja, hogy ilyen hatfős társaság létezik.

Definíció

Ha felvesszünk pontokat, majd ezek közül néhányat összekötünk vonallal, a vonalak alakjára nem vagyunk tekintettel, akkor az így kapott ábrát **gráfnak** nevezzük. A pontok a **gráf pontjai** vagy **csúcsai**, a vonalak a **gráf élei**. Ha a gráf csúcsainak a száma véges, akkor **véges gráfról** beszélünk.

A feladatban szereplő ábrán az A , B és C csúcsokból két-két él indul, míg a D és E csúcsokból egy-egy él, az F -ből pedig egy sem. Ekkor azt mondjuk, hogy az A , B és C **csúcsok fokszáma** 2, míg a D és E csúcsoké 1, az F ponté pedig 0.

Definíció

A gráfban az egy csúcsból kiinduló élek számát a csúcs **fokszámának** nevezzük. Azt a csúcsot, amelynek fokszáma 0, **izolált** (elkülönített) **csúcsnak** hívjuk (4.5. ábra).

2. példa

Létezik-e olyan négytagú társaság, amelyben egy embernek három ismerőse van, egy embernek kettő, egynek egy, a negyediknek pedig egy sem?

Megoldás:

Ilyen társaság nem létezhet, mert akinek három ismerőse van az ismer mindenkit, így nem fordulhat elő, hogy valakinek ne legyen ismerőse a társaságban, hisz az ismeretség kölcsönös (4.6. ábra).

3. példa

Létezik-e olyan úthálózat négy település között, hogy az egyikből két út indul ki, kettőből három, a negyediket a másik három közül pedig egyvel sem köti össze közvetlen út?

Megoldás:

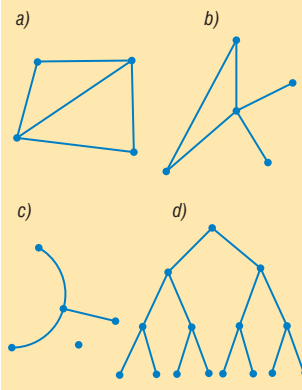
Igen, létezik, ahogy a 4.7. ábrán is látható!



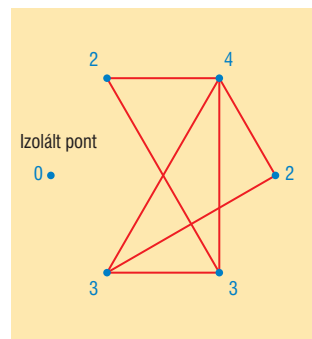
A harmadik példa megoldásában olyan gráf volt a matematikai modell, amelyben két pontot két éllel kötöttünk össze. Az ilyen élt **többszörös élnek** nevezzük.

Definíció

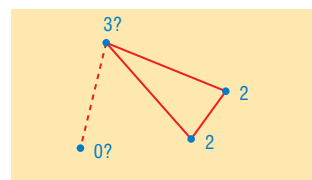
Ha egy gráf két csúcsát több él is összeköti, akkor a két csúcs közötti **többszörös élről** vagy **párhuzamos élekről** beszélünk.



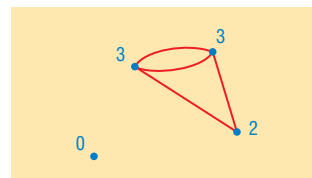
4.4. ábra Gráfok



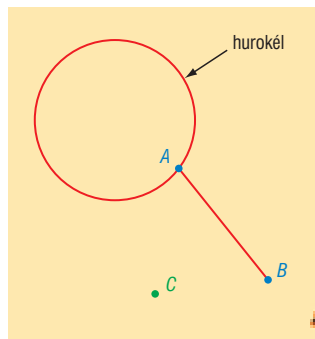
4.5. ábra Gráf izolált ponttal



4.6. ábra A keresett gráf nem létezik



4.7. ábra A keresett gráf



4.8. ábra A 4. példa ábrája

4. példa Létezik-e olyan háromcsúcsú gráf, amelyben a csúcsok fokszáma 0, 1, 3?

Megoldás:

Igen, létezik, ahogy a 4.8. ábrán is látható!



A 4.8. ábrán szereplő gráfnak van olyan csúcsa, amelyből kiinduló él ugyanebbe pontba érkezik. Az ilyen élt **hurokélnek** nevezzük.

Definíció Ha egy él két végpontja azonos, akkor **hurokélnek** nevezzük. A hurokél a csúcs fokszámát kettővel növeli.

Az első példában olyan gráf szerepelt, amelyben nem volt sem párhuzamos él, sem hurokél. Az ilyen gráfok nagyon fontos szerepet töltenek be a gráfelméletben.



4.9. ábra Sakkozó iskolások

Definíció Ha egy gráf nem tartalmaz sem hurokél, sem párhuzamos éleket, akkor **egyszerű gráfnak** nevezzük. Szokás ezt a gráfot **ismeretségi gráfnak** is nevezni.

5. példa Egy iskola sakkbajnokságán 15 fő vesz részt. Mindenki mindenkiel egyszer játszik. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

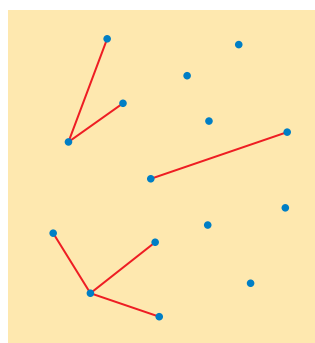
- Van olyan időpillanat a bajnokság során, amikor mindenki pontosan három játszmán van túl.
- A mérkőzés bármely időpillanatában van két olyan sakkozó, aki azonos számú játszmát játszott.

Megoldás:

A körmérkőzéses problémák szemléltetésére legalkalmasabb matematikai modell a gráf. A sakkozóknak feleltessük meg egy tizenötcsúcsú gráf pontjait! Ebben éllel kötjük össze azokat a csúcsokat, melyekhez tartozó diákok már játszottak egymással a bajnokság során. Mivel a bajnokságban mindenki mindenkiel egyszer játszik, ezért a matematikai modell egyszerű gráf.

a) Fogalmazzuk meg a feladatot a gráfelmélet nyelvén!

Az a kérdés, hogy létezik-e olyan tizenötcsúcsú egyszerű gráf, amelyben minden csúcs foka három.



4.10. ábra Tizenötcsúcsú egyszerű gráf

Adjuk össze a csúcsok fokszámát! A kapott összeg $15 \cdot 3 = 45$. Mivel minden élhez két csúcs tartozik, így minden élt kétszer számoltunk, tehát ez egyenlő az élek számának a kétszeresével, így páros számnak kellene lennie. Ellentmondásra jutottunk, így az állítás nem igaz, azaz belátjuk, hogy nincsen olyan gráf, amelyben minden fokszám 3, így nem lehet olyan pillanat sem, hogy mindenki háromszor játszott.

Kihasználtuk valahol, hogy a modell egyszerű gráf?

b) Fogalmazzuk meg ennek a feladatnak is a gráfelméleti megfelelőjét!

Bármely tizenötcsúcús egyszerű gráfban van két olyan csúcs, amelynek a fokszáma azonos. Ezzel a problémával már 10. osztályban is találkozottunk. Most elevenítsük fel az ott alkalmazott gondolatmenetet!

Bármelyik csúcst is tekintjük, azt 0, vagy 1, vagy 2, ... vagy 14 másik ponttal köthetjük össze. Ha van olyan csúcs, melyet egyikkel sem kötöttünk össze, akkor nem lehet köztük olyan, melyet 14 másikkal kötöttünk össze. Így a fokszámok vagy a 0, 1, 2, ..., 13 értékeket vehetik fel, vagy az 1, 2, 3, ..., 14 értékeket. Ez mindkét esetben 14 lehetőséget jelent. Ezeket tekintjük egy-egy skatulyának, a 15 darab csúcst pedig a bennük elhelyezendő tárgyaknak. Ekkor a skatulya-elv alapján lesz legalább két olyan csúcs, amelynek azonos a fokszáma.

Tehát az állítás igaz.

Kihasználtuk valahol, hogy a modell egyszerű gráf?



4.11. ábra A skatulya-elv sok probléma megoldásában segít



Az előző feladattal két nagyon fontos gráfelméleti tételre világítottunk rá.

Az a) rész megoldásában sehol sem használtuk ki, hogy a matematikai modell egyszerű gráf volt. Csak az volt fontos, hogy bármely élnek két végpontja van. A gráf éleinek számára vonatkozó alábbi tétel bármely gráfban igaz. Ezt szokás **fokszámtételnek** is nevezni.



Tétel Bármely véges gráfban a csúcsok fokszámának összege egyenlő az élek számának kétszeresével.

A fokszámtétel egyszerű következménye az alábbi tétel.



Tétel Bármely véges gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.

Ha megnézzük a 3. példában szereplő gráfot, akkor láthatjuk, hogy az előző feladat b) részében már fontos volt, hogy a matematikai modell egyszerű gráf. Az ezzel kapcsolatos tétel a következőképpen fogalmazható meg.



4.12. ábra Fokszámtétel



4.13. ábra Gondolkodtató játék



Tétel Bármely egyszerű gráfban mindig van két olyan csúcs, melynek fokszáma azonos.



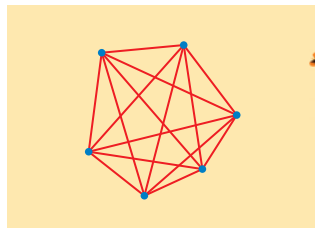
6. példa Az 5. példában szereplő bajnokságban összesen hány játszmat játszanak le a sakkozók a bajnokság végéig?

Megoldás:

Mivel mindenki mindenkivel egyszer játszik, ezért két sakkozóhoz pontosan egy játszma tartozik. Bármely sakkozó 14 másikkal játszik, így az előző megállapítás miatt a játszmák száma $\frac{14 \cdot 15}{2} = 105$.



A bajnokság végső állapotát modellező egyszerű gráfban minden élt be kell húzni. Ekkor egy **teljes gráf**ot kapunk.



4.14. ábra Hatcsúcsú teljes gráf



Definíció Az olyan egyszerű gráfot, melynek bármely két csúcsát él köti össze, **teljes gráfnak** nevezzük.

A 6. példa alapján már könnyen bizonyítható az alábbi tétel.



Tétel Egy n csúcsú teljes gráf éleinek a száma $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.



7. példa Egy 7 fős társaság találkozón vett részt. Lehetséges-e, hogy a találkozó elején az ismeretségek száma
a) 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5; b) 0, 2, 2, 2, 3, 4, 6; c) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5 volt?

Megoldás:

- a) Mivel a feladathoz tartozó ismeretségi (egyszerű) gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páratlan, ezért ez nem lehetséges.
- b) Mivel az ismeretségi (egyszerű) gráfnak lenne olyan csúcsa, amely hatodfokú, azaz az összes többivel össze van kötve, és olyan csúcsa is, amely nulladfokú, azaz egyetlen csúccsal sincs összekötve, ezért ez sem lehetséges.
- c) Ez lehetséges, lásd a 4.16. ábrát!



4.15. ábra A társaság



8. példa Az előző példa c) részében szereplő társaságban a találkozó végén már mindenki ismert mindenkit. Hány új ismeretséget kötöttek? Ábrázoljuk az új ismeretségek gráfját!

Megoldás:

Az új ismeretségek számát megkapjuk, ha az összes ismeretség számából kivonjuk a találkozó elején meglévő ismeretségek számát.

Mivel az összes ismeretség száma $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$, és a találkozó elején

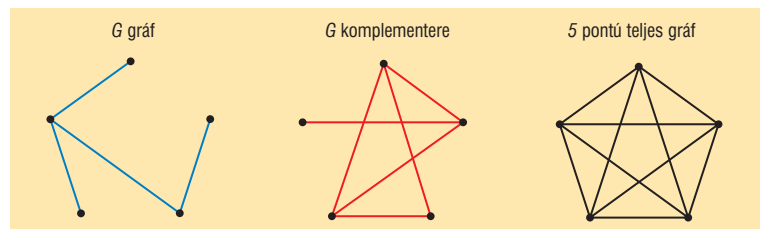
meglévő ismeretségek száma $\frac{1+1+2+2+2+3+5}{2} = 8$ volt, így az új ismeretségek száma $21 - 8 = 13$.

Az új ismeretségek gráfját a 4.17. ábra mutatja. Könnyen elkészíthetjük, ha meggondoljuk, hogy ebben a gráfban pontosan azok a csúcsok vannak összekötve, melyek a 7. feladat c) részében szereplő gráfban nem voltak. Ez a gráf az előző gráf **komplementere**.



Definíció Ha két egyszerű gráf csúcsai azonosak, de az egyik gráfban pontosan azok a csúcsok vannak összekötve, melyek a másikban nincsenek, akkor a két gráfot egymás **komplementerének** nevezzük.

Ebből következik, hogy egy egyszerű gráfot a komplementere teljes gráffá egészíti ki.



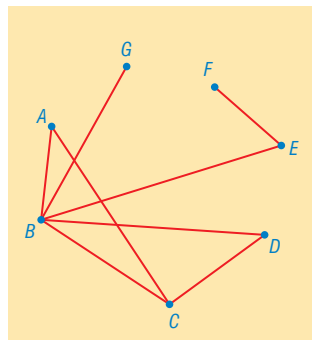
4.18. ábra Komplementer



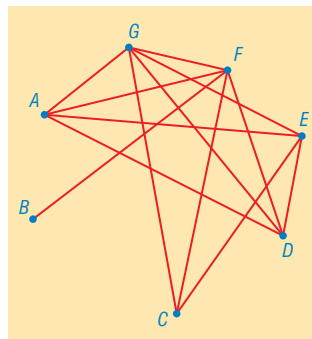
9. példa Egy tizenkétcsúcsú egyszerű gráfnak fele annyi éle van, mint komplementerének. Hány éle van a gráfnak?

Megoldás:

Mivel egy egyszerű gráfot a komplementere teljes gráffá egészít ki, ezért az éleik számának az összege $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$. Mivel a gráf éleinek száma fele a komplementere élei számának, ezért a gráf éleinek száma $\frac{66}{3} = 22$.



4.16. ábra A 7. példa c) részének ábrája



4.17. ábra Az új ismeretségek



4.19. ábra A két fél komplementer módon egészíti ki egymást

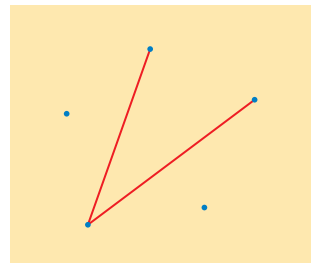


Oldjuk meg!

1. A 4.20. ábrán öt települést tüntettünk fel. Úgy kell négy szakaszból álló úthálózatot építeni, hogy minden településből el lehessen jutni bármelyik másikba és legyen olyan település, amelyből három út vezet ki.
2. Létezik-e olyan ötcsúcsú gráf, amelyben a csúcsok fokszáma 0, 1, 2, 3, 4?
3. Létezik-e olyan ötfős társaság, amelyben az ismeretségi számok 0, 1, 2, 3, 4?
4. Létezik-e olyan hatfős társaság, amelyben az ismeretségi számok
 - a) 1, 1, 2, 3, 3, 3;
 - b) 0, 1, 2, 2, 4, 5;
 - c) 1, 1, 1, 2, 4, 5;
 - d) 1, 2, 2, 2, 4, 5?

Ha igen, akkor rajzoljuk meg az ismeretségi gráfját!

5. Egy 10 fős baráti társaságban mindenki mindenkivel kezét fogott. Hány kézfogás volt összesen?
6. Tizenhárom csapat egyfordulós körmérkőzéses bajnokságot játszik. Negyvenkét mérkőzést már lejátszottak. Hány mérkőzés van még hátra?
7. Egy iskola sakkbajnokságán András, Béla, Csaba, Dénes és Elemér egyfordulós körmérkőzéses rendszerben játszik egymással. András már játszott Csabával és Bélával. Béla játszott Elemérrel és Elemér játszott Dénessel.
 - a) Szemléltessük gráfon a feladatnak megfelelő állapotot!
 - b) Hány játszmat kell még játszaniuk?
 - c) Hány pontot gyűjthet még András, ha a győzelemért 1, a döntetlenért 0,5 és a vereségért 0 pont jár? (Adjuk meg az összes lehetőséget!)
8. Egy ötcsúcsú gráfban két csúcs fokszáma 3, és három csúcsé 2. Rajzoljunk fel ilyen gráfot! Rajzoljuk meg a komplementer gráfját!
9. Igaz-e, hogy egy hatfős társaságban mindig van két olyan ember, akik ugyanannyi embert nem ismernek a társaságból?
10. Kovács úr és felesége összejövetelet szervezett, ahova meghívott három házaspárt. Akik nem ismerték egymást, bemutatkoztak egymásnak. Kovács úr megállapította, hogy önmagát nem számítva nincs két olyan ember a társaságban, aki ugyanannyiszor mutatkozott be. Hányan mutatkoztak be Kovácsnének?



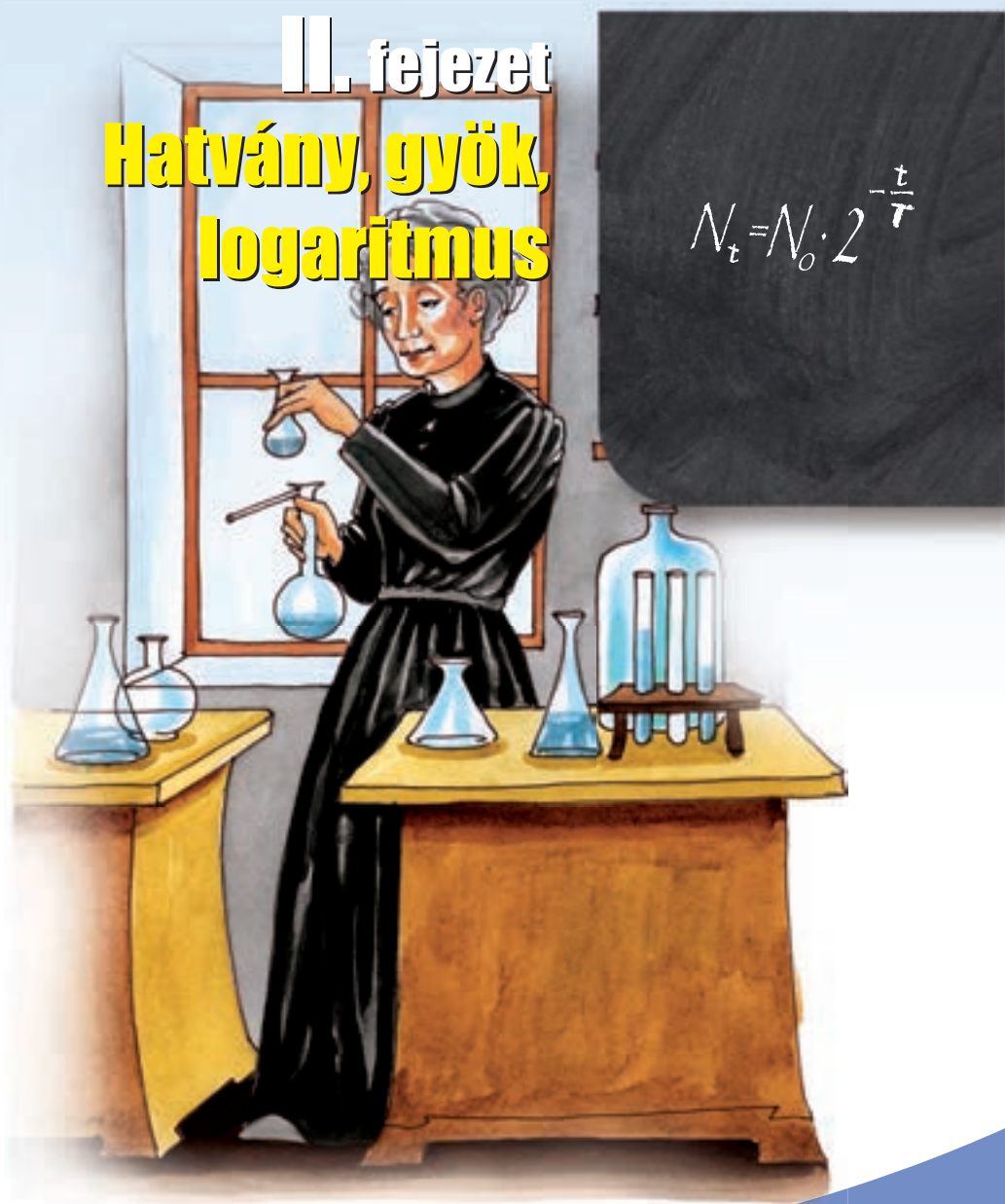
4.20. ábra Vázlatos rajz



4.21. ábra Kovács úr és a felesége

II. fejezet

Hatvány, gyök, logaritmus



1898: 200 mg rádium. Most mennyi van belőle?



1. Az egész kitevőjű hatvány és az n -edik gyök (ismétlés)

1.1. Az egész kitevőjű hatvány



1.1. ábra Területszámítás kerületből

A hatványfogalom felépítését 9. osztályban a pozitív egész kitevőjű hatvány fogalmával kezdtük. Az erre adott meghatározás a hétköznapi életben előforduló problémák (terület- és térfogatszámítás) alapján teljesen természetesnek tűnik (1.1. ábra). Ennek felhasználásával könnyen tudtuk bizonyítani a hatványozás azonosságait. Majd kiterjesztettük a hatványfogalmat 0, illetve negatív egész kitevőre is. A definíciók megfogalmazásánál azt tartottuk szem előtt, hogy a pozitív egész kitevőre bizonyított azonosságok bővebb kitevőhalmaz esetén is érvényben maradjanak. Ezt az elvárást nevezzük **permanenciaelvnek** (1.2. ábra).

Az alábbiakban röviden áttekintjük a négyféle kitevőre külön-külön megfogalmazott definíciókat és az eddigi kitevőhalmazban érvényes azonosságokat.



1.2. ábra A permanenciaelv értelmében az azonosságok bővebb kitevőhalmaz esetén is érvényben maradnak

Definíció

- $a^1 = a$;
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db tényező}}$, ahol $n \in (\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\})$;
- $a^0 = 1$, ahol $a \neq 0$;
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ahol $a \neq 0$ és $n \in \mathbb{Z}^+$.

Az alábbi kifejezések értelmezési tartománya a fenti definíciókban megfogalmazottaknak megfelelő, ha ettől eltérés van, akkor azt külön jelezzük.



1.3. ábra Hogy is volt?

A hatványozás azonosságai:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (azonos alapú hatványok szorzása);
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a \neq 0$ (azonos alapú hatványok osztása);
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (hatvány hatványozása);
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (szorzat hatványozása);
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$ (tört hatványozása).

Az alábbiakban nézzünk egy példát ezek alkalmazására!



1. példa A hatványozás azonosságainak felhasználásával számítsuk ki az alábbi kifejezések pontos értékét!

a) $\frac{3^6 \cdot 11^{12} \cdot (5 \cdot 7)^4 \left(\frac{2}{5^2 \cdot 7^2}\right)^2}{(3^2 \cdot 11^4)^3}$;

b) $\frac{(3^{-2})^2 \cdot (3^{-4})^{-2} \cdot (2^{-2})^{-4} \cdot 2^0 \cdot \left(\frac{1}{5^2}\right)^{-4}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot (5^{-3})^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 5^{-1} \cdot \left(\frac{1}{5^2}\right)^{-4}}$.

Megoldás:

a) A megoldásban emlékeztetőül leírjuk, hogy melyik lépésnél melyik azonosságot alkalmazzuk.

$$\begin{aligned} \frac{3^6 \cdot 11^{12} \cdot (5 \cdot 7)^4 \left(\frac{2}{5^2 \cdot 7^2}\right)^2}{(3^2 \cdot 11^4)^3} &= \frac{3^6 \cdot 11^{12} \cdot 5^4 \cdot 7^4}{(3^2)^3 \cdot (11^4)^3} \cdot \frac{2^2}{(5^2)^2 \cdot (7^2)^2} = \\ &= \frac{3^6 \cdot 11^{12} \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 2^2}{3^6 \cdot 11^{12} \cdot 5^4 \cdot 7^4} = 4. \end{aligned}$$

4. és 5. azonosság

3. azonosság

2. azonosság

b) Alkalmazzuk a negatív egész kitevőjű hatvány definícióját és a hatványozás azonosságait!

$$\begin{aligned} \frac{(3^{-2})^2 \cdot (3^{-4})^{-2} \cdot (2^{-2})^{-4} \cdot 2^0 \cdot \left(\frac{1}{5^2}\right)^{-4}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot (5^{-3})^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 5^{-1} \cdot \left(\frac{1}{5^2}\right)^{-4}} &= \frac{3^{-4} \cdot 3^8 \cdot 2^8 \cdot 1 \cdot (5^{-2})^{-4}}{3^4 \cdot 5^9 \cdot 2^8 \cdot 5^{-1} \cdot (5^{-2})^{-4}} = \\ &= \frac{3^4 \cdot 2^8 \cdot 5^8}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 5^8} = 1. \end{aligned}$$



1.4. ábra Azonosság? Majdnem!



1.5. ábra Használjuk fel újra korábbi ismereteinket!



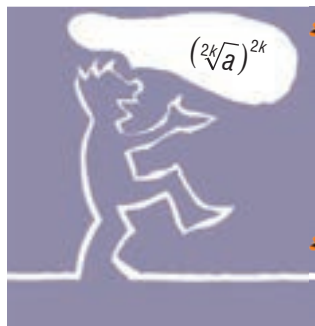
1.6. ábra De jó, hogy megtanultam az azonosságokat!

1.2. Az n -edik gyök

10. osztályban értelmeztük az n -edik gyök fogalmát is. Az egyértelműség mellett figyelembe vettük, hogy páros gyökkitevő esetén a gyökjel alatt csak nemnegatív valós szám állhat, míg páratlan gyökkitevő esetén a művelet bármely valós számra értelmezhető. Ez alapján a definíció a következő.



Hatvány, gyök, logaritmus



1.7. ábra Figyeljünk a gyökkitevőre!



1.8. ábra Idézzük fel a tanult azonosságokat



1.9. ábra Melyik nagyobb?



Definíció Egy a nemnegatív valós szám **$2k$ -adik** ($k \in \mathbb{Z}^+$) **gyöke** az a nemnegatív valós szám, amelynek $2k$ -adik hatványa a .
Jelekkel leírva: $(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$, ahol $a \geq 0$ és $\sqrt[2k]{a} \geq 0$.



Definíció Egy a valós szám $2k+1$ -edik ($k \in \mathbb{Z}^+$) **gyöke** az a valós szám, amelynek $2k+1$ -edik hatványa a . Jelekkel leírva: $(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$.

A definíció alapján bebizonyítottuk az n -edik gyök azonosságait, melyek az alábbiak. Az egyes kifejezések értelmezési tartománya a definíciókban megfogalmazottaknak megfelelő, az ettől eltérőket külön jelezzük.



Az n -edik gyök azonosságai:

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (szorzat n -edik gyöke);
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $b \neq 0$ (hányados n -edik gyöke);
- $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ (hatvány n -edik gyöke);
- $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$ $a \geq 0$ (k -adik gyök n -edik gyöke).

Az alábbiakban nézzünk néhány példát ezek alkalmazására!



2. példa Melyik nagyobb?

- a) $\sqrt[4]{(10-\sqrt{19})} \sqrt[4]{(10+\sqrt{19})}$ vagy $\frac{\sqrt[3]{(8+\sqrt{37})^2(8-\sqrt{37})}}{\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}}$;
- b) $\sqrt[3]{32^4} \cdot \sqrt[4]{16^{-3}}$ vagy $\sqrt[3]{729}$.

Megoldás:

a) Alakítsuk át az n -edik gyök első két azonosságának és definíciójának felhasználásával az egyes kifejezéseket!

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{(10-\sqrt{19})} \sqrt[4]{(10+\sqrt{19})} &= \sqrt[4]{(10-\sqrt{19}) \cdot (10+\sqrt{19})} = \\ &= \sqrt[4]{10^2 - (\sqrt{19})^2} = \sqrt[4]{100-19} = \sqrt[4]{81} = 3; \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt[3]{(8+\sqrt{37})^2(8-\sqrt{37})}}{\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}} = \sqrt[3]{\frac{(8+\sqrt{37})^2(8-\sqrt{37})}{8+\sqrt{37}}} =$$

$$= \sqrt[3]{(8+\sqrt{37})(8-\sqrt{37})} = \sqrt[3]{8^2 - (\sqrt{37})^2} = \sqrt[3]{64-37} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Tehát a kettő egyenlő.

b) Ebben a feladatban az n -edik gyök definíciója mellett a 3. és 4. azonosságot alkalmazzuk a kifejezések átalakításánál.

$$\sqrt[5]{32^4} \cdot \sqrt[4]{16^{-3}} = (\sqrt[5]{32})^4 (\sqrt[4]{16})^{-3} = 2^4 \cdot 2^{-3} = 2;$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{3^6} = 3.$$

$$\text{Így } \sqrt[5]{32^4} \cdot \sqrt[4]{16^{-3}} < \sqrt{\sqrt[3]{729}}.$$



3. példa Adjuk meg egyetlen racionális számként!

$$\sqrt[3]{8^5} + 4\sqrt[4]{\left(\frac{1}{81}\right)^{-3}} - \sqrt[7]{128^6}.$$

Megoldás:

Az n -edik gyök harmadik azonossága alapján számoljuk ki az egyes tagok pontos értékét!

$$\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32;$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{1}{81}\right)^{-3}} = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{81}}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27;$$

$$\sqrt[7]{128^6} = (\sqrt[7]{128})^6 = 2^6 = 64.$$

$$\text{Így } \sqrt[3]{8^5} + 4\sqrt[4]{\left(\frac{1}{81}\right)^{-3}} - \sqrt[7]{128^6} = 32 + 27 - 64 = -5.$$



4. példa Írjuk fel egy gyökjellel!

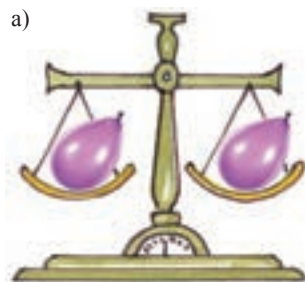
a) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}};$ b) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{3};$ c) $\frac{\sqrt[4]{x}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0).$

Megoldás:

a) Vigyük be a harmadik gyök alá az első 3-at, majd alkalmazzuk az n -edik gyök 4. azonosságát!

$$\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3 \cdot 3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^4}} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3]{3}.$$

b) A gyökkitevők legkisebb közös többszöröse 12. Vigyük be mindkettőt a 12. gyök alá, és közben alkalmazzuk a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságot!



1.10. ábra Egyenlő és nem egyenlő

	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	1	2	3	4	5	6	7	8	...
2	2	4	6	8	10	12	14	16	...
3	3	6	9	12	15	18	21	24	...
4	4	8	12	16	20	24	28	32	...
5	5	10	15	20	25	30	35	40	...
6	6	12	18	24	30	36	42	48	...
7	7	14	21	28	35	42	49	56	...
8	8	16	24	32	40	48	56	64	...

1.11. ábra Pozitív racionális számok



1.12. ábra Ha sok a pénzünk ne aprózzuk el, két kicsi persely helyett gyűjtsük egy nagyobbba!



Hatvány, gyök, logaritmus



1.11. ábra Közös

$$\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{(\sqrt[4]{2})^{12}} = \sqrt[12]{(\sqrt[4]{2})^{4 \cdot 3}} = \sqrt[12]{((\sqrt[4]{2})^4)^3} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8};$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{(\sqrt[3]{3})^{12}} = \sqrt[12]{(\sqrt[3]{3})^{3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{((\sqrt[3]{3})^3)^4} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}.$$

$$\text{Így } \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{2^3} \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{8 \cdot 81} = \sqrt[12]{648}.$$

c) Az előzőhöz hasonló módon keressük meg a közös gyökkitevőt, majd közös gyök alá hozás után alkalmazzuk a szorzat és a hányados n -edik gyökére vonatkozó azonosságot!

A gyökkitevők legkisebb közös többszöröse most is 12.

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt[12]{(\sqrt[4]{x})^{12}} = \sqrt[12]{(\sqrt[4]{x})^{4 \cdot 3}} = \sqrt[12]{((\sqrt[4]{x})^4)^3} = \sqrt[12]{x^3};$$

$$\sqrt{x} = \sqrt[12]{(\sqrt{x})^{12}} = \sqrt[12]{(\sqrt{x})^{2 \cdot 6}} = \sqrt[12]{((\sqrt{x})^2)^6} = \sqrt[12]{x^6};$$

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[12]{(\sqrt[3]{x^2})^{12}} = \sqrt[12]{(\sqrt[3]{x^2})^{3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{((\sqrt[3]{x^2})^3)^4} = \sqrt[12]{(x^2)^4} = \sqrt[12]{x^8}.$$

Így

$$\frac{\sqrt[4]{x} \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[12]{x^3} \sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^8}} = \sqrt[12]{\frac{x^3 x^6}{x^8}} = \sqrt[12]{\frac{x^9}{x^8}} = \sqrt[12]{x}.$$



Oldjuk meg!

1. Adjuk meg egyetlen racionális számként!

a) $\frac{(5^2 \cdot 5^4)^5 \cdot (11^3 \cdot 2^2)^4}{(5^6 \cdot 11^2)^5 \cdot (2^4)^2};$ b) $\left(\frac{2^2}{3^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{(3^5 \cdot 13^3)^3}{(13 \cdot 3)^9}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6;$ c) $(2^2 \cdot 3^{-1})^{-3} \cdot (2^{-4})^{-2} \cdot 3^{-2};$
d) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \cdot 3^{-5} \cdot (11^4 \cdot 3^3)^2 : (3^{-2} \cdot 11^{-4})^{-2};$ e) $\frac{0,01^{-2} \cdot 0,5^{-5}}{0,2^{-4} \cdot 2,5^0}.$

2. Melyik nagyobb?

a) $\frac{0,1^{-3} \cdot 100^{-2} \cdot 0,01^{-2}}{1000^{-2}}$ vagy $\frac{0,001^4 \cdot (10^{-3})^{-3}}{(10^{-1})^2};$
b) $(25 \cdot 49)^{-2} \cdot (7^{-3} \cdot 5^{-2})^{-2}$ vagy $27^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} \cdot (81^{-1})^{-2} \left(\frac{3^{-3}}{2^{-3}}\right)^{-1}.$

3. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{(a \cdot b^3)^4 \cdot (b^5)^3 \cdot a^{10}}{(b^4 \cdot a^2)^6} \quad (a \neq 0, b \neq 0);$ b) $\left(\frac{a^4 \cdot b^2}{c^5}\right)^4 \cdot \left(\frac{c^7}{a^5 \cdot b^2}\right)^3 \quad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0);$
c) $\left(\frac{(x^3 \cdot y^2)^4 \cdot (y^3)^5}{(x^4 \cdot y^4)^3}\right)^2 : \left(\frac{(x^3)^4 \cdot y^5}{(x^6 \cdot y^2)^2}\right)^3 \quad (x \neq 0, y \neq 0);$

d) $(2x^{-2}y^3)^{-3} \cdot (4x^3y^{-2})^{-3} \cdot (2^5)^2 \cdot (xy)^3 \quad (x \neq 0, y \neq 0);$

e) $\frac{(a^{-2} \cdot b^1)^2}{(a^{-6} \cdot b^{-2})^3} \cdot \left(\frac{a^5}{b^{-2}}\right)^{-3} \quad (a \neq 0, b \neq 0).$

4. Számoljuk ki!

a) $\sqrt[5]{243};$ b) $\sqrt[7]{-128};$ c) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}};$ d) $\sqrt[6]{0,000001};$

e) $\sqrt[10]{10000000000};$ f) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}};$ g) $\sqrt[8]{0}.$

5. Adjuk meg egyetlen racionális számként!

a) $\sqrt[8]{243} \cdot \sqrt[8]{27};$ b) $\sqrt[11]{-32} \cdot \sqrt[11]{-64};$ c) $\sqrt[5]{10+2\sqrt{17}} \sqrt[5]{10-2\sqrt{17}};$

d) $\sqrt[4]{13-2\sqrt{22}} \sqrt[4]{13+2\sqrt{22}};$ e) $\frac{\sqrt[5]{160}}{\sqrt[5]{5}};$ f) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}};$ g) $\frac{\sqrt[6]{(9-\sqrt{17})^2(9+\sqrt{17})}}{\sqrt[6]{9-\sqrt{17}}};$

h) $\frac{\sqrt[3]{125^2} \sqrt[4]{16^3}}{\sqrt[10]{1024^3}};$ i) $\sqrt[4]{625^3} \sqrt[5]{32^3} \sqrt[6]{15625^{-3}};$ j) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{4096}}.$

6. Melyik nagyobb?

a) $\sqrt[6]{3}$ vagy $\sqrt[4]{2};$ b) $\sqrt[9]{5}$ vagy $\sqrt[6]{3};$ c) $\sqrt[8]{\frac{3}{2}}$ vagy $\sqrt[12]{2}.$

7. Írjuk fel egy gyökjellel!

a) $\sqrt[3]{a^4 \sqrt{a^3}} \quad (a > 0);$ b) $\sqrt[6]{3^3 \sqrt{2}};$ c) $\frac{\sqrt[9]{3} \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}};$ d) $\frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x^4} \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} \quad (x > 0).$

2. A törtkitevőjű hatványok

Az előző leckeiben átismételtük az egész kitevőjű hatványokkal kapcsolatos tudnivalókat. Ott hangsúlyoztuk, hogy a kitevőhalmaz bővítésekor a permanenciaelvet alkalmazzuk.

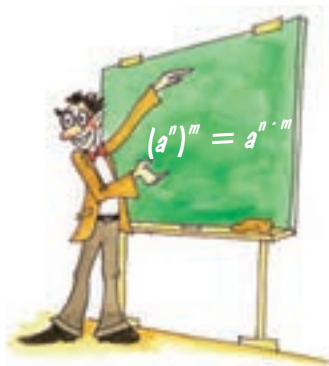


1. példa Hogyan határoznánk meg az alábbi törtkitevőjű hatványok értékét?

a) $4^{\frac{1}{2}};$ b) $27^{\frac{2}{3}};$ c) $32^{-\frac{3}{5}}.$

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy $4 = 2^2$. A permanenciaelv alapján a törtkitevőjű hatvány fogalmának olyannak kell lennie, hogy az egész kitevőjű hatvány-



2.1. ábra Az azonosságok érvényben maradnak



Hatvány, gyök, logaritmus



2.2. ábra Az alapozás nem csak a házépítésnél fontos

ra bizonyított azonosságok továbbra is érvényben maradjanak. Így teljesülnie kell a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságnak is. Ez

alapján azt kapjuk, hogy $4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2$.

b) Megint alkalmazzuk a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságot!

$$27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 3^2 = 9.$$

c) Az előzőek alapján

$$32^{-\frac{3}{5}} = (2^5)^{-\frac{3}{5}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$



Vegyük észre, hogy a végeredmény mindhárom esetben kifejezhető már ismert műveletek felhasználásával a feladatban szereplő hatványok alapjával az alábbi módon!

$$4^{\frac{1}{2}} = 2 = \sqrt{4};$$

$$27^{\frac{2}{3}} = 3^2 = (\sqrt[3]{27})^2 = \sqrt[3]{27^2};$$

$$32^{-\frac{3}{5}} = 2^{-3} = (\sqrt[5]{32})^{-3} = \sqrt[5]{32^{-3}}.$$

A permanenciaelv és a hatvány hatványozására vonatkozó azonosság alapján úgy tűnik, hogy az $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ egyenlőséggel célszerű definiálni a törtkitevőjű hatványt. Mielőtt megadnánk a pontos fogalmat, vizsgáljunk meg három kérdést!

- ✦ Az $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ egyenlőség bármely valós a alap esetén értelmezhető?
- ✦ Az $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ egyenlőséggel definiált törtkitevőjű hatvány értéke csak a $\frac{p}{q}$ kitevő értékétől függ, vagy annak alakjától is?
- ✦ A hatványozás minden azonosságának eleget tesz az $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ egyenlőséggel definiált hatvány?



2.3. ábra Ő tudja a válaszokat

2. példa

Az $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ egyenlőség felhasználásával számoljuk ki az alábbi hatványok értékét!

a) $(-8)^{\frac{2}{3}};$ b) $(-4)^{\frac{3}{2}}.$

Megoldás:

a) Ebben az esetben a hatvány értelmezhető a megadott egyenlőséggel, hiszen $(-8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.

b) Az $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ egyenlőség felhasználásával azt kapjuk, hogy $(-4)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-4)^3} = \sqrt{-64}$, ami a valós számok halmazán nem értelmezhető.



Tehát negatív alap esetén nem minden törtkitevőre értelmezhető a permanenciaelv alkalmazásával kapott $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ egyenlőség, ezért legyen az a alap pozitív!



3. példa

Az $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ egyenlőség felhasználásával döntsük el, hogy melyik nagyobb: 12^4 vagy $12^{\frac{15}{12}}$!

Megoldás:

Mivel $12^{\frac{15}{12}} = \sqrt[12]{12^{15}} = \sqrt[3 \cdot 4]{12^{3 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{(12^5)^3}} = \sqrt[4]{12^5} = 12^{\frac{5}{4}}$, így egyenlők.



Általánosan bizonyítható, hogy ilyen értelmezés mellett csak a törtkitevő értékétől függ a törtkitevőjű hatvány értéke.



4. példa

Az $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ egyenlőség felhasználásával döntsük el, hogy melyik nagyobb: $7^{\frac{5}{6}} \cdot 7^{\frac{4}{15}}$ vagy $7^{\frac{11}{10}}$!

Megoldás:

Mivel

$$7^{\frac{5}{6}} \cdot 7^{\frac{4}{15}} = \sqrt[6]{7^5} \cdot \sqrt[15]{7^4} = \sqrt[30]{7^{25}} \cdot \sqrt[30]{7^8} = \sqrt[30]{7^{33}} = 7^{\frac{33}{30}} = 7^{\frac{11}{10}}, \text{ így egyenlők.}$$



Ez a példa is sugallja, hogy ilyen értelmezés mellett az azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosság is fennáll, hisz $\frac{5}{6} + \frac{4}{15} = \frac{11}{10}$.

Általánosan is bizonyítható, hogy ha az $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ egyenlőséggel értelmezzük a törtkitevőjű hatványt, akkor teljesülnek a hatványozás korábbi azonosságai is.



2.4. ábra Negatív alap esetén baj van!



2.5. ábra Kisebb, nagyobb



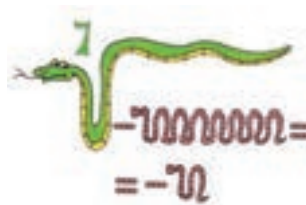
Hatvány, gyök, logaritmus



2.6. ábra Számítsuk ki!



2.7. ábra 10 hatványa?



2.8. ábra Egy gyökjel segítségével

Definíció

Legyen a pozitív valós szám, p egész szám, q pedig 1-nél nagyobb egész szám! Ekkor az a szám $\frac{p}{q}$ -adik hatványa egyenlő az a alap p -edik hatványának q -edik gyökével, azaz $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

5. példa

Számítsuk ki az alábbi hatványok értékét!

- a) $100^{\frac{3}{2}}$; b) $81^{\frac{1}{4}}$; c) $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$; d) $0,0001^{-\frac{3}{4}}$.

Megoldás:

- a) $100^{\frac{3}{2}} = \sqrt{100^3} = (\sqrt{100})^3 = 10^3 = 1000$;
 b) $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$;
 c) $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{125}\right)^{-2}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{125}}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$;
 d) $0,0001^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{0,0001^{-3}} = \left(\sqrt[4]{0,0001}\right)^{-3} = 0,1^{-3} = 1000$.

6. példa

Írjuk fel gyökjel segítségével az alábbi törtkitevőjű hatványokat!

- a) $15^{\frac{3}{7}}$; b) $23^{-\frac{6}{5}}$; c) $x^{\frac{7}{4}} (x > 0)$.

Megoldás:

- a) $15^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{15^3}$; b) $23^{-\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{23^{-6}}$; c) $x^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{x^7}$.

7. példa

Írjuk fel törtkitevőjű hatvány segítségével az alábbi gyökös kifejezéseket!

- a) $\sqrt[3]{a^7} (a > 0)$; b) $\sqrt[8]{\frac{1}{x^7}} (x > 0)$; c) $\frac{1}{\sqrt[6]{y^{11}}} (y > 0)$.

Megoldás:

- a) $\sqrt[3]{a^7} = a^{\frac{7}{3}}$; b) $\sqrt[8]{\frac{1}{x^7}} = \sqrt[8]{x^{-7}} = x^{-\frac{7}{8}}$; c) $\frac{1}{\sqrt[6]{y^{11}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{y^{11}}} = \sqrt[6]{y^{-11}} = y^{-\frac{11}{6}}$.



8. példa Írjuk fel 10 hatványként az alábbi kifejezéseket!

- a) $\sqrt{1000} \cdot \sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{10}}$;
 b) $\sqrt{0,001} \cdot \sqrt[5]{10000} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[5]{0,00001}} \cdot 0,001$;
 c) $\frac{\sqrt[4]{100000} \cdot \sqrt[6]{0,1} \cdot \sqrt[3]{100} \cdot 1000}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt[4]{0,1}}$.

Megoldás:

a) Alkalmazzuk az n -edik gyök 4. azonosságát, majd a törtkitevőjű hatvány definícióját és az azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosságot!

$$\begin{aligned} \sqrt{1000} \cdot \sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{10}} &= \sqrt{10^3} \cdot \sqrt[3]{10^2} \cdot \sqrt[4]{10^{\frac{2}{3}}} = \\ &= 10^{\frac{3}{2}} \cdot 10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{6}} = 10^{\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = 10^{\frac{18+8+1}{12}} = 10^{\frac{27}{12}} = 10^{\frac{9}{4}} = 10^4. \end{aligned}$$

b) Itt is az n -edik gyök 4. azonosságát, majd a törtkitevőjű hatvány definícióját és az azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosságot alkalmazzuk.

$$\begin{aligned} \sqrt{0,001} \cdot \sqrt[5]{10000} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[5]{0,00001}} \cdot 0,001 &= \sqrt{10^{-3}} \cdot \sqrt[5]{10^4} \cdot \sqrt[3]{10^{-\frac{1}{5}}} \cdot 10^{-3} = \\ &= 10^{-\frac{3}{2}} \cdot 10^{\frac{4}{5}} \cdot 10^{-\frac{1}{15}} \cdot 10^{-3} = 10^{-\frac{3}{2} + \frac{4}{5} - \frac{1}{15} - 3} = 10^{\frac{-45+24-10-90}{30}} = 10^{-\frac{121}{30}}. \end{aligned}$$

c) Alkalmazzuk a törtkitevőjű hatvány definícióját, valamint az azonos alapú hatványok szorzására, illetve osztására vonatkozó azonosságot!

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{100000} \cdot \sqrt[6]{0,1} \cdot \sqrt[3]{100} \cdot 1000}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt[4]{0,1}} &= \frac{\sqrt[4]{10^5} \cdot \sqrt[6]{10^{-1}} \cdot \sqrt[3]{10^2} \cdot 10^3}{\sqrt{10^3} \cdot \sqrt[4]{10^{-1}}} = \\ &= \frac{10^{\frac{5}{4}} \cdot 10^{-\frac{1}{6}} \cdot 10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^3}{10^{\frac{3}{2}} \cdot 10^{-\frac{1}{4}}} = \frac{10^{\frac{5}{4} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + 3}}{10^{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}}} = \frac{10^{\frac{15-2+8+36}{12}}}{10^{\frac{6-1}{4}}} = \frac{10^{\frac{57}{12}}}{10^{\frac{5}{4}}} = \frac{10^{\frac{19}{4}}}{10^{\frac{5}{4}}} = \\ &= 10^{\frac{19-5}{4}} = 10^{\frac{14}{4}} = 10^{\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

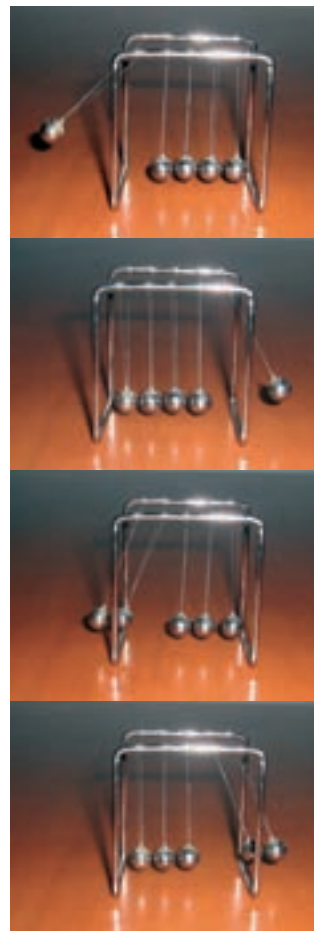


9. példa Végezzük el a kijelölt műveleteket!

- a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}$ ($a > 0$); b) $\frac{b^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-\frac{2}{5}}}{b^{-\frac{3}{4}}}$ ($b > 0$); c) $\left(c^{\frac{5}{2}} - 1\right)^2$ ($c > 0$);
 d) $\left(d^{\frac{3}{4}} - 2\right) \left(d^{\frac{3}{4}} + 2\right)$ ($d > 0$);

Megoldás:

a) Alkalmazzuk az azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosságot!



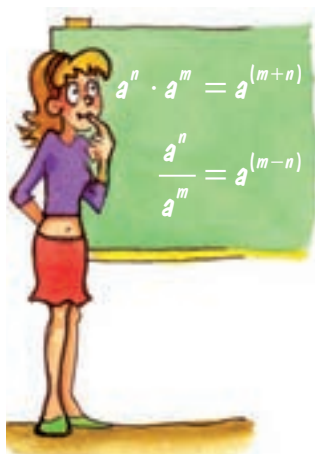
2.9. ábra Oda-vissza



2.10. ábra Gyerekjáték?



Hatvány, gyök, logaritmus



2.11. ábra Ismételjük át az azonosságokat!

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = a^{\frac{6-8+9}{12}} = a^{\frac{7}{12}}.$$

b) Alkalmazzuk az azonos alapú hatványok szorzására és osztására vonatkozó azonosságot!

$$\frac{b^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-\frac{2}{5}}}{b^{-\frac{3}{4}}} = b^{\frac{3}{2} - \frac{2}{5} - (-\frac{3}{4})} = b^{\frac{30-8+15}{20}} = b^{\frac{37}{20}}.$$

c) Alkalmazzuk a kéttagú különbség négyzetére és a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságot!

$$\left(c^{\frac{5}{2}} - 1\right)^2 = \left(c^{\frac{5}{2}}\right)^2 - 2c^{\frac{5}{2}} + 1 = c^5 - 2c^{\frac{5}{2}} + 1.$$

d) Alkalmazzuk a két tag összegének és különbségének szorzatára és a hatványozására vonatkozó azonosságot!

$$\left(d^{\frac{3}{4}} - 2\right)\left(d^{\frac{3}{4}} + 2\right) = \left(d^{\frac{3}{4}}\right)^2 - 4 = d^{\frac{3}{2}} - 4.$$



10. példa Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a^5}}{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}$ ($a > 0$);

b) $\left(b^{\frac{3}{2}} - 5\right)^2 + \left(b^{\frac{3}{2}} + 5\right)^2 - \left(b^{\frac{3}{2}} - 3\right)\left(b^{\frac{3}{2}} + 3\right)$ ($b > 0$).



2.12. ábra Újra és újra

Megoldás:

a) Alkalmazzuk a törtekitevőjű hatvány definícióját, valamint az azonos alapú hatványok szorzására, illetve osztására vonatkozó azonosságokat!

$$\frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a^5}}{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3} + \frac{5}{2}}}{a^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{19}{6}}}{a^{\frac{1}{12}}} = a^{\frac{37}{12}}.$$

b)

$$\begin{aligned} &\left(b^{\frac{3}{2}} - 5\right)^2 + \left(b^{\frac{3}{2}} + 5\right)^2 - \left(b^{\frac{3}{2}} - 3\right)\left(b^{\frac{3}{2}} + 3\right) = \\ &= b^3 - 10b^{\frac{3}{2}} + 25 + b^3 + 10b^{\frac{3}{2}} + 25 - b^3 + 9 = \\ &= b^3 + 59. \end{aligned}$$

Oldjuk meg!

1. Számítsuk ki az alábbi hatványok értékét!

- a) $125^{\frac{1}{3}}$; b) $9^{\frac{3}{2}}$; c) $16^{\frac{5}{4}}$; d) $512^{\frac{4}{9}}$; e) $2401^{\frac{3}{4}}$;
 f) $\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$; g) $\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}$; h) $\left(\frac{343}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$; i) $0,01^{\frac{3}{2}}$; j) $0,000001^{-\frac{2}{5}}$;
 k) $1000^{-\frac{2}{3}}$; l) $64^{\frac{1}{6}}$.

2. Írjuk fel törtkitevőjű hatvány segítségével az alábbi gyökös kifejezéseket!

- a) $\sqrt[6]{6}$; b) $\sqrt[7]{12^2}$; c) $\sqrt[3]{7^5}$; d) $\sqrt[4]{\frac{1}{3^5}}$; e) $\sqrt[8]{\frac{1}{11^6}}$;
 f) $\frac{1}{\sqrt[5]{13^4}}$; g) $\frac{1}{\sqrt[6]{21^{27}}}$.

3. Írjuk fel 3 hatványaként a következő kifejezéseket!

- a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}$; b) $\sqrt[4]{\sqrt{27}} \cdot \sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$;
 c) $\sqrt[6]{\frac{1}{243}} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{81} \cdot 9$; d) $\frac{\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[3]{81}}$.

4. Végezzük el kijelölt műveleteket!

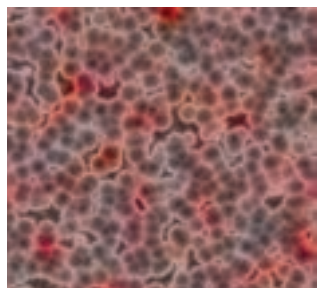
- a) $x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{7}{4}}$ ($x > 0$); b) $y^{\frac{5}{6}} \cdot y^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{5}{2}}$ ($y > 0$); c) $\frac{a^{\frac{7}{12}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{10}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}}$ ($a > 0$);
 d) $\frac{\left(b^{\frac{11}{24}}\right)^3 \cdot \left(b^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{7}{8}}}{\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(b^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}$ ($b > 0$); e) $\left(c^{\frac{3}{4}} - 4\right)^2 + \left(2c^{\frac{3}{4}} + 2\right)^2 - \left(c^{\frac{3}{4}} - 1\right)\left(c^{\frac{3}{4}} + 1\right)$ ($c > 0$);
 f) $\left(d^{\frac{5}{2}} - 3\right)^2 - \left(3d^{\frac{5}{2}} + 1\right)^2 + 8\left(d^{\frac{5}{2}} - 5\right)\left(d^{\frac{5}{2}} + 5\right)$ ($d > 0$);
 g) $\left(d^{\frac{2}{3}} - 3\right)\left(d^{\frac{4}{3}} + 3d^{\frac{2}{3}} + 9\right)$ ($d > 0$); h) $\left(a^{\frac{4}{3}} + 2\right)\left(a^{\frac{8}{3}} - 2a^{\frac{4}{3}} + 4\right)$ ($a > 0$).

5. Írjuk fel x ($x > 0$) hatványaként!

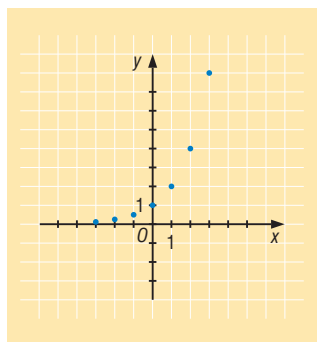
- a) $\frac{\sqrt{x^3} \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot (x^2)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^5}}$; b) $\frac{x^{\frac{5}{3}} \cdot (x^{-2})^{\frac{3}{4}} \sqrt{x^3 \sqrt{x^2}}}{x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{-1}}$; c) $\frac{\sqrt{x^{\frac{3}{4}}} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt{x} \cdot (x^5)^{\frac{1}{8}} \cdot x^{-1}}{x^4 \sqrt{x^7}}$.



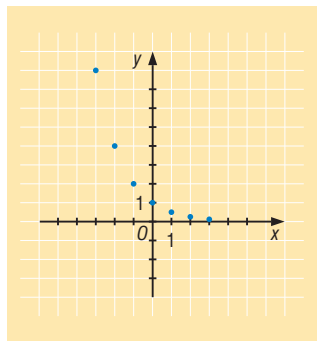
3. Az irracionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény



3.1. ábra Baktériumok



3.2. ábra Az f függvény grafikonja



3.3. ábra A g függvény grafikonja

Már a 9. osztályos tankönyv egy példájában szó volt arról, hogy optimális körülmények között a baktériumok rendkívül gyorsan növekednek és osztódnak. Az orvosi szempontból fontos baktériumok esetén a szaporodásuknak egy bizonyos szakaszában akár 20-40 perc alatt megduplázódhat a számuk (3.1. ábra). Ezt az időt a generációs időnek nevezik. Későbbiekben ezzel még foglalkozunk. Ha egy baktériumpopulációban a baktériumok száma kezdetben N_0 , akkor n db osztódási ciklus után ($n \in \mathbb{N}$) a baktériumok számát az $N_1 = N_0 \cdot 2^n$ összefüggés adja meg. Tehát olyan függvénnyel írhatjuk le a baktériumok számának változását, melynek hozzárendelési szabálya adott alap változó kitevőjű (kitevő = exponens) hatványa. Az ilyen függvényeket exponenciális függvényeknek nevezzük. Az alábbiakban ezekkel a függvényekkel foglalkozunk.



1. példa Ábrázoljuk a $[-3; 3]$ intervallumon, és vizsgáljuk monotonitás szempontjából az alábbi függvényeket!

a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2^x$; b) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Megoldás:

a) Az f függvény grafikonja a 3.2. ábrán látható.

A függvény grafikonját különálló pontok alkotják, hiszen értelmezési tartománya az egész számok halmaza.

A függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmazának egy részhalmaza.

Mivel a függvény hozzárendelési szabályában szereplő hatvány alapja 1-nél nagyobb, így az egész kitevőjű hatvány definíciójából következően az f függvény szigorúan monoton növekvő. Ezt a grafikon is szemlélteti.

b) A g függvény grafikonja a 3.3. ábrán látható.

Az előzőhöz hasonlóan itt is különálló pontok alkotják a függvény grafikonját, és értékkészlete a pozitív valós számok halmazának egy részhalmaza.

Mivel a függvény hozzárendelési szabályában szereplő hatvány alapja 1-nél kisebb pozitív szám, így az egész kitevőjű hatvány definíciójából következően az f függvény szigorúan monoton csökkenő. Ez a grafikonról is leolvasható.



A törtkitevőjű hatvány definíciójának ismeretében bővíthetjük az előző példában szereplő függvények értelmezési tartományát. Mielőtt ezzel foglalkoznánk, oldjuk meg az alábbi példát!



2. példa Állítsuk növekvő sorrendbe az alábbi hatványokat!

a) $2^{\frac{4}{5}}, 2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{5}{6}}, 2^{\frac{2}{15}}, 2^{\frac{31}{30}}, 2^{\frac{5}{2}};$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{12}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$

Megoldás:

a) A törtekitevőjű hatvány definíciója alapján $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, így mindegyik hatványt kifejezhetjük n -edik gyök segítségével. Az így felírt számokat viszont könnyen össze tudjuk hasonlítani, ha azonos a gyökkitevő. Ezért hozzuk azonos nevezőre a törtekitevőket, majd alkalmazzuk a definíciót! A közös nevező 30.

$$\begin{aligned} 2^{\frac{4}{5}} &= 2^{\frac{24}{30}} = \sqrt[30]{2^{24}}, & 2^{\frac{2}{3}} &= 2^{\frac{20}{30}} = \sqrt[30]{2^{20}}, \\ 2^{\frac{5}{6}} &= 2^{\frac{25}{30}} = \sqrt[30]{2^{25}}, & 2^{\frac{2}{15}} &= 2^{\frac{4}{30}} = \sqrt[30]{2^4}, \\ 2^{\frac{31}{30}} &= \sqrt[30]{2^{31}}, & 2^{\frac{5}{2}} &= 2^{\frac{75}{30}} = \sqrt[30]{2^{75}}. \end{aligned}$$

Az 1. példa a) része alapján $2^{-75} < 2^{-4} < 2^{20} < 2^{24} < 2^{25} < 2^{31}$. Mivel az n -edik gyök függvénye bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén szigorúan monoton növekvő, ezért

$$\sqrt[30]{2^{-75}} < \sqrt[30]{2^{-4}} < \sqrt[30]{2^{20}} < \sqrt[30]{2^{24}} < \sqrt[30]{2^{25}} < \sqrt[30]{2^{31}},$$

így $2^{-\frac{5}{2}} < 2^{\frac{2}{15}} < 2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{4}{5}} < 2^{\frac{5}{6}} < 2^{\frac{31}{30}}$.

b) Az előzőhöz hasonlóan járhatunk el, csak most a törtekitevők közös nevezője 12.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^6}, & \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{12}} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^{15}}, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{12}} &= \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^7}, & \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{12}} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^8}, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^9}, & \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}. \end{aligned}$$

Az 1. példa b) része alapján

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{15} < \left(\frac{1}{2}\right)^9 < \left(\frac{1}{2}\right)^7 < \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^8 < \left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

Mivel az n -edik gyök függvénye bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén szigorúan monoton növekvő, ezért

$$\sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^{15}} < \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^9} < \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^7} < \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} < \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^8} < \sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^6},$$



3.4. ábra Növekvő sorrend



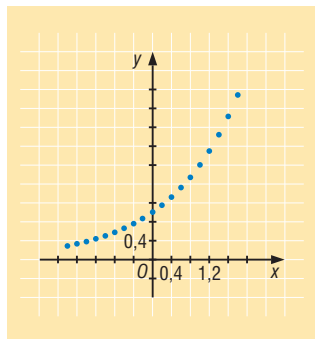
3.5. ábra Ez így nem jó



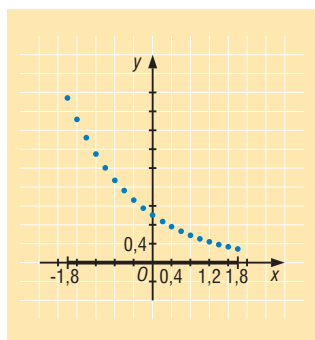
3.6. ábra Szigorúan monoton növekvő



Hatvány, gyök, logaritmus



3.7. ábra Az f függvény grafikonjának néhány pontja



3.8. ábra A g függvény grafikonjának néhány pontja



3.9. ábra Közelítés

$$\text{így } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{12}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$



3. példa Ábrázoljuk a $[-1,8;1,8]$ intervallumon, és vizsgáljuk monotonitás szempontjából az alábbi függvényeket!

a) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2^x$; b) $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Megoldás:

a) A 3.7. ábrán természetesen csak néhány pontot tudunk feltüntetni.

A függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmazának egy részhalmaza.

A felvett pontokat nem köthetjük össze, hiszen az értelmezési tartomány nem a valós, hanem a racionális számok halmaza. Bebizonyítható, hogy bármely két racionális szám között van irracionális szám, így bármilyen sűrűn is vesszük fel a pontokat, azokat sohasem köthetjük össze folytonos vonallal. A grafikon is sugallja, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő. Ez is bizonyítható. A bizonyítás gondolatmenetének a lényege az, amit a 2. példa a) részében is láttunk. Tehát az értelmezési tartomány kiterjesztésével a monotonitási viszonyok nem változtak.

b) A 3.8. ábrán sem köthetjük össze a felvett pontokat, és a függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmazának egy részhalmaza.

Ez a grafikon azt jelzi, hogy a g függvény szigorúan monoton csökkenő, ami természetesen bizonyítható a 2. példa b) részében látottakhoz hasonló módon. Az értelmezési tartomány kiterjesztése ebben az esetben sem változtatta meg a monotonitási viszonyokat.



Ahhoz, hogy az előző grafikonok ne csak különálló pontok halmazai legyenek, értelmeznünk kell az irracionális kitevőjű hatványt is. A kitevőhalmaz bővítésénél eddig a permanenciaelvet tartottuk szem előtt, és az előző példákban azt is tapasztaltuk, hogy a bővítés nem változtatta meg az exponenciális függvény monotonitási viszonyait sem.

Ez alapján az irracionális kitevőjű hatvány definíciójának olyanak kell lennie, hogy

- eleget tegyen a permanenciaelvnek;
- 1-nél nagyobb alap esetén az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, 1-nél kisebb alap esetén szigorúan monoton csökkenő legyen;
- az 1-től különböző alapú exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza legyen;
- a valós számok halmazán értelmezett exponenciális függvény grafikonja folytonos vonallal megrajzolható legyen.

Az alábbiakban konkrét példán keresztül érzékeltetjük, hogy miként lehet értelmezni az irracionális kitevőjű hatványt.

Legyen a kitevő $\sqrt{2}$, az alap pedig 2! 9. osztályban beszéltünk arról, hogy a szakaszos végtelen tizedes tört alakban felírt számok a racionális, míg a nem szakaszos végtelen tizedes tört alakban felírt számok az irracionális számok. A $\sqrt{2}$ -t közelíthetjük két oldalról a tizedes tört alakjából kiindulva az alábbi módon.

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$

$$1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$$

$$1,414213 < \sqrt{2} < 1,414214.$$

Az előző racionális számok között fennállnak a következő egyenlőtlenségek

$$1 < 1,4 < 1,41 < 1,414 < 1,4142 < 1,41421 < 1,414213 < \dots$$

$$< 1,414214 < 1,41422 < 1,4143 < 1,415 < 1,42 < 1,5 < 2.$$

Ha a $\sqrt{2}$ -t közrefogó számokat egy-egy zárt intervallum végpontjainak tekintjük, akkor megadható ezeknek egy végtelen sorozata.

$$[1; 2] \supset [1,4; 1,5] \supset [1,41; 1,42] \supset [1,414; 1,415] \supset [1,4142; 1,4143] \supset \dots$$

Az ilyen intervallumokat egymásba skatulyázott intervallumoknak nevezzük. Láthatjuk, hogy egy-egy intervallum két végpontjának a távolsága egyre kisebb, sőt be lehet bizonyítani, hogy tetszőlegesen közel van 0-hoz. Meg lehet mutatni azt is, hogy ezek az intervallumok pontosan egy számot határoznak meg, ez jelen esetben a $\sqrt{2}$.

Azt tudjuk, hogy az $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2^x$ függvény szigorúan monoton növekvő, emiatt fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek

$$2^1 < 2^{1,4} < 2^{1,41} < 2^{1,414} < 2^{1,4142} < 2^{1,41421} < \dots$$

$$\dots < 2^{1,41422} < 2^{1,4143} < 2^{1,415} < 2^{1,42} < 2^{1,5} < 2^2.$$

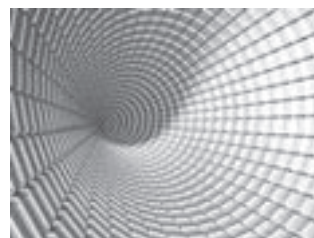
Vagyis most is megadható egy intervallum-sorozat az alábbi módon:

$$\begin{aligned} [2^1; 2^2] &\supset [2^{1,4}; 2^{1,5}] \supset [2^{1,41}; 2^{1,42}] \supset [2^{1,414}; 2^{1,415}] \supset \\ &\supset [2^{1,4142}; 2^{1,4143}] \supset [2^{1,41421}; 2^{1,41422}] \supset \dots \end{aligned}$$

Ezek is egymásba skatulyázottak, és belátható, hogy az intervallumok végpontjainak távolsága tetszőlegesen közel lehet a 0-hoz. Így ezek is egy számot határoznak meg, legyen ez szám a $2^{\sqrt{2}}$. Be lehet bizonyítani, hogy az ily módon meghatározott irracionális kitevőjű hatvány rendelkezik a tőle elvárt tulajdonságokkal.

A valós kitevőjű hatvány pontos, precíz értelmezése mély gondolatokat rejt magában, mely túlmutat e tankönyv keretein, ezért azzal itt nem foglalkozunk.

A továbbiakban fogadjuk el, hogy a korábban megfogalmazott követelményeknek eleget téve értelmezhetjük a valós kitevőjű hatványt.



3.10. ábra Monotonitás



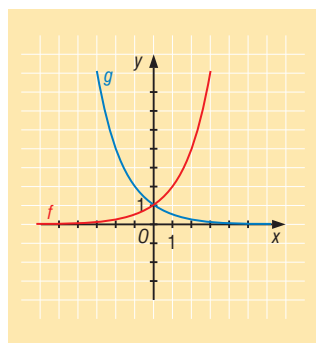
3.11. ábra Egymásba skatulyázva



Hatvány, gyök, logaritmus



3.12. ábra Túlmutat a keretemen



3.13. ábra Exponenciális függvények grafikonja



3.14. ábra Tükörkép

Így definiálhatjuk a valós számok halmazán értelmezett exponenciális függvényt.



Definíció Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto a^x$ ($a > 0$) függvényt exponenciális függvénynek nevezzük.

Ha $a = 1$, akkor az f függvény minden valós helyen az 1-et veszi fel, azaz konstans függvényt kapunk. Ezért a továbbiakban ezzel az esettel nem foglalkozunk, tehát legyen $a \neq 1$.



4. példa Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben és jellemezzük az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2^x \text{ és a } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

függvényt!

Megoldás:

	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2^x$	$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$
Értelmezési tartománya	$D_f = \mathbb{R}$	$D_g = \mathbb{R}$
Értékkészlete	$R_f = \mathbb{R}^+$	$R_g = \mathbb{R}^+$
Zérushelye	nincs	nincs
Szélsőérték	nincs	nincs
Menete	Az értelmezési tartományán szigorúan monoton növekvő.	Az értelmezési tartományán szigorúan monoton csökkenő.

Mindkét függvény az értékkészletének minden elemét egyszer és csak egyszer veszi fel, tehát kölcsönösen egyértelmű függvények.



Vegyük észre, hogy az f és g függvény grafikonja az y tengelyre nézve egymás tükörképe! Mivel $\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$, így a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ függvény grafikonja megkapható az y tengelyre történő tükrözéssel az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2^x$ függvény grafikonjából. Ez a kapcsolat fennáll bármely a és $\frac{1}{a}$ alapú ($a \neq 1$) exponenciális függvény grafikonja között.



5. példa Ábrázoljuk az alábbi függvényeket!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 3^x - 3;$ b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}.$

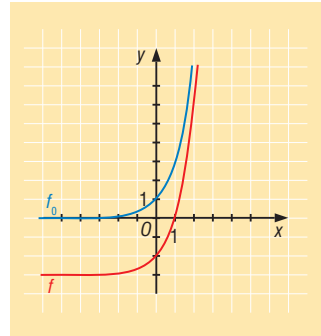
Megoldás:

a) Induljunk ki az alapfüggvényből, amely ebben az esetben $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 3^x$ függvény! Mivel az f_0 függvény értékeit 3-mal csökkentve megkapjuk az f függvény megfelelő értékeit, ezért az f_0 grafikonját az y tengely mentén negatív irányba 3-mal eltolva az f függvény grafikonjához jutunk (3.15. ábra).

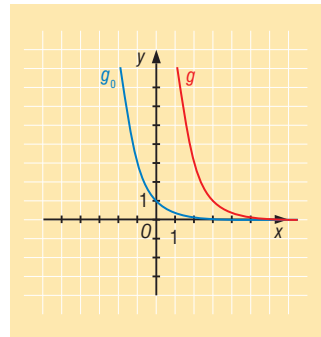
b) Ebben a feladatban az alapfüggvény a $g_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$ függvény. Mivel ebből úgy kapjuk a g függvényt, hogy a változó értékét 3-mal csökkentjük, így a g függvény minden értéket 3-mal „később” vesz fel, mint a g_0 függvény. Ez azt jelenti, hogy a g grafikonját megkapjuk a g_0 grafikonjából, ha azt az x tengely mentén pozitív irányba 3-mal eltoljuk (3.16. ábra).



Foglaljuk össze az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto a^x$ exponenciális függvény tulajdonságait, ha $a \neq 1$ (3.17. ábra)!



3.15. ábra Az f függvény grafikonja



3.16. ábra A g függvény grafikonja

	Ha $a > 1$	Ha $1 > a > 0$
Grafikon:		
Értékkészlet:	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$
Menete:	szigorúan monoton nő	szigorúan monoton csökken
Szélsőérték:	nincs	nincs

3.17. ábra Összehasonlítás

Bármely $a \neq 1$ alap esetén az exponenciális függvény az értékkészletének minden elemét egyszer és csak egyszer veszi fel, tehát kölcsönösen egyértelmű függvény.



Hatvány, gyök, logaritmus



Oldjuk meg!

1. Egy baktériumpopuláció esetén a generációs idő (lásd a lecke 1. példáját) $t_g = 25$ perc. A baktériumok szaporodásának exponenciális szakaszában a baktériumok számát az idő függvényében a

$N_1(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{t_g}}$ összefüggés adja meg, ahol N_0 a populációban levő baktériumok száma kezdetben.

- a) Hányszorosára nő a baktériumok száma 150 perc alatt?
b) Hány százalékkal kevesebb baktérium van a populációban 100 perc elteltével, mint 150 perc elteltével?
2. Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi függvényeket!

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2^x + 3$; b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2^{x+1}$; c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$;
d) $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$; e) $j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 3^{x-4} - 3$; f) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} + 1$;
g) $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$; h) $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$.

4. Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek

4.1. Exponenciális egyenletek



1. példa Mint arról az előző lecke végén is szóltunk, a baktériumok szaporodásának exponenciális szakaszában azok számát

az idő függvényében az $N_1(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{t_g}}$ összefüggés adja meg, ahol N_0 a populációban levő baktériumok száma kezdetben, t_g pedig a generációs idő. A generációs idő a sejtszám megduplázódásához szükséges idő. Ez legyen 22 perc! Mennyi idő szükséges ekkor ahhoz, hogy a populációban a baktériumszám a kezdeti érték 128-szorosára növekedjen?



4.1. ábra Tetanusz baktérium populációja

Megoldás:

A feladat szerint $\frac{N_1}{N_0} = 128$. Legyen $x = \frac{t}{t_g}$! Ekkor a probléma a

$2^x = 128$ exponenciális egyenlet megoldására vezet.

Mivel $128 = 2^7$, ezért a $2^x = 2^7$ egyenletet kell megoldani. Mivel az 1-től különböző alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért ez a két hatvány akkor és csak akkor lehet egyenlő, ha a kitevők megegyeznek, azaz $x = 7$. Innen kapjuk, hogy $7 = \frac{t}{t_g}$, azaz

$t = 154$ perc. Tehát 154 perc alatt nő 128-szorosára a populációban lévő baktériumok száma.



2. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $5^{x+2} = \sqrt[3]{25} \cdot \frac{1}{125}$; b) $\frac{1}{9} \sqrt[4]{27^{x+2}} = 81^{\frac{2}{3}}$; c) $(\sqrt[3]{2})^{x^2-4} - \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x}{3}} = 0$.

Megoldás:

a) Írjuk fel mindkét oldalt 5 hatványaként, a törtkitevőjű hatvány definíciója és a hatványozás azonosságainak felhasználásával!

$$5^{x+2} = \sqrt[3]{25} \cdot \frac{1}{125},$$

$$5^{x+2} = 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-3},$$

$$5^{x+2} = 5^{-\frac{7}{3}}.$$

Az 1-től különböző alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért ez a két hatvány akkor és csak akkor lehet egyenlő, ha a kitevők megegyeznek, azaz

$$x + 2 = -\frac{7}{3},$$

$$x = -\frac{13}{3}.$$

Mivel végig ekvivalens egyenleteket kaptunk, ezért az egyenlet egyetlen megoldása a $-\frac{13}{3}$.

b) Írjuk fel mindkét oldalt 3 hatványaként, a törtkitevőjű hatvány definíciója és a hatványozás azonosságainak felhasználásával

$$\frac{1}{9} \sqrt[4]{27^{x+2}} = 81^{\frac{2}{3}},$$

$$3^{-2} \cdot \left((3^3)^{x+2}\right)^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{2}{3}},$$

$$3^{-2} \cdot 3^{\frac{3x+6}{4}} = 3^{\frac{8}{3}},$$

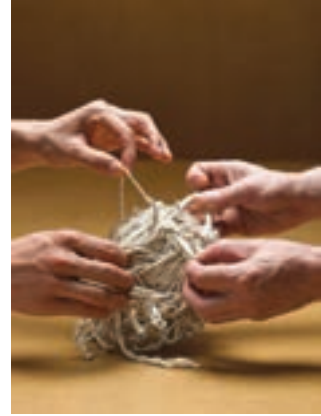
$$3^{\frac{3x+6}{4}-2} = 3^{\frac{8}{3}}.$$

Az 1-től különböző alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért ez a két hatvány akkor és csak akkor lehet egyenlő, ha a kitevők megegyeznek, azaz

$$\frac{3x+6}{4} - 2 = -\frac{8}{3},$$

$$\frac{3x-2}{4} = -\frac{8}{3},$$

$$x = -\frac{26}{9}.$$



4.2. ábra Oldjuk meg!



4.3. ábra A párbaállítás kölcsönösen egyértelmű függvény



Hatvány, gyök, logaritmus



4.4. ábra Az egyenletrendezés nem annyira bonyolult, mint a filmrendezés



4.5. ábra Ezt megoldottuk



4.6. ábra Egyenlők

Mivel végig ekvivalens egyenleteket kaptunk, ezért az egyenlet egyetlen megoldása a $-\frac{26}{9}$.

c) Rendezzük át az egyenletet, majd írjuk fel mindkét oldalt 2 hatványként, a törtkitevőjű hatvány definíciója és a hatványozás azonosságainak a felhasználásával!

$$(\sqrt[3]{2})^{x^2-4} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x}{3}},$$

$$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{x^2-4} = (2^{-3})^{\frac{x}{3}},$$

$$2^{\frac{x^2-4}{3}} = 2^{-x}.$$

Az 1-től különböző alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért ez a két hatvány akkor és csak akkor lehet egyenlő, ha a kitevők megegyeznek, azaz

$$\frac{x^2-4}{3} = -x,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 3^2 - 4(-4) = 9 + 16 = 25$.

Így a megoldások $x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1$.

Mivel végig ekvivalens egyenleteket kaptunk, ezért ezek és csak ezek az egyenlet megoldásai.



3. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\left(\frac{125}{8}\right)^{2x-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$; b) $125 \cdot 3^x - 81 \cdot 5^{x-1} = 0$.

Megoldás:



Vegyük észre, hogy $\frac{125}{8} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$!

Ez alapján

$$\left(\frac{125}{8}\right)^{2x-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^5,$$

$$\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right)^{2x-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^5,$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-6x+9} = \left(\frac{2}{5}\right)^5.$$

Az 1-től különböző alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért ez a két hatvány akkor és csak akkor lehet egyenlő, ha a kitevők megegyeznek, azaz

$$\begin{aligned} -6x + 9 &= 5, \\ -6x &= -4, \\ x &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Az ekvivalens egyenletek miatt ez és csak ez a megoldás.

b) Eddig fel tudtuk írni az egyenlet mindkét oldalát ugyanazon alap hatványaként. Egyelőre úgy tűnik, hogy ennél az egyenletnél ezt nem tudjuk megtenni. Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy az egyik oldalon csak az 5 hatványa szerepeljen, a másikon pedig a 3-é!

$$\begin{aligned} 125 \cdot 3^x - 81 \cdot 5^{x-1} &= 0, \\ 125 \cdot 3^x &= 81 \cdot 5^{x-1}, \\ \frac{3^x}{81} &= \frac{5^{x-1}}{125}, \\ \frac{3^x}{3^4} &= \frac{5^{x-1}}{5^3}, \\ 3^{x-4} &= 5^{x-4}. \end{aligned}$$

Mivel a két oldalon szereplő hatványnak azonos a kitevője, ezért oszszuk el az egyenlet két oldalát 5^{x-4} -nel, ami nem nulla!

$$\begin{aligned} \frac{3^{x-4}}{5^{x-4}} &= 1, \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{x-4} &= \left(\frac{3}{5}\right)^0. \end{aligned}$$

Az 1-től különböző alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért ez a két hatvány akkor és csak akkor lehet egyenlő, ha a kitevők megegyeznek, azaz

$$\begin{aligned} x - 4 &= 0, \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Az ekvivalens egyenletek miatt ez és csak ez a megoldás.



4.7. ábra Fent és lent



4. példa Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $6^{x+2} - \frac{1}{6} \cdot 6^{x+1} - 12 \cdot 6^{x-1} + 2 \cdot 6^x = 35;$

b) $0,5^{1-2x} - 0,25^{1-x} + 0,5^{3-2x} + 0,125^{\frac{2x}{3}} = 88.$

Megoldás:

a) Mivel a bal oldalon egy összeg szerepel, ezért ezt egyelőre még nem tudjuk egy alap hatványaként felírni. A hatványozás azonosságainak felhasználásával törekedjünk arra, hogy minden tagban azonos alap azonos kitevőjű hatványa szerepeljen, majd vonjunk össze!



4.8. ábra Ötös és hatos



Hatvány, gyök, logaritmus



4.9. ábra Ez nem kölcsönösen egyértelmű



4.10. ábra Vegyük a reciprokát!

$$\begin{aligned} 6^{x+2} - \frac{1}{6} \cdot 6^{x+1} - 12 \cdot 6^{x-1} + 2 \cdot 6^x &= 35, \\ 36 \cdot 6^x - \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 6^x - 12 \cdot \frac{6^x}{6} + 2 \cdot 6^x &= 35, \\ 36 \cdot 6^x - 6^x - 2 \cdot 6^x + 2 \cdot 6^x &= 35, \\ 35 \cdot 6^x &= 35, \\ 6^x &= 1, \\ 6^x &= 6^0. \end{aligned}$$

Az 1-től különböző alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért ez a két hatvány akkor és csak akkor lehet egyenlő, ha a kitevők megegyeznek, azaz $x = 0$.

Végig ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk, ezért ez és csak ez a megoldás.

b) Az előzőhöz hasonlóan dolgozhatunk, csak írjuk fel tört alakban a nevezőket, és alkalmazzuk a negatív kitevőjű hatvány definícióját is!

$$\begin{aligned} 0,5^{1-2x} - 0,25^{1-x} + 0,5^{3-2x} + 0,125^{\frac{2x}{3}} &= 88, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x} - \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x} + \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x}{3}} &= 88, \\ 2^{2x-1} - 4^{x-1} + 2^{2x-3} + 8^{\frac{2x}{3}} &= 88, \\ \frac{2^{2x}}{2} - \frac{4^x}{4} + \frac{2^{2x}}{2^3} + \left(2^3\right)^{\frac{2x}{3}} &= 88, \\ \frac{4^x}{2} - \frac{4^x}{4} + \frac{4^x}{8} + 4^x &= 88, \\ 4 \cdot 4^x - 2 \cdot 4^x + 4^x + 8 \cdot 4^x &= 704, \\ 11 \cdot 4^x &= 704, \\ 4^x &= 64, \\ 4^x &= 4^3. \end{aligned}$$

Mivel az 1-től különböző alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért ez a két hatvány akkor és csak akkor lehet egyenlő, ha a kitevők megegyeznek, azaz

$$x = 3.$$

Végig ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk, ezért ez és csak ez a megoldás.



5. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

$$\begin{aligned} \text{a) } 9^{x^{\frac{1}{2}}} + 26 \cdot 3^{x-3} - \frac{1}{9} &= 0; & \text{b) } 5^{x+1} - 4 \cdot 0,2^x &= 1. \end{aligned}$$

Megoldás:

a) A bal oldalon összeg szerepel, ezért alkalmazzuk az előbb már bevált módszert, azaz alakítsuk ki ugyanazon alap ugyanolyan kitevőjű hatványát! Ehhez vegyük észre, hogy $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$!

$$9^{x-\frac{1}{2}} + 26 \cdot 3^{x-3} - \frac{1}{9} = 0;$$

$$\frac{9^x}{9^{\frac{1}{2}}} + 26 \cdot \frac{3^x}{3^3} - \frac{1}{9} = 0;$$

$$\frac{(3^x)^2}{3} + 26 \cdot \frac{3^x}{27} - \frac{1}{9} = 0;$$

$$9 \cdot (3^x)^2 + 26 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

Vezessünk be új ismeretlent, legyen $y = 3^x$! Ekkor a $9y^2 + 26y - 3 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk.

Az egyenlet diszkriminánsa $D = 26^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-3) = 784 = 28^2$.

$$\text{Így } y_{1,2} = \frac{-26 \pm 28}{18} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{9}, y_2 = -3.$$

Mivel $y = 3^x$ és az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza, ezért a -3 nem megoldás. Visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$3^x = \frac{1}{9},$$

$$3^x = 3^{-2}.$$

Az 1-től különböző alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért ez a két hatvány akkor és csak akkor lehet egyenlő, ha a kitevők megegyeznek, azaz $x = -2$.

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk ennek helyességéről.

b) Az előzőhöz hasonló módon járunk el és használjuk ki, hogy

$$0,2^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{5^x}!$$

$$5^{x+1} - 4 \cdot 0,2^x = 1,$$

$$5 \cdot 5^x - 4 \cdot \frac{1}{5^x} = 1.$$

Vezessünk be új ismeretlent, legyen $y = 5^x$!

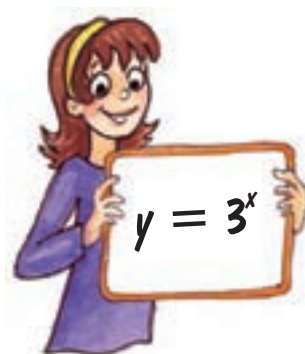
$$5 \cdot y - 4 \cdot \frac{1}{y} = 1,$$

$$5y^2 - y - 4 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai $y_1 = 1, y_2 = -0,8$. A $-0,8$ nem megoldás, mert az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza. Visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$5^x = 1,$$

$$5^x = 5^0.$$



4.11. ábra Új ismeretlen



4.12. ábra Régi „ismerős”



4.13. ábra Nem semmi



Hatvány, gyök, logaritmus

Mivel az 1-től különböző alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért ez a két hatvány akkor és csak akkor lehet egyenlő, ha a kitevők megegyeznek, azaz $x = 0$.

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk ennek helyességéről.

4.2. Exponenciális egyenletrendszerek



4.14. ábra Idézzük fel a korábbi ismereteinket!



4.15. ábra Exponenciális

6. példa Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \left. \begin{array}{l} 3^{x+1} - 2^{y+2} = 19 \\ 6 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 2^y = 28 \end{array} \right\}; \quad \text{b)} & \left. \begin{array}{l} 5^x - 125 \cdot 25^y = 0 \\ (3^x)^y - 9^{y+\frac{3}{2}} = 0 \end{array} \right\}. \end{array}$$

a) Alakítsuk át az egyenleteket a hatványozás azonosságainak alkalmazásával!

$$\left. \begin{array}{l} 3^{x+1} - 2^{y+2} = 19 \\ 6 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 2^y = 28 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 3^x - 4 \cdot 2^y = 19 \\ 2 \cdot 3^x + 5 \cdot 2^y = 28 \end{array} \right\}.$$

Legyen $a = 3^x$, $b = 2^y$! A kapott egyenletrendszer első egyenletét szorozzuk be 2-vel, a másodikat 3-mal, majd vonjuk ki a második egyenletből az első!

$$\begin{array}{l} 3 \cdot a - 4 \cdot b = 19 \\ 2 \cdot a + 5 \cdot b = 28 \end{array} \left\} \begin{array}{l} 6 \cdot a - 8 \cdot b = 38 \\ 6 \cdot a + 15 \cdot b = 84 \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} 23b = 46, \\ b = 2. \end{array}$$

Ekkor $a = 9$. Felhasználva, hogy az exponenciális függvény 1-től különböző alap esetén kölcsönösen egyértelmű, kapjuk, hogy $x = 2$, $y = 1$. Az ekvivalens átalakítások miatt ezek és csak ezek a megoldások.

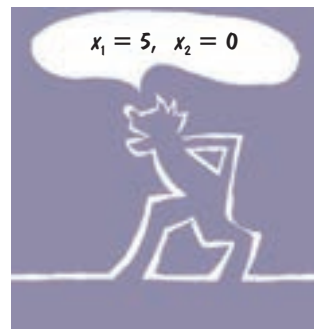
b) Alakítsuk át az egyenleteket a hatványozás azonosságainak alkalmazásával!

$$\left. \begin{array}{l} 5^x - 125 \cdot 25^y = 0 \\ (3^x)^y - 9^{y+\frac{3}{2}} = 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} 5^x = 5^{2y+3} \\ 3^{xy} = 3^{2y+3} \end{array} \right\}.$$

Felhasználva, hogy az exponenciális függvény 1-től különböző alap esetén kölcsönösen egyértelmű, azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} x = 2y + 3 \\ xy = 2y + 3 \end{cases}, \\ (2y + 3)y = 2y + 3, \\ (2y + 3)(y - 1) = 0.$$

Innen $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Visszahelyettesítéssel megkapjuk az x -et, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$. Az ekvivalens átalakítások miatt ezek és csak ezek a megoldások.



4.16. ábra Ezek és csak ezek a megoldások

4.3. Exponenciális egyenlőtlenségek



7. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $3^{3x-6} < \sqrt[3]{9^x}$; b) $\frac{49}{36} \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{x^2-8x-11}$.

Megoldás:

a) Írjuk fel mindkét oldalt 3 hatványaként!

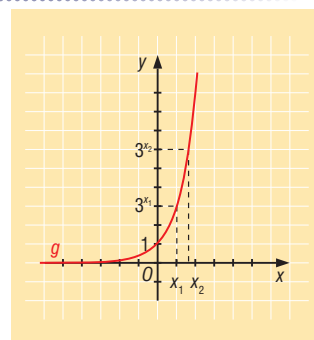
$$3^{3x-6} < \sqrt[3]{9^x}; \\ 3^{3x-6} < 3^{\frac{2x}{3}}.$$

Mivel az $x \mapsto 3^x$ függvény szigorúan monoton növekvő (4.17. ábra), ezért $3x - 6 < \frac{2x}{3}$. Ebből pedig kapjuk, hogy

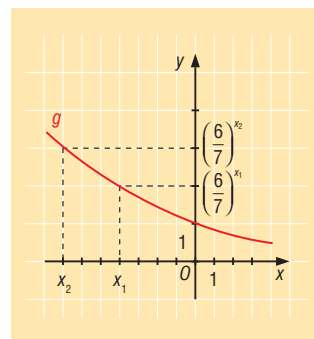
$$3x - 6 < \frac{2x}{3}, \\ 9x - 18 < 2x, \\ 7x < 18, \\ x < \frac{18}{7}.$$

Tehát a megoldáshalmaza $M = \left]-\infty; \frac{18}{7}\right[$.

b) Írjuk fel mindkét oldalt $\frac{6}{7}$ hatványaként!



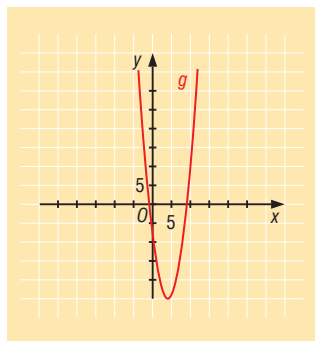
4.17. ábra Az $x \mapsto 3^x$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért ha $3^{x_1} < 3^{x_2}$, akkor $x_1 < x_2$.



4.18. ábra Az $x \mapsto \left(\frac{6}{7}\right)^x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért ha $\left(\frac{6}{7}\right)^{x_1} \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{x_2}$, akkor $x_1 \geq x_2$.



Hatvány, gyök, logaritmus



4.19. ábra Az $x \mapsto x^2 - 8x - 9$ függvény képe „felfelé” nyíló parabola, ezért a két zérushely között vesz fel negatív értékeket

$$\frac{49}{36} \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{x^2-8x-11},$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{-2} \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{x^2-8x-11}.$$

Mivel az $x \mapsto \left(\frac{6}{7}\right)^x$ függvény szigorúan monoton csökkenő (4.18. ábra), ezért $-2 \geq x^2 - 8x - 11$. Ebből kapjuk a $0 \geq x^2 - 8x - 9$ másodfokú egyenlőtlenséget. Mivel a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^2 - 8x - 9$ függvény képe „felfelé” nyíló parabola, ezért a két zérushely között vesz fel negatív értékeket (4.19. ábra). Határozzuk meg a függvény zérushelyeit, azaz oldjuk meg az $x^2 - 8x - 9 = 0$ egyenletet! Az egyenlet megoldásai $x_1 = -1$, $x_2 = 9$, így az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $M = [-1; 9]$.



Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $3^{x-3} = \sqrt[3]{81}$; b) $4^{3x-1} = \sqrt[5]{16} \cdot \frac{1}{64^x}$; c) $\sqrt[4]{8^{x+3}} = \frac{1}{32^{x-4}} 16^{2x-7}$; d) $\sqrt{125^{2x+1}} = 0,2^{3x-2}$.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$; b) $\left(\frac{9}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^4$; c) $49 \cdot 5^x = 25 \cdot 7^x$; d) $5\sqrt{5} \cdot 3^x - \sqrt{27} \cdot 5^x = 0$.

3. Oldjuk meg az egész számok halmazán!

a) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} + 5^{x+3} = 780$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} - 6 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1-x}{3}} + 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{3-\frac{x}{2}} = 29$.

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

a) $4^{2x+1} - 15 \cdot 4^x = 5 \cdot 4^{x-1} - 1$; b) $2^{x+1} - 0,5^{x-2} = -\frac{31}{2}$; c) $3^{3-x} + 3^{x-2} = 4$.

5. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán!

a) $\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 3^{x+1} - 7 \cdot 5^y = 19 \\ 8 \cdot 3^x + 3 \cdot 5^y = 87 \end{array} \right\}$; b) $\left. \begin{array}{l} 2^{x+5} + 3^{y+2} = 91 \\ 2^{x-4} - 3^{y-3} = \frac{1}{72} \end{array} \right\}$; c) $\left. \begin{array}{l} 9^x \cdot 3^{2y-1} = \frac{1}{27} \\ 2^{xy-4} = 4^x \cdot 0,5 \end{array} \right\}$.

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán!

a) $2^{x+4} > \sqrt[4]{8}$; b) $3^{2x-4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \geq 27^x \cdot 81$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{6x-x^2-5}$; d) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{-x+1}{x+2}} \geq \left(\frac{5}{4}\right)^2$.

5. A logaritmus definíciója, a logaritmusfüggvény

5.1. A logaritmus definíciója



„Madame Curie gyanította, hogy az uránérc radioaktivitása jórészt valamely más kémiai elemnek köszönhető, amely az uránnál sokkal aktívabb, viszont csak rendkívül kis mennyiségben lehet jelen az érceben. Gyakorlott és keményen dolgozó vegyészként elhatározta, hogy a »kémiai frakcionálás« gondos módszerével elkülöníti ezt a feltételezett elemet az uránérből. Rengeteg, Csehországból kapott szurokérc ment át vegykonyháján, ahol nagyon gondos és nagyon fárasztó munka folyt, s ahol egyre erősebben sugárzó frakciók maradtak vissza. A munka 1898-ban, tetőpontjára érve ragyogó sikert hozott: 200 mg tiszta anyagot sikerült kihozni, ami milliószorosa erősebben sugárzott, mint maga az urán. Az új elemet, amelynek a periódusos rendszerbeli helyét, rendszámát ($Z = 88$) is megállapította, rádiumnak keresztelte.”

(George Gamow–John M. Cleveland: Fizika)



5.1. ábra Marie Curie egy francia bélyegen



1. példa A radioaktív anyagok bomlástörvénye megadja, hogy egy adott t időpillanatban hány bomlatlan ($N(t)$) atommag van jelen az anyagban, ha kezdetben a bomlatlan atommagok száma

N_0 volt. A pontos összefüggés $N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, ahol T a felezési idő, amennyi idő alatt az atommagok fele elbomlik. Megközelítőleg mikorra csökken 20 mg-mal a Madame Curie által 1898-ban előállított 200 mg rádium mennyisége, ha a felezési ideje 1620 év?

Megoldás:

A rádium tömege egyenesen arányos a részecskeszámmal, így

$$\frac{m(t)}{m_0} = \frac{N(t)}{N_0} = 2^{-\frac{t}{T}}. \text{ Mivel 20 mg bomlik el, így a rádium 90\%-a marad}$$

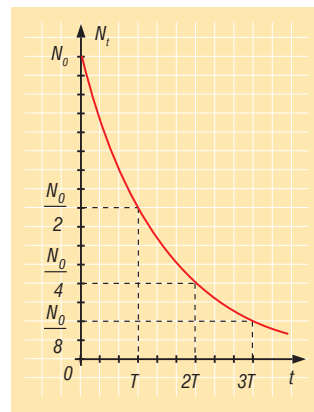
meg. Tehát $\frac{m(t)}{m_0} = 0,9$. Legyen $x = \frac{t}{T}$! Így az $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,9$ egyenlet-

hez jutunk. Tehát keressük azt a kitevőt, amelyre az $\frac{1}{2}$ -et hatványoz-

va 0,9-et kapunk. Ilyen kitevő létezik, hisz a valós számok halmazán

értelmezett $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ függvény értékkészlete a pozitív valós számok

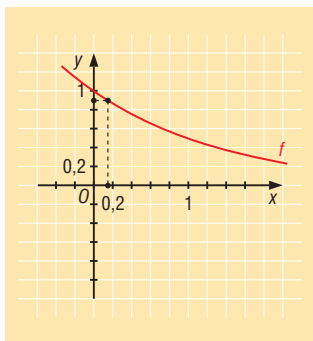
halmaza. Ezt a kitevőt egyelőre csak a mellékelt grafikonról tudjuk leolvasni hozzávetőleges pontossággal, de a későbbiekben tanulunk módszert a kiszámítására.



5.2. ábra Bomlatlan magok száma-idő grafikon



Hatvány, gyök, logaritmus



5.3. ábra Az $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ függvény grafikonja

Az 5.3. ábra alapján $x \approx 0,15$. Behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,15} \approx 0,9012$. Mivel az $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,152} \approx 0,9000019$ és $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,153} \approx 0,899378$, ezért a kitevő értéke két tizedesjegyre kerekítve 0,15.

Tehát $\frac{t}{T} \approx 0,15$, azaz $t \approx 0,15 \cdot T = 0,15 \cdot 1620 = 243$ év. Tehát körülbelül 2141-re bomlik el a Madame Curie által előállított rádium 10%-a, azaz 20 mg.



Ebben a feladatban azt a kitevőt kerestük, amelyre az $\frac{1}{2}$ -et emelve 0,9-et kapunk. Ezt a kitevőt $\frac{1}{2}$ **alapú logaritmus** 0,9-nek nevezzük. Jelölés: $\log_{\frac{1}{2}} 0,9$. A logaritmus szó a logos = viszony és az aritmos = szám szavak összevonásával keletkezett.



Definíció Legyen a 1-től különböző pozitív valós szám és b pozitív valós szám! Az $\log_a b$ („ a alapú logaritmus b ”) az a kitevő, amelyre a -t hatványozva b -t kapunk. Az a a logaritmus alapja, a b a logaritmus numerusza. Jelekkkel leírva: $a^{\log_a b} = b$, ahol $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Mivel az 1-nek bármely hatványa 1, ezért ha az $a = 1$ esetet is megengednénk, a b -nek is 1-nek kellene lennie, de ekkor a logaritmus értéke nem lenne egyértelműen meghatározott.



5.4. ábra Ha ezt most megérttem, később nem lesz gondom vele!



2. példa Adjuk meg egy racionális számként az alábbi logaritmusok értékét!

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------|
| a) $\log_3 9$; | b) $\log_2 \frac{1}{16}$; | c) $\log_5 \sqrt[3]{25}$; |
| d) $\log_7 \sqrt{\frac{1}{343}}$; | e) $\log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[3]{9}$; | f) $\log_{\frac{1}{32}} 8$. |

Megoldás:

- a) A logaritmus definíciója alapján azt a kitevőt keressük, amelyre a 3-at hatványozva 9-et kapunk. Mivel ez a kitevő 2, ezért $\log_3 9 = 2$.
- b) A logaritmus definíciója alapján azt a kitevőt keressük, amelyre a 2-t hatványozva $\frac{1}{16}$ -ot kapunk. Mivel $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$, ezért $\log_2 \frac{1}{16} = -4$.

c) Írjuk fel a $\sqrt[3]{25}$ -öt 5 hatványaként! A tört kitevőjű hatvány definíciója alapján $\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$. Így a logaritmus definíciója alapján $\log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$.

d) Írjuk fel a $\sqrt{\frac{1}{343}}$ -at 7 hatványaként! A negatív egész és a törtekitevőjű hatvány definíciója alapján $\sqrt{\frac{1}{343}} = \sqrt{7^{-3}} = 7^{-\frac{3}{2}}$. Így a logaritmus definíciója alapján $\log_7 \sqrt{\frac{1}{343}} = -\frac{3}{2}$.

e) Ha egy kicsit összetettebb a logaritmusos kifejezés, akkor értékének meghatározását az alábbi módon visszavezetjük exponenciális egyenlet megoldására.

Legyen $x = \log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[3]{9}$! Így a logaritmus definíciója alapján $(\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9}$ exponenciális egyenlethez jutunk. Ezt az alábbi módon oldhatjuk meg:

$$(\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9};$$

$$3^{\frac{x}{4}} = 3^{\frac{2}{3}}.$$

Mivel az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $\frac{x}{4} = \frac{2}{3}$, azaz $x = \frac{8}{3}$. Tehát $\log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[3]{9} = \frac{8}{3}$.

f) Alkalmazzuk ennél a feladatnál is az előző gondolatmenetet!

Legyen $x = \log_{\frac{1}{32}} 8$! Ekkor a logaritmus definíciója alapján $\left(\frac{1}{32}\right)^x = 8$.

Ebből már meghatározhatjuk az x értékét, figyelembe véve, hogy az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű.

$$\left(\frac{1}{32}\right)^x = 8 \Leftrightarrow 2^{-5x} = 2^3 \Leftrightarrow -5x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}.$$

Tehát $-\frac{3}{5} = \log_{\frac{1}{32}} 8$.



3. példa Adjuk meg egy racionális számként az alábbi hatványok értékét! (A tízes alapú logaritmus jele: lg.)

- a) $10^{\lg 2010}$; b) $7^{2+\log_7 3}$; c) $3^{\log_3 30 - \log_3 20}$;
d) $25^{\log_5 2}$; e) $6^{\log_{36} 16}$; f) $4^{\log_{16} 36 - \log_2 3}$.

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója alapján $a^{\log_a b} = b$, ahol $a > 0, a \neq 1, b > 0$. Így $10^{\lg 2010} = 2010$.

b) Alkalmazzuk a hatványozás első azonosságát és a logaritmus definícióját!

$$7^{2+\log_7 3} = 7^2 \cdot 7^{\log_7 3} = 49 \cdot 3 = 147.$$



5.5. ábra A hangerősséget is logaritmusos skálán adjuk meg:

$$x_{\text{db}} = 10 \cdot \lg \left(\frac{x}{x_0} \right)$$



5.6. ábra $\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+]$



Hatvány, gyök, logaritmus



5.7. ábra Már megint a hatványozás azonosságai

c) Alkalmazzuk a hatványozás második azonosságát és a logaritmus definícióját!

$$3^{\log_3 30 - \log_3 20} = \frac{3^{\log_3 30}}{3^{\log_3 20}} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}.$$

d) Az eddigiektől eltérően ebben a feladatban nem egyezik meg a hatvány alapja a logaritmus alapjával, így még nem tudjuk alkalmazni a logaritmus definícióját. Írjuk fel a hatványalapot a logaritmus alapjának a segítségével, majd alkalmazzuk a hatványozás 3. azonosságát és a logaritmus azonosságát!

$$25^{\log_5 2} = (5^2)^{\log_5 2} = 5^{2 \cdot \log_5 2} = (5^{\log_5 2})^2 = 2^2 = 4.$$

e) Járjunk el az előzőhöz hasonló módon!

$$6^{\log_{36} 16} = \left(36^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{36} 16} = 36^{\frac{1}{2} \cdot \log_{36} 16} = \left(36^{\log_{36} 16}\right)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4.$$

f) Alkalmazzuk a hatványozás második azonosságát, majd az előzőhöz hasonló módon járjunk el!

$$4^{\log_{16} 36 - \log_2 3} = \frac{4^{\log_{16} 36}}{4^{\log_2 3}} = \frac{16^{\frac{1}{2} \cdot \log_{16} 36}}{2^{2 \cdot \log_2 3}} = \frac{(16^{\log_{16} 36})^{\frac{1}{2}}}{(2^{\log_2 3})^2} = \frac{36^{\frac{1}{2}}}{3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$



4. példa

Melyik szám nagyobb:

- az, amelynek a 3-as alapú logaritmus 2, vagy amelynek a 2-es alapú logaritmus 3;
- az, amelynek a 27-es alapú logaritmus $\frac{1}{3}$, vagy amelynek az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmus -2 ;
- az, amelynek a 4-es alapú logaritmus $-\frac{1}{2}$, vagy amelynek a 81-es alapú logaritmus $-\frac{1}{4}$?

Megoldás:

a) Keressük azt a számot, amelynek a 3-as alapú logaritmus 2, illetve azt, amelynek a 2-es alapú logaritmus 3. Ez azt jelenti, hogy az alábbi egyenleteket kell megoldanunk: $\log_3 x = 2$ és $\log_2 y = 3$. A logaritmus definíciója alapján $x = 3^2 = 9$ és $y = 2^3 = 8$. Tehát az a szám nagyobb, amelynek a 3-as alapú logaritmus 2.

b) Az előzőhöz hasonlóan járhatunk el. A megoldandó egyenletek $\log_{27} x = \frac{1}{3}$ és $\log_{\frac{1}{2}} y = -2$. A logaritmus definíciója alapján $x = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$, illetve $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$. Tehát az a szám nagyobb, amelynek az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmus -2 .

c) Írjuk fel a megfelelő egyenleteket!



5.8. ábra Melyik nagyobb?

$$\log_4 x = -\frac{1}{2} \text{ és } \log_{81} y = -\frac{1}{4}.$$

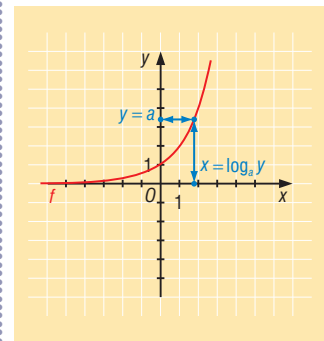
A logaritmus definíciója alapján kapjuk, hogy $x = 4^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ és $y = 81^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$. Tehát az x szám nagyobb, amelynek a 4-es alapú logaritmusa $-\frac{1}{2}$.



5.9. ábra $x > y$

5.2. A logaritmusfüggvény

A fejezet 3. leckéjében foglalkoztunk az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) exponenciális függvénnyel. Megállapítottuk, hogy a értékétől függetlenül kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés áll fenn a valós számok halmaza és a pozitív valós számok halmaza között. Ez azt jelenti, hogy egy adott a esetén bármely értékkészletbeli y értéket, azaz hatványt pontosan egy értelmezés tartománybeli x értékhez, azaz kitevőhöz rendel hozzá. Ez alapján definiálhatunk egy olyan függvényt, amelynek értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza, az értékkészlete a valós számok halmaza, és egy adott a esetén az a hatványaihoz rendeli hozzá a megfelelő kitevőt. Ez az $a^x \mapsto x$ hozzárendelést jelenti. Legyen $y = a^x$, ekkor a logaritmus definíciója alapján $x = \log_a y$. Így létrehoztuk az exponenciális függvény inverz függvényét, a logaritmusfüggvényt (5.10. ábra).



5.10. ábra Bármely $y = a^x$ értékhez egyértelműen hozzárendelhetjük az $x = \log_a y$ értéket

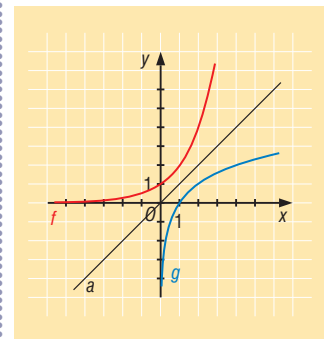


Definíció A $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \log_a x$, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$ függvényt logaritmusfüggvénynek nevezzük.

Mivel az a alapú logaritmusfüggvény az a alapú exponenciális függvény inverze, ezért grafikonjaik az $y = x$ egyenesre nézve egymás tükörképei (5.11. és 5.12. ábrák).

Jellemezzük a logaritmusfüggvényt!

	$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \log_a x$ $1 < a$	$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \log_a x$ $0 < a < 1$
Értelmezési tartománya	$D_g = \mathbb{R}^+$	$D_g = \mathbb{R}^+$
Értékkészlete	$R_g = \mathbb{R}$	$R_g = \mathbb{R}$
Zérushelye	$x = 1$	$x = 1$
Szélőérték	nincs	nincs
Menete	Az értelmezési tartományán szigorúan monoton növekvő .	Az értelmezési tartományán szigorúan monoton csökkenő .

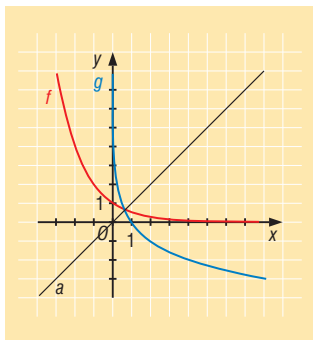


5.11. ábra

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto 2^x$ és a $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \log_2 x$ egymás inverze, ezért grafikonjaik egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre nézve

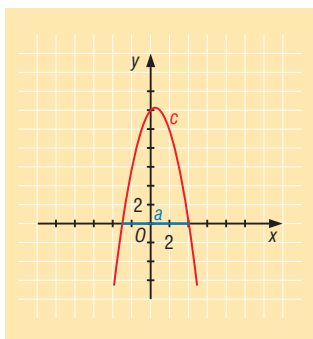


Hatvány, gyök, logaritmus



5.12. ábra

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ és a $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$ egymás inverze, ezért grafikonjaik egymás tükörképei az $y=x$ egyenesre nézve



5.13. ábra A $12 + x - x^2 > 0$ akkor és csak akkor igaz, ha $-3 < x < 4$

x	számláló	nevező	tört
$]-\infty; -3[$	-	-	+
-3	0	-	0
$]-3; 0,25[$	+	-	-
$0,25$	+	0	nincs értelmezve
$]0,25; \infty[$	+	+	+

5.14. ábra $D_f =]-\infty; -3[\cup]0,25; \infty[$



5. példa Határozzuk meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát!

- a) $\log_3(2x-3)$;
- b) $\log_{x-1}(5-2x)$;
- c) $\log_4|7x+12|$;
- d) $\log_{12}(12+x-x^2)$;
- e) $\log_9\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x - 81\right)$;
- f) $\log_5 \frac{x+3}{4x-1}$.

Megoldás:

a) A logaritmus értelmezése miatt $2x-3 > 0$, azaz $x > 1,5$. Így az értelmezési tartomány a $D_a =]1,5; \infty[$ halmaz.

b) Mivel a logaritmus numerusa csak pozitív szám lehet, a logaritmus alapja pedig 1-től különböző pozitív valós szám, ezért $5-2x > 0$ és $x-1 > 0$ és $x-1 \neq 1$. Ebből $2,5 > x$ és $x > 1$ és $x \neq 2$. Ez alapján az értelmezési tartomány a $D_b =]1; 2[\cup]2; 2,5[$ halmaz.

c) A logaritmus értelmezése alapján $|7x+12| > 0$, de bármely valós szám abszolút értéke nemnegatív, ezért $7x+12 \neq 0$, azaz $x \neq -\frac{12}{7}$.

Tehát a kifejezés értelmezési tartománya $D_c = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{12}{7}\right\}$.

d) A logaritmus értelmezése alapján $12+x-x^2 > 0$. A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 12+x-x^2$ hozzárendelési szabályú függvény képe „lefelé” nyíló parabola (5.13. ábra), mely a két zérushely között vesz fel pozitív értéket. Mivel a diszkriminánsa $D=49$, így $x_1 = -3$ és $x_2 = 4$. Tehát az értelmezési tartomány $D_d =]-3; 4[$.

e) A logaritmus értelmezése szerint $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 81 > 0$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$. Mivel az $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért $x < -4$. Tehát az értelmezési tartomány $D_e =]-\infty; -4[$.

f) A logaritmus definíciója alapján $\frac{x+3}{4x-1} > 0$ feltételnek kell teljesülnie.

A számláló zérushelye $x = -3$, a nevezőé $x = 0,25$. Az 5.14. előjeltáblázatból leolvashatjuk az értelmezési tartományt: $D_f =]-\infty; -3[\cup]0,25; \infty[$.



6. példa Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi függvények értelmezhetők, majd ábrázoljuk az egyes függvényeket!

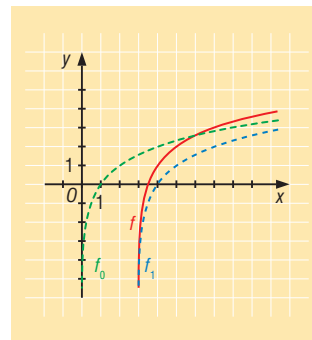
- a) $f(x) = \log_2(x-3) + 1$;
- b) $g(x) = -\log_{\frac{1}{3}}(x+1) - 2$.

Megoldás:

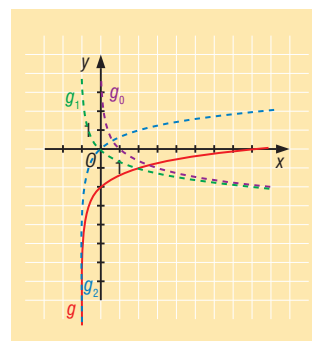
a) A logaritmus definíciója alapján az $x - 3 > 0$ feltételnek kell teljesülnie, amelyből kapjuk, hogy $x > 3$. Tehát az f függvény értelmezési tartománya $D_f =]3; \infty[$. Az f függvény grafikonját az $f_0(x) = \log_2 x$ függvény grafikonjából kaphatjuk két lépésben. Mivel az f függvény esetében a logaritmus numerusza $x - 3$, ezért minden értéket 3-mal később vesz fel, tehát el kell tolni az f_0 függvény grafikonját az x tengely mentén pozitív irányba 3 egységgel. Mivel az így kapott f_1 függvény értékeihez hozzá kell adnunk 1-et, ezért az f grafikonját úgy kapjuk, ha az előző grafikont eltoljuk az y tengely mentén 1 egységgel pozitív irányba (5.15. ábra).

b) A logaritmus értelmezése alapján az $x + 1 > 0$. Így $x > -1$. Tehát a g függvény értelmezési tartománya $D_g =]-1; \infty[$. Ebben a feladatban a $g_0(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ függvény grafikonjából indulhatunk ki. Mivel a g függvényénél a logaritmus numerusza $x + 1$, így a g_0 függvény grafikonját eltoljuk az x tengely mentén negatív irányba 1 egységgel. Az így kapott g_1 függvény grafikonját tükrözzük az x tengelyre, és ezzel a $g_2(x) = -\log_{\frac{1}{3}}(x + 1)$ függvény grafikonjához jutunk, amelyet az y

tengely mentén 2-vel negatív irányba tolva megkapjuk a g függvény grafikonját (5.16. ábra).



5.15. ábra Az f_0 és az f_1 függvények grafikonját szaggatott vonallal vettük fel az ábrán



5.16. ábra A g_1 és a g_2 függvények grafikonját szaggatott vonallal vettük fel az ábrán



Oldjuk meg!

1. Adjuk meg egy racionális számként az alábbi kifejezések értékét!

- a) $\log_2 16$; b) $\log_6 36$; c) $\log_5 \frac{1}{125}$; d) $\log_3 \frac{1}{84}$;
 e) $\log_1 32$; f) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{64}{27}$; g) $\log_3 \sqrt{27}$; h) $\log_{11} \sqrt[3]{121}$;
 i) $\lg \sqrt[4]{0,1}$; j) $\lg \sqrt{0,00001}$; k) $\log_{27} 81$; l) $\log_{32} \frac{1}{8}$.

2. Adjuk meg egyetlen racionális számként az alábbi hatványok értékét!

- a) $6^{\log_6 5}$; b) $12^{\log_{12} 0,32}$; c) $5^{2+\log_5 0,2}$; d) $8^{2-\log_8 20}$;
 e) $11^{\log_{11} 24 - \log_{11} 36}$;
 f) $15^{\log_{15} 0,21 + \log_{15} 5}$; g) $15^{\log_{15} 0,21 + \log_{15} 5}$; h) $144^{\log_{12} 2}$; i) $27^{\log_3 4}$;
 j) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 0,1}$;
 k) $0,01^{\lg 0,5}$; l) $10^{\log_{100} 36}$; m) $16^{\log_2 \frac{1}{84}}$; n) $27^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{8}}$;
 o) $0,001^{\lg \frac{1}{27}} + 12^{\log_{144} 64} - 2^{3+\log_8 125}$.



Hatvány, gyök, logaritmus

3. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát!

- a) $\log_4(2x-7)$; b) $\log_{14}(65-13x)$; c) $\log_{2x-5}(36-10x)$; d) $\log_{3x+5}(4x+9)$;
 e) $\log_5(x^2-4x+3)$; f) $\log_{13}(-3x^2-11x+4)$; g) $\log_{13}|11x-26|$; h) $\log_{15}(x-4)-\log_{21}(21-3x)$;
 i) $\log_{13}\frac{6-x}{4x+14}$; j) $\log_{13}\frac{5x+12}{7x+49}$.

4. Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, ahol az alábbi függvények értelmezhetők! Ábrázoljuk ezeket a függvényeket!

- a) $x \mapsto \log_2(x+2)$; b) $x \mapsto \log_3(x-4)$; c) $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}}(x+1)-3$;
 d) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x-1)+3$; e) $x \mapsto -\log_{\frac{1}{2}}(x+3)-2$.

6. A logaritmus azonosságai

n	2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

6.1. ábra A 2 hatványai



1. példa

Legyen A az a kitevő, amelyre a 2-t hatványozva 128-at, B az, amelyre a 2-t hatványozva 32-t, C az, amelyre a 2-t hatványozva 4-et és D az, amelyre a 2-t hatványozva 1024-et kapunk! Az alábbi egyenlőségek közül melyik igaz?

- a) $B+C=A$; b) $B \cdot C=D$.

Megoldás:

Mivel $128=2^7$, $32=2^5$, $4=2^2$ és $1024=2^{10}$, ezért $A=7$, $B=5$, $C=2$ és $D=10$.

a) Az előzőek alapján $B+C=5+2=7=A$, tehát ez az egyenlőség igaz. Ez nem meglepő, hisz az azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosság alapján $32 \cdot 4 = 2^5 \cdot 2^2 = 2^7 = 128$. A kapott összefüggést ki-fejezhetjük logaritmusokkal is, hiszen a logaritmus definíciója alapján $5 = \log_2 32$, $2 = \log_2 4$ és $7 = \log_2 128$, így $\log_2 32 + \log_2 4 = \log_2 128$, ahol a jobb oldali numerusz a bal oldali numeruszok szorzata.

b) A megoldás elején láttuk alapján $B \cdot C = 5 \cdot 2 = 10 = D$, tehát ez az egyenlőség is igaz. Ez sem meglepő, hiszen a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságot felhasználva kapjuk, hogy

$$1024 = 32^2 = (2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2} = 2^{10}.$$

Fejezzük ki ezt is logaritmus segítségével az alábbi módon! A logaritmus definíciója alapján

$$10 = \log_2 1024 = \log_2 32^2.$$

Mivel $5 = \log_2 32$, így $10 = 2 \cdot \log_2 32$. Tehát $\log_2 32^2 = 2 \cdot \log_2 32$.



Az 1. példában a hatványozás azonosságainak felhasználásával a logaritmust tartalmazó kifejezések közötti fontos összefüggésekre világítottunk rá. Mielőtt általánosan foglalkoznánk velük, nézzünk további példákat!



2. példa Legyen x az a kitevő, amelyre a 10-et hatványozva 50-et, míg y az, amelyre a 10-et hatványozva 2-t kapunk! Adjuk meg az $x + y$ értékét egy racionális számként!

Megoldás:

A logaritmus definíciója alapján $x = \lg 50$ és $y = \lg 2$, azaz $50 = 10^{\lg 50}$ és $2 = 10^{\lg 2}$.

Így $100 = 50 \cdot 2 = 10^{\lg 50} \cdot 10^{\lg 2}$. Használjuk fel az azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosságot! Ez alapján kapjuk, hogy $10^2 = 10^{\lg 50 + \lg 2}$. Tudjuk, hogy az $x \mapsto 10^x$ exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $\lg 50 + \lg 2 = 2$. Tehát $x + y = 2$. Mivel $2 = \lg 100$, ezért egyúttal azt is bebizonyítottuk, hogy $\lg 50 + \lg 2 = \lg 100$, ahol a bal oldali numeruszok szorzata egyenlő a jobb oldali numerusszal.



Vegyük észre, hogy az előző példában az 50 és a 2 helyére bármilyen pozitív valós számot, míg a 10 helyére bármilyen 1-től különböző pozitív valós számot írhatunk, csak az a fontos, hogy a jobb oldali numerusz a bal oldali numeruszok szorzata legyen! Ez alapján nem meglepő az alábbi tétel.



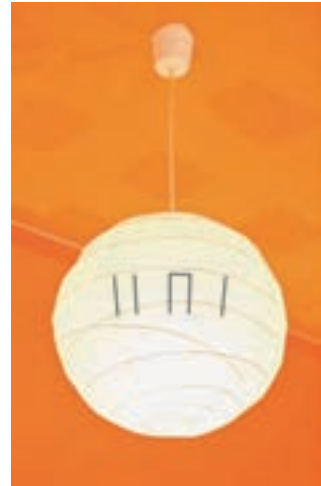
1. tétel Ha a 1-től különböző pozitív valós szám, b és c pozitív valós szám, akkor $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, azaz a szorzat logaritmusai egyenlő a tényezők logaritmusainak összegével.

A tétel bizonyítása a 2. példa megoldásában látott gondolatmenet alapján történik.

Az 1. példa a) részében találkoztunk a $\log_2 32 + \log_2 4 = \log_2 128$ összefüggéssel, melyet átrendezve a $\log_2 32 = \log_2 128 - \log_2 4$ kifejezést kapjuk, ahol a bal oldali numerusz a jobb oldali első, illetve második numerusz hányadosa. Ehhez kapcsolódóan oldjuk meg az alábbi példát!



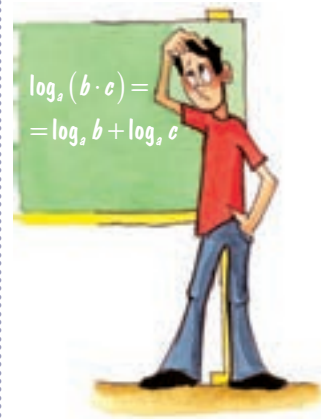
3. példa Legyen x az a kitevő, amelyre a 3-at hatványozva 90-et, míg y az, amelyre a 3-at hatványozva 10-et kapunk. Adjuk meg az $x - y$ értékét egy racionális számként!



6.2. ábra Lóg a ritmus



6.3. ábra Behelyettesítés



6.4. ábra Ezek nagyon fontos tények



6.5. ábra Egy szinttel lejjebb



6.6. ábra Várható

Megoldás:

Mivel $90 = 9 \cdot 10$, ezért az előző tétel alapján $\log_3 90 = \log_3 (9 \cdot 10) = \log_3 9 + \log_3 10$. A logaritmus definíciója szerint $\log_3 9 = 2$, így

$$x - y = \log_3 90 - \log_3 10 = \log_3 9 = 2.$$


Mivel $\log_a b = \log_a \left(\frac{b}{c} \cdot c \right)$, ahol b és c pozitív valós szám, a pedig 1-től különböző pozitív valós szám, ezért az 1. tétel alapján

$$\log_a b = \log_a \left(\frac{b}{c} \cdot c \right) = \log_a \left(\frac{b}{c} \right) + \log_a c.$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$. Tehát megfogalmazhatjuk az alábbi tételt.



2. tétel Ha a 1-től különböző pozitív valós szám, b és c pozitív valós szám, akkor $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$, azaz a hányados logaritmus egyenlő a számláló és a nevező logaritmusának a különbségével.

Az 1. példa b) részében azt kaptuk, hogy $\log_2 32^2 = 2 \cdot \log_2 32$, azaz a bal oldali numerusz kitevője a jobb oldalon megjelent szorzótényezőként. Ehhez kapcsolódik az alábbi példa.



4. példa Legyen x az a kitevő, amelyre az 5-öt hatványozva 27-et, míg y az, amelyre az 5-öt hatványozva 3-at kapunk. Adjuk meg az $\frac{x}{y}$ értékét egy racionális számként!

Megoldás:

A logaritmus definíciója alapján $x = \log_5 27$ és $y = \log_5 3$, így $27 = 5^{\log_5 27}$ és $3 = 5^{\log_5 3}$. Mivel $27 = 3^3$, ezért a hatvány hatványozására vonatkozó azonosság alapján $5^{\log_5 27} = 27 = 3^3 = (5^{\log_5 3})^3 = 5^{3 \cdot \log_5 3}$. Tudjuk, hogy az $x \mapsto 5^x$ kölcsönösen egyértelmű, ezért $\log_5 27 = 3 \cdot \log_5 3$.

Ebből kapjuk, hogy $\frac{x}{y} = \frac{\log_5 27}{\log_5 3} = 3$.



Tehát azt kaptuk, hogy $\log_5 3^3 = 3 \cdot \log_5 3$, ami összeeseng azzal, amit az 1. példa b) részében tapasztaltunk. Ezek után nem meglepő, hogy az

előző megoldásban látott gondolatmenetet alkalmazva bebizonyítható az alábbi tétel.



3. tétel Ha a 1-től különböző pozitív valós szám, b pozitív valós szám és c tetszőleges valós szám, akkor $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$, azaz a hatvány logaritmus egyenlő a hatványkitevőnek és a hatványalap logaritmusának a szorzatával.

A törtkitevőjű hatvány definíciója alapján $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$, ahol b pozitív valós szám, és n 1-nél nagyobb egész szám. Így a 3. tétel felhasználásával könnyen bizonyítható az alábbi tétel.



4. tétel Ha a 1-től különböző pozitív valós szám, b pozitív valós szám és n 1-nél nagyobb egész szám, akkor $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}$, azaz az n -edik gyök logaritmus egyenlő a gyökjel alatti szám logaritmusának és a gyökkitevőnek a hányadosával.



5. példa Számológép használata nélkül döntsük el, hogy melyik nagyobb: az $A = 4 \log_3 6 + \log_3 35 - \log_3 20 - \log_3 28$ vagy a $B = \frac{1}{2} \lg 44 + 3 \lg 2 + \lg 125 + \frac{1}{2} \lg 275 - \lg 11$!

Megoldás:

A logaritmus azonosságainak felhasználásával adjuk meg egyetlen valós számként!

A 3. tétel alapján.

$$A = 4 \log_3 6 + \log_3 35 - \log_3 20 - \log_3 28 =$$

Az 1. tétel alapján.

$$= \log_3 6^4 + \log_3 35 - (\log_3 20 + \log_3 28) =$$

A 2. tétel alapján.

$$= \log_3 (6^4 \cdot 35) - \log_3 (20 \cdot 28) =$$

$$= \log_3 \frac{6^4 \cdot 35}{20 \cdot 28} = \log_3 \frac{(2 \cdot 3)^4 \cdot 5 \cdot 7}{2^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 7} =$$



6.7. ábra Már megint egy tétel!



6.8. ábra Számológép nélkül



Hatvány, gyök, logaritmus



6.9. ábra Egyenlők?

$$= \log_3 \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 5 \cdot 7} = \log_3 3^4 = 4.$$

A 3. és 4. tétel alapján.

$$B = \frac{1}{2} \lg 44 + 3 \lg 2 + \lg 125 + \frac{1}{2} \lg 275 - \lg 11 =$$

Az 1. tétel alapján.

$$= \lg \sqrt{44} + \lg 2^3 + \lg 125 + \lg \sqrt{275} - \lg 11 =$$

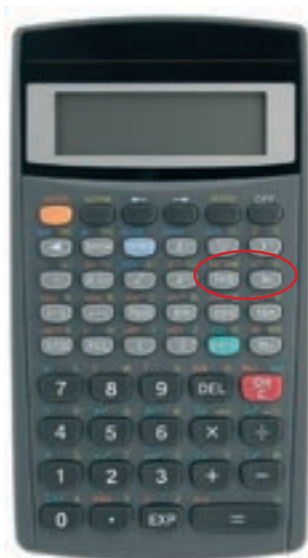
A 2. tétel alapján.

$$= \lg (\sqrt{44} \cdot 2^3 \cdot 125 \cdot \sqrt{275}) - \lg 11 =$$

$$= \lg \frac{\sqrt{44} \cdot 2^3 \cdot 125 \cdot \sqrt{275}}{11} =$$

$$= \lg \frac{\sqrt{2^2 \cdot 11} \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot \sqrt{5^2 \cdot 11}}{11} = \lg \frac{2^4 \cdot 5^4 \cdot 11}{11} = \lg 10^4 = 4.$$

Tehát $A = B$.



6.10. ábra Számológép

Az 5. lecke 1. példáját leszámítva eddig mindegyik példa esetében meg tudtuk adni a logaritmust tartalmazó kifejezések pontos értékét egyetlen racionális számként, mert a logaritmus numerusza a logaritmus alapjának racionális kitevőjű hatványa volt. Ha ez nincs, akkor táblázat vagy számológép segítségével határozhatjuk meg a logaritmusok közelítő értékét. A legtöbb számológépen ezzel kapcsolatban két gomb található. Az egyik a **log** billentyű, amely a tízes alapú logaritmus, a másik az **ln** gomb, amely a természetes alapú logaritmus. Ennek alapszáma az Euler-féle szám, jele e . Az e irracionális szám, melynek értéke öt tizedes jegyre kerekítve $e \approx 2,71828$. Ezután kézenfekvő kérdés, hogy miként lehet kiszámolni ezektől különböző alapú logaritmusok közelítő értékét számológép segítségével. A fentiek alapján azt sejtethetjük, hogy bármely logaritmust kifejezhetünk pl. tízes alapú logaritmussal. Ebben segít az alábbi feladat.



6. példa Határozzuk meg számológép segítségével az 5. lecke 1. példájában szereplő $\log_{\frac{1}{2}} 0,9$ közelítő értékét négy tizedes jegyre kerekítve!

Megoldás:

Ahhoz, hogy ezt meg tudjuk tenni, fel kell írunk az $\log_{\frac{1}{2}} 0,9$ értékét csak tízes alapú logaritmust tartalmazó kifejezés segítségével.

A logaritmus definíciója alapján $0,9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 0,9}$, $\frac{1}{2} = 10^{\lg \frac{1}{2}}$ és

$0,9 = 10^{\lg 0,9}$. Így $0,9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 0,9} = \left(10^{\lg \frac{1}{2}}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 0,9} = 10^{\left(\lg \frac{1}{2}\right) \left(\log_{\frac{1}{2}} 0,9\right)}$. Tehát

$10^{\lg 0,9} = 10^{\left(\lg \frac{1}{2}\right) \left(\log_{\frac{1}{2}} 0,9\right)}$. Mivel az $x \mapsto 10^x$ exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $\lg 0,9 = \left(\lg \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\log_{\frac{1}{2}} 0,9\right)$. Innen

$\log_{\frac{1}{2}} 0,9 = \frac{\lg 0,9}{\lg \frac{1}{2}}$. A $\lg 0,9 \approx -0,0457575$ és a $\lg \frac{1}{2} \approx -0,3010299$,

így $\log_{\frac{1}{2}} 0,9 = \frac{\lg 0,9}{\lg \frac{1}{2}} \approx \frac{-0,0457575}{-0,3010299} \approx 0,1520$.



Az előző példa megoldásában látott gondolatmenetet alkalmazva bizonyítható az alábbi tétel.

5. tétel

Ha a és c 1-től különböző pozitív valós szám és b pozitív valós szám, akkor $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

7. példa

Adjuk meg egyetlen racionális számként az alábbi kifejezés értékét

$$A = \log_{2010} 2011 \cdot \log_{2011} 2012 \cdot \log_{2012} 2010!$$

Megoldás:

Írjuk fel a második és a harmadik tényezőt 2010-es alapú logaritmus segítségével! Az előző tétel értelmében $\log_{2011} 2012 = \frac{\log_{2010} 2012}{\log_{2010} 2011}$ és

$$\log_{2012} 2010 = \frac{\log_{2010} 2010}{\log_{2010} 2012} = \frac{1}{\log_{2010} 2012}.$$

Ezt behelyettesítve kapjuk, hogy

$$A = \log_{2010} 2011 \cdot \frac{\log_{2010} 2012}{\log_{2010} 2011} \cdot \frac{1}{\log_{2010} 2012} = 1.$$



6.11. ábra Térjen át más alapra?



6.12. ábra Egyes



Hatvány, gyök, logaritmus



Oldjuk meg!

1. Adjuk meg egyetlen racionális számként!

- a) $\log_7 21 + \log_7 35 - \log_7 15$; b) $3 \cdot \log_3 15 + 2 \cdot \log_3 2 + \log_3 14 - \log_3 28 - \log_3 250$;
 c) $\frac{1}{2} \cdot \lg 50 + 2 \cdot \lg 15 + \lg 8 - \frac{1}{2} \lg 18 - \lg 3$; d) $1 + \frac{1}{2} \log_5 20 + \frac{1}{2} \log_5 45 + \log_5 10 - \log_5 6 - \log_5 2$.

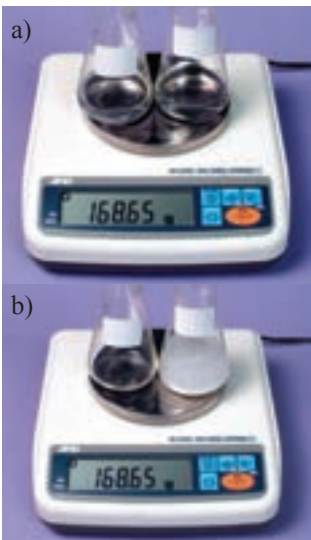
2. Fejezzük ki az x -et a következő egyenlőségekből!

- a) $\lg x = \lg 5 + 3 \lg 2 - \frac{1}{2} \lg 16$; b) $\log_2 x = \log_2 20 + 2 \cdot \log_2 3 - \frac{2}{3} \log_2 125 - \log_2 18$;
 c) $\log_3 x = \log_3 a^2 + \frac{1}{2} \cdot \log_3 b^4 + \frac{1}{3} \cdot \log_3 a^6 - \log_3 b^2 - 3 \cdot \log_3 a$ ($a, b > 0$);
 d) $\log_a x = \log_a c^3 + \log_a c \cdot b^2 + \frac{2}{3} \cdot \log_a b^6 - \log_a b^5 - 4 \cdot \log_a c$ ($a, b, c > 0, a \neq 1$);

3. Adjuk meg egyetlen racionális számként!

- a) $\log_3 2 \cdot \log_2 3$; b) $\frac{\log_{25} 3}{\log_5 3}$; c) $\frac{\log_3 5}{\log_{27} 5} - \frac{\log_2 7}{\log_{16} 7}$;
 d) $\frac{\log_5 11}{\log_{15} 11} - \log_5 3$; e) $\log_2 7 - \log_4 7 - \log_8 7 - \log_{64} 7$.

7. Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek



7.1. ábra A kémiai reakció során
 a) a kiindulási anyagok és
 b) a termékek tömege egyenlő



1. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

- a) $\lg(x-3) = 2 - \lg 25$; b) $\log_2(4x+3) = 3 + \log_2(3-x)$;
 c) $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = 3 \log_5 2 + \log_5(x-2)$;
 d) $\frac{1}{2} \log_3(x-5) + \log_3 \sqrt{2x-3} = 1$.

Megoldás:

a) Határozzuk meg az egyenlet értelmezési tartományát! A logaritmus definíciója alapján $x-3 > 0$, azaz $x > 3$. Tehát az értelmezési tartomány a $]3; \infty[$ halmaz.

A logaritmus definícióját és a második azonosságot alkalmazva

$$\lg(x-3) = \lg 100 - \lg 25,$$

$$\lg(x-3) = \lg \frac{100}{25},$$

$$\lg(x-3) = \lg 4.$$

Mivel a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, ezért

$$x - 3 = 4,$$

$$x = 7.$$

Az $x = 7$ eleme az értelmezési tartománynak. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy megoldása az egyenletnek.

b) A logaritmus definíciója alapján $4x + 3 > 0$ és $3 - x > 0$, azaz $x > -0,75$ és $3 > x$. Tehát az egyenlet értelmezési tartománya a $] -0,75; 3[$ halmaz.

Alkalmazzuk a logaritmus definícióját és az első azonosságot!

$$\log_2(4x + 3) = \log_2 8 + \log_2(3 - x),$$

$$\log_2(4x + 3) = \log_2(8 \cdot (3 - x)).$$

Mivel a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, ezért

$$4x + 3 = 8 \cdot (3 - x),$$

$$4x + 3 = 24 - 8x,$$

$$12x = 21,$$

$$x = \frac{7}{4}.$$

Az $x = \frac{7}{4}$ eleme az értelmezési tartománynak. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy megoldása az egyenletnek.

c) A logaritmus definíciója alapján $x + 1 > 0$ és $x - 1 > 0$ és $x - 2 > 0$, azaz $x > -1$ és $x > 1$ és $x > 2$. Tehát az értelmezési tartomány a $]2; \infty[$ halmaz.

Alkalmazzuk a harmadik, majd az első azonosságot!

$$\log_5(x + 1) + \log_5(x - 1) = \log_5 2^3 + \log_5(x - 2),$$

$$\log_5((x + 1)(x - 1)) = \log_5(8(x - 2)).$$

Mivel a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, ezért

$$(x + 1)(x - 1) = 8(x - 2),$$

$$x^2 - 1 = 8x - 16,$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 8^2 - 4 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$. Így a megoldások $x_{1,2} = \frac{8 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 5$ és $x_2 = 3$. Mind-

két szám megoldása az egyenletnek.

d) Az eddigiekhez hasonlóan $x - 5 > 0$ és $2x - 3 > 0$, azaz $x > 5$ és $x > 1,5$. Így az értelmezési tartomány az $]5; \infty[$ halmaz.

Alkalmazzuk a logaritmus negyedik és első azonosságát!

$$\log_3 \sqrt{x - 5} + \log_3 \sqrt{2x - 3} = 1,$$

$$\log_3(\sqrt{x - 5} \sqrt{2x - 3}) = 1.$$

A logaritmus definíciója alapján

$$\sqrt{x - 5} \sqrt{2x - 3} = 3.$$

Ebből négyzetre emeléssel és egyenletrendezéssel kapjuk, hogy

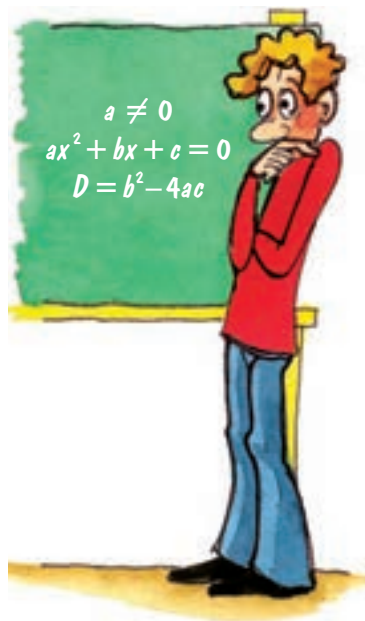
$$(x - 5) \cdot (2x - 3) = 9,$$

$$2x^2 - 13x + 15 = 9,$$

$$2x^2 - 13x + 6 = 0.$$



7.2. ábra Ellenőrzés



7.3. ábra Diszkrimináns



7.4. ábra Használjuk a definíciót?



7.5. ábra Az értelmezési tartomány?

A kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 169 - 48 = 11^2$. Így a megoldások $x_{1,2} = \frac{13 \pm 11}{4} \Rightarrow x_1 = 6$ és $x_2 = \frac{1}{2}$.

Mivel a második szám nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért az nem megoldás, az első viszont igen, amiről ellenőrzéssel is meggyőződhetünk.



2. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\log_3(1 + 2\log_2(1 + 3\log_2(x - 2))) = 2.$$

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartományának a meghatározása körülményesebb, mint az egyenlet megoldása, ezért ettől most eltekintünk. A kapott megoldást behelyettesítéssel ellenőrizzük.

A logaritmus definíciója alapján kapjuk, hogy

$$1 + 2\log_2(1 + 3\log_2(x - 2)) = 9,$$

$$2\log_2(1 + 3\log_2(x - 2)) = 8,$$

$$\log_2(1 + 3\log_2(x - 2)) = 4.$$

Alkalmazzuk újra a logaritmus definícióját!

$$1 + 3\log_2(x - 2) = 16,$$

$$3\log_2(x - 2) = 15,$$

$$\log_2(x - 2) = 5.$$

Ebből a logaritmus definíciója alapján kapjuk, hogy

$$x - 2 = 32,$$

$$x = 34.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy a kapott eredmény megoldása az egyenletnek.



3. példa Oldjuk meg az egész számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\lg^2(x - 1) - \lg(x - 1) - 6 = 0.$$

Megoldás:

Az $\lg^2(x - 1) = (\lg(x - 1))^2$, tehát az egyenlet $\lg(x - 1)$ -re nézve másodfokú. Az egyenlet értelmezési tartománya a $\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ halmaz. Vezessünk be új ismeretlent, legyen $y = \lg(x - 1)$! Így az $y^2 - y - 6 = 0$ egyenlethez jutunk.

Az egyenlet diszkriminánsa

$$D = 1^2 - 4 \cdot (-6) = 1 + 24 = 5^2.$$

Így a megoldások $y_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow y_1 = 3$ és $y_2 = -2$. Egyrészt $\lg(x-1) = 3$, amiből a logaritmus definíciója alapján kapjuk, hogy $x-1 = 1000$, azaz $x = 1001$. Ez eleme az értelmezési tartománynak és megoldása az egyenletnek, melyről ellenőrzéssel is meggyőződhetünk. Másrészt $\lg(x-1) = -2$, így $x-1 = 0,01$, azaz $x = 1,01$ amely nem egész szám. Tehát az egyenlet egész megoldása az $x = 1001$ szám.



4. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{\frac{1}{3}} x = 1$; b) $\log_2 x - 3 \log_x 2 = 2$.

Megoldás:

a) Az egyenlet értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza. Hozzuk közös alapra a logaritmusokat! Legyen a közös alap a 3! Tehát

$$\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{2} \text{ és } \log_{\frac{1}{3}} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = -\log_3 x.$$

Így kapjuk, hogy

$$\log_3 x + \frac{\log_3 x}{2} - \log_3 x = 1, \\ \log_3 x = 2.$$

A logaritmus definíciója alapján az $x = 9$ értéket kapjuk, amely megoldása az egyenletnek.

b) A logaritmus definíciója alapján az egyenlet értelmezési tartománya az $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ halmaz. Hozzuk közös alapra a logaritmusokat! Legyen a közös alap a 2!

$$\text{Ekkor } \log_x 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{1}{\log_2 x}.$$

Így a $\log_2 x - 3 \frac{1}{\log_2 x} = 2$ egyenlethez jutunk. Az $y = \log_2 x$ ismeret-

lent bevezetve, átrendezés után az $y^2 - 2y - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai $y_1 = 3$ és $y_2 = -1$, ahonnan a logaritmus

definíciója alapján kapjuk, hogy $x_1 = 8$ és $x_2 = \frac{1}{2}$. Ezek megoldásai az egyenletnek.



5. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\left. \begin{array}{l} \log_3 x - \log_2 y = 7 \\ 6 \cdot \log_3 x + 5 \cdot \log_2 y = -13 \end{array} \right\};$ b) $\left. \begin{array}{l} \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 4 + 1 \\ \lg x + \lg y = \lg 21 \end{array} \right\}.$



7.6. ábra Új ismeretlen bevezetése



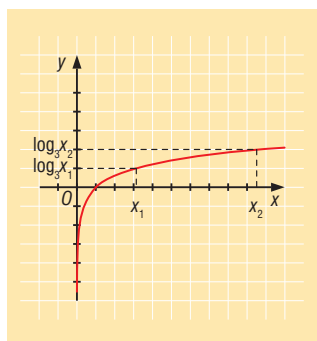
7.7. ábra Logaritmusok közös alapra hozása



Hatvány, gyök, logaritmus



7.8. ábra Lineáris egyenletrendszer?



7.9. ábra

Az $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \log_3 x$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért ha $\log_3 x_1 < \log_3 x_2$, akkor $x_1 < x_2$

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója alapján $x > 0$ és $y > 0$. Vezessünk be új ismeretleneket!

Legyen $a = \log_3 x$, $b = \log_2 y$! A kapott egyenletrendszer első egyenletét szorozzuk be 5-tel, majd adjuk össze azokat!

$$\begin{cases} a - b = 7 \\ 6 \cdot a + 5 \cdot b = -13 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5 \cdot a - 5 \cdot b = 35 \\ 6 \cdot a + 5 \cdot b = -13 \end{cases}, \quad \begin{matrix} 11a = 22, \\ a = 2. \end{matrix}$$

Ekkor $b = -5$. Felhasználva a logaritmus definícióját kapjuk, hogy

$x = 9$, $y = \frac{1}{32}$. Ezek megoldásai az egyenletrendszernek.

b) A logaritmus definíciója alapján $x > 0$, $y > 0$ és $x > y$.

Alkalmazzuk a logaritmus definícióját és első azonosságát!

$$\begin{cases} \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 4 + \lg 10 \\ \lg x + \lg y = \lg 21 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lg((x+y)(x-y)) = \lg 40 \\ \lg(xy) = \lg 21 \end{cases}.$$

Használjuk fel, hogy a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű!

$$\begin{cases} (x+y)(x-y) = 40 \\ xy = 21 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 40 \\ xy = 21 \end{cases}.$$

A másodikból y -t kifejezve és az elsőbe beírva kapjuk ($x \neq 0$), hogy

$$x^2 - \left(\frac{21}{x}\right)^2 = 40. \text{ Ebből átrendezéssel az } x^4 - 40x^2 - 441 = 0 \text{ hi-}$$

ányos negyedfokú egyenlethez jutunk. Ebből kapjuk, hogy $x^2 = 49$ vagy $x^2 = -9$. Az utóbbi egyenletnek nincs valós megoldása. Az első egyenlet pozitív megoldása $x = 7$, amiből az $y = 3$ értéket kapjuk. Ezek megoldásai az egyenletrendszernek.



6. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

- a) $\log_3(4x-5) < \log_3(10-x)$; b) $\log_{\frac{4}{5}}(2x+3) > \log_{\frac{4}{5}}(6+x)$;
c) $\lg(x+2) + \lg(x-3) < \lg 14$.

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója alapján $4x-5 > 0$ és $10-x > 0$, azaz $x > 1,25$ és $10 > x$. Így az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a $]1,25; 10[$ halmaz.

Egynél nagyobb alap esetén a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, így kapjuk, hogy

$$\log_3(4x-5) < \log_3(10-x),$$

$\Downarrow$

$$4x-5 < 10-x.$$

Ebből az $x < 3$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ezt egybevetve az egyenlőtlenség értelmezési tartományával az $]1, 25; 3[$ megoldáshalmazt kapjuk.

b) A logaritmus definíciója alapján $2x+3 > 0$ és $6+x > 0$, azaz $x > -1,5$ és $x > -6$. Így az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a $]-1,5; \infty[$ halmaz.

Egynél kisebb alap esetén a logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, így kapjuk, hogy

$$\log_{\frac{4}{5}}(2x+3) > \log_{\frac{4}{5}}(6+x),$$

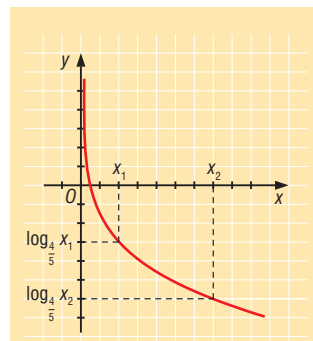
$\Downarrow$

$$2x+3 < 6+x.$$

Ebből az $x < 3$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ezt egybevetve az egyenlőtlenség értelmezési tartományával a $]-1,5; 3[$ megoldáshalmazt kapjuk.

c) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a $]3; \infty[$ halmaz.

Alkalmazzuk a logaritmus 1. azonosságát és azt, hogy a tízes alap miatt a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő. Így kapjuk, hogy $(x+2)(x-3) < 14$. Ha elvégezzük a szorzást és nullára redukálunk, akkor az $x^2 - x - 20 < 0$ másodfokú egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel az $x \mapsto x^2 - x - 20$ hozzárendelési szabályú függvény képe „felfelé” nyíló parabola, ezért a függvény a két zérushely között vesz fel negatív értéket. A zérushelyek $x_1 = 5$ és $x_2 = -4$, így kapjuk, hogy $-4 < x < 5$. Ezt az egyenlőtlenség alaphalmazával egybevetve a $]3; 5[$ megoldáshalmazhoz jutunk.



7.10. ábra

A $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \log_{\frac{4}{5}} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért ha $\log_{\frac{4}{5}} x_2 < \log_{\frac{4}{5}} x_1$, akkor $x_2 > x_1$.



7.11. ábra Egyenlőtlenség



Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg(2x+7) = 3 - \lg 500;$

b) $\log_3(8-3x) = 2 + \log_3 2;$

c) $\frac{\log_5(4x-9)}{\log_5(2x+3)} = 1;$

d) $\log_2(5-3x) + 2 = \log_2(x+5);$

e) $2\lg(2x-3) = \lg(4x+9);$

f) $\log_5(x+3) + \log_5(x-3) = \log_5(3x+9);$

g) $\lg(x-3) + \lg(x-13) = \lg 110 - 1;$

h) $\frac{1}{2} \log_7(3x-2) + \log_7 \sqrt{4x-7} + 2 = \log_7 98.$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\log_2 \log_3(2x+6) = 1;$

b) $\log_2(1 + \log_2(\log_3(2x+6) - 1)) = 0;$

c) $2\log_5^2 x - 3\log_5 x - 2 = 0;$

d) $\lg^2 x + 2 \cdot \lg x^2 = -3.$



Hatvány, gyök, logaritmus

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

- a) $\log_2 x + 2 \cdot \log_4 x + 3 \cdot \log_8 x = 3$; b) $3 \log_5 x - \log_{25} x = 5$; c) $\log_7 x + \log_{49} x + \log_{\frac{1}{7}} x = 1$;
d) $\log_3 x - 2 \log_x 3 = 1$; e) $3 \log_4 x + \log_x 16 = 7$.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

- a) $\begin{cases} 3 \cdot \log_2 x - \log_3 y = 5 \\ 5 \cdot \log_2 x + 2 \log_3 y = 23 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \lg x^2 - \lg y^3 = 5 \\ \lg x^6 + \lg y^2 = 4 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} \log_3 (2x - y) + \log_3 (2x + y) = 1 \\ \log_2 (2x + 2y) - \log_2 (x - y) = 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 1 \\ 3^x - 9 \cdot 27^y = 0 \end{cases}$.

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

- a) $\log_{12} (2x + 11) < \log_{12} (12 - x)$; b) $\log_{\frac{2}{3}} (x + 5) < \log_{\frac{2}{3}} (16 - x)$;
c) $\log_3 (x + 27) - \log_3 2 < \log_3 x + \log_3 (8 - x)$; d) $\log_{\frac{1}{2}} x + 1 > \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{2}} (2x - 1)$.

8. A matematikai jelölésrendszer és a hatványfogalom fejlődése, a logaritmus kialakulása (Történeti áttekintés – olvasmány)



8.1. ábra Az ókori görög matematikusok is törekedtek a matematikai jelölésekre

9. osztályban megismerkedtünk a pozitív egész, a 0 és a negatív egész kitevőjű hatvány fogalmával. Ebben a fejezetben a hatványozást kiterjesztettük racionális kitevőre és érzékeltettük, hogyan lehet irracionális kitevő esetén értelmezni. A hatványfogalomnak ez az általánosítása a matematika története során nagyon hosszú, közel kétezer éves folyamat volt.

A pozitív egész kitevőjű hatvány fogalma már az ókori görögöknél megjelent, többek között a III. században Alexandriában élt matematikus, Diophantosz munkáiban. Az ő jelölésrendszere a szavak rövidítésén alapult, ami átmenet volt az algebrai összefüggések szóbeli kifejezése („retorikus” algebra) és e kifejezések rövidítése („szinkopikus” algebra) között.

Néhány példa az általa használt jelölésekből:

- ✦ az ismeretlen második hatványa: δ^v (a $\delta\nu\nu\alpha\mu\iota\zeta$ = hatvány szóból)
- ✦ az egyenlőség: ι (az $\iota\sigma\omicron\zeta$ = egyenlőség szóból)
- ✦ a konstans speciális jele: μ° (a $\mu\nu\alpha\zeta$ = egység szóból)
- ✦ a számrendszer alfabetikus volt
- ✦ összeadásjel nem használt

Ez alapján a $\overline{\delta^v \varepsilon \mu^\circ \alpha \iota \xi \alpha}$ jelentése az algebra mai nyelvén $5x^2 + 1 = x$.

Diophantos az előzőhöz hasonló szimbolikával az *Aritmetika* című művének 2-6. könyvében sok – többségükben másodfokú egyenletre vezető – problémát oldott meg. Tehát ő tekinthető a szinkopikus algebra előfutárának.

A szimbolikus algebra legnagyobb előretörése a XVI–XVII. századra tehető. E folyamatban első lépésként itt is – a Diophantosznál már használt – szinkopikus algebra jelent meg, majd második lépésként a szimbólumok. Már Gerolamo Cardanónál (1501–1576) is igen jelentős ez az átmenet. Például a „cubus p 6 rebus aequalis 20” azaz az $x^3 + 6x = 20$ egyenlet megoldását, a

$$\sqrt[3]{\sqrt{108+10}} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10} \text{ számot.}$$

„ $R_x ucu R_x 108 p 10 | m R_x ucu R_x 108 m 10$ ” alakban adta meg. Itt R_x (radix) természetesen a négyzetgyököt, míg az $R_x ucu = \text{radix universalis cubica}$ a köbgyököt jelenti. Ebben az időszakban egyre növekedett az igény arra, hogy minél egyszerűbb és tökéletesebb szimbolikát alkalmazzanak. A következőket végigvitt egységes szimbólumrendszert minden jel szerint François Viète (1540–1603) dolgozta ki (8.2. ábra). Minden mennyiséget betűkkel jelölt, az ismeretleneket magánhangzók-kal, az ismerteket mássalhangzók-kal. A második és a harmadik hatvány értelmezése nála még szorosan kötődött a terület és a térfogat fogalmához. A magasabb hatványokat az előzőekre vezette vissza, például a negyedik hatványt terület-területnek, az ötödiket terület-térfogatnak, a hatodikat térfogat-térfogatnak nevezte.

Tehát Viète szimbolikáját a geometriai szemlélet terheli, nem mindig érthető, váltokozva szerepelnek benne rövidített és nem rövidített szavak. Például „A cubus+B planum in A_3 aequatur D solido”, ami $x^3 + 3Bx = D$, hisz manapság x -szel szokás jelölni az ismeretlent.

René Descartes (1596–1650) volt az, aki bevezette az $a^2, a^3, \dots$ jelölés használatát és a második, illetve harmadik hatványt függetlenítette a területtől és a térfogattól.

Az előzőekben felvázoltuk azt az utat, amely a pozitív egész kitevőjű hatványok esetén elvezetett a mai szimbólumrendszer kialakulásához. De most ugorjunk vissza 300 évet az időben!

A párizsi egyetem professzora, Nicolaus Oresmicus (1323–1382) általánosította a hatványfogalmat: bevezette a törtkitevőjű hatványt, megadta a velük végzett műveletek szabályait, és kidolgozott rájuk egy szimbolikát. Ezzel már ténylegesen megelőzi a logaritmus gondolatát.

Az ő jelölésrendszerében például $\frac{1 \cdot p}{2 \cdot 27} = 27^{\frac{1}{2}}$ vagy $\frac{4 \cdot p}{5 \cdot 32} = 32^{\frac{4}{5}}$.

A XV. század végén a párizsi egyetemen dolgozó Nicolaus Chuquet (olv.: süké) (1445–1487/1488) vezette be a 0 és a negatív egész kitevőjű hatványokat. Ezeknek a fogalmaknak a pontos értelmezése és használata azonban csak a XVII. században terjedt el többek között John Wallisnek (1616–1703) köszönhetően.

Az irracionális kitevőjű hatvány precíz és pontos fogalmához szükség volt a mai igényeknek megfelelő számfogalom kialakulásához. Erre Richard Dedekind (1831–1916) és Georg Cantor (1845–1918) munkásságának köszönhetően a XIX. század végén, a XX. század elején került sor (8.3. ábra).

A logaritmus fogalmát a XVII. században vezették be, elméleti alapjai azonban jóval korábbra nyúlnak vissza. Az egész alapjául szol-



8.2. ábra François Viète (1540–1603)



8.3. ábra Georg Cantor (1848–1918)



8.4. ábra Simon Stevin
(1548–1620)



8.5. ábra Johannes Kepler
(1571–1630)



8.7. ábra Logarléc

gáló gondolat, nevezetesen a számtani és mértani sorozat összehasonlításának gondolata már az ókorban is megjelent Archimédész, illetve Diophantosz munkáiban. Később találkozunk ezzel Orasmicusnál, illetve a XVI. században Michael Stifelnél (1487–1567) a hatványfogalom általánosítása kapcsán.

Ahhoz, hogy ezen gondolat alapján a műveleteket egyszerűbb műveletekre vezessék vissza, arra volt szükség, hogy olyan táblázatok készüljenek, melyek az egymás utáni hatványokat az egymás utáni kitevőkhöz rendelik hozzá. Ilyen táblázatok a XVII. század elején már léteztek, ezeket Simon Stevin (1548–1620) állította össze (8.4. ábra). Az ő táblázatai nyomán készítette el az első logaritmustáblázatot Jost Bürgi (1552–1632) svájci órásmester. Bürgi a prágai csillagászati obszervatóriumban dolgozott Johannes Kepler (1571–1630) (8.5. ábra) munkatársaként. A csillagászati számítások megkönnyítése érdekében alkotta meg nyolc év alatt (1603–1611) logaritmustáblázatát. Sokáig nem publikálta eredményeit, csak 1620-ban adta ki könyvét Kepler sürgetésére. Késlekedése az elsőségébe került, mivel 1614-ben John Napier (1530–1617) skót báró, aki csak műkedvelőként foglalkozott tudományokkal, megjelentette *A csodálatos logaritmustáblázat leírása* című művét. Táblázata elkészítésének elve, amely 1594-ben merült fel benne, ebben a korban új volt. Az érdekessége, hogy egy egyenletes és egy egyenletesen lassuló mozgást hasonlított össze, melyek kezdőse-

bessége azonos. Az általa létrehozott logaritmus táblázat alapszáma $\frac{1}{e}$ volt, ez kissé nehézkessé tette használatát. Ezek a nehézségek vezették Napiert a tízes alapú logaritmus gondolatához, mely ebben az időben felmerült egy londoni professzor, Henri Briggs (1561–1630) elméjében is. Briggs két ízben is meglátogatta Napiert Skóciában, melynek nyomán összebarátkoztak és közösen dolgozták ki az új, gyakorlatilag kényelmesebb tízes alapú logaritmusrendszert. Ennek alapja a sorozatok összehasonlítása volt (8.6. ábra).

...	0,01	0,1	1	10	100	...
...	–2	–1	0	1	2	...

8.6. ábra Sorozatok összehasonlítása

Briggs már 1617-ben publikálta az 1-től 10^8 -ig terjedő számok nyolcjegyű logaritmustáblázatát, majd 1624-ben megjelentette *Logaritmikus aritmetika* című részletesebb munkáját. Innentől kezdve a logaritmus a számítási technikák fontos részévé vált és az egész világon elterjedt. A XIX. században megjelentek olyan eszközök, melyek segítséget nyújtottak a gyors számításokhoz. Ilyen volt az 1827-ben elkészült logarléc is (8.7. ábra). Manapság, a számítógépek világában ezek már jelentőségüket veszítették.

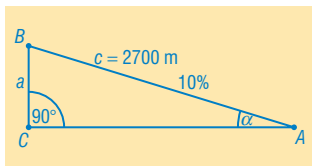
III. fejezet

Trigonometria alkalmazásai

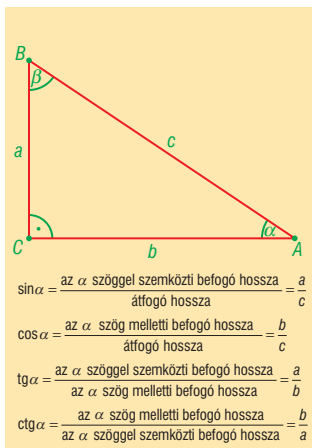


Háromszögeljünk!

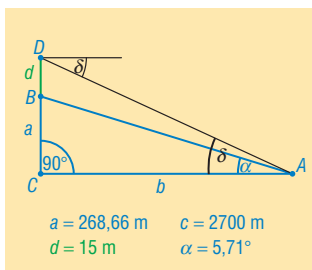
1. A trigonometriáról tanultak ismétlése



1.1. ábra Az 1. a) példa megoldásához



1.2. ábra Hegyesszög szögfüggvényei



1.3. ábra Az 1. b) példa megoldásához

Az alábbiakban néhány példán keresztül felelevenítjük a trigonometria témaköréből eddig tanult ismereteinket.



1. példa Egy 2700 m hosszúságú hegyi út emelkedése 10%.

- Milyen magasra visz az út?
- Mekkora depressziószögben látjuk az út végén levő 15 m magas kilátóból az út elején levő kilométerkövet, amelyet pontszerűnek tekintünk?

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát! Szemléltesse az út nyomvonalát az AB , a hegy magasságát a BC szakasz! A szöveg alapján $AB = 2700$ m, és az út emelkedése 10%. Az emelkedő emelkedésének százalékos mértéke egyenlő az emelkedési szög tangensével százalékban megadva. Így az út 10%-os emelkedése azt jelenti, hogy az út emelkedési szögének tangense 0,10. (Hétköznapi nyelven pedig azt mondhatjuk, hogy „100 méteren 10 métert emelkedik az út”). Jelöljük az A -nál levő emelkedési szöget α -val (1.1. ábra)! Felírhatjuk tehát, hogy $\operatorname{tg} \alpha = 0,10$, ahonnan $\alpha \approx 5,71^\circ$. A feladat most már a következő: az ABC derékszögű háromszögben adott egy hegyesszög és az átfogó. Mekkora a szöggel szemben levő befogó? Az ABC derékszögű háromszögben a hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója alapján $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ (1.2. ábra), ahonnan $a = c \cdot \sin \alpha = 2700 \cdot \sin 5,71^\circ \approx 268,66$ m. Tehát az út 268,66 m magasra visz.

b) Készítsünk ábrát!

Szemléltesse az út nyomvonalát az AB , a hegy magasságát a BC , a kilátót a BD szakasz! A szöveg és az előző feladatrész megoldása alapján $BD = d = 15$ m, $\alpha = 5,71^\circ$ és $a = 268,66$ m. A D -nél levő depressziószöget keressük, jelöljük ezt a szöveget δ -val!

A δ -val jelölt szögnek a CAD váltószöge, így $CAD \angle = \delta$. (A D pontból az A pont ugyanakkora depressziószögben látszik, mint amekkora emelkedési szögben az A pontból a D pont.) Az így keletkezett 1.3. ábrán két derékszögű háromszög van: az ABC és a CAD háromszög. A CAD derékszögű háromszögben most még csak a δ szöggel szemben levő befogó ismert: $CD = a + d = 283,66$ m, a CAD meghatározásához azonban ismernünk kell a háromszög két oldalának arányát, így még egy oldalt ki kell számítanunk. A CA befogó közös oldal az ABC és a CAD derékszögű háromszögekben, és az ABC háromszög adataiból a hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója alapján meghatározha-

tó: $CA = b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} \approx 2686,60$ m (vagy $CA = b = c \cdot \cos \alpha \approx 2686,60$ m,



vagy a Pitagorasz-tétel szerint $CA = b = \sqrt{c^2 - a^2} \approx 2686,60$ m). Innen a CAD derékszögű háromszögben a hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója szerint $\operatorname{tg} \delta = \frac{CD}{AC} \approx 0,1056$, ahonnan $\delta \approx 6,03^\circ$. Tehát az út végén levő 15 m magas kilátóból az út elején levő kilométerkövet $6,03^\circ$ -os depressziószögben látjuk.



2. példa Egy szabályos kilencszög alapú egyenes hasáb alaplapjának területe $918,18 \text{ cm}^2$, a legrövidebb testátló és az alaplap hajlásszöge 72° . Számítsuk ki a hasáb felszínét, térfogatát! (A végeredményeket két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg!)

Megoldás:

Térgeometriai feladatok megoldásakor is praktikus olyan ábrát készíteni, amelyen feltüntetjük mindazokat az adatokat, amelyeket a feladat szövege szerint ismerünk, illetve keresünk. A szöveg szerint adott a legrövidebb testátló (ED) és az alaplap hajlásszöge, valamint az alaplap területe. Az említett testátló nem merőleges az alaplap síkjára, így e két térelem hajlásszögén a testátló és a testátló alaplapra vonatkozó merőleges vetületének szögét ($CDE \angle$) értjük (1.4. ábra).

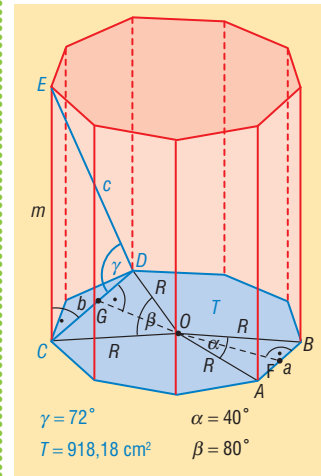
A hasáb térfogata egyenlő az alaplap területének és a hasáb magasságának szorzatával: $V = T_{\text{alaplap}} \cdot m$. A hasáb felszíne egyenlő a hasábot határoló lapok területének összegével: $A = 2T_{\text{alaplap}} + 9T_{\text{oldal}} \cdot$. A hasáb oldalapjai téglalapok, amelyek szomszédos oldalai a és m (1.5. ábra). Így a térfogat és a felszín meghatározásához először az alapélt (a) és a magasságot (m) kell kiszámítani. Az 1.4. ábra alapján az alapélt az AOB (ahol az O pont a szabályos kilencszög középpontja), az alaplap b átlóját a COD , a hasáb magasságát a DEC háromszögekből határozzuk meg. A hasáb alaplapja szabályos kilencszög, területe egyenlő 9 darab egybevágó egyenlőszárú háromszög területének összegével. Az egyenlőszárú háromszögek alapja a szabályos kilencszög egy-egy oldala, az alappal szemközti csúcsuk az O pont, a szárak szöge $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$.

A fentiek miatt az AOB háromszög területe $T_{AOB} = \frac{T_{\text{alaplap}}}{9} = 102,02 \text{ cm}^2$.

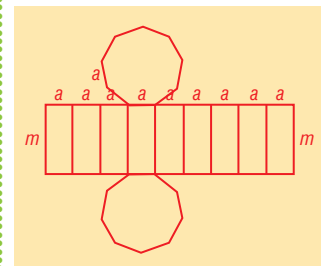
Bármely háromszög területe kiszámítható két oldala és az általuk bezárt szög segítségével a $T_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$ összefüggés alapján (1.6. ábra). Így

$T_{AOB} = \frac{R^2 \cdot \sin 40^\circ}{2} = 102,02 \text{ cm}^2$, ahonnan $R \approx 17,82 \text{ cm}$. Az egyenlőszárú háromszög alaphoz tartozó magassága felezi az alapot és a szárak szögét: $FB = \frac{a}{2}$, $BOF \angle = \frac{\alpha}{2} = 20^\circ$. Az OFB derékszögű háromszögben ismerjük az átfogót és az $\frac{\alpha}{2} = 20^\circ$ szöget, és keressük a szöggel szem-

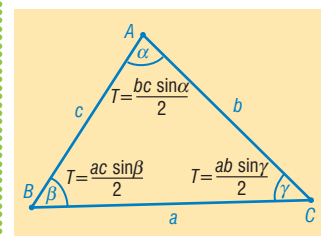
ismerjük az átfogót és az $\frac{\alpha}{2} = 20^\circ$ szöget, és keressük a szöggel szem-



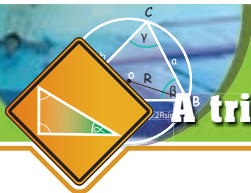
1.4. ábra Szabályos kilencszög alapú egyenes hasáb



1.5. ábra A szabályos kilencszög alapú egyenes hasáb kiterített hálój



1.6. ábra A háromszög területe



A trigonometria alkalmazásai



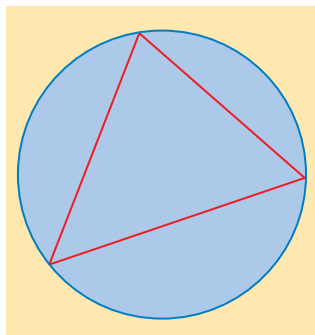
1.7. ábra Egy szabályos kilencszög alapú hasáb fedezhető fel ebben a toronyban

közi befogót. Felírjuk az $\frac{\alpha}{2} = 20^\circ$ szög szinusztát: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$, innen $a \approx 12,19$ cm. A COD egyenlőszárú háromszög alaphoz tartozó magassága felezi az alapot és a szárak szögét: $GD = \frac{b}{2}$, $GOD \angle = \frac{\beta}{2} = 40^\circ$.

A GOD derékszögű háromszögben ismerjük az átfogót és a $\frac{\beta}{2} = 40^\circ$ szöget, és keressük a szöggel szemközti befogót. Felírjuk a $\frac{\beta}{2} = 40^\circ$ szög szinusztát: $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2R}$, innen $b \approx 22,90$ cm. A DEC derékszögű háromszögben ismerjük a $CDE \angle = \gamma = 72^\circ$ szöget és a szög melletti befogót, és keressük a szöggel szemközti befogót. Felírjuk a $\gamma = 72^\circ$ szög tangensét: $\operatorname{tg} \gamma = \frac{m}{b}$, ahonnan $m \approx 70,49$ cm.

A hasáb felszíne: $A = 2T_{\text{alaplapp}} + 9am = 2 \cdot 918,18 + 9 \cdot 12,19 \cdot 70,49 \approx 9569,82$ cm².

A hasáb térfogata: $V = T_{\text{alaplapp}} \cdot m = 918,18 \cdot 70,49 \approx 64722,51$ cm³.



1.8. ábra Jelvény



3. példa Egy 6 cm átmérőjű kör lapból az 1.8. ábrán látható jelvényt készítjük. A körbe írt háromszög csúcsai a kört olyan ívekre bontják, amelyek hosszainak aránya 5 : 6 : 7.

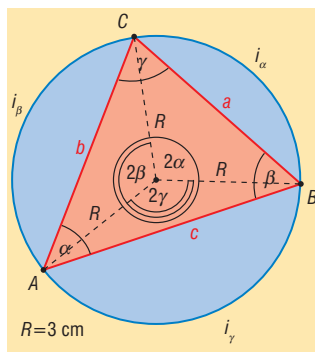
- Mekkora a háromszög kerülete?
- A legnagyobb területű körszeletet levágjuk a körlapról. Az így keletkező hulladék hány százaléka a megmaradó síkidom területének?

(A végeredményeket egy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg!)

Megoldás:

a) Készítsük el az 1.9. ábrát! A feladat szövege szerint az ívek hosszainak aránya 5 : 6 : 7, azaz $i_\alpha : i_\beta : i_\gamma = 5 : 6 : 7$. Mivel a középponti szög nagysága egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával, ezért a megfelelő középponti szögek nagyságainak aránya is 5 : 6 : 7. A kerületi és középponti szögek tétele alapján $2\alpha : 2\beta : 2\gamma = 5 : 6 : 7$, ahonnan $\alpha : \beta : \gamma = 5 : 6 : 7$ (az ívhez tartozó kerületi szögek nagyságainak aránya egyenlő a megfelelő ívek arányával). Így a háromszög belső szögeinek nagyságait $\alpha = 5x$, $\beta = 6x$, $\gamma = 7x$ alakba írhatjuk. A háromszög belső szögeire vonatkozó tétel szerint: $5x + 6x + 7x = 180^\circ$, ahonnan a háromszög szögeire az $\alpha = 50^\circ$, a $\beta = 60^\circ$, a $\gamma = 70^\circ$ adódik.

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy egy háromszög bármelyik szöge, e szöggel szemközti oldala és köré írt körének sugara között az $a = 2R \cdot \sin \alpha$, $b = 2R \cdot \sin \beta$, $c = 2R \cdot \sin \gamma$ összefüggések állnak fenn (1.10. ábra). Tehát $a = 6 \sin 50^\circ \approx 4,6$ cm, $b = 6 \sin 60^\circ \approx 5,2$ cm, $c = 6 \sin 70^\circ \approx 5,6$ cm, innen a háromszög kerülete: $K = 15,4$ cm.



1.9. ábra A 3. a) feladat megoldásához



b) Szemléltessük külön az ábrán a levágott körszeletet (1.11. ábra)! A körszelet területe egyenlő az OAB köríkk és az OAB háromszög területének különbségével. A középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó köríkk területével: $\frac{T_{\text{köríkk}}}{T_{\text{kör}}} = \frac{140^\circ}{360^\circ}$, innen $T_{\text{köríkk}} = \frac{140^\circ}{360^\circ} R^2 \pi = \frac{14}{36} 9\pi \approx 11,0 \text{ cm}^2$. Az OAB háromszög területe $T_{OAB} = \frac{R^2 \cdot \sin 140^\circ}{2} \approx 2,9 \text{ cm}^2$. Így a körszelet (a hulladék) területe $T_{\text{körszelet}} \approx 8,1 \text{ cm}^2$. A megmaradó síkidom területe $T_{\text{kör}} - T_{\text{körszelet}} = 3^2 \pi - 8,1 \approx 20,2 \text{ cm}^2$.

Tehát a hulladék $\frac{8,1}{20,2} 100 = 40,2\%$ -a a megmaradó síkidom területének.



4. példa Határozzuk meg az α hegyesszög szinuszt, koszinuszt, kotangensét az α szög meghatározása nélkül, ha tudjuk, hogy $\text{tg } \alpha = 2\sqrt{6}$!

Megoldás:

1. módszer:

Milyen összefüggés van egy hegyesszög tangense és kotangense, tangense és szinusza, tangense és koszinusa között?

Egy hegyesszög tangense és kotangense között a $\text{ctg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$ azonosságot ismerjük, amelyből a $\text{ctg } \alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$ adódik.

Egy hegyesszög tangense és szinusza között fennáll a $\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ összefüggés, amelyből $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosság felhasználásával a $\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$ azonosságot kapjuk.

Négyzetre emelés után (ez az átalakítás ekvivalens, mert a kifejezések pozitívak):

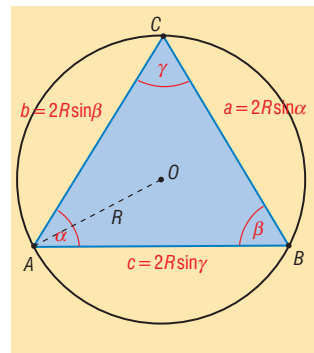
$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Szorozzuk be a nevezővel, majd mindkét oldalhoz adjuk hozzá a $\text{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$ -t:

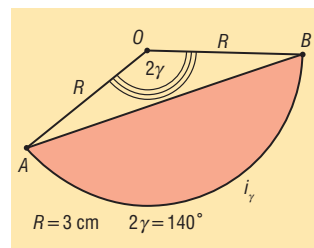
$$\text{tg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot \text{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha!$$

A jobb oldalon emeljük ki a $\sin^2 \alpha$ -t:

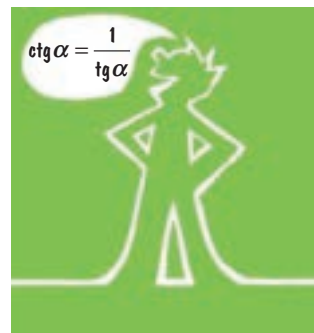
$$\text{tg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot (\text{tg}^2 \alpha + 1)!$$



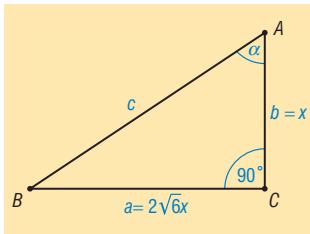
1.10. ábra A háromszög oldalai és a köré írt kör sugara



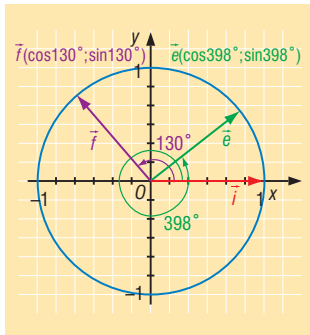
1.11. ábra A 3. b) feladat megoldásához



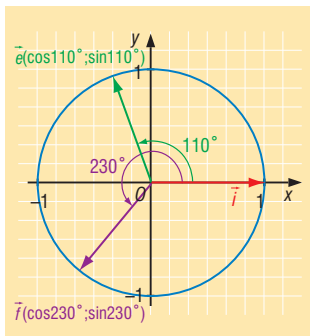
1.12. ábra Használjuk az ismert azonosságokat!



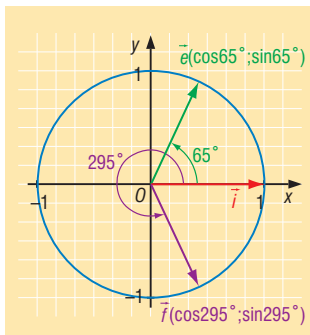
1.13. ábra A $\operatorname{tg} \alpha$ definíciója szerint



1.14. ábra Az 5. a) példa megoldásához



1.15. ábra Az 5. b) példa megoldásához



1.16. ábra Az 5. c) példa megoldásához

A $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1$ ($\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 \neq 0$) kifejezéssel elosztva az egyenlet mindkét oldalát: $\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$, ahonnan négyzetgyökvonás után a $\sin \alpha > 0$ és a $\operatorname{tg} \alpha > 0$ miatt $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{1 + (2\sqrt{6})^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ adódik.

A fentiek alapján:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}, \quad \text{innen}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 1}} = \frac{1}{5}.$$

2. módszer:

Definíció szerint az α hegyesszög tangense az α hegyesszöggel szemközti befogó hosszának és az α hegyesszög melletti befogó hosszának az aránya. A feladat feltétele miatt az α hegyesszöggel szemközti befogó hossza $2\sqrt{6}x$, az α hegyesszög melletti befogó hossza x , ahol $x > 0$ teljesül (1.13. ábra). A Pitagorasz-tétel alapján:

$$(2\sqrt{6}x)^2 + (x)^2 = c^2, \quad \text{ahonnan } c = 5x \text{ adódik. Így az } \alpha \text{ hegyesszög szögfüggvényeinek definíciói szerint } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{2\sqrt{6}x} = \frac{\sqrt{6}}{12},$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}x}{5x} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \text{és} \quad \cos \alpha = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}.$$

5. példa A szögfüggvények definíciója alapján határozzuk meg az alábbi kifejezések előjelét!

- a) $\sin 130^\circ \cdot \sin 398^\circ$; b) $\cos 110^\circ + \cos 230^\circ$; c) $\sin 65^\circ \cdot \cos 295^\circ$;
d) $\operatorname{tg} 215^\circ \cdot \cos 340^\circ$; e) $\operatorname{ctg} 125^\circ + \sin 230^\circ$; f) $\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$.

Megoldás:

- a) Egy tetszőleges α szög szinuszán a koordinátáson $\vec{i}$ egységvektor α szöggel való elforgatásakor kapott egységvektor második koordinátáját értjük. Így a $\sin 130^\circ$ az $\vec{f}$ vektor, a $\sin 398^\circ$ pedig az $\vec{e}$ vektor második koordinátája (1.14. ábra). Az $\vec{e}$, $\vec{f}$ helyvektorok második koordinátái pozitívak, ezért a $\sin 130^\circ \cdot \sin 398^\circ$ szorzat előjele pozitív.
- b) Egy tetszőleges α szög koszinuszán a koordinátáson $\vec{i}$ egységvektor α szöggel való elforgatásakor kapott egységvektor első koordinátáját értjük. Így a $\cos 230^\circ$ az $\vec{f}$ vektor, a $\cos 110^\circ$ pedig az $\vec{e}$ vektor első koordinátája (1.15. ábra). Az $\vec{e}$, $\vec{f}$ helyvektorok első koordinátái negatívak, ezért a $\cos 110^\circ + \cos 230^\circ$ összeg előjele negatív.
- c) A szögek szinuszának és koszinuszának általános értelmezése szerint a $\cos 295^\circ$ az $\vec{f}$ vektor első, a $\sin 65^\circ$ pedig az $\vec{e}$ vektor második ko-

ordinátája (1.16. ábra). A vektorok említett koordinátái pozitívak, ezért a $\sin 65^\circ \cdot \cos 295^\circ$ szorzat előjele pozitív.

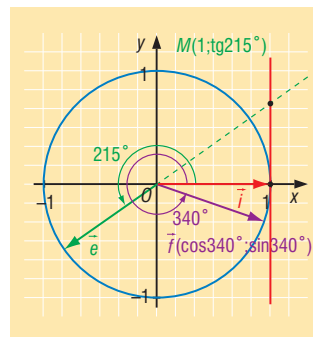
d) Ha $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor az α szög tangense annak a pontnak a második koordinátája, amelyet az $\vec{i}$ egységvektorhoz képest α szöggel elforgatott egységvektor egyenese az origó középpontú, egységsugarú kör $(1;0)$ pontjába húzott érintőből kimetsz. Így a $\tan 215^\circ$ az M pont második koordinátája. A koszinusz szögfüggvény definíciója miatt a $\cos 340^\circ$ egyenlő az $\vec{f}$ vektor első koordinátájával (1.17. ábra).

Az M pont második koordinátája és az $\vec{f}$ vektor első koordinátája pozitív, így a $\tan 215^\circ \cdot \cos 340^\circ$ szorzat előjele pozitív.

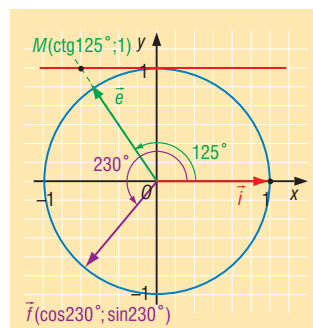
e) Ha $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor az α szög kotangense annak a pontnak az első koordinátája, amelyet az $\vec{i}$ egységvektorhoz képest α szöggel elforgatott egységvektor egyenese az origó középpontú egységsugarú kör $(0;1)$ pontjába húzott érintőből kimetsz. Így a $\cot 125^\circ$ az M pont első koordinátája. A szinus szögfüggvény definíciója miatt a $\sin 230^\circ$ egyenlő az $\vec{f}$ vektor második koordinátájával (1.18. ábra).

Az M pont első koordinátája és az $\vec{f}$ vektor második koordinátája negatív, így a $\cot 125^\circ + \sin 230^\circ$ összeg előjele negatív.

f) A szinus és a koszinusz szögfüggvény definíciója miatt a $\sin 200^\circ$ az $\vec{f}$ vektor második koordinátájával, a $\cos 200^\circ$ pedig az $\vec{f}$ vektor első koordinátájával egyenlő. A $\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$ előjelének megállapításához vizsgáljuk meg az $\vec{f}$ vektor koordinátáinak nagyság szerinti sorrendjét! Szemléltessük a koordinátákon azon pontok halmazát, amely pontok $(x; y)$ koordinátáira az $y > x$, $y = x$, $y < x$ reláció teljesül. Az 1.19. ábra alapján az $\vec{f}$ vektor második koordinátája nagyobb, mint az első koordinátája, azaz $\sin 200^\circ > \cos 200^\circ$, innen a $\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$ különbség előjele pozitív.



1.17. ábra Az 5. d) példa megoldásához



1.18. ábra Az 5. e) példa megoldásához



6. példa Igazoljuk a következő azonosságokat!

a) $\sin \alpha \cdot \sin(\pi - \alpha) - \cos(-\alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha) = \sin \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{7\pi}{3}$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$; c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$;

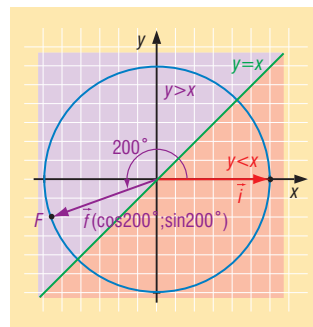
d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$ ($\alpha \neq k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$);

e) $1 + 2 \sin(\alpha + \pi) \cos(\alpha + \pi) = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$.

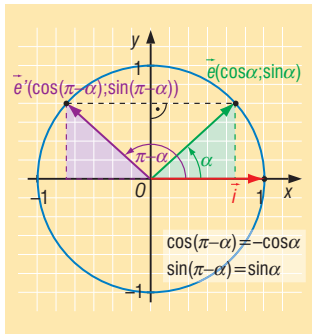
Megoldás:

a) Vizsgáljuk meg az egyenlőség jobb és bal oldalát, majd a kapott kifejezéseket vessük össze! A bizonyítandó azonosság jobb oldalán nevezetes szögek szögfüggvényei szerepelnek, így a jobb oldal:

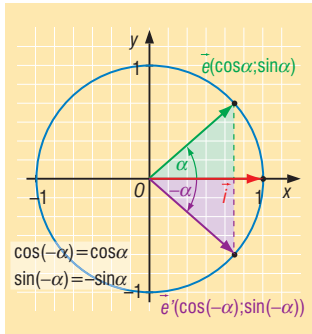
$$\sin \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$



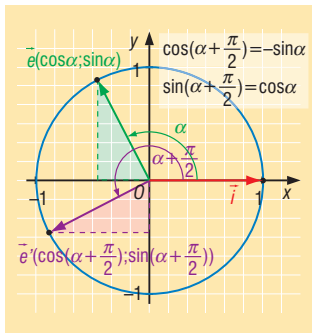
1.19. ábra Az 5. f) példa megoldásához



1.20. ábra A 6. a) példa megoldásához. A helyvektor y tengelyre vonatkozó tükrképének koordinátái



1.21. ábra A 6. a) példa megoldásához. A helyvektor x tengelyre vonatkozó tükrképének koordinátái



1.22. ábra A 6. b) és c) példa megoldásához. A helyvektor origó középpontú, $\frac{\pi}{2}$ nagyságú szöggel való elforgatással kapott képének koordinátái

A $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$, a $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ és a $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ azonosságok (1.20. ábra, 1.21. ábra) felhasználásával az egyenlet bal oldala: $\sin \alpha \cdot \sin(\pi - \alpha) - \cos(-\alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha) = \sin \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha)$. Innen a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosság alapján a $\sin \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ adódik. Tehát azt kaptuk, hogy a bal oldal bármely α szög esetén egyenlő a jobb oldallal. Ezzel az állítást beláttuk.

b) A $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ azonosság alapján az egyenlet bal oldala:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

innen a $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$ összefüggés (1.22. ábra) alkalmazásával

adódik a bizonyítandó állítás: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$.

c) A $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ azonosság alapján a egyenlet bal oldala:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

ahonnan a $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$ összefüggés (1.22. ábra) alkalmazásával

val adódik a bizonyítandó állítás: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$.

d) Az $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) feltétel miatt az egyenlőség mindkét oldala értelmezve van.

A $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbb{Z}$) összefüggés és a feladat b), c)

részében kapott eredmények felhasználásával az egyenlet bal oldala:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}).$$

Innen a $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$ ($\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$) alkalmazásával a bizonyítandó

állítást kapjuk:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \alpha \neq k\pi, \text{ ahol } (k \in \mathbb{Z}).$$

Mielőtt rátérnénk az e) feladat megoldására, vizsgáljuk meg a feladat b), c), és d) részében kapott eredményeinket!



Vegyük észre, hogy a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$, a $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ és a $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$ ($\alpha \neq k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$) a hegyesszögek-re és a pótyszögükre vonatkozó összefüggések általánosításai.

e) A $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ és a $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$ azonosságok (1.24. ábra) felhasználásával az egyenlet bal oldala: $1 + 2 \sin(\alpha + \pi) \cos(\alpha + \pi) = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Kétfágú összeg négyzetére vonatkozó összefüggés alapján az egyenlet jobb oldala: $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$, innen a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosság miatt $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$ adódik. Tehát a bal oldal bármely α szög esetén egyenlő a jobb oldalal. Ezzel az állítást beláttuk.



7. példa

Egy vízszintes, súrlódásmentes asztallapra tett vízszintes helyzetű rugó egyik végét rögzítjük, másik végére egy könnyen guruló kiskocsit helyezünk. A rugóval párhuzamosan kitérített, majd magára hagyott kiskocsi harmonikus rezgő mozgást végez (1.27. ábra). A rezgő test kitérése az $y(t) = A \cdot \sin(\omega t)$, sebessége a $v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$ valós függvényekkel írható le, ahol A a rezgés amplitúdója, a kezdeti maximális kitérés (m), ω a rezgés körfrekvenciája $\left(\frac{1}{s}\right)$, t a kitérés után eltelt idő (s). A kiskocsit kitérítjük a rugóval párhuzamosan 10 cm-rel, majd magára hagyjuk. A rezgő test körfrekvenciája $2 \frac{1}{s}$.

a) Ábrázoljuk a rezgés kitérés-idő, sebesség-idő grafikonját!

b) Jellemezzük az $y(t)$, $v(t)$ függvényeket!

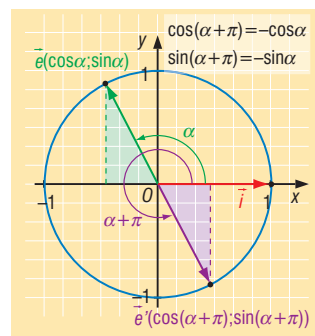
c) Mekkora a kitérés és a sebesség a kitérés után $\frac{\pi}{6}$ s, $\frac{3\pi}{2}$ s múlva?

Megoldás:

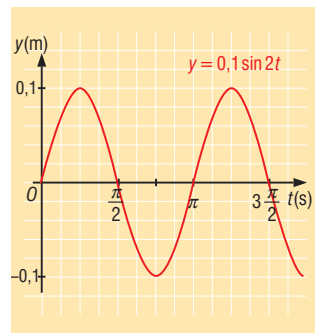
a) A feladat szövege szerint a rezgő test kitérését az $y(t) = 0,1 \cdot \sin 2t$ ($D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$), sebességét a $v(t) = 0,2 \cdot \cos 2t$ ($D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$) függvények írják le. Az $y(t) = 0,1 \cdot \sin 2t$ grafikonját a $t \mapsto \sin t$ ($D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$) alapfüggvényből kiindulva függvénytranszformációk segítségével megkaphatjuk. A tanultak alapján a $t \mapsto \sin 2t$ ($D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$) függvény feleakkora t értékekhez rendeli ugyanazokat a függvényértékeket, mint az alapfüggvény. Az $t \mapsto \sin 2t$ függvény képét megkapjuk, ha az alapfüggvény grafikonját a t tengely mentén felére zsugorítjuk. Az $y(t) = 0,1 \cdot \sin 2t$ függvény ugyanazon t értékekhez 0,1-szer akkora függvényértéket



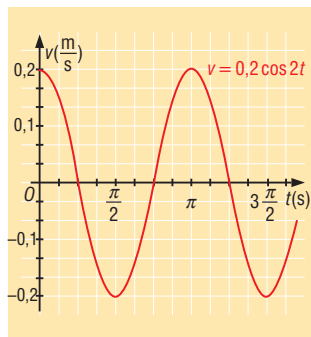
1.23. ábra Bizonyítás



1.24. ábra A 6. e) példa megoldásához. A helyvektor origóra vonatkozó tükrképének koordinátái



1.25. ábra A harmonikus rezgő mozgás kitérés-idő grafikonja



1.26. ábra A harmonikus rezgő mozgás sebesség-idő grafikonja

rendel, mint a $t \mapsto \sin 2t$ függvény. Így ha a $t \mapsto \sin 2t$ függvény grafikonját az y tengely mentén 0,1-szeresére zsugorítjuk, akkor a rezgő test kitérés-idő grafikonját kapjuk (1.25. ábra). A $v(t) = 0,2 \cdot \cos 2t$ grafikonját függvénytranszformációk segítségével a $t \mapsto \cos t$ ($D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$) alapfüggvényből kiindulva megkaphatjuk. A $t \mapsto \sin 2t$ ($D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$) függvény feleakkora t értékekhez rendeli ugyanazokat a függvényértékeket, mint az alapfüggvény. Az $t \mapsto \cos 2t$ függvény képét megkapjuk, ha az alapfüggvény grafikonját a t tengely mentén felére zsugorítjuk. A $v(t) = 0,2 \cdot \cos 2t$ függvény ugyanazon t értékekhez 0,2-szer akkora függvényértéket rendel, mint a $t \mapsto \cos 2t$ függvény. Így ha a $t \mapsto \cos 2t$ függvény grafikonját az y tengely mentén 0,2-szeresére zsugorítjuk, akkor a rezgő test sebesség-idő grafikonját kapjuk (1.26. ábra).

b)

	$y(t)$	$v(t)$
Értelmezési tartomány	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$
Értékkészlet	$\left[-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right]$	$\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right]$
Periódus	π	π
Zérushely	$x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{N})$	$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{N})$
Szélsőérték	Maximumhelyek: $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{N}$. A maximum értéke: $\frac{1}{10}$.	Maximumhelyek: $x = k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{N}$. A maximum értéke: $\frac{1}{5}$.
	Minimumhelyek: $x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{N}$. A minimum értéke: $-\frac{1}{10}$.	Minimumhelyek: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{N}$. A minimum értéke: $-\frac{1}{5}$.
Monotonitás	$A \left[\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi; \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi \right]$ intervallumon ($k \in \mathbb{N}$) szigorúan monoton csökken.	$A \left[\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \pi + k \cdot \pi \right]$ intervallumon ($k \in \mathbb{N}$) szigorúan monoton nő.
	$A \left[0; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi; \frac{5\pi}{4} + k \cdot \pi \right]$ intervallumon ($k \in \mathbb{N}$) szigorúan monoton nő.	$A \left[k \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right]$ intervallumon ($k \in \mathbb{N}$) szigorúan monoton csökken.
Paritás	—	—



c) A kitérés és a sebesség a kitérés után $\frac{\pi}{6}$ s múlva egyenlő az $y(t)$

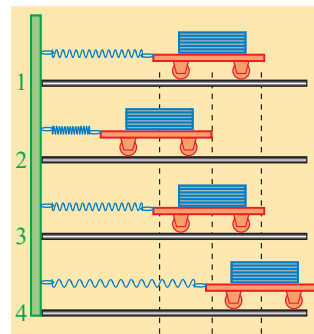
és a $v(t)$ függvények $t = \frac{\pi}{6}$ helyen felvett helyettesítési értékével:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,1 \cdot \sin \frac{2\pi}{6} = 0,1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \approx 0,0866 \text{ m} = 8,66 \text{ cm},$$

$$v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Hasonlóan a kitérés és a sebesség a kitérés után $\frac{3\pi}{2}$ s múlva:

$$y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,1 \cdot \sin 3\pi = 0 \text{ m}, \quad v\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,2 \cdot \cos 3\pi = -0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



1.27. ábra A kiskocsi harmonikus rezgő mozgást végez



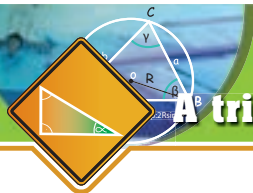
Oldjuk meg!

- Szabályos nyolcszög köré írt körének sugara 12 cm.
 - Mekkora a nyolcszög területe?
 - Mekkora a nyolcszög kerülete?
- Egy szabályos tízoldalú hasáb leghosszabb testátlója 20 m, és az oldaléllel 25° -os szöget zár be.
 - Mekkora a hasáb térfogata?
 - Mekkora szöget zár be a legrövidebb testátló az alaplappal?
- Mekkora a $\sin \alpha$ értéke, ha $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$?
- Mekkora a $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$ értéke, ha $\cos \alpha = \frac{8}{17}$?
- Mekkora a $\frac{7 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}$ értéke, ha $\operatorname{tg} \alpha = \frac{11}{28}$?
- Mekkora a $\sin \alpha + \cos \alpha$ értéke, ha $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{60}{169}$?
- Igazoljuk a következő azonosságokat!
 - $\sin \alpha \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 1 + \cos \alpha \cdot \cos (\alpha + \pi);$
 - $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z} \right);$
 - $\frac{1}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1 \left(\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z} \right)$
- Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényeket!

a) $f: \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 \cos \left(-x + \frac{11\pi}{6} \right) - 1; \quad \text{b) } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = -3 \sin 2x + 2;$

c) $h:]-2\pi; 3\pi[\setminus \{ \pi; 0; \pi; 2\pi \} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \operatorname{tg} \left(-\frac{1}{2}x \right) - 1;$

d) $i: \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right[\setminus \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i(x) = 2 \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 1.$



A trigonometria alkalmazásai

2. Trigonometrikus egyenletek I.



2.1. ábra Egy gyakorlati probléma, amely trigonometrikus egyenlettel is megoldható

Számos gyakorlati probléma megoldása vezet olyan egyenletekre, amelyekben az ismeretlen(ek) valamely szögfüggvénye(i) szerepel(nek). Az ilyen egyenleteket **trigonometrikus egyenletek**nek nevezzük. Néhány gyakorlati alkalmazásra egy későbbi leckében még visszatérünk. Az alábbiakban olyan trigonometrikus egyenletek megoldását mutatjuk be, amelyekre a középiskolai tanulmányaink során szükségünk lehet.



1. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

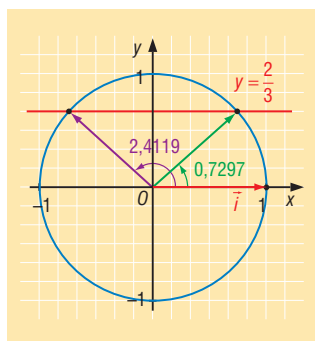
a) $\left(\sin x - \frac{2}{3}\right)(2\cos 3x + 1) = 0$; b) $|\operatorname{tg} 2x| = \frac{1}{2}$; c) $\operatorname{ctg}^2\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) = 1$.

Megoldás:

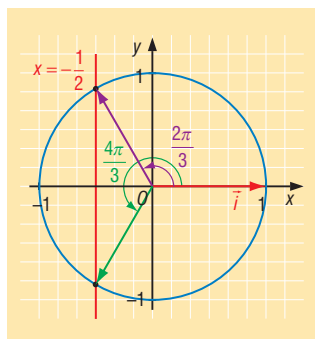
a) Az egyenlet alaphalmaza és az értelmezési tartománya a valós számok halmaza.



Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldalán egy szorzat, a jobb oldalán 0 áll. Mivel egy szorzat akkor és csakis akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így $\sin x = \frac{2}{3}$ vagy $\cos 3x = -\frac{1}{2}$.



2.2. ábra A $\sin x = \frac{2}{3}$ egyenlet megoldása az egységsugarú kör segítségével



2.3. ábra A $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ egyenlet megoldása az egységsugarú kör segítségével

1. módszer:

A szögfüggvények definíciója alapján a $\sin x = \frac{2}{3}$ egyenlet megoldása során keressük azokat az x forgásszögeket, amely szögekkel az $\vec{i}$ vektorhoz képest elforgatott egységvektor második koordinátája $\frac{2}{3}$ az xy koordinátasíkon (2.2. ábra). A $\sin x = \frac{2}{3}$ egyenletnek két megoldása van a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ -on, ezek összege π . Ezen az intervallumon az egyik megoldást számológép (vagy táblázat) segítségével határozhatjuk meg: közelítőleg 0,7297 radián (2.4. és 2.6. ábrák), a másik megoldást megkaphatjuk, ha az imént kapott értéket π -ből kivonjuk: $\pi - 0,7297 = 2,4119$ radián. Így az egyenlet megoldásai: $x_1 = 0,7297 + k \cdot 2\pi$, $x_2 = 2,4119 + l \cdot 2\pi$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$.

Hasonlóan a $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ egyenlet megoldása során keressük azokat a $3x$ forgásszögeket, amely szögekkel az $\vec{i}$ vektorhoz képest elforgatott egységvektor első koordinátája $-\frac{1}{2}$ az xy koordinátasíkon (2.3. ábra).



Az „A” típus esetében:

a)	Billentyűk	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	DRG	RAD
2. lépés: a szög szinuszának bevitele	2 ÷ 3	0,6666
3. lépés: a szög meghatározása	2ndF sin	0,7297 ($\approx x$)



2.4. ábra Az „A” számológép

b)	Billentyűk	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	DRG	RAD
2. lépés: a szög koszinuszának bevitele	- 0 . 5	-0,5
3. lépés: a szög meghatározása	2ndF cos	$\frac{2\pi}{3} (= 3x) \approx 2,0944$

c)	Billentyűk	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	DRG	RAD
2. lépés: a szög tangensének bevitele	0 . 5	0,5
3. lépés: a szög meghatározása	2ndF tan	$0,4636 \approx 2x$

d)	Billentyűk	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	DRG	RAD
2. lépés: a szög kotangensének bevitele	1	1
3. lépés: a szög tangensének kiszámítása	1/x	$1 \left(= \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{5} \right) \right)$
4. lépés: a szög meghatározása	2ndF tan	$\frac{\pi}{4} \left(= x + \frac{3\pi}{5} \right) \approx 0,7854$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

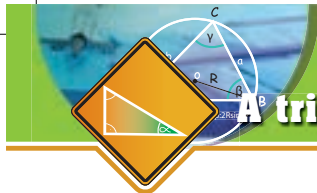
$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$



2.5. ábra Idézzük fel a szögek mértékegységét!



A trigonometria alkalmazásai

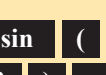
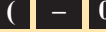
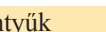


2.6. ábra A „B” számológép



2.7. ábra Tartsuk be a lépések sorrendjét!

A „B” típus esetén:

a)	Billentyűk	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	 	1 : MthIO 2 : LineIO 3 : Deg 4 : Rad :
	4	R
2. lépés: az adatok bevitele, a szög meghatározása	      	$\sin^{-1}(2 \div 3)$ $0,7297(\approx x)$
b)	Billentyűk	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	 	1 : MthIO 2 : LineIO 3 : Deg 4 : Rad :
	4	R
2. lépés: az adatok bevitele, a szög meghatározása	      	$\cos^{-1}(-0,5)$ $\frac{2\pi}{3}(=3x) \approx 2,0944$
c)	Billentyűk	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	 	1 : MthIO 2 : LineIO 3 : Deg 4 : Rad :
	4	R
2. lépés: az adatok bevitele, a szög meghatározása	     	$\tan^{-1}(0,5)$ $0,4636(\approx 2x)$
d)	Billentyűk	Kijelző
1. lépés: a szög mértékegységének beállítása	 	1 : MthIO 2 : LineIO 3 : Deg 4 : Rad :
	4	R
2. lépés: az adatok bevitele, a szög tangensének meghatározása	  	$1^{-1} = 1$
3. lépés: a szög meghatározása	   	$\frac{\pi}{4} \left(= x + \frac{3\pi}{5} \right) = 0,7854$



A $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ egyenletnek a $[0; 2\pi[$ -on két megoldása van, amelyek összege 2π ; $\frac{2\pi}{3}$ és $2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ radián. Így $3x = \frac{2\pi}{3} + m \cdot 2\pi$ vagy $3x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, ahol $m, n \in \mathbb{Z}$. Az egyenlet megoldásai: $x_1 = \frac{2\pi}{9} + m \cdot \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{4\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$).

Tehát a feladat megoldása: $x_1 \approx 0,7297 + k \cdot 2\pi$, $x_2 = 2,4119 + l \cdot 2\pi$, $x_3 = \frac{2\pi}{9} + m \cdot \frac{2\pi}{3}$ vagy $x_4 = \frac{4\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, ahol $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$.

2. módszer:

A trigonometrikus egyenletek megoldásait kereshetjük grafikus úton is. A $\sin x = \frac{2}{3}$ egyenlet bal oldalának megfelelő függvény: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, a jobb oldalnak megfelelő függvény: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2}{3}$ (2.9. ábra).

A 2.4., 2.6. és 2.9. ábrák alapján $x_1 \approx 0,7297 + k \cdot 2\pi$, $x_2 \approx 2,4119 + l \cdot 2\pi$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$.

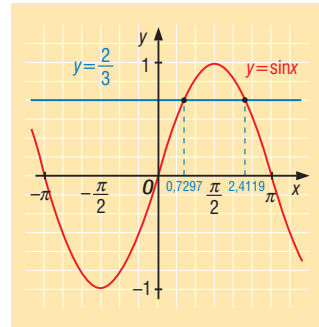
A $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásakor jelöljük α -val a koszinuszfüggvény argumentumában álló szöget ($\alpha = 3x$)! Az egyenlet bal oldalának megfelelő függvény: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\alpha) = \cos \alpha$, a jobb oldalnak megfelelő függvény: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\alpha) = -\frac{1}{2}$ (2.10. ábra).

A 2.10. ábra alapján $3x = \frac{2\pi}{3} + m \cdot 2\pi$ vagy $3x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, ahol $m, n \in \mathbb{Z}$. Innen a feladat megoldása: $x_1 \approx 0,7297 + k \cdot 2\pi$, $x_2 \approx 2,4119 + l \cdot 2\pi$, $x_3 = \frac{2\pi}{9} + m \cdot \frac{2\pi}{3}$ vagy $x_4 = \frac{4\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$, ahol $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$.

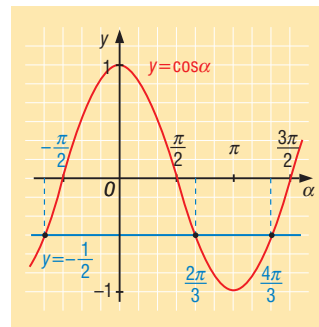
b) A $|\lg 2x| = \frac{1}{2}$ egyenlet értelmezési tartománya a tangens szögfüggvény értelmezése miatt $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Az abszolút érték definíciója alapján $\lg 2x = \pm \frac{1}{2}$.



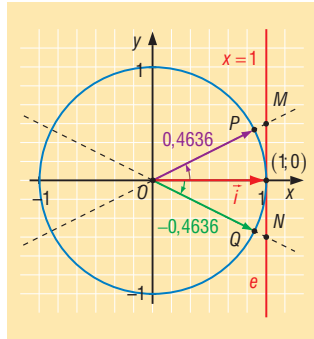
2.8. ábra Az egyenlet minden megoldását vizsgáljuk meg!



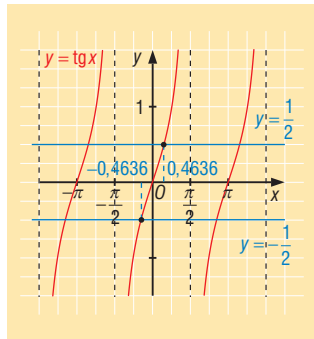
2.9. ábra A $\sin x = \frac{2}{3}$ egyenlet grafikus megoldásához



2.10. ábra A $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ egyenlet grafikus megoldásához



2.11. ábra A $|\operatorname{tg} 2x| = \frac{1}{2}$ egyenlet megoldása az egységsugarú kör segítségével



2.12. ábra A $|\operatorname{tg} 2x| = \frac{1}{2}$ egyenlet grafikus megoldásánál használt grafikonok

1. módszer:

A definíció értelmében az egyenlet megoldásakor keressük azokat a for-gásszögeket, amelyekkel az $\vec{i}$ egységvektort elforgatva a kapott egy-ségvektor egyenese és az egységsugarú kör $(1;0)$ pontjába húzott érintő közös pontjának második koordinátája $\frac{1}{2}$ vagy $-\frac{1}{2}$. A P pontba húzott egységvektor egyenesének és az érintő (e) közös pontjának (M) máso-dik koordinátája $\frac{1}{2}$. A Q pontba húzott egységvektor egyenesének és az érintő (e) közös pontjának (N) második koordinátája $-\frac{1}{2}$ (2.11. ábra).

A $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ -on egy olyan szög van, amelynek tangense $\frac{1}{2}$. Ezt a szöget számológép (vagy táblázat) segítségével határozhatjuk meg: közelítőleg 0,4636 radián (2.4. ábra, 2.6. ábra). Mivel a tangensfüggvény páratlan, ezért a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ -on a $-0,4636$ radián nagyságú az a szög, amelynek tangense $-\frac{1}{2}$. Így $2x \approx 0,4636 + k \cdot \pi$ vagy $2x \approx -0,4636 + l \cdot \pi$, ahon-nan az egyenlet megoldásai: $x_1 \approx 0,2318 + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $x_2 \approx -0,2318 + l \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$. Mindkét megoldáshalmaz kielégíti az eredeti egyenletet.

2. módszer:

A $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{2}$ és a $\operatorname{tg} 2x = -\frac{1}{2}$ egyenletek megoldásakor jelöljük α -val a tangensfüggvény argumentumában álló szöget ($\alpha = 2x$)! Az egyen-letek bal oldalainak megfelelő függvény: $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$, a jobb oldalaknak megfelelő függvények: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\alpha) = \frac{1}{2}$ és $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(\alpha) = -\frac{1}{2}$ (2.12. ábra). Így $\alpha \approx 0,4636 + k \cdot \pi$ vagy $\alpha \approx -0,4636 + l \cdot \pi$, ahonnan az $\alpha = 2x$ miatt az egyenlet megol-dásai: $x_1 \approx 0,2318 + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $x_2 \approx -0,2318 + l \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$. Mind-két megoldáshalmaz kielégíti az eredeti egyenletet.

c) A $\operatorname{ctg}^2\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) = 1$ egyenlet értelmezési tartománya, a kotan-gens szögfüggvény értelmezése miatt $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3\pi}{5} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Az egyenlet mindkét oldala nemnegatív, így négyzetgyökvonás után $\left|\operatorname{ctg}\left(x + \frac{3\pi}{5}\right)\right| = 1$ adódik. Innen az abszolút érték definíciója miatt $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) = \pm 1$.



1. módszer:

A definíció értelmében az egyenlet megoldásakor keressük azokat a forgásszögeket, amelyekkel az $\vec{i}$ egységvektort elforgatva a kapott egységvektor egyenese és az egységsugarú kör $(0;1)$ pontjába húzott érintő közös pontjának első koordinátája 1 vagy -1 . A P pontba húzott egységvektor egyenesének és az érintő (e) közös pontjának (M) első koordinátája 1. A Q pontba húzott egységvektor egyenesének és az érintő

(e) közös pontjának (N) első koordinátája -1 . A $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ halmazon a $\frac{\pi}{4}$ radián az egyetlen olyan szög, amelynek kotangense 1 (2.14. ábra). Mivel a kotangensfüggvény páratlan, ezért a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ hal-

mazon a $-\frac{\pi}{4}$ radián nagyságú az a szög, amelynek kotangense -1 -gyel egyenlő. Így $x + \frac{3\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ vagy $x + \frac{3\pi}{5} = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$, ahonnan az

egyenlet megoldása: $x_1 = -\frac{7\pi}{20} + k \cdot \pi$, $x_2 = -\frac{17\pi}{20} + l \cdot \pi$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$.

Mindkét megoldáshalmaz kielégíti az eredeti egyenletet.

2. módszer:

A $\text{ctg}\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) = 1$ és a $\text{ctg}\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) = -1$ egyenletek megoldásakor jelöljük α -val a kotangensfüggvény argumentumában álló szöget

$\left(\alpha = x + \frac{3\pi}{5}\right)$! Az egyenletek bal oldalainak megfelelő függvény:

$f: \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(\alpha) = \text{ctg} \alpha$, a jobb oldalaknak megfelelő függvények: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(\alpha) = 1$ és $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(\alpha) = -1$ (a grafikonok a 2.15. ábrán láthatók).

Így $\alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ vagy $\alpha = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$, ahonnan az $\alpha = x + \frac{3\pi}{5}$ mi-

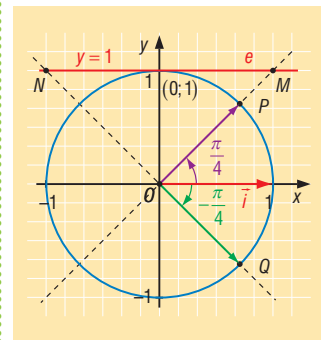
att az egyenlet megoldásai: $x_1 = -\frac{7\pi}{20} + k \cdot \pi$, $x_2 = -\frac{17\pi}{20} + l \cdot \pi$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$. Mindkét megoldáshalmaz kielégíti az eredeti egyenletet.



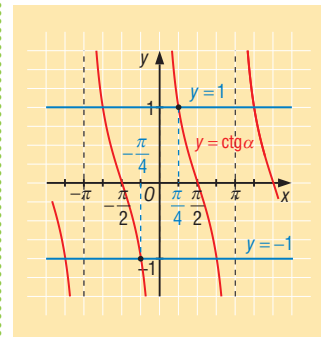
Vegyük észre, hogy a trigonometrikus egyenletek nagy részének megoldása $\sin x = a$, $\cos x = b$, $\text{tg} x = c$, $\text{ctg} x = d$ típusú (az 1. példában szereplő egyenletekhez hasonló) egyenletekhez vezet.



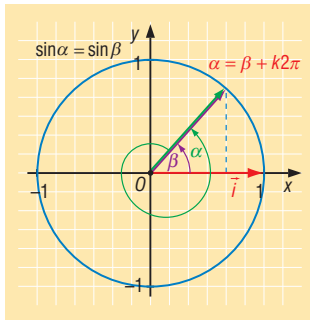
2.13. ábra Melyiket válasszam?



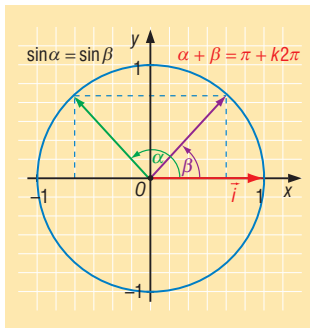
2.14. ábra A $\text{ctg}^2\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) = 1$ egyenlet megoldása az egységsugarú kör segítségével



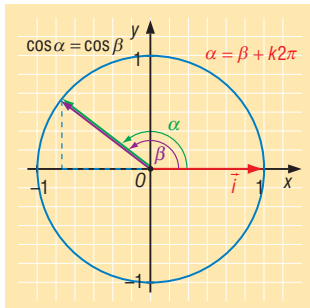
2.15. ábra A $\text{ctg}^2\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) = 1$ egyenlet grafikus megoldásához



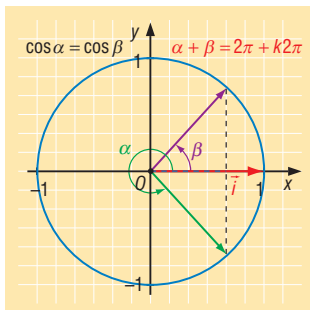
2.16. ábra A $\sin \alpha = \sin \beta$ típusú egyenletek megoldásához I.



2.17. ábra A $\sin \alpha = \sin \beta$ típusú egyenletek megoldásához II.



2.18. ábra A $\cos \alpha = \cos \beta$ típusú egyenletek megoldásához I.



2.19. ábra A $\cos \alpha = \cos \beta$ típusú egyenletek megoldásához II.

2. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin 3x$; b) $\cos 2x = -\cos \frac{x}{2}$;
c) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{tg} x = 0$; d) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg} 4x$.

Megoldás:

a) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

A $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin 3x$ egyenlet mindkét oldalán egy-egy szög szinusza áll. A definíció alapján könnyen belátható, hogy két szög szinusza akkor és csakis akkor egyenlő, ha a két szög a 2π (a szinuszfüggvény periódusának) egész számú többszörösében tér el egymástól, vagy ha a két szög összege a π páratlan többszöröse (2.16. ábra, 2.17. ábra).

Matematikai jelekkel:

$$\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k \cdot 2\pi \text{ vagy } \alpha + \beta = \pi + l \cdot 2\pi, \text{ ahol } k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{A fentiek értelmében } 3x = x + \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ vagy } 3x + x + \frac{3\pi}{4} = \pi + l \cdot 2\pi, \text{ innen az egyenlet megoldásai:}$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{8} + k \cdot \pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{16} + l \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

b) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

A $\cos 2x = -\cos \frac{x}{2}$ egyenlet bal oldalán egy szög koszinusza, jobb oldalán egy szög koszinuszának ellentettje áll. A $-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$ azonosság alapján az egyenlet $\cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$ alakba írható. Így

már az a kérdés, hogy két szög koszinusza mikor egyenlő. A definíció alapján belátható, hogy két szög koszinusza akkor és csakis akkor egyenlő, ha a két szög a 2π (a koszinuszfüggvény periódusának) egész számú többszörösében tér el egymástól, vagy ha a két szög összege 2π egész számú többszöröse (2.18. és 2.19. ábra).

Matematikai jelekkel:

$$\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k \cdot 2\pi \text{ vagy } \alpha + \beta = 2\pi + l \cdot 2\pi, \text{ ahol } k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{A fentiek szerint } 2x = \pi - \frac{x}{2} + k \cdot 2\pi \text{ vagy } 2x + \frac{\pi}{2} - x = 2\pi + l \cdot 2\pi,$$

$$\text{ahonnan az egyenlet megoldásai: } x_1 = \frac{2\pi}{5} + k \cdot \frac{4\pi}{5}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2} + l \cdot 2\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

c) Az egyenlet értelmezési tartománya a tangens szögfüggvény értelmezése miatt $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ vagy } \frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{2} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\text{A } \operatorname{tg} \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right) + \operatorname{tg} x = 0 \text{ egyenletet átrendezve, a } -\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$$

azonosságot felhasználva az egyenlet $\operatorname{tg} \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right) = \operatorname{tg}(-x)$ alakba írható. A definíció alapján belátható, hogy két szög tangense akkor és csak akkor egyenlő, ha a két szög a π (a tangensfüggvény periódusának) egész számú többszörösében tér el egymástól (2.20. ábra).

Matematikai jelekkel:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \mid m, n \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow \alpha = \beta + k \cdot \pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{A fentiek miatt } 2x - \frac{2\pi}{3} = -x + n \cdot \pi, \text{ innen } x = \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{\pi}{3} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

adódik. Az $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) feltétel miatt meg kell vizsgálnunk, hogy a $\frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mely $k, n \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül.

$$\text{A } \frac{\pi}{18}(4+6n) \neq \frac{\pi}{18}(9+18k) \text{ bármely } k, n \in \mathbb{Z} \text{ esetén fennáll, mert}$$

$$2 \mid 4+6n \text{ és } 2 \nmid 9+18k. \text{ Hasonlóan az } x \neq \frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{2} \text{ feltétel miatt } (l \in \mathbb{Z}):$$

$$\frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{2} \text{-nek kell teljesülni. A } \frac{\pi}{36}(8+12n) \neq \frac{\pi}{36}(3+18l)$$

$$\text{bármely } l, n \in \mathbb{Z} \text{ esetén fennáll, mert } 2 \mid 8+12n \text{ és } 2 \nmid 3+18l. \text{ Tehát az}$$

$$\text{egyenlet megoldásai: } x = \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{\pi}{3} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

d) Az egyenlet értelmezési tartománya a kotangens szögfüggvény értelmezése miatt $\mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. A definíció alapján belátható, hogy

két szög kotangense akkor és csak akkor egyenlő, ha a két szög a π (a kotangensfüggvény periódusának) egész számú többszörösében tér el egymástól (2.21. ábra).

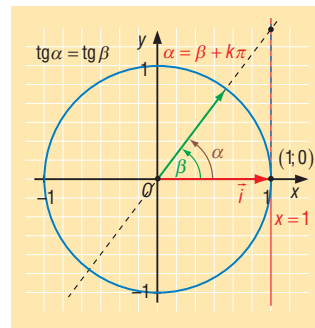
Matematikai jelekkel:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta \left(\alpha \neq m\pi, \beta \neq n\pi, m, n \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow \alpha = \beta + k \cdot \pi, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

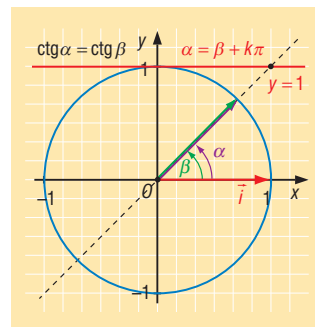
$$\text{A fentiek értelmében } 4x = x + \frac{3\pi}{4} + l \cdot \pi, \text{ innen } x = \frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{3} \quad (l \in \mathbb{Z})$$

$$\text{adódik. Az } x \neq k \cdot \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ feltétel miatt } \frac{\pi}{12} \cdot (3+4l) \neq \frac{\pi}{12} \cdot 3k, \text{ ez a}$$

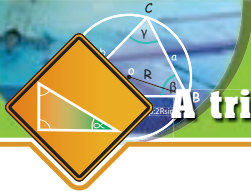
$$\text{feltétel nem teljesül, ha } 3 \mid l. \text{ Az előzőek miatt } 3 \nmid l, \text{ így } l = 3n+1 \text{ vagy}$$



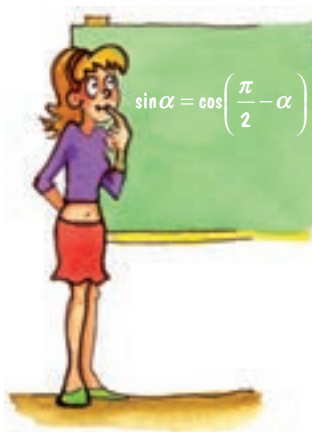
2.20. ábra A $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ típusú egyenletek megoldásához



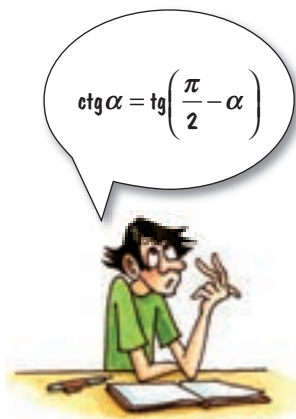
2.21. ábra A $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$ típusú egyenletek megoldásához



A trigonometria alkalmazásai



2.22. ábra A feladat megoldásához válasszuk ki a megfelelő azonosságot



2.23. ábra Pótszögek szögfüggvényei?

$l = 3m + 2$ alakba írható, ahol $m, n \in \mathbb{Z}$. Tehát az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \frac{7\pi}{12} + n \cdot \pi, \quad x_2 = \frac{11\pi}{12} + m \cdot \pi \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$



3. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$ b) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = 1.$

Megoldás:

a) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

A $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x$ egyenlet bal oldalán egy szög koszinusza, jobb oldalán egy szög szinusza áll. A pótszögek szögfüggvényeire vonatkozó $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ azonosság alapján az egyenlet $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ alakba írható. Így már az a kérdés, hogy két szög koszinusza mikor egyenlő. Az előzőek miatt $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 2x + k \cdot 2\pi$ vagy $x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 2x = 2\pi + l \cdot 2\pi$, ahonnan az egyenlet megoldásai: $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad x_2 = -\frac{5\pi}{4} - l \cdot 2\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$

b) Az egyenlet értelmezési tartománya a tangens szögfüggvény értelmezése miatt $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ vagy } \frac{7\pi}{30} + l \cdot \frac{\pi}{3} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}.$

A $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ egyenletnél két szög tangensének szorzata 1-gyel egyenlő. Ha $\operatorname{tg} x \neq 0$, akkor az egyenlet mindkét oldalát $\operatorname{tg} x$ -szel elosztva és a $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \left(x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$ azonosságot felhasználva a $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{ctg} x$ egyenletet kapjuk.

Most alkalmazzuk a pótszögek szögfüggvényeire vonatkozó

$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ azonosságot ($\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$): $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) =$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$ Innen $3x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - x + n \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z}),$ ahonnan

$x = \frac{7\pi}{40} + n \cdot \frac{\pi}{4} \quad (n \in \mathbb{Z})$ adódik. Az $x \neq \frac{7\pi}{30} + l \cdot \frac{\pi}{3} \quad (l \in \mathbb{Z})$ és az

$x \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$ feltételek teljesülnek, az eredeti egyenlet megoldá-



sa: $x = \frac{7\pi}{40} + n \cdot \frac{\pi}{4}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Ha $\operatorname{tg} x = 0$, akkor az egyenlet bal oldala 0-val, míg jobb oldala 1-gyel egyenlő, tehát ellentmondást kapunk. Így a feladat megoldása $x = \frac{7\pi}{40} + n \cdot \frac{\pi}{4}$ ($n \in \mathbb{Z}$).



Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0$; b) $|\cos(x - \pi)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$; d) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \cdot \sin 3x = 0$; b) $\cos^2 2x - \frac{1}{2} = 0$; c) $\left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)\right| = 1$; d) $\operatorname{ctg} 4x - 2 = 0$.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin x$; b) $\cos 2x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$; c) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} x$;
d) $\operatorname{ctg}\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} 3x$.

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg} 2x$; b) $\cos 3x + \cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = 0$; c) $\cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin x = 0$;
d) $\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg}\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) = -1$.

3. Trigonometrikus egyenletek II.

Az alábbiakban olyan trigonometrikus egyenleteket mutatunk be, amelyek megoldásában felhasználjuk ugyanazon szög szögfüggvényei közötti összefüggéseket. A megoldás során elsőként a szögfüggvény értékét határozzuk meg, majd a kapott értékből adjuk meg az ismeretlen értékét.

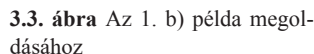
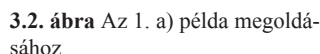


1. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{\sin x + 3 \cos x}{\cos x} = 1$.



3.1. ábra Valamelyik egyenlet ismerős?


$$\text{ahol } k, l, m, n \in \mathbb{Z}.$$

megoldásokat egybefoglalva: $x = \frac{5\pi}{6} + l \cdot \pi \quad (l \in \mathbb{Z})$.

Innen az egyenlet megoldása: $x \approx -1,1071 + l \cdot \pi$ ($l \in \mathbb{Z}$).

$\cos x$ -szel $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right)$, így ezek az egyenletek $\operatorname{tg} x = a$ alakba írhatók.



2. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} x = 7$; b) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \sqrt{5}$.

Megoldás:

a) A tangens és a kotangens szögfüggvények értelmezése miatt az egyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ebben az egyenletben ugyanazon szög tangense és kotangense szerepel, a közöttük fennálló $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ $\left(x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$ összefüggés alapján: $2 \operatorname{tg} x + \frac{5}{\operatorname{tg} x} = 7$, a $\operatorname{tg} x$ -szel való szorzás után a $2 \operatorname{tg}^2 x + 5 = 7 \operatorname{tg} x$ egyenletet kapjuk. A kapott egyenlet $\operatorname{tg} x$ -re nézve másodfokú, 0-ra redukálva: $2 \operatorname{tg}^2 x - 7 \operatorname{tg} x + 5 = 0$. Megoldása: $(\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{4}$, azaz $\operatorname{tg} x = 1$ vagy $\operatorname{tg} x = \frac{5}{2}$. Innen $x_1 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$, $x_2 \approx 1,1903 + m \cdot \pi$ ($l, m \in \mathbb{Z}$). A kapott értékek eleget tesznek az eredeti egyenletnek (3.4. ábra).

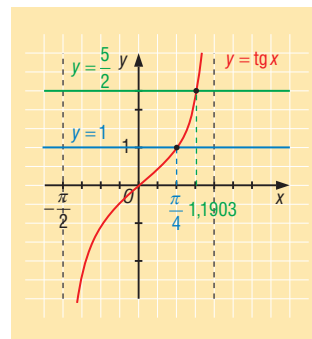
b) A tangens szögfüggvény értelmezése miatt az egyenlet értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ebben az egyenletben ugyanazon szög szinusza és tangense szerepel, a közöttük fennálló $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right)$ összefüggés alapján: $\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x = \sqrt{5}$, a $\cos x$ -szel való szorzás után a $\sin^2 x = \sqrt{5} \cos x$ egyenletet kapjuk. Ugyanazon szög szinusza és koszinusza között fennálló $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot felhasználva, a $\sin^2 x$ helyére $1 - \cos^2 x$ -et helyettesítve az egyenletben egyféle szögfüggvény lesz: $1 - \cos^2 x = \sqrt{5} \cos x$. A kapott egyenlet $\cos x$ -re nézve másodfokú, 0-ra redukálva: $\cos^2 x + \sqrt{5} \cos x - 1 = 0$. Megoldása: $(\cos x)_{1,2} = \frac{-\sqrt{5} \pm 3}{2}$.

A koszinuszfüggvény értékészlete a $[-1; 1]$, ezért csak a $\cos x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ teljesülhet (3.6. ábra). Innen $x_1 \approx 1,1789 + l \cdot 2\pi$, $x_2 \approx 5,1043 + m \cdot 2\pi$ ($l, m \in \mathbb{Z}$). A kapott értékek eleget tesznek az eredeti egyenletnek.

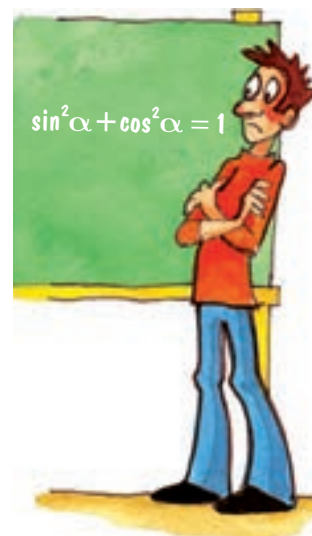


3. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

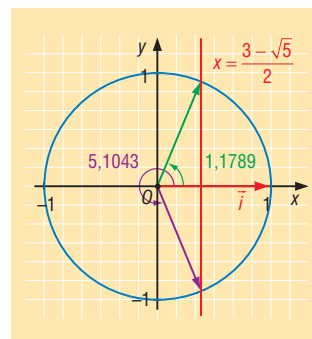
a) $4 \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x = 3 \cos^2 x$; b) $2 \sin x - 2 \cos x = \sqrt{3} - 1$.



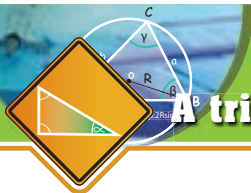
3.4. ábra A 2. a) példa megoldásához



3.5. ábra Trigonometrikus Pitagorasz-tétel



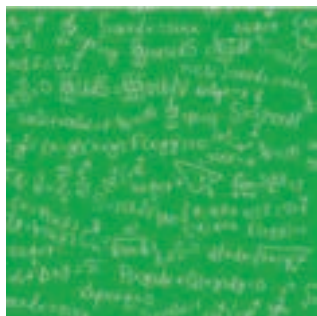
3.6. ábra A 2. b) példa megoldásához



A trigonometria alkalmazásai



3.6. ábra Emelt szint



3.8. ábra Itt a szinusz, hol a szinusz?

Megoldás:

a) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Az egyenlet $\sin x$ -re vagy $\cos x$ -re nézve másodfokú, 0-ra redukálva: $4\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x - 3 \cdot \cos^2 x = 0$. A megfelelő együtthatók a szokásos jelölésekkel: $a = 4$, $b = -4\cos x$ és $c = -3\cos^2 x$, innen a megoldóképlet szerint

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{4\cos x \pm \sqrt{16\cos^2 x + 48\cos^2 x}}{8} = \frac{4\cos x \pm 8|\cos x|}{8} \text{ adódik.}$$

Így $\sin x = \frac{3}{2}\cos x$ vagy $\sin x = -\frac{1}{2}\cos x$. (Az abszolútérték-jelet elhagyhatjuk, mert előtte $\pm$ áll.) Az 1. feladathoz fűzött megjegyzés alap-

ján az egyenletek mindkét oldalát $\cos x$ -szel $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right)$ elosztva: $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$ vagy $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ egyenleteket kapjuk. Innen az eredeti egyenletnek is eleget tevő megoldások: $x_1 \approx 0,9828 + k \cdot \pi$, $x_2 \approx -0,4636 + l \cdot \pi$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

b) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A $2\sin x - 2\cos x = \sqrt{3} - 1$ egyenlet bal oldalán ugyanazon szög szinuszának és koszinuszának lineáris kombinációja áll, jobb oldalán pedig egy konstans. Ugyanazon szög szinusza és koszinusza között négyzetes összefüggés van ($\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén). Ez azt sugallja, hogy az egyenlet mindkét oldalának négyzetre emelése segíthet a megoldásban. Ebben az esetben a négyzetre emelés nem ekvivalens átalakítás, ilyenkor a megoldáshalmaz bővíthet. Emiatt a kapott értékeket le kell ellenőrizni.

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:

$4\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 4 - 2\sqrt{3}$, majd 2-vel való osztás után $2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 2 - \sqrt{3}$. A jobb oldalon álló $2 - \sqrt{3}$ helyére a $(2 - \sqrt{3}) \cdot 1 = (2 - \sqrt{3}) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$ helyettesítve: $2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 2\cos^2 x = (2 - \sqrt{3})(\sin^2 x + \cos^2 x)$,

ahonnan a $\sqrt{3}\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ egyenletet kapjuk. Az egyenlet $\sin x$ -re nézve másodfokú, megoldása: $(\sin x)_{1,2} =$

$$= \frac{4\cos x \pm \sqrt{16\cos^2 x - 12\cos^2 x}}{2\sqrt{3}} = \frac{4 \pm 2}{2\sqrt{3}} \cos x. \text{ Mivel nincsen olyan}$$

szög, amelynek a szinusza és a koszinusza egyszerre 0 lenne, ezért a $\cos x = 0$ esetén az egyenlet nem áll fenn. Így az egyenletek mindkét oldalát eloszthatjuk $\cos x$ -szel $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right)$: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

vagy $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Innen az $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$ ($k, l \in \mathbb{Z}$) érté-

keket kapjuk. Ellenőrzéskor az eredeti egyenletbe helyettesítjük be a kapott értékeket. Mivel a $2\sin x - 2\cos x = \sqrt{3} - 1$ egyenletben sze-



replő trigonometrikus függvények periódusa 2π , ezért x_1 ellenőrzésekor elegendő a $\frac{\pi}{3}$ és a $\frac{4\pi}{3}$, az x_2 ellenőrzésekor pedig a $\frac{\pi}{6}$ és a $\frac{7\pi}{6}$ értékeket ellenőrizni. A $\frac{\pi}{3}$ ellenőrzése: $2\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - 1$ fennáll, tehát $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) megoldás. A $\frac{4\pi}{3}$ ellenőrzése: $2\sin\frac{4\pi}{3} - 2\cos\frac{4\pi}{3} \neq \sqrt{3} - 1$, tehát $\frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) nem megoldás. A $\frac{\pi}{6}$ ellenőrzése: $2\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{6} \neq \sqrt{3} - 1$, tehát $\frac{\pi}{6} + l \cdot 2\pi$ ($l \in \mathbb{Z}$) nem megoldás. A $\frac{7\pi}{6}$ ellenőrzése: $2\sin\frac{7\pi}{6} - 2\cos\frac{7\pi}{6} = \sqrt{3} - 1$ fennáll, tehát $\frac{7\pi}{6} + l \cdot 2\pi$ ($l \in \mathbb{Z}$) megoldás. A feladat megoldása tehát:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad x_2 = \frac{7\pi}{6} + l \cdot 2\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$


Korábban már megismerkedtünk az egyenletek különböző megoldási módjaival. A következő feladatban felhívjuk a figyelmet arra, hogy a trigonometrikus egyenletek megoldásában is szerepet játszhat az egyenletek szorzattá alakítása, illetve értékkészletének vizsgálata.



4. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2\cos x \cdot \sin x + \cos x - 2\sin x = 1$; b) $2\sin 3x = y^2 + 2y + 3$.

Megoldás:

a) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Redukáljuk az egyenletet 0-ra: $2\cos x \cdot \sin x + \cos x - 2\sin x - 1 = 0$, csoportosítsuk a bal oldalon álló tagokat és emeljünk ki: $\cos x \cdot (2\sin x + 1) - (2\sin x + 1) = 0$. Az egyenlet bal oldalán emeljük ki a $(2\sin x + 1)$ kifejezést: $(2\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0$. Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0-val egyenlő. Emiatt $\sin x = -\frac{1}{2}$ vagy $\cos x = 1$, ahonnan az egyenlet megoldásai $x_1 = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $x_2 = \frac{11\pi}{6} + l \cdot 2\pi$ ($l \in \mathbb{Z}$), $x_3 = m \cdot 2\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$).

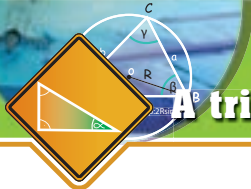
b) Az egyenlet értelmezési tartománya a rendezett valós számpárok halmaza. Ebben az egyenletben két ismeretlen szerepel, ilyenkor célravezető lehet az egyenlet értékkészletének vizsgálata. Az egyenlet bal



3.9. ábra Milyen egyenletmegoldási módokat tanultunk?



3.10. ábra A függvény minimuma?



A trigonometria alkalmazásai



3.11. ábra Kiemelés

oldalán álló $2 \sin 3x$ trigonometrikus kifejezés értékkészlete $[-2; 2]$, mert a szinuszfüggvény értékkészlete $[-1; 1]$. A jobb oldalon álló másodfokú kifejezést teljes négyzetté alakítjuk: $y^2 + 2y + 3 = (y+1)^2 + 2$. Az $(y+1)^2 \geq 0$ miatt a jobb oldalon álló kifejezés értékkészlete $[2; \infty[$. A fentiekből következik, hogy $2 \sin 3x = 2$ és $(y+1)^2 + 2 = 2$. Innen az egyenlet megoldása: $\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; -1\right)$ rendezett számpár, ahol $k \in \mathbb{Z}$.



Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin(x - \pi) = -\sqrt{3} \cos(x - \pi)$; c) $\frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x - 3 \cos x} = -\frac{3}{2}$.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2 \sin^2 x + 3 \sin(-x) + 1 = 0$; b) $\cos^2 x = -\frac{5}{2} \sin x$; c) $2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = -1$; d) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = 2$.

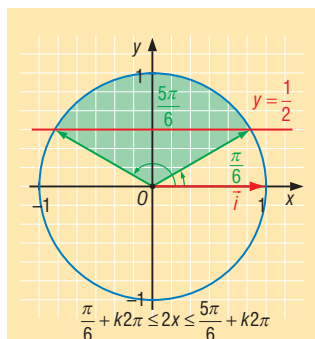
3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$; b) $\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin x \cos x - \sin x + \cos x - 1 = 0$; b) $\cos^3 x = -x^2 - 2x - 2$.

4. Trigonometrikus egyenlőtlenségek (Kiegészítő, emelt szintű tananyag)



4.1. ábra A $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldása az egységsugarú kör segítségével



1. példa Határozd meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetők!

a) $\sqrt{2 \sin 2x - 1}$; b) $\log_{\frac{2}{3}}(\operatorname{tg}^2 x - 1)$.

Megoldás:

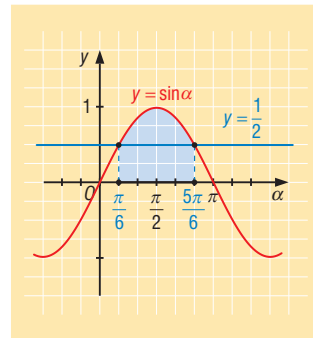
a) A négyzetgyökvonás definíciója értelmében $2 \sin 2x - 1 \geq 0$, ahonnan $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$.

1. módszer:

A szögfüggvények definíciója alapján a $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldása során keressük azokat a forgásszögeket, amely szögekkel az



$\vec{i}$ vektorhoz képest elforgatott egységvektor második koordinátája legalább $\frac{1}{2}$ az xy koordinátságokon. A $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ egyenletnek két megoldása van a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ -on: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. A 4.1. ábráról leolvashatjuk a lehetséges forgásszögek tartományát: $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Így a kifejezés értelmezési tartománya: $\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).



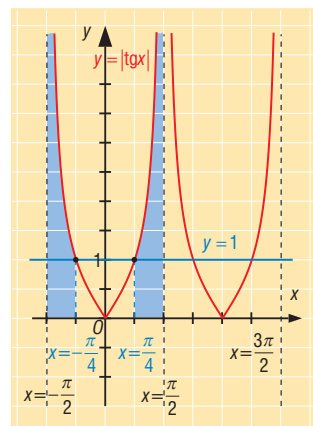
4.2. ábra A $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség grafikus megoldásához

2. módszer:

A trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldásait kereshetjük grafikus úton is. Jelöljük α -val a szinuszfüggvény argumentumában álló szöget ($\alpha = 2x$)! Az egyenlőtlenség bal oldalának megfelelő függvény: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(\alpha) = \sin \alpha$, a jobb oldalnak megfelelő függvény: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(\alpha) = \frac{1}{2}$. A 4.2. ábra alapján

$\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Tehát a kifejezés értelmezési tartománya: $\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

b) A logaritmus és a tangens szögfüggvény definíciójából következik, hogy $\lg^2 x - 1 > 0$ és $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Rendezés és négyzetgyökvonás után: $|\lg x| > 1$. A kapott egyenlőtlenséget oldjuk meg grafikusan! Az egyenlőtlenség jobb oldalának megfelelő függvény: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1$, a bal oldalnak megfelelő függvény: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\lg x|$ (4.3. ábra). A fentiek szerint a kifejezés értelmezési tartománya: $-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x < -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ vagy $\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$.



4.3. ábra A $|\lg x| > 1$ egyenlőtlenség grafikus megoldásához



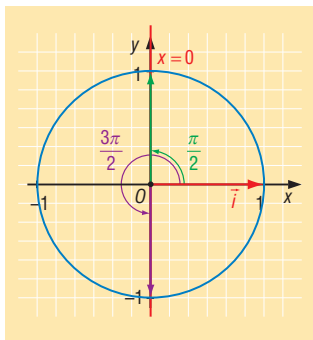
2. példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

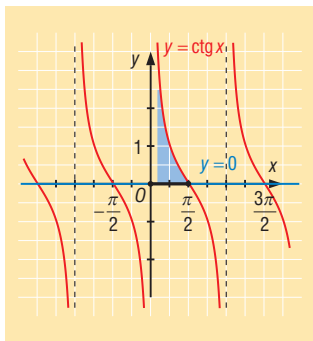
a) $\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\cos x$; b) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1}$.

Megoldás:

a) Adjuk meg az egyenlet értelmezési tartományát! A négyzetgyökvonás definíciója alapján $1 - \sin^2 x \geq 0$, ahonnan $|\sin x| \leq 1$ adódik. A szinuszfüggvény értékkészlete: $[-1; 1]$, így a $|\sin x| \leq 1$ egyenlőtlenség bármely valós számra fennáll. Tehát az egyenlet értelmezési tarto-



4.4. ábra A $\cos x \leq 0$ egyenlőtlenség megoldása az egységsugarú kör segítségével



4.5. ábra A $\text{ctg } x \geq 0$ egyenlőtlenség grafikus megoldásához

mánya $\mathbb{R}$. Mivel bármely szög szinuszának és koszinuszának négyzetösszege 1, ezért az $1 - \sin^2 x$ helyére $\cos^2 x$ -et helyettesíthetünk. Ekkor az egyenlet $\sqrt{\cos^2 x} = -\cos x$ alakba írható, innen $|\cos x| = -\cos x$. Az abszolút érték definíciója miatt az egyenlet akkor és csakis akkor áll fenn, ha $\cos x \leq 0$. A szögfüggvények definíciója alapján a $\cos x \leq 0$ egyenlőtlenség megoldása során keressük azokat a forgásszögeket, amely szögekkel az $\vec{i}$ vektorhoz képest elforgatott egységvektor első koordinátája nem pozitív az xy koordinátasíkon. A 4.4. ábráról leolvashatjuk a lehetséges forgásszögek tartományát, így az egyenlet megoldá-

sa: $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

b) Először vizsgáljuk meg az egyenlet értelmezési tartományát! A kotangens szögfüggvény definíciója és $\sin x \neq 0$ miatt: $x \neq k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

A négyzetgyökvonás definíciója alapján $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \geq 0$, ahonnan $\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \geq 0$ adódik. Az $1 - \sin^2 x$ helyére $\cos^2 x$ -et helyettesítve, fel-

használva a $\text{ctg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ($x \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$) összefüggést a $\text{ctg}^2 x \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. A kapott egyenlőtlenség bármely valós számra fennáll, kivéve az $x = k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Így az egyenlet értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Az értelmezési tartomány vizsgálata alap-

ján az egyenlet bal oldala: $\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1} = \sqrt{\text{ctg}^2 x}$ ($x \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Ekkor az egyenlet $\text{ctg } x = \sqrt{\text{ctg}^2 x}$ alakba írható, innen $|\text{ctg } x| = \text{ctg } x$. Az abszolút érték definíciója miatt az egyenlet akkor és csakis akkor áll fenn, ha $\text{ctg } x \geq 0$. Az egyenlőtlenség jobb oldalának megfelelő függvény: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 0$, a bal oldalnak megfelelő függvény:

$f: \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{ctg } x$. A 4.5. ábra alapján az egyenlet megoldása: $k \cdot \pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

3. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

- a) $\sin^2 x \leq \frac{3}{2} \cos x$; b) $2 \sin x \cos x + \sin x - \sqrt{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$;
c) $\text{tg } x - 3 \text{ctg } x > 2$.

Megoldás:

a) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot felhasználva, a $\sin^2 x$ helyére $1 - \cos^2 x$ -et helyettesítve az egyenlőtlenségben egyféle szögfüggvény

lesz: $1 - \cos^2 x \leq \frac{3}{2} \cos x$. A kapott egyenlőtlenség $\cos x$ -re nézve másodfokú. Jelöljük y -nal a $\cos x$ -et, majd redukáljunk 0-ra: $y^2 + \frac{3}{2}y - 1 \geq 0$! Mivel a valós számok halmazán értelmezett $f(y) = y^2 + \frac{3}{2}y - 1$ függvény képe pozitív irányba nyíló parabola, zérushelyei: $y_1 = -2$ és $y_2 = \frac{1}{2}$, ezért az $f(y) \geq 0$ egyenlőtlenség megoldása $y \geq \frac{1}{2}$ vagy $y \leq -2$ (4.6. ábra).

Innen $\cos x \geq \frac{1}{2}$ vagy $\cos x \leq -2$. A koszinuszfüggvény értékkészlete a $[-1; 1]$, ezért csak a $\cos x \geq \frac{1}{2}$ teljesülhet. A fentiek szerint a feladat megoldása: $-\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) (4.7. ábra).

b) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Csoportosítsuk a bal oldalon álló tagokat:

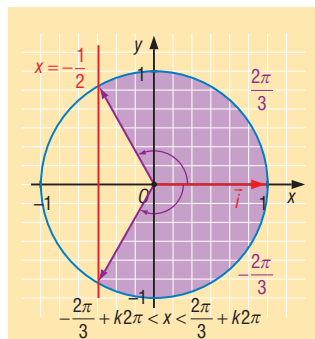
$$\sin x \cdot (2 \cos x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} (2 \cos x + 1) > 0.$$

Az egyenlet bal oldalán emeljük ki a $(2 \cos x + 1)$ kifejezést: $(2 \cos x + 1) \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) > 0$. Egy kéttényezős szorzat akkor és csak akkor pozitív, ha tényezői azonos előjelűek. Így két esetet kell vizsgálnunk.

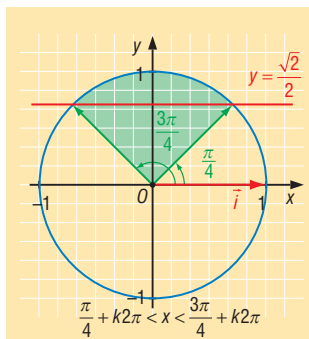
I. eset: $2 \cos x + 1 > 0$ és $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, azaz $\cos x > -\frac{1}{2}$ és $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Az egyenlőtlenségrendszer megoldását az egységsugarú kör segítségével határozhatjuk meg.

A 4.8., 4.9. és a 4.10. ábrák alapján az I. eset megoldása:

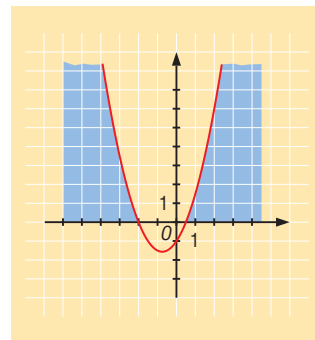
$$\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



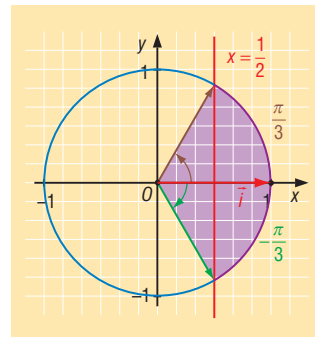
4.8. ábra A $\cos x > -\frac{1}{2}$ megoldása



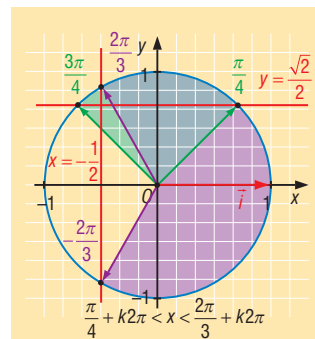
4.9. ábra A $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ megoldása



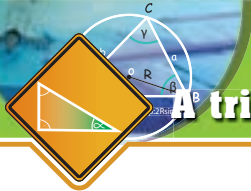
4.6. ábra Az $f(y) \geq 0$ egyenlőtlenség megoldásához



4.7. ábra A $\cos x \geq \frac{1}{2}$ megoldása



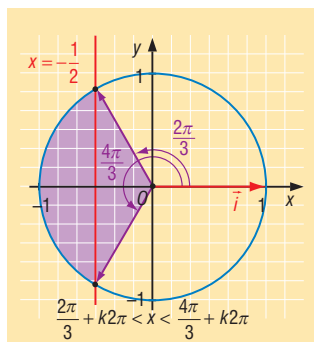
4.10. ábra A $\cos x > -\frac{1}{2}$ és $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ megoldása



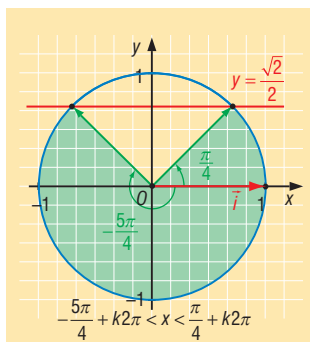
A trigonometria alkalmazásai

II. eset: $2 \cos x + 1 < 0$ és $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, azaz $\cos x < -\frac{1}{2}$ és $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Az I. esethez hasonlóan a megoldást az egységsugarú kör segítségével határozzuk meg.

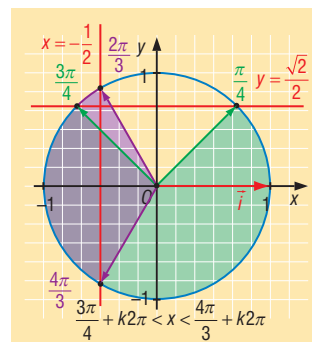
A 4.11., 4.12. és 4.13. ábrák alapján a II. eset megoldása: $\frac{3\pi}{4} + l \cdot 2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + l \cdot 2\pi$ ($l \in \mathbb{Z}$).



4.11. ábra A $\cos x < -\frac{1}{2}$ megoldása



4.12. ábra A $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ megoldása



4.13. ábra A $\cos x < -\frac{1}{2}$ és $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ megoldása

A fentiek szerint az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ vagy $\frac{3\pi}{4} + l \cdot 2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + l \cdot 2\pi$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

c) A tangens és a kotangens szögfüggvények definíciója miatt az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Az egyenlőtlenségben ugyanazon szög tangense és kotangense szerepel, a közöttük fennálló $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ ($x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$) összefüggés alapján:

$\operatorname{tg} x - 3 \frac{1}{\operatorname{tg} x} > 2$. Az egyenlőtlenséget redukáljuk 0-ra, majd hozzuk közös nevezőre! Így a $\frac{\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3}{\operatorname{tg} x} > 0$ egyenlőtlenséghez jutunk.

Legyen $y = \operatorname{tg} x$! Ekkor az egyenlőtlenség $\frac{y^2 - 2y - 3}{y} > 0$ alakba írható.

9. osztályban már foglalkoztunk törtes egyenlőtlenségekkel, megoldásukban sokat segített egy előjeltáblázat készítése. Először keressük meg a számláló és a nevező zérushelyeit! A valós számok halmazán értelmezett $f(y) = y^2 - 2y - 3$ függvény képe pozitív irányba nyíló parabola és zérushelyei $y_1 = -1$ és $y_2 = 3$. Így a két zérushely között negatív, azon kívül pozitív a függvény helyettesítési értéke. A nevező zérushelye: $y = 0$. A fentiek alapján készítsük el az előjeltáblázatot!



4.14. Készítsünk előjeltáblázatot!

y	$]-\infty; -1[$	-1	$]-1; 0[$	0	$]0; 3[$	3	$]3; \infty[$
számláló	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
nevező	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
tört	$-$	0	$+$	nincs értelmezve	$-$	0	$+$

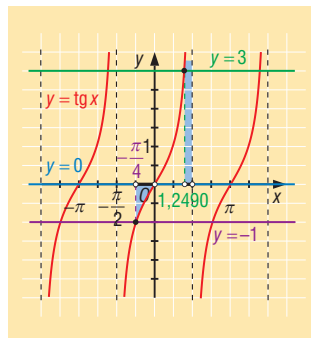
A táblázat utolsó sora alapján $-1 < y < 0$ vagy $y > 3$, ahonnan $-1 < \operatorname{tg} x < 0$ vagy $\operatorname{tg} x > 3$. Oldjuk meg grafikusan a kapott egyenlőtlenség-rendszert! Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az

$$f(x) = \operatorname{tg} x \left(D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right), \quad g(x) = -1, \quad h(x) = 0, \\ i(x) = 3 \quad (D_g = D_h = D_i = \mathbb{R})$$

függvényeket (4.15. ábra)!

A feladat feltételei és a 4.15. ábra alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi < x < 0 + k \cdot \pi \quad \text{vagy} \quad 1,2490 + l \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$



4.15. ábra A 3. c) példa megoldásához



Oldjuk meg!

1. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezések értelmezhetők!

a) $\sqrt{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}$; b) $^{2012}\sqrt{\cos 2x}$; c) $\log_2 \left(1 - \operatorname{ctg} \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) \right)$.

2. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezések nem értelmezhetők!

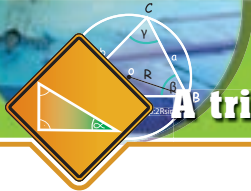
a) $^{2010}\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x}$; b) $\log_{\frac{\pi}{4}} \left(\left| \sin 2x \right| - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$; c) $\log_2 \left(1 - 2 \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sin x$; b) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 2x}} - 1$.

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt{2} \sin x \cos x - \sin x + \sqrt{2} \cos x - 1 < 0$;
b) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 > 0$;
c) $\cos^2 x \leq 2 \sin x + 1$;
d) $2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x \geq 5$.

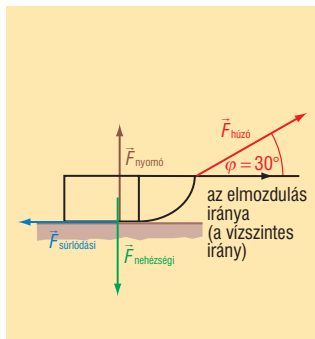


A trigonometria alkalmazásai

5. Skaláris szorzat



5.1. Apa húzza a szánkót



5.2. ábra A szánkóra ható erők

Korábbi tanulmányaink során már megismerkedtünk a vektor fogalmával, definiáltuk a vektorok közötti műveleteket, foglalkoztunk a vektorokkal végzett műveletek eredményeinek koordináta-rendszerben történő megadásával. Ebben a leckében bővítjük a vektorokkal kapcsolatos ismereteinket.



1. példa Apa vízszintes, 50 méteres havas úton egyenletesen húzza a szánkót és a rajta ülő Annát. Az apa által kifejtett erő 6,92 N, a szánkó kötele a vízszintessel 30°-os szöget zár be (5.1. ábra).

- Mekkora munkát végez apa?
- Mekkora munkát végez a nehézségi erő?
- Mekkora munkát végez a súrlódási erő, ha a szánkó és a gyerek együttes tömege 30 kg, és a súrlódási együttható 0,02?

Megoldás:

a) Fizikaórán szerzett ismereteink alapján tudjuk, hogy az $\vec{F}$ erő munkáját a $W = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot \cos\varphi$ formulával számolhatjuk ki, ahol $|\vec{F}|$ az erő abszolút értéke, $|\Delta\vec{r}|$ az elmozdulás abszolút értéke, φ az erő- és az elmozdulásvektorok hajlásszöge. De mit értünk két vektor hajlásszöge alatt?

Szemléltessük a húzóerő- és az elmozdulásvektorokat közös kezdőpontú reprezentánsaikkal (5.3. ábra)!

Ekkor a két vektor félegyenesre a síkot két tartományra bontja. A keletkezett két szög közül a kisebbiket tekintjük a két vektor hajlásszögének, azaz $\varphi = 30^\circ$. Pontosabban fogalmazva:



Definíció Két vektor hajlásszögén a vektorok közös kezdőpontú reprezentánsai által bezárt konvex szöget értjük (5.3. ábra).

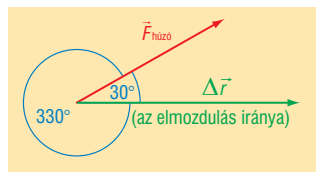
Tehát két vektor hajlásszögének nagysága $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$. Egyirányú vektorok hajlásszöge 0° , ellentett irányúaké 180° .

Tehát az apa által végzett munka:

$$W = |\vec{F}_{\text{húzó}}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot \cos\varphi = 6,92 \text{ N} \cdot 50 \text{ m} \cdot \cos 30^\circ \approx 299,64 \text{ J}.$$

b) A nehézségierő- és az elmozdulásvektorok merőlegesek egymásra, így a $\cos 90^\circ = 0$ miatt a nehézségi erő munkája 0.

c) A súrlódási erő- és az elmozdulásvektorok iránya ellentétes, hajlásszögük nagysága 180° . A munka kiszámolásához határozzuk meg



5.3. ábra Az erő- és elmozdulásvektorok hajlásszöge



a súrlódási erő abszolút értékét! A súrlódási erő abszolút értékét a $|\vec{F}_{\text{súrlódási}}| = \mu \cdot m \cdot g$ összefüggés alapján számoljuk (ahol μ a súrlódási együttható, m a tömeg, $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a nehézségi gyorsulás):

$$|\vec{F}_{\text{súrlódási}}| = 0,02 \cdot 30 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6 \text{ N. Innen a súrlódási erő munkája:}$$

$$W = 6 \text{ N} \cdot 50 \text{ m} \cdot \cos 180^\circ = -300 \text{ N.}$$


Vegyük észre, hogy az 1. példában két vektorhoz (az erő- és az elmozdulásvektorhoz) egyértelműen hozzárendeltünk egy valós számot! A fentiek alapján megadható a következő definíció:



Definíció Két vektor $(\vec{a}, \vec{b})$ skaláris szorzatán a két vektor abszolút értékének és hajlásszögük (φ) koszinuszának szorzatát értjük. Jelölése: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (matematikai jelekkel: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$).

A szorzat elnevezés arra utal, hogy a skaláris szorzat rendelkezik a számok szorzására emlékeztető tulajdonságokkal, a skaláris szó pedig az eredményére vonatkozik, amely nem vektor.

Így a definíció értelmében az erő által végzett munka egyenlő az erő- és az elmozdulásvektorok skaláris szorzatával.

Vizsgáljuk meg a skaláris szorzat néhány fontos tulajdonságát!

Bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok esetén a definícióból közvetlenül következnek az alábbiak:

1. Két vektor $(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$, skaláris szorzatának előjele a hajlásszögtől függ:

✦ ha a hajlásszög nullszög vagy hegyesszög, akkor a skaláris szorzat előjele pozitív, mert $\cos \varphi > 0$;

✦ ha a hajlásszög tompaszög vagy egyeneszög, akkor a skaláris szorzat előjele negatív, mert $\cos \varphi < 0$.

Ha a hajlásszög derékszög, akkor a skaláris szorzat 0, mert $\cos 90^\circ = 0$.

2. Egy vektor önmagával vett skaláris szorzata (négyzete) a vektor hosszának négyzetével egyenlő: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

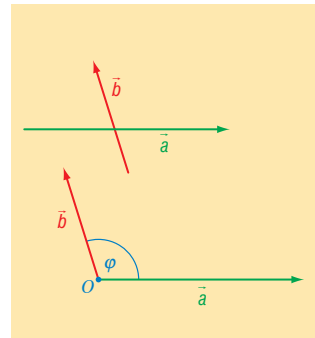
3. A skaláris szorzatban a tényezők felcserélhetőek (kommutatív):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

4. Valós számmal (λ) való szorzás esetén átzárójelezhető:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}).$$

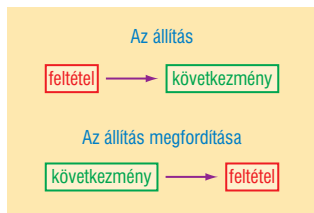
5. Általában $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ teljesül, azaz a skaláris szorzat nem asszociatív.



5.4. ábra Két vektor hajlásszöge



5.5. ábra Erő által végzett munka



5.6. ábra Az állítás és a megfordítása

Az 1. tulajdonságnál láttuk, hogy **ha két vektor merőleges egymásra, akkor a skaláris szorzatuk 0**. Igaz-e ennek az állításnak a megfordítása? Az eredeti állítás feltétele az, hogy a két vektor egymásra merőleges. A következménye pedig az, hogy a két vektor skaláris szorzata 0. Az állítás megfordításánál az eredeti állítás következménye lesz a megfordítás feltétele, az eredeti állítás feltétele pedig a következmény (5.6. ábra).

Az állítás megfordítása:

Ha két vektor skaláris szorzata 0, akkor a két vektor merőleges egymásra.

A feltétel és a definíció szerint $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 0$. Mivel egy szorzat akkor és csakis akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért $\cos \varphi = 0$ vagy $|\vec{a}| = 0$ vagy $|\vec{b}| = 0$. A $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ miatt $\cos \varphi = 0$ csak $\varphi = 90^\circ$ esetén áll fenn. Az $|\vec{a}| = 0$ vagy $|\vec{b}| = 0$ azt jelenti, hogy valamelyik vektor nullvektor. A nullvektor minden vektorra merőleges. Tehát az állítás megfordítása is igaz. Az állítást és a megfordítását együtt is kimondhatjuk:

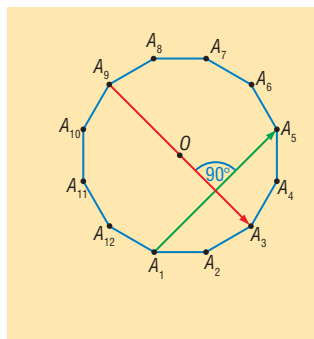


Tétel Két vektor akkor és csakis akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk 0.

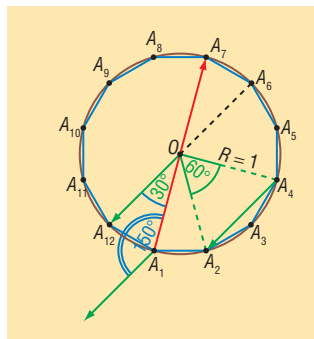


2. példa Egységsugarú körbe írt szabályos tizenkészsög csúcsai rendre: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{11}, A_{12}$. Határozzuk meg az alábbi skaláris szorzatok értékét!

- a) $\overrightarrow{A_1 A_5} \cdot \overrightarrow{A_9 A_3}$; b) $\overrightarrow{A_1 A_7} \cdot \overrightarrow{A_4 A_2}$;
c) $\overrightarrow{A_{10} A_{11}} \cdot \overrightarrow{A_1 A_7}$; d) $(\overrightarrow{A_5 A_4} + \overrightarrow{A_4 A_2}) \cdot \overrightarrow{A_1 A_7}$.



5.7. ábra A 2. a) példához



5.8. ábra A 2. b) példához

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát (5.7. ábra)! Az $\overrightarrow{A_9 A_3}$ vektor egyenese a tizenkészsög egyik szimmetriatengelye, az A_1 és A_5 egymás tükörképei erre a tengelyre. Tehát $\overrightarrow{A_1 A_5}$ és $\overrightarrow{A_9 A_3}$ vektorok egymásra merőlegesek, a fenti tétel értelmében skaláris szorzatuk 0-val egyenlő: $\overrightarrow{A_1 A_5} \cdot \overrightarrow{A_9 A_3} = 0$.
b) A skaláris szorzat kiszámításához meg kell határoznunk a vektorok abszolút értékeit, hajlásszögét.

Az 5.8. ábra alapján az $|\overrightarrow{A_1 A_7}|$ egyenlő a kör átmérőjének hosszával: $|\overrightarrow{A_1 A_7}| = 2$, az $|\overrightarrow{A_4 A_2}|$ pedig az $OA_2 A_4$ szabályos háromszög oldalának hosszával: $|\overrightarrow{A_4 A_2}| = 1$. A hajlásszög meghatározásához rajzoljuk meg az $\overrightarrow{A_4 A_2}$ vektor O , illetve A_1 kezdőpontú reprezentánsát! Mivel

$\overrightarrow{A_4A_2} = \overrightarrow{OA_2}$ és $\angle A_1OA_2 = 30^\circ$, ezért a két vektor hajlásszöge 150° -os.

$$\text{Így } \overrightarrow{A_1A_7} \cdot \overrightarrow{A_4A_2} = |\overrightarrow{A_1A_7}| \cdot |\overrightarrow{A_4A_2}| \cdot \cos 150^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}.$$

c) Az $|\overrightarrow{A_1A_7}|$ egyenlő a kör átmérőjének hosszúságával: $|\overrightarrow{A_1A_7}| = 2$,

az $|\overrightarrow{A_{10}A_{11}}|$ pedig a szabályos tizenkétszög oldalának hosszával. Az

$\triangle A_1FO$ derékszögű háromszögben $\frac{A_1F}{2} = \sin 15^\circ$, ahonnan

$$|\overrightarrow{A_{10}A_{11}}| = 2 \cdot \sin 15^\circ.$$

Az 5.9. ábra alapján a két vektor hajlásszöge 165° -os. Korábbi tanulmányaink során már meghatároztuk a $\sin 15^\circ$ és a $\cos 15^\circ$ értékét: $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. Fel-

használva a $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ azonosságot: $\overrightarrow{A_1A_7} \cdot \overrightarrow{A_{10}A_{11}} = |\overrightarrow{A_1A_7}| \cdot |\overrightarrow{A_{10}A_{11}}| \cdot \cos 165^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = -1$ adódik.

d) Mivel $\overrightarrow{A_5A_4} + \overrightarrow{A_4A_2} = \overrightarrow{A_5A_2}$, ezért $(\overrightarrow{A_5A_4} + \overrightarrow{A_4A_2}) \cdot \overrightarrow{A_1A_7} = \overrightarrow{A_5A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_7}$.

Az 5.10. ábra alapján a $\overrightarrow{A_5A_2}, \overrightarrow{A_1A_7}$ vektorok hajlásszöge 165° -os. Az

$\triangle A_2A_5O$ egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója: $|\overrightarrow{A_5A_2}| = \sqrt{2}$, az

$|\overrightarrow{A_1A_7}|$ egyenlő a kör átmérőjének hosszúságával: $|\overrightarrow{A_1A_7}| = 2$.

$$\text{Így } (\overrightarrow{A_5A_4} + \overrightarrow{A_4A_2}) \cdot \overrightarrow{A_1A_7} = \overrightarrow{A_5A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_7} = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = -(\sqrt{3} + 1).$$



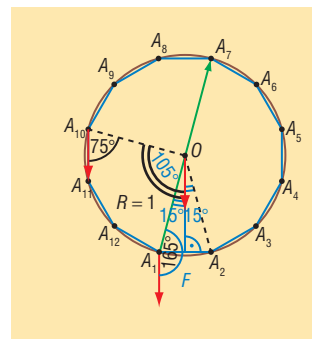
Vegyük észre, hogy a 2. feladat b) és c) részében kapott értékek összege éppen a d) részben kapott értékkel egyenlő:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_5A_4} \cdot \overrightarrow{A_1A_7} + \overrightarrow{A_4A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_7} &= (\overrightarrow{A_5A_4} + \overrightarrow{A_4A_2}) \cdot \overrightarrow{A_1A_7} \\ (\overrightarrow{A_{10}A_{11}} = \overrightarrow{A_5A_4}, \overrightarrow{A_5A_4} \cdot \overrightarrow{A_1A_7} &= -1, \overrightarrow{A_4A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_7} = -\sqrt{3} \\ \text{és } (\overrightarrow{A_5A_4} + \overrightarrow{A_4A_2}) \cdot \overrightarrow{A_1A_7} &= -1 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

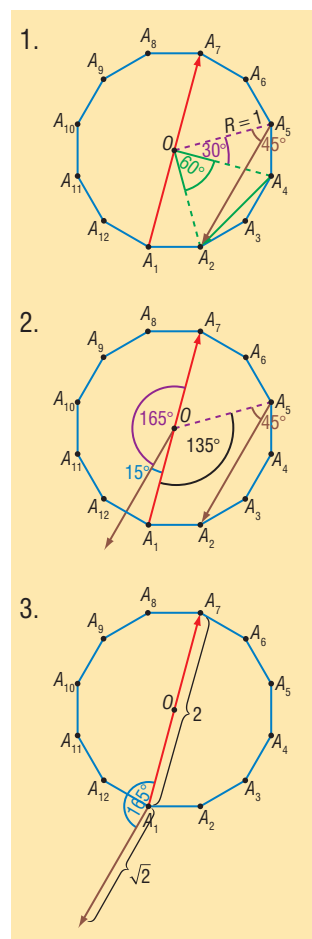
Belátható, hogy a kapott tulajdonság bármely $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok esetén teljesül, azaz a skaláris szorzás az összeadásra nézve disztributív. Matematikai jelekkel: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.



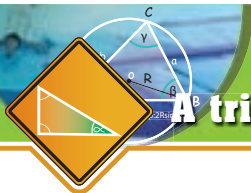
3. példa Számítsuk ki az $\vec{a}(-3;4)$ és $\vec{b}(5;12)$ vektorok skaláris szorzatát!



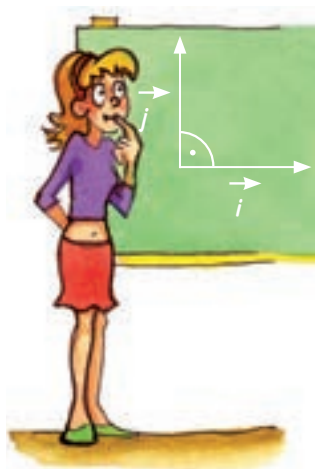
5.9. ábra 2. c) példához



5.10. ábra A 2. d) példához



A trigonometria alkalmazásai



5.11. ábra Bázisvektorok

Megoldás:

A vektor koordinátáinak definíciója alapján $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$, ahol $\vec{i}$ és $\vec{j}$ egységvektorok az (xy) koordinátasík bázisvektorai. Ekkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (5\vec{i} + 12\vec{j})$, innen a skaláris szorzat tulajdonságai miatt $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3) \cdot 5 \cdot \vec{i} \cdot \vec{i} + (-3) \cdot 12 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + 4 \cdot 5 \cdot \vec{j} \cdot \vec{i} + 4 \cdot 12 \cdot \vec{j} \cdot \vec{j}$. Mivel $\vec{i}$ és $\vec{j}$ egymásra merőleges egységvektorok, ezért $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1$ és $\vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1$. Így $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 12 = 33$.



Az előző példa alapján megfogalmazhatjuk az alábbi tételt.



Tétel

Az (xy) koordinátasíkon két vektor skaláris szorzata egyenlő a megfelelő koordináták szorzatának összegével.

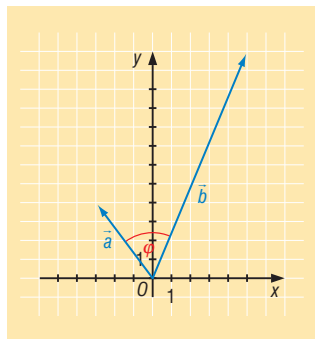
Bizonyítás:

Legyen a két adott vektor: $\vec{a}(a_1; a_2)$ és $\vec{b}(b_1; b_2)$! A vektor koordinátáinak definíciója alapján $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$, ahol $\vec{i}$ és $\vec{j}$ egységvektorok az (xy) koordinátasík bázisvektorai. A skaláris szorzat tulajdonságai miatt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) \cdot (b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) = a_1b_1\vec{i} \cdot \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \cdot \vec{j} + a_2b_1\vec{j} \cdot \vec{i} + a_2b_2\vec{j} \cdot \vec{j}$. Az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ egymásra merőleges egységvektorok, ezért $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1$ és $\vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1$. Innen adódik, hogy $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$. Ezzel az állítást beláttuk.



4. példa

Határozzuk meg az $\vec{a}(-3; 4)$ és $\vec{b}(5; 12)$ vektorok hajlásszögét (5.12. ábra)!



5.12. ábra A 4. példához

Megoldás:

Két vektor hajlásszöge a vektorok skaláris szorzatának definíciójában szerepel. A fenti tétel szerint $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$, és a definíció miatt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$. Így a koordinátasíkon adott vektorok skaláris szorzatának kétféle felírásából az $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ összefüggést kapjuk. A kapott összefüggésben a vektorok koordinátáin kívül szerepelnek még a vektorok abszolút értékei (hosszai) és a hajlásszög. Ezért a behelyettesítés előtt határozzuk meg a vektorok hosszait! Derékszögű koordináta-rendszerben egy tetszőleges vektor hossza egyenlő a vektor koordinátáinak négyzetösszegéből vont négyzetgyökkel:

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ és $|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Így $(-3) \cdot 5 + 4 \cdot 12 = 5 \cdot 13 \cdot \cos \varphi$, ahonnan $\cos \varphi = \frac{33}{65}$. A $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ miatt a két vektor hajlásszöge: $\varphi \approx 59,49^\circ$.



5. példa Adjuk meg az alábbi szögfüggvények értékét az $\alpha = 45^\circ$ és a $\beta = 60^\circ$ szögek szögfüggvényértékeinek segítségével!
a) $\cos 15^\circ$; b) $\cos 105^\circ$.

Megoldás:

a) Mivel a 15° a 60° és a 45° különbsége, ezért a feladatunk az, hogy e két szög különbségének a koszinuszát a 60° és a 45° szögfüggvényértékeinek felhasználásával adjuk meg.

Legyen az $\vec{a}$ az $\vec{i}$ vektorhoz képest 60° -kal elforgatott egységvektor, a $\vec{b}$ pedig az $\vec{i}$ vektorhoz képest 45° -kal elforgatott egységvektor (5.14. ábra)! A szögfüggvények definíciója alapján $\vec{a}(\cos 60^\circ; \sin 60^\circ)$, $\vec{b}(\cos 45^\circ; \sin 45^\circ)$. Skaláris szorzatuk a definíció szerint: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 1 \cdot 1 \cdot \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 15^\circ$, a koordináták segítségével: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$. A kétféleképpen felírt skaláris szorzatok egyenlők, így $\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

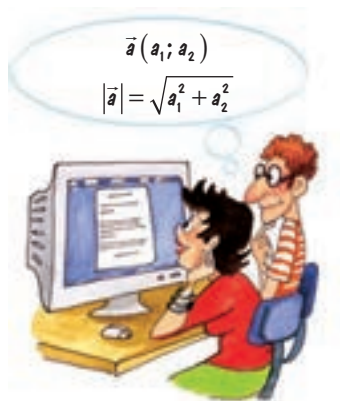


A fentiek alapján könnyen igazolható, hogy bármely α, β szög esetén fennáll a $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$ összefüggés, amelyet addíciós tételnek nevezünk. Pontosabban:

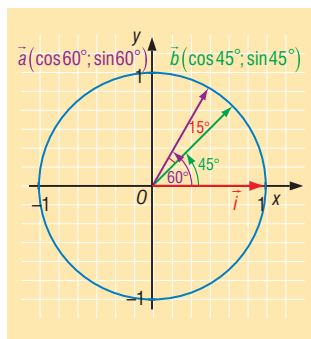


Definíció Azokat az összefüggéseket, amelyekben két szög összegének, különbségének szögfüggvényei vannak megadva a szögek szögfüggvényeivel, addíciós tételeknek (vagy összegzési képleteknek) nevezzük.

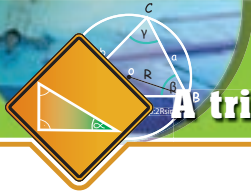
b) Ebben a feladatrészben két szög összegének a koszinuszát szeretnénk felírni a szögek szögfüggvényeivel. A $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$, ezért a $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$ azonosságot alkalmazva a $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta)$ összefüggést kapjuk. Mivel a koszinuszfüggvény páros, és a szinuszfüggvény páratlan, ezért $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ azo-



5.13. ábra Vektor abszolút értéke



5.14. ábra Az 5. példához



A trigonometria alkalmazásai



5.15. ábra „Addíció”

nosság adódik. A 105° a 60° és a 45° összege, alkalmazzuk az imént kapott azonosságot:

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$



6. példa Írjuk fel két szög összegének és különbségének a szinuszát a szögek szinuszainak, illetve koszinuszainak segítségével!

Megoldás:

A szöveg szerint a $\sin(\alpha + \beta)$ és a $\sin(\alpha - \beta)$ szögfüggvények értékeit kell kifejeznünk az α és a β szögek szögfüggvényértékeinek segítségével.

A pótszögek szögfüggvényeire vonatkozó azonosság és a $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$ összefüggés szerint:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos[90^\circ - (\alpha + \beta)] = \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta] = \\ &= \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \beta + \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

Tehát $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$.

A $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta))$, ezért a $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$ azonosságot alkalmazva a $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos \alpha \cdot \sin(-\beta)$ összefüggést kapjuk. Mivel a koszinuszfüggvény páros, a szinuszfüggvény páratlan, ezért a $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$ azonosság adódik.

A bemutatott addíciós tételeken kívül számos összegzési képlet ismeretes. Tanulmányaink során a számunkra fontos összefüggéseket a függvénytáblázatokban találhatjuk meg.



Oldjuk meg!

- Egységsugarú körbe írt szabályos hatszög csúcsai rendre: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Határozzuk meg az alábbi skaláris szorzatok értékét!
 - $\overrightarrow{A_1 A_3} \cdot \overrightarrow{A_6 A_3}$; b) $\overrightarrow{A_2 A_6} \cdot \overrightarrow{A_4 A_2}$; c) $\overrightarrow{A_3 A_5} \cdot \overrightarrow{A_1 A_2}$; d) $(\overrightarrow{A_3 A_3} + \overrightarrow{A_2 A_1}) \cdot \overrightarrow{A_5 A_2}$.
- Határozzuk meg az alábbi vektorok hajlásszögét!
 - $\vec{a}(3; -3)$ és $\vec{b}(1; \sqrt{3})$; b) $\vec{a}(-13; 4)$ és $\vec{b}(-8; -26)$; c) $\vec{a}(15; 8)$ és $\vec{b}(-6; 4)$.
- Az $ABCD$ négyszög csúcsai: $A(-2; 5)$, $B(2; 2)$, $C(9; 17)$ és $D(3; 17)$. Határozzuk meg az $ABCD$ négyszög legnagyobb, illetve legkisebb szögét!
- Adjuk meg az alábbi szögfüggvények értékét az $\alpha = 45^\circ$ és a $\beta = 30^\circ$ szögek szögfüggvényértékeinek segítségével!
 - $\cos 75^\circ$; b) $\sin 75^\circ$; c) $\operatorname{tg} 75^\circ$; d) $\operatorname{ctg} 15^\circ$.



5. Igazoljuk az alábbi azonosságokat!

a) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

b) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$;

c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$, $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$, ahol $k, l, m \in \mathbb{Z}$);

d) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$, $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$, ahol $k, l, m \in \mathbb{Z}$);

e) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$).

6. Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

Ebben a leckében a trigonometriában tanult ismereteink segítségével néhány fontos összefüggéssel bővítjük a háromszögről szerzett tudásunkat.

6.1. A koszinusztétel



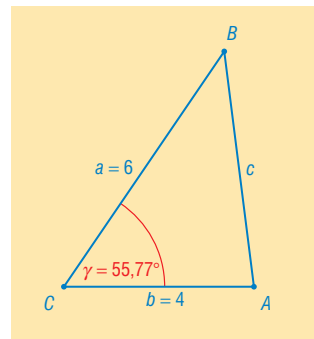
1. példa Egy háromszög két oldalának hossza 4 és 6 egység, a két oldal által bezárt szög $55,77^\circ$ -os. Mekkora a háromszög harmadik oldala?

Megoldás:

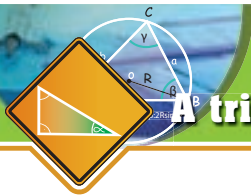
Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével (6.1. ábra)!

A feladat tulajdonképpen az, hogy ha adott egy háromszög két oldalának hossza és az általuk bezárt szög, akkor hogyan határozhatjuk meg a háromszög harmadik oldalának hosszát ezen adatok segítségével.

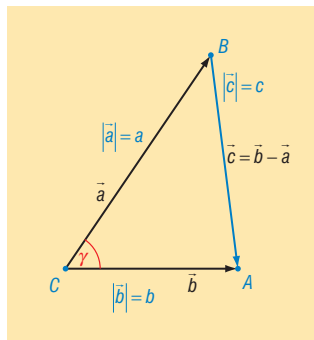
Legyenek a háromszög C csúcsából induló oldalvektorai $\vec{a}, \vec{b}$, ezen vektorok hajlásszöge γ (6.2. ábra)! Ekkor a vektorok különbségének definíciója alapján $\vec{BA} = \vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$. A kapott egyenlőséget emeljük négyzetre: $\vec{c}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2$! A skaláris szorzat kommutatív és az összeadásra nézve disztributív, ezért $\vec{c}^2 = \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2$. Mivel $\vec{a}^2 = a^2$, $\vec{b}^2 = b^2$, $\vec{c}^2 = c^2$ és $2\vec{a}\vec{b} = 2ab \cdot \cos \gamma$, ezért $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ összefüggés adódik. Hasonlóan adódnak az $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ és



6.1. ábra Az 1. példa megoldásához



A trigonometria alkalmazásai



6.2. ábra A koszinusztétel bizonyításához

a $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$ összefüggések. A fentiek alapján megfogalmazhatjuk az alábbi fontos tételt, amelyet **koszinusztételnek** nevezünk.



Tétel

Bármely háromszögben az egyik oldal hosszának a négyzetét megkaphatjuk, ha a másik két oldalhossz négyzetösszegéből kivonjuk e két oldal hosszának és a közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát.

Ezek után írjuk fel a koszinusztételt a feladatban szereplő háromszög (6.2. ábra) c oldalára: $c^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 55,77^\circ \approx 25,00$, innen $c \approx 5$. Tehát a háromszög keresett oldalának hossza megközelítőleg 5 egység.



2. példa

Szögei szerint milyen az a háromszög, amelyben az oldalhosszúságok aránya 13:14:15?

Megoldás:

Készítsünk ábrát! Az oldalhosszúságok aránya 13:14:15, ezért a háromszög oldalai: $a = 15x$, $b = 13x$, és $c = 14x$ ($x > 0$) alakban adhatóak meg (6.3. ábra). A feladat kérdésének megválaszolásához a háromszög legnagyobb szögét kell kiszámítanunk. Ha ez a szög hegyesszög, akkor a háromszög hegyesszögű. Ha ez a szög derékszög, akkor a háromszög derékszögű. Ha ez a szög tompaszög, akkor a háromszög tompaszögű. Mivel bármely háromszögben a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van és az $x > 0$ miatt $13x < 14x < 15x$ áll fenn, ezért ebben a háromszögben $\beta < \gamma < \alpha$. Azaz a háromszög legnagyobb szöge az α . Írjuk fel a koszinusztételt a háromszög a oldalára: $(15x)^2 = (13x)^2 + (14x)^2 - 2 \cdot 13x \cdot 14x \cdot \cos \alpha$, innen

$$\cos \alpha = \frac{(13x)^2 + (14x)^2 - (15x)^2}{2 \cdot 13x \cdot 14x} = \frac{5}{13}.$$

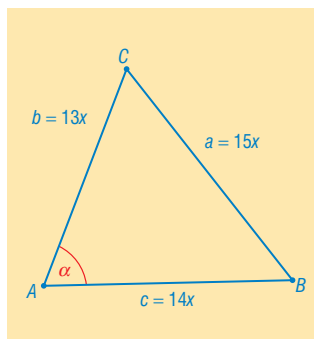
Azaz $\cos \alpha > 0$, amelyből $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ miatt következik, hogy az α hegyesszög ($\alpha \approx 67,38^\circ$). Tehát a háromszög hegyesszögű.



Vegyük észre, hogy a 2. példában a háromszög oldalainak segítségével határoztuk meg az egyik belső szöget, illetve a

koszinusztételt a $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ alakban alkalmaztuk.

Könnyen belátható, hogy a $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$ és $a^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ összefüggésekkel ekvivalensek a $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ és a $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ egyenlőségek.



6.3. ábra A 2. példa megoldásához



6.4. ábra Ugyanaz másképp



A fentiek szerint célszerű a koszinusztételt alkalmazni, ha adott egy háromszög

- ▶ két oldalának hossza és az általuk bezárt szög. Ilyenkor közvetlenül a harmadik oldal hosszát határozhatjuk meg a koszinusztétel segítségével, **vagy**
- ▶ mindhárom oldalának hossza. Ekkor a koszinusztétel segítségével közvetlenül meghatározható a háromszög bármelyik belső szöge.



3. példa A háromszög két oldalának hossza 6 cm és 10 cm, a 10 cm hosszúságú oldalhoz tartozó súlyvonal hossza 4 cm. Mekkora a háromszög hiányzó oldala?

Megoldás:

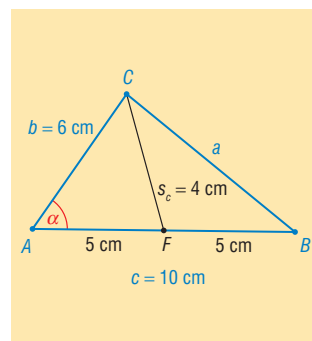
Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével (6.5. ábra)! Mivel a súlyvonal a csúcstól a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz, ezért $AF = BF = 5$ cm. Az FBC és az ABC háromszögekben két-két oldal, az AFC háromszögben mindhárom oldal adott. Alkalmazzuk a koszinusztételt az AFC háromszögben: $\cos \alpha = \frac{6^2 + 5^2 - 4^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = 0,75$, ahonnan $\alpha \approx 41,41^\circ$. Majd írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszög a oldalára: $a^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 0,75 = 46$, innen $a = \sqrt{46}$ cm $\approx 6,78$ cm.



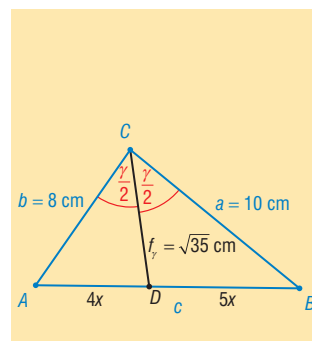
4. példa A háromszög két oldalának hossza 8 cm és 10 cm, a két oldal által bezárt szög szögfelezőjének a háromszögbe eső szakasza $\sqrt{35}$ cm hosszúságú. Mekkora a háromszög kerülete?

Megoldás:

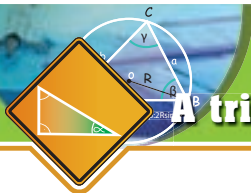
Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével (6.6. ábra)! A belső szögfelezőre vonatkozó tétel alapján $\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a} = \frac{4}{5}$, ezért $AD = 4x$ és $BD = 5x$ ($x > 0$) alakban adhatóak meg. A háromszög kerületének meghatározásához a háromszög harmadik oldalát kell kiszámítanunk. Írjuk fel a koszinusztételt az ADC és a DBC háromszögekben a $\frac{\gamma}{2}$ -re vonatkozóan: $\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{8^2 + \sqrt{35}^2 - (4x)^2}{2 \cdot 8 \cdot \sqrt{35}}$ és $\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{10^2 + \sqrt{35}^2 - (5x)^2}{2 \cdot 10 \cdot \sqrt{35}}$. A bal oldalak egyenlőségéből következik, hogy az egyenlőségek jobb oldalai is egyenlők: $\frac{99 - 16x^2}{16 \cdot \sqrt{35}} = \frac{135 - 25x^2}{20 \cdot \sqrt{35}}$, ahonnan $x^2 = 2,25$, az $x > 0$ miatt $x = 1,5$ adódik. Így $c = 9x = 13,5$ cm, tehát a háromszög kerülete 31,5 cm.



6.5. ábra A 3. példa megoldásához

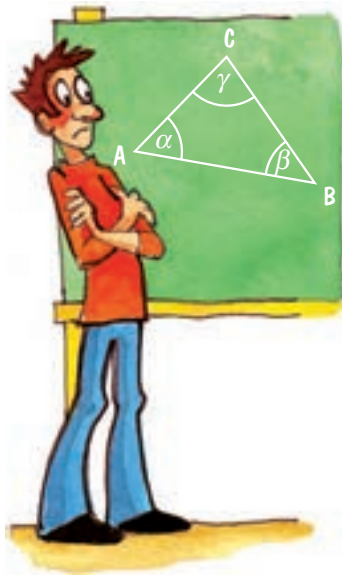


6.6. ábra A 4. példa megoldásához

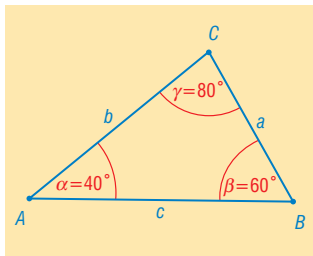


A trigonometria alkalmazásai

6.2. A szinusztétel



6.7. ábra Mit tanultunk erről?



6.8. ábra Az 5. példa megoldásához



5. példa Egy háromszög belső szögei: $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$, kerülete 49,87 cm. Mekkora a háromszög oldalai?

Megoldás:

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy egy háromszög bármelyik szöge, e szöggel szemközti oldala és köré írt körének sugara között:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad 2R = \frac{b}{\sin \beta}, \quad 2R = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ összefüggések állnak fenn (a szo-}$$

kásos jelöléseket használva). Innen az $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} (= 2R)$ egyenlőség adódik. A kapott összefüggést alkalmazhatjuk a háromszög

bármely két oldalhosszának arányára: $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Ezt az összefüggést

szinusztételnek nevezzük. A fentiek értelmében az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg, amelyet **szinusztételnek** nevezünk.



Tétel

Bármely háromszögben bármely két oldal hosszának aránya egyenlő a velük szemközti szögek szinuszainak arányával.

A szinusztétel $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$ alakban is írható, amely azt fejezi ki, hogy az oldalhosszak aránya megegyezik a velük szemközti szögek szinuszainak arányával.

Az 5. példa megoldásához készítsünk ábrát (6.8. ábra)! Az ábra jelöléseit és $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$ összefüggést alkalmazva:

$$a : b : c = \sin 40^\circ : \sin 60^\circ : \sin 80^\circ.$$

Így a háromszög oldalai: $a = x \cdot \sin 40^\circ$, $b = x \cdot \sin 60^\circ$, és $c = x \cdot \sin 80^\circ$ ($x = 2R > 0$) alakban adhatóak meg. A háromszög kerületének felírásából:

$$x \cdot \sin 40^\circ + x \cdot \sin 60^\circ + x \cdot \sin 80^\circ = 49,87,$$

ahonnan $x \approx 20,00$.

Tehát a háromszög oldalai:

$$a \approx 12,86 \text{ cm}, \quad b \approx 17,32 \text{ cm} \text{ és } c \approx 19,70 \text{ cm}.$$



6. példa Egy háromszög alakú telek két oldalának hossza 42 m és 20 m, a 20 m hosszúságú oldallal szemközti szög 20° . Mekkora a háromszög oldalai, szögei?

Megoldás:

A feladat szövege szerint adott a háromszög két oldalának hossza ($a = 20$ m, $c = 42$ m) és a kisebbik oldallal szemközti szöge ($\alpha = 20^\circ$).

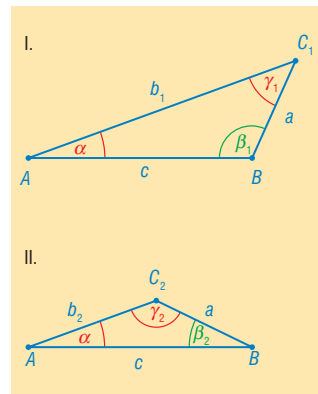
Az adatok alapján alkalmazhatjuk a szinusztételt: $\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$, azaz $\frac{42}{20} = \frac{\sin \gamma}{\sin 20^\circ}$, ahonnan $\sin \gamma = \frac{42}{20} \sin 20^\circ \approx 0,7182$. A $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ egyenlőtlenség miatt a $\sin \gamma \approx 0,7182$ összefüggésből γ -ra két lehetséges érték adódik: $\gamma_1 \approx 45,91^\circ$, $\gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 \approx 134,09^\circ$ (6.9. ábra). Két esetet kell vizsgálnunk.

I. eset: ha $\gamma_1 \approx 45,91^\circ$, akkor a háromszög harmadik szöge $\beta_1 \approx 114,09^\circ$. Az ABC_1 háromszögben írjuk fel a szinusztételt:

$$\frac{b_1}{20} = \frac{\sin 114,09^\circ}{\sin 20^\circ}, \text{ innen } b_1 \approx 53,38 \text{ m.}$$

II. eset: ha $\gamma_2 \approx 134,09^\circ$, akkor a háromszög harmadik szöge $\beta_2 \approx 25,91^\circ$. Az ABC_2 háromszögben írjuk fel a szinusztételt:

$$\frac{b_2}{20} = \frac{\sin 25,91^\circ}{\sin 20^\circ}, \text{ innen } b_2 \approx 25,55 \text{ m.}$$



6.9. ábra A 6. példa megoldásához



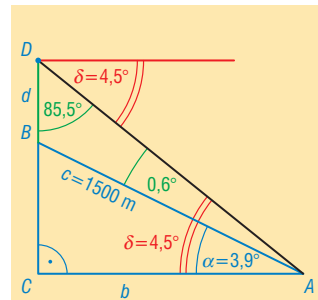
7. példa Egy 1500 m hosszúságú hegyi út végén levő torony talppontját az út elején levő pontból $3,9^\circ$ -os, tetőpontját $4,5^\circ$ -os emelkedési szögben látjuk. Milyen magas a torony?

Megoldás:

Készítsünk ábrát (6.10. ábra)! Szemléltesse az út nyomvonalát az AB , a hegy magasságát BC szakasz, a toronyt BD szakasz! Az szöveg alapján $AB = 1500$ m, $\alpha = 3,9^\circ$ és $\angle CAD = \delta = 4,5^\circ$ (6.10. ábra). A δ -val jelölt szögnek a D -nél levő szög váltószöge, így $\angle ADB = 90^\circ - 4,5^\circ = 85,5^\circ$.

Az ABD háromszögre alkalmazzuk a szinusztételt: $\frac{d}{1500} = \frac{\sin 0,6^\circ}{\sin 85,5^\circ}$,

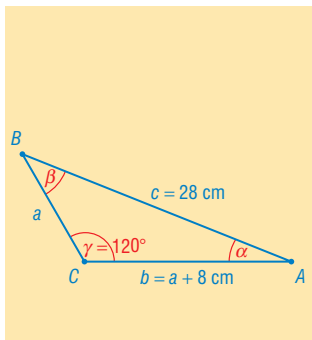
ahonnan az út végén levő torony megközelítőleg 15,76 m magas.



6.10. ábra A 7. példa megoldásához

A szinusztételt célszerű alkalmazni, ha adott egy háromszög

- ▶ egy oldalának hossza és két belső szöge. Ilyenkor közvetlenül meghatározható a szinusztétel segítségével bármelyik ismeretlen oldalnak a hossza **vagy**
- ▶ két oldalának hossza és a nagyobb oldallal szemközti szög. Ekkor a szinusztétel segítségével közvetlenül meghatározható a háromszög kisebb oldallal szemközti szöge.



6.11. ábra A 8. példa megoldásához

8. példa Egy háromszögben két oldal hosszának különbsége 8 cm, e két oldal által bezárt szög 120° , a harmadik oldala 28 cm hosszúságú. Mekkora a háromszög oldalai, szögei?

Megoldás:

Készítsünk ábrát (6.11. ábra)! Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszög c oldalára: $28^2 = a^2 + (a+8)^2 - 2 \cdot a \cdot (a+8) \cdot \cos 120^\circ$. A kapott egyenlet a -ra másodfokú, 0-ra redukálva: $3a^2 + 24a - 720 = 0$, majd 3-mal osztva $a^2 + 8a - 240 = 0$ adódik. Megoldása: $a_{1,2} = \frac{-8 \pm 32}{2}$, ahonnan az $a > 0$ feltétel miatt $a = 12$ cm. Így a háromszög keresett oldalai: $a = 12$ cm, $b = 20$ cm. Az α szög meghatározásához írjuk fel a szinusztételt: $\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$, azaz $\frac{12}{28} = \frac{\sin \alpha}{\sin 120^\circ}$, ahonnan $\sin \alpha = \frac{12}{28} \sin 120^\circ \approx 0,3712$. Innen az α szög egyértelműen meghatározható: $\alpha \approx 21,79^\circ$, ahonnan $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \approx 38,21^\circ$.



Oldjuk meg!

- Szögei szerint milyen az a háromszög, amelyben a szokásos jelöléseket használva fennáll, hogy
 - $a = \frac{3}{2}b$, $b = \frac{5}{6}c$;
 - $a = 10,65$ cm, $b = 6,30$ cm és $\gamma = 42^\circ$;
 - $a = 28$ cm, $\alpha = 59^\circ$, $\gamma = 72^\circ$;
 - $a = 17,89$ cm, $b = 11,31$ cm és $\beta = 63^\circ$.
- Egy trapéz oldalai rendre $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = d = 2,5$ cm, és tudjuk, hogy $a \parallel c$. Határozzuk meg a trapéz szögeit, területét!
- Egy háromszög egyik oldalának hossza 15 cm, a másik két oldalhoz tartozó súlyvonalak hossza 18 cm és 13,5 cm. Határozzuk meg a háromszög hiányzó oldalait, szögeit és területét!
- Egy paralelogramma egyik oldalának hossza 11 cm, egyik szöge 30° -os, rövidebb átlójának hossza 8 cm. Határozzuk meg a paralelogramma oldalait, területét!
- Egy háromszög területe 120 dm^2 , egyik oldalának hossza 26 dm, másik két oldalhosszának négyzetösszege 1000 dm^2 . Határozzuk meg a háromszög hiányzó oldalait, szögeit!
- Egy háromszög oldalhosszainak aránya $3 : 5 : 7$, beírt körének sugara $2\sqrt{3}$ egység. Mekkora a háromszög hiányzó oldalai, szögei?



7. A trigonometria alkalmazása

Már láttunk példát a trigonometria alkalmazására a rezgő mozgás, a váltakozó áram, az erők komponensekre való bontása kapcsán, és bemutattuk a matematikán belüli alkalmazását is. Középiskolás tanulmányaink során ebben a témakörben megszerzett ismereteinkre főként a fizika tantárgy területén van szükségünk. Ebben a leckében néhány példát adunk a fizikához és a geodéziához való kapcsolódására, a teljesség igénye nélkül.

A matematika kapcsolata más tudományokkal nem egyirányú, olykor a matematika is „ihletet” kap: például a fizikából ismert munka fogalma vezetett a vektorok skaláris szorzatának definíciójához.



1. példa Két közeg határán átlépő hullám törését a

$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$ egyenlet írja le, ahol α a beesési szög, β a törési szög, c_1 a beeső hullám terjedési sebessége és c_2 a megtört hullám terjedési sebessége. Egy mechanikai hullám terjedési sebessége levegőben $330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, vízben $1275 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mekkora a törés határszöge, ha a hullám levegőből vízbe lép?

Megoldás:

A törés határszöge az a beesési szög, amelyhez 90° -os törési szög tartozik (7.2. ábra).

A törés törvénye alapján $\frac{\sin \alpha_{\text{határ}}}{\sin 90^\circ} = \frac{330}{1275}$, ahonnan $\alpha_{\text{határ}} \approx 15^\circ$.



2. példa Egy csúszdaparkban a kamikaze (egyenes) csúszda 12 m magasságból indul, és a csúszda 60° -os szöget zár be a vízszintessel. Mekkora sebességgel ér a csúszda aljára Tomi, ha a csúszda tetejéről nyugalmi helyzetből indult, és a csúszda és Tomi között nincs súrlódás?

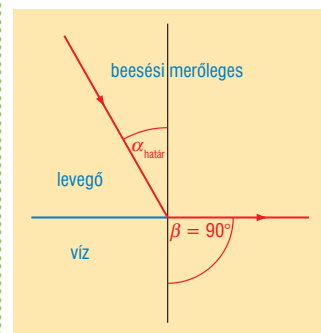
Megoldás:

A lejtőn súrlódás nélkül mozgó test egyenes vonalú egyenletesen változó (gyorsuló) mozgást végez, amelynek gyorsulása: $a = g \cdot \sin \alpha$

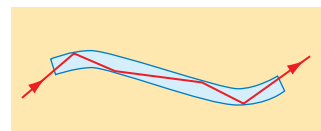
($g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a nehézségi gyorsulás, α a lejtő és a vízszintes szöge), a megtett útja: $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$, pillanatnyi sebessége: $v = a \cdot t$ (t az eltelt idő).



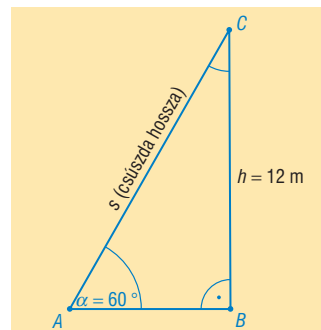
7.1. ábra A szívószál „törése”



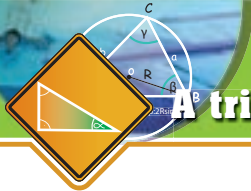
7.2. ábra A határszög meghatározásához



7.3. ábra Fényvezető üvegszál



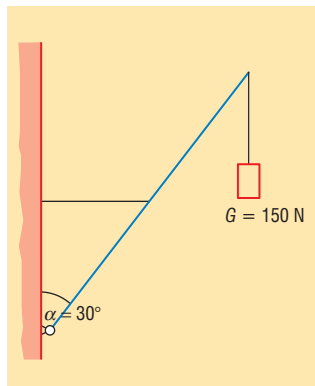
7.4. ábra Csúszda



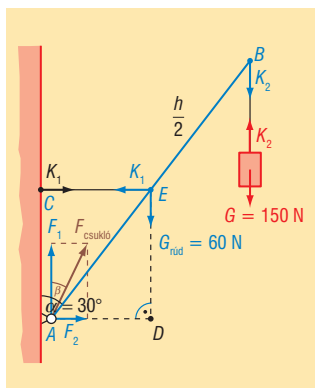
A trigonometria alkalmazásai



7.5. ábra A csúszdán



7.6. ábra A 3. példához



7.7. ábra A 3. példa megoldásához

A sebesség meghatározásához ki kell számítanunk Tomi gyorsulását, a csúszda hosszát és az indulástól a csúszda aljára való érkezésig eltelt időt. Az ABC derékszögű háromszögben a szögfüggvények definíciója

alapján: $s = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{12}{\sin 60^\circ} = 8\sqrt{3} \approx 13,86 \text{ m}$ (7.4. ábra). Tomi gyorsu-

lása: $a = g \cdot \sin \alpha \approx 8,66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, innen $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin^2 \alpha}} \approx 1,79 \text{ s}$. Így

Tomi sebessége a csúszda végén: $v = a \cdot t \approx 15,49 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 55,78 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



2. példa A függőleges falhoz csuklóval csatlakozó rudat a közepénél a rúdhoz kötött, vízszintes helyzetű fonállal a falhoz kötjük. A rúd szabad végét fonálon lógó $G = 150 \text{ N}$ súlyú testtel terheljük (7.6. ábra). Mekkora erő feszíti a falhoz erősített fonalat, ha a rúd súlya 60 N , és 30° -os szöget zár be a fallal?

Megoldás:

Rajzoljuk be az ábrába a rúdra, a fonalakra és a teherre ható erőket (7.7. ábra)!

A testek (a rendszer) egyensúlyban vannak. Egy pontszerű test egyensúlyban van, ha a rá ható erők eredője 0 ($\sum \vec{F} = \vec{0}$). Egy merev test egyensúlyban van, ha a rá ható erők eredője 0 ($\sum \vec{F} = \vec{0}$), és a rá ható erők forgatónyomatékainak előjeles összege 0 ($\sum M = 0$). A forgatónyomaték az erő nagyságának és az erőkarának a szorzata. Írjuk fel az egyensúly feltételeit!

A teherre vonatkozóan: $G - K_2 = 0 \Leftrightarrow K_2 = G = 150 \text{ N}$.

A rúdra mint merev testre:

▼ a rúdra ható erők fallal párhuzamos összetevőire:

$$G_{\text{rúd}} + K_2 - F_1 = 0 \Leftrightarrow F_1 = K_2 + G_{\text{rúd}} = 210 \text{ N}.$$

▼ a rúdra ható erők falra merőleges összetevőire:

$$F_2 - K_1 = 0 \Leftrightarrow F_2 = K_1.$$

A rúd A pontjára vonatkozó forgatónyomaték:

$$G_{\text{rúd}} \cdot \frac{h}{2} \cdot \sin 30^\circ + K_2 \cdot h \cdot \sin 30^\circ - K_1 \cdot \frac{h}{2} \cdot \cos 30^\circ = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_1 = (G_{\text{rúd}} + 2K_2) \operatorname{tg} 30^\circ = 120\sqrt{3} \text{ N} \approx 207,85 \text{ N}.$$

Tehát a vízszintes fonalat $120\sqrt{3} \text{ N} \approx 207,85 \text{ N}$ nagyságú erő feszíti.

Az erők egyensúlyával a fizika egyik külön ága, a statika foglalkozik. Fontos szerepe van többek között a mérnöki tervezésben, a magas- és a mélyépítésben.





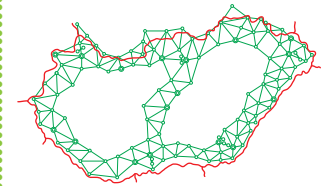
A geodézia egyik legfontosabb feladata a Föld fizikai felszínén található természetes és mesterséges tárgyak helyzetének megadása. A felméréshez olyan, ún. alapponthálózatot létesítenek, amely a földfelszínnek a gyakorlat által igényelt minden részlete a helymeghatározáshoz szükséges és elegendő. A földi helymeghatározás alapelveiből következik, hogy kétféle alapponthálózatot különböztetnek meg: vízszintes és magassági alapponthálózatot (7.10. ábra). A vízszintes alappontok sűrítésének, meghatározásának egyik eszköze a **háromszögelés**, a másik eszköze pedig a **sokszögelés**, amely napjaink legelterjedtebb módszere.



7.8. ábra A Föld felszíne változatos

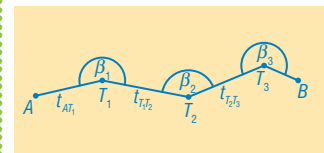


7.9. ábra A nadapi főalappont magassága 173,1638 m



7.10. ábra Országos vízszintes alapponthálózat (láncolatváz)

Háromszögelésnél egy új pontnak már ismert helyzetű pont(ok)hoz viszonyított helyzetének egyértelmű meghatározásához a háromszög két szögére (előmetszés, oldalmetszés), vagy két oldalára (ívmetszés), vagy egy oldalára és egy szögére van szükség. Három ismert pont esetén az új pontnál megméri azokat a szögeket, amelyekből az ismert pontok által meghatározott szakaszok az új pontból látszanak, ezt az esetet hátrametszésnek nevezik.

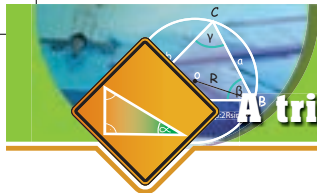


7.11. ábra Sokszögvonal

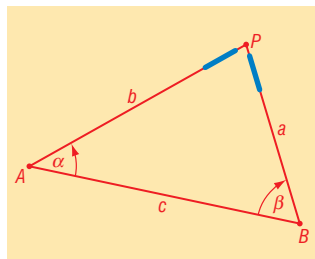
Sokszögelésnél a térszíni pontok viszonylagos helyzetét egyértelműen meghatározza a szomszédos pontok távolsága és az egyes pontoknál levő törésszögek (7.11. ábra). (Varga Antal: *Geodézia II.* alapján)



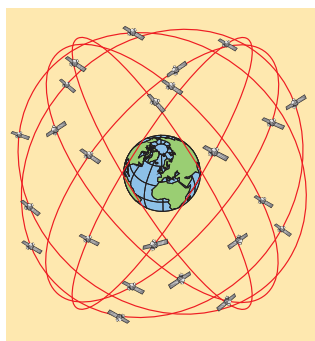
7.12. ábra Földmérés



A trigonometria alkalmazásai



7.13. ábra Belsőszöges előmet-
szés



7.14. ábra A 24 GPS műhold
20200 km magasságban kering a
Föld körül



7.15. ábra GPS egy autóban



4. példa Sík talajon adottak az $A(78;62)$, $B(90;67)$ há-
romszögelési alappontok.

Határozzuk meg a $P(p_1; p_2)$ pont koordinátáit, ha tudjuk, hogy
 $PAB\angle = \alpha = 30,51^\circ$ és $ABP\angle = \beta = 49,18^\circ$ (7.13. ábra)!

Ezt a feladatot a geodéziában előmetzésnek nevezik.

Megoldás:

Számítsuk ki az ABP háromszög hiányzó szögét, b oldalát!

A háromszög P csúcsánál levő szöge:

$$BPA\angle = 180^\circ - 30,51^\circ - 49,18^\circ = 100,31^\circ,$$

az $\overline{AB}(12;5)$, így $c = |\overline{AB}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

Alkalmazva a szinuszételt $\frac{b}{13} = \frac{\sin 49,18^\circ}{\sin 100,31^\circ}$, innen $b \approx 10,00$.

Írjuk fel az $\overline{AB}(12;5)$ és az $\overline{AP}(p_1 - 78; p_2 - 62)$ vektorok skaláris
szorzatát a definíció alapján és a koordináták segítségével:

$$(1) 10 \cdot 13 \cdot \cos 30,51^\circ = 12 \cdot (p_1 - 78) + 5 \cdot (p_2 - 62)!$$

Adjuk meg $\overline{AP}$ abszolút értékét a koordinátáival:

$$|\overline{AP}| = \sqrt{(p_1 - 78)^2 + (p_2 - 62)^2}, \text{ ahonnan}$$

$$(2) (p_1 - 78)^2 + (p_2 - 62)^2 = 100.$$

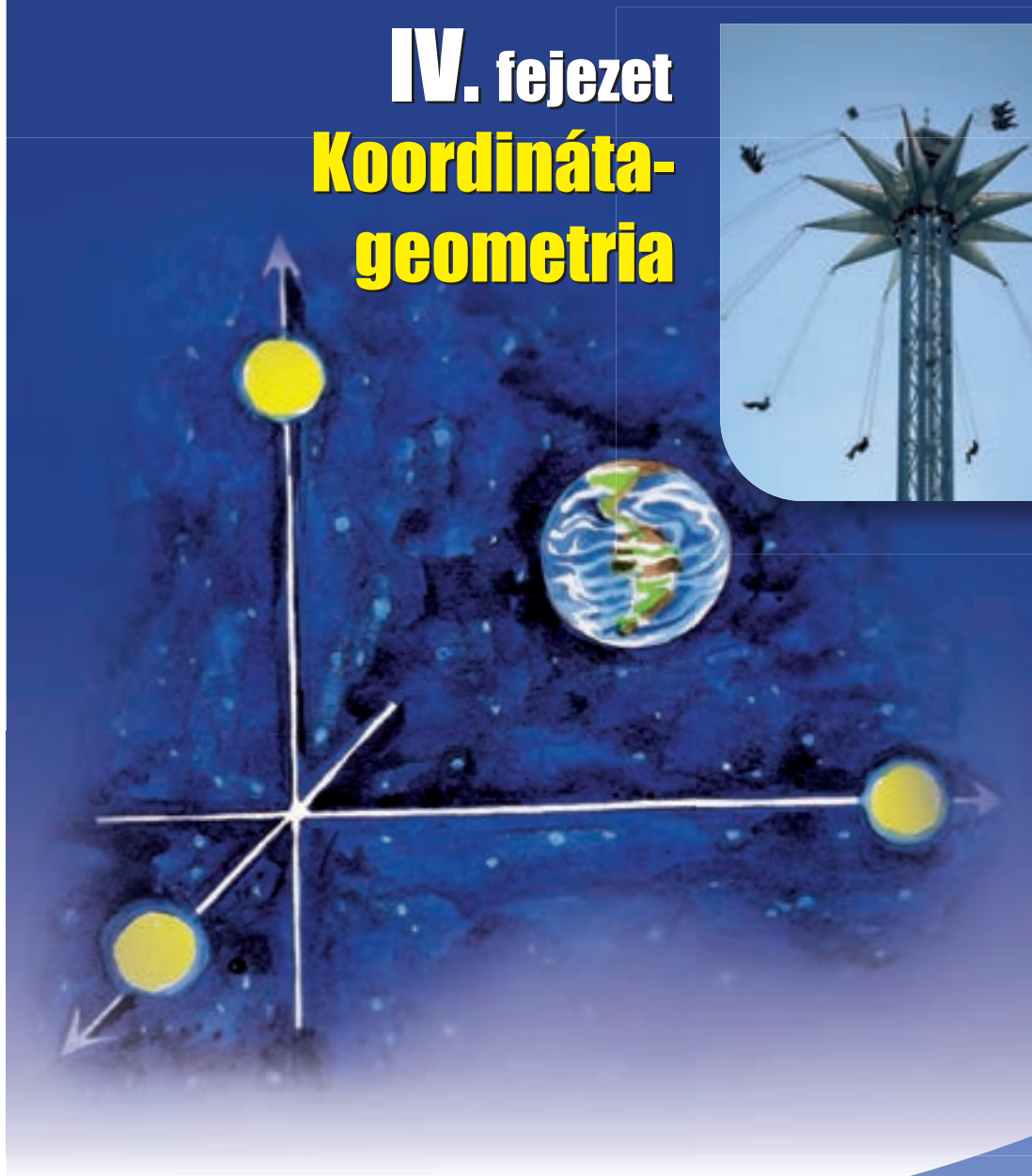
Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása adja a ke-
resett pont koordinátáit. Innen a feladat feltételeinek eleget tevő pont:
 $P(84;70)$.

Ez a megoldás eltér a geodéziában megszokottól, mert jelenlegi
ismereteink az ott szokásos megoldás módot nem teszik lehetővé.



Napjainkban az információ-, az űr- és számítógép-tudomány fejlődé-
sével a földmérés és geodézia integrációja (geomatika) minden olyan
tudományterületet magába foglal, amely a térbeli adatok és térbeli in-
formációk függvénye. (Például a környezetvédelem, a tervezés, a me-
zőgazdaság, az építőmérnöki alkalmazások, a navigáció, a geofizika,
az óceánkutatás, a földrendezés stb.) A globális műholdas rendszerek
(GPS = Global Positioning System) kifejlesztése óriási változást ho-
zott a helymeghatározás technikájában. A GPS-t számos országban már
részletmérési célokra is használják.

IV. fejezet **Koordináta- geometria**



Helyünk a világban



1. Vektorok a koordinátasíkon



1.1. ábra Isaac Newton
(1643–1727)



1.2. ábra Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)



1.3. ábra A lépkedő robot



A koordináta-geometria (vagy analitikus geometria) elnevezés arról árulkodik, hogy e témakör geometriai összefüggéseket tárgyal, a ponthalmazokat koordináta-rendszerben elhelyezve vizsgálja. A koordináták segítségével algebrai összefüggéseket írhatunk fel, amelyek valamilyen szempontból jellemzik a ponthalmazt. Az elemi geometriai módszereket a legtöbb esetben számolás váltja föl, majd a számítások eredményét alkalmazva újabb geometriai összefüggésekre is bukkanhatunk.

A módszer alapötlete már az ókori görög matematikában is föllelhető. Apollóniosz (Kr. e. 260?–190?) már ilyen szellemben tárgyalta a görbéket (kúpszeleteket), bár a koordináta-rendszer fogalmát csak majdnem kétezer évvel később alkották meg a matematikusok. Elsősorban François Viète (1540–1603) és René Descartes (1596–1650) érdemének szokták ezt tulajdonítani, akik már következetesen alkalmaztak algebrai jelöléseket, koordinátákkal való számolásokat.

A matematika ilyen irányú fejlődése a XVII. században azért is kapott lendületet, mert a mozgás matematikájának leírása egyre inkább szükségessé vált, előtérbe került. Ezzel a matematikai analízis alapjainak lefektetése is megtörtént, ami leginkább Isaac Newton (1643–1727) és Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) nevével fődött össze (1.1. és 1.2. ábrák).

A régi időkre emlékezés után lássunk egy modern példát!



1. példa A koordináta-rendszer $S(-7;5)$ startpontjában áll egy robot. A robot háromféle utasítást tud végrehajtani.

Az első utasítás ($\vec{a}$): haladj 3 egységnyit az x tengellyel párhuzamosan pozitív irányba, majd 2 egységnyit az y tengellyel párhuzamosan pozitív irányba!

A második utasítás ($\vec{b}$): haladj 1 egységnyit az x tengellyel párhuzamosan pozitív irányba, majd 4 egységnyit az y tengellyel párhuzamosan negatív irányba!

A harmadik utasítás ($\vec{c}$): haladj 2 egységnyit az y tengellyel párhuzamosan negatív irányba!

a) A robot a következő utasítássorozatot kapja: $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$.

Határozzuk meg, hogy az utasítások végrehajtása után a koordináta-rendszer mely C célpontjába jut el!

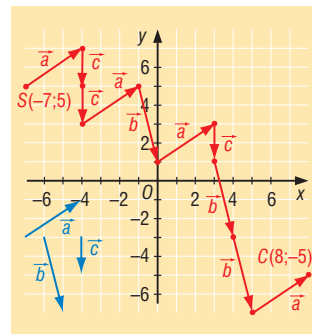
Rajzoljuk is le a robot útját! (Egy-egy utasításnak megfelelő mozgást egyetlen vektorral ábrázoljunk!)

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

- b) Meg tudtuk volna adni egyszerűbben az utasítássorozatot?
c) Adjunk meg egyetlen olyan (új) utasítást, amellyel az S startpontból kiindulva közvetlenül a C célpontba érkezik a robot!

Megoldás:

- a) A rajzon (1.4. ábra) jól követhető a robot útja. Végül a $C(8; -5)$ pontba érkezik.
b) A megadott utasítások más sorrendbe is állíthatók, az azonos utasítások össze is vonhatók, így elegendő lett volna azt mondanunk a robotnak, hogy hajtsa végre 4-szer az $\vec{a}$ utasítást, 3-szor a $\vec{b}$ -t és 3-szor a $\vec{c}$ -t.
c) Egyetlen utasítással pedig úgy küldhettük volna el az $S(-7;5)$ pontból a $C(8;-5)$ pontba, hogy kiszámítjuk a robot számára az $\vec{SC}$ vektor koordinátáit, azaz: haladjon az x tengellyel párhuzamosan 15 egységet pozitív irányba, és az y tengellyel párhuzamosan 10 egységet negatív irányba. Röviden: $\vec{SC}(15; -10)$.



1.4. ábra A vektorrobot útja



2. példa Az 1. példában szereplő robotot így tökéletesítették: az utasításokkal meghatározott elmozdulás-vektoroknak akár milyen racionális számszorosát meg tudja tenni egy-egy lépésben. A fejlesztő arra is rájött, hogy elegendő az $\vec{a}$, a $\vec{b}$ és a $\vec{c}$ vektor közül kettőt megadnia ahhoz, hogy a robot bárhová eljuthasson. Ezért a $\vec{c}$ vektorral (és számszorosaival) való elmozdulást törölték a programjából.

A megmaradt $\vec{a}(3;2)$ és $\vec{b}(1;-4)$ vektorok számszorosainak összegeként hogyan tud eljutni a robot az $S(-7;5)$ pontból a $C(8;-5)$ célpontba?

Megoldás:

A matematika nyelvére lefordítva az a feladatunk, hogy keressünk olyan k és l racionális számokat, amelyekre teljesül, hogy $k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} = \vec{SC}$. Ezt pedig csak a koordinátákkal való számolással oldhatjuk meg. Az összefüggésnek külön az első és a második koordinátákra is teljesülnie kell.

$$\left. \begin{aligned} k \cdot 3 + l \cdot 1 &= 15 \\ k \cdot 2 + l \cdot (-4) &= -10 \end{aligned} \right\}.$$

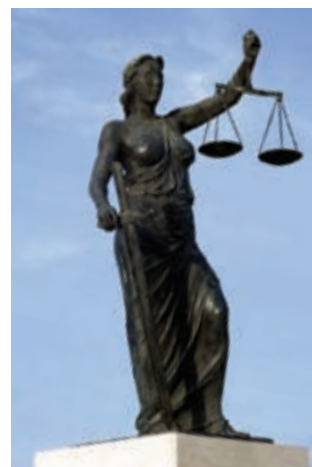
Ezzel egy k -ra és l -re vonatkozó kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kaptunk. Oldjuk meg például az ellentett együtthatók módszerével! (Szorozzuk meg az első egyenletet 4-gyel, majd adjuk össze az így kapott egyenletet és a második egyenletet!)

$$\left. \begin{aligned} k \cdot 12 + l \cdot 4 &= 60 \\ k \cdot 2 + l \cdot (-4) &= -10 \end{aligned} \right\},$$

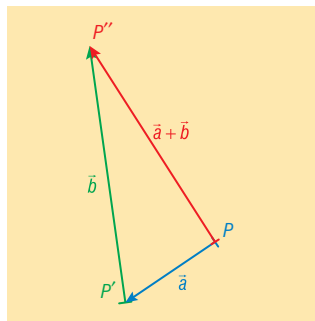
$$14 \cdot k = 50,$$



1.5. ábra A továbbfejlesztett robot nemcsak lépked, hanem segít is, ha kell



1.6. ábra Egyenlőség



1.7. ábra Emlékeztető



Definíció

Adott az $\vec{a}$ vektor és a λ valós szám. $\lambda \cdot \vec{a}$ azt a vektort jelenti, amelyik párhuzamos az $\vec{a}$ -ral, hossza az $\vec{a}$ vektor hosszának $|\lambda|$ -szerese, irányítása pedig megegyezik az $\vec{a}$ irányításával, ha $\lambda > 0$, és ellentétes, ha $\lambda < 0$.

Jellelkel:

$|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ és ha $\lambda > 0$, akkor $\lambda \cdot \vec{a} \uparrow \vec{a}$,

ha $\lambda < 0$, akkor $\lambda \cdot \vec{a} \updownarrow \vec{a}$.

(Ha $\lambda = 0$, akkor $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.)

1.8. ábra Ez is emlékeztető

$$k = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}.$$

Ezt helyettesítsük vissza az első egyenletbe:

$$\frac{25}{7} \cdot 3 + l \cdot 1 = 15,$$

$$l = 15 - 3 \cdot \frac{25}{7} = \frac{105 - 75}{7} = \frac{30}{7}.$$

A két keresett racionális szám tehát $k = \frac{25}{7}$ és $l = \frac{30}{7}$.



Vegyük észre, hogy az első két feladat megoldása során a vektorok összeadására, kivonására, számmal való szorzására vonatkozó korábbi ismereteinket alkalmaztuk! Felhasználtuk, hogy a vektorösszeadás rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

✦ kommutatív (a tagok fölcserélhetők), azaz bármely $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor esetén:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

✦ asszociatív (tetszőlegesen zárójeljelezhető), azaz bármely $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektor esetén:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Vektor számmal való szorzására vonatkozóan az alábbi tulajdonságok teljesülnek, ahol α és β tetszőleges valós számok, $\vec{a}$ és $\vec{b}$ pedig tetszőleges vektorok:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$$

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$$

Ezen tulajdonságok alapján mutattuk meg 10. osztályban, hogy a koordinátáival megadott vektorokkal végzett műveletek hogyan jelennek meg a koordinátákban. Ismételjük át ezt is!

Legyen $\vec{a}(a_1; a_2)$ és $\vec{b}(b_1; b_2)$, továbbá λ valós szám.

Ekkor a két vektor összegének, különbségének és λ -szorosának koordinátái:

$$(\vec{a} + \vec{b})(a_1 + b_1; a_2 + b_2),$$

$$(\vec{a} - \vec{b})(a_1 - b_1; a_2 - b_2),$$

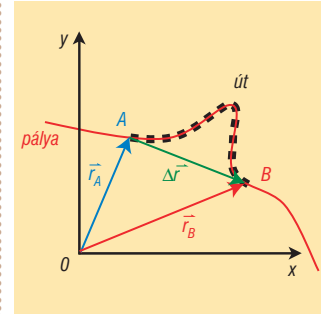
$$(\lambda \vec{a})(\lambda a_1; \lambda a_2).$$

Ezeket az összefüggéseket az első feladatban tudatosan felhasználva kiszámolhatjuk a $4 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} + 3 \cdot \vec{c}$ vektor koordinátáit az $\vec{a}(3; 2)$, $\vec{b}(1; -4)$ és $\vec{c}(0; -2)$ vektor ismeretében:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

$$\left. \begin{aligned} 4 \cdot \vec{a}(4;3;4 \cdot 2) &\Rightarrow 4\vec{a}(12;8) \\ 3 \cdot \vec{b}(3 \cdot 1;3 \cdot (-4)) &\Rightarrow 3\vec{b}(3;-12) \\ 3 \cdot \vec{c}(3 \cdot 0;3 \cdot (-2)) &\Rightarrow 3\vec{c}(0;-6) \end{aligned} \right\} \oplus \Rightarrow 4\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}(15;-10).$$

Ez éppen az $\overrightarrow{SC}$ vektor koordinátáit adja meg. De amikor az S és a C pont ismeretében akartuk kiszámítani az $\overrightarrow{SC}$ vektor koordinátáit, akkor tulajdonképpen egy kivonást hajtottunk végre: az origóból a C pontba mutató vektorból vontuk ki az origóból az S pontba mutató vektort.



1.9. ábra A helyvektor fizikából is ismert fogalom

Definíció A koordináta-rendszerben egy pont helyvektora az origóból hozzá mutató vektor. Minden pont koordinátái megegyeznek helyvektorának koordinátaival.

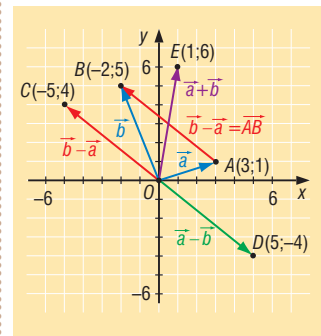
3. példa Adott az A és a B pont koordinátaival: $A(3;1)$ és $B(-2;5)$. Az A és a B pont helyvektora legyen rendre $\vec{a}$ és $\vec{b}$!

Adjuk meg koordinátaival a következő vektorokat: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ és $\overrightarrow{AB}$! A koordináta-rendszer melyik pontjába mutat az $\vec{a} + \vec{b}$, az $\vec{a} - \vec{b}$ és a $\vec{b} - \vec{a}$ helyvektor?

Megoldás:

Készítsünk ábrát! Az előbb elmondottak szerint $\vec{a}(3;1)$, $\vec{b}(-2;5)$, $(\vec{a} + \vec{b})(1;6)$ és $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}(-5;4)$ (1.10. ábra).

Az $(\vec{a} + \vec{b})(1;6)$ helyvektor az ábrán E -vel jelölt $(1;6)$ pontba mutat. A $(\vec{b} - \vec{a})(-5;4)$ helyvektor az ábrán C -vel jelölt $(-5;4)$ pontba mutat. Az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor pedig a $\vec{b} - \vec{a}$ ellentettje, így koordinátái $(5;-4)$, ez a D pont helyvektora, így ennek koordinátái egyenlők a D koordinátaival: $(5;-4)$.



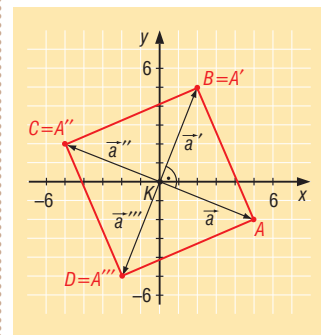
1.10. ábra Helyvektorok

4. példa Koordinátaival adott egy négyzet középpontja (K) és egyik csúcsa (A). Határozzuk meg a négyzet többi csúcsának koordinátáit, ha

a) $K(0;0)$ és $A(5;-2)$;

b) $K(-3;1)$ és $A(4;4)$!

Számítsuk ki a négyzet területét mindkét esetben!



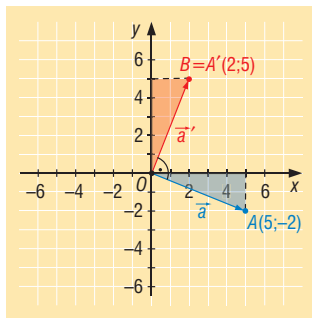
1.11. ábra Az a) példában szereplő négyzet

Megoldás:

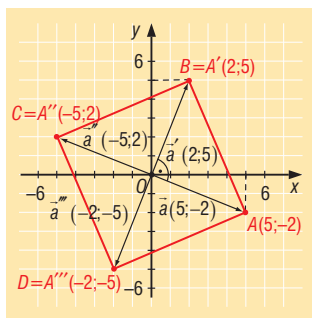
A középpont és egy csúcs ismeretében egy négyzetet úgy szerkeszthetnénk meg, hogy az adott csúcsot a középpont körül 90° -kal elforgatjuk, majd ezt még kétszer megtesszük a legutoljára kapott ponttal (1.11. ábra). Hogyan tudjuk ezt kivitelezni a koordináta-rendszerben?



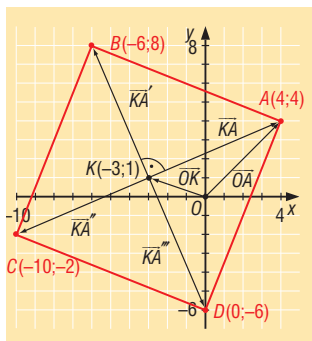
Koordináta-geometria



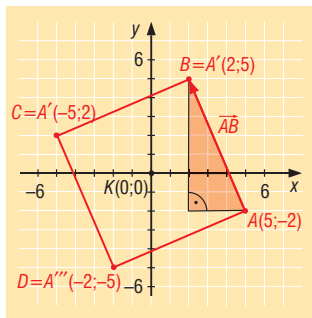
1.12. ábra Az első 90°-os elforgatás



1.13. ábra És még kétszer



1.14. ábra A b) példában szereplő négyzet



1.15. ábra Az oldalvektor hossza

Az a) esetben a középpont az origó, így az origó körül kell elforgatnunk az A pontot 90° -kal. Válasszuk a pozitív forgásirányt! Az A ponthoz megrajzolhatunk egy derékszögű háromszöget, amelynek befogói olyan hosszúak, mint az A pont koordinátáinak abszolút értéke, átfogója pedig a négyzet fél átlója. Ezt a háromszöget forgassuk el az origó körül 90° -kal pozitív irányba (1.12. ábra)! Ezzel a háromszög oldalainak hossza változatlan marad, de ami az x tengelyre illeszkedett, az most az y tengelyre illeszkedik, és ami az y tengellyel volt párhuzamos, az most az x tengellyel párhuzamos.



Vegyük észre, hogy az elforgatott pont két koordinátája felcserélődött, és az első koordináta ellenkező előjelű lett. Mivel a pont koordinátái megegyeznek a hozzá mutató helyvektor koordinátáival, ezért a vektor koordinátáira is ugyanez az összefüggés érvényes elforgatáskor.



Tétel

Ha egy koordinátáival adott vektort elforgatunk az origó körül 90° -kal pozitív irányba, akkor a vektor két koordinátája felcserélődik és az első koordináta ellenkező előjelű lesz. Matematikai jelekkel:

az $\vec{a}(a_1; a_2)$ vektor $+90^\circ$ -os elforgatottja az $\vec{a}'(-a_2; a_1)$ vektor.

Az a) esetben tehát a négyzet négy csúcsához mutató helyvektorok: $\vec{a}(5;-2)$, $\vec{a}'(2;5)$, $\vec{a}''(-5;2)$ és $\vec{a}'''(-2;-5)$. Így a négyzet csúcsainak koordinátái is ugyanezek: $A(5;-2)$, $B(2;5)$, $C(-5;2)$ és $D(-2;-5)$ (1.13. ábra).

A b) esetben először meg kell határoznunk a $\vec{KA}$ vektor koordinátáit (a tanult módon: ez az A pont helyvektorának és K pont helyvektorának különbsége): $\vec{KA}(7;3)$. Ezután forgassuk el ezt a vektort egymás után háromszor pozitív irányba 90° -kal!

$\vec{KA}'(-3;7)$, $\vec{KA}''(-7;-3)$, $\vec{KA}'''(3;-7)$. A B pont helyvektora egyenlő a K pont helyvektorának és a $\vec{KA}'$ vektornak az összegével (1.14. ábra). $\vec{OB} = \vec{OK} + \vec{KA}'((-3)+(-3); 1+7)$, tehát $\vec{OB}(-6;8)$, ahol O az origó. Így a B pont koordinátái is $B(-6;8)$. Ugyanígy adódnak a C és a D pont koordinátái is: $C(-10;-2)$ és $D(0;-6)$.

Mindkét négyzet területét megkaphatjuk, ha előbb kiszámítjuk egyik oldaluk hosszát. Ehhez egy oldalvektor hosszát határozzuk meg a vektor koordinátáiból. Az a) esetben pl. $\vec{AB}(-3;7)$. Ennek hossza:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58} \text{ egység (1.15. ábra).}$$

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$



Tétel Koordinátaival adott vektor hossza egyenlő a koordinátáinak négyzetösszegéből vont négyzetgyökkel.

A másik négyzet $\overline{AB}$ oldalvektora: $\overline{AB}(-10;4)$, egy oldalának hossza tehát: $|\overline{AB}| = \sqrt{(-10)^2 + 4^2} = \sqrt{100+16} = \sqrt{116} = 2 \cdot \sqrt{29}$ egység.

A két négyzet kerülete tehát a) $K = 4 \cdot \sqrt{58}$ egység; b) $K = 8 \cdot \sqrt{29}$ egység.



Vegyük észre, hogy mindkét oldalhossz meghatározásánál két koordinátaival adott pont távolságát számoltuk ki. Oldjuk meg általánosan a feladatot! Legyen a két pont $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$! Ekkor az A -ból B -be mutató vektor: $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Ennek a vektornak a hossza:



Tétel Két koordinátaival adott pont távolságát kiszámíthatjuk a következőképpen: vesszük a két pont első koordinátáinak különbségét és a második koordináták különbségét, majd ennek a két különbségnek a négyzetösszegéből négyzetgyököt vonunk.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Ezt az összefüggést tehát közvetlenül is alkalmazhatjuk két pont távolságának a meghatározására.



5. példa Határozzuk meg az ABC háromszög kerületét és területét, ha $A(-1;4)$, $B(2;-2)$ és $C(7;3)$ (1.18. ábra)!

Megoldás:

A kerület kiszámításához használjuk az előző feladat kapcsán tanult távolságképletet!

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \\ &= \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2} = \\ &= \sqrt{(7 - 2)^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5 \cdot \sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2} = \\ &= \sqrt{(-1 - 7)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}, \end{aligned}$$

$$K = AB + BC + CA = 3 \cdot \sqrt{5} + 5 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{65}.$$

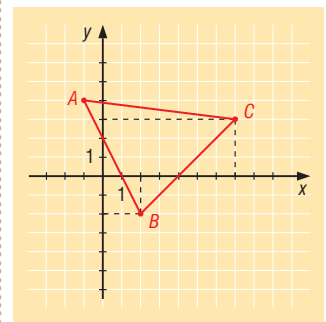
Az $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$ pont távolsága:

$$\begin{aligned} AB &= |\overline{AB}| = \\ &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \end{aligned}$$

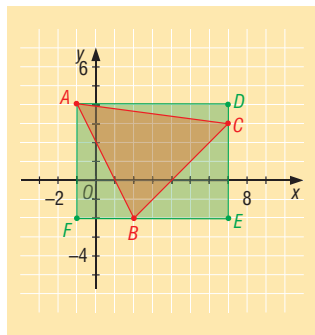
1.16. ábra Két pont távolsága



1.17. ábra Távolság



1.18. ábra Az ABC háromszög



1.19. ábra Háromszög területe

A terület meghatározásához alkalmazhatjuk a trigonometriában tanultakat: az oldalak ismeretében a koszinusztétel segítségével kiszámíthatjuk a háromszög valamelyik szögét, majd a két oldalt és a közbezárt szög szinuszt tartalmazó területképlettel a háromszög területét. (Gyakorlásképpen ajánljuk a kedves olvasónak ezt az utat!) Most viszont egy egyszerűbb módszert fogunk használni.

Rajzoljuk le a háromszöget a koordináta-rendszerben, majd a háromszög csúcsain keresztül húzzunk párhuzamosokat a koordináta-tengelyekkel! Így kialakul egy téglalap, amelynek a területét könnyen kiszámolhatjuk, majd a háromszögon kívül eső részek területét vonjuk ki a téglalap területéből (1.19. ábra).

Az ábra jelöléseit használva a téglalap területe $T = AD \cdot AF = 8 \cdot 6 = 48$ t.e., a „fölsőleges” derékszögű háromszögek területe pedig:

$$T_{ADC\Delta} = \frac{AD \cdot DC}{2} = \frac{8 \cdot 1}{2} = 4 \text{ t.e.}, \quad T_{CEB\Delta} = \frac{CE \cdot EB}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = 12,5 \text{ t.e. és}$$

$$T_{BFA\Delta} = \frac{BF \cdot FA}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ t.e.}$$

A háromszög területe tehát:

$$T_{ABC\Delta} = T - T_{ADC\Delta} - T_{CEB\Delta} - T_{BFA\Delta} = 48 - 4 - 12,5 - 9 = 22,5 \text{ t.e.}$$



Oldjuk meg!

- A derékszögű koordináta-rendszerben adott $A(2; -5)$, $B(4; 8)$, $C(-6; 3)$ és $D(2; 3)$ pont. E négy ponthoz mutató helyvektorok legyenek rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ és $\vec{d}$!
 - Adjuk meg koordinátaival az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektort!
 - Adjuk meg koordinátaival az $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}$, $\vec{c} - \vec{a}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, $-\frac{1}{3}\vec{c}$, $3\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{d}$, $5\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ vektorokat!
 - A következő vektorokat rajzoljuk be a koordináta-rendszerbe, és számítsuk ki a vektorok koordinátáit: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CB}$!
- Egy négyzet középpontja az origó, egyik csúcsa pedig a $(-3; 8)$ pont. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit! Számítsuk ki a négyzet kerületét és területét!
- Egy négyzet középpontja a $(4; -5)$ pont. Határozzuk meg a négyzet többi csúcspontjának koordinátáit, ha ismerjük még az egyik csúcsát: $(-2; -2)$! Számítsuk ki a négyzet kerületét és területét!
- Egy téglalap két szomszédos csúcsának koordinátái $A(6; -1)$ és $B(3; 3)$, két szomszédos oldalának aránya pedig 1:2. Határozzuk meg a téglalap hiányzó csúcsainak koordinátáit! Hány ilyen téglalap van? Számítsuk ki minden esetben a téglalap kerületét és területét!
- Számítsuk ki annak a háromszögnek a kerületét és területét, melynek csúcsai:
 - $A(8; 4)$; $B(2; 7)$ és $C(-1; -3)$;
 - $A(-4; 6)$; $B(7; 0)$ és $C(2; 4)$!

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

2. Tájékozódás a koordináta-rendszerben



1. példa Egy távoli, nagyon nagy bolygón Pláneország egésze annyira sík vidék, hogy a könnyebb tájékozódás érdekében bevezették a nálunk matematikából ismert derékszögű koordináta-rendszert. Pláneország útjai egyenesek. Állapítsuk meg, hogy az A városból B városba vezető út párhuzamos-e a C városból D városba vezető úttal, ha a városok koordinátái: $A(10; -15)$, $B(-16; 27)$, $C(-20; 32)$ és $D(1; -2)$!

Megoldás:

1. módszer:

Ha ábrázolni próbáljuk a megadott pontokat egy koordináta-rendszerben, akkor több nehézségbe is ütközünk.

Először is a koordináták túl nagyok, kényelmetlen az ábrázolásuk, főleg pontosan. Másodszor: ha sikerül egy jó léptéket találnunk, amely-nél minden pontot pontosan látunk, a két út párhuzamosságát akkor sem tudjuk eldönteni „szemre”. Ráadásul úgy néz ki a két út, mintha párhuzamos lenne. Tehát első ránézésre nem tudjuk cáfolni a párhuzamosságot. De igazolni sem. Milyen eszközt alkalmazhatnánk tehát?

A két út irányát jellemezhetjük az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{CD}$ vektorral. A két út pontosan akkor párhuzamos egymással, ha ezek a vektorok is párhuzamosak. Vektorok hajlásszögének meghatározását már tanultuk a trigonometria fejezetben. Ezzel a módszerrel itt is dolgozhatnánk. (Ha végeredményként 0° -ot vagy 180° -ot kapunk, akkor párhuzamosak, egyébként nem.) Tanultuk a vektorok merőlegességének szükséges és elégséges feltételét is: két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. Ha például a $\overrightarrow{CD}$ vektort elforgatjuk 90° -kal és az így kapott vektor merőleges lesz az $\overrightarrow{AB}$ vektorra, akkor az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{CD}$ vektor párhuzamos.

Nézzük konkrétan: $\overrightarrow{AB}(-26; 42)$ és $\overrightarrow{CD}(21; -34)$. A $\overrightarrow{CD}$ vektor $+90^\circ$ -os elforgatottjának koordinátái: $\overrightarrow{CD}'(34; 21)$. Vegyük az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{CD}'$ vektor skaláris szorzatát! A trigonometria fejezet 5. leckéjében tanultak szerint **a skaláris szorzat egyenlő az első koordináták szorzatának és a második koordináták szorzatának az összegével.**

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}' = -26 \cdot 34 + 42 \cdot 21 = -2 \neq 0$$

A kapott skaláris szorzat nem 0, így az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{CD}'$ vektor nem merőleges egymásra, tehát az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{CD}$ vektor nem párhuzamos egymással, vagyis a két út sem párhuzamos.



2.1. ábra Ez egy távoli, nagy bolygó?



2.2. ábra Pláneország sík vidéke

Az $\vec{u}(u_1; u_2)$ és a $\vec{v}(v_1; v_2)$ vektor skaláris szorzatának kiszámítása koordinátákból:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

2.3. ábra Skaláris szorzat



2.4. ábra Van másik!

2. módszer:

Ebben a megoldásban is az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{CD}$ vektor irányával foglalkozunk. Ha található olyan (0-tól különböző) valós szám, amellyel az egyik vektort megszorozva a másikat kapjuk eredményül, akkor a két vektor párhuzamos. Fontos megjegyezni, hogy ha nem létezik ilyen szám, akkor a két vektor nem párhuzamos.

Nézzük itt is konkrétan: ha van ilyen k valós szám, akkor az $\overrightarrow{AB}(-26; 42)$ vektor k -szorosának a $\overrightarrow{CD}(21; -34)$ vektorral kell egyenlőnek lennie. Így a koordinátákra is fent kell állnia ennek. $\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, tehát a $21 = k \cdot (-26)$ és a $-34 = k \cdot 42$ egyenlőségnek ugyanolyan k esetén kellene teljesülnie, ha a két vektor párhuzamos lenne. Az első

egyenletből $k = -\frac{21}{26}$, a másodikból $k = -\frac{34}{42} = -\frac{17}{21}$. A két egyenlet-

ből kapott k értékek tovább már nem egyszerűsíthető közös nevezőre alakíthatók, így látszik, hogy nem egyenlők. Erről úgy is meggyőződhetünk, hogy feltételezzük, hogy egyenlő a két szám, és néhány

azonos átalakítást végzünk rajtuk. $-\frac{21}{26} = -\frac{34}{42} \Leftrightarrow 21 \cdot 42 = 34 \cdot 26$

$\Leftrightarrow -26 \cdot 34 + 42 \cdot 21 = 0 \Leftrightarrow -2 = 0$. Mivel végeredményül ellentmondást kapunk, nem pedig azonosságot, így a két szám nem egyenlő, a két út nem párhuzamos.



Vegyük észre, hogy az átalakítások után ugyanazt a számolást kellett mindkét esetben végrehajtanunk, a két módszer összhangban áll egymással!



2.5. ábra Párhuzamosok és merőlegesek



2. példa Állapítsuk meg a következő vektorokról, hogy melyek párhuzamosak egymással és melyek merőlegesek egymásra:

$\vec{a}(-6; 8)$, $\vec{b}(0; 7)$, $\vec{c}(9; -12)$, $\vec{d}(3; 0)$, $\vec{e}(3; 4)$, $\vec{f}(16; 12)$, $\vec{g}(0; 5)$!

Megoldás:

Feltűnhet, hogy három olyan vektor is van, melyek egyik koordinátája 0. Ez azt jelenti, hogy ezek a vektorok valamelyik koordinátatengellyel párhuzamosak. A $\vec{b}$ és a $\vec{g}$ vektor az y tengellyel párhuzamos, így egymással is párhuzamosak. A $\vec{d}$ vektor pedig az x tengellyel párhuzamos, így merőleges a $\vec{b}$ és a $\vec{g}$ vektorra is. (Ez esetben kár lett volna bármit is számolnunk a koordinátákkal.) A többi vektor viszont biztosan nem párhuzamos egyik koordinátatengellyel sem, így se nem párhuzamosak az előbbi vektorokkal, se nem merőlegesek rájuk.

Ha az $\vec{a}$ vektort valamely 0-tól különböző számmal megszorozzuk, a koordinátái különböző előjelűek maradnak, így az $\vec{e}$ és az $\vec{f}$

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

vektorral biztosan nem párhuzamos. Ugyanakkor különösebb számolás nélkül észrevehetjük, hogy az $\vec{a}$ vektornak $-\frac{3}{2}$ -szerese a $\vec{c}$ vektor, ezek tehát párhuzamos vektorok. Az $\vec{e}$ és az $\vec{f}$ vektor sem párhuzamos egymással, mert $\frac{f_1}{e_1} = \frac{16}{3} \neq \frac{f_2}{e_2} = \frac{12}{4} = 3$. Már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy az $\vec{e}$ és az $\vec{f}$ vektor közül valamelyik merőleges-e az $\vec{a}$ vektorra (akkor a $\vec{c}$ vektorra is merőleges). Ehhez nézzük a skaláris szorzatokat: $\vec{e} \cdot \vec{a} = 3 \cdot (-6) + 4 \cdot 8 = -18 + 32 = 14 \neq 0$, tehát $\vec{e} \nperp \vec{a}$, $\vec{f} \cdot \vec{a} = 16 \cdot (-6) + 12 \cdot 8 = -96 + 96 = 0$, tehát $\vec{f} \perp \vec{a}$.

Összegezve: $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{f} \perp \vec{a}$, $\vec{f} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{g}$, $\vec{d} \perp \vec{b}$, $\vec{d} \perp \vec{g}$.



Az előző leckében foglalkoztunk a vektorok 90°-os elforgatásával. Így egy pont origó körüli 90°-os elforgatását is végre tudjuk hajtani. Lásunk most további példákat arra, hogy egy-egy geometriai transzformáció hogyan módosítja a pontok koordinátáit!



3. példa A $P(-2;5)$ ponton hajtsuk végre külön-külön az alábbi transzformációkat! Adjuk meg a képpontok koordinátáit!

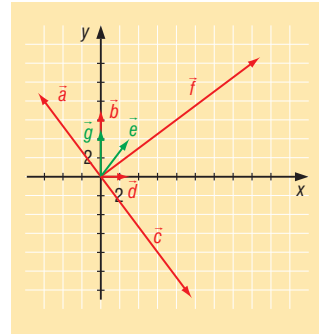
- Tükrözzük a P pontot az x tengelyre (P_a)!
- Tükrözzük a P pontot az y tengelyre (P_b)!
- Tükrözzük a P_a pontot az y tengelyre (P_c)!
- Tükrözzük a P pontot az origóra (P_d)!
- Tükrözzük a P pontot az x és az y tengely szögfelezőire (P_{e_1} és P_{e_2})!
- Toljuk el a P pontot a $\vec{v}(6;-4)$ vektorral (P_f)!

Megoldás:

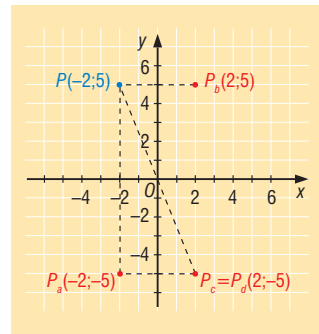
- Az x tengelyre tükrözéskor az abszcissza változatlan marad, míg az ordináta ellentettjére változik $P_a(-2;-5)$.
- Az y tengelyre tükrözéskor az abszcissza ellentettjére változik, míg az ordináta változatlan marad $P_b(2;5)$.
- $P_c(2;-5)$
- Az origóra tükrözéskor az abszcissza is és az ordináta is ellentettjére változik $P_d(2;-5)$ (2.7. ábra).



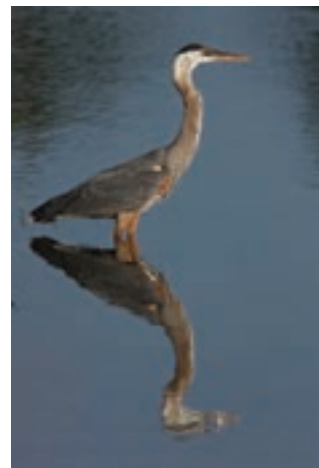
Vegyük észre, hogy az x és az y tengelyre vonatkozó tükrözéseket egymás után végrehajtva ugyanazt a pontot kaptuk eredményül, mint amikor az origóra tükröztünk. A kapott eredményt elemi úton is igazolhatjuk, de a koordináták előjeleinek változása alapján is nyilvánvaló.



2.6. ábra A 2. példa vektorai



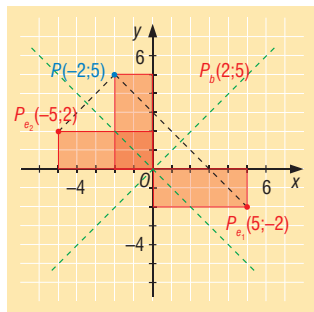
2.7. ábra Tükrözések a)-tól d)-ig



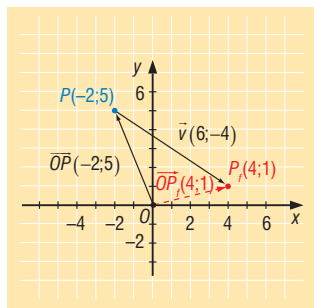
2.8. ábra Tükröződés



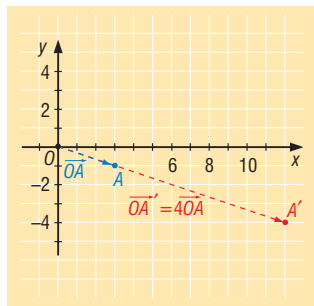
Koordináta-geometria



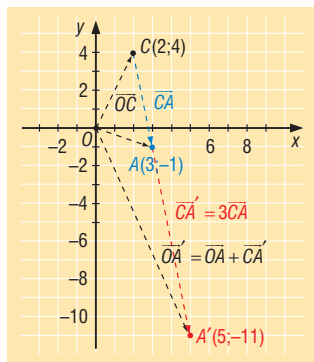
2.9. ábra Tükrözés e)



2.10. ábra Eltolás



2.11. ábra Nagyítás origóból



2.12. ábra Nagyítás az origótól különböző pontból

e) Emeljük ki azt a téglalapot, amelynek a P pontot és az origót összekötő szakasz az átlója, oldalai pedig párhuzamosak a koordinátatengelyekkel! A szögfelezőkre vonatkozó tükrözéskor a koordinátatengelyek egymásba mennek át, így a tükörképként kapott téglalapok oldalai is párhuzamosak lesznek a koordinátatengelyekkel, az x tengellyel párhuzamos oldalakból y tengellyel párhuzamos oldalak lesznek, és megfordítva. A tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt az oldalhosszak nem változnak. Az I. és III. síknegyedben áthaladó szögfelezőre tükrözéskor a P pont koordinátái fölcserélődnek: $P_{e_1}(5;-2)$, a II. és IV. síknegyedben áthaladó szögfelezőre tükrözéskor a P pont koordinátái fölcserélődnek, és ellenkező előjelet kapnak: $P_{e_2}(-5;2)$. (2.9. ábra)

f) A P pont eltolásakor csak arra kell figyelni, amit az előző lecke-ben tanultunk: egy pont koordinátái azonosak a hozzá mutató helyvektor koordinátaival. Így a P pont eltoltja az $\overrightarrow{OP} + \vec{v} = \overrightarrow{OP_f}$ vektor végpontja lesz. $P(-2;5) \Rightarrow \overrightarrow{OP}(-2;5)$, ugyanakkor $\vec{v}(6;-4) \Rightarrow \overrightarrow{OP} + \vec{v} = \overrightarrow{OP_f}(4;1)$. Így $P_f(4;1)$ (2.10. ábra).



4. példa Hajtsunk végre az $A(3;-1)$ ponton egy középpontos hasonlóságot, melynek középpontja

- az origó (O), és aránya 4!
 - a $C(2;4)$ pont, és aránya 3!
- Adjuk meg a kapott képpontok koordinátáit!

Megoldás:

a) Az A pont képe (A') rajta van az O kezdőpontú félegyenesen, és az O ponttól 4-szer olyan távol van, mint az A (2.11. ábra). Használjuk ki, hogy az $\overrightarrow{OA}$ helyvektornak az $\overrightarrow{OA'}$ helyvektor éppen a 4-szerese. Így $\overrightarrow{OA'}$ koordinátái $(12;-4)$, épp úgy, mint az A' ponté $A'(12;-4)$.

b) Az itt is teljesül, hogy $\overrightarrow{CA'} = 3 \cdot \overrightarrow{CA}$, de ez most nem a helyvektora az A' pontnak (2.12. ábra). Az A' helyvektora: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA'}$. Mivel $\overrightarrow{OC}(2;4)$ és $\overrightarrow{CA'}(3;-15)$, így $\overrightarrow{OA'}(5;-11)$. Tehát $A'(5;-11)$.



5. példa Keressük meg a koordináta-rendszer mindazon pontjait, amelyekre az alábbi feltételek teljesülnek! Rajzoljuk le a koordináta-rendszerbe ezeket a pontokat, és adjuk meg koordinátáikat!

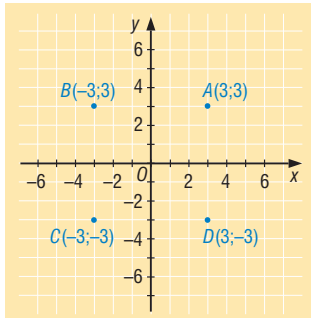
- Mindkét koordinátatengelytől 3 egységnyi távolságra vannak.
- Két koordinátájuk egyenlő, és az x tengelytől 5 egységnyi távolságra vannak.
- A két koordinátatengelytől egyenlő távolságra, az origótól 8 egységnyi távolságra vannak.
- Olyan 4 egység sugarú körök középpontjai, amelyek a II. és a IV. negyedben helyezkednek el, és érintik a koordinátatengelyeket.
- A két koordinátatengelytől egyenlő távolságra vannak.

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

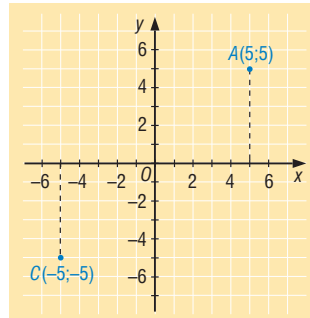
Megoldás:

a) Négy ilyen pont van, mind a négy síknegyedben egy-egy: $A(3;3)$, $B(-3;3)$, $C(-3;-3)$ és $D(3;-3)$ (2.13. ábra).

b) Ha az x tengelytől 5 egységnyi távolságra vannak, akkor ez azt jelenti, hogy második koordinátájuk 5 vagy -5 . S mivel a két koordinátájuk egyenlő, így két ilyen pont van: az $A(5;5)$ és a $B(-5;-5)$ (2.14. ábra).



2.13. ábra Ponthalmazok a)



2.14. ábra Ponthalmazok b)

c) A megoldás során ötvözzük elemi geometriai tudásunkat a koordináta-rendszerrel szerzett ismereteinkkel! A pontok pontos helyének meghatározását végezzük szerkesztéssel! A két koordinátatengelytől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a két tengely mint egyenes két szögfelező egyenese. Az origótól 8 egységnyire lévő pontok halmaza pedig az origó középpontú 8 egység sugarú kör. Ezek – összesen négy – metszéspontja alkotja a keresett pontok halmazát.

Nézzük ezután a koordinátákat!

Az A pont az ábrán (2.15. ábra) kiemelt egyenlőszárú derékszögű háromszögnek az egyik csúcsa, így átfogója, amely 8 egység, $\sqrt{2}$ -szöröse a befogóinak. Így a befogók hossza, és ezzel együtt a koordináták nagysága

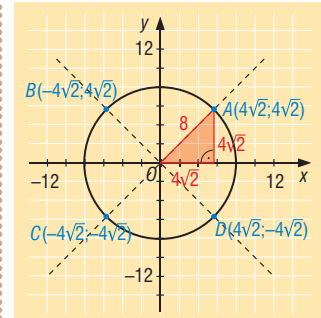
$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{2} = 4 \cdot \sqrt{2}.$$

A többi csúcs koordinátái a szimmetriából adódóan könnyen meghatározhatók.

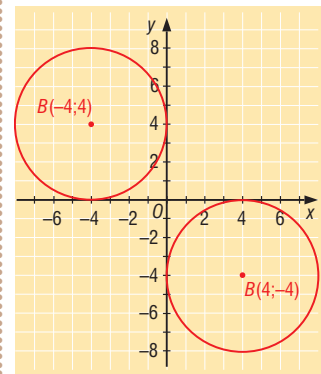
$$A(4\sqrt{2}; 4\sqrt{2}), B(-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2}), C(-4\sqrt{2}; -4\sqrt{2}) \text{ és } D(4\sqrt{2}; -4\sqrt{2}).$$

d) A köröket elegendő elképzelnünk, máris tudjuk, hogy a középpontjuknak egyenlő (sugárnyi) távolságra kell lennie mindkét tengelytől. Továbbá a II. és a IV. negyedben helyezkednek el, így a keresett pont-halmaz kételemű: $A(-4;4)$ és $B(4;-4)$ (2.16. ábra).

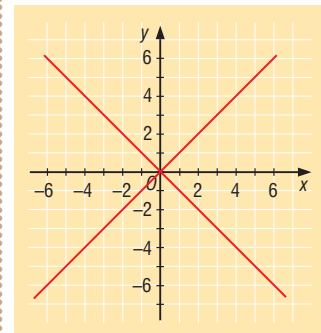
e) A két koordinátatengelytől egyenlő távolságra lévő pontok halmazát megrajzolni könnyű: a két egyenes két szögfelező egyenese (2.17. ábra). Viszont mivel végtelen sok pont tartozik a ponthalmazhoz, ezért itt a pontok koordinátáit nem tudjuk egyenként felsorolni. Az alábbi módon adhatók meg: minden $P(x;x)$ és $P(x;-x)$ alakú pont, ahol $x \in \mathbb{R}$.



2.15. ábra Ponthalmazok c)



2.16. ábra Ponthalmazok d)



2.17. ábra Ponthalmazok e)



Oldjuk meg!

1. Döntsük el, hogy az alábbi vektorok közül melyek párhuzamosak!

$$\vec{a}(8; -3); \vec{b}(-12; 5); \vec{c}(-4; 1,5); \vec{d}(10; -4); \vec{e}\left(-18; \frac{7}{2}\right).$$

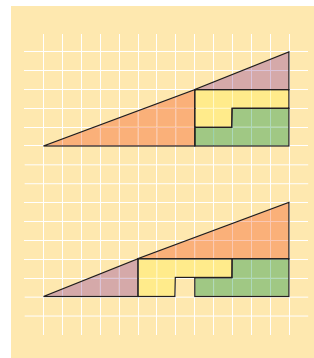
2. Döntsük el, hogy az alábbi vektorok közül melyek párhuzamosak egymással, és melyek merőlegesek egymásra: $\vec{a}(12; 8)$; $\vec{b}(-10; 15)$; $\vec{c}(-18; -12)$; $\vec{d}(6; 9)$; $\vec{e}(21; -14)$, $\vec{f}(6; -9)$ és $\vec{g}(9; -12)$!

3. Figyeljük meg alaposan a két ábrát (2.18. ábra)! Ugyanolyan síkidomokból áll mindkettő. Az egyikben mégis kimarad egy kis négyzet. Hogyan lehetséges ez?

(Ötlet: helyezzük koordináta-rendszerbe az ábrákat! Alkalmazhatunk például vektorokat a megfejtéshez.)

4. A $P(-7; -3)$ ponton hajtsuk végre külön-külön az alábbi transzformációkat! Adjuk meg a képpontok koordinátáit!

- Tükrözzük a P pontot az x tengelyre (P_a)!
- Tükrözzük a P pontot az y tengelyre (P_b)!
- Tükrözzük a P_a pontot az y tengelyre (P_c)!
- Tükrözzük a P pontot az origóra (P_d)!
- Tükrözzük a P pontot az x és az y tengely szögfelezőire (P_{e_1} és P_{e_2})!
- Toljuk el a P pontot a $\vec{v}(6; -4)$ vektorral (P_f)!
- Tükrözzük a P pontot a $C(-2; -3)$ pontra (P_g)!
- Tükrözzük a P pontot a $C(-2; 1)$ pontra (P_h)!



2.18. ábra A 3. feladat ábrája

5. Tekintsük a) az origó; b) a $B(-3; -2)$; c) a $C(4; 1)$ középpontú $\frac{5}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot! Mindhárom esetben állapítsuk meg, hogy mi lesz az $A(-1; 2)$ pont képe! Mindhárom esethez készítsük el a rajzot a koordináta-rendszerben!

6. Keressük meg a koordináta-rendszer mindazon pontjait, amelyekre az alábbi feltételek teljesülnek! Rajzoljuk le a koordináta-rendszerbe ezeket a pontokat, és adjuk meg koordinátáikat!

- Mindkét koordinátatengelytől 4 egységnyi távolságra vannak.
- Két koordinátájuk egyenlő, és az y tengelytől 2 egységnyi távolságra vannak.
- A két koordinátatengelytől egyenlő távolságra vannak és az origótól 6 egységnyi távolságra.
- Olyan 3 egység sugarú körök középpontjai, amelyek az I. és a III. negyedben helyezkednek el, és érintik a koordinátatengelyeket.
- A két koordinátatengelytől egyenlő távolságra vannak, és koordinátáik különböző előjelűek.
- Olyan 5 egység sugarú körök középpontjai, amelyek átmennek az origón, és a koordinátatengelyekből egyenlő hosszúságú szakaszokat vágnak ki.

7. A koordináta-rendszer melyik pontja lehetett az, amelyre az $A(-1; 8)$ pontot tükrözve az $A'(7; 2)$ pontot kaptuk eredményül?



2.19. ábra Vízpart tükröződése

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

3. Helyvektorok

Az 1. leckében bevezettük a helyvektor fogalmát. Csak annyit követeltünk meg a vektortól, hogy a kezdőpontja az origó legyen. Ezt az egyszerű elvárást koordináta-rendszer nélkül is meg szoktuk fogalmazni, ami bizonyos problémák vizsgálatát jelentősen megkönnyíti.



Definíció A síkon (vagy a térben) kijelölünk egy tetszőleges pontot, ezt **origónak** vagy **vonatkoztatási pontnak** nevezzük. Az origó kezdőpontú vektorokat **helyvektoroknak** nevezzük.

Az origót az általunk vizsgált feladatokban egy probléma megoldása során nem szoktuk megváltoztatni.

Például egy $ABCD$ paralelogramma csúcsaihoz mutató helyvektorokat csak akkor tudjuk berajzolni az ábrába, ha valahol fölvevünk egy O pontot, amelyet origónak nevezünk ki (3.2. ábra). Az origóból kiinduló vektorok a helyvektorok $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ és $\vec{d})$, a rajzon szereplő többi vektor nem az. Nem helyvektor az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{DC}$ vektor (amelyek egyenlők egymással), és a $\overrightarrow{CB}$ és az $\overrightarrow{AD}$ vektor sem (ezek pedig ellentett vektorok).



1. példa Írjuk fel helyvektorok segítségével az előbbi paralelogramma oldalvektorait a 3.2. ábrán feltüntetett irányítással!

Megoldás:

Mivel mindegyik oldalvektor végpontjába egy-egy helyvektor mutat, amelyeknek közös a kezdőpontjuk, így mindegyik oldalvektor két helyvektor különbségeként írható föl: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a}$.



Vegyük észre, hogy az előző példánk eredménye meg is fordítható: két helyvektor különbsége a „kivonandó” vektor végpontja felől a „kisebbitendő” vektor végpontja felé mutató vektor (3.3. ábra).



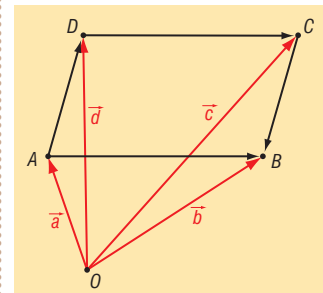
2. példa Fejezzük ki az AB szakasz F felezőpontjának helyvektorát az A és a B pont helyvektorának segítségével!

Megoldás:

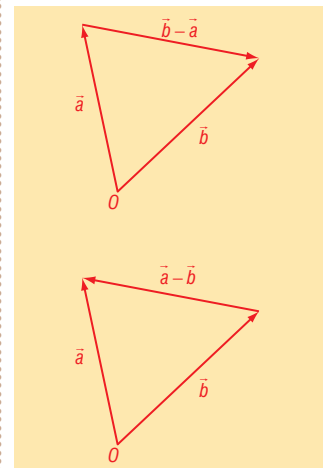
Vegyük fel az O vonatkoztatási pontot! Az egyes pontokhoz mutassanak a megfelelő kisbetűs helyvektorok, tehát az A , a B és az F ponthoz



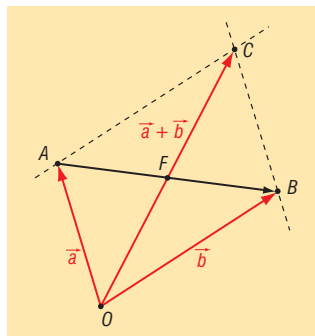
3.1. ábra Nincs szükség mindig a koordináta-rendszerre?



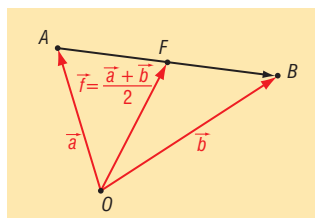
3.2. ábra Helyvektorok és nem helyvektorok



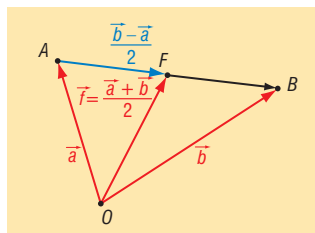
3.3. ábra A különbségvektor mindig a kisebbítendő felé mutat



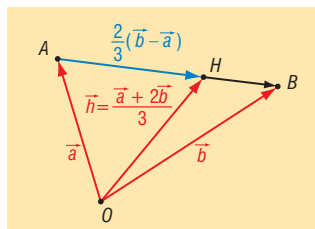
3.4. ábra A első lépés a felezőpont helyvektorának meghatározásában



3.5. ábra A felezőpont helyvektora az 1. módszer segítségével



3.6. ábra A felezőpont helyvektora a 2. módszer segítségével



3.7. ábra Harmadolópont helyvektora

rendre az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{f}$ helyvektor! (Ez egy gyakori szófordulat, amit a helyvektorokkal megoldandó feladatoknál szoktunk használni, érdemes megjegyeznünk.) Ezek után két különböző megoldást is mutatunk.

1. módszer:

Az előző példában két helyvektor különbségéről volt szó. Próbálkozzunk most az összeadással (3.4. ábra)! Adjuk össze paralelogramma-módszerrel az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ helyvektort! Az összegvektor is a közös kezdőpontból (az origóból) indul, ezért az is helyvektor, az $AOBC$ paralelogramma O -ból induló átlóvektora. Ugyanakkor tudjuk, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást, így az $\vec{OC}$ helyvektor átmegy az AB szakasz F felezőpontján, sőt az F pont is felezi az $\vec{OC}$ vektort. Tehát $\vec{f} = \frac{\vec{OC}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ (3.5. ábra).

2. módszer:

Az F pontba mutató vektort megkaphatjuk az A pont helyvektorának és az $\vec{AF}$ vektornak az összegeként is. Az utóbbi nem más, mint az $\vec{AB}$ vektor fele (3.6. ábra).

Ezután már csak alkalmaznunk kell a vektorok algebrájának ismert szabályait:

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \vec{a} + \vec{AF} = \vec{a} + \frac{\vec{AB}}{2} = \vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} = \\ &= \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{a}}{2} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}.\end{aligned}$$



Tétel

Egy szakasz felezőpontjának helyvektora egyenlő a szakasz végpontjaihoz mutató helyvektorok összegének felével (röviden: a szakasz végpontjaihoz mutató helyvektorok „számtani közepével”).



3. példa

Fejezzük ki az AB szakasz B -hez közelebbi H harmadolópontjának helyvektorát az A és a B pont helyvektorának segítségével!

Megoldás:

Az előző feladatban tárgyalt módszerek közül az első itt nehezen alkalmazható.

A második módszerrel viszont alig kell valamit változtatnunk. Használjuk ki, hogy $\vec{AH} = \frac{2}{3} \cdot \vec{AB}$ (3.7. ábra)!

$$\vec{h} = \vec{a} + \vec{AH} = \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{AB} = \vec{a} + \frac{2}{3} (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} - \frac{2}{3} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{3} + \frac{2\vec{b}}{3} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}.$$

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$



Vegyük észre, hogy az A ponthoz közelebb eső G harmadolópont helyvektorát hasonló módon kaphatjuk meg:

$$\vec{g} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}.$$

Ezzel a módszerrel tetszőleges osztópont helyvektora is előállítható, ha ismerjük a szakasz végpontjainak helyvektorát (3.8. ábra).



4. példa Fejezzük ki az ABC háromszög súlypontjának helyvektorát a háromszög csúcsaihoz mutató helyvektorok segítségével!

Megoldás:

A háromszög súlyvonala az egyik oldal felezőpontját a szemközti csúccsal összekötő szakasz. (A súlyvonalak egy pontban metszik egymást: a háromszög súlypontjában.) A súlypont a súlyvonalaknak a csúctól távolabbi harmadolópontjába esik. Ezt és az előző feladatunk eredményét felhasználva könnyen kezelhető a probléma (3.9. ábra).

A BC oldal F felezőpontjának helyvektora $\vec{f} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$, az AF súlyvonalat 2:1 arányban osztó súlypont helyvektora pedig:

$$\vec{s} = \frac{\vec{a} + 2\vec{f}}{3} = \frac{\vec{a} + 2 \cdot \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$



Tétel

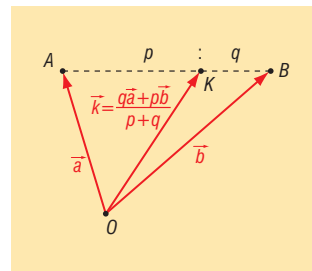
A háromszög súlypontjának helyvektora egyenlő a háromszög csúcsaihoz mutató helyvektorok összegének harmadával („számtani közepével”).

Ha visszatérünk a helyvektor koordináta-rendszerbeli értelmezéséhez, akkor a vonatkoztatási pont ismét a koordináta-rendszer origója. Mind a felezőpont, mind a harmadolópont (vagy tetszőleges osztópont), mind a súlyvonal helyvektorának felírásakor a csúcspontokhoz mutató helyvektorokat csak összeadtuk, illetve valós számokkal szoroztuk. Így a megfelelő koordinátákkal ugyanezeket a műveleteket kell végeznünk. Egyszerűen számolhatóvá válik ismert végpontokkal rendelkező szakaszok felezőpontjának, harmadolópontjának két koordinátája. És ugyanígy ismert csúcspontokkal rendelkező háromszög súlypontjának koordinátáit is ki tudjuk számolni.

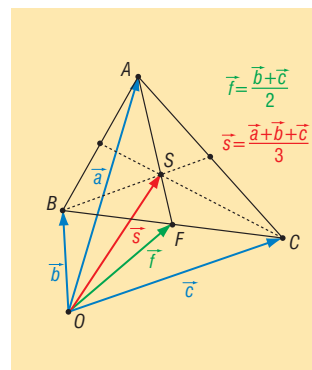


5. példa Ismerjük az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátáit: $A(5;7)$, $B(-4;3)$ és $C(2;-2)$.

- Számítsuk ki mindhárom oldal felezőpontjának koordinátáit!
- Számítsuk ki külön-külön mindhárom súlyvonal csúctól távolabbi harmadolópontjainak koordinátáit!
- Számítsuk ki az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit!



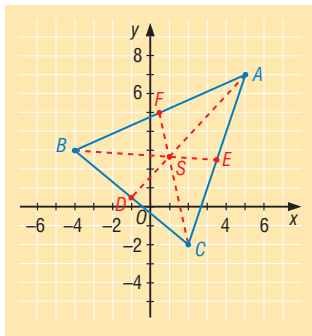
3.8. ábra Az AB szakaszt $p:q$ arányban osztó K pont helyvektora



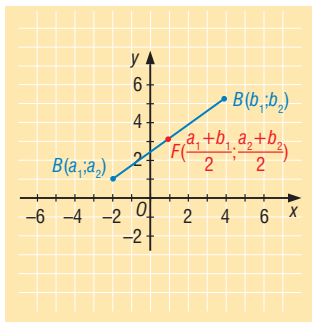
3.9. ábra Súlypont helyvektora



3.10. ábra Az árnyék éppen felezi az ívet



3.11. ábra Oldalfelező pontok koordinátái



3.12. ábra Szakaszfelező pont koordinátái



3.13. ábra Értékes háromszög

Megoldás:

Az egyes pontokhoz mutassanak a megfelelő kisbetűs helyvektorok!

a) Használjuk az ábra jelöléseit (3.11. ábra)! Mivel a D pont a BC oldal felezőpontja, így helyvektora: $\vec{d} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$, ezért $\vec{d} \left(\frac{-4+2}{2}; \frac{3+(-2)}{2} \right)$, vagyis a $\vec{d}$ helyvektornak és ezzel a D pontnak koordinátái is $\left(-1; \frac{1}{2} \right)$.

Röviden: **egy szakasz felezőpontjának koordinátái egyenlők a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepével** (3.12. ábra).

Az AC oldal E felezőpontjának koordinátáit tehát már gyorsabban is kiszámíthatjuk. (Most és a továbbiakban, ha egyebet nem mondunk, akkor értelemszerűen egy P pont abszcisszájára p_1 -ként, ordinátájára p_2 -ként hivatkozunk mindig a megfelelő pont betűjelével.)

$E \left(\frac{a_1 + c_1}{2}; \frac{a_2 + c_2}{2} \right)$, itt $\frac{a_1 + c_1}{2} = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$ és $\frac{a_2 + c_2}{2} = \frac{7+(-2)}{2} = \frac{5}{2}$, így $E \left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2} \right)$. Ugyanígy $F \left(\frac{1}{2}; 5 \right)$.

b) Az AD , a BE és a CF súlyvonal csúctól távolabbi harmadolópontját jelölje rendre S_a , S_b és S_c . Tudjuk, hogy ez a három pont egybeesik: ez a háromszög súlypontja, ezért az ábrán külön nem is tudjuk ezeket felüntetni. Viszont gyakorlásképpen mindhárom harmadolópont koordinátáit kiszámolhatjuk, s legalább látjuk a végeredményeken, hogy nem számoltuk el! $S_a \left(\frac{a_1 + 2d_1}{3}; \frac{a_2 + 2d_2}{3} \right)$, ezért az S_a pont koordinátái:

$$\frac{a_1 + 2d_1}{3} = \frac{5 + 2 \cdot (-1)}{3} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{a_2 + 2d_2}{3} = \frac{7 + 2 \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{8}{3}, \quad \text{tehát } S_a \left(1; \frac{8}{3} \right).$$

Ugyanígy számolva $S_b \left(\frac{b_1 + 2e_1}{3}; \frac{b_2 + 2e_2}{3} \right)$, a megfelelő koordinátákat

$$\text{behelyettesítve: } \frac{b_1 + 2e_1}{3} = \frac{-4 + 2 \cdot \frac{7}{2}}{3} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{b_2 + 2e_2}{3} = \frac{3 + 2 \cdot \frac{5}{2}}{3} = \frac{8}{3},$$

nagy megnyugvásunkra itt is az S_a pontnál számolt koordinátákat kaptuk eredményül: $S_b \left(1; \frac{8}{3} \right)$. Az S_c pont koordinátáinak kiszámítását már az olvasóra bízuk.

c) Ez már valóban csak az ellenőrzést szolgálja ezek után, hiszen a b) pontbeli három harmadolópont mind a súlypont is egyben.

$$S \left(\frac{5 + (-4) + 2}{3}; \frac{7 + 3 + (-2)}{3} \right), \text{ a koordinátákat kiszámolva } S \left(1; \frac{8}{3} \right).$$

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$



6. példa Határozzuk meg a háromszög ismeretlen csúcsának koordinátáit, ha tudjuk két csúcsának koordinátáit: $(12; -5)$ és $(-3; 0)$, valamint súlypontjának koordinátáit: $(2; 4)$.

Megoldás:

Vezessük be a szokásos jelöléseket: a két adott pont legyen $A(12; -5)$ és $B(-3; 0)$, a súlypont pedig $S(2; 4)$, és a C pont koordinátáit keressük. Alkalmazzuk a tanult összefüggést: $s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$, ahonnan c_1 kifejezhető: $c_1 = 3 \cdot s_1 - a_1 - b_1 = 3 \cdot 2 - 12 - (-3) = -3$.

Ugyanígy kapjuk a c_2 értékét is: $c_2 = 3 \cdot s_2 - a_2 - b_2 = 3 \cdot 4 - (-5) - 0 = 17$.

A keresett pont tehát: $(-3; 17)$.



7. példa Az $ABCD$ négyszög csúcsainak koordinátái: $A(-5; -2)$, $B(0; -4)$, $C(4; 1)$ és $D(-2; 3)$. Mutassuk meg, hogy a szemközti oldalak felezőpontját összekötő két szakasz felezőpontja egybeesik!

Megoldás:

Használjuk az ábra jelöléseit (3.15. ábra)!

Eszerint $E\left(\frac{-5+0}{2}; \frac{-2+(-4)}{2}\right)$, mivel az AB szakasz felezőpontja.

A többi felezőpontot is így számítjuk ki (kövessük önálló számolással),

s a következő négy végeredményt kapjuk: $E\left(-\frac{5}{2}; -3\right)$, $F\left(2; -\frac{3}{2}\right)$, $G(1; 2)$ és $H\left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Közülük az E és a G pont két egymással szem-

közi oldal felezőpontja, jelöljük az EG szakasz felezőpontját J -vel, az FH szakasz felezőpontját pedig K -val! Ezeket úgy tüntetjük föl az ábrán, mintha nem esnének egybe, hogy külön-külön tudjunk róluk beszélni. Számítsuk most ki a J és a K pont mint felezőpontok koordinátáit! $J\left(\frac{e_1 + g_1}{2}; \frac{e_2 + g_2}{2}\right)$ és $K\left(\frac{f_1 + h_1}{2}; \frac{f_2 + h_2}{2}\right)$, azaz $J\left(-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ és

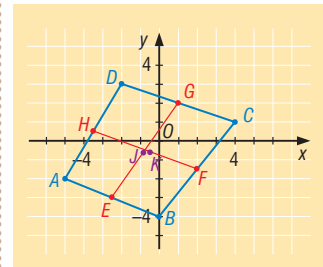
$K\left(-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right)$. Mivel a J és a K pont koordinátái rendre egyenlők, így a két pont valóban egybeesik.

Megjegyzés:

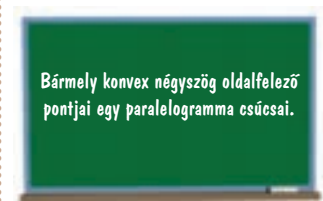
Az előző problémát általánosan is megoldhatjuk, sőt, elegendő csak helyvektorokat használnunk hozzá. Használjuk itt is a 3.15. ábra jelöléseit! Minden ponthoz mutasson a megfelelő kisbetűs helyvektor!



3.14. ábra Ismeretlen csúcs



3.15. ábra Az EG felezőpontja J , az FH felezőpontja K



3.16. ábra Varignon-tétel



3.17. ábra Felezés

Fejezzük ki először az oldalfelező pontok helyvektorait a csúcsokhoz

mutató helyvektorok segítségével: $\vec{e} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$, $\vec{f} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$, $\vec{g} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}$

és $\vec{h} = \frac{\vec{d} + \vec{a}}{2}$! Most pedig az EG és az FH szakaszok felezőpontjai-

nak helyvektorát fejezzük ki, először a szakaszok végpontjába mutató helyvektorok segítségével, majd a négyszög csúcsaiba mutató hely-

vektorok segítségével: $\vec{j} = \frac{\vec{e} + \vec{g}}{2} = \frac{\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$ és

$\vec{k} = \frac{\vec{f} + \vec{h}}{2} = \frac{\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{d} + \vec{a}}{2}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{a}}{4}$!

Mivel (a vektorok összeadásának kommutativitását is fölhasználva) a két helyvektor egyenlő, így a sík ugyanazon pontjába mutatnak. Tehát a két szakaszfelező pont egybeesik.



Oldjuk meg!

1. Az $ABCD$ paralelogramma síkjában rögzítsük az O vonatkoztatási pontot! Az A , a B és a C csúcs helyvektorának segítségével fejezzük ki a D csúcsához és a paralelogramma középpontjához mutató helyvektort!
2. Vegyük fel a vonatkoztatási pontot az $ABCD$ paralelogramma középpontjában! Az A és a B csúcs-hoz mutató helyvektorok segítségével fejezzük ki
 - a) a másik két csúcsba mutató helyvektort;
 - az oldalfelező pontokba mutató helyvektorokat;
 - a BD átló B -hez közelebbi harmadolópontjának helyvektorát;
 - az AD oldal felezőpontját a C csúccsal összekötő szakasz C -hez közelebbi harmadolópontjának helyvektorát!
3. Számítsuk ki az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit, ha $A(0;8)$, $B(10;-3)$ és $C(-7;1)$! Határozzuk meg az ABC háromszög oldalfelező pontjainak koordinátáit is, majd az ezek által alkotott háromszög súlypontjának koordinátáit! Mit figyelhetünk meg?
4. Tükrözzük a $P\left(\frac{14}{3}; \frac{2}{5}\right)$ pontot a $C(-1;4)$ pontra! Mik lesznek a P' pont koordinátái?
5. Mik a koordinátái a háromszög ismeretlen csúcsának, ha súlypontja: $S\left(\frac{10}{3}; -\frac{5}{3}\right)$, két csúcsának koordinátái pedig: $A(4;5)$ és $C(0;-1)$?
6. Számítsuk ki az $ABCDEF$ hatszög AB , CD és EF oldalának felezőpontja által alkotott háromszög súlypontját, majd a BC , DE és FA oldalak felezőpontja által alkotott háromszög súlypontját, ha $A(-1;9)$, $B(-4;5)$, $C(0;3)$, $D(-2;-2)$, $E(6;0)$ és $F(4;9)$! Mit vehetünk észre?
7. Az előző feladatbeli észrevételt általánosítsuk, és mutassuk meg az állítás igaz voltát!

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

4. Az egyenes normálvektoros egyenlete

A fejezet eddigi részében zömében azzal foglalkoztunk, hogy pontokat és vektorokat hogyan tudunk kölcsönösen egyértelműen jellemezni a koordináta-rendszerben rendezett számpárok segítségével. Hasonló kérdéseket megfogalmazhatnánk egyenesekkel, körökkel, esetleg más ponthalmazokkal kapcsolatban is. Meg tudnánk-e adni valamilyen kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést az egyenesek és a rendezett számpárok halmaza között? Első ránézésre nyilván az okozza a nehézséget, hogy az egyenesek (és a körök is) olyan ponthalmazok, amelyek végtelen sok pontból állnak, így sehogy sem tudnánk felsorolni az összes rendezett számpárt, amely az adott ponthalmaz elemeit jellemzi. Csak abban bízhatunk, hogy az adott ponthalmaz pontjainak első és második koordinátája között találunk egy összefüggést, amely minden pontra és csak a ponthalmaz pontjaira jellemző.



1. példa Adott a síkon egy $\vec{n}$ (nullvektortól különböző) vektor és egy P_0 pont. Hol helyezkednek el a síkon azok a P pontok, amelyek végpontjai egy olyan P_0 kezdőpontú vektornak, mely merőleges az $\vec{n}$ vektorra?

Megoldás:

Készítsünk rajzot (4.2. ábra)! A szöveg szerint $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$. Tehát a P_0 ponton át merőleges egyenest kell állítanunk az $\vec{n}$ vektorra (e egyenes), ezen lesz minden ilyen P pont.

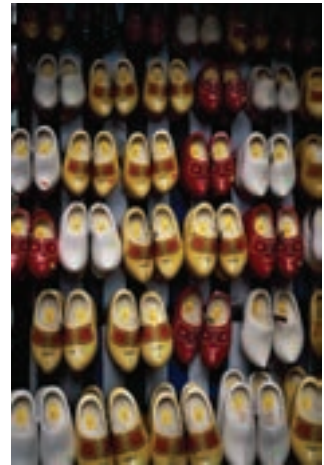
Megjegyzés: Az állítást könnyen megfordíthatjuk: ha egy pont rajta van a P_0 ponton átmenő, $\vec{n}$ vektorra merőleges egyenesen, akkor $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$. (Ez egyrészt az egyenes bármely P_0 -tól különböző pontjára nyilván igaz, másrészt, ha a P pont egybeesik a P_0 ponttal, akkor $\overrightarrow{P_0P} = \vec{0}$, amelynek az iránya tetszőleges, tehát merőlegesnek is tekinthető az $\vec{n}$ vektorra.)



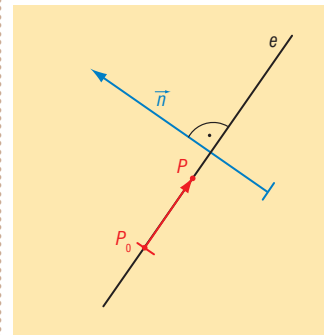
Vegyük észre, hogy ezzel találtunk egy lehetőséget a kölcsönösen egyértelmű jellemzésre! Ahhoz, hogy ezt precízen meg tudjuk fogalmazni, szükségünk lesz a normálvektor fogalmára.



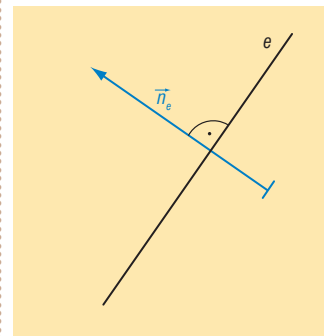
Definíció Egy egyenesre merőleges, nullvektortól különböző bármely vektort az egyenes **normálvektorának** nevezünk.



4.1. ábra Rendezett párok



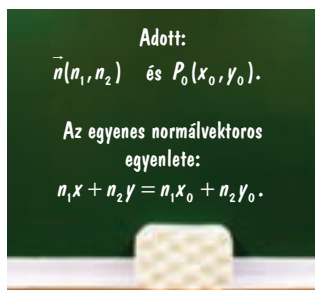
4.2. ábra $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$



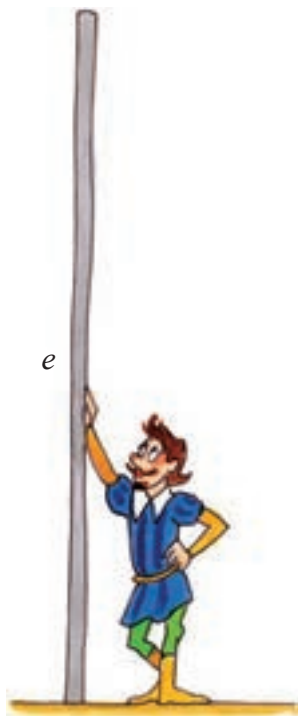
4.3. ábra Az e egyenes egy normálvektora az $\vec{n}_e$ vektor



4.4. ábra Egyenes



4.5. ábra Normálvektoros egyenlet



4.6. ábra A talajra merőleges egyenes rúd

A definícióból adódik, hogy egy egyenesnek végtelen sok normálvektora van. Az előző megállapításunkat a normálvektor segítségével így írhatjuk le.

Adott egy egyenes egy pontja (P_0) és egy normálvektora ($\vec{n}$). Egy P pont akkor és csak akkor eleme az adott egyenesnek, ha $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$. Ez pedig egyenértékű azzal, hogy $\vec{n}$ és $\overrightarrow{P_0P}$ skaláris szorzata 0, azaz $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$. Ez pedig már egyenlet, amelyben a P_0 pont és az $\vec{n}$ vektor adott, a P pont pedig az ismeretlen.

Ez persze akkor válik számunkra használható egyenletté, ha áttérünk ennek az egyenletnek a koordinátákkal kifejezett alakjára.

Ehhez adjuk meg általánosan az $\vec{n}$ vektor és a P_0 pont koordinátáit: $\vec{n}(n_1, n_2)$ és $P_0(x_0, y_0)$! Ha az egyenes tetszőleges pontjának koordinátái $P(x, y)$, akkor $\overrightarrow{P_0P}(x - x_0, y - y_0)$, és az egyenlet $n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0$. Ezt a zárójelek felbontása és az átrendezés után $n_1x + n_2y = n_1x_0 + n_2y_0$ alakban is meg szoktuk adni. Ez a kétismeretlenes lineáris egyenlet az egyenes egyenletének normálvektoros alakja, amelyet röviden az egyenes normálvektoros egyenletének szoktunk nevezni. A normálvektor koordinátáit gyakran A -val és B -vel jelölik, a legtöbb képletgyűjteményben, függvénytáblázatban is így találjuk meg. Ezzel a jelöléssel tehát a normálvektoros egyenlet: $Ax + By = Ax_0 + By_0$.



Vegyük észre, hogy minden kétismeretlenes lineáris egyenlet valamely egyenesnek az egyenlete, kivéve, ha a két ismeretlen együtthatója egyszerre 0.

Találtunk tehát egy egyszerű összefüggést az egyenes $P(x, y)$ pontjainak első és második koordinátája között.



2. példa Írjuk fel annak az e egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(8; -3)$ ponton és merőleges a $(2; 7)$ vektorra!

Megoldás:

Itt most csak a szövegből derül ki, hogy a két rendezett számpár közül melyik jelöl pontot és melyik vektort. A $(8; -3)$ pont tölti be az e egyenesen rögzített pont szerepét, amelyet az iménti gondolatmenetben P_0 -lal jelöltünk. A $(2; 7)$ vektor pedig az e egyenesre merőleges (nullvektortól különböző) vektor, vagyis az egyenes egy normálvektora. Ezek után csak be kell helyettesítenünk az egyenes normálvektoros egyenletébe a megadott koordinátákat. $n_1 = 2$, $n_2 = 7$, $x_0 = 8$ és $y_0 = -3$, az egyenlet pedig: $e: 2x + 7y = 2 \cdot 8 + 7 \cdot (-3)$. A jobb oldalon még elvégezhetjük a megfelelő összevonásokat. $e: 2x + 7y = -5$. Ezt az egyenletet keressük.

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$



Vegyük észre, hogy az előző feladatban megkaptuk az egyenes kétismeretlenes lineáris egyenletét. Ez az egyenlet azt jelenti tehát, hogy ha egy pont rajta van az egyenesen, akkor koordinátapárja megoldása ennek az egyenletnek, és megfordítva: ha egy rendezett számpár megoldása ennek az egyenletnek, akkor az a pont, amelynek ezek a koordinátái, rajta van az egyenesen. Ha más ponthalmazoknál is találunk ilyen kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a ponthalmaz és egy egyenlet között, akkor minden ilyen esetben elmondhatjuk, hogy ez a **ponthalmaz egyenlete**.



3. példa a) Döntsük el a következő pontokról, hogy rajta van-e a 2. példában szereplő $2x + 7y = -5$ egyenletű e egyenesen: $A(5; -2)$, $B(1; -1)$ és $C(-6; 1)$!
b) Határozzuk meg a hiányzó koordinátáját az alábbi pontoknak, ha tudjuk, hogy rajta vannak az e egyenesen: $A(-15; ?)$, $B(?, 3)$ és $C(?, 2)$!

Megoldás:

a) Egy pont pontosan akkor van rajta egy egyenesen, ha koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét. Így csak be kell helyettesítenünk az egyes pontok koordinátáit az e egyenes egyenletébe, és ha a két oldalon egyenlő számokat kapunk, akkor a pont rajta van az egyenesen, ha pedig különbözőket, akkor nincs rajta. Nézzük az $A(5; -2)$ pontot!

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5 + 7 \cdot (-2) &\stackrel{?}{=} -5, \\ 10 - 14 &\stackrel{?}{=} -5, \\ -4 &\stackrel{?}{=} -5. \end{aligned}$$

Itt különböző számokat kaptunk, tehát az A pont nincs rajta az e egyenesen.

Helyettesítsük most be a $B(1; -1)$ pont koordinátáit!

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) &\stackrel{?}{=} -5, \\ 2 - 7 &\stackrel{?}{=} -5. \end{aligned}$$

Itt egyenlőséget kaptunk, tehát a B pont rajta van az e egyenesen.

A $C(-6; 1)$ pont esetén a bal oldal értéke $2 \cdot (-6) + 7 \cdot 1 = -5$, így ez a pont is rajta van az e egyenesen.

b) Itt is csak be kell helyettesítenünk az ismert koordinátát, a másik koordinátára nézve kapunk egy egyenletet, amelyet meg kell oldani.

$$A: 2 \cdot (-15) + 7y = -5, \text{ innen } 7y = 25, \text{ így } y = \frac{25}{7}.$$

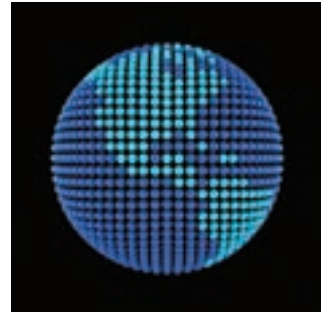
$$\text{Az } A \text{ pont tehát: } A\left(-15; \frac{25}{7}\right).$$

$$B: 2x + 7 \cdot 3 = -5, \text{ innen } 2x = -26, \text{ így } x = -13.$$

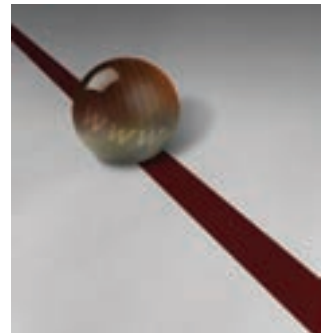
$$\text{A } B \text{ pont tehát: } B(-13; 3).$$

$$C: 2x + 7 \cdot 2 = -5, \text{ innen } 2x = -19, \text{ így } x = -\frac{19}{2}.$$

$$\text{A } C \text{ pont tehát: } C\left(-\frac{19}{2}; 2\right).$$



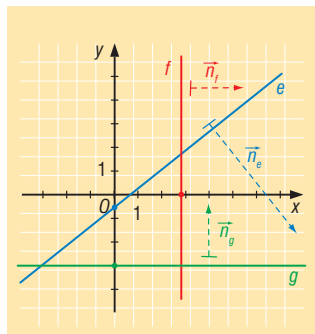
4.7. ábra Ponthalmaz. Mi lehet az egyenlete?



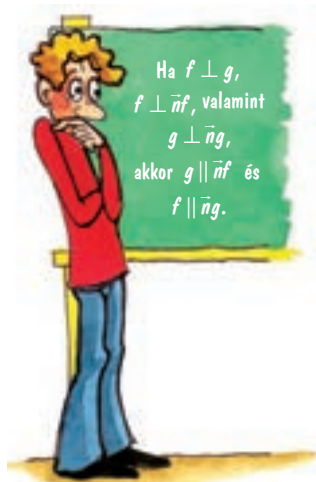
4.8. ábra Rajta van?



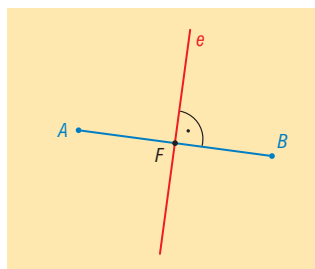
4.9. ábra És ez?



4.10. ábra Egyenesek ábrázolása



4.11. ábra Összhang



4.12. ábra Vázlatrajz a felezőmerőlegeshez

4. példa Adjuk meg az $e: 12x - 15y = 8$; az $f: 5x = 14$ és a $g: -4y = 12$ egyenesek egy-egy normálvektorát és egy-egy pontját! Ábrázoljuk az egyeneseket koordináta-rendszerben!

Megoldás:

Az e egyenes egy normálvektora a $(12; -15)$ vektor. De mivel ennek a vektornak csak az iránya fontos számunkra, így akár a kisebb abszolút értékű koordinátákkal rendelkező $(4; -5)$ vektort is megadhattuk volna. Amikor egy tetszőleges pontot keresünk az egyenesen, akkor az egyik koordinátát tetszőlegesen megválaszthatjuk. Legyen például az abszcissza 0! Ekkor az ordináta (az előző feladatban használt módszerrel): a $12 \cdot 0 - 15y = 8$ egyenlet megoldása y -ra nézve, azaz $y = -\frac{8}{15}$.

Az e egyenesnek egy pontja tehát a $\left(0; -\frac{8}{15}\right)$ pont.

Az f egyenes normálvektorának felírásakor az első pillanatban zavarba jöhetünk, hiszen nincsen az egyenletben y . Algebrailag ez nyilván azt jelenti, hogy az y együtthatója az egyenletben 0. Tehát egy jó normálvektor az $(5; 0)$ vektor, vagy akár az ötödrésze, az $(1; 0)$ vektor. Ez teljes összhangban van a 4.10. ábrával. Onnan is leolvashattuk volna ezt a normálvektort. Az egyenlet 5-tel való osztás után az $x = \frac{14}{5}$ alakot ölti. Ilyen egyenletű egyenesekkel korábbi tanulmányainkban már találkoztunk. Ez egy y tengellyel párhuzamos egyenes. Így normálvektora nyilván az x tengellyel párhuzamos. Vagyis például $(1; 0)$. Látható: teljes az összhang!

Ugyanígy a g egyenes az x tengellyel párhuzamos egyenes, így egyik normálvektora a $(0; 1)$ vektor. Algebrailag következtetésekkel hasonló eredményre jutnánk. Az f egyenes egyik pontja, például ahol az x tengelyt metszi, a $\left(\frac{14}{5}; 0\right)$ pont. A g egyenesé pedig, például ahol az y tengelyt metszi, a $(0; -3)$ pont.

5. példa Írjuk föl az AB szakasz felezőmerőleges egyenesének egyenletét, ha $A(-2; 1)$ és $B(4; 4)$!

Megoldás:

Készítsünk vázlatrajzot, hogy könnyebb legyen végiggondolnunk a megoldás menetét (4.12. ábra)! Ehhez még koordináta-rendszerre sincs feltétlenül szükségünk.

- I. Az egyenesnek most nincs megadva egyetlen pontja sem, de át-megy az AB szakasz F felezőpontján, amelynek a koordinátáit ki tudjuk számolni.
- II. Normálvektor sincs megadva, de az $\overline{AB}$ vektor merőleges a keresett egyenesre, s ennek a koordinátáit is ki tudjuk számolni.
- III. Ezek után már felírható a normálvektoros egyenlet.

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Hajtsuk végre a tervet!

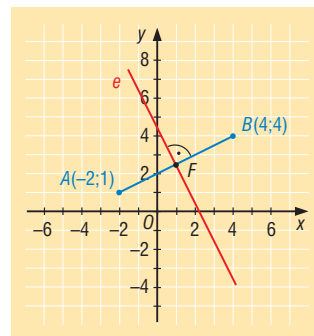
I. $F\left(1; \frac{5}{2}\right);$

II. $\overline{AB}(6;3)$, e helyett használhatjuk a vele párhuzamos $\vec{n}(2;1)$ vektort is;

III. a felezőmerőleges egyenlete:

$$2x + y = 2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{5}{2}, \text{ azaz } e: 2x + y = \frac{9}{2}.$$

Természetesen elhelyezhetjük a szakaszt és felezőmerőlegesét koordináta-rendszerben is (4.13. ábra), és ellenőrizhetjük, hogy a számolással kapott egyenletnek megfelelő ábrát láthatjuk-e. (Igen.)



4.13. ábra Felezőmerőleges a koordináta-rendszerben



Oldjuk meg!

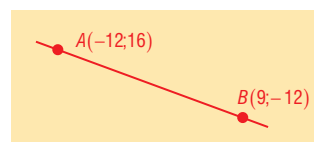
- Az alábbi pontokról döntsük el, hogy rajta vannak-e a $-3x + 4y = 6$ egyenletű e egyenesen:
 $A(-2;0)$; $B(5;4)$; $C(-6;-6)$; $D(2;3)$; $E(10;9)$!
- Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek
 - a) egy normálvektora az $\vec{n}(5;2)$ vektor, egy pontja pedig $P_0(12;-18)$;
 - b) egy normálvektora az $\vec{n}(8;-4)$ vektor, egy pontja pedig $A(0;-7)$;
 - c) egy normálvektora az $\vec{n}(-15 \cdot \sqrt{2}; -10 \cdot \sqrt{2})$ vektor, egy pontja pedig $Q(-11;7)$!
- Adjuk meg a következő egyenesek egy-egy normálvektorát és három-három pontját:
 $a: 6x + 5y = -3$; $b: 24x - 18y = -30$; $c: -7x - 7y = 35$!
Ábrázoljuk az egyeneseket koordináta-rendszerben!
- Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az AB szakaszra, és átmegy a szakasz egyik végpontján, ha $A(5;-1)$ és $B(0;4)$!
- Írjuk föl az AB szakasz felezőmerőleges egyenesének egyenletét, ha $A(2;10)$ és $B(-4;-2)$!
- Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(4;-3)$ ponton, és párhuzamos a) az x tengellyel; b) az y tengellyel! Adjuk meg az egyenesek egy-egy normálvektorát!
- Ismerjük az e egyenes két pontját: $A(-12;16)$ és $B(9;-12)$. Írjuk fel az egyenes egy normálvektorát, majd az egyenes egyenletét!

5. Az egyenes egyenlete más adatokból

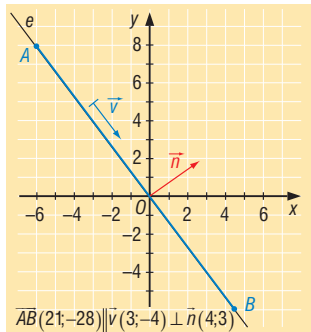
Az előző lecke utolsó feladatát oldjuk meg közösen is!



1. példa Ismerjük az e egyenes két pontját: $A(-12;16)$ és $B(9;-12)$. Írjuk fel az egyenes egy normálvektorát, majd az egyenes egyenletét!



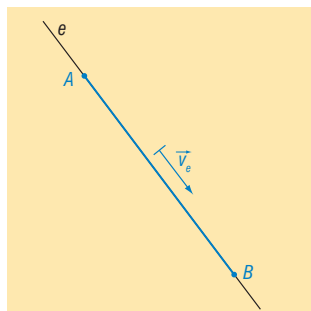
5.1. ábra Ismerős pontok



5.2. ábra Egyenes egyenlete két pontjából



5.3. ábra Irányvektor



5.4. ábra Az e egyenesnek irányvektora az $\overrightarrow{AB}$ is és a $\vec{v}_e$ is

Megoldás:

Az $\overrightarrow{AB}(21; -28)$ vektor párhuzamos az e egyenessel (5.2. ábra). Ennél kisebb abszolút értékű koordinátákkal rendelkeznek, de szintén párhuzamos az e egyenessel az $\overrightarrow{AB}$ vektor hetede: $\vec{v}(3; -4)$. Ha ezt 90° -kal elforgatjuk, akkor az e egyenes egy normálvektorát kapjuk: $\vec{n}(4; 3)$. Így már könnyen felírhatjuk az egyenes normálvektoros egyenletét: $4x + 3y = 4 \cdot 9 + 3 \cdot (-12)$, azaz $e: 4x + 3y = 0$.



Vegyük észre, hogy (az 5.2. ábrával összhangban) az egyenlet jobb oldalán álló konstans érték 0, vagyis az egyenes átmege az origón. (Ha elég szemfülesek vagyunk, akkor ezt az elején is észrevehettük volna, hiszen az A pont helyvektora és a B pont helyvektora párhuzamos egymással.) Ez az állítás is megfordítható (és a megfordítása is nyilvánvaló): minden origón átmenő egyenes egyenletében 0 a konstans tag.

Az előző példában szereplő $\overrightarrow{AB}$ vektor éppúgy kijelöli az egyenes irányát, mint egy normálvektora. Éppen ezért az egyenessel párhuzamos vektoroknak is szoktunk külön nevet adni.



Definíció Egy egyenessel párhuzamos, nullvektortól különböző bármely vektort az egyenes **irányvektorának** nevezünk.

Egy egyenesnek végtelen sok irányvektora van. Az irányvektort leggyakrabban $\vec{v}$ -vel szoktuk jelölni (5.4. ábra).



Vegyük észre, hogy ha adott egy egyenes irányvektora és egy pontja, akkor az 1. példa mintájára fel tudjuk írni az egyenes egyenletét.

Ha adott $\vec{v}(v_1; v_2)$ és $P_0(x_0; y_0)$, akkor a $\vec{v}$ vektor 90° -os elforgatásával normálvektorhoz jutunk: $\vec{v}(v_1; v_2) \perp \vec{n}(v_2; -v_1)$ (lehetne $\vec{v}(v_1; v_2) \perp \vec{n}'(-v_2; v_1)$ is). Így a normálvektoros egyenlet felírható:

$$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0.$$

Ezt az egyenletet az egyenes **irányvektoros egyenletének** nevezzük.



2. példa Adott a $10x + 7y = 13$ egyenletű egyenes.

- Írjuk fel az egyenes egy normálvektorát és egy irányvektorát!
- Határozzuk meg az egyenesnek az x tengely pozitív felével bezárt szögét (-90° és $+90^\circ$ közé eső érték!)

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Megoldás:

a) Az előző leckében tanultak szerint egy normálvektor például az $\vec{n}(10;7)$ vektor. Ebből is felírható egy irányvektor (az $\vec{n}$ 90°-os elforgatottja), de az irányvektoros egyenletről is felismerhető: $\vec{v}(-7;10)$.

b) Az, hogy az irányvektor két koordinátája különböző előjelű, azt jelenti, hogy az egyenes meredeksége negatív, vagyis az x tengely pozitív felével bezárt szöge is negatív. Kicsinyítsük le úgy az irányvektort, hogy az első koordinátája 1 legyen. (Ehhez -7 -tel kell osztanunk.) Az így kapott vektor koordinátái: $\left(1; -\frac{10}{7}\right)$. Az előjeles φ szög tangense egyenlő az irányvektor második koordinátájával, ha az első koordináta 1.

Tehát itt $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{10}{7} \Rightarrow \varphi \approx -55^\circ$.

(A 9. osztályban tanultak szerint ez azt is jelenti, hogy az egyenes meredeksége $-\frac{10}{7}$.)



Az előbbi gondolatmenetből ismét leszűrhetünk néhány általános érvényű fogalmat, összefüggést.



Definíció Az egyenesnek az x tengely pozitív felével bezárt szögét az egyenes **irányszögének** nevezzük. Az irányszög tangensét pedig az egyenes **iránytangensének** nevezzük.



Vegyük észre, hogy az egyenes iránytangense ugyanaz a fogalom, amelyet korábban meredekségként ismertünk meg: $m = \operatorname{tg} \varphi$.

Az x tengelyre merőleges egyeneseknek nincs meredekségük, s ezzel összhangban irányszögük sincs. Irányszögük 90°.

Az iránytangens értékét annak az irányvektornak a második koordinátájaként kaptuk, amelynek első koordinátája 1. Ehhez pedig éppen az első koordináta értékével kellett az eredeti irányvektort osztanunk. (Ez az osztás mindig megtehető, amikor az első koordináta nem nulla, azaz, ha az egyenes nem merőleges az x tengelyre.) Tehát ha az eredeti

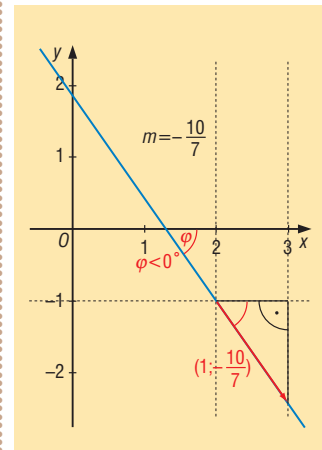
irányvektor $(v_1; v_2)$ (ahol $v_1 \neq 0$), akkor a vele párhuzamos $\left(1; \frac{v_2}{v_1}\right)$ irányvektor második koordinátája adja meg az iránytangens értékét.

$$m = \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_2}{v_1}$$

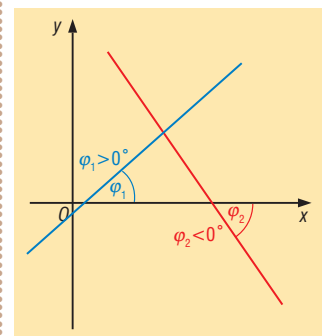
Adott $\vec{v}(v_1; v_2)$ és $P_0(x_0; y_0)$, az egyenes irányvektoros egyenlete:

$$v_2 x - v_1 y = v_2 x_0 - v_1 y_0$$

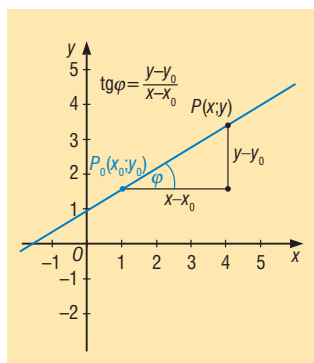
5.5. ábra Irányvektoros egyenlet



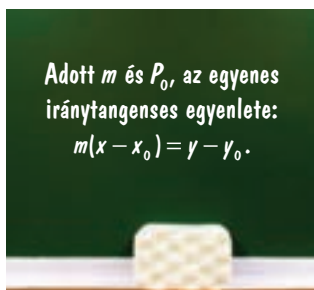
5.6. ábra A 2. példa egyenese



5.7. ábra Irányszög



5.8. ábra Az irántangens



5.9. ábra Irántangenses egyenlet



3. példa Adott az egyenes egy pontja: $P_0(-5; 2)$ és a meredeksége: $m = \frac{2}{3}$. Írjuk föl az egyenes egyenletét!

Megoldás:

1. módszer

A meredekség éppúgy meghatározza az egyenes irányát, mint akár az irányvektor, akár az egyenes, tehát az adatok alapján egyértelműen meghatározott az egyenes. Az előbbieket alapján például egy jó irányvektor a $\vec{v}(3; 2)$ vektor. Így az irányvektoros egyenlet:

$$2x - 3y = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot 2,$$

a jobb oldali műveleteket elvégezve az egyenes egyenlete:

$$2x - 3y = -16.$$

2. módszer:

A P_0 ponttól különböző $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor van rajta az egyenesen, ha $m = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0}$. Szokásos az egyenlet törtmentes alakjának a használata:

$$m(x - x_0) = y - y_0.$$

(Ebben az alakban már a P_0 -l is egybeeshet a P .)

Behelyettesítve az adatokat:

$$\frac{2}{3}(x - (-5)) = y - 2, \text{ azaz } \frac{2}{3}(x + 5) = y - 2.$$

Megjegyzés:

Első ránézésre talán nem hasonlít az 1. megoldásban kapott egyenlethez, de könnyen megmutatható, hogy a két egyenlet ekvivalens. A 2. megoldásban kapott egyenlet mindkét oldalát 3-mal szorozva, majd a kijelölt műveleteket elvégezve a következő egyenleteket kapjuk.

$$2(x + 5) = 3(y - 2),$$

$$2x + 10 = 3y - 6,$$

$$2x - 3y = -16.$$



Oldjuk meg!

1. Írjuk fel az egyenes egyenletét, ha adott irányvektora és egy pontja

- a) $\vec{v}(8; -3)$ és $P_0(-2; 1)$; b) $\vec{v}(2; 7)$ és $P_0(0; 0)$; c) $\vec{v}(-\frac{12}{5}; 4)$ és $P_0(6, 2)$!

Adjuk meg az egyenesek egy-egy normálvektorát is!

2. Állapítsuk meg a következő egyenesek irántangensét, irányszögét és egy irányvektorát:

- a) $3x - 5y = -6$; b) $4x + 9y = 17$; c) $-13x + 25y = 8$; d) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{5}$!

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

3. Mekkora annak az egyenesnek az irányszöge, amelynek
- a) a meredeksége 2,5; b) a meredeksége 0;
 - c) egy irányvektora (2;11); d) egy irányvektora (-4;3);
 - e) egy normálvektora (8;-13); f) egy normálvektora (11;5);
 - g) két pontja A(-3;7) és B(8;0)!
4. Írjuk föl az egyenes egyenletét, ha
- a) egy pontja $P_0(3;7)$ és meredeksége 4; b) egy pontja $P_0(3;7)$ és meredeksége -2;
 - c) egy pontja $P_0(3;7)$ és meredeksége 0; d) egy pontja $P_0(12;-3)$ és meredeksége 4;
 - e) egy pontja $P_0(0;-5)$ és meredeksége 4; f) egy pontja $P_0(0;0)$ és meredeksége 4!
5. Hol metszi a koordinátatengelyeket
- a) az $\frac{x}{7} + \frac{y}{12} = 1$; b) az $\frac{x}{25} + \frac{y}{18} = 1$ egyenletű egyenes?
- Mit vehetünk észre? Fogalmazzuk meg általánosan!
Mekkora területű háromszöget vágnak le az egyes egyenesek a koordinátatengelyekből?

6. Egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének feltétele, egyenesek metszéspontja



1. példa Az alábbiakban megadtuk néhány egyenes egyenletét. Döntsük el, hogy közülük melyek párhuzamosak és melyek merőlegesek egymásra:

a: $2x + 6y = -5$; b: $9x - 3y = 0$; c: $4x - 5y = 7$; d: $-x - 3y = 9$;
e: $-12x + 4y = 1$; f: $10x + 8y = -3$; g: $y = 3x + 2$!

Megoldás:

Az eddig tanultak alapján mindegyik egyenesnek fel tudjuk írni akár a normálvektorait, akár az irányvektorait, akár a meredekségét. Ezek mindegyike külön-külön alkalmas arra, hogy az egyenesek irányát összehasonlítsuk. Foglaljuk táblázatba mindhárom adatot! (Vegyük figyelembe közben, hogy ha $\vec{n}(n_1; n_2)$ egy normálvektor, akkor egy irányvektor például $\vec{v}(n_2; -n_1)$, illetve ha $\vec{v}(v_1; v_2)$ egy irányvektor, akkor $\vec{n}(v_2; -v_1)$ egy normálvektor, a meredekség pedig $m = \frac{v_2}{v_1} = -\frac{n_1}{n_2}$, ha a nevező nem nulla.)

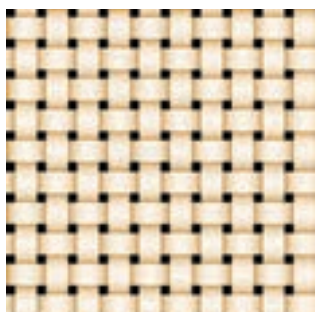
	a	b	c	d	e	f	g
$\vec{n}$	(2;6)	(9;-3)	(4;-5)	(-1;-3)	(-12;4)	(10;8)	(3;-1)
$\vec{v}$	(6;-2)	(-3;-9)	(-5;-4)	(-3;1)	(4;12)	(8;-10)	(-1;-3)
m	$-\frac{1}{3}$	3	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{3}$	3	$-\frac{5}{4}$	3



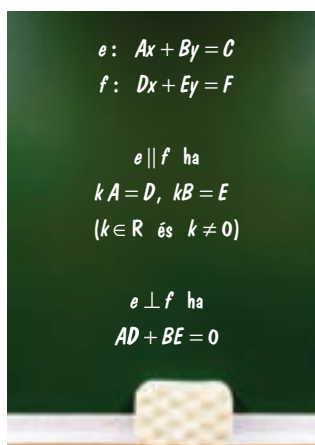
6.1. ábra Párhuzamosok



6.2. ábra Merőlegessék



6.3. ábra Párhuzamosok és merőlegessék



6.4. ábra Feltételek

Az egyenlő meredekségű egyenesek nyilván párhuzamosak. Tehát $a \parallel d$, és $b \parallel e \parallel g$. Más párhuzamosság nem írható fel az egyenesek között. Az 2. leckében a vektorok párhuzamosságát és merőlegességét tanulmányoztuk, így arra is vannak eszközeink, hogy az irányvektorok (vagy akár a normálvektorok) párhuzamosságát vizsgáljuk. Két irányvektor (és ezzel együtt két egyenes is) akkor és csak akkor párhuzamos egymással, ha van egy olyan nullától különböző valós szám, amellyel az egyiket megszorozva a másikat kapjuk eredményül. Ezt a módszert normálvektorokra is alkalmazhatjuk.

Gyakran gyorsabban megy ránézésre „észrevenni”, hogy a két normálvektor párhuzamos egymással, mint meredekséget számolni. Nézzük például az a és a d egyenes egyenletét:

$$a: 2x + 6y = -5;$$

$$d: -x - 3y = 9,$$

itt látszik, hogy a második egyenlet bal oldalát -2 -vel megszorozva az első egyenlet bal oldalát kapjuk. Tehát a normálvektorok párhuzamosak, így az egyenesek is azok.

A merőlegesség megállapításához is használhatjuk a 2. leckében tanultakat, hiszen két egyenes pontosan akkor merőleges egymásra, ha normálvektoruk is merőleges egymásra. Ennek pedig szükséges és elégséges feltétele, hogy skaláris szorzatuk 0 legyen. Nézzük az a és a b egyenest: $\vec{n}_a(2;6)$ és $\vec{n}_b(9;-3)$ skaláris szorzata: $\vec{n}_a \cdot \vec{n}_b = 2 \cdot 9 + 6 \cdot (-3) = 0$. Ezek tehát merőlegessék, így az a és a b egyenes is. (Ezzel együtt minden a irányú egyenes merőleges minden b irányú egyenesre.) Ugyanígy megmutatható, hogy a c és az f egyenes is merőleges egymásra: $\vec{n}_c \cdot \vec{n}_f = 4 \cdot 10 + (-5) \cdot 8 = 0$.



Az 1. példa alapján összefoglalhatjuk, hogy az $Ax + By = C$ és a $Dx + Ey = F$ egyenletű egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha van egy olyan nullától különböző valós szám, amellyel az egyik egyenlet bal oldalát megszorozva a másikat kapjuk. És akkor és csak akkor merőlegessék egymásra, ha $A \cdot D + B \cdot E = 0$.

Mit mondhatunk a merőleges egyenesek meredekségéről?

A táblázat alapján azt vehetjük észre, hogy egymás ellentett reciprokai, azaz meredekségeik szorzata -1 . Ennek sem nehéz a magyarázata: ha a merőleges egyenesek egyikének $\vec{v}(v_1; v_2)$ az irányvektora, akkor ez a másik egyenesnek normálvektora lesz, tehát a másik egyenesnek egy irányvektora $\vec{v}'(v_2; -v_1)$. A meredekség az irányvektor második és első koordinátájának hányadosa, így a két meredekség szorzata: $m \cdot m' = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{-v_1}{v_2} = -1$.



2. példa Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik az $A(7;2)$ pontra és a) párhuzamos az $e: 5x - 3y = 9$ egyenletű egyenessel; b) merőleges az e egyenesre!

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Megoldás:

a) Legyen a keresett egyenes a ! Akkor és csak akkor párhuzamos a két egyenes, ha normálvektoruk is párhuzamos.

$$a \parallel e \Leftrightarrow \vec{n}_a \parallel \vec{n}_e$$

Tehát normálvektornak választhatjuk ugyanazt a vektort, amely az e egyenesnek is normálvektora. $\vec{n}_a(5; -3)$, ezzel a normálvektoros egyenlet: $5x - 3y = 5 \cdot 7 - 3 \cdot 2$, azaz $a: 5x - 3y = 29$.

b) Legyen a keresett egyenes b ! Akkor és csak akkor merőleges a két egyenes, ha normálvektoruk is merőleges egymásra.

$$b \perp e \Leftrightarrow \vec{n}_b \perp \vec{n}_e$$

Az $\vec{n}_e(5; -3)$ vektorra merőleges például a 90° -os elforgatottja: $\vec{n}_b(3; 5)$.

Ezzel a b egyenes normálvektoros egyenlete: $3x + 5y = 3 \cdot 7 + 5 \cdot 2$, azaz $b: 3x + 5y = 31$.



6.5. ábra Metszés



3. példa Számítsuk ki az $e: 4x + 3y = 18$ és az $f: x + 5y = -4$ egyenletű egyenesek metszéspontjának koordinátáit!

Megoldás:

Olyan $P(x; y)$ pontot keresünk, amelynek koordinátapárja mindkét egyenletet egyszerre igazná teszi. Vagyis egyszerűen meg kell oldanunk a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert.

$$\left. \begin{array}{l} e: 4x + 3y = 18 \\ f: x + 5y = -4 \end{array} \right\} \quad / \cdot 4.$$

Alkalmazzuk az egyenlő együtthatók módszerét!

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 18 \\ 4x + 20y = -16 \end{array} \right\}.$$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt!

$$\begin{aligned} 17y &= -34, \\ y &= -2. \end{aligned}$$

Helyettesítsük be ezt az értéket például az f egyenes egyenletébe, hogy megkapjuk az első koordinátát is!

$$\begin{aligned} x + 5 \cdot (-2) &= -4, \\ x &= 6. \end{aligned}$$

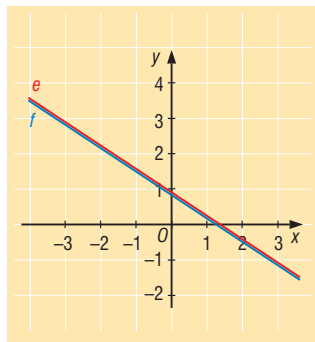
Az egyenletrendszer megoldása a $(6; -2)$ rendezett számpár, tehát a két egyenes metszéspontja a $P(6; -2)$ pont.



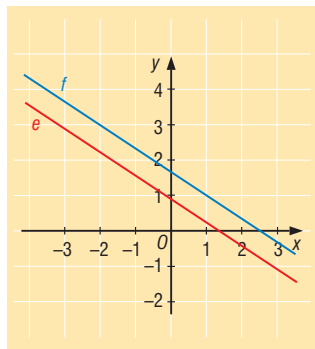
Két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer mindig egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer. 9. osztályban foglalkoztunk már ilyen egyenletrendszerekkel. Láttuk azt is, hogy az együtthatóktól függően előfordulhat, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, és az is lehet, hogy egyetlen egy sincs. Ezeket a speciális eseteket leszámítva mindig egyetlen rendezett számpár a megoldás. Mit jelent az



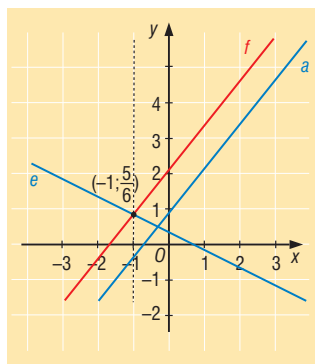
6.6. ábra Az egyenletrendszer megoldásainak száma attól függ, hogy az egyenesek hogyan helyezkednek el



6.7. ábra Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, a két egyenes egybeesik



6.8. ábra Az egyenletrendszernek nincs megoldása, a két egyenes párhuzamos



6.9. ábra Egy adott ponton átmennő adott egyenessel párhuzamos egyenes

egyenesek kölcsönös elhelyezkedésére nézve a végtelen sok megoldás, illetve az, ha egyáltalán nincs megoldás? Ez éppen akkor következhet be, ha a két egyenes iránya azonos, normálvektoruk párhuzamos. Azaz, ha az egyik egyenlet bal oldala a másik egyenlet bal oldalának (nullától különböző) számszorosa.

Ezen belül, ha a jobb oldalak közt is ugyanez az összefüggés áll fenn (azaz a két egyenes egyenlete ekvivalens), akkor a két egyenes egybeesik. Ha pedig nem ugyanannyiszorosa az egyik jobb oldal a másiknak, mint a bal oldalak, akkor a két egyenes párhuzamos.

Például egybeesik a következő két egyenes:

$$e: 12x + 18y = 15 \text{ és}$$

$$f: 8x + 12y = 10.$$

(A második egyenlet minden együtthatója $\frac{2}{3}$ -a az első egyenlet megfelelő együtthatóinak. A két egyenlet ekvivalens.) Ez persze nem jelenti azt, hogy bármely rendezett számpár megoldása az egyenletrendszernek. Csak azok, amelyek valamelyik egyenletet igazgató teszik.

A következő két egyenes párhuzamos:

$$e: 12x + 18y = 15 \text{ és}$$

$$f: 8x + 12y = 20.$$

(A második egyenlet bal oldalának minden együtthatója $\frac{2}{3}$ -a az első egyenlet megfelelő együtthatóinak. A jobb oldalon viszont ez nem teljesül. A két egyenlet ellentmondó.)

Ha a két normálvektor nem párhuzamos, akkor pontosan egy metszéspontja van a két egyenesnek. (Mint a 3. példában is.)



4. példa Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos az $a: 10x - 8y = -7$ egyenletű egyenessel és az $e: 3x + 6y = 2$ egyenletű egyenest annak -1 -es abszcisszájú pontjában metszi!

Megoldás:

Mivel az e egyenes nem párhuzamos az y tengellyel, ezért a -1 -es abszcisszájú pont egyértelműen létezik. Számítsuk ki a hozzá tartozó ordinátát!

$$3 \cdot (-1) + 6y = 2,$$

$$6y = 5,$$

$$y = \frac{5}{6}.$$

Tehát a $\left(-1; \frac{5}{6}\right)$ pontnak a keresett (f) egyenesre is illeszkednie kell (6.9. ábra). Ugyanakkor az f normálvektorának párhuzamosnak kell

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

lennie az a normálvektorával. Használjuk a kisebb abszolút értékű koordinátákkal rendelkező $(5; -4)$ normálvektort!

$$f: 5x - 4y = 5 \cdot (-1) - 4 \cdot \frac{5}{6},$$

$$5x - 4y = -\frac{25}{3}.$$



6.10. ábra Folyik a munka



Oldjuk meg!

- Állapítsuk meg, hogy az alábbi egyenesek közül melyek párhuzamosak és melyek merőlegesek!
 $a: 10x - 4y = 0$; $b: 6x + 15y = -22$; $c: 6x + 10y = 1$; $d: 8x + 20y = 3$; $e: -9x - 15y = 14$;
 $f: 5x - 3y = -9$.
- Adott az $e: 16x + 24y = -43$ egyenletű egyenes. Írjuk fel annak a két egyenesnek az egyenletét, amelyek átmennek az origón, és az egyik párhuzamos az egyenessel, a másik merőleges rá!
- Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik átmegy a $(8; 5)$ ponton, és az irányszöge 60° !
 Írjuk fel a $(-8; -5)$ ponton átmenő egyenes egyenletét, ha
 a) párhuzamos az adott egyenessel; b) merőleges az adott egyenesre!
- Határozzuk meg az alábbi egyenesek metszéspontját!
 a) $e: x + 3y = 12$ és $f: 5x + 2y = -5$; b) $e: x - 8y = -1$ és $f: x + 2y = 9$;
 c) $e: 6x + 5y = 44$ és $f: 8x + 15y = -8$; d) $e: 3x - 7y = 11$ és $f: 5x + 4y = 7$.
- Egy háromszög oldalegyeneseinek egyenlete
 $a: x - 4y = -14$; $b: -2x + y = -7$ és $c: 4x + 5y = 7$.
 Határozzuk meg a háromszög csúcsainak koordinátáit! Igaz-e, hogy a háromszög derékszögű?
 Számítsuk ki a háromszög kerületét és területét!
- Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $5x - 8y = 4$ egyenletű egyenessel, és átmegy a $7x - 2y = 13$ és a $2x + y = -1$ egyenletű egyenesek metszéspontján!

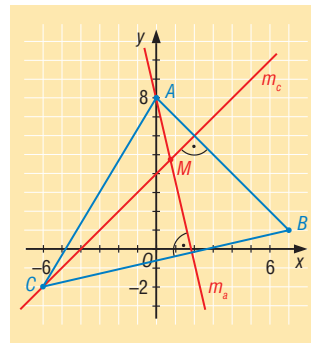
7. Egyenesekkel kapcsolatos vegyes feladatok



1. példa Számítsuk ki az ABC háromszög magasságpontjának koordinátáit, ha $A(0; 8)$; $B(7; 1)$ és $C(-6; -2)$!

Megoldás:

Rajzoljuk le koordináta-rendszerben a háromszöget (7.1. ábra)! A magasságpont két magasságvonal metszéspontja. Bármelyik két magasságvonalat választhatjuk, legyen most pl.: az m_a és az m_c . Az m_a magasságvonal egyenletét felírhatjuk egy ismert pontja (A) és egy normálvektora segítségével. Mivel a háromszög magasságvonala merőleges a szemközti oldal egyenesére, így a $\overline{CB}$ vagy egy azzal párhuzamos vektor alkalmas az m_a normálvektorának. (Ugyanezt kell tennünk az m_c egyenletének felírásakor is.)



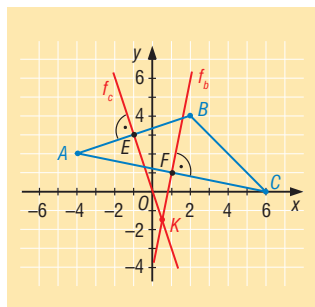
7.1. ábra Magasságpont



7.2. ábra Magasság



7.3. ábra Lépésről lépésre hajtsuk végre a tervet



7.4. ábra A 2. példában szereplő háromszög

Írjuk le a megoldás tervét!

- I. Számítsuk ki a $\overrightarrow{CB}$ és az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátáit!
- II. Írjuk fel az m_a egyenletét egy pontjából (A) és normálvektorából ($\overrightarrow{CB}$)!
- III. Írjuk fel az m_c egyenletét egy pontjából (C) és normálvektorából ($\overrightarrow{AB}$)!
- IV. Oldjuk meg az m_a és az m_c egyenletéből álló egyenletrendszert! Hajtsuk végre a tervet!
- I. $\overrightarrow{CB}(b_1 - c_1; b_2 - c_2) \Rightarrow \overrightarrow{CB}(13; 3)$,
 $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(7; -7) \parallel (1; -1)$.
- II. $\overrightarrow{CB}(13; 3)$ és $A(0; 8)$,
 $m_a: 13x + 3y = 24$.
- III. $\overrightarrow{AB}(7; -7) \parallel (1; -1)$ és $C(-6; -2)$,
 $m_c: x - y = -4$.
- IV. $\begin{cases} 13x + 3y = 24 \\ x - y = -4 \end{cases}$

Alkalmazzuk most a behelyettesítő módszert!

A második egyenletből $x = y - 4$. Ezt helyettesítsük az első egyenletben az x helyére:

$$13(y - 4) + 3y = 24,$$

$$13y - 52 + 3y = 24,$$

$$16y = 76,$$

$$y = \frac{76}{16} = \frac{19}{4}.$$

$$\text{Innen } x = \frac{19}{4} - 4 = \frac{3}{4}.$$

$$\text{A magasságpont tehát: } M\left(\frac{3}{4}; \frac{19}{4}\right).$$



Amikor már gyorsan átlátjuk a hasonló feladatok megoldását, akkor a rajz elemzése nem feltétlenül szükséges. Kezdhetjük mindjárt a megoldás tervével. Az viszont nagyon fontos! Nélküle könnyen belegabalyodhatunk a számolásba.



2. példa Határozzuk meg az ABC háromszög körülírt köre középpontjának koordinátáit, ha $A(-4; 2)$; $B(2; 4)$ és $C(6; 0)$!

Megoldás:

A háromszög körülírt körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Egy-egy oldalvektor a megfelelő oldalfelező merőle-

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

gesnek egy normálvektora. Itt viszont az oldalflező merőlegesek egy-egy pontját nekünk kell meghatároznunk.

Megoldási terv:

Használjuk a 7.4. ábra jelöléseit!

- I. Az AB és az AC oldal felezőpontjának meghatározása (E és F)
- II. $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ oldalvektor meghatározása
- III. f_c és f_b egyenletének felírása egy pontból és a normálvektorból
- IV. f_c és f_b egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása (K koordinátái)

Hajtsuk végre!

$$\text{I. } E\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right) \Rightarrow E(-1;3) \text{ és } F\left(\frac{a_1+c_1}{2}; \frac{a_2+c_2}{2}\right) \Rightarrow F(1;1).$$

$$\text{II. } \overline{AB}(6;2) \text{ és } \overline{AC}(10;-2).$$

$$\text{III. } f_c: \text{egy normálvektora } \overline{AB}(6;2) \parallel (3;1) \text{ és egy pontja } E(-1;3), \\ 3x + y = 0,$$

$$f_b: \text{egy normálvektora } \overline{AC}(10;-2) \parallel (5;-1) \text{ és egy pontja } F(1;1), \\ 5x - y = 4.$$

$$\text{IV. } \left. \begin{array}{l} 3x + y = 0 \\ 5x - y = 4 \end{array} \right\}.$$

Alkalmazzuk az ellentett együtthatók módszerét: adjuk össze a két egyenletet!

$$8x = 4,$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Ez a keresett pont első koordinátája. Helyettesítsük most be az első egyenletbe, s abból határozzuk meg a második koordináta értékét!

$$3 \cdot \frac{1}{2} + y = 0,$$

$$y = -\frac{3}{2}.$$

Az ABC háromszög köré írható kör középpontja tehát $K\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.



3. példa Tükrözzük az $a: x - 2y = -1$ egyenletű egyenesre a $P(5;-2)$ pontot! Adjuk meg a tükörkép koordinátáit!

Megoldás:

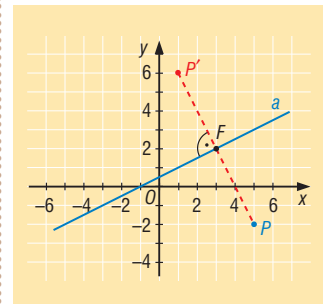
A P pont tükörképét megkapjuk, ha merőlegest állítunk a P ponton át az a egyenesre, majd ennek megkeressük azt a pontját, amelyik az egyenes túloldalán ugyanolyan távolságra van a -tól, mint a P pont (7.7. ábra).



7.5. ábra Köré írt kör



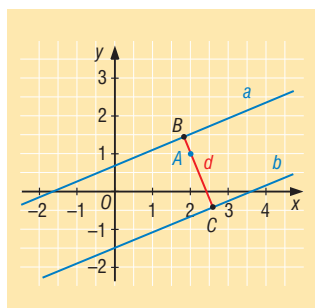
7.6. ábra Ahogyan a kiegészítő színek együtt fehérre egészítik ki egymást, úgy az ellentétes együtthatók módszerével „eltüntethetjük” az egyik ismeretlent



7.7. ábra Pont és tükörképe



7.8. ábra Tóban tükröződő fák



7.9. ábra Párhuzamosok távolsága

Megoldási terv:

- I. Megállapítjuk a normálvektorát, ez egyben PP' irányvektora is.
- II. Felírjuk a P -n átmenő, arra merőleges egyenes egyenletét (e).
- III. Meghatározzuk a és e metszéspontját (F).
- IV. F felezőpontja a PP' szakasznak. Ebből meghatározzuk P' koordinátáit.

Hajtsuk végre!

I. $\vec{n}_a(1; -2) \Rightarrow \vec{v}_e(1; -2) \Rightarrow \vec{n}_e(2; 1).$

II. $e: 2x + y = 8.$

III.
$$\left. \begin{array}{l} a: x - 2y = -1 \\ e: 2x + y = 8 \end{array} \right\} \cdot 2, \\ \left. \begin{array}{l} 2x - 4y = -2 \\ 2x + y = 8 \end{array} \right\}.$$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt!

$$5y = 10,$$

$$y = 2.$$

Helyettesítsük be a kapott értéket az első egyenletbe!

$$x - 2 \cdot 2 = -1,$$

$$x = 3.$$

Az F pont koordinátái: $F(3; 2).$

IV. $f_1 = \frac{p_1 + p'_1}{2} \Rightarrow p'_1 = 2f_1 - p_1 = 2 \cdot 3 - 5 = 1,$

$$f_2 = \frac{p_2 + p'_2}{2} \Rightarrow p'_2 = 2f_2 - p_2 = 2 \cdot 2 - (-2) = 6.$$

A P' pont koordinátái: $P'(1; 6).$



4. példa Határozzuk meg az $5x - 12y = -8$ és az $5x - 12y = 18$ egyenletű egyenesek távolságát!

Megoldás:

Első ránézésre szembeötlő, hogy a két egyenes párhuzamos (7.9. ábra). Terv: két párhuzamos egyenes távolsága egyenlő az egyik egyenes tetszőleges pontjának a másik egyenestől való távolságával, vagy írjuk fel egy mindkét egyenesre merőleges tetszőleges egyenes egyenletét. (Például az $A(2; 1)$ ponton át.) Majd számítsuk ki mindkét egyenessel vett metszéspontját (B és C). Végül határozzuk meg e két metszéspont távolságát (d)! A terv végrehajtását az olvasóra bízuk. (A végeredmény: 2.)



5. példa Egy egyenes a koordinátatengelyeket a $(20; 0)$ és a $(0; 15)$ pontban metszi. Mekkora az átfogóhoz tartozó magassága annak a derékszögű háromszögnek, amelyet ez az egyenes az első síknegyedből levág? Mekkora részekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót?

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Megoldás:

1. módszer:

Gondolkodhatunk tisztán elemi úton. A vizsgált derékszögű háromszög befogóinak hossza 20 és 15 egység. Ebből egyrészt Pitagorasz-tétellel meghatározható az átfogója. Másrészt meghatározható a területe a befogók szorzatának feleként, de az átfogó és a hozzá tartozó magasság szorzatának feleként is, így ebből ki tudjuk számolni az átfogóhoz tartozó magasságot. Ezt követően vagy felírjuk ismét a Pitagorasz-tételt a magasság két oldalán keletkező két derékszögű háromszögre, vagy alkalmazzuk a befogótételt. Javasoljuk a terv önálló kivitelezését!

2. módszer:

Az origón (O -n) át állítsunk merőleges egyenest az adott egyenesre, majd számítsuk ki a metszéspontjukat! Ezek után csak két-két pont távolságát kell kiszámolnunk.

Legyen a két megadott pont rendre A és B . $\overline{AB}(-20;15) \parallel (4;-3)$, ez normálvektora az átfogóhoz tartozó magasság egyenesének, ugyanakkor egy pontja az origó: $m_c: 4x - 3y = 0$.

Az átfogó (c) egyenlete: $-3x - 4y = -3 \cdot 20 - 4 \cdot 0 \Rightarrow -3x - 4y = -60$.

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ -3x - 4y = -60 \end{cases} \quad \begin{matrix} / \cdot 4, \\ / \cdot -3, \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 16x - 12y = 0 \\ 9x + 12y = 180 \end{cases}$$

Adjuk össze a két egyenletet!

$$25x = 180,$$

$$x = \frac{180}{25} = \frac{36}{5}.$$

Az első egyenletbe behelyettesítve: $y = \frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \cdot \frac{36}{5} = \frac{48}{5}$.

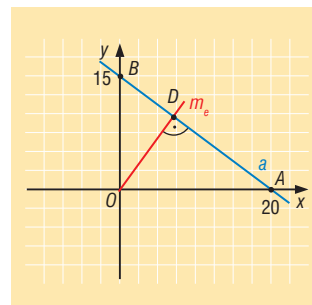
A magasságvonál talppontjának koordinátái tehát: $D\left(\frac{36}{5}; \frac{48}{5}\right)$.

Az átfogóhoz tartozó magasság nagysága:

$$OD = \sqrt{\left(\frac{36}{5}\right)^2 + \left(\frac{48}{5}\right)^2} = 12.$$

Az átfogó két szelete: $DA = \sqrt{\left(20 - \frac{36}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{48}{5}\right)^2} = 16$ egység és

$$DB = AB - DA = \sqrt{20^2 + 15^2} - 16 = 25 - 16 = 9 \text{ egység.}$$



7.10. ábra Az 5. példa ábrája



7.11. ábra Derékszögű háromszög



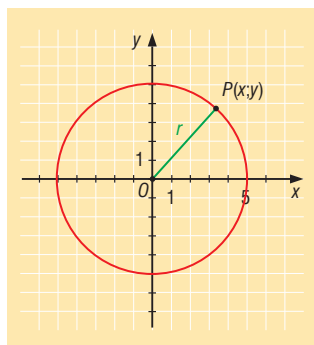
Oldjuk meg!

- Számítsuk ki az ABC háromszög magasságpontjának koordinátáit, ha
 - $A(7;5)$; $B(-4;5)$ és $C(3;-2)$;
 - $A(4;9)$; $B(-6;4)$ és $C(8;1)$!
- Számítsuk ki az első feladatban megadott háromszögek körülírt körének középpontját és annak sugarát!

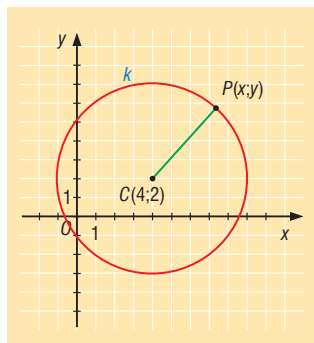


3. A $4x - 5y = 53$ egyenletű egyenesnek melyik pontja van egyenlő távolságra az $A(-4; -3)$ és a $B(2; 5)$ ponttól?
4. Határozzuk meg, hogy milyen távolságra helyezkedik el a $P(-3; -12)$ pont az $x + 3y = 10$ egyenletű egyenestől!
5. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik befogójának egyenese a $4x - 3y = -21$ egyenletű egyenes. Az ezzel szemközti csúcsának koordinátái: $(-13; -2)$. Határozzuk meg a másik két csúcs-pont koordinátáit, valamint a háromszög területét és kerületét!
6. Milyen távolságra van egymástól az $5x - 12y = -18$ és az $5x - 12y = 133$ egyenletű egyenes?
7. Adott egy trapéz egyik aljának (a) és két szárának (b és d) oldalegyenese, valamint a negyedik oldalán egy pont (E). Határozzuk meg a trapéz csúcspontjainak koordinátáit, területét és kerületét, ha $a: x + 3y = -2$; $b: x = 4$; $d: x - y = -2$ és $E(-2; 4)$!

8. A kör egyenlete



8.1. ábra Origó középpontú kör



8.2. ábra Nem origó középpontú kör



1. példa Milyen összefüggés van azon pontok első és második koordinátája között, amelyek a) az origótól; b) a $C(4; 2)$ ponttól 5 egység távolságra vannak?

Megoldás:

a) Ezek a pontok egy origó középpontú, 5 egység sugarú körre illeszkednek (8.1. ábra). Egy tetszőleges ilyen pont legyen a $P(x; y)$ pont!

A P pontnak az origótól való távolsága: $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ennek a távolságnak kell 5 egységnek lennie. Tehát $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$. Szébb lenne az egyenlet, ha nem szerepelne benne négyzetgyökjel. Mivel az egyenlet mindkét oldala nemnegatív, ezért négyzetre emelhetjük az egyenlet mindkét oldalát. Ez ekvivalens átalakítás. Így az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletet kapjuk. Ez az összefüggés teljesül tehát minden olyan pont koordinátáira, amelyeknek az origótól való távolsága 5 egység.

b) Ebben az esetben egy $C(4; 2)$ középpontú 5 egység sugarú körre illeszkednek a pontok (8.2. ábra). Az előző gondolatmenetet követve először írjuk fel a CP távolságot a megfelelő koordináták segítségével: $CP = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$. Ennek kell 5 egységnek lennie: $\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 5$. A négyzetre emelés itt is ekvivalens átalakítás, a keresett összefüggés: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$.



Vegyük észre, hogy eddig csak azzal foglalkoztunk, hogy ha egy pont adott távolságra van egy adott ponttól, akkor koordinátái igazgá teszik a kapott egyenletet. Ez az állítás megfordítva is

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

igaz. Ha egy $(x; y)$ rendezett számpár igazzá teszi a kapott egyenletet, akkor a $P(x; y)$ pont sugárnyi távolságra van az adott ponttól, vagyis illeszkedik a körre.

A $P(x; y)$ pont definíció szerint akkor eleme a $C(u; v)$ középpontú r sugarú körnek, ha a C ponttól r távolságra van, azaz $CP = r$. Koordinátákkal kifejezve: $\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = r$. Emeljük négyzetre mindkét oldalt (ez ekvivalens átalakítás, mivel mindkét oldal nemnegatív):

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2.$$

Ez a $C(u; v)$ középpontú r sugarú kör egyenlete.



2. példa Állapítsuk meg a következő egyenletű körök középpontjának koordinátáit és sugarát:

$$k_1: (x+6)^2 + (y-11)^2 = 49,$$

$$k_2: x^2 + (y+2)^2 = 13,$$

$$k_3: x^2 - 6x + y^2 + 10y = 2,$$

$$k_4: x^2 - 2x + y^2 - 8y + 27 = 0!$$

Megoldás:

Átalakítjuk az általános köregyenlettel egyező alakúra az egyenleteket, majd leolvassuk a megfelelő adatokat.

$$k_1: (x - (-6))^2 + (y - 11)^2 = 7^2,$$

így a középpont $C_1(-6; 11)$, a sugár pedig $r_1 = 7$ egység.

$$k_2: (x - 0)^2 + (y - (-2))^2 = (\sqrt{13})^2,$$

tehát a középpont $C_2(0; -2)$, a sugár: $r_2 = \sqrt{13}$ egység.

Az első két esetben kis gyakorlattal ránézésre is leolvashattuk volna a válaszokat. A harmadik és negyedik egyenletben viszont összegalakban vannak megadva a tagok, így a teljes négyzetté alakítás módszeréhez kell folyamodnunk:

$$k_3: x^2 - 6x + y^2 + 10y = 2,$$

$$x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 + y^2 + 2 \cdot 5y + 5^2 - 9 - 25 = 2,$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 36.$$

A középpont tehát $C_3(3; -5)$, a sugár $r_3 = 6$ egység.

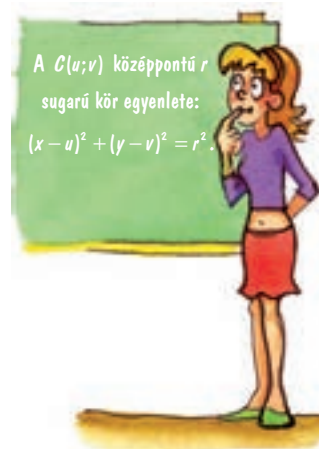
A negyedik egyenlet esetében is hasonlóan járunk el:

$$k_4: x^2 - 2x + y^2 - 8y + 27 = 0,$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 + 10 = 0,$$

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = -10.$$

Azt kaptuk, hogy a sugár négyzetének negatívnak kellene lennie. Ez nyilván nem lehetséges, így ez az egyenlet nem egy kör egyenlete.



8.3. ábra A kör egyenlete



8.4. ábra Körök?

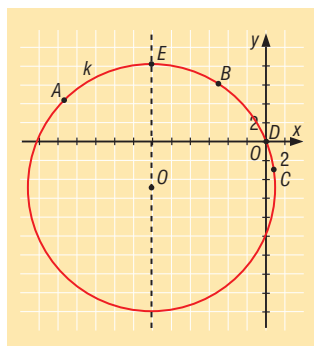


8.5. ábra Folyamodjunk a teljes négyzetté alakítás módszeréhez!

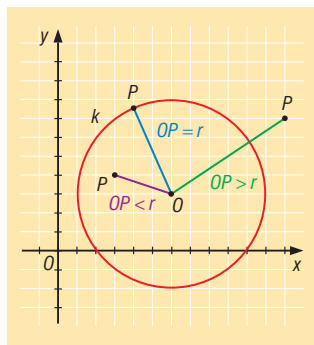


Minden kör egyenlete kétismeretlenes és másodfokú egyenlet, de nem minden kétismeretlenes és másodfokú egyenlet körnek az egyenlete.

8.6. ábra Jól jegyezzük meg!



8.7. ábra Kívül van vagy belül?



8.8. ábra Külső és belső pontok

A kör egyenlete kétismeretlenes másodfokú egyenlet. De az nem igaz, hogy minden kétismeretlenes másodfokú egyenlet körnek az egyenlete. Az ilyen egyenletek legáltalánosabb alakja ugyanis:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, ami akkor másodfokú, ha az A , a B és a C egyszerre nem 0. Egy ilyen egyenletből csak akkor lehet köregyenlet, ha nem szerepel benne xy , vagyis ha $B = 0$; továbbá $A = C$. Ezek szükséges feltételek ahhoz, hogy kör egyenletét kapjuk, de a 2. példa negyedik egyenlete mutatja, hogy nem elegendő ennyi feltétel. Annak is teljesülnie kell, hogy a teljes négyzetté kiegészítés és rendezés után az egyenlet jobb oldalán álló konstans értéke pozitív legyen. (Ennek az a feltétele, hogy $D^2 + E^2 - 4AF > 0$ teljesüljön.) Ha ezek a feltételek mind egyszerre teljesülnek, akkor az már elegendő is ahhoz, hogy kör egyenlete legyen az adott egyenlet.



3. példa Döntsük el, hogy az $x^2 + 24x + y^2 + 10y = 0$ egyenlettel megadott körvonalra illeszkednek-e az alábbi pontok, s ha nem, akkor azon belül vagy kívül helyezkednek-e el (azaz a körnek belső vagy külső pontjai-e):

$A(-21; 4)$; $B(-5; 6)$; $C(1; -3)$; $D(0; 0)$ és $E(-12; 8)$!

Megoldás:

Azt, hogy egy-egy pont illeszkedik-e a körvonalra, egyszerűen úgy dönthetjük el, hogy megnézzük, a koordinátpárja megoldása-e a kör egyenletének (8.7. ábra).



Vegyük észre, hogy számolás nélkül is látható, hogy a D pont (az origó) koordinátái igazgá teszik az egyenletet, hiszen nincs az egyenletben konstans tag. Mielőtt a többi pontot is szemügyre vennénk, gondoljuk végig, hogyan lehet eldönteni azt, hogy egy pont belső vagy külső pontja-e a körnek! (A pontok és a kör koordináta-rendszerbeli ábrázolása után még inkább szükségesnek látszik a számolás, hiszen az egyes pontok, ha nincsenek is a körön, akkor is nagyon közel vannak hozzá.) Világos, hogy akkor belső pont egy P pont, ha a kör középpontjától való távolsága kisebb, mint a sugár, és akkor külső pont, ha ez a távolság nagyobb a sugárnál. Vagyis ha $O(u; v)$ a középpont és r a sugár, akkor:

$$\begin{cases} P \text{ belső pont} & \Leftrightarrow OP < r \Leftrightarrow (x-u)^2 + (y-v)^2 < r^2 \\ P \in \text{kör} & \Leftrightarrow OP = r \Leftrightarrow (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2 \\ P \text{ külső pont} & \Leftrightarrow OP > r \Leftrightarrow (x-u)^2 + (y-v)^2 > r^2. \end{cases}$$

Ehhez célszerű először a teljes négyzetté alakításokat elvégezni:

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \cdot 12x + 144 + y^2 + 2 \cdot 5y + 25 - 169 &= 0, \\ (x+12)^2 + (y+5)^2 &= 169. \end{aligned}$$

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Az $A(-21;4)$ pont koordinátáit behelyettesítve a bal oldal értéke: $(-21+12)^2 + (4+5)^2 = (-9)^2 + 9^2 = 81+81=162$, ez kisebb a jobb oldal értékénél (169-nél), így az A pont a kör belső pontja.

A többi pontnál kommentár nélkül végezzük el a behelyettesítéseket, majd az összehasonlításokat.

$B(-5;6)$: $(-5+12)^2 + (6+5)^2 = 7^2 + 11^2 = 49+121=170 > 169$, így B külső pontja a körnek.

$C(1;-3)$: $(1+12)^2 + (-3+5)^2 = 13^2 + 2^2 = 169+4=173 > 169$, így C külső pontja a körnek.

A D pont koordinátáit az eredeti egyenletbe volt érdemes behelyettesíteni, rajta van a körön.

$E(-12;8)$: $(-12+12)^2 + (8+5)^2 = 0^2 + 13^2 = 169$, így az E pont rajta van a körön.



Vegyük észre, hogy az E pont esetében úgy is rájöhettünk volna, hogy pontja a körnek, ha észrevesszük, hogy első koordinátája megegyezik a kör középpontjának első koordinátájával, vagyis E rajta van a középponton átmenő y tengellyel párhuzamos egyenesen. Tehát elegendő a második koordináták különbségének abszolút értékét összehasonlítani a sugár hosszával, hogy megtudjuk, rajta van-e az E pont a körön. A második koordináták különbségének abszolút értéke: $|8 - (-5)| = 13$ (sugárnyi), így az E pont rajta van a körön.



8.9. ábra Kívül, belül



4. példa Írjuk fel az ABC háromszög körülírt körének egyenletét, ha

a) $A(8;4)$; $B(-4;-5)$ és $C(-10;3)$;

b) $A(-2;2)$; $B(4;4)$ és $C(10;-4)$!

Megoldás:

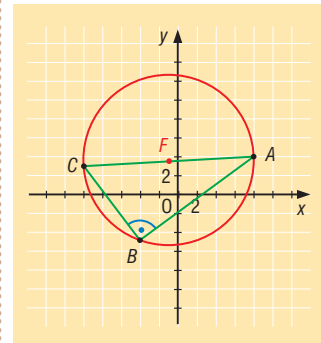
Ábrázoljuk koordináta-rendszerben a pontokat (8.10. ábra)! Sokat könnyít a dolgunkon, ha észrevesszük, hogy ez a háromszög derékszögű. Persze nem elég, hogy annak látszik, meg is kell mutatni azt.

$\overrightarrow{BA}(12;9)$, $\overrightarrow{BC}(-6;8)$, e vektorok skaláris szorzata $12 \cdot (-6) + 9 \cdot 8 = 0$, tehát valóban merőlegesek. Így a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja: $F\left(-1, \frac{7}{2}\right)$, sugara pedig az átfogó hosszának fele:

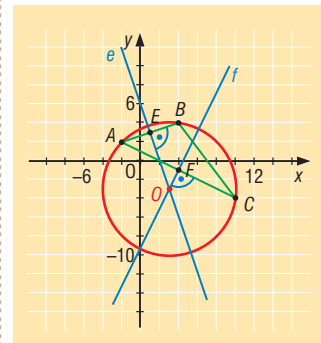
$$\frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}\sqrt{(c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{18^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{325} = \sqrt{\frac{325}{4}}. \text{ Így}$$

$$\text{a kör egyenlete: } (x+1)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{325}{4}.$$

b) Ábrázoljuk itt is koordináta-rendszerben a pontokat! Mivel ez nem derékszögű háromszög, ezért két oldalfelező merőleges metszéspontjaként



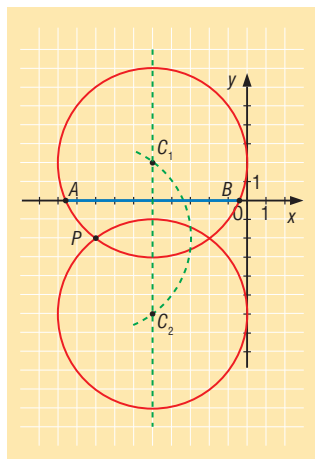
8.10. ábra Derékszögű háromszög körülírt köre



8.11. ábra Körülírt kör



8.12. ábra Készítsünk rajzot!



8.13. ábra A szerkesztés

kell meghatároznunk a körülírt kör középpontját. Az előző leckében ezt már gyakoroltuk, így csak vázlatosan írjuk le a megoldást (8.11. ábra).

$$\overline{AB}(6;2) \Rightarrow \vec{n}_e(3;1), E(1;3) \Rightarrow e: 3x + y = 6,$$

$$\overline{AC}(12;-6) \Rightarrow \vec{n}_f(2;-1), F(4;-1) \Rightarrow f: 2x - y = 9.$$

A két oldalfelező merőleges metszéspontja:

$$\begin{cases} e: 3x + y = 6 \\ f: 2x - y = 9 \end{cases}$$

$$5x = 15,$$

$$x = 3,$$

$$y = -3.$$

A kör középpontjának koordinátái: $O(3; -3)$, sugarának négyzete pedig $OB^2 = 1^2 + 7^2 = 50$. A kör egyenlete tehát: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 50$.

5. példa Milyen hosszúságú húrt vág ki az x tengelyből az az 5 egység sugarú kör, amely érinti az y tengelyt és átmegy a $P(-8; -2)$ ponton?

Megoldás:

1. módszer:

Gondoljuk végig, hogyan szerkesztenénk meg a feltételeknek megfelelő kör középpontját (8.13. ábra)! Egyrészt az y tengelytől 5 egység távolságra van a középpontja, tehát illeszkedik az y tengelytől 5 egység távolságra lévő, y tengellyel párhuzamos valamelyik egyenesre. Ugyanakkor a kör egy pontja a III. síknegyedben helyezkedik el, így a kör „jobbról” nem érintheti az y tengelyt. Másrészt a P ponttól is 5 egység távolságra van a középpontja, így a P középpontú 5 egység sugarú körrel kimetszhetnénk a párhuzamosból a kör középpontját. Ebből látható, hogy két olyan kör is lesz, amely eleget tesz a feltételeknek.

Az y tengellyel párhuzamos egyenes egyenlete: $x = -5$, ami azt is jelenti egyben, hogy a kör középpontjának első koordinátája -5 .

Az eddigi ismereteink alapján a kör egyenlete:

$$(x + 5)^2 + (y - v)^2 = 25.$$

A középpont ordinátáját (a szerkesztéstől eltérően) célszerű úgy meghatározni, hogy kihasználjuk azt a tényt, hogy a P pont illeszkedik a körre, azaz koordinátái igazgá teszik a kör egyenletét.

$$P(-8; -2) \Rightarrow (-8 + 5)^2 + (-2 - v)^2 = 25.$$

Ebben az egyenletben már csak a v az ismeretlen. Határozzuk meg az értékét!

$$9 + 4 + 4v + v^2 = 25,$$

$$v^2 + 4v - 12 = 0.$$

$$v_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2},$$

$$v_1 = 2; \quad v_2 = -6.$$

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Algebrai módszerrel is megkaptuk tehát, hogy két ilyen kör van. A két középpont $C_1(-5;2)$ és $C_2(-5;-6)$. Mivel a második kör ordinátájának abszolút értéke nagyobb, mint a sugár, ezért ez a kör teljes egészében az x tengely alatt helyezkedik el. Így nem vág ki semmilyen húrt az x tengelyből. Csak az első körrel kell tehát foglalkoznunk.

Az x tengelyen lévő pontjainak második koordinátája 0, ezt a kör egyenletébe helyettesítve megkapjuk a metszéspontok első koordinátáját. A kör egyenlete $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 25$, a metszéspontok második koordinátáját behelyettesítve:

$$(x+5)^2 + (0-2)^2 = 25,$$

$$x^2 + 10x + 25 + 4 = 25,$$

$$x^2 + 10x + 4 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{84}}{2} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{21}}{2} = -5 \pm \sqrt{21}.$$

Az AB húr végpontjai tehát: $A(-5 - \sqrt{21}; 0)$ és $B(-5 + \sqrt{21}; 0)$, ezek távolsága:

$$AB = -5 + \sqrt{21} - (-5 - \sqrt{21}) = -5 + \sqrt{21} + 5 + \sqrt{21} = 2 \cdot \sqrt{21}.$$

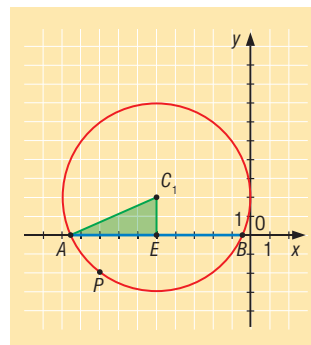
A feltételeknek megfelelő két kör közül csak az egyik metszi az x tengelyt, és az $2 \cdot \sqrt{21}$ hosszúságú húrt metsz ki az x tengelyből.

2. módszer:

A lehetséges körök meghatározásáig ugyanaz a gondolatmenet. De ha már ismerjük a kör középpontját és a sugarát, akkor a Pitagorasz-tétellel is dolgozhatunk (8.15. ábra). Az AEC_1 derékszögű háromszögben az átfogó $AC_1 = r = 5$, a befogó $C_1E = 2$. Ebből $AE = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$, ami fele az AB húrnak, így $AB = 2 \cdot \sqrt{21}$.



8.14. ábra Algebrai módszerrel vagy Pitagorasz-tétellel oldjuk meg?



8.15. ábra A kivágott szakasz hosszának meghatározása



Oldjuk meg!

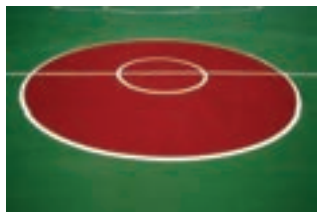
- Írjuk föl annak a körnek az egyenletét, amelynek
 - középpontja a $C(2;7)$ pont, sugara pedig 3 egység;
 - középpontja a $C(-13;4)$ pont, sugara pedig 8 egység;
 - középpontja a $C(0;-5)$ pont, sugara pedig 10 egység!
 Adjuk meg a körök koordinátatengelyekkel párhuzamos átmérőinek a végpontjait, valamint a körök egy belső és egy külső pontját!
- Az alábbi egyenletek közül melyekre igaz, hogy körnek az egyenletei? Határozzuk meg a körök középpontját és sugarát:
 - $(x-12)^2 + (y+9)^2 = 121$;
 - $(x+10)^2 + y^2 = 64$;
 - $x^2 + 6x + y^2 - 14y + 54 = 0$;
 - $x^2 - 16x + y^2 - 16y - 68 = 0$;
 - $x^2 - 22x + y^2 + 185 = 0$!
- Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek
 - középpontja a $C(-3;2)$, és egy pontja a $P(5;2)$ pont;
 - középpontja a $C(9;0)$, és egy pontja a $P(-1;6)$ pont;



Koordináta-geometria

- c) egyik átmérője az AB szakasz, ahol $A(7;-4)$ és $B(1;8)$;
 d) három érintője az $e: y = -2$; az $f: y = 6$ és a $g: x = 1$;
 e) két érintője a két koordinátatengely és átmegy a $P(8;9)$ ponton!
4. Határozzuk meg az ABC háromszög körülírt körének egyenletét, ha
 a) $A(3;8)$; $B(-8;2)$ és $C(-8;8)$; b) $A(-2;-1)$; $B(-1;4)$ és $C(4;3)$;
 c) $A(-5;-1)$; $B(2;-1)$ és $C(-4;5)$; d) $A(4;-5)$; $B(8;7)$ és $C(-4;1)$!
5. Az $(x+9)^2 + (y-2)^2 = 144$ egyenletű kör milyen hosszúságú húrt vág ki a következő egyenesekből:
 $x = 0$; $x = -3$; $x = -9$; $x = -11$; $x = 3$; $x = 5$?

9. A körök és egyenesek kölcsönös helyzete



9.1. ábra Körök és egyenes



1. példa Határozzuk meg az $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$ kör és az $x - 2y = 3$ egyenes metszéspontjainak koordinátáit!

Megoldás:

Az egyenesek metszéspontjánál tanultakat itt is alkalmazhatjuk. Olyan pontot keresünk, melynek koordinátái igazgá teszik egyszerre mindkét pontthalmaz egyenletét. Vagyis itt is meg kell oldanunk a két egyenletből álló egyenletrendszert.

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y+2)^2 = 25 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

A második egyenletből fejezzük ki x -et, és a kapott kifejezést helyettesítsük be az első egyenletbe, majd oldjuk meg az y -ra vonatkozó másodfokú egyenletet!

$$x = 2y + 3,$$

$$(2y+3-4)^2 + (y+2)^2 = 25,$$

$$(2y-1)^2 + (y+2)^2 = 25,$$

$$4y^2 - 4y + 1 + y^2 + 4y + 4 = 25,$$

$$5y^2 - 20 = 0,$$

$$y^2 - 4 = 0,$$

$$(y-2)(y+2) = 0,$$

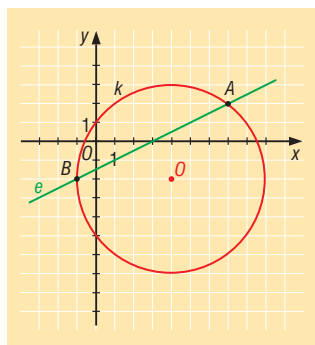
$$y_1 = 2 \text{ és } y_2 = -2.$$

A megfelelő x értékek:

$$x_1 = 2y_1 + 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7 \text{ és}$$

$$x_2 = 2y_2 + 3 = 2 \cdot (-2) + 3 = -1.$$

Így a metszéspontok: $A(7;2)$ és $B(-1;-2)$.



9.2. ábra Kör és egyenes metszéspontja

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$



Vegyük észre, hogy a kör és az egyenes ábrázolása nélkül tisztán algebrai eszközökkel meg tudtuk oldani a feladatot. Ellenőrzésképpen persze elkészíthetjük az ábrát is (9.2. ábra).



2. példa Határozzuk meg azon egyenesek egyenletét, amelyek párhuzamosak az 1. példában megadott egyenessel, és érintik az 1. példában szereplő kört!

Megoldás:

1. módszer:

Először kövessük gondolatban azokat a lépéseket, ahogyan megszerkesztenénk a párhuzamosokat!

- I. Állítsunk merőlegest a kör középpontján át az adott egyenesre (f)!
- II. Határozzuk meg a metszéspontjait a körrel (C és D)!
- III. A metszéspontokon át húzzuk meg az adott egyenessel párhuzamos egyeneseket (c és d)!

Hajtsuk végre az ennek megfelelő számításokat!

I. Az adott egyenes egy normálvektora az $(1; -2)$ vektor. Erre merőleges a $(2; 1)$ vektor, így ez alkalmas az f egyenes normálvektorának.

$$\overline{n_f}(2; 1) \text{ és } O(4; -2) \in f,$$

$$f: 2x + y = 2 \cdot 4 + (-2),$$

$$2x + y = 6.$$

II. A körrel vett metszéspontjai:

$$\left. \begin{array}{l} f: 2x + y = 6 \\ k: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 25 \end{array} \right\}$$

Az első egyenletből: $y = 6 - 2x$, ezt a második egyenletbe írva:

$$(x-4)^2 + (6-2x+2)^2 = 25,$$

$$(x-4)^2 + (8-2x)^2 = 25,$$

$$x^2 - 8x + 16 + 64 - 32x + 4x^2 = 25,$$

$$5x^2 - 40x + 55 = 0,$$

$$x^2 - 8x + 11 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 44}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{20}}{2} = 4 \pm \sqrt{5},$$

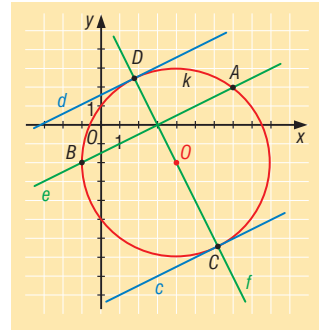
$$x_1 = 4 + \sqrt{5} \Rightarrow y_1 = 6 - 2 \cdot (4 + \sqrt{5}) = -2 - 2 \cdot \sqrt{5},$$

$$x_2 = 4 - \sqrt{5} \Rightarrow y_2 = 6 - 2 \cdot (4 - \sqrt{5}) = -2 + 2 \cdot \sqrt{5}.$$

A leendő érintési pontok:

$$C(4 + \sqrt{5}; -2 - 2 \cdot \sqrt{5}) \text{ és}$$

$$D(4 - \sqrt{5}; -2 + 2 \cdot \sqrt{5}).$$



9.3. ábra Kör és adott egyenessel párhuzamos érintői



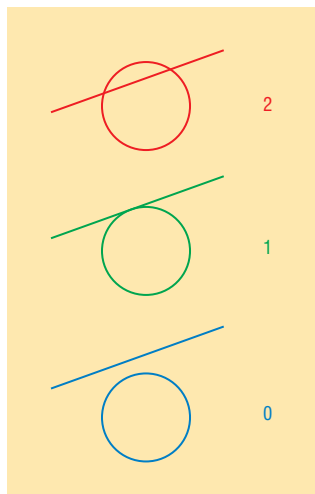
9.4. ábra Kövessük a tervet!



9.5. ábra Érintés



9.6. ábra Pontok, egyenesek, körök



9.7. ábra Egy kör és egy egyenes metszéspontjainak száma függ a kölcsönös helyzetüktől

III. A c és a d érintő párhuzamos az adott egyenessel, így normálvektoruknak vehetjük ugyanazt az $(1; -2)$ vektort.

$$c: x - 2y = 4 + \sqrt{5} - 2 \cdot (-2 - 2 \cdot \sqrt{5}),$$

$$x - 2y = 4 + \sqrt{5} + 4 + 4 \cdot \sqrt{5},$$

$$x - 2y = 8 + 5 \cdot \sqrt{5},$$

$$\text{és } d: x - 2y = 4 - \sqrt{5} - 2 \cdot (-2 + 2 \cdot \sqrt{5}),$$

$$x - 2y = 4 - \sqrt{5} + 4 - 4 \cdot \sqrt{5},$$

$$x - 2y = 8 - 5 \cdot \sqrt{5}.$$

2. módszer:

Minden az adott egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete felírható $x - 2y = p$ alakban, ahol p egy valós szám.

A körnek és egy ilyen egyenesnek pontosan akkor van két metszéspontja, ha a körnek és ezen egyenesnek az egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása során kapott másodfokú egyenletnek két valós gyöke van. Ez pedig akkor teljesül, ha a másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív. Ugyanígy elmondható, hogy akkor érintik egymást, ha az említett diszkrimináns 0, és akkor nincs közös pontjuk, ha ez a diszkrimináns negatív. Ez alapján meghatározható a p értéke úgy, hogy az adott irányú egyenes éppen érintő legyen.

Nézzük, hogy működik ez a gyakorlatban!

$$\left. \begin{array}{l} \text{Az adott irányú egyenesek egyenlete: } x - 2y = p \\ \text{a kör egyenlete: } (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25 \end{array} \right\}$$

$$\text{Az első egyenletből} \quad x = 2y + p.$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve:

$$(2y + p - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25,$$

$$4y^2 + p^2 + 16 + 4py - 16y - 8p + y^2 + 4y + 4 - 25 = 0,$$

$$5y^2 + 4(p - 3)y + p^2 - 8p - 5 = 0.$$

Ezen másodfokú egyenlet diszkriminánsának kell 0-nak lennie.

$$D = [4(p - 3)]^2 - 4 \cdot 5 \cdot (p^2 - 8p - 5) = 0,$$

$$16(p^2 - 6p + 9) - 20p^2 + 160p + 100 = 0,$$

$$-4p^2 + 64p + 244 = 0,$$

$$-p^2 + 16p + 61 = 0,$$

$$p_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 61}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-16 \pm \sqrt{500}}{-2} = 8 \pm 5\sqrt{5}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy két ilyen p érték van: $p_1 = 8 + 5 \cdot \sqrt{5}$ és $p_2 = 8 - 5 \cdot \sqrt{5}$. Ennek megfelelően a két érintő egyenlete:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

$$x-2y=8+5\cdot\sqrt{5} \text{ és } x-2y=8-5\cdot\sqrt{5}.$$

(Megnyugtató, hogy a kétféle megoldással ugyanarra az eredményre jutottunk.)



3. példa Határozzuk meg a $k_1: (x-6)^2 + (y-2)^2 = 25$ egyenletű kör és a $k_2: (x+4)^2 + (y+3)^2 = 100$ egyenletű kör metszéspontjainak koordinátáit! Írjuk fel a két kör centrálisának egyenletét!

Megoldás:

Itt is két ponthalmaz közös részét keressük, azaz olyan pontokat, amelyeknek a koordinátapárja mindkét egyenletnek megoldása. A két kör egyenletéből álló kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszert kell megoldanunk (9.9. ábra).

$$\left. \begin{aligned} (x-6)^2 + (y-2)^2 &= 25 \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 &= 100 \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 - 25 &= 0 \\ x^2 + 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 - 100 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 12x + y^2 - 4y + 15 &= 0 \\ x^2 + 8x + y^2 + 6y - 75 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt!

$$\begin{aligned} 20x + 10y - 90 &= 0, \\ 2x + y &= 9. \end{aligned}$$



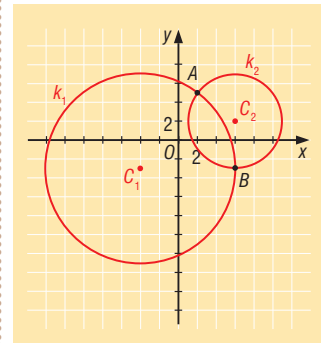
Vegyük észre, hogy ez az egyenlet egy lineáris kétismeretlenes egyenlet, tehát egy egyenes egyenlete. Milyen egyenes lehet ez? A két kör metszéspontjainak koordinátái igazán teszik mindkét köregyenletet, így a két egyenlet különbségeként adódó egyenlet is. Vagyis a most kapott egyenlet a két kör két metszéspontján áthaladó egyenes egyenlete.

Folytassuk a megoldást! Fejezzük ki az y -t ebből az egyenletből, majd helyettesítsük be az első köregyenletbe!

$$\begin{aligned} y &= 9 - 2x, \\ (x-6)^2 + (9-2x-2)^2 &= 25, \\ (x-6)^2 + (7-2x)^2 &= 25, \\ x^2 - 12x + 36 + 49 - 28x + 4x^2 - 25 &= 0, \\ 5x^2 - 40x + 60 &= 0, \\ x^2 - 8x + 12 &= 0, \end{aligned}$$



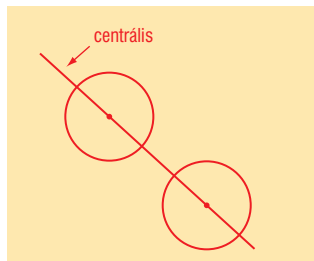
9.8. ábra Körök metszése



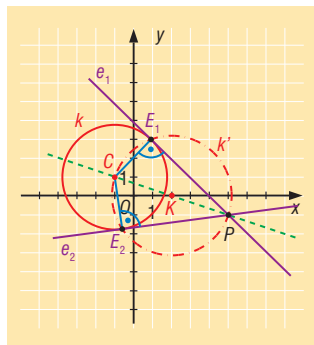
9.9. ábra Két kör metszéspontjai



9.10. ábra Körök a térben



9.11. ábra A centrális a körök középpontját összekötő egyenes



9.12. ábra Adott külső ponton átmenő körérintők



9.13. ábra Körök a gömbfelületen

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = 4 \pm 2,$$

$$x_1 = 6 \Rightarrow y_1 = 9 - 2 \cdot 6 = -3 \text{ és } x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 9 - 2 \cdot 2 = 5.$$

A két metszéspont: $A(6; -3)$ és $B(2; 5)$.

A két kör centrálisának felírásához vagy meghatározzuk a két kör középpontját, majd a tanult eljárást alkalmazva a két ponton átmenő egyenes egyenletét, vagy kihasználjuk, hogy a centrális nem más, mint a metszéspontokat összekötő szakasz felezőmerőlegese. Dolgozzunk most az utóbbi módszerrel!

A centrálisnak egy normálvektora tehát az $\overline{AB}(-4; 8) \parallel (1; -2)$. Egy pontja pedig az AB szakasz $F(4; 1)$ felezőpontja. A centrális egyenlete: $x - 2y = 2$.



4. példa Írjuk fel az $x^2 + 2x + y^2 - 2y - 6 = 0$ egyenletű k körhöz a $P(5; -1)$ ponton át húzható érintők egyenletét!

Megoldás:

Kövessük itt is a megfelelő szerkesztési lépéseket!

- I. Az érintési pont megszerkesztéséhez a kör középpontját a P ponttal összekötő szakasz mint átmérő fölé Thalész-kört emelünk (k').
- II. A Thalész-kör és az eredeti kör metszéspontjait meghatározzuk (E_1 és E_2).

III. Megszerkesztjük a PE_1 és a PE_2 egyenest (9.12. ábra).

A kivitelezés ennél egy kicsit több lépésből áll, de ezen vázlatpontok mentén haladunk.

I. Először meghatározzuk a k kör C középpontjának koordinátáit.

$$k: x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 8,$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 8 \Rightarrow C(-1; 1).$$

Majd kiszámítjuk a CP szakasz K felezőpontjának koordinátáit.

$$K\left(\frac{c_1 + p_1}{2}; \frac{c_2 + p_2}{2}\right) \Rightarrow K(2; 0).$$

Kiszámítjuk a Thalész-kör sugarának négyzetét.

$$KP^2 = (5-2)^2 + (-1-0)^2 = 10.$$

Most már fel tudjuk írni a Thalész-kör egyenletét.

$$k': (x-2)^2 + y^2 = 10.$$

II. Kiszámítjuk a két kör metszéspontjainak koordinátáit.

$$\left. \begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 - 2y - 6 &= 0 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 10 \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 - 2y - 6 &= 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 6 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat!

$$6x - 2y = 0,$$

$$3x = y.$$

Helyettesítsük be például a k' kör egyenletébe!

$$x^2 - 4x + (3x)^2 - 6 = 0,$$

$$10x^2 - 4x - 6 = 0,$$

$$5x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 5} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{2 \pm 8}{10},$$

$$x_1 = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow y_1 = 3 \text{ és } x_2 = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \Rightarrow y_2 = -\frac{9}{5}.$$

A két leendő érintési pont: $E_1(1;3)$ és $E_2\left(-\frac{3}{5}; -\frac{9}{5}\right)$.

III. A $\overline{CE_1}$ és a $\overline{CE_2}$ rendre egy-egy normálvektora az e_1 és az e_2 érintőnek, a $P(5;-1)$ pont pedig mindkettőnek pontja.

$$\overline{CE_1}(2;2) \parallel (1;1) \Rightarrow e_1 : x + y = 4,$$

$$\overline{CE_2}\left(\frac{2}{5}; -\frac{14}{5}\right) \parallel (1;-7) \Rightarrow e_2 : x - 7y = 12.$$



5. példa Írjuk fel annak a $P(4;0)$ középpontú körnek az egyenletét, amely érinti a $k: (x+5)^2 + (y-6)^2 = 52$ egyenletű kört!

Megoldás:

Használjuk ki, hogy két kör tengelyesen szimmetrikus a centrálisuk egyenesére (9.16. ábra)! Itt is haladhatnánk algebrai úton, válasszuk most inkább a szerkesztésnek megfelelő lépéseket (a centrálisnak a k körrel vett metszéspontjait át megrajzolhatóak a keresett körök)!

A centrális egyenletéhez keressük meg először annak egy normálvektorát!

$$\overline{CP}(9;-6) \perp \vec{n}(2;3).$$

CP egyenes egyenlete: $2x + 3y = 8$.

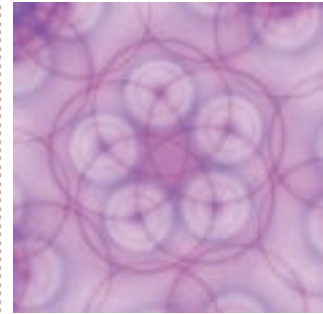
Ennek metszéspontjait kell megkeresnünk az adott körrel.

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ (x+5)^2 + (y-6)^2 &= 52 \end{aligned} \right\},$$

$$x = 4 - \frac{3}{2}y,$$

$$\left(4 - \frac{3}{2}y + 5\right)^2 + (y-6)^2 = 52,$$

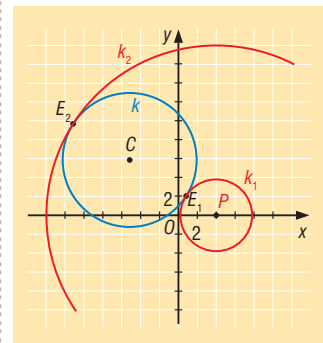
$$\left(9 - \frac{3}{2}y\right)^2 + (y-6)^2 = 52,$$



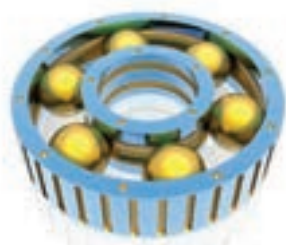
9.14. ábra Körök



9.15. ábra A kutya mozgása során egy kört ír le



9.16. ábra Körhöz adott középpontú érintő kör



9.17. ábra Golyóscsapág

$$81 - 27y + \frac{9}{4}y^2 + y^2 - 12y + 36 = 52,$$

$$\frac{13}{4}y^2 - 39y + 65 = 0,$$

$$y^2 - 12y + 20 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} = 6 \pm 4,$$

$$y_1 = 10 \Rightarrow x_1 = -11 \text{ és } y_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1.$$

A két érintési pont: $E_1(1; 2)$ és $E_2(-11; 10)$.

Határozzuk meg a két sugár négyzetét!

$$r_1^2 = E_1P^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \text{ és } r_2^2 = E_2P^2 = 15^2 + 10^2 = 325.$$

A feltételeknek két kör felel meg:

$$k_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 13 \text{ és } k_2 : (x+11)^2 + (y-10)^2 = 325.$$



Oldjuk meg!

- Határozzuk meg
a) az $(x+3)^2 + y^2 = 25$ kör és az $x+y=2$ egyenes;
b) az $(x-8)^2 + (y+2)^2 = 50$ kör és az $x-3y=4$ egyenes
metszéspontjainak koordinátáit!
- Az $x^2 + (y-7)^2 = 40$ egyenletű körnek mely pontja van legközelebb az $x-3y=9$ egyenletű egyeneshez?
- Írjuk fel az $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 34$ egyenletű kör $3x-5y=0$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintőinek egyenletét!
- Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely koncentrikus az $(x-9)^2 + (y-4)^2 = 73$ egyenletű körrel és érinti
a) az y tengelyt;
b) az x tengelyt;
c) az $x+6y=20$ egyenletű egyenest!
- Számítsuk ki az $x^2 + (y-6)^2 = 10$ és az $(x-3)^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör metszéspontjainak koordinátáit! Adjuk meg a két kör metszéspontján átmenő szelő egyenes egyenletét!
- Határozzuk meg az $(x+4)^2 + (y+7)^2 = 45$ egyenletű kör azon érintőinek egyenletét, amelyeknek iránytangense $-\frac{1}{2}$!
- Írjuk fel a $(-4; -3)$ középpontú $5\sqrt{2}$ sugarú kör $P(11; -8)$ pontból húzható érintőinek az egyenletét! Mekkora szöget zár be egymással a két érintő?

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

10. A parabola (Kiegészítő, emelt szintű tananyag)



1. példa Tekintsük azon körök középpontjainak halmazát, amelyek átmennek az $F(0;1)$ ponton, és érintik az $y = -1$ egyenletű v egyenest! Határozzuk meg ennek a ponthalmaznak az egyenletét!

Megoldás:

Készítsünk vázlatrajzot! A körök (C) középpontja sugárnyi távolságra van az F ponttól is és a v egyenestől is. Más pontok nem is lehetnek a vizsgált körök középpontjai. Tehát egy $C(x;y)$ pont akkor és csak akkor eleme a ponthalmaznak, ha

$$(1) FC = d(C;v).$$

Az origó nyilván eleme a vizsgált ponthalmaznak. Az összes többi pontnak az x tengely „fölött” kell lennie, hiszen a körök sugara nem lehet kisebb $\frac{1}{2}$ -nél. Így a körök középpontjának ordinátája csak nemnegatív lehet (10.1. ábra).

Koordinátákkal kifejezve az (1) összefüggést:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = y+1.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2.$$

Végezzük el a műveleteket, majd hajtsuk végre a lehetséges összevonásokat!

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1,$$

$$x^2 = 4y.$$

Ezzel fölirtuk a vizsgált ponthalmaz egyenletét.

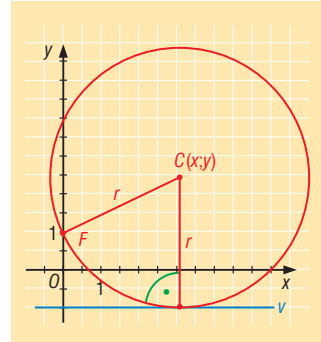


Vegyük észre, hogy az 1. példában szereplő ponthalmazt egyszerűbben is meg lehet adni: az F ponttól és a v egyenestől egyenlő távolságra levő pontok halmaza. Az ilyen módon megadott ponthalmazt nevezzük parabolának.

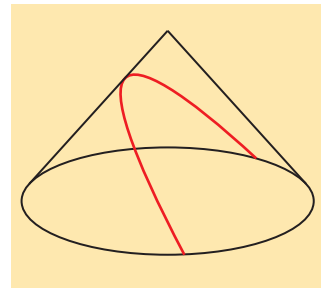


Definíció A **parabola** egy egyenestől és egy rá nem illeszkedő ponttól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a síkban.

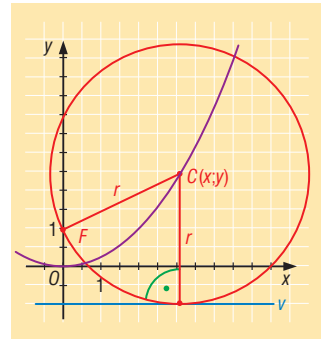
A megadott egyenest a parabola **vezéregyenesének** nevezzük, a rá nem illeszkedő megadott pontot a parabola **fókuszá**nak (vagy fókuszpontjának) nevezzük, a fókuszpont és a vezéregyenes távolsága pedig a parabola **paramétere**. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy a parabola tengelyesen szimmetrikus a fókuszán át a vezéregyenesre állított merőleges egyenesre. Ezt az egyenest a parabola tengelyének nevezzük,



10.1. ábra Adott ponton átmenő, adott egyenest érintő kör



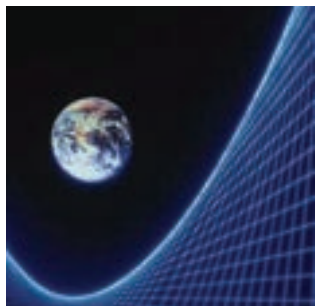
10.2. ábra A parabola mint kúpszelet



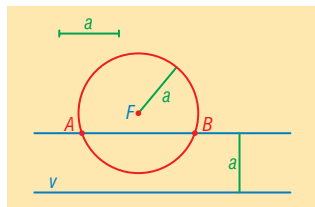
10.3. ábra Parabola



10.4. ábra Parabolaantenna



10.5. ábra Parabola az űrben



10.6. ábra Parabolapontok szerkesztése

és a parabola egyetlen pontját, amelyik erre illeszkedik, a parabola tengelypontjának hívjuk.

Az első példában kapott egyenlet tehát egy parabola egyenlete, melynek fókuszpontja az $F(0;1)$ pont, vezéregyenes a $v: y = -1$ egyenletű egyenes, paramétere pedig 2 egység. A parabola tengelye az y tengely, a tengelypontja pedig az origó.



Vegyük észre, hogy ha az 1. példát kicsit általánosabban írjuk föl, alig kell valamit változtatnunk az 1. példában alkalmazott levezetésen!

Vegyük fel az origótól egyenlő távolságra az F fókuszpontot az y tengely pozitív felén és a v vezéregyenes, a paraméter legyen p ! Így a fókuszpont koordinátái: $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, a vezéregyenes egyenlete: $v: y = -\frac{p}{2}$. Az

$FC = d(C; v)$ egyenlet koordinátákkal kifejezve:

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Végezzük el a műveleteket, majd hajtuk végre a lehetséges összevonásokat!

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4},$$

$$(2) \quad x^2 = 2py.$$

Ez az egyenlet tehát egy origó tengelypontú, y tengely szimmetriatengelyű parabola egyenlete, melynek fókusza az y tengely pozitív felére illeszkedik.



2. példa Szerkesszünk parabolapontokat, ha adott a parabola vezéregyenes és fókusza!

Megoldás:

Már az első példában is láttuk, hogy a fókuszról és az egyenestől való egyenlő távolság nem lehet a paraméter felénél kisebb, egyébként viszont tetszőleges (10.6. ábra).

Vegyünk fel tehát egy (a paraméter felénél nagyobb) távolságot!

Szerkesszünk az F pont körül ilyen sugarú kört! Ennek kell a metszéspontját vennünk a vezéregyenesről ugyanilyen távolságra lévő párhuzamossal.

(Két ilyen párhuzamos van, de a vezéregyenes fókuszról eltérő oldalára eső párhuzamosnak nem lesz metszéspontja az előbb leírt körrel.) Két ilyen metszéspont keletkezik a parabola tengelyére szim-

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

metrikusan. Ezt az eljárást tetszőlegesen sokszor megismételhetjük, de mivel az euklideszi szerkesztés csak véges sok pontot enged meg, így biztosan nem tudjuk megszerkeszteni a parabola minden pontját.



9. és 10. osztályban a másodfokú függvényekre azt mondtuk, a képük parabola. Nézzük most a legegyszerűbb másodfokú függvényt!



3. példa Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^2$ hozzárendelési szabályú valós függvény képe parabola!

Megoldás:

Mivel valós függvényről van szó, így a görbe pontjainak első koordinátája tetszőleges valós szám lehet. A hozzá tartozó második koordináta $y = x^2$. Ez tehát a görbe egyenlete. Ehhez pedig meg tudjuk találni azt a p értéket, amellyel $x^2 = 2py$ alakúra hozható az egyenlet. Ez $p = \frac{1}{2}$ esetén teljesül. Tehát egy olyan parabola lesz a képe az f függvénynek, melynek tengelypontja az origó, paramétere $\frac{1}{2}$, fókuszpontja az $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ pont és vezéregyenes az $y = -\frac{1}{4}$ egyenletű egyenes.



4. példa Határozzuk meg annak a parabolának az egyenletét, amelynek vezéregyenes az $y = 4$ egyenletű egyenes, fókuszpontja az $F(3;8)$ pont!

Megoldás:

A tengelypont koordinátáit könnyen meghatározhatjuk: a szimmetriatengely párhuzamos az y tengellyel, és illeszkedik az F pontra, így a tengelypont a $T(3;6)$ pont. A paraméter az F pont és a vezéregyenes távolsága: $p = 4$.

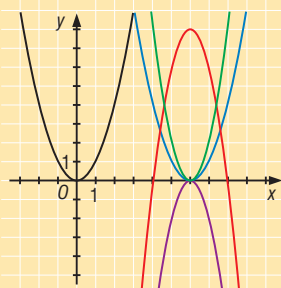
Az olyan parabolák egyenletét már fel tudnánk írni, amelyeknek tengelypontja az origó, szimmetriatengelye az y tengely (10.8. ábra). A most vizsgált parabolát éppen ilyen helyzetbe tudnánk hozni, ha eltolnánk a $\overline{TO}(-3; -6)$ vektorral (ahol O az origót jelöli). Így a parabola egy $P(x; y)$ pontjának az eltoltja a $P'(x-3; y-6)$ pont lesz. Ez már az origó tengelypontú, s szintén $p = 4$ paraméterű parabolára illeszkedő pont. A P' pont koordinátái tehát igazgá teszik az origó tengelypontú, y tengely szimmetriatengelyű parabola egyenletét:

$$(x-3)^2 = 2 \cdot 4 \cdot (y-6),$$

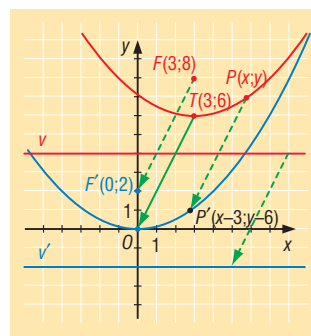
$$(x-3)^2 = 8(y-6).$$

Ezzel megkaptuk az eredeti parabola x és y koordinátája közötti összefüggést, vagyis a keresett egyenletet.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^2 \\ f_1(x) &= (x-6)^2 \\ f_2(x) &= 2(x-6)^2 \\ f_3(x) &= -2(x-6)^2 \\ f_4(x) &= f(x) = -2(x-6)^2 + 8 \end{aligned}$$



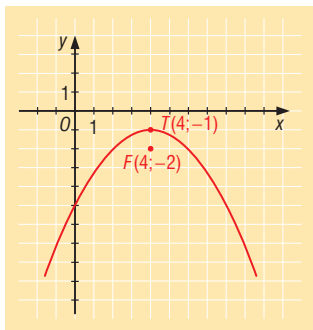
10.7. ábra A másodfokú függvények képe a parabola



10.8. ábra Parabola eltolva



10.9. ábra Parabola egy épületen



10.10. ábra Negatív irányba nyíló parabola



Vegyük észre, hogy ha a tengelypont a $T(3;6)$ helyett a $T(u;v)$ pont, akkor a megfelelő koordináták helyére u -t és v -t helyettesítve általánosabb egyenletet kapunk a parabolára.

$$(x-u)^2 = 2p(y-v) \quad (v > 4)$$

Ez az y tengellyel párhuzamos tengelyű $T(u;v)$ tengelypontú, p paraméterű „fölfelé nyíló” parabola egyenlete.

Ha „lefelé nyíló”, akkor egyenlete: $(x-u)^2 = -2p(y-v)$.

Ezek az egyenletek is kétismeretlenes másodfokú egyenletek, csak más feltételekkel, mint a kör esetében. Az egyik ismeretlen csak első hatványon szerepel bennük.



5. példa Egy parabola egyenlete: $x^2 - 8x + 4y + 20 = 0$.

Határozzuk meg a parabola paraméterét, fókuszpontja koordinátáit és vezéregyenesének egyenletét!



10.11. ábra Parabolaantenna

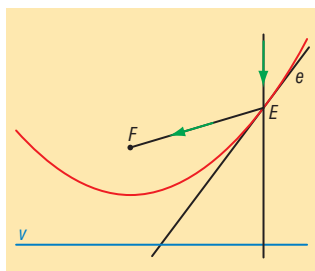
Megoldás:

Törekedjünk rá, hogy algebrailag olyan alakot öltjön az egyenlet, mint a fentebb meghatározott általános parabola-egyenletek.

$$x^2 - 8x + 16 = -4y - 4$$

$$(x-4)^2 = -2 \cdot 2(y+1)$$

Ebből kiderül, hogy a parabola tengelye az y tengellyel párhuzamos egyenes, leolvasható a tengelypont két koordinátája $T(4; -1)$ és a paraméter $p = 2$. Azt is látjuk az y negatív együtthatójából, hogy „lefelé” nyíló paraboláról van szó. Tudjuk továbbá, hogy a tengelypont felezi a fókuszpontból a vezéregyenesre állított merőleges szakaszt, a fókuszpont is és a vezéregyenes is félparaméternyi távolságra vannak tőle. A fókuszpont tehát $F(4; -2)$, a vezéregyenes egyenlete pedig $y = 0$, vagyis maga az x tengely.



10.12. ábra A hullámok a fókuszpontba gyűlnek



A parabola kifejezést napjainkban gyakran az antennával összekapcsolva szoktuk hallani, vagy használni. A parabolaantenna (helyesebben forgáspároloid antennának kellene hívni) arról kapta nevét, hogy egy olyan forgásszimmetrikus felület, amelynek minden tengelymetszete parabola. És azért érdemes használni, mert a műholdakról a felületére érkező elektromágneses hullámokat egy pontba veri vissza (ezzel föl erősítve a jelet): a fókuszpontba (10.11. és 10.12. ábra).

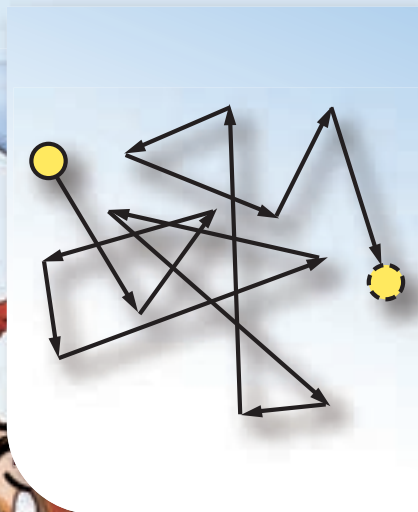


Oldjuk meg!

- Határozzuk meg az $F(-5;6)$ fókuszpontú és $T(-5;-2)$ tengelypontú parabola paraméterét, vezéregyenesének és magának a parabolának az egyenletét!
- Milyen hosszúságú húrt metsz ki az $(x+2)^2 = y-3$ egyenletű parabolából az $x+y=3$ egyenletű egyenes?

V. fejezet

Valószínűség-számítás, statisztika



Van szerencsém!?



1. Események, műveletek események között

1.1. Ismétlés



1.1. ábra Ha a pirosra és a fekete-re is teszünk, akkor biztosan nyerünk?



1.2. ábra Számít, hogy különböző a színű?

{1;1} {1;2} {1;3} {1;4} {1;5} {1;6}
{2;1} {2;2} {2;3} {2;4} {2;5} {2;6}
{3;1} {3;2} {3;3} {3;4} {3;5} {3;6}
{4;1} {4;2} {4;3} {4;4} {4;5} {4;6}
{5;1} {5;2} {5;3} {5;4} {5;5} {5;6}
{6;1} {6;2} {6;3} {6;4} {6;5} {6;6}

1.3. ábra Az 1. példa kimenetelei

{1;1} {1;2} {1;3} {1;4} {1;5} {1;6}
{2;1} {2;2} {2;3}
{3;1} {3;2}
{4;1}
{5;1}
{6;1}

1.4. ábra A dobott számok szorzata 6-nál nem nagyobb

Mint arról már 10. osztályban is szóltunk, a valószínűség-számítás gyakorlati problémák tanulmányozása során fejlődött ki, hisz gyökerei a szerencsejátékok vizsgálatáig nyúlnak vissza. A szerencsejátékokban – pl. egy szabályos pénzérme vagy egy szabályos játékkocka feldobása, kártyajátékok, rulett – olyan jelenségek játszanak fontos szerepet, melyek eredményeit (**kimeneteleit**) nem tudjuk biztosan meghatározni előre. Az ilyen jelenségeket **véletlen jelenségeknek** nevezzük. Ha egy véletlen jelenséget többször egymás után előidézzük, akkor **valószínűségi kísérletet** hajtunk végre.



1. példa Feldobunk egy kék és egy piros dobókockát.

- Adjuk meg a véletlen jelenség lehetséges kimeneteleinek halmazát!
- Adjuk meg a lehetséges kimenetek közül azoknak a halmazát, melyek esetén a dobott számok szorzata 6-nál nem nagyobb!

Megoldás:

- Mivel a két dobókocka különböző színű, ezért nem mindegy, hogy melyik számot melyik kockán dobjuk. Mivel a kék és piros kockán egymástól függetlenül hat-hat eredményt kaphatunk, így a lehetséges kimenetek száma $6 \cdot 6 = 36$. Ezeket táblázatba foglaltuk (1.3. ábra).
- A dobott számok szorzata az 1.4. ábrán látható kimenetek esetén lesz legfeljebb 6.



Az előző feladat a) részében megkaptuk a kísérlethez tartozó elemi események halmazát. Ezt a halmazt nevezzük **eseménytérnek**.



Definíció A kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmazát **eseménytérnek** nevezzük. Jele T .

A b) részben az eseménytér egy részhalmazát adtuk meg. Ezt a halmazt eseménynek nevezzük.



Definíció Az eseménytér részhalmazait **eseményeknek** nevezzük. Az eseménytér egyelemű részhalmazai az **elemi események**.

Az eseményeket általában nagybetűvel jelöljük.

$$P = \frac{k}{n}$$



Definíció Azt az eseményt, amely mindenképpen bekövetkezik, **biztos eseménynek**, amely sohasem következik be, **lehetetlen eseménynek** nevezzük. A biztos esemény jele az I , a lehetetlen eseményé a $\emptyset$.

1.2. Események egyenlősége, műveletek események között



2. példa Egy szabályos pénzérmét négyszer egymás után feldobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy a négy dobás között legfeljebb egy fej van, B azt, hogy legalább három írás, C azt, hogy pontosan három írás, és D azt, hogy legalább két fej!

- Hány elemű halmaz a kísérlethez tartozó eseménytér?
- Adjuk meg a kísérlethez tartozó elemi események halmazát!
- Adjuk meg az A eseményhez tartozó elemi események halmazát!
- Adjuk meg a B eseményhez tartozó elemi események halmazát!
- Adjuk meg a C eseményhez tartozó elemi események halmazát!
- Adjuk meg a D eseményhez tartozó elemi események halmazát!

Megoldás:

a) Az eseményteret négyhosszúságú fej-írás sorozatok alkotják. Mivel mind a négy helyre kerülhet írás is és fej is, ezért a lehetséges kimenetek száma $2^4 = 16$.

b) A kísérlethez tartozó eseménytér:

$$T = \{FFFF; FFFI; FFIF; FIFF; IFFF; FFII; FIFI; FIIF; IFFI; IFIF; IIFF; FIIF; IFII; IIFI; IIIF; IIIF\}$$

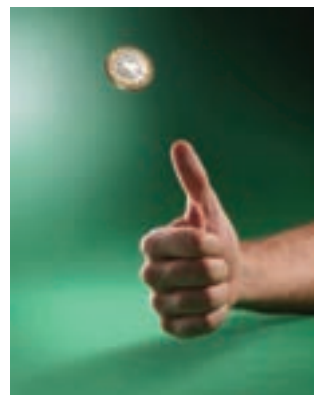
Itt F = fej, I = írás.

$$c) A = \{IIIF; FIIF; IFII; IIFI; IIIF\}$$

$$d) B = \{FIIF; IFII; IIFI; IIIF; IIIF\}$$

$$e) C = \{FIIF; IFII; IIFI; IIIF\}$$

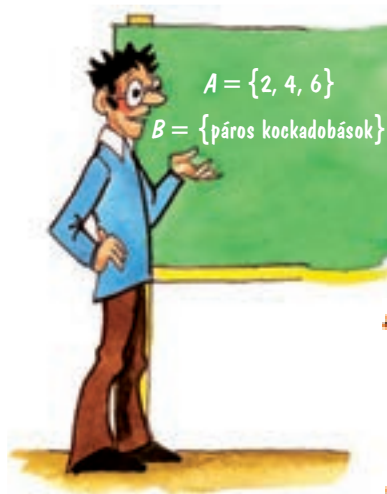
$$f) D = \{FFFF; FFFI; FFIF; FIFF; IFFF; FFII; FIFI; FIIF; IFFI; IFIF; IIFF\}$$



1.5. ábra Pénzfeldobás



1.6. ábra Esemény tér, ahol az események zajlanak



1.6. ábra Egyenlő események



Vegyük észre, hogy az A és B eseményt ugyanazok az elemi események valószínűsítják meg! Ez azt jelenti, hogy a kísérlet bármely kimenetelénél vagy mindkettő bekövetkezik, vagy egyik sem. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a **két esemény egyenlő**, azaz $A = B$. Az is teljesül, hogy $C \subseteq A$, ami azt jelenti, hogy valahányszor a C esemény bekövetkezik, mindannyiszor az A esemény is bekövetkezik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy **C esemény maga után vonja az A eseményt**.



Definíció Két esemény egyenlő akkor és csak akkor, ha a kísérlet bármely kimenetele esetén vagy mindkét esemény bekövetkezik, vagy egyik sem.



Definíció Az A esemény maga után vonja a B eseményt, ha teljesül, hogy valahányszor az A esemény bekövetkezik, mindannyiszor a B is bekövetkezik.

Az előző két definícióból következik az alábbi tétel.



Tétel Ha A és B esemény a T eseménytér két olyan eseménye, melyre teljesül, hogy $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.

A 2. példában szereplő D esemény megadásából kiderül, hogy az pontosan akkor következik be, mikor az A esemény nem következik be. A D esemény az A esemény **komplementere**.



Definíció Legyen T egy eseménytér, A pedig tetszőleges esemény T -n! Azt az eseményt, amely pontosan akkor következik be, mikor az A esemény nem következik be, az A esemény komplementérének nevezzük. Jelölés: $\bar{A}$

A definíció egyszerű következményei az alábbi állítások.



Tétel Legyen T egy eseménytér, A pedig tetszőleges esemény T -n!

- ★ Az A esemény komplementérének komplementere az A esemény, azaz $\bar{\bar{A}} = A$
- ★ A biztos esemény komplementere a lehetetlen esemény, azaz $\bar{I} = \emptyset$
- ★ A lehetetlen esemény komplementere a biztos esemény, azaz $\bar{\emptyset} = I$



1.6. ábra Maga után von

$$P = \frac{k}{n}$$



3. példa Egy szabályos dobókockát egyszer feldobunk. A jelentse azt az eseményt, hogy páros számot, B azt, hogy prímszámot, C azt, hogy 1-nél nagyobb páratlan számot és D azt, hogy 5-tel osztható számot dobunk!

a) Adjuk meg a kísérlethez tartozó eseményteret!

b) Adjuk meg az $\bar{A}$ eseményt!

c) A felsorolt események közül melyek között áll fenn, hogy az egyik maga után vonja a másikat?

Megoldás:

a) Mivel egy szabályos dobókocka feldobásakor az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat kaphatjuk eredményként, ezért ezek a lehetséges kimenetek. Így az eseményter $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) Mivel az A esemény az, hogy páros számot dobunk, ezért az $\bar{A}$ esemény akkor és csak akkor következik be, ha páratlan számot dobunk, azaz $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$.

c) Mielőtt erre a kérdésre válaszolnánk, adjuk meg az egyes eseményekhez tartozó elemi események halmazát!

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{2, 3, 5\}, C = \{3, 5\}, D = \{5\}$$

Ez alapján már könnyen láthatjuk, hogy $D \subseteq C$ és $C \subseteq B$ és $D \subseteq B$.



Az előzők alapján nem meglepő az alábbi tétel.



Tétel Legyen T egy eseményter, A, B, C pedig tetszőleges esemény T -n! Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$.

A Venn-diagramon szemléltetett halmazok esetében

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}, A \cap B = \{2\}, A \cap C = \emptyset \text{ és } A \setminus B = \{4, 6\}.$$

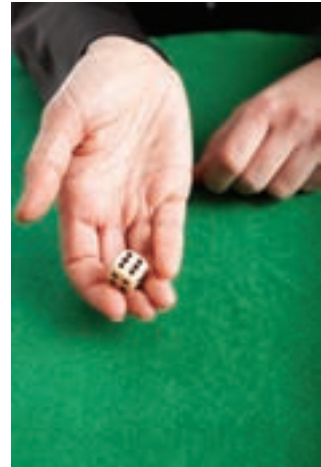
Mivel az eseményteret és az eseményeket halmazelméleti úton definiáltuk, ezért a halmazok közötti műveletek felhasználásával definiálhatjuk az események közötti műveleteket.

Az alábbi definícióknak szereplő A és B esemény egy T eseményter két tetszőleges eseménye.

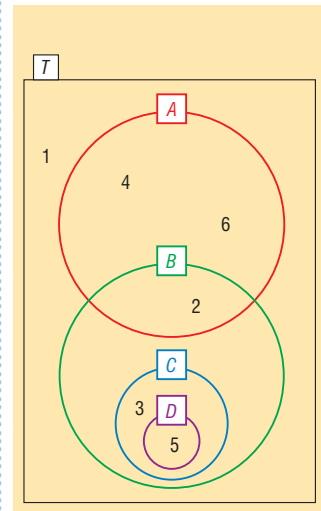


Definíció Események **összege**: $A + B = A \cup B$. Tehát az A és B esemény **összege** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, mikor A vagy B bekövetkezik. Jelölés: $A + B$.

Pl.: A 3. példában az $A + B$ esemény azt jelenti, hogy páros számot vagy prímszámot dobunk, azaz $A + B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.



1.7. ábra Kockadobás



1.8. ábra A feladatban szereplő halmazok szemléltetése Venn-diagramon



1.9. ábra „Hátha most páros prímszámot dobok!”



Definíció Események **szorzata**: $A \cdot B = A \cap B$. Tehát az A és B események **szorzata** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, mikor A és B bekövetkezik. Jelölés $A \cdot B$.

Pl.: A 3. példában az $A \cdot B$ esemény azt jelenti, hogy páros számot és prímszámot dobunk, azaz $A \cdot B = \{2\}$.



Definíció Az A és B esemény egymást kizárja, ha egyszerre nem következhet be, azaz $A \cdot B = \emptyset$.

Pl.: A 3. példában az A és C egymást kizáró események.



Definíció Események **különbsége**: $A - B = A \setminus B$. Tehát az A és B események **különbsége** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, mikor A bekövetkezik, de B nem. Jelölés $A \setminus B$.

Pl.: A 3. példában $A - B$ esemény azt jelenti, hogy olyan páros számot dobunk, amely nem prímszám, azaz $A - B = \{4, 6\}$.

Ez alapján $\overline{A} = T - A$.

Mivel az események közötti műveleteket visszavezettük a halmazok közötti műveletekre, ezért a 9. osztályban tanultak alapján igazak az alábbi műveleti tulajdonságok:



1.10. ábra Egymást kizáró események



Tétel Legyen T egy eseménytér, A, B, C pedig tetszőleges esemény T -n!

- ★ $A + B = B + A$ (Az események közötti összeadás művelete **kommutatív** művelet.)
- ★ $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (Az események közötti összeadás művelete **asszociatív** művelet.)
- ★ $A + A = A$
- ★ $A + \emptyset = A$ (A lehetetlen esemény **egységelem** az összeadásra nézve.)
- ★ $A \cdot B = B \cdot A$ (Az események közötti szorzás művelete **kommutatív** művelet.)
- ★ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$ (Az események közötti szorzás művelete **asszociatív** művelet.)
- ★ $A \cdot A = A$
- ★ $A \cdot \emptyset = \emptyset$ (A lehetetlen esemény **zéróelem** a szorzásra nézve.)
- ★ $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
- ★ $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ (de Morgan-azonosságok)



1.11. ábra Augustus de Morgan

$$P = \frac{k}{n}$$



4. példa A jelentse azt az eseményt, hogy egy csomag magyar kártyából kihúzott lap zöld, a B azt, hogy figura, C azt, hogy alsó. Mit jelent az

- a) $A+B$ b) $A \cdot B$ c) $B+C$
d) $B \cdot C$ e) $A \cdot C$ f) $A-B$ esemény?

Megoldás:

a) Az $A+B$ esemény azt jelenti, hogy zöld lapot vagy figurát húzunk, azaz

$$A+B = \{Z7, Z8, Z9, Z10, ZA, ZF, ZK, ZÁ, PA, PF, PK, PÁ, MA, MF, MK, MÁ, TA, TF, TK, TÁ\},$$

ahol a zárójelben a megfelelő lapok rövidítései szerepelnek.

b) Az $A \cdot B$ esemény azt jelenti, hogy zöld lapot és figurát húzunk, azaz $A \cdot B = \{ZA, ZF, ZK, ZÁ\}$.

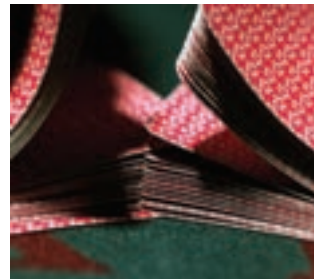
c) Mivel az alsó egyben figura is, ezért $C \subseteq B$, így $B+C = B$.

d) Az előzőek miatt $B \cdot C = C$.

e) Az $A \cdot C$ azt jelenti, hogy zöld lapot és alsót húzunk, azaz a zöld alsót húzzuk.

$$A \cdot C = \{ZA\}.$$

f) Az $A-B$ esemény azt jelenti, hogy olyan zöld lapot húzunk, amely nem figura, azaz $A-B = \{Z7, Z8, Z9, Z10\}$.



1.12. ábra Keverjük a kártyát



1.13. ábra A magyar kártya lapjai



Oldjuk meg!

1. Adjuk meg az alábbi eseményekhez tartozó elemi események halmazát és az események komplementerét!

A : egy érmét háromszor egymás után feldobunk, és lesz a dobások között legalább két fej.

B : egy szabályos dobókockával prímszámot dobunk.

C : az 1, 2, 3 számok véletlen sorrendje esetén az 1-es és a 2-es egymás mellé kerül.

D : egy szabályos dobókockával 3-nál kisebb számot dobunk.

E : egy szabályos dobókockával köbszámot dobunk.

2. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy kockával kétszer egymás után dobva és a kapott számokat egymás mellé írva a keletkező kétjegyű szám 3-mal osztható. Jelentse B azt az eseményt, hogy egy kockával kétszer egymás után dobva és a kapott számokat egymás mellé írva a keletkező kétjegyű szám 2-vel osztható. Mit jelent az

- a) $A+B$ b) $A \cdot B$ c) $A-B$ d) $\overline{A}$ e) $\overline{A+B}$ f) $\overline{A \cdot B}$

esemény?

3. Legyen A az az esemény, hogy egy pakli magyar kártyából véletlenszerűen kihúzott lap piros, B az az esemény, hogy zöld, C pedig az, hogy figura. Mit jelent az

- a) $(A+B) \cdot C$ b) $A+B \cdot C$ c) $A \cdot B+C$ d) $A \cdot (B+C)$
e) $A \cdot B \cdot C$ f) $\overline{A+B \cdot C}$ g) $\overline{A \cdot B \cdot C}$ esemény?



2. Klasszikus valószínűségi modell, visszatéves mintavétel

2.1. Események valószínűsége



2.1. ábra A nagy számok tapasztalati törvénye

10. osztályban már foglalkoztunk az események valószínűségével, melyhez tapasztalati úton jutottunk el. Ha egy kísérletet n -szer végrehajtunk, és közben egy esemény k -szor bekövetkezik, akkor a k -t az esemény **gyakoriságának**, a $\frac{k}{n}$ hányadost az esemény **relatív gyakoriságának** nevezzük. Minél többször végezzük el a kísérletet, annál nagyobb eséllyel lesz az esemény relatív gyakorisága egy az eseményre jellemző, $[0, 1]$ intervallumba eső szám „közelében”. Korábban ezt a számot neveztük az esemény **valószínűségének**. Így tapasztalat útján kaptunk egy nem túl pontos, de szemléletes valószínűségfogalmat. A továbbiakban nézzük meg, hogy a gyakorlati tapasztalatok alapján milyen tulajdonságokat várunk el a valószínűségtől!



1. példa Dobjunk fel egy szabályos dobókockát százharmincöttször! Az A esemény jelentse azt az eseményt, hogy 1-est, a B azt, hogy 2-est, a C azt, hogy 3-nál kisebbet, D azt, hogy 3-nál nem kisebbet, az E azt, hogy 7-nél kisebb pozitív egész számot és végül az F azt, hogy negatív számot dobunk!

Adjuk meg 30, 60, 90 és 135 dobás esetén az előző események gyakoriságát és relatív gyakoriságát!

Megoldás:

Egy alkalommal elvégezve a kísérletet az alábbi eredmények adódtak. Készítsünk táblázatot!

n	k_A	$\frac{k_A}{n}$	k_B	$\frac{k_B}{n}$	k_C	$\frac{k_C}{n}$	k_D	$\frac{k_D}{n}$	k_E	$\frac{k_E}{n}$	k_F	$\frac{k_F}{n}$
30	5	0,16	5	0,16	10	0,3	20	0,6	30	1	0	0
60	11	0,183	9	0,15	20	0,3	40	0,6	60	1	0	0
90	16	0,17	14	0,15	30	0,3	60	0,6	90	1	0	0
135	27	0,2	26	0,19259	53	0,39259	82	0,607	135	1	0	0

2.2. ábra A kísérleti eredmények

Mivel $C = A + B$ és $A \cdot B = \emptyset$, azaz A és B egymást kizáró események, így nem meglepő, hogy $k_C = k_A + k_B$ és $\frac{k_C}{n} = \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n}$. A C és D események egymás komplementerei. Ennek megfelelő a tapasztalatunk is,

$$P = \frac{k}{n}$$

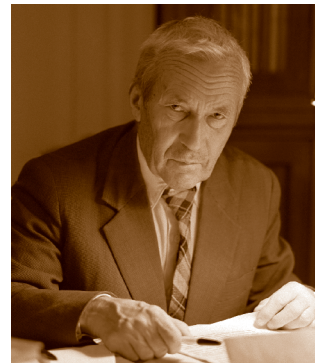
ugyanis $k_D = n - k_C$ és $\frac{k_D}{n} = 1 - \frac{k_C}{n}$. Az E esemény az eseményteret adja, azaz biztos esemény, melynek relatív gyakorisága 1, míg F lehetetlen esemény, melynek relatív gyakorisága 0.



Az előző példa is sugallja, hogy az alábbi tulajdonságokat várjuk el a valószínűsétől:

- ▶ Bármely esemény valószínűsége $[0, 1]$ intervallumba eső szám legyen, azaz $0 \leq P(A) \leq 1$!
- ▶ A biztos esemény valószínűsége 1 legyen, azaz $P(I) = 1$!
- ▶ Ha A és B egymást kizáró események, akkor összegük valószínűsége egyenlő valószínűségeik összegével, azaz $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
- ▶ A lehetetlen esemény valószínűsége 0, azaz $P(\emptyset) = 0$.
- ▶ Ha A egy tetszőleges esemény, akkor $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

A valószínűség fogalmának precíz meghatározása Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903–1987) nevéhez fűződik. Ő az első három tulajdonságot axiómaként fogalmazta meg, melyekre támaszkodva be lehet bizonyítani a maradék két tulajdonságot.



2.3. ábra Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903–1987)

2.2. A valószínűség-számítás klasszikus modellje

10. osztályban már jó néhány példán keresztül megismerkedtünk a valószínűség-számítás klasszikus modelljével. Az alábbiakban elevenítünk fel az ott tanultakat!



2. példa Egy szabályos dobókockát kétszer egymás után feldobunk, majd a dobások eredményét leírjuk egymás mellé. Mekkora annak a valószínűsége, hogy olyan kétjegyű számot kapunk, melynek első számjegye kisebb a másodiknál?

Megoldás:

Legyen A a vizsgált esemény! A kísérlethez tartozó eseménytér elemi eseményei olyan rendezett számpárok, melyek első tagja az első dobás, második tagja a második dobás eredménye. Mivel mindkét dobás kimenetele hatféle lehet, így az eseményteret 36 elemi esemény alkotja. Egy szabályos dobókocka ugyanakkora eséllyel fordul mindegyik oldalára, így mind a 36 elemi eseménynek ugyanakkora a valószínűsége. Az ilyen esetekben alkalmazhatjuk a **valószínűség-számítás klasszikus modelljét**. Ennek értelmében, ha az eseménytérhez tartozó elemi események száma n , és az eseménytérhez tartozó A eseményt k elemi

{1;1}	{1;2}	{1;3}	{1;4}	{1;5}	{1;6}
{2;1}	{2;2}	{2;3}	{2;4}	{2;5}	{2;6}
{3;1}	{3;2}	{3;3}	{3;4}	{3;5}	{3;6}
{4;1}	{4;2}	{4;3}	{4;4}	{4;5}	{4;6}
{5;1}	{5;2}	{5;3}	{5;4}	{5;5}	{5;6}
{6;1}	{6;2}	{6;3}	{6;4}	{6;5}	{6;6}

A zöld színnel jelölt részben találhatók az A eseményt megvalósító elemi események. Ezek száma $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

2.4. ábra A 2. példa kimenetelei



2.5. ábra Három kocka

esemény valósítja meg, akkor $P(A) = \frac{k}{n}$. Határozzuk meg, hogy jelen esetben mennyi a k értéke! Mivel az egyik számjegy nagyobb, mint a másik, így a két számjegy különböző. Bármely ilyen számpár esetén azoknak csak egy sorrendje felel meg a feladatnak. Tehát azt kell meghatároznunk, hogy hányféleképpen választhatunk ki a 6 darab számból 2 különbözőt. A kiválasztások száma $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Az A esemény valószínűsége $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.



Ha egy kísérlethez tartozó elemi események száma véges, és azok egyenlő esélyűek, akkor egy A esemény valószínűségét a $P(A) = \frac{k}{n}$ képlet adja meg, ahol k az A eseményt megvalósító, n pedig az eseményteret alkotó elemi események száma. Ez a **valószínűség-számítás klasszikus modellje**.



3. példa Három különböző színű szabályos dobókockával dobunk, majd a kapott számokat összeadjuk. 9-es vagy 10-es összeget kaphatunk nagyobb valószínűséggel?

Legyen A az az esemény, hogy a kapott összeg 9, B pedig az, hogy 10. Az eseménytér elemi eseményeinek a száma (szokás ezt összes esetben nevezni) $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, melyek mindegyikének ugyanakkora a valószínűsége, tehát alkalmazhatjuk a klasszikus modellt. Készítsünk egy-egy táblázatot (2.7. ábra), amelyben feltüntetjük, hogy a 9-es és a 10-es összeg hányféleképpen állítható elő három „kockaszám” összegeként, figyelembe véve, hogy a kockák különböző színűek.

Megoldás:

A dobott számok összege 9.	Elemi események száma	A dobott számok összege 10.	Elemi események száma
1+2+6	6	1+3+6	6
1+3+5	6	1+4+5	6
1+4+4	3	2+2+6	3
2+2+5	3	2+3+5	6
2+3+4	6	2+4+4	3
3+3+3	1	3+3+4	3
$\Sigma: 6$	$\Sigma: 25$	$\Sigma: 6$	$\Sigma: 27$



2.6. ábra 9 vagy 10?

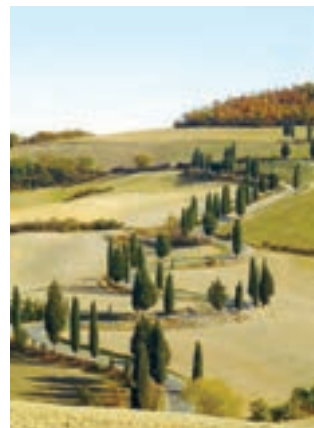
2.7. ábra A kísérlet jellemzői

$$P = \frac{k}{n}$$

Így $P(A) = \frac{25}{216}$ és $P(B) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$, tehát 10-es összeget kaphatunk nagyobb valószínűséggel.



10. osztályban már említettük Toscana hercegeinek problémáját, ugyanis megfigyelései szerint három egyforma kockával dobva gyakrabban jön ki a 10-es összeg, mint a 9-es, pedig mindkettő hatféleképpen áll elő „kockaszámok” összegeként. Ez is jelzi, hogy nem mindegy, milyen matematikai modellt alkalmazunk a gyakorlati problémák leírására. *A valóságban két kocka mindig különböző, függetlenül attól, hogy meg tudjuk-e különböztetni azokat egymástól.*



2.8. ábra Toscanai táj



4. példa Egy 32 lapos magyar kártyából kihúzzunk egy lapot.

- Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lap zöld?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lap figura?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lap zöld figura?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lap zöld vagy figura?

Megoldás:

a) Jelöljük A -val azt az eseményt, hogy a kihúzott lap zöld. Mivel bármelyik lapot ugyanakkora valószínűséggel húzhatjuk, alkalmazhatjuk a klasszikus modellt. Az összes eset száma 32. Mivel 8 zöld lap van, azért

a kedvező esetek száma 8. Így $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

b) Jelöljük B -vel azt az eseményt, hogy a kihúzott lap figura. Most is alkalmazhatjuk a klasszikus modellt. Az összes eset száma 32. Mivel 16

figurás lap van, azért a kedvező esetek száma 16. Így $P(B) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

c) Ez az esemény az A és B események szorzata, mint arról az előző lecke 4. példájában már meggyőződünk. A kedvező esetek száma 4, az

összes eset 32, így a klasszikus modell alapján $P(A \cdot B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

d) Ez az esemény az A és B események összege, mint arról az előző lecke 4. példájában is meggyőződünk. A kedvező esetek száma 20, az összes

esetek száma 32, így a klasszikus modell alapján $P(A + B) = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.



Vegyük észre, hogy ha az 5. példa a) és b) részében kapott számok összegéből kivonjuk a c) részben kapott számot, akkor a d) rész eredményéhez jutunk, azaz $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$. Bizonyítható az alábbi tétel.



2.9. ábra Klasszikus modell



2.10. ábra Húzzunk egy számot a kalapból!



2.11. ábra A kártyalapok helyettesíthetik a cetliket

A esemény			
1	2	3	4
1	2	3	5
1	1	2	1
⋮			
B esemény			
3	2	1	4
2	2	3	5
1	5	3	3
⋮			

2.12. ábra Néhány példa az A és B eseményre



Tétel Legyen T egy eseménytér, az A és B tetszőleges események T -n! Ekkor $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$. (A két esemény összegére vonatkozó szitaformula.)



5. példa Öt egyforma cédulára felírjuk az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket, ezután a cetliket beletesszük egy kalapba. Majd egymás után négyszer húzzunk úgy, hogy a cédulákat minden húzás után visszatesszük. A kihúzott számjegyeket a húzás sorrendjében egymás mellé írjuk.

- Mekkora a valószínűsége annak, hogy a négyjegyű szám tartalmaz 2-es számjegyet?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy a négyjegyű szám tartalmaz 3-as számjegyet?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy a négyjegyű szám számjegyei között van 2-es vagy 3-as?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy a négyjegyű szám számjegyei között van 2-es és 3-as?

Megoldás:

a) Legyen A az az esemény, hogy a négyjegyű szám tartalmaz 2-es számjegyet! Mivel minden húzás valószínűsége egyforma, így bármely négyjegyű szám egyforma valószínűséggel jöhet létre. Alkalmazhatjuk a klasszikus modellt. Egyszerűbb a komplementer esemény valószínűségét meghatározni. Az $\bar{A}$ jelenti azt az eseményt, hogy a négyjegyű szám nem tartalmaz 2-est. Az összes eset $5^4 = 625$. Az $\bar{A}$ szempontjából kedvező esetek száma $4^4 = 256$, hisz 2-es nem lehet benne. Így

$$P(\bar{A}) = \frac{4^4}{5^4} = \frac{256}{625} = 0,4096, \text{ így } P(A) = 1 - 0,4096 = 0,5904.$$

b) Legyen B az az esemény, hogy a négyjegyű szám tartalmaz 3-as számjegyet. Az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy $P(B) = 0,5904$.

c) Ezt az eseményt az A és B esemény összegeként kapjuk. Valószínűségét könnyen meghatározhatjuk, a komplementer esemény valószínűségéből. A de Morgan-azonosságok alapján $\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$, ami azt jelenti, hogy nincs benne sem 2-es, sem 3-as. Az ebből a szempontból kedvező esetek száma $3^4 = 81$, így $P(\overline{A+B}) = \frac{81}{625} = 0,1296$. Tehát

$$P(A+B) = 1 - P(\overline{A+B}) = 0,8704.$$

d) Ezt az eseményt az A és B események szorzataként kapjuk. A két esemény összegére vonatkozó szitaformula alapján $P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A+B)$, így $P(A \cdot B) = 2 \cdot 0,5904 - 0,8704 = 0,3104$.

$$P = \frac{k}{n}$$

2.3. Visszatevéses mintavétel



6. példa Hét egyforma cédulára felírjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyeket, ezután a cetliket beletesszük egy urnába. Majd egymás után ötször húzunk úgy, hogy a cédulákat minden húzás után visszatesszük. A kihúzott számjegyeket a húzás sorrendjében egymás mellé írjuk.

Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kapott ötjegyű szám első két számjegye páros, a maradék három páratlan?

Megoldás:

Legyen A az az esemény, hogy az ötjegyű szám első két számjegye páros. Akárcsak az előző feladatban, most is alkalmazhatjuk a klasszikus modellt. Az összes eset száma 7^5 . Mivel az első két helyre páros, a maradék háromra páratlan számjegynek kell kerülnie, valamint három páros és négy páratlan számjegy közül választhatunk, így a kedvező

esetek száma $3^2 \cdot 4^3$. Tehát $P(A) = \frac{3^2 \cdot 4^3}{7^5} = \frac{576}{16807}$. Ezt a valószínű-

séget felírhatjuk az alábbi alakban is: $P(A) = \frac{3^2 \cdot 4^3}{7^5} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\right)^3$. Az

egyes húzások esetén a páros számjegy valószínűsége $\frac{3}{7}$, a páratlan

számjegyé $\frac{4}{7}$. Ha A_1 -gyel, illetve A_2 -vel jelöljük azt az eseményt,

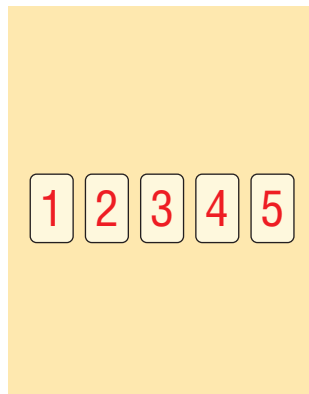
hogy az első, illetve a második helyre páros számjegyet húzunk, valamint A_3 -mal, A_4 -gyel és A_5 -tel azt, hogy a harmadik, negyedik és ötödik helyre páratlan számjegyet, akkor azt kapjuk, hogy

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5).$$

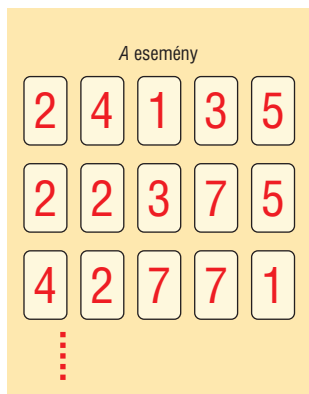
Ilyen esetben azt mondjuk, hogy az A_1, A_2, A_3, A_4 és A_5 események **függetlenek**. Ennek a fogalomnak a véletlen jelenségek körében az felel meg, hogy az egyes események nem befolyásolják egymást, ami nem meglepő, mert itt sincs hatással az egyik húzás a másikra.



Definíció Legyen T egy eseménytér, az A és B pedig olyan esemény a T -n, melyekre fennáll, hogy $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. Az ilyen eseményeket **független eseményeknek** nevezzük.



2.13. ábra Egy lehetséges sorrend



2.14. ábra Néhány példa az A eseményre



2.15. ábra Ők nem függetlenek egymástól

A páros számjegyek száma	Valószínűség
2	$\binom{5}{2} \left(\frac{3}{7}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\right)^3$
3	$\binom{5}{3} \left(\frac{3}{7}\right)^3 \left(\frac{4}{7}\right)^2$
4	$\binom{5}{4} \left(\frac{3}{7}\right)^4 \left(\frac{4}{7}\right)^1$
5	$\binom{5}{5} \left(\frac{3}{7}\right)^5 \left(\frac{4}{7}\right)^0$

2.16. ábra Valószínűségek



7. példa Az előző feladatban mekkora annak a valószínűsége, hogy a kapott szám két számjegye páros, három páratlan?

Megoldás:

Legyen B az az esemény, hogy a leírt ötjegyű szám két számjegye páros, három páratlan! Használjuk fel, hogy az egyes húzások független eseményeknek tekinthetők! Mivel öt hely közül kettőre páros és háromra páratlan számjegynek kell kerülnie, így az ennek megfelelő események száma $\binom{5}{2}$. Ezek az események páronként kizárják egymást, ezért a keresett valószínűség ezen események valószínűségének összege. Mivel mindegyiké ugyanakkora, méghozzá $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\right)^3$, ezért

$$P(B) = \binom{5}{2} \left(\frac{3}{7}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{5760}{16807} \approx 0,3427.$$



8. példa Mekkora a 7. példában annak a valószínűsége, hogy a leírt szám jegyei között legalább két páros számjegy van?

Megoldás:

1. módszer:

Legyen C az az esemény, hogy a leírt ötjegyű számnak legalább két számjegye páros! Ez azt jelenti, hogy lehet pontosan kettő, pontosan három, pontosan négy és pontosan öt. Ezek az események páronként kizárják egymást, így valószínűségeik összege megadja a C esemény valószínűségét. Használjuk fel az előző feladatban látott gondolatmenetet és számításainkat foglaljuk táblázatba (2.16. ábra)!

Ez alapján

$$P(C) = \binom{5}{2} \left(\frac{3}{7}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\right)^3 + \binom{5}{3} \left(\frac{3}{7}\right)^3 \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{3}{7}\right)^4 \left(\frac{4}{7}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{3}{7}\right)^5 \left(\frac{4}{7}\right)^0 \approx 0,7106.$$

2. módszer:

Számítsuk ki a $\bar{C}$ esemény valószínűségét és azt vonjuk ki 1-ből. A $\bar{C}$ esemény azt jelenti, hogy legfeljebb egy páros számjegy van köztük, azaz egy vagy egy sem.

Készítsünk most is táblázatot (2.17. ábra)!

$$P = \frac{k}{n}$$

Ez alapján

$$P(\bar{C}) = \binom{5}{0} \left(\frac{3}{7}\right)^0 \left(\frac{4}{7}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{3}{7}\right)^1 \left(\frac{4}{7}\right)^4 \approx 0,2894, \text{ tehát } P(C) \approx 0,7106.$$



Az előző feladatokban a számjegyek paritása játszott fontos szerepet, ami két állapotot jelent. Ugyanilyen jellegű gyakorlati probléma az, hogy valamely üzemben egy gép által gyártott munkadarabok lehetnek selejtesek, illetve nem selejtesek. Egy minőségi ellenőrzés során nem tudják az összes terméket megvizsgálni, ezért véletlenszerűen kiválasztanak egyet, azt leellenőrzik, majd visszatesszük, ezután megint kiválasztanak egyet és így tovább. Közben számolják a selejteseket és statisztikai módszereket alkalmazva következtetéseket vonnak le arra vonatkozólag, hogy a gép által gyártott termékek hányadrésze selejtes. Mivel az ellenőrzés során úgy veszünk mintát a gyártott termékekből, hogy azokat minden húzás után visszatesszük, ezért hívják az előző feladatokban alkalmazott matematikai modellt **visszatevéses mintavételnek**.



Vegyük észre, hogy a 8. példában látott összefüggésekben mélyen benne gyökerezik az 1. fejezet 3. leckéjében szereplő binomiális tétel. Ugyanis

$$\begin{aligned} & \binom{5}{0} \left(\frac{3}{7}\right)^0 \left(\frac{4}{7}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{3}{7}\right)^1 \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \binom{5}{2} \left(\frac{3}{7}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\right)^3 + \binom{5}{3} \left(\frac{3}{7}\right)^3 \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \\ & + \binom{5}{4} \left(\frac{3}{7}\right)^4 \left(\frac{4}{7}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{3}{7}\right)^5 \left(\frac{4}{7}\right)^0 = \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right)^5 = 1. \end{aligned}$$

A páros számjegyek száma	Valószínűség
0	$\binom{5}{0} \left(\frac{3}{7}\right)^0 \left(\frac{4}{7}\right)^5$
1	$\binom{5}{1} \left(\frac{3}{7}\right)^1 \left(\frac{4}{7}\right)^4$

2.17. ábra Az események valószínűségei

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots \\ &\dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots \\ &\dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \end{aligned}$$

2.18. ábra Idézzük fel a binomiális tételt!



Oldjuk meg!

- Egy dobókockát ötször egymás után feldobunk és a kapott számjegyeket egymás mellé leírjuk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kapott ötjegyű szám
 - páros;
 - osztható 5-tel;
 - osztható 4-gyel;
 - minden számjegye különböző;
 - van benne azonos számjegy;
 - tartalmaz 1-es számjegyet?
- Anna, Béla, Csaba, Dénes és Elemér moziba mennek, ahol véletlenszerűen ülnek le egymás mellé. Mekkora a valószínűsége annak, hogy Anna és Csaba egymás mellé ül?
- A 32 lapos magyar kártyából kihúzzunk három lapot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy
 - mindhárom piros;
 - mindhárom ász;
 - két piros és egy makk van közöttük;
 - két ász és egy király van közöttük;
 - van köztük alsó?



4. Egy dobozban 15 izzó van, melyek 20%-a selejtes. Találomra kivesszünk közülük hármat. Mekkora a valószínűsége annak, hogy
 - a) van köztük selejtes;
 - b) pontosan egy selejtes van köztük;
 - c) mindhárom selejtes?
5. Hat egyforma cédulára felírjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyeket, ezután a cetliket beletesszük egy urnába. Majd egymás után ötször húzunk úgy, hogy a cédulákat minden húzás után visszatesszük. A kihúzott számjegyeket a húzás sorrendjében egymás mellé írjuk.
 - a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a számjegyek között van 1-es?
 - b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a számjegyek között van 4-es?
 - c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a számjegyek között van 2-es vagy 4-es?
 - d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a számjegyek között van 2-es és 4-es?
6. Egy szabályos dobókockát háromszor egymás után feldobunk, majd a kapott számokat összeadjuk. A 7-es vagy a 6-os összegnek nagyobb a valószínűsége?
7. Egy szabályos dobókockát hatszor egymás után feldobunk, majd a dobások eredményét egymás mellé írjuk. Így egy hatjegyű számot kapunk.
 - a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a hatjegyű szám számjegyei közül az első kettő prímszám?
 - b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a hatjegyű szám számjegyei között pontosan két prímszám van?
 - c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a hatjegyű szám számjegyei között legalább két prímszám van?

3. A szóródás mutatói

KÖRTE Kft.	
Nettó keresetek (ezer forintban)	Gyakoriság
146	1
148	1
149	1
150	4
151	1
152	1
154	1

3.1. ábra A dolgozók nettó kereseteinek gyakorisági eloszlása a KÖRTE Kft.-nél

A sokaságról gyűjtött adatok táblázatba foglalása, diagrammal történő szemléltetése és a számsokaság középértékei (módusz, medián, átlag) már sokat elárultak a sokaság adott ismerv szerinti eloszlásáról. A középértékek vizsgálata során azonban azt is láttuk, hogy ezek az értékek önmagukban nem jellemzik megfelelően a számsokaságot. A továbbiakban a számsokaságok újabb jellemzőivel fogunk megismerkedni.



1. példa A KÖRTE és az ALMA Kft. dolgozóinak nettó kereseteit a 3.1. és a 3.2. táblázatban tüntettük fel.

Határozzuk meg a sokaságok móduszait, mediánjait és az átlagokat!

Megoldás:

A táblázatokból jól látható, hogy mindkét sokaságban a 150 ezer forintos keresetek fordulnak elő legtöbbször, ezért a móduszok egyenlők: $Mo_{KÖRTE} = Mo_{ALMA} = 150$ ezer Ft. Mindkét adatsokaság 10 számból

$$P = \frac{k}{n}$$

áll, tehát a medián a keresetek nem csökkenő sorrendjében, az ötödik és a hatodik adat számtani közepével egyenlő. A sokaságokban az ötödik és a hatodik adat is 150 ezer Ft, így az átlagaik, vagyis a sokaságok mediánjai: $Me_{KÖRTE} = Me_{ALMA} = 150$ ezer Ft. Az átlagok:

$$\bar{x}_{KÖRTE} = \frac{146 + 148 + 149 + 4 \cdot 150 + 151 + 152 + 154}{10} = 150 \text{ ezer Ft és}$$

$$\bar{x}_{ALMA} = \frac{51 + 52 + 53 + 54 + 2 \cdot 150 + 246 + 247 + 248 + 249}{10} = 150 \text{ ezer Ft,}$$

azaz az átlagok egyenlők. Mindkét számsokaság esetén a módusz, a medián és a számtani közép 150 ezer Ft.



Vegyük észre, hogy a fenti sokaságok esetén mindhárom középérték egyenlő, ugyanakkor a két sokaságban a számok eltérnek egymástól, a középértékek körül eltérően oszlanak el, azaz másként szóródnak. Szóródásnak nevezzük az adatok egymáshoz viszonyított különbözőségét, illetve az átlagtól való eltérését. A szóródást többféle, ún. mutatószámmal jellemezhetjük.

A fenti példában az adatok szóródásának jellemzésére alkalmas lehet a legmagasabb és a legalacsonyabb fizetés összevetése, a keresetek átlagtól való eltéréseinek vizsgálata. A KÖRTE Kft. esetén a legmagasabb és a legalacsonyabb fizetés között mindössze 8 ezer Ft, míg az ALMA Kft. esetén 198 ezer Ft a különbség. Ezeket a különbségeket a szóródás terjedelmének (röviden **terjedelemnek**) hívjuk. Pontosabban fogalmazva:



Definíció A számsokaság maximális és minimális számának különbségét **terjedelemnek** nevezzük. Jelölése: R . (Matematikai jelekkel: $R = x_{\max} - x_{\min}$.)

Előnye, hogy könnyen meghatározható, szemléletes. Hátránya, hogy érzékeny a kiugróan magas vagy alacsony értékekre.

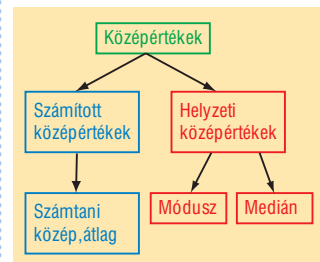
Az adatok átlagtól vett eltéréseinek összege nulla. Emiatt amikor az adatoknak az átlagtól való különbözőségét vizsgáljuk, praktikus az adatok átlagtól vett eltéréseinek abszolút értékeivel számolnunk. Ezen abszolút értékek számtani közepét **átlagos abszolút eltérésnek** nevezzük.



Definíció Átlagos abszolút eltérésnek nevezzük a számok valamelyik statisztikai közepétől, például az átlagtól vett különbségeinek abszolút értékeiből számított számtani közepet. Jelölése: δ . (Matematikai jelekkel: $x_1, x_2, \dots, x_n$ számsokaság átlagos abszolút eltérése $\delta = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$.)

ALMA Kft.	
Nettó keresetek (ezer forintban)	Gyakoriság
51	1
52	1
53	1
54	1
150	2
246	1
247	1
248	1
249	1

3.2. ábra A dolgozók nettó kereseteinek gyakorisági eloszlása az ALMA Kft.-nél



3.3. ábra Középértékek



3.4. ábra Terjedelem



3.5. ábra A két vállalat

Foglaljuk táblázatba az adatok számtani középétől (átlagtól) vett különbségeinek abszolút értékeit!

x_i (Nettó keresetek ezer Ft-ban)	f_i (Gyakoriság)	$ x_i - \bar{x} $	$f_i \cdot x_i - \bar{x} $
146	1	4	4
148	1	2	2
149	1	1	1
150	4	0	0
151	1	1	1
152	1	2	2
154	1	4	4
Összesen	10	–	14

3.6. ábra KÖRTE Kft.



3.8. ábra „Keresem a keresetem”

x_i (Nettó keresetek ezer Ft-ban)	f_i (Gyakoriság)	$ x_i - \bar{x} $	$f_i \cdot x_i - \bar{x} $
51	1	99	99
52	1	98	98
53	1	97	97
54	1	96	96
150	2	0	0
246	1	96	96
247	1	97	97
248	1	98	98
249	1	99	99
Összesen	10	–	780

3.7. ábra ALMA Kft.

A táblázatok alapján az átlagos abszolút eltérés a KÖRTE Kft. esetén $\delta_{\text{KÖRTE}} = 1,4$ ezer Ft, az ALMA Kft. esetén $\delta_{\text{ALMA}} = 78$ ezer Ft. Ez azt jelenti, hogy a KÖRTE Kft. esetén a keresetek átlagosan 1,4 ezer Ft-tal, az ALMA Kft. esetén átlagosan 78 ezer Ft-tal térnek el a keresetek átlagától (a 150 ezer Ft-tól).

Ha a nagyobb eltéréseket hangsúlyozni szeretnénk, akkor az adatok átlagtól vett eltéréseinek négyzeteivel számolunk. Ezen négyzetek számtani közepének négyzetgyöke éppen az eltérések négyzetes közepé, amelyet **szórásnak** nevezünk. A **szórás** a **szóródás legfontosabb mérőszáma**.



3.9. ábra Szórás

Definíció Szórásnak nevezzük a számsokaság számainak a számtani középétől vett különbségeinek négyzetes közepét. Jelölése: σ vagy D . (Matematikai jelekkel: az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számsokaság szórása $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$.)

$$P = \frac{k}{n}$$

A szórás az adatoknak az átlagtól vett négyzetes eltérését mutatja meg.



Definíció A szórás négyzetét szórásnégyzetnek (varianciának) nevezzük. Jelölése: σ^2 vagy D^2 .

Foglaljuk táblázatba az adatok számtani középtől (átlagtól) vett különbségeinek négyzeteit (3.10. és 3.11. ábrák)!

x_i (Nettó keresetek ezer Ft-ban)	f_i (Gyakoriság)	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
146	1	-4	16	16
148	1	-2	4	4
149	1	-1	1	1
150	4	0	0	0
151	1	1	1	1
152	1	2	4	4
154	1	4	16	16
Összesen	10	-	-	42

3.10. ábra KÖRTE Kft.

x_i (Nettó keresetek ezer Ft-ban)	f_i (Gyakoriság)	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
51	1	-99	9801	9801
52	1	-98	9604	9604
53	1	-97	9409	9409
54	1	-96	9216	9216
150	2	0	0	0
246	1	96	9216	9216
247	1	97	9409	9409
248	1	98	9604	9604
249	1	99	9801	9801
Összesen	10	-	-	76060

3.11. ábra ALMA Kft.

A táblázatok alapján a szórásnégyzet a KÖRTE Kft. esetén $\sigma^2_{\text{KÖRTE}} = 7606$ (ezer Ft), az ALMA Kft. esetén $\sigma^2_{\text{ALMA}} = 4,2$ (ezer Ft). A szórás a KÖRTE Kft. esetén $\sigma_{\text{KÖRTE}} = 87,21$ (ezer Ft) az ALMA Kft. esetén $\sigma_{\text{ALMA}} = 2,05$ (ezer Ft) Mivel a két adathalmaz átlaga megegyezik, ezért a szórások összevetéséből megállapíthatjuk, hogy a KÖRTE Kft.-nél a keresetek szóródása nagyságrendben különbözik



3.12. ábra Eltérés 1.



3.13. ábra Eltérés 2.



3.14. ábra A szórás 0

az ALMA Kft. kereseteinek szóródásától. Az adatok szóródásáról a szórás és az átlag hányadosa is sokat elárul. Ezt az arányt **relatív szórásnak** hívjuk és általában %-ban adjuk meg. A fenti két adathalmaz relatív szórása: $\frac{\sigma_{\text{KÖRTE}}}{\bar{x}_{\text{KÖRTE}}} \approx \frac{87,21}{150} \approx 58\%$ és $\frac{\sigma_{\text{ALMA}}}{\bar{x}_{\text{ALMA}}} \approx \frac{2,05}{150} \approx 1\%$. Például a $\frac{\sigma_{\text{ALMA}}}{\bar{x}_{\text{ALMA}}} \approx 1\%$ azt jelenti, hogy az ALMA Kft. keresetei az átlagtól (a 150 ezer Ft-tól, a 100%-tól) átlagosan 1%-kal térnek el.



Definíció Pozitív számsokaságok esetén a szórás és a számtani közép hányadosát relatív szórásnak nevezzük. Jelölése: $\nu = \frac{\sigma}{\bar{x}}$.

Ez a dimenzió nélküli mutató alkalmas különböző mértékegységű adatok szóródásának összehasonlítására.

Könnyen belátható, hogy egy számsokaság átlagos abszolút eltéréseinek és a szórásának értéke

- csak akkor egyenlő 0-val, ha a számsokaság azonos számokból áll.
- $|c|$ -szeresére változik, ha a számsokaság számait megszorozzuk c -vel.
- nem változik meg, ha a számsokaság számaihoz ugyanazt a számot hozzáadjuk.
- közül a szórás értéke nem kisebb. (A számtani közép és a négyzetes közép közötti összefüggés alapján: $\delta \leq \sigma$.)



Vegyük észre, hogy a szórás kiszámítását megkönnyítheti, ha a $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$ azonosságot alkalmazzuk, ahol $\overline{x^2}$ a számok négyzeteinek átlaga és $\bar{x}^2$ a számok átlagának négyzete.

x_i (Térfogat, cm ³)	f_i (Gyakoriság)
970	4
990	5
1010	4
1030	3
Összesen	16

3.15. ábra Gyakoriságok



2. példa Egy tejesflakon téglatest alakú, az alaplapjának élei 8 cm és 6,25 cm. A flakon magassága 21 cm, az előírt mennyiség betöltése esetén 20 cm magasságig van tele. A gyártási folyamat ellenőrzése során 16 mérést végeztek. Négyszer 20,2 cm, háromszor 20,6 cm, ötször 19,8 cm és négyszer 19,4 cm töltési magasságot állapítottak meg. Számítsd ki a betöltött tejtérfogat átlagát és szórását a mintában!

Megoldás:

A téglatest térfogata: $V = a \cdot b \cdot c$, ahol a , b és c a téglatest egy csúcsból kiinduló élei. Innen az előírt töltési térfogat 1000 cm³, a mintában levő flakonok térfogatainak gyakorisági eloszlása:

$$P = \frac{k}{n}$$

Az átlag és a szórás kiszámításához bővítsük ki a gyakorisági eloszlás táblázatát az $f_i x_i$, az x_i^2 és az $f_i \cdot x_i^2$ oszlopokkal (3.16. ábra)!

x_i (Térfogat, cm ³)	f_i (Gyakoriság)	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i \cdot x_i^2$
970	4	3880	940900	3763600
990	5	4950	980100	4900500
1010	4	4040	1020100	4080400
1030	3	3090	1060900	3182700
Összesen	16	15960	–	15927200
		$\bar{x} = 997,5$		$\overline{x^2} = 995450$

3.16. ábra Táblázat a szóródásmértékekhez

A minta átlaga: $\bar{x} = 997,5 \text{ cm}^3$, szórása:

$$\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \sqrt{995450 - 997,5^2} \approx 21,07 \text{ cm}^3.$$

A statisztikus általában nagyon sok adattal foglalkozik, ma már a vizsgált sokaságra jellemző középértékek, mutatók számítását számítógépek segítségével végzik. A középiskolában használatos számológépek is lehetőséget adnak bizonyos statisztikai jellemzők kiszámítására. Az alábbiakban a 2. példában szereplő adatok szórásának számítását mutatjuk be lépésről lépésre, két különböző „logikájú” számológépen.

Az egyik típusnál:

	Billentyűk sorrendben	Kijelző
1. lépés: statisztikai üzemmód beállítása	2ndF ON/C	STAT 0
2. lépés: az adatok bevétele	9 7 0 x 4 DATA M+	STAT 4
	9 9 0 x 5 DATA M+	STAT 9
	1 0 1 0 x 4 DATA M+	STAT 13
	1 0 3 0 x 3 DATA M+	STAT 16
3. lépés: a szórás előhívása	2ndF X$\rightarrow$M	STAT (21,07 $\approx$ σ)

3.17. ábra Így számolhatunk



3.18. ábra „A” számológép



Valószínűség-számítás, statisztika



3.20. ábra „B” számológép

Egy másik típus esetén:

	Billentyűk sorrendben	Kijelző															
1. lépés: statisztikai szerkesztő képernyő megjelenítése	  	1:ab/c 2:d/c 3:STAT 4:Disp 5:<CONT>															
		Frequency? 1:ON 2:OFF															
	Az  billentyű megnyomásával statisztikai módban, a kijelzőn megjelenik a frekvencia (a gyakoriság) oszlopa.																
		1:COMP 2:STAT 3:TABLE															
		1:1-VAR 2:A+BX 3:-+CX2 4:lnX 5:C^X ...															
2. lépés: az adatok bevitele		<table><tr><td>1</td><td>X</td><td>FREQ</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr></table>	1	X	FREQ	2			3								
	1	X	FREQ														
	2																
	3																
	   	<table><tr><td>1</td><td>X</td><td>FREQ</td></tr><tr><td>2</td><td>970</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr></table>	1	X	FREQ	2	970	1	3								
1	X	FREQ															
2	970	1															
3																	
   	<table><tr><td>1</td><td>X</td><td>FREQ</td></tr><tr><td>2</td><td>970</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr></table>	1	X	FREQ	2	970	4	3									
1	X	FREQ															
2	970	4															
3																	
Az x oszlopába az adatok számértékét kell bevenni, a FREQ oszlopába pedig az adat gyakoriságát. Az oszlopok mezői a REPLAY billentyű megfelelő irányba mutató nyilának lenyomásával érhetők el.		<table><tr><td></td><td>X</td><td>FREQ</td></tr><tr><td>1</td><td>970</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>990</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>1010</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>1030</td><td>3</td></tr></table>		X	FREQ	1	970	4	2	990	5	3	1010	4	4	1030	3
	X	FREQ															
1	970	4															
2	990	5															
3	1010	4															
4	1030	3															
3. lépés: statisztikai számítási képernyő; a szórás előhívása	 	1:Type 2:Data 3:Edit 4:Sum 5:Var 6:MinMax															
		1: n 2: $\bar{x}$ 3: $x\sigma n$ 4: $x\sigma n-1$															
	 	$x\sigma n$ STAT 21,07 cm ³															



3.21. ábra Az adatok feldolgozása

3.19. ábra Így is számolhatunk

$$P = \frac{k}{n}$$

Oldjuk meg!

- Adjunk meg két olyan hételemű számsokaságot, amelynek $Me = Mo = \bar{x} = 6$! Határozzuk meg a sokaságok terjedelmét, átlagos abszolút eltérését, szórását, relatív szórását!
- Hogyan változik az $-1, -3, -3, -3, -3, -7, 2, 2, 5, 5, 5$ számokból álló sokaság átlaga, módusza, mediánja, terjedelme, átlagos abszolút eltérése, szórása,
 - ha minden eleméhez hozzáadunk 6-ot?
 - ha minden elemét megszorozzuk 28-cal?
- Egy osztály lány és fiú tanulóinak matematika tantárgyból elért félévi osztályzatainak gyakorisági eloszlása:

Osztályzatok (x_i)	5	4	3	2	1
Gyakoriság (f_i)	3	6	4	2	–

3.22. ábra A lányok osztályzatainak gyakoriságai

Osztályzatok (x_i)	5	4	3	2	1
Gyakoriság (f_i)	2	5	6	2	–

3.23. ábra A fiúk osztályzatainak gyakoriságai

Szemléltessük a matematika osztályzatok megoszlását nemek szerint oszlopdiagramon! Határozzuk meg a lányok és a fiúk osztályzatainak móduszát, mediánját, átlagát! Határozzuk meg a lányok és a fiúk osztályzatainak szóródását jellemző mutatókat!



3.24. ábra Az osztály tanulói



Kiegészítés

A hatványozás azonosságai tetszőleges R-beli kitevő esetén

(Feltételezzük, hogy az összes szereplő kifejezés értelmezve van.)

Azonos alapú hatványok:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Azonos kitevőjű hatványok:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

A hatvány hatványozása:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Logaritmus

(Feltételezzük, hogy az összes szereplő kifejezés értelmezve van.)

Azonos alapú logaritmusok:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_a 1 = 0$$

Kapcsolat különböző alapú logaritmusok között:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_a x = \log_{a^n} x^n$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Középek

Ha $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, akkor a

számtani közép: $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$,

harmonikus közép: $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$,

mértani közép: $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$,

négyzetes közép: $Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$.

Nevezetes szögek szögfüggvényei

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Statisztikai jellemzők

Terjedelem:

a legnagyobb és a legkisebb adat különbsége.

Átlagos abszolút eltérés egy adott a számtól:

$$A(a) = \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \dots + |x_n - a|}{n}.$$

Átlagos négyzetes eltérés egy a számtól:

$$N(a) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{n}.$$

Empirikus szórás a számtani középtől való átlagos négyzetes eltérés négyzetgyöke:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{N(\bar{x})}.$$



abszcissa*	145	forgásszög szinusza*	92
addíciós tételek	123	forgásszög tangense*	93
átlagos abszolút eltérés*	205	független események*	201
belső pont*	174	gráf*	31
binomiális együttható	17	gráf éle*	31
binomiális tétel	28	gráf pontja vagy csúcsa*	31
de Morgan-azonosságok	194	háromszög kerülete*	127
egyen es egyenlete*	155	háromszög köré írt körének sugara*	90
egyszerű gráf*	32	háromszög súlypontja*	151
emelkedési szög (elevációs szög)	88	háromszög súlyvonala*	151
esemény*	190	háromszög területe*	89
események egyenlősége*	192	háromszög trigonometrikus területképlete*	89
események különbsége*	194	hatvány*	38
események összege*	193	hatványalap*	68
események szorzata*	194	hatványkitevő*	75
esemény gyakorisága*	196	hegyesszög koszinusza*	88
esemény komplementere*	192	hegyesszög kotangense*	88
esemény relatív gyakorisága*	196	hegyesszög szinusza*	88
eseménytér*	190	hegyesszög tangense*	88
exponenciális egyenlet*	56	helyvektor*	139
exponenciális egyenletrendszer	62	hurokél*	32
exponenciális egyenlőtlenség	63	irányszög*	161
exponenciális függvény*	50	iránytangens*	161
felezőmerőleges*	168	iránytangenses egyenlet*	162
felezőpont*	152	irányvektor*	160
fokszám*	31	irányvektoros egyenlet*	160
fókusz	185	ismétlés nélküli kombináció	16
forgásszög koszinusza*	92	ismétlés nélküli permutáció	12
forgásszög kotangense*	93	ismétlés nélküli variáció	15

ismétléses permutáció	13	páratlan függvény	102
ismétléses variáció	15	párhuzamos*	138
két pont távolsága*	141	páros függvény	123
<i>két vektor hajlásszöge*</i>	118	<i>Pascal-háromszög</i>	24
kimenetel*	190	<i>ponthalmaz egyenlete*</i>	157
<i>kizáró események*</i>	194	pont koordinátái*	137
<i>komplementer gráf*</i>	35	pont körüli elforgatás*	92
koszínusfüggvény*	101	pótszög szögfüggvényei	106
<i>koszínusztétel *</i>	126	<i>relatív szórás*</i>	208
kotangensfüggvény	103	<i>skaláris szorzat*</i>	119
kör*	172	számtani közép*	150
<i>kör egyenlete*</i>	173	szinuszfüggvény*	112
kör középpontja*	173	<i>szinusztétel*</i>	128
kör sugara*	173	<i>szórás*</i>	206
középpontos tükrözés*	145	<i>szórásnégyzet (variancia)*</i>	207
külső pont*	174	tangensfüggvény*	102
<i>logaritmikus egyenlet*</i>	78	<i>teljes gráf*</i>	34
<i>logaritmikus egyenletrendszer</i>	78	tengelyes tükrözés*	145
<i>logaritmikus egyenlőtlenség</i>	78	<i>terjedelem*</i>	205
<i>logaritmus*</i>	66	többszörös él*	31
<i>logaritmus alapja*</i>	66	<i>törtkitevő*</i>	43
<i>logaritmusfüggvény*</i>	69	<i>törtkitevőjű hatvány*</i>	43
<i>logaritmus numerusa*</i>	66	<i>valós kitevőjű hatvány*</i>	53
<i>maga után von*</i>	192	valószínűség*	196
merőleges*	89	<i>valószínűség-számítás klasszikus modellje*</i>	197
metzéspon*	147	vektor hossza*	122
<i>n-edik gyök*</i>	39	vektor koordinátái*	93
<i>normálvektor*</i>	155	vektor reprezentánsa*	118
<i>normálvektoros egyenlet*</i>	156	véletlen jelenség*	190
ordináta*	145	<i>vezéregyenes</i>	185
parabola*	185	<i>vonatkoztatási pont</i>	149
<i>parabola paramétere</i>	185		



- Kiadja: Maxim Könyvkiadó Kft., 6726 Szeged, Fürj u. 92/b
- E-mail: info@maxim.co.hu
- Telefon: (62) 548 444
- Fax: (62) 548 443
- Felelős kiadó: Puskás Norbert
- Nyomda: Generál Nyomda Kft., felelős vezető: Hunya Ágnes