

Matematika



középszint

Az Út a tudáshoz középiskolai
matematika tankönyvsorozat nyitókötete
2009-ben a HunDidac Arany-díját nyerte el.



Matematika



Matematika



középszint



Sorozatok



Térgeometria



Logika



Rendszerező összefoglalás

Út a tudáshoz

Matematika 12

- A könyvet írta:
Ábrahám Gábor középiskolai tanár
Dr. Kosztolányiné Nagy Erzsébet középiskolai tanár
Tóth Julianna középiskolai tanár
- Lektorálta:
Tarcsay Tamás középiskolai tanár
Ványa István középiskolai tanár
- Az OH által kirendelt szakértő:
Hajba Tamás
Kónya István
- Felelős szerkesztő:
Koncz Balázs
Szabóné Mihály Hajnalka
Tarcsay Tamás
- Műszaki szerkesztő:
Szűcs József
- Korrektúra:
Szuperákné Vörös Eszter
- Képek:
Nemzetközi képügynökségek
- Ábrák:
Kelcz Roland
- Illusztrációk:
Falcione Sarolta
- Borítóterv és layout:
Daróczi Sándor

Második kiadás, változatlan utánnyomás

Kiadói kód: MX-269

Tankönyvi engedélyszám: TKV/178-10/2012. (2012. 02. 01. – 2017. 03. 31.)

Kerettanterv: 17/2004 (V.20.) OM rendelet 3. számú melléklete

Tömeg: 359 g

Terjedelem: 204 oldal (18,36 ív)

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítást, a mű bővített, illetve rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli engedélye nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmilyen formában nem sokszorosítható.

ISBN 978 963 261 184 6

© Maxim Könyvkiadó



Matematika



középszint





Itt a vége!

Tankönyvünk a 9., 10. és 11. osztályosok számára készült köteteinkre építve folytatja a megérthető és megszerethető matematika bemutatását. Ennek az elvont tudománynak a fogalmait legtöbbször gyakorlati problémákon keresztül készítjük elő, és csak ezután adjuk meg a pontos meghatározásukat. A tételek alkalmazhatóságát is igyekeztünk mindennapi példákon szemléltetni. Bőséges feladatanyaggal biztosítottunk lehetőséget a megszerzett ismeretek elmélyítésére, megszilárdítására.

Tizenkettedikesként az érettségi vizsgára tudatosan és komolyan kell felkészülni, csak akkor sikerülhet a nagy megmérettetés.

Kötetünk segít a középszintű érettségi vizsgára való felkészülésben. Az egyes újonnan tárgyalt anyagrészek elején áttekintjük a szükséges, korábban tanult ismereteket, majd ezek után következik az új anyag tárgyalása. Ennek során a korábbi könyveinkben követett módszereinket alkalmazzuk. Igyekezzünk könnyen érthetőek és ugyanakkor pontosak lenni. Sok példát és feladatot közlünk.

A kötetben jelentős részt foglal el a rendszerező összefoglalás, amelyben a korábbi években tanult anyagot ismételjük át. Tekintettel arra, hogy a középszintű érettségi vizsgán a számonkérés elsősorban feladatokon keresztül történik, ezt az áttekintést is kidolgozott példák segítségével végezzük el. A példákhoz kötődően hívjuk fel a figyelmet a megoldáshoz szükséges elméleti ismeretanyagra. Úgy véljük, hogy ez a módszer lehet az eredményes felkészülés biztosítója.

Hangsúlyozzuk, hogy a legjobb könyv sem lehet egyedüli eszköz az érettségi bizonyítvány megszerzésében. A lelkiismeretes tanulást nem pótolhatja semmi!

Kívánjuk, hogy könyvünk minél több segítséget adjon ehhez a lelkiismeretes tanuláshoz!

A Szerzők és a Kiadó

Hogyan használjuk?

Tankönyvünk a középszintű érettségi vizsga követelményeinek megfelelően készült. Az első három fejezetben új ismeretek szerepelnek (Sorozatok, Térgeometria, Logika). Ezekben a leckék a korábbi kötetekben megismert módon épülnek fel. Az új fogalmakat példákon keresztül vezetjük be, és csak ezután következik a pontos meghatározásuk.

A 12. osztályos tanulmányok fő céljára koncentrálna nagy figyelmet fordítottunk az ismételésre már az első három fejezetben is. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az első három fejezet anyagát, és az ott átismételt korábbi ismereteket jól jegyezzük meg, mert azok szükségesek a későbbiekben és az érettségi vizsgán is.

A negyedik fejezetben (Rendszerező összefoglalás) a korábbi évek anyagát ismételjük át – a középszintű érettségi vizsga elvárásainak megfelelően – példákhoz kapcsolva. Érdemes a kidolgozott példákat egyedül megoldani, ha szükséges átismételni a hozzá kapcsolódó elméleti ismereteket, és csak akkor megnézni a megoldást, ha ezután sem boldogulunk vele. Az egyes leckék után „Oldjuk meg!” címmel feladatokat találunk, ezeket a tananyag elmélyítése céljából önállóan érdemes megoldani.

Jelmagyarázat



1. példa A tananyagban szereplő kidolgozott **középszintű** példákat zöld hátterszínű keretbe foglaltuk.

Közvetlenül a kidolgozott példák alatt szerepel azok részletes megoldása, melynek során **félkövér kiemelésekkel** hívtuk fel a figyelmet az újonnan megjelenő **fogalmakra, megállapításokra, módszerekre**.



Definíció Az új fogalmakat Definíció címszó alatt sárga hátterszínű keretbe foglaltuk. Itt írtuk le a fogalmakkal kapcsolatban használt matematikai jelöléseket is. Ezeknek a pontos ismerete mindkét szintű érettségi esetén alapkövetelmény.



Tétel A tételeket, azonosságokat, tulajdonságokat narancssárga hátterszínű keretben foglaltuk meg. A tételek ismerete mind közép-, mind emelt szintű érettségi esetén elengedhetetlenül fontos.



A matematikai műveltség fontos részét képezi a matematika-történet ismerete, emellett ez a terület sok érdekességet is rejt magában. Ezért egy-egy anyagrészhez kapcsolódóan matematikatörténeti érdekességek jelennek meg krémszínű háttérrel.



Vegyük észre! Ezek a részek bizonyos fogalmak használatára hívják fel a figyelmet, miközben hasznos tanácsokat nyújtanak a feladatok megoldásához, az összefüggések megértéséhez. A fontos észrevételeket szürke hátterszínű keretben foglaltuk meg.

A korábban tanult **definíciók** a sárga szivaccsal megjelölt táblákon olvashatóak.



A korábban tanult **tételek** a narancssárga szivaccsal megjelölt táblákon olvashatóak.



A korábban tanult **egyéb** ismeretek a barna szivaccsal megjelölt táblákon olvashatóak.



A tankönyvben szereplő szakkifejezéseket a kötet végén gyűjtöttük össze. *Dőlt betűkkel* jelenítettük meg a 12. osztályban tanult fogalmakat. Ezeknek a fogalmaknak az ismerete követelmény a középszintű érettségi vizsgán, tehát ez a szakkifejezés-gyűjtemény segédeszköz lehet az érettségi vizsgára való készülésben.



Tartalomjegyzék

I. SOROZATOK

9

1. A számsorozat fogalma, megadása, ábrázolása, tulajdonságai	10
1.1. A számsorozat fogalma	10
1.2. A számsorozat megadása	11
1.3. A számsorozatok ábrázolása	14
1.4. A számsorozatok jellemzése	14
2. A számtani sorozat	17
3. A mértani sorozat	23
4. Kamatszámítás, törlesztőrészek számítása	30



II. TÉRGEOMETRIA

35

1. Területszámítás (Ismétlés)	36
2. Ponthalmazok a térben, távolságok, szögek	41
3. Testek és csoportosításuk	45
4. Testek térfogata és felszíne	49
5. Vegyes feladatok I.	55
6. Vegyes feladatok II.	60
7. A kocka és más szabályos testek	64

III. LOGIKA

69

1. Matematikailogika	70
----------------------	----

IV. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

79

1. Halmazok	80
2. Számelmélet, algebra	88
2.1. Hatvány, gyök, logaritmus	88
2.2. Algebrai egész és törtkifejezések	99

2.3. Számelmélet	104
------------------	-----

3. Függvények	107
---------------	-----

4. Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek; lineárisra visszavezethető problémák	119
---	-----

5. Másodfokú egyenletre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre vezető feladatok	129
--	-----

6. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek	135
---	-----

7. Exponenciális és logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek	139
---	-----

8. Geometria	149
--------------	-----

8.1. Elemi geometria	149
----------------------	-----

8.2. Geometriai transzformációk	154
---------------------------------	-----

9. A trigonometria alkalmazásai	162
---------------------------------	-----

10. Vektorok, koordináta-geometria	172
------------------------------------	-----

10.1. Vektorok	172
----------------	-----

10.2. Koordináta-geometria	175
----------------------------	-----



11. Gondolkodási módszerek, kombinatorika, gráfok	181
---	-----

12. Statisztika, valószínűség-számítás	188
--	-----

12.1. Statisztika	188
-------------------	-----

12.2. Valószínűség-számítás	193
-----------------------------	-----

V. FÜGGELÉK

200

A
B
C

Szakkifejezések listája

200

I. fejezet Sorozatok



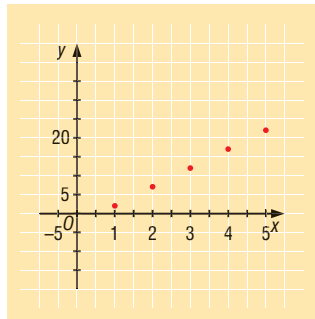
Csak sorban!

1. A számsorozat fogalma, megadása, ábrázolása, tulajdonságai

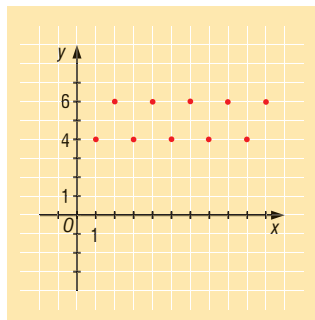
1.1. A számsorozat fogalma



1.1. ábra Bélyegsorozat



1.2. ábra Az a függvény grafikonja



1.3. ábra A b függvény grafikonja

A hétköznapi életben sokszor előfordul a sorozat szó összetett szavak egyik tagjaként, pl. tévésorozat, sorozatgyártás, bélyegsorozat (1.1. ábra), sorozatszám, sorozatgyilkosság stb. Ezek alapján olyan kép alakult ki bennünk, hogy a sorozat bizonyos dolgok egymásutánja, tehát a **számsorozat** is számok egymásutániságát jelenti. Ez azonban matematikai szempontból még nem precíz fogalom. A definíció megfogalmazása előtt nézzünk néhány példát!

1. példa Legyen adott az $a: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}; a(n) = 5n - 3$ függvény! Adjuk meg az a függvény öt legkisebb függvényértékét!

Megoldás:

Az a függvény hozzárendelési szabálya egy pozitív meredekségű elsőfokú függvény hozzárendelési szabályával egyezik meg. 9. osztályos tanulmányainkból tudjuk, hogy ez a függvény szigorúan monoton növekvő, így a legkisebb függvényértékek az értelmezési tartomány legkisebb értékeihez tartoznak. Tehát a keresett számok (1.2. ábra):

$$a(1) = 2, a(2) = 7, a(3) = 12, a(4) = 17, a(5) = 22.$$

2. példa Legyen a b függvény értelmezési tartománya a $D_b = \mathbb{Z}^+$ halmaz! A b függvény rendelje hozzá minden $n \in D_b$ számhoz a 4^n utolsó számjegyét!

- Adjuk meg a függvény értékkészletét!
- Milyen számjegyre végződik a $b(2010) + b(2011) + b(2012)$ összeg?

Megoldás:

- Számítsuk ki az első öt pozitív egész számhoz tartozó függvényértéket!

$$b(1) = 4, b(2) = 6, b(3) = 4, b(4) = 6, b(5) = 4.$$

Azt látjuk, hogy a 4-es és a 6-os számjegy ismétlődik, méghozzá páros kitevő esetén a végződés 6, páratlan esetén 4. Ez nem meglepő, mivel két pozitív egész szám szorzatának a végződése egyenlő a két végződés szorzatának a végződésével, és a 4 minden pozitív egész kitevőjű hatványa a nála eggyel kisebb kitevőjű hatványának négyszerese. Ez alapján a függvény értékkészlete az $R_b = \{4, 6\}$ halmaz (1.3. ábra).



b) Mivel két pozitív egész szám összegének a végződése a két végződés összegének a végződésével egyenlő, ezért az a) részben leírtakat is figyelembe véve a $b(2010)+b(2011)+b(2012)$ összeg végződése 6.



Az egyes helyeken felvett függvényértékeket az 1.4. ábrán látható módokon is megadhatjuk.

Ezzel két rendezett számötöst kaptunk, melyet **öttagú sorozatnak** nevezünk. A két példában szereplő függvény viszont végtelen sok tagot generál, melyek **végtelen számsorozat**ot, vagy röviden **számsorozat**ot határoznak meg.



Definíció A pozitív egész számok halmazán értelmezett valós értékű függvényeket **számsorozat**oknak nevezzük. Az n pozitív egész számhoz rendelt függvényérték a sorozat n -edik **tagja**, vagy általános tagja, melyet a_n -nel jelölünk. Az n -et, az adott tag **indexének** nevezzük.

	1. példa	2. példa
1. lehetőség	$a_1 = 2,$ $a_2 = 7,$ $a_3 = 12,$ $a_4 = 17,$ $a_5 = 22$	$b_1 = 4,$ $b_2 = 6,$ $b_3 = 4,$ $b_4 = 6,$ $b_5 = 4$
2. lehetőség	(2, 7, 12, 17, 22)	(4, 6, 4, 6, 4)

1.4. ábra A sorozat megadásának lehetőségei

Az $a: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}; n \mapsto a(n)$ függvénnyel meghatározott sorozatot általában (a_n) -nel jelöljük.

1.2. A számsorozat megadása

Az első példában a számsorozatot az $a: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}; a(n) = 5n - 3$ függvénnyel határoztuk meg. Ezzel megmondtuk, hogy az $n \in \mathbb{Z}^+$ értékhez mely számot rendeljük hozzá. Ez történhet úgy is, hogy a sorozat általános tagját, a_n -et adjuk meg, pl. $a_n = 5n - 3$.



3. példa Az alábbiakban négy sorozat általános tagját adtuk meg. Határozzuk meg mind a négy sorozat első öt tagját!

a) $a_n = \frac{n-1}{n};$

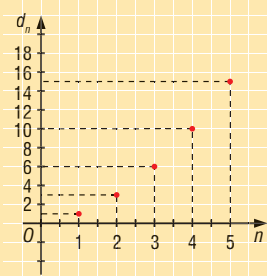
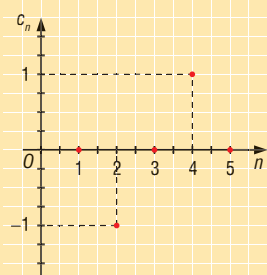
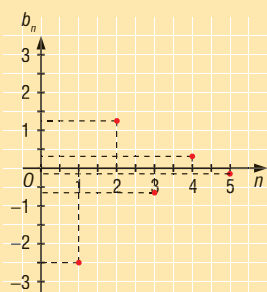
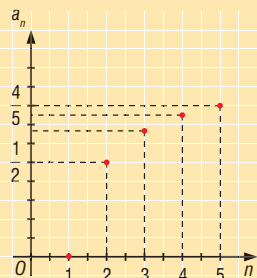
b) $b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n;$

c) $c_n = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$

d) $d_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$



1.5. ábra Sorozatgyártás



1.6. ábra Ábrázoljuk az
a) a_n sorozat,
b) b_n sorozat,
c) c_n sorozat,
d) d_n sorozat első 5 tagját!

Megoldás:

a) Az általános tagból úgy számolhatjuk ki a sorozat keresett tagjait, hogy az n helyére beírjuk a megfelelő értéket.

Ez alapján

$$a_1 = \frac{1-1}{1} = 0, \quad a_2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$a_5 = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}.$$

b) Az a) részben látottakhoz hasonlóan járhatunk el.

$$b_1 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{5}{2}, \quad b_2 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}, \quad b_3 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{5}{8},$$

$$b_4 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16} \text{ és } b_5 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{5}{32}.$$

$$c) c_1 = \cos\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad c_2 = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi = -1, \quad c_3 = \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$c_4 = \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2\pi) = 1 \text{ és } c_5 = \cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

d) Az első tagot úgy kapjuk, hogy az összeg első tagját vesszük, így $d_1 = 1$. A második esetén az összeg első két tagját kell tekinteni, így $d_2 = 3$. Ezt a gondolatmenetet folytatva kapjuk, hogy $d_3 = 1 + 2 + 3 = d_2 + 3 = 6$, $d_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = d_3 + 4 = 10$ és $d_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = d_4 + 5 = 15$.



A 3. példa c) részében a harmadik tagtól kezdve úgy számoltuk ki az egyes tagokat, hogy azt visszavezettük az előzőre. Ezt a gondolatot alkalmazhatjuk sorozatok megadásánál is, melyet **rekurzív megadási módnak** nevezünk. Ennek lényege, hogy megadjuk a sorozat első néhány tagját, a továbbiakat pedig a náluk kisebb indexű tagok segítségével fejezzük ki.



4. példa Írjuk fel az alábbi sorozatok első öt tagját!

a) $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 5 \quad (n > 1);$

b) $a_1 = -\frac{5}{2}, a_n = -\frac{a_{n-1}}{2} \quad (n > 1);$

c) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n > 2).$

Megoldás:

a) Az első tagot már megadtuk, így számítsuk ki a másodikat!

A rekurzió alapján $a_2 = a_1 + 5 = 2 + 5 = 7$, $a_3 = a_2 + 5 = 7 + 5 = 12$,
 $a_4 = a_3 + 5 = 12 + 5 = 17$, $a_5 = a_4 + 5 = 17 + 5 = 22$.



b) Az a) részben látottakhoz hasonlóan járhatunk el.

$$a_2 = -\frac{a_1}{2} = -\frac{-\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{2} = -\frac{\frac{5}{4}}{2} = -\frac{5}{8},$$

$$a_4 = -\frac{a_3}{2} = -\frac{-\frac{5}{8}}{2} = \frac{5}{16}, \quad a_5 = -\frac{a_4}{2} = -\frac{\frac{5}{16}}{2} = -\frac{5}{32}.$$

c) Ebben a feladatban az első két tag adott, és a harmadik tagtól kezdve minden tagot a közvetlenül előtte álló két tag segítségével fejezünk ki. A rekurzió alapján $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$, $a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$.



Az $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n > 2$) rekurzióval megadott sorozatot **Fibonacci-sorozatnak** nevezzük. A Fibonacci-sorozatnak nagyon gazdag irodalma van, hisz a Fibonacci-számok megjelennek a kombinatorikában, az informatikában, a természetben (1.8. ábra), sőt még a zenében is. Az érdeklődők sok hasznos és érdekes információt találhatnak a témával kapcsolatban az interneten.



1.7. ábra Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170–1250)



Vegyük észre, hogy a 4. példa a), illetve b) részében megadott sorozat első öt eleme megegyezik az első példában, illetve a 3. példa b) részében megadott sorozat első öt elemével. Be lehet bizonyítani, hogy ezen sorozatok azonos indexű tagjai egyenlők, azaz a sorozatok azonosak.



5. példa Legyen adott az

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = \frac{a_{n-1} + 1}{a_{n-2}}$$

rekurzív sorozat! Határozzuk meg a sorozat 2012. tagját és az első 99 tagjának az összegét!

Megoldás:

Határozzuk meg a sorozat első néhány tagját, hátha azok alapján további következtetéseket tudunk levonni!

$$a_3 = \frac{a_2 + 1}{a_1} = 3, \quad a_4 = \frac{a_3 + 1}{a_2} = 2, \quad a_5 = \frac{a_4 + 1}{a_3} = 1,$$

$$a_6 = \frac{a_5 + 1}{a_4} = 1, \quad a_7 = \frac{a_6 + 1}{a_5} = 2.$$

A hatodik tag egyenlő az első taggal, a hetedik a másodikkal, azaz a hatodik tagtól kezdve a sorozat tagjai ismétlődnek. Az ismétlődő szakasz öt tagból áll. Ebből már ki tudjuk számolni a 2012. tagot, hisz $2012 = 402 \cdot 5 + 2$, azaz $a_{2012} = a_2 = 2$.



1.8. ábra A Fibonacci-sorozat a természetben



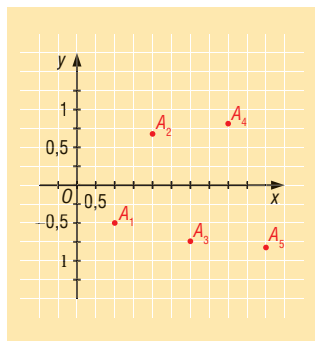
1.9. ábra Hogyan számoljam ki?

Egy perióduson belül a tagok összege 9. Mivel $99 = 19 \cdot 5 + 4$, ezért az első 99 tag összege $S_{99} = 19 \cdot 9 + 1 + 2 + 3 + 2 = 179$.



Az is előfordulhat, hogy a sorozat megadása nem teszi lehetővé tetszőleges tagjának a kiszámítását pl. $a_n = a \sqrt{n}$ végtelen tizedestört-kifejtésének n -edik tizedes jegye, vagy $a_n =$ az n pozitív egész számnál nem nagyobb prímszámok száma.

1.3. A számsorozatok ábrázolása



1.10. ábra Az a_n sorozat grafikonja

A számsorozatokot függvényként definiáltuk, így nem meglepő, hogy az egyik ábrázolási mód a koordinátasíkon történő ábrázolás, a másik pedig a számegyenesen való ábrázolás. Az első esetben a koordinátasíkon az $A_n(n; a_n)$ pontokat vesszük fel, a második esetben a számegyenesen jelöljük be az a_n pontokat.

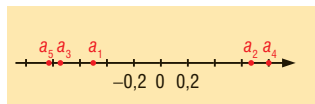


6. példa Ábrázoljuk az

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

sorozat első öt tagját a

a) koordinátasíkon; b) számegyenesen!



1.11. ábra Az a_n sorozat számegyenesen

Megoldás:

A sorozat első öt tagja:

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = -\frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{5}, a_5 = -\frac{5}{6}.$$

a) Lásd 1.10. ábra.

b) Lásd 1.11. ábra.

1.4. A számsorozatok jellemzése

A függvények jellemzésénél megfogalmazott tulajdonságok egy része a sorozatoknál is megjelenik.



1.12. ábra Monoton növekedés



7. példa Az alábbi sorozatokban határozzuk meg az $n+1$ -edik és az n -edik tag különbségét!

a) $a_n = 7n^2 + 2;$ b) $b_n = \frac{n+3}{n}.$



Megoldás:

a) Az (a_n) sorozat $n+1$ -edik tagja $a_{n+1} = 7(n+1)^2 + 2$. Az $n+1$ -edik és az n -edik tag különbsége

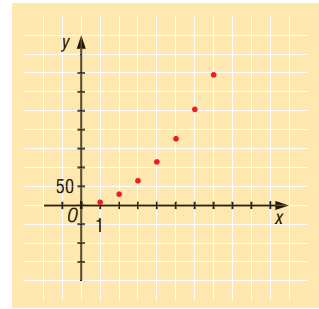
$$a_{n+1} - a_n = 7(n+1)^2 + 2 - (7n^2 + 2) = 7n^2 + 14n + 7 + 2 - 7n^2 - 2 = 14n + 7.$$

Mivel a $14n+7$ minden pozitív egész n esetén pozitív értékű, ezért $a_n < a_{n+1}$, minden pozitív egész n esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy a sorozat **szigorúan monoton növekvő**.

b) A (b_n) sorozat $n+1$ -edik tagja $b_{n+1} = \frac{n+4}{n+1}$, így az $n+1$ -edik és az n -edik tag különbsége

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{n+4}{n+1} - \frac{n+3}{n} = \frac{(n+4)n - (n+1)(n+3)}{(n+1)n} = \\ &= \frac{n^2 + 4n - n^2 - 4n - 3}{(n+1)n} = \frac{-3}{(n+1)n}. \end{aligned}$$

Mivel $\frac{-3}{(n+1)n} < 0$, minden pozitív egész n esetén, ezért $b_{n+1} < b_n$. Ekkor azt mondjuk, hogy a sorozat **szigorúan monoton csökkenő**.



1.13. ábra Az a_n sorozat grafikonja



Definíció Az (a_n) sorozat **szigorúan monoton növekvő**, ha minden pozitív egész n esetén $a_n < a_{n+1}$.



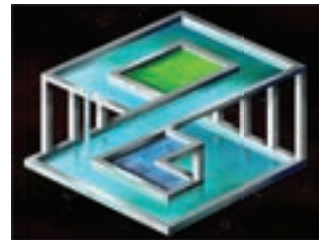
Definíció Az (a_n) sorozat **monoton növekvő**, ha minden pozitív egész n esetén $a_n \leq a_{n+1}$.



Definíció Az (a_n) sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha minden pozitív egész n esetén $a_n > a_{n+1}$.

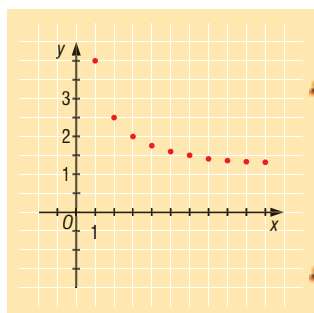


Definíció Az (a_n) sorozat **monoton csökkenő**, ha minden pozitív egész n esetén $a_n \geq a_{n+1}$.



1.14. ábra Látszólagos változás

A 7. példa a) részében szereplő sorozatról megállapítottuk, hogy szigorúan monoton növekvő. Emiatt minden pozitív egész n szám esetén teljesül, hogy $a_1 = 9 \leq a_n$, azaz a 9-nél a sorozat egyetlen tagja sem kisebb. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat **alulról korlátos**, és a 9 egy **alsó korlátja**. Természetesen bármely 9-nél kisebb szám is alsó korlátja az (a_n) sorozatnak.



1.15. ábra A b_n sorozat grafikonja

A 7. példa b) részében szereplő sorozatról tudjuk, hogy szigorúan monoton csökkenő. Ekkor minden pozitív egész n esetén teljesül, hogy $b_1 = 4 \geq b_n$, ekkor azt mondjuk, hogy a (b_n) sorozat **felülről korlátos**, és egy **felső korlátja** a 4. Természetesen bármely 4-nél nagyobb szám felső korlátja a sorozatnak. Mivel a (b_n) sorozat minden tagja pozitív, ezért ez a sorozat alulról is korlátos. Az ilyen sorozatot korlátos sorozatnak nevezzük.

Definíció Az (a_n) sorozat **felülről korlátos**, ha létezik olyan K valós szám, hogy minden pozitív egész n esetén $a_n \leq K$. A K számot a sorozat egy **felső korlátjának** nevezzük.

Definíció Az (a_n) sorozat **alulról korlátos**, ha létezik olyan k valós szám, hogy minden pozitív egész n esetén $a_n \geq k$. A k számot a sorozat egy **alsó korlátjának** nevezzük.

Definíció Az (a_n) sorozat **korlátos**, ha alulról is és felülről is korlátos.

Oldjuk meg!

1. Számítsuk ki az alábbi általános taggal adott sorozatok első hat tagját, és ábrázoljuk azokat számegyenesen!

a) $a_n = 9 - 4n$; b) $b_n = \frac{n+2}{n}$; c) $c_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{3}\right)$;

d) $d_n = \frac{(-2)^n}{3n-2}$; e) $e_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$.

2. Határozzuk meg az alábbi – rekurzív definícióval megadott – sorozatok első hat tagját, és ábrázoljuk azokat számegyenesen!

a) $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_n = 2a_{n-1}$ ($n > 1$); b) $b_1 = 1$, $b_n = 4 - b_{n-1}$ ($n > 1$);

c) $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_n = \frac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2}$ ($n > 2$); d) $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, $d_n = \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}$ ($n > 2$).

3. Legyen adott az $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = \frac{3a_{n-1}}{a_{n-2}}$ ($n > 2$)! Határozzuk meg a sorozat 2012. tagját és az első 32 tagjának az összegét!

4. Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az alábbi sorozatokat!

a) $a_n = 6n - 4$; b) $b_n = 2 - 7n$; c) $c_n = \frac{n-4}{n+4}$; d) $d_n = \log_3 n$.



5. Adjuk meg az

- a) $a_n = 7 - 3n$ sorozat egy felső korlátját;
- b) $a_n = 2n^2 + 1$ sorozat egy alsó korlátját;
- c) $a_n = \frac{n+3}{n+1}$ sorozat egy felső és egy alsó korlátját!

2. A számtani sorozat



1. példa Egy üzem az első héten 600 terméket gyárt, majd minden héten 15-tel többet.

- a) Hány hét alatt nő 50%-kal a termelés?
- b) Mennyi terméket gyárt az első 8 hét alatt?

Megoldás:

Jelölje a_1 a kezdeti termékmennyiséget, és a_n azt, hogy mennyi terméket gyártanak $n-1$ hét elteltével! A feladat szerint $a_1 = 600$, míg $a_n = 1,5 \cdot 600 = 900$. Határozzuk meg az n értékét! Mivel minden héten 15 termékkel többet gyártanak, mint az előző héten, ezért $a_2 = 600 + 15$, $a_3 = 600 + 2 \cdot 15$, $a_4 = 600 + 3 \cdot 15$, és így tovább. Ebből már jól látszik, hogy $a_n = 600 + (n-1)15$. Így a $600 + (n-1)15 = 900$ egyenlethez jutunk, melyből azt kapjuk, hogy $n-1 = 20$. Tehát 20 hét alatt nő 50%-kal a termelés.

b) Az a) részben látottak alapján könnyen kiszámolhatjuk, hogy a 8 hét mindegyikén mennyi termék készül az üzemben. Így

$$a_1 = 600, a_2 = 615, a_3 = 630, a_4 = 645,$$

$$a_5 = 660, a_6 = 675, a_7 = 690, a_8 = 705.$$

Ennek a 8 számnak az összege a válasz a b) kérdésre. Próbáljuk ezt a lehető legegyszerűbben meghatározni! Írjuk le egymás alá a keresett összeget az alábbi módon!

$$S_8 = 600 + 615 + 630 + 645 + 660 + 675 + 690 + 705;$$

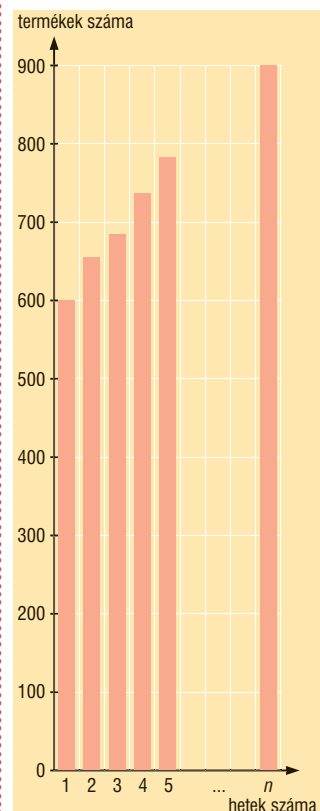
$$S_8 = 705 + 690 + 675 + 660 + 645 + 630 + 615 + 600.$$



Vegyük észre, hogy az egymás alatt álló számok összege minden esetben azonos, méghozzá egyenlő $600 + 705 = 1305$ -tel! Így ha összeadjuk a két egyenletet, azt kapjuk, hogy $2S_8 = 8 \cdot (600 + 705)$.

$$S_8 = \frac{8 \cdot (600 + 705)}{2} = 4 \cdot 1305 = 5220.$$

Tehát 8 hét alatt összesen 5220 terméket gyártanak.



2.1. ábra Hány hét alatt lesz 50%-os a növekedés?



2.2. ábra A ceruzák hossza számtani sorozatot alkot



2.3. ábra Hány szám alatt laknak a zöld ház lakói?

Az 1. példa a) részében egy olyan sorozat tagjait határoztuk meg, melyre teljesül, hogy a második tagtól kezdve bármely tag és a közvetlenül előtte álló tag különbsége 15, azaz állandó. Az ilyen sorozatot **számtani sorozatnak**, a különbséget pedig **differenciának** nevezzük, és d -vel jelöljük.



Definíció Az olyan (a_n) sorozatot, melyre a második tagtól kezdve teljesül, hogy bármely tagnak és a közvetlenül előtte álló tagnak a különbsége állandó, **számtani sorozatnak** nevezzük. Röviden: $a_n - a_{n-1} = d = \text{állandó}$ ($n > 1$), ahol a d szám neve **differencia**.

A definícióból következően egy adott d differenciájú számtani sorozat esetén $a_{n-1} = a_n - d$ ($n > 1$) és $a_{n+1} = a_n + d$. Adjuk össze ezt a két egyenletet és fejezzük ki belőle az a_n -et! Így kapjuk, hogy
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n > 1).$$
 Ez alapján megfogalmazhatjuk az alábbi tételt, mely rávilágít a számtani sorozat elnevezés eredetére.



Tétel Egy számtani sorozatban a második tagtól kezdve bármely tag a közvetlenül előtte, illetve mögötte álló két tag számtani közepével egyenlő, azaz $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ ($n > 1$).

Bizonyítható, hogy ennek a tételnek az alább megfogalmazott megfordítása is igaz.



Tétel Ha az (a_n) sorozat olyan, hogy a második tagtól minden a_n tagra teljesül az $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ összefüggés, akkor az (a_n) sorozat számtani sorozat.

Ahogy az 1. példa a) részében kifejeztük az a_n -et az n és a differencia segítségével, ugyanúgy ezt minden számtani sorozat esetén is megtehetjük. Ezt fogalmazza meg az alábbi tétel, melynek bizonyítása az 1. példa a) részében látottakhoz hasonlóan történik.



Tétel Ha (a_n) számtani sorozat, akkor a sorozat n -edik tagja $a_n = a_1 + (n-1)d$, ahol a_1 a sorozat első tagja, d pedig a differenciája.



Az 1. példa b) részében az ott szereplő számtani sorozat első 8 elemének összegét határoztuk meg. Az ott látott gondolatmenetet alkalmazva meghatározhatjuk egy számtani sorozat első n tagjának az összegét – tehát az $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ összeget – az alábbi módon.



Tétel Ha (a_n) számtani sorozat, akkor az első n tagjának összegét az $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ képlettel számolhatjuk ki.

Ha felhasználjuk, hogy a számtani sorozat n -edik tagja $a_n = a_1 + (n-1)d$, akkor az első n tag összegére a következő összefüggést kapjuk:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$$



2. példa Az alábbi sorozatok közül melyik számtani sorozat? Határozzuk meg a számtani sorozatok differenciáját!

- a) $a_n = 5 + 11n$; b) $b_n = \frac{9-n^2}{n+3}$;
c) $c_n = \frac{n}{n+3}$; d) $d_n = \operatorname{tg}(4n-1) \frac{\pi}{4}$.

Megoldás:

Annak eldöntésére, hogy egy sorozat számtani sorozat-e vagy sem, használjuk a számtani sorozat definícióját! Tehát mind a négy esetben írjuk fel az n -edik és az $n-1$ -edik tag különbségét, ha $n > 1$! Ha ez a különbség állandó, akkor a sorozat számtani sorozat, különben nem.

a) $a_n - a_{n-1} = 5 + 11n - [5 + 11(n-1)] = 5 + 11n - 11n + 6 = 11$, ha $n > 1$.

Tehát az (a_n) sorozat számtani sorozat, melynek differenciája 11.

b) Vegyük észre, hogy

$$b_n = \frac{9-n^2}{n+3} = \frac{(3-n)(n+3)}{n+3} = 3-n! \text{ Így } b_n - b_{n-1} = 3-n - (4-n) = -1,$$

tehát a (b_n) sorozat számtani sorozat, melynek differenciája -1 .

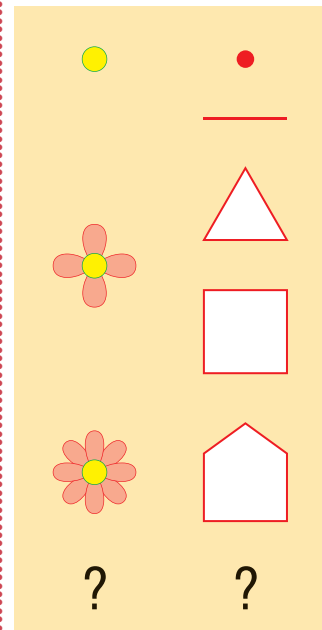
c)

$$\begin{aligned} c_n - c_{n-1} &= \frac{n}{n+3} - \frac{n-1}{n+2} = \frac{n(n+2) - (n+3)(n-1)}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n + 3}{(n+3)(n+2)} = \frac{3}{(n+3)(n+2)}, \end{aligned}$$

ami viszont nem állandó – pl. $n=1$ esetén $\frac{1}{4}$, míg $n=2$ esetén $\frac{3}{20}$ –, tehát a (c_n) sorozat nem számtani sorozat.



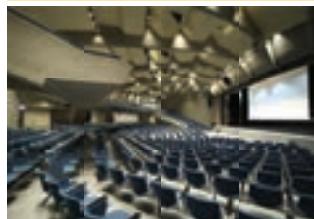
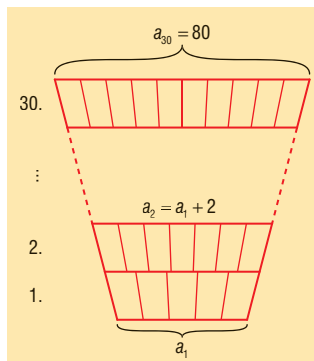
2.4. ábra Ha minden nap egyfel több tojás, akkor egy hét alatt hány tojás?



2.5. ábra Mi lehet a következő elem?

szám	6-os maradék
1541	5
1542	0
1543	1
1544	2
1545	3
⋮	⋮

2.6. ábra Néhány szám hatos maradéka



2.7. ábra A nézőtér és felosztása

d) Határozzuk meg a d_n pontos értékét!

$$d_n = \operatorname{tg}(4n-1)\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

Felhasználtuk, hogy a tangens függvény periódusa π . Azt kaptuk, hogy (d_n) sorozat konstans sorozat, ami viszont $d = 0$ differenciájú számtani sorozat.



3. példa Hány darab olyan egész szám van 1541 és 2011 között, melyek hatos maradéka 2?

Megoldás:

Ha két olyan szomszédos pozitív egész számot tekintünk, melyek hatos maradéka 2, akkor ezek között a különbség 6. Tehát a feladatban szereplő számok egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjainak tekinthetők, melynek első tagja $a_1 = 1544$ és differenciája $d = 6$. A kérdés az, hogy ennek a sorozatnak hány tagja esik 1541 és 2011 közé. Az utolsó olyan 2011-nél kisebb egész szám, melynek a hatos maradéka 2, a 2006. Így $a_n = 2006$. Ennek ismeretében határozzuk meg az n -et! Használjuk a számtani sorozat n -edik tagjára vonatkozó képletet: $2006 = 1544 + (n-1)6$!

Ebből kapjuk, hogy $n = 78$. Tehát 1541 és 2006 között 78 olyan pozitív egész szám van, melynek 2 a hatos maradéka.



4. példa Egy trapéz alakú nézőtér 30 sor van, és a második sortól kezdve minden sorban 2-vel több szék, mint az előtte levőben.

- Hány szék van az első sorban, ha az utolsó sorban 80 szék található?
- Hány férőhelyes a nézőtér?

Megoldás:

a) Jelöljük az n -edik sorban levő székek számát a_n -nel! A feltétel alapján $a_n - a_{n-1} = 2$ ($n > 1$), ezért az (a_n) sorozat egy $d = 2$ differenciájú számtani sorozat, melynek 30. tagja $a_{30} = 80$, és keressük az a_1 -et! A számtani sorozat n -edik tagjára vonatkozó képlet alapján $a_{30} = a_1 + 29d$, ahonnan $a_1 = a_{30} - 29d = 80 - 58 = 22$, tehát az első sorban 22 szék van.

b) A férőhelyek számát megkapjuk, ha meghatározzuk az a) részben szereplő számtani sorozat első 30 tagjának az összegét.

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{22 + 80}{2} \cdot 30 = 1530$$

Tehát a nézőtér 1530 férőhelyes.



5. példa Mihail Bulgakov *A Mester és Margarita* című regénye 587 oldalas. Hány nap alatt tudja elolvasni Tihamér ezt a könyvet, ha az első nap 40 oldalt olvas el, majd minden további napon 6 oldallal többet, mint előző nap? Hány oldalt olvas el az utolsó napon?

Megoldás:

Legyen az n -edik nap elolvasott oldalak száma a_n ! A feltétel alapján $a_n - a_{n-1} = 6$ ($n > 1$), így az (a_n) sorozat egy $d = 6$ differenciájú számtani sorozat, melynek első tagja 40. A feladat szerint meg kell határozni azt a legkisebb pozitív egész n számot, mely esetén $S_n \geq 587$.

Eszerint a $\frac{2 \cdot 40 + (n-1)6}{2} n \geq 587$ egyenlőtlenség legkisebb pozitív egész megoldását keressük. Átrendezés után a $3n^2 + 37n - 587 \geq 0$ egyenlőtlenséghez jutunk.

Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 3x^2 + 37x - 587$ zérushelyeit. Ezek $x_1 \approx -21,45$ és $x_2 \approx 9,12$. Mivel az f függvény grafikonja egy az y tengely pozitív irányába nyíló parabola, ezért

$f(x) = 3x^2 + 37x - 587 \geq 0$, ha $x \leq -21,45$ vagy $9,12 \leq x$. Így a $3n^2 + 37n - 587 \geq 0$ egyenlőtlenség legkisebb pozitív egész megoldása $n = 10$. Tehát Tihamér 10 nap alatt olvassa el a könyvet.

A második kérdésre megkaphatjuk a választ, ha először kiszámoljuk, hogy hány oldalt olvas el összesen az első 9 nap alatt.

$$S_9 = \frac{2 \cdot 40 + 8 \cdot 6}{2} \cdot 9 = 576$$

Így a 10. napra $587 - 576 = 11$ oldal marad.



6. példa Egy háromszög szögei egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge, ha a legnagyobb oldala kétszerese a legkisebb oldalának?

Megoldás:

Legyenek a háromszög szögei $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, ekkor a feltétel alapján $\alpha = \beta - d$ és $\gamma = \beta + d$, ahol a nemnegatív d szám a számtani sorozat differenciája. Mivel a háromszög belső szögeinek összege 180° , ezért $180^\circ = \alpha + \beta + \gamma = \beta - d + \beta + \beta + d = 3\beta$. Tehát a háromszög középső szöge $\beta = 60^\circ$. A feltételek alapján $c = 2a$. Írjuk fel a háromszög b oldalára a koszinusztételt, és használjuk fel az eddigi eredményeket!

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta;$$

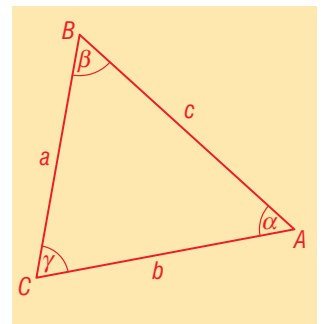
$$b^2 = a^2 + 4a^2 - 2a \cdot 2a \cdot \cos 60^\circ;$$



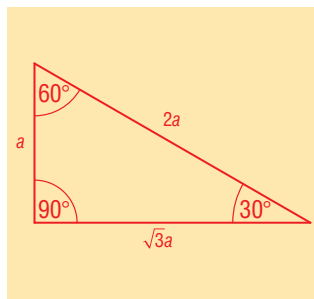
2.8. ábra Mihail Bulgakov (1891–1940)



2.9. ábra Tihamér olvas



2.10. ábra Mekkora a háromszög szögei?



2.11. ábra A keresett háromszög

$$b^2 = a^2 + 4a^2 - 2a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2};$$

$$b^2 = a^2 + 4a^2 - 2a^2;$$

$$b^2 = 3a^2;$$

$$b = \sqrt{3}a.$$

Tehát a háromszög oldalai a , $\sqrt{3}a$, $2a$ hosszúságúak. Mivel $a^2 + (\sqrt{3}a)^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = (2a)^2$, ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a háromszög legnagyobb szöge 90° -os.



Oldjuk meg!

1. Az alábbi sorozatok közül melyek számtani sorozatok? Adjuk meg a számtani sorozatok differenciáját!

a) $a_n = 7n - 11$;

b) $b_n = \frac{14 - 4n}{5}$;

c) $c_n = \frac{5 + 2n}{n}$;

d) $d_n = \cos\left[(6n - 2)\frac{\pi}{3}\right]$;

e) $e_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right)$.

2. Adjuk meg az (a_n) számtani sorozat első tagját és differenciáját, ha tudjuk, hogy

a) $\begin{cases} a_2 + a_8 = 16 \\ a_4 + a_{10} = 24 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} a_{10} - a_4 = 36 \\ a_2 + a_6 = 48 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} a_{15} - a_8 = 56 \\ a_{20} = 2a_{10} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} a_5 + a_{13} = 16 + 2a_8 \\ a_1 \cdot a_2 = a_3^2 \end{cases}$!

3. Egy időszaki kiállítást a megnyitása napján 130-an néztek meg. A második naptól kezdve a nyitva tartásának minden napján 30-cal többen látták, mint az előző nap. Hány látogató volt a 25. napon? Hány látogató kereste fel a kiállítást az első 30 nap alatt?

4. Összeszoroztuk a 10 első tíz pozitív egész kitevőjű hatványát. Hány jegyű a kapott szám?

5. Hány átlója van annak a sokszögnek, melyben a legkisebb szög 100° -os, és a szögek egy $d = 10^\circ$ differenciájú számtani sorozat egymást követő tagjai?

6. Jelölje S_1 a 100-nál nagyobb, de 300-nál kisebb egész számok közül azoknak az összegét, melyek ötös maradéka 3, S_2 azoknak az összegét, melyek négyes maradéka 1. Határozzuk meg az $S_2 - S_1$ különbséget!

7. Egy számtani sorozat első 10 tagjának összege harmada a következő tíz tag összegének. A sorozat hatodik tagja 10-zel kisebb a negyedik tagjánál. Melyik ez a sorozat?

8. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Mekkora az oldalak, ha a háromszög területe 294 cm^2 ?

9. Egy fűreg kezdetben 10 mm hosszú. Az első órában megduplázza a hosszát, majd minden további órában 15 mm-rel többet nő, mint az előző órában. Legalább hány órának kell elteltie, hogy a hossza legalább 1,5 m legyen?



2.12. ábra Kiállítás

3. A mértani sorozat



1. példa Egy új üzemben célként tűzik ki, hogy a második évtől kezdve minden évben az előző évihez képest 20%-kal növelik a termelést.

- Hányszorosa lesz nyitás után hat évvel a termelés az első évi termelésnek? (Két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg az eredményt!)
- Hányadik évben lesz először a termelés az első évi termelésnek legalább négyszerese?
- Ha az első évben 120 000 db terméket gyártottak, akkor hány terméket gyártanak az üzemben öt teljes év alatt?

Megoldás:

a) Az első évben legyártott termékek számát jelöljük a_1 -gyel! A második évben $a_2 = a_1 \cdot 1,2$ terméket gyártottak. A harmadik évben $a_3 = a_2 \cdot 1,2 = a_1 \cdot 1,2^2$ terméket gyártottak, és így tovább a hatodik évben $a_6 = a_5 \cdot 1,2 = a_1 \cdot 1,2^5$ terméket. Ez az első évi termelésnek az $1,2^5 = 2,48832 \approx 2,49$ -szorososa. Tehát nyitás után hat évvel a termelés az első évi termelés 2,49-szorosa.

b) Az a) rész gondolatmenetét követve kapjuk, hogy nyitás után n évvel $a_n = a_1 \cdot 1,2^{n-1}$ terméket gyártanak. A kérdés, hogy legalább mekkora az n , ha $1,2^{n-1} \geq 4$. Vegyük mindkét (pozitív) oldal tízes alapú logaritmusát! Mivel a tízes alapú logaritmusfüggvény (3.2. ábra) szigorúan monoton növekvő, ezért azt kapjuk, hogy $\lg 1,2^{n-1} \geq \lg 4$. Ebből a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy $(n-1) \lg 1,2 \geq \lg 4$, azaz $n \geq \frac{\lg 4}{\lg 1,2} + 1 \approx 8,6$. Tehát a 9. évben lesz

a termelés az első évi termelés négyszerese.

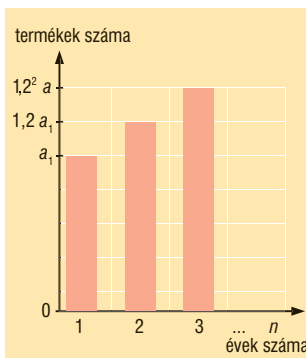
c) Először adjuk meg, hogy hány terméket gyártanak az egyes években! Legyen $a_1 = 120\,000$! Ekkor $a_2 = 120\,000 \cdot 1,2$, $a_3 = 120\,000 \cdot 1,2^2$, $a_4 = 120\,000 \cdot 1,2^3$ és $a_5 = 120\,000 \cdot 1,2^4$. Ezek összegét kell kiszámolni. Erre most adjunk egy olyan módszert, amely könnyen általánosítható!

$$\text{Legyen } S_5 = 120\,000 + 120\,000 \cdot 1,2 + 120\,000 \cdot 1,2^2 + 120\,000 \cdot 1,2^3 + 120\,000 \cdot 1,2^4!$$

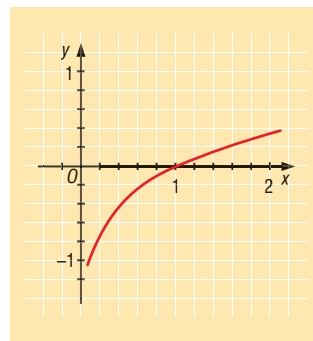
Szorozzuk meg mindkét oldalt 1,2-del, majd a kapott egyenlőségből vonjuk ki az eredeti egyenlőséget!

$$1,2 \cdot S_5 = 120\,000 \cdot 1,2 + 120\,000 \cdot 1,2^2 + 120\,000 \cdot 1,2^3 + 120\,000 \cdot 1,2^4 + 120\,000 \cdot 1,2^5$$

A kivonás után kapjuk, hogy $1,2 \cdot S_5 - S_5 = 120\,000 \cdot 1,2^5 - 120\,000$,



3.1. ábra Folyamatos fejlődés



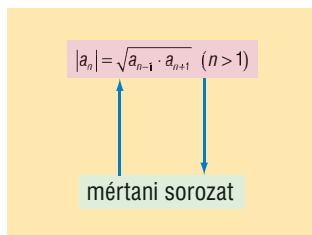
3.2. ábra A tízes alapú logaritmusfüggvény grafikonja

$$\lg a^x = x \lg a, \text{ ha } a > 0$$

3.3. ábra A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság



3.4. ábra A maghasadáskor bekövetkező láncreakcióban is mértani sorozatot alkot az egyes lépésekben elbomló atommagok száma



3.5. ábra Tétel és megfordítása

azaz $S_5 = \frac{120\,000 \cdot 1,2^5 - 120\,000}{0,2} = 120\,000 \cdot \frac{1,2^5 - 1}{0,2} = 892\,992$. Tehát

öt év alatt 892 992 db terméket gyártanak.



Az 1. példában olyan sorozatot vizsgáltunk, melyre teljesül, hogy a második tagtól kezdve bármely tagnak és a közvetlenül előtte álló tagnak a hányadosa állandó. Az ilyen sorozatot **mértani sorozatnak** nevezzük, az állandót pedig **kvóciensnek** (hányados) hívjuk és q -val jelöljük. Ebben a feladatban $q = 1,2$.

Definíció Az olyan (a_n) sorozatot, amelyre a második tagtól kezdve teljesül, hogy bármely tagnak és a közvetlenül előtte álló tagnak a hányadosa állandó, **mértani sorozatnak** nevezzük. Röviden: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q = \text{állandó} \quad (n > 1)$, ahol a q szám neve **kvóciens**.

A definícióból következik, hogy q nem lehet 0.

A definíció alapján egy adott q kvóciensű mértani sorozat esetén

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{q} \quad (n > 1) \text{ és } a_{n+1} = a_n \cdot q. \text{ Szorozzuk össze ezt a két egyenletet,}$$

és fejezzük ki belőle az a_n -et! Így kapjuk, hogy $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad (n > 1)$,

azaz $|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$. Ez alapján megfogalmazhatjuk az alábbi tételt, mely rávilágít a mértani sorozat elnevezés eredetére.



Tétel Egy mértani sorozatban a második tagtól kezdve bármely tag abszolút értéke a közvetlenül előtte, illetve utána álló két tag mértani közepével egyenlő, azaz $|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad (n > 1)$.

Bizonyítható, hogy ennek a tételnek az alább megfogalmazott megfordítása is igaz.



Tétel Ha az (a_n) sorozat olyan, hogy a második tagtól minden a_n tagra teljesül az $|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ összefüggés, akkor az (a_n) sorozat mértani sorozat.

A mértani sorozat esetén is megadhatjuk az n -edik tagot az első tag és a kvóciens segítségével.



Tétel Ha (a_n) mértani sorozat, akkor a sorozat n -edik tagja $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, ahol a_1 a sorozat első tagja, q pedig a kvóciense.

Az 1. példában látott gondolatmenetet alkalmazva határozhatjuk meg a mértani sorozat első n tagjának az összegét, ha $q \neq 1$. Ha $q = 1$, akkor a sorozat konstans sorozat, így $S_n = n \cdot a_1$.



Tétel Ha (a_n) mértani sorozat, akkor az első n tagjának összegét az $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ képlettel számolhatjuk ki, feltéve, hogy $q \neq 1$, és $S_n = n \cdot a_1$, ha $q = 1$.



3.6. ábra Hány szőlőszem van a fűtön, ha feltételezzük, hogy minden sorban 1,2-szeresére nő a szemek száma?



2. példa Egy mértani sorozat harmadik tagja 45, hetedik tagja 3645. Határozzuk meg a sorozat első hét tagjának összegét!

Megoldás:

A feltételek alapján $a_3 = 45 = a_1 q^2$ és $a_7 = 3645 = a_1 q^6$, ahol a_1 a sorozat első tagja, q pedig a kvóciense. Ha a második és az első egyenlet megfelelő oldalait elosztjuk egymással, akkor a $q^4 = 81$ egyenlethez jutunk, ahonnan kapjuk, hogy $|q| = 3$, azaz $q_1 = 3$ és $q_2 = -3$. Tehát két olyan sorozat van, amely megfelel a feltételeknek.

I. eset:

Ha $q = 3$, akkor $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{45}{3^2} = 5$, az első hét tag összege

$$S_7 = a_1 \frac{q^7 - 1}{q - 1} = 5 \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 5465.$$

II. eset:

Ha $q = -3$, akkor $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{45}{(-3)^2} = 5$, az első hét tag összege

$$S_7 = a_1 \frac{q^7 - 1}{q - 1} = 5 \frac{(-3)^7 - 1}{-3 - 1} = 2735.$$

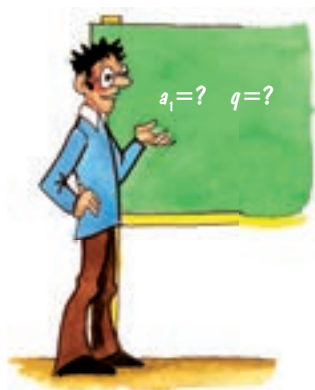
Ellenőrzéssel meggyőződhetünk számításaink helyességéről.

a_1
a_2
45
a_4
a_5
a_6
3645
a_8
$\vdots$

3.7. ábra $S_7 = ?$



3. példa Egy mértani sorozat első és második tagjának összege 12, a harmadik és negyedik tagjának összege 300. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát!



3.8. ábra Ha több ismeretlen van, akkor egyenletrendszerrel oldható meg a feladat



3.9. ábra A sejtosztódáskor keletkező sejtek száma is mértani sorozat szerint nő

Megoldás:

A feltételek alapján az alábbi egyenletrendszert írhatjuk fel.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 12 \\ a_3 + a_4 = 300 \end{cases}$$

Használjuk fel az n -edik tagra vonatkozó képletet!

$$\begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q = 12 \\ a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = 300 \end{cases}$$

A második egyenlet bal oldalán emeljük ki $a_1 q^2$ -et, az első egyenletben a_1 -et!

$$\begin{cases} a_1(1+q) = 12 \\ a_1 \cdot q^2(1+q) = 300 \end{cases}$$

Osszuk el a második egyenlet és az első egyenlet megfelelő oldalait! Ekkor azt kapjuk, hogy $q^2 = 25$, amiből $|q| = 5$, azaz $q_1 = 5$ és $q_2 = -5$. Tehát a feltételeknek két sorozat felel meg.

I. eset:

Ha $q = 5$, akkor az első egyenletből $a_1 = \frac{12}{1+q} = 2$.

II. eset:

Ha $q = -5$, akkor $a_1 = \frac{12}{1+q} = -3$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk számításaink helyességéről.



4. példa Egy mértani sorozat első három tagjának összege 42, a második és az első tag különbsége 6. Határozzuk meg az első négy tag összegét!

Megoldás:

Írjuk fel a feltételeknek megfelelő egyenleteket!

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 42 \\ a_2 - a_1 = 6 \end{cases}$$

Fejezzük ki a tagokat az első taggal és a kvócienssel!

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 42 \\ a_1 q - a_1 = 6 \end{cases}$$

Mindkét egyenlet bal oldalán emeljük ki a_1 -et, majd osszuk el az első és a második egyenlet megfelelő oldalait!

$$\begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 42 \\ a_1(q-1) = 6 \end{cases}$$



Azt kapjuk, hogy $\frac{1+q+q^2}{q-1} = 7$. Ezt átrendezve a $q^2 - 6q + 8 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai $q_1 = 4$ és $q_2 = 2$. Tehát két sorozat felel meg a feltételeknek.

I. eset:

Ha $q = 4$, akkor a második egyenletből $a_1 = \frac{6}{q-1} = 2$. Az első négy tag összege $S_4 = a_1 \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 2 \frac{4^4 - 1}{4 - 1} = 170$.

II. eset:

Ha $q = 2$, akkor $a_1 = \frac{6}{q-1} = 6$. Az első négy tag összege $S_4 = a_1 \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 6 \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 90$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk számításaink helyességéről.



5. példa Három pozitív szám egy mértani sorozat első három tagja. Tízese alapú logaritmusaik összege 3, a második és az első szám különbsége 5. Melyik ez a három szám?

Megoldás:

A feltételek alapján az alábbi egyenleteket írhatjuk fel.

$$\begin{cases} \lg a_1 + \lg a_2 + \lg a_3 = 3 \\ a_2 - a_1 = 5 \end{cases}$$

Az első egyenletet az azonos alapú logaritmusok összegére vonatkozó azonosság (3.10. ábra) alapján $\lg(a_1 a_2 a_3) = 3$ alakban írhatjuk, amiből a logaritmus definíciója alapján kapjuk, hogy $a_1 a_2 a_3 = 10^3 = 1000$.

Mivel $a_1 = \frac{a_2}{q}$, és $a_3 = a_2 q$, így $1000 = a_1 a_2 a_3 = \frac{a_2}{q} a_2 a_2 q = a_2^3$, azaz

$a_2 = 10$. A második egyenlet alapján $10 - \frac{10}{q} = 5$.

$$10 - \frac{10}{q} = 5;$$

$$10q - 10 = 5q;$$

$$5q = 10;$$

$$q = 2.$$

Tehát $q = 2$, így a három szám: 5, 10 és 20. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk ennek helyességéről.

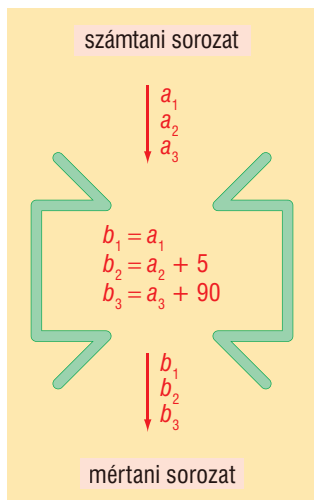
- a) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$,
ahol $a, b, c > 0$, $a \neq 1$;
- b) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$,
ahol $a, b, c > 0$, $a \neq 1$;
- c) $\log_a (b^c) = c \cdot \log_a b$,
ahol $a, b > 0$, $a \neq 1$;
- d) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$,
ahol $a, b, c > 0$, $a, c \neq 1$.



3.10. ábra A logaritmus azonosságai



3.11. ábra A sorozat első három tagja



3.12. ábra Hogyan lesz a számtani sorozatból mértani sorozat



6. példa Egy számtani sorozat első három tagjának összege 60. Ha a második számhoz 5-öt, a harmadikhoz 90-et adunk, akkor egy mértani sorozat első három tagjához jutunk. Határozzuk meg a mértani sorozat kvóciensét!

Megoldás:

A számtani sorozat első három tagját jelölje a_1, a_2, a_3 , a mértani sorozatét b_1, b_2, b_3 ! A feltételek alapján $a_1 + a_2 + a_3 = 60$ és $b_1 = a_1, b_2 = a_2 + 5, b_3 = a_3 + 90$.

Mivel $a_1 = a_2 - d$ és $a_3 = a_2 + d$, ahol d a számtani sorozat differenciája, ezért $a_1 + a_2 + a_3 = a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 3a_2 = 60$, így $a_2 = 20$. Mivel b_1, b_2, b_3 egy mértani sorozat három egymást követő tagja, ezért $b_2^2 = b_1 b_3$, azaz $25^2 = (20 - d)(20 + d + 90)$. A műveletek elvégzése és rendezés után a $d^2 + 90d - 1575 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek megoldásai $d_1 = 15$ és $d_2 = -105$.

I. eset:

Ha $d = 15$, akkor $a_1 = 5$ és $a_3 = 35$. A mértani sorozat első három tagja $b_1 = 5, b_2 = 25$ és $b_3 = 125$, a kvóciens ekkor $q = 5$.

II. eset:

Ha $d = -105$, akkor $a_1 = 125$ és $a_3 = -85$. A mértani sorozat első három tagja $b_1 = 125, b_2 = 25$ és $b_3 = 5$, a kvóciens ekkor $q = \frac{1}{5}$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk az eredmények helyességéről.



7. példa Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 399, ez a három szám ebben a sorrendben egy számtani sorozat első, nyolcadik és ötvenhetedik tagja. Melyik ez a három szám?

Megoldás:

A mértani sorozat első három tagja legyen a_1, a_2, a_3 , ezekről tudjuk, hogy $a_1 + a_2 + a_3 = 399$ és $b_1 = a_1, b_8 = a_2, b_{57} = a_3$, melyek egy számtani sorozat megfelelő tagjai. Legyen a számtani sorozat differenciája d , ekkor $b_1 + b_1 + 7d + b_1 + 56d = 399$, azaz $3b_1 + 63d = 399$. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát 3-mal és fejezzük ki belőle b_1 -et!

$$b_1 = 133 - 21d$$

Másrészt tudjuk, hogy $a_2^2 = a_1 a_3$, azaz $b_8^2 = b_1 b_{57}$. Felhasználva a számtani sorozat n -edik tagjára vonatkozó képletet kapjuk, hogy



$$\begin{aligned}(b_1 + 7d)^2 &= b_1(b_1 + 56d); \\ b_1^2 + 14b_1d + 49d^2 &= b_1^2 + 56b_1d; \\ 49d^2 - 42b_1d &= 0; \\ 7d(7d - 6b_1) &= 0.\end{aligned}$$

Tehát $d_1 = 0$ és $d_2 = \frac{6b_1}{7}$.

I. eset:

Ha $d = 0$, akkor $b_1 = 133 - 21d = 133$. Ekkor mindhárom szám 133.

II. eset:

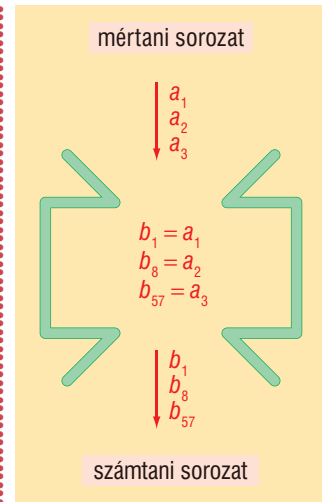
Ha $d = \frac{6b_1}{7}$, akkor $b_1 = 133 - 21d = 133 - 21 \cdot \frac{6b_1}{7} = 133 - 18b_1$.

Innen $19b_1 = 133$, azaz $b_1 = 7$. Ebből azt kapjuk, hogy $d = 6$, valamint

$a_2 = b_8 = b_1 + 7d = 7 + 42 = 49$ és $a_3 = b_{57} = b_1 + 56d = 7 + 336 = 343$.

Tehát a keresett számok 7, 49, 343.

Az eredmények helyességéről ellenőrzéssel meggyőződhetünk.



3.13. ábra Hogyan lesz a mértani sorozatból számtani sorozat

Oldjuk meg!

1. Számítsuk ki a mértani sorozat első öt tagjának az összegét, ha tudjuk, hogy
a) $a_1 = 3$, $q = 2$; b) $a_2 = 6$, $a_4 = 54$; c) $a_5 = 12$, $a_9 = 192$!

2. Határozzuk meg a mértani sorozat első öt tagját, ha

a) $q = 3$ és $S_5 = 484$; b) $q = 2$ és $S_7 = \frac{127}{3}$; c) $q = \frac{1}{3}$ és $S_4 = \frac{40}{3}$!

3. Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját és hányadosát, ha

a) $\left. \begin{aligned} a_4 + a_3 &= 10 \\ a_5 - a_3 &= 80 \end{aligned} \right\};$ b) $\left. \begin{aligned} a_1 a_2 a_3 &= 27 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= \frac{63}{4} \end{aligned} \right\};$ c) $\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 42 \\ a_2 + a_3 + a_4 &= 210 \end{aligned} \right\}!$

4. Egy autót újonnan 2 690 000 Ft-ért vásároltunk. Ha évente 10%-os értékvesztéssel kalkulálunk, akkor mennyi lesz az autó értéke négy év múlva? A vásárlástól számított hányadik évben lesz az autó értéke 1 500 000 Ft-nál kevesebb?

5. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 108. Ha az első tagját 8-cal, a másodikat 20-szal csökkentjük, míg a harmadikat 4-gyel növeljük, akkor egy mértani sorozat első három tagjához jutunk. Határozzuk meg a mértani sorozat kvóciensét!

6. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 172. Ha az első tagját 24-gyel, a másodikat 40-nel növeljük, míg a harmadikat 44-gyel csökkentjük, akkor egy számtani sorozat három egymást követő tagjához jutunk. Határozzuk meg a számtani sorozat differenciáját!



3.14. ábra Új autó



4. Kamatszámítás, törlesztőrészletek számítása



4.1. ábra Bank

A mértani sorozatok nagyon fontos szerepet játszanak a kamatok, a törlesztőrészletek és életjáradékok kiszámításánál, azaz a pénzügyi matematikában. Mielőtt még konkrét példákon keresztül megismerkednénk ezzel a témakörrel, tisztáznunk kell néhány fogalmat!

A **tőke** a befektetett, azaz kezdeti pénzösszeget jelenti. A **kamat** egyszerűen fogalmazva a tőke szolgáltatásainak az ára. A kamat mindig egy pénzösszeg, amelyet a befektetésünk névértéke után fizet meg az, akinek a tőkénket kölcsönadtuk. A **kamatláb** egy százalékban adott szám, amely megmutatja, hogy a kamat hány százaléka a tőkének, azaz a befektetett összegnek, jele p . Tehát $p = \frac{\text{kamat}}{\text{tőke}} \cdot 100$. A köznap

életben – és gyakran a szakirodalomban is – a kamat kifejezést a kamatláb szinonimájaként is használják. Annak eldöntésében, hogy a kamat a kifizetett pénzösszeget vagy annak százalékos kifejezését jelenti-e, a szövegkörnyezet értelmezése segít. A **tőkésítés** azt a folyamatot jelenti, amely során az időszak végén a kamatot az alaptőkéhez csatolják és a következő időszakban a megnövelt összeg fog tovább kamatozni. Ezt **kamatoskamat-számításnak** nevezzük.



1. példa Az egyik év elején beteszünk 500 000 Ft-ot a bankba, évi 9%-os kamatláb mellett. Mennyi pénzünk lesz 6 év elteltével? Hány százalékkal több ez a pénz, mint a befektetett összeg?

Megoldás:

Jelöljük a tőkét t_0 -l! A befektetett pénz tehát $t_0 = 500\,000$ Ft.

- ♥ Egy év elteltével $t_1 = t_0 \cdot 1,09$ pénzünk lesz.
- ♥ Két év múlva $t_2 = (t_0 \cdot 1,09) \cdot 1,09 = t_0 \cdot 1,09^2$, és így tovább.
- ♥ Hat év múlva $t_6 = t_0 \cdot 1,09^6 = 500\,000 \cdot 1,09^6 \approx 838\,550$ Ft-unk lesz a bankban.

Ez az összeg $\frac{838\,550 - 500\,000}{500\,000} \cdot 100 = 67,71\%$ -kal több, mint a befektetett pénz.



4.2. ábra A pénz a bankban kamatozik



Ha a kamatláb p , a tőke t_0 és n a kamatjöváírások száma (futamidő), akkor a $t_n = t_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ képlet adja meg a futamidő végén a pénzösszeget.



2. példa Az előző feladatot oldjuk meg úgy, hogy

- a) félévenként;
 - b) negyedévenként;
 - c) havonként tőkésítenek
- változatlan tőke és éves kamatláb mellett hat teljes évre számolva!

Megoldás:

Ha az éves kamatláb p százalék, akkor az évi k -szori tőkésítés esetén $\frac{p}{k}$ százalékos kamatlábbal számolnak a pénzügyi gyakorlatban.

a) Az előzőek alapján a félévenkénti kamatláb 4,5%. A hat év alatt ez 12 tőkésítést jelent, így $t_{12} = t_0 \cdot 1,045^{12} = 500\,000 \cdot 1,045^{12} \approx 847\,940$ Ft-unk lesz a bankban.

b) A negyedéves kamatláb 2,25%. A hat év alatt a tőkésítések száma 24, így $t_{24} = t_0 \cdot 1,0225^{24} = 500\,000 \cdot 1,0225^{24} \approx 852\,885$ Ft-unk lesz a bankban.

c) A havi kamatláb 0,75%, a tőkésítések száma 72, így $t_{72} = t_0 \cdot 1,0075^{72} = 500\,000 \cdot 1,0075^{72} \approx 856\,275$ Ft-unk lesz a bankban.



4.3. ábra Tőke



3. példa Tegyük fel, hogy átlagosan évi 6%-os az árszínvonal-emelkedés, azaz az infláció. Ilyen feltétel mellett hány százalékkal nőtt az 1. példában szereplő tőkénk vásárlóértéke a 6 év alatt?

Megoldás:

Az első példában kiszámoltuk, hogy a 6. év végén $t_6 = t_0 \cdot 1,09^6 = 500\,000 \cdot 1,09^6 \approx 838\,550$ Ft-unk lesz a bankban. A jelenleg 500 000 Ft-ba kerülő áru 6 év múlva várhatólag $e_6 = t_0 \cdot 1,06^6 = 500\,000 \cdot 1,06^6 \approx 709\,260$ Ft-ba fog kerülni. A tőke vásárlóértéke $\frac{838\,550}{709\,260} \approx 1,18$ szeresére nőtt, azaz 18%-kal növekedett a 6 év alatt.



4.4. ábra Hova tegyem a pénzem?



4. példa Mekkora összeget kell betennünk a bankba, hogy öt év múlva 600 000 Ft-ot vehessünk ki, évi 10%-os kamatláb mellett? (Ezt **diszkontálásnak** nevezik, a keresett értéket pedig **diszkontált értéknek**.) (Az eredményt egész számra kerekítve adjuk meg!)

Megoldás:

A feladatban a $t_5 = 600\,000$ Ft és a t_0 értéket keressük. Ez alapján a

$$600\,000 = t_0 \cdot 1,1^5, \text{ így } t_0 = \frac{600\,000}{1,1^5} \approx 372\,553 \text{ Ft-ot kell betennünk.}$$



4.5. ábra Hány évig kamatoztassuk a pénzünket?



4.6. ábra Folyamatos növekedés



5. példa Az egyik év elején 320 000 Ft-ot tettünk be a bankba, ahol az évi kamatláb 11%-os. Legalább hány évig kell kamatoztatni a pénzünket évenkénti tőkésítés mellett, hogy 500 000 Ft-ot felvehessünk?

Megoldás:

Jelölje n az évek számát! Mivel 500 000 forintot szeretnénk felvenni, ezért $t_n \geq 500\,000$ Ft és $t_0 = 320\,000$ Ft, így az alábbi egyenlőtlenséget írhatjuk fel.

$$500\,000 \leq 320\,000 \cdot 1,11^n;$$

$$1,5625 \leq 1,11^n.$$

Vegyük mindkét (pozitív) oldal tízes alapú logaritmusát! Ekkor a tízes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedése miatt

$$\lg 1,5625 \leq \lg 1,11^n;$$

$$\lg 1,5625 \leq n \lg 1,11;$$

$$n \geq \frac{\lg 1,5625}{\lg 1,11} \approx 4,68.$$

Tehát legalább 5 évig kell kamatoztatni a pénzünket.



6. példa Négy éven keresztül minden év elején 50 000 Ft-ot teszünk be a bankba évi 9%-os kamatláb mellett. Mennyi pénzt vehetünk ki 4 év elteltével, ha kamatos kamattal számolunk? (Az eredményt egész számra kerekítve adjuk meg!)

Megoldás:

Legyen $t_0 = 50\,000$ Ft!

Az első év végén: $t_1 = t_0 \cdot 1,09$,

a második év végén:

$$t_2 = (t_1 + t_0) \cdot 1,09 = (t_0 \cdot 1,09 + t_0) \cdot 1,09 = t_0 \cdot 1,09^2 + t_0 \cdot 1,09,$$

a harmadik év végén:

$$t_3 = (t_2 + t_0) \cdot 1,09 = (t_0 \cdot 1,09^2 + t_0 \cdot 1,09 + t_0) \cdot 1,09 = t_0 \cdot 1,09^3 + t_0 \cdot 1,09^2 + t_0 \cdot 1,09,$$

a negyedik év végén:

$$t_4 = (t_3 + t_0) \cdot 1,09 = t_0 \cdot 1,09^4 + t_0 \cdot 1,09^3 + t_0 \cdot 1,09^2 + t_0 \cdot 1,09.$$

Ezzel megkaptuk egy $q = 1,09$ kvóciensű mértani sorozat első négy tagjának összegét. Ez röviden

$$t_4 = t_0 \cdot 1,09 \frac{1,09^4 - 1}{1,09 - 1} = 50\,000 \cdot 1,09 \frac{1,09^4 - 1}{0,09} \approx 249\,236.$$

Tehát 249 236 Ft-ot vehetünk ki a negyedik év végén.





Az előző feladatban látott gondolatmenetet általánosítva megkaphatjuk, hogy t_0 járadéknak az n -edik év végére felnövekedett értéke, ha a befizetés minden év elején esedékes és a kamatláb p százalék:

$$t_n = t_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}{\frac{p}{100}}.$$

Az utolsó példában az egyenlő részletekben történő hiteltörlesztést tárgyaljuk, melyet a pénzügyi életben **annuitás**nak neveznek.



7. példa Az egyik évben 500 000 Ft személyi kölcsönt veszünk fél évi 24%-os kamatláb mellett 5 évre. A törlesztés havonként történik, az első törlesztőrészletet a kölcsön felvétele után egy hónappal fizetjük. Mennyi lesz a havi törlesztőrészlet, ha a kamatláb végig változatlan marad?

Megoldás:

Legyen a havi törlesztőrészlet x , a kölcsön összege K ! Ha az éves kamatláb 24%, akkor a havi 2%.

Írjuk fel, hogy mennyi a kölcsönből hátralévő összeg:

1 hónap elteltével: $K \cdot 1,02 - x$,

2 hónap elteltével:

$$(K \cdot 1,02 - x) \cdot 1,02 - x = K \cdot 1,02^2 - x \cdot 1,02 - x,$$

3 hónap elteltével:

$$(K \cdot 1,02^2 - x \cdot 1,02 - x) \cdot 1,02 - x = K \cdot 1,02^3 - x \cdot 1,02^2 - x \cdot 1,02 - x.$$

Ez alapján már könnyen felírhatjuk a 60. hónap végén fennálló tartozás összegét, amelynek az értéke természetesen 0.

$$\begin{aligned} 0 &= K \cdot 1,02^{60} - x \cdot 1,02^{59} - x \cdot 1,02^{58} - \dots - x \cdot 1,02 - x = \\ &= K \cdot 1,02^{60} - x(1,02^{59} + 1,02^{58} + \dots + 1,02 + 1) = \\ &= K \cdot 1,02^{60} - x \frac{1,02^{60} - 1}{1,02 - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Ebből } K \cdot 1,02^{60} = x \frac{1,02^{60} - 1}{1,02 - 1}.$$

Fejezzük ki belőle az x -et!

$$x = K \cdot 0,02 \cdot \frac{1,02^{60}}{1,02^{60} - 1} = 500\,000 \cdot 0,02 \cdot \frac{1,02^{60}}{1,02^{60} - 1} \approx 14\,384.$$

Tehát havonta kb. 14 384 Ft törlesztőrészletet kell fizetni.



4.7. ábra Pénzügyi számítások



4.8. ábra A kölcsönt kamatostól kell visszafizetni



4.9. ábra Mekkora a törlesztő részlet?

Az előző feladat gondolatmenetét felhasználva felírhatunk egy általános képletet a törlesztőrészlet kiszámítására. Legyen a kölcsön K , a kamatláb p , melyhez tartozó futamidő n ! Ekkor a törlesztőrészlet:

$$x = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}.$$



Oldjuk meg!

1. Beteszünk a bankba 400 000 Ft-ot 10 évre, évi 12%-os kamatláb mellett. Mennyi pénzünk lesz a bankban 10 év múlva? Ez hány százalékkal több, mint a betett pénzünk?
2. Tegyük fel, hogy átlagosan évi 9%-os az árszínvonal-emelkedés, azaz az infláció. Ilyen feltétel mellett hány százalékkal nőtt az előző feladatban szereplő tőkénk vásárlóértéke a 10 év alatt? (Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg!)
3. Beteszünk a bankba évi 15%-os kamatláb mellett 100 000 Ft-ot. Mennyi pénzünk lesz a bankban 5 év múlva
 - a) félévenkénti;
 - b) negyedévenkénti;
 - c) havonkéntitőkésítés esetén?
4. Mennyi összeget kell betennünk a bankba, ha azt akarjuk, hogy 8 év múlva 400 000 Ft-ot vehessünk ki évi 11%-os kamatláb mellett?
5. Milyen kamatláb mellett teljesül, hogy 250 000 Ft tőke esetén 5 év múlva 400 000 Ft-ot vehetünk fel a bankból? (A kamatláb értékét egy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg!)
6. Hat éven keresztül minden év elején beteszünk a bankba 150 000 Ft-ot. Mennyi pénzünk lesz a hatodik év végén, ha az éves kamatláb 10,5%? (Az eredményt egész értékre kerekítve adjuk meg!)
7. Az egyik banktól 200 000 Ft kedvezményes kölcsönt veszünk fel 10 évre. Mennyi legyen a havi törlesztőrészlet, ha az éves kamatláb 9%? (Az eredményt egész értékre kerekítve adjuk meg!)



4.10. ábra Az üzleti élet egyik központja New York

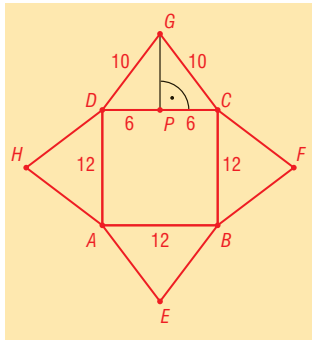
III. fejezet Térgeometria



Lehet egy dimenzióval több?



1. Területszámítás (Ismétlés)

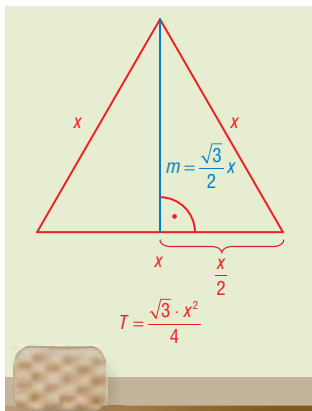


1.1. ábra Az 1. a) példában szereplő síkidom

Bármely derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével. Vagy másként: bármely derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével.



1.2. ábra Pitagorasz-tétel



1.3. ábra A szabályos háromszög területe

A geometriai értelemben vett testekkel, azok formájával, felszínük és térfogatuk kiszámításával találkozhattunk már általános iskolában és a 10. osztályban is. Azóta bővült a tudásunk bizonyos trigonometriai ismeretekkel. Tekintsünk most át néhány képletet, gondolatot, amelyeket területszámításból ismerünk!



1. példa Határozzuk meg annak a síkidomnak a területét, amelyet úgy kapunk, hogy egy 12 cm oldalhosszúságú négyzet oldalaira kifelé

- egybevágó egyenlőszárú háromszögeket szerkesztünk, melyek alapja a négyzet oldala, száruk hossza pedig 10 cm!
- szabályos háromszögeket szerkesztünk!

Megoldás:

a) Készítsünk rajzot (1.1. ábra)!

Ennek az összetett síkidomnak a területét úgy határozhatjuk meg, ha összeadjuk a négyzet területét a négy egybevágó egyenlő szárú háromszög területével. Ehhez használjuk ki, hogy az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága két egybevágó derékszögű háromszögre bontja a háromszöget, így a Pitagorasz-tétel (1.2. ábra) segítségével kiszámolható az alaphoz tartozó magasság.

$$PG^2 + PC^2 = CG^2;$$

$$PG^2 + 6^2 = 10^2;$$

$$PG^2 = 64;$$

$$PG = 8 \text{ (cm)}.$$

A síkidom területe:

$$T = T_{\text{négyzet}} + 4 \cdot T_{\text{háromszög}} = 12^2 + 4 \cdot \frac{12 \cdot 8}{2} = 144 + 192 = 336 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) Szinte ugyanaz a feladat, mint az előző esetben. A különbség csak annyi, hogy a négyzethez csatlakozó háromszögek itt szabályosak.

A szabályos háromszög magassága az oldalának $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -szöröse (1.3.

ábra) (már sokszor meghatároztuk, de a Pitagorasz-tétel segítségével akár most is kiszámolhatjuk újra), így a keresett terület:

$$\begin{aligned} T &= T_{\text{négyzet}} + 4 \cdot T_{\text{háromszög}} = \\ &= 12^2 + 4 \cdot \frac{12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12}{2} = 144 + 144 \cdot \sqrt{3} \approx 393,42 \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$



2. példa Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét és a területét, amelynek van egy 23 cm-es és egy 17 cm-es oldala, és a 17 cm-es oldallal szemközti szöge 39° -os!

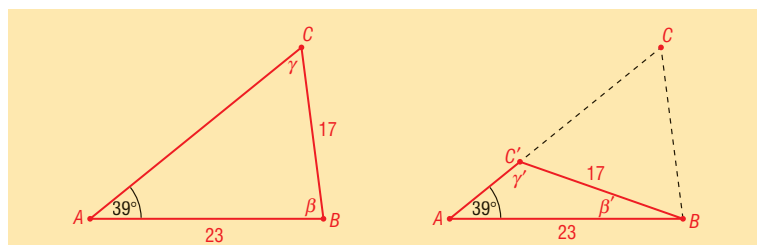
Megoldás:

A terület meghatározásához szükségünk lesz a hiányzó oldal hosszának kiszámítására. Ehhez alkalmazzuk a szinuszételt (1.4. ábra) a háromszög két ismert oldalára:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin 39^\circ} = \frac{23}{17}.$$

Innen $\sin \gamma = \frac{23}{17} \cdot \sin 39^\circ \approx 0,8514$. Ebből számológép segítségével

visszakereshetjük γ értékét: $\gamma \approx 58,37^\circ$, ugyanakkor korábbi ismereteink alapján tudjuk, hogy két oldal és a kisebbikkel szemközti szög általában nem határozza meg egyértelműen a háromszöget. Ezzel összhangban a $\sin \gamma \approx 0,8514$ egyenletnek is két megoldása van a $]0^\circ, 180^\circ[$ intervallumon (1.5. ábra). A másik megoldást a gép által megadottból tudjuk kiszámolni: $\gamma' = 180^\circ - \gamma \approx 121,63^\circ$.



1.5. ábra Két háromszög felel meg a feltételnek

A két esetben nyilván különböző hosszúságú lesz a keresett oldal. Ennek kiszámolásához alkalmazzuk most a koszinuszételt (1.6. ábra)! Első esetben $\beta \approx 82,63^\circ$, ahonnan

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \beta \approx \\ &\approx 23^2 + 17^2 - 2 \cdot 23 \cdot 17 \cdot \cos 82,63^\circ \approx 717,7, \text{ így } AC \approx 26,79 \text{ cm.} \end{aligned}$$

A háromszög területe: $K \approx 66,79$ cm. Területe a trigonometrikus területképletet (1.7. ábra) használva:

$$T = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \beta}{2} \approx \frac{23 \cdot 17 \cdot \sin 82,63^\circ}{2} \approx 193,9 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A második esetben $\beta' \approx 19,37^\circ$, innen az előző esetéhez hasonló számolással $AC' \approx 8,96$ cm, $K' \approx 48,96$ cm és $T = \frac{AB \cdot BC' \cdot \sin \beta'}{2} \approx \frac{23 \cdot 17 \cdot \sin 19,37^\circ}{2} \approx 64,8 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Bármely háromszögben bármely két oldal hosszának aránya egyenlő a velük szemközti szögek szinuszaik arányával.



1.4. ábra Szinuszételt

Bármely háromszögben az egyik oldal hosszának a négyzetét megkaphatjuk, ha a másik két oldalhossz négyzetösszegéből kivonjuk e két oldal hosszának és a közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát.



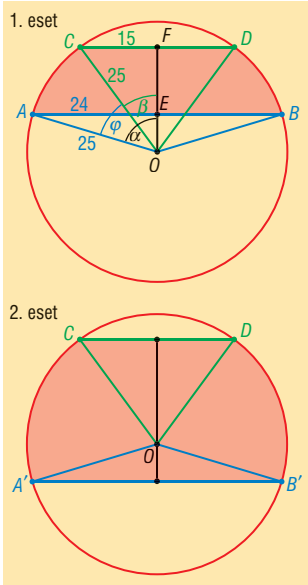
1.6. ábra Koszinuszételt

A háromszög területe a szokásos jelölésekkel:

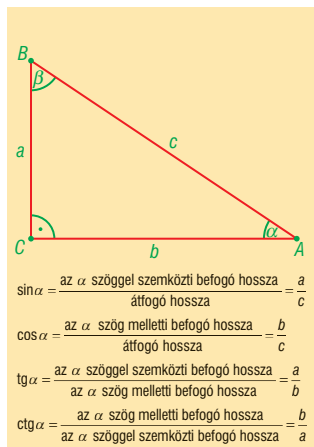
$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$



1.7. ábra Trigonometrikus területképlet



1.8. ábra Két eset van



1.9. ábra Hegyesszög szögfüggvényei

Adott körben a körív hossza (köríkk területe) egyenesen arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.



1.10. ábra Körív hossza, köríkk területe a középponti szög ismeretében



3. példa Egy 25 cm sugarú kör két párhuzamos húrjának hossza 48 cm és 30 cm.

Mekkora kerületű és területű a körlapnak az a része, amelyet a két húr és a köztük lévő körívek határolnak?

Megoldás:

Ebben a feladatban is két esetre kell gondolnunk, hiszen eshet a két párhuzamos húr a kör középpontjának ugyanarra vagy az ellenkező oldalára is (1.8. ábra).

Itt most csak az első esetet számoljuk ki, a másik eset végigszámolását az olvasóra bízunk.

A kerület a két húr hosszának és a köztük eső körív hosszának összege. A körívek hosszát pedig akkor tudjuk kiszámolni, ha már meghatároztuk középponti szögüket, a φ -t. Az első esetben $\varphi = \alpha - \beta$. Az α és a β az AOB és a COD egyenlő szárú háromszög fél szárszöge. Az E , illetve az F pont a húrok felezőpontja, így az AEO és a CFO háromszög derékszögű. Ezek egy-egy hegyesszögét kell meghatároznunk.

Az AEO derékszögű háromszögben az α -val szemközti befogót és az átfogót ismerjük, így célszerű a szinusz szögfüggvénnyel számolnunk (1.9. ábra):

$$\sin \alpha = \frac{24}{25}, \text{ innen } \alpha \approx 73,74^\circ. \text{ A } CFO \text{ derékszögű háromszögből:}$$

$$\sin \beta = \frac{15}{25}, \text{ így } \beta \approx 36,87^\circ. \varphi = \alpha - \beta \approx 73,74^\circ - 36,87^\circ = 36,87^\circ.$$

Az $\widehat{AC}$ ív hossza (1.10. ábra):

$$\widehat{AC} = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot K_{\text{kör}} = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2\pi r \approx \frac{36,87^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 25 \cdot \pi \approx 16,09.$$

$$K = 2 \cdot \widehat{AC} + AB + CD \approx 110,18 \text{ (cm)}.$$

A terület meghatározásához el kell azon gondolkodnunk, hogy milyen részek területének összegeként, illetve különbségeként állhat elő a színes rész területe. Az AOC és a BOD köríkek területéhez hozzáadva a COD háromszög területét a színes sáv minden részét lefedtük, de ekkor van benne egy fölösleges rész: az AOB háromszög. Ennek a területét tehát ki kell még vonnunk. A két háromszög területét a trigonometrikus területképlettel is kiszámolhatjuk, de mivel egyenlő szárú háromszögek, ezért elegánsabb, ha a Pitagorasz-tétellel kiszámítjuk az egyenlő szárú háromszögek alaphoz tartozó magasságát: $EO = \sqrt{AO^2 - EA^2} = 7$, ugyanígy $FO = 20$.

$$T = 2 \cdot T_{AOC \text{ köríkk}} + T_{COD\Delta} - T_{AOB\Delta} = 2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot r^2 \pi + \frac{CD \cdot FO}{2} - \frac{AB \cdot EO}{2} \approx 2 \cdot \frac{36,87^\circ}{360^\circ} \cdot 25^2 \pi + \frac{30 \cdot 20}{2} - \frac{48 \cdot 7}{2} \approx 534,2 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

(Ne feledkezzünk meg a másik eset végigszámolásáról!)



4. példa Egy húrtrapéz kerülete 32 cm, területe 40 cm^2 , szárai egyenlő hosszúak a trapéz középvonalával. Mekkora a trapéz oldalai és szögei?

Megoldás:

A húrtrapéz tengelyesen szimmetrikus az alapok közös felezőmerőlegesére, szárai egyenlők, és a feladat feltétele szerint a szárok a középvonallal is egyenlő hosszúak: $b = k$ (1.11. ábra).

A trapéz középvonaláról tudjuk, hogy az alapok számtani közepével egyenlő, így a trapéz kerülete

$K = a + 2b + c = 2b + 2k = 4b$. Mivel a kerület 32 cm, így $b = k = 8 \text{ cm}$. A terület pedig a középvonal és a magasság szorzata, ebből a trapéz magassága is könnyen kiszámolható:

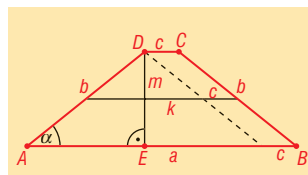
$$T = 40 \text{ cm}^2 = k \cdot m = 8 \cdot m, \text{ így } m = 5 \text{ cm}.$$

Innen meghatározható az AE szakasz hossza:

$AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39} \text{ (cm)}$, ami éppen az $a - k = k - c$ különbséggel egyenlő. Tehát $a = k + AE = 8 + \sqrt{39} \text{ (cm)}$ és $c = k - AE = 8 - \sqrt{39} \text{ (cm)}$.

Az α szög az AED derékszögű háromszögből: $\sin \alpha = \frac{5}{8}$, így $\alpha \approx 38,68^\circ$.

A trapéz alapjai $a = 8 + \sqrt{39} \approx 14,24 \text{ cm}$ és $c = 8 - \sqrt{39} \approx 1,76 \text{ (cm)}$ hosszúak, szárai 8 cm-esek. A hosszabbik alapon fekvő szögei kb. $38,68^\circ$ -osak, a rövidebbik alapon fekvő szögei pedig kb. $141,32^\circ$ -osak.



1.11. ábra A húrtrapéz



5. példa Egy körgyűrűcikk belső, illetve külső ívének hossza 33 cm, illetve 51 cm. Számítsuk ki a körgyűrűcikk területét, ha a vastagsága 15 cm! Ezek az adatok meghatározzák-e egyértelműen a körgyűrűcikk alakját?

Megoldás:

Egy körgyűrű területét kiszámolhatjuk, ha a külső kör területéből kivonjuk a belső kör területét:

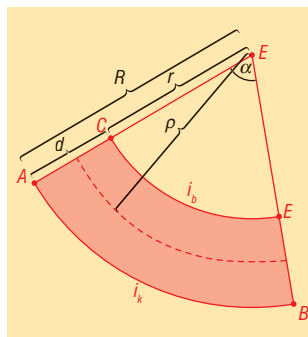
$$T = R^2 \pi - r^2 \pi = (R^2 - r^2) \pi = (R + r)(R - r) \pi.$$

Ezt így is fel lehet írni:

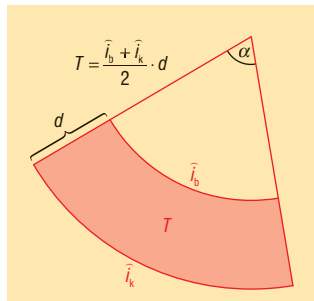
$$T = 2 \cdot \frac{R+r}{2} \cdot (R-r) \pi = 2 \cdot \rho \cdot d \cdot \pi,$$

ahol ρ a középkör sugara $\left(\rho = \frac{R+r}{2} \right)$ és d a körgyűrű vastagsága.

Mivel a körcikkek területe egyenesen arányos a hozzájuk tartozó középponti szöggel (1.12. ábra), továbbá egy körgyűrűcikk külső és belső ívéhez ugyanaz a középponti szög tartozik, ezért a körgyűrűcikk



1.12. ábra A körgyűrűcikk jellemző adatai



1.13. ábra Körgyűrűcikk területe

területe is egyenesen arányos a hozzá tartozó középponti szöggel. Ezért az α középponti szöghöz tartozó körgyűrűcikk területe:

$$T_{\text{körgyűrűcikk}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot (R^2 - r^2) \pi = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\rho\pi \cdot d.$$

Ez azt is jelenti, hogy a középkör kerületének $\frac{\alpha}{360^\circ}$ -szorosát szorozzuk a körgyűrűcikk vastagságával, vagyis a külső és a belső ív számtani közepét szorozzuk a körgyűrű vastagságával (1.13. ábra).



Tétel A körgyűrűcikk területe egyenlő a külső és belső határoló íve számtani közepének és a körgyűrűcikk vastagságának szorzatával: $T = \frac{\widehat{i_b} + \widehat{i_k}}{2} \cdot d.$

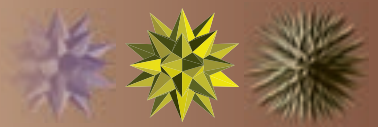
A feladatban szereplő adatokkal: $T = \frac{33+51}{2} \cdot 15 = 630 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Mivel a kisebb körcikk E középpontú nagyításával megkapjuk a nagyobb körcikket, ezért felírható a $\frac{r}{R} = \frac{\widehat{i_b}}{\widehat{i_k}}$ aránypár. Így $\frac{r}{R} = \frac{33}{51} = \frac{11}{17}$ és $R - r = 15$. Ez a két sugárra vonatkozó egyenletrendszer egyértelművé teszi a sugarak nagyságát ($r = 27,5 \text{ cm}$ és $R = 42,5 \text{ cm}$). Az adott ívhosszak miatt a középponti szög is egyértelmű. Gyakorlásképpen számítsuk ki az értékét!



Oldjuk meg!

1. Egy téglalap oldalaira kifelé egyenlő szárú háromszögeket szerkesztünk, melyek alapja a téglalap egy-egy oldala. Számítsuk ki, mekkora az így kapott síkidom területe, ha a téglalap oldalainak hossza 14 cm és 18 cm, a háromszögek szárai pedig mind 15 cm hosszúak!
2. Határozzuk meg egy szabályos hatszög kerületét és területét, ha
 - a) körülírt körének sugara 8 cm;
 - b) beírt körének sugara 14 cm!
3. Egy paralelogramma egyik oldala 4 cm-rel hosszabb egy másik oldalánál. Mekkora a paralelogramma szögei, ha területe 62 cm^2 , kerülete pedig 36 cm?
4. Mekkora a 26 cm sugarú kör
 - a) 100° -os;
 - b) 238° -os
 középponti szöghöz tartozó körszeletének kerülete és területe?
5. Mekkora azoknak a körszeleteknek a területe, amelyekre a 3 cm sugarú kört egy 4 cm hosszú húrja bontja?
6. Határozzuk meg a 146,3 cm kerületű szabályos kilencszög területét!
7. Kössük össze egy 85 cm sugarú kör két párhuzamos húrjának végpontjait! Számítsuk ki az így kapott trapéz kerületét és területét, ha a húrok hossza 51 cm és 75 cm!
8. Hány százaléka a 7. feladatbeli trapéz területe azon síkidom területének, amely a kör párhuzamos húrjai közé esik?

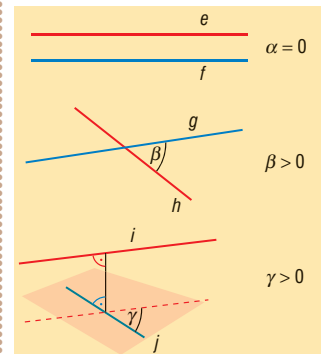


2. Pontthalmazok a térben, távolságok, szögek

Ahhoz, hogy a térben is tudjunk távolságokat, szögeket mérni, először ismerkedjünk meg az egyenesek hajlásszögének fogalmával!

Ha két egyenes egy síkban fekszik, akkor korábbi ismereteink alapján tudjuk, mit értünk a hajlásszögükön. (Ha párhuzamosak, akkor a hajlásszögük 0° , ha pedig metszők, akkor a metszéspont körül keletkező két-két egyenlő szög közül a nem nagyobbát értjük a szögükön.)

Kitérő egyenesek hajlásszögét a következőképp határozzuk meg: a két egyenest (esetleg csak az egyiket) eltoljuk úgy, hogy legyen közös pontjuk. Ekkor már metszők lesznek, s e két metsző egyenes hajlásszögét értjük a kitérő egyenesek hajlásszögén (2.1. ábra).



2.1. ábra Egyenesek hajlásszöge



1. példa Mekkora szöget zár be az M5-ös autópálya a fölötté Kiskundorozsmáról Zsombóra haladó autóúttal?

Megoldás:

Természetesen mindkét útnak csak ezt a kis szakaszát nézhetjük, hiszen hosszabb távon egyik sem egyenes. A két útszakaszra illeszkedő egyenes kitérő. A megoldást akkor kapjuk meg, ha például a felül haladó út egyenesét önmagával párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy messe az autópálya egyenesét. Mivel az autópálya a síknak tekinthető földön halad, s az autótút is a földdel párhuzamosan halad, ezért oda érdemes eltolnunk az autótút egyenesét is. Ehhez elegendő merőlegesen vetítenünk a föld síkjára. Ekkor éppen olyan ábrát kapunk, amelyet a térkép is mutat (2.2. ábra).

Itt már egyszerűen megmérhetjük a szöget (2.3. ábra). Ennél a két útnál ez körülbelül 48° .



Egyenesek és síkok, illetve két sík hajlásszögét az egyenesek hajlásszögére vezetjük vissza. Szemléletesen ugyan mindannyian „tudjuk”, mikor nevezünk egy egyenest merőlegesnek egy síkra, a matematikában ezt is definiálni kell.

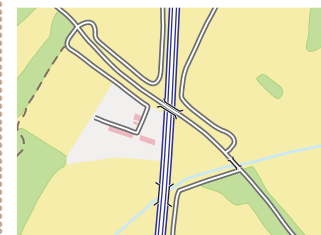


Definíció Akkor mondjuk, hogy egy egyenes merőleges egy síkra, ha az egyenes a sík minden egyenesére merőleges.

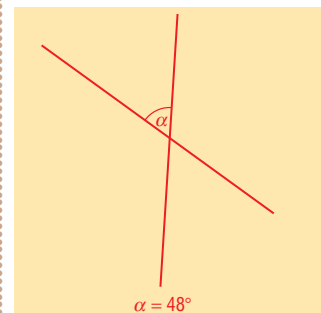
Ennek ellenőrzése viszont komoly nehézséget jelentene, így jó hasznát vesszük a következő tételnek.



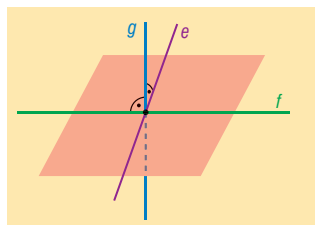
Tétel Ha egy egyenes merőleges egy sík két egymást metsző egyenesére, akkor merőleges a sík minden egyenesére.



2.2. ábra Az 1. példában szereplő kereszteződés térképe



2.3. ábra A térkép alapján készült vázlat



2.4. ábra Síkra merőleges egyenes

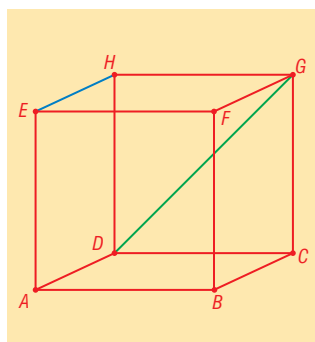
Ez a síkra merőleges egyenes tétele. (Ezt itt nem bizonyítjuk be.) Így tehát elegendő a síkon két metsző egyenest találnunk, amelyekre az adott egyenes merőleges, a tétel és a definíció alapján így ez az egyenes a síkra is merőleges (2.4. ábra).



2. példa Mutassuk meg, hogy a 2.5. ábrán látható $ABCDEFGH$ kocka EH éle merőleges a DG lapátlójára!

Megoldás:

Ha csak a (síkban elkészített) rajzot nézzük, akkor nem feltétlenül azt látjuk, amit a feladat állít. De ha a síkra merőleges egyenes tételét alkalmazzuk, akkor gyorsan bebizonyítható a feladat állítása. Az EH él ugyanis merőleges a HD élre (hiszen EH és HD az $AEHD$ négyzet két szomszédos oldala) és a HG élre is (hiszen EH és HG az $EFGH$ négyzet két szomszédos oldala). Tehát az EH él merőleges a HD élre és a HG élre, így a HD és a HG élt tartalmazó sík minden egyenesére. Ezen a síkon fekszik a kocka $HDCG$ lapja, így a DG lapátló is. A DG lapátló tehát valóban merőleges az EH élre.



2.5. ábra A kocka

A merőleges vetület fogalma is előkerült már 10. osztályban. Tekintsük most egy P pontnak egy síkra vett merőleges vetületét! Gondolatban állítsunk merőlegest a P ponton át a síkra! Ennek a merőlegesnek a síkkal vett dőléspontja (P') lesz a P pontnak a síkra vett merőleges vetülete (2.6. ábra).

Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor az egyenes minden pontjának merőleges vetülete ugyanaz a pont: az egyenes merőleges vetülete a síkkal vett dőléspontja lesz.

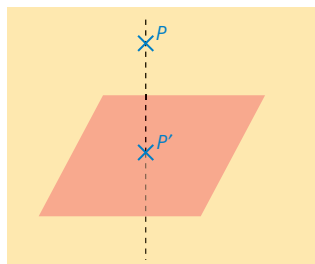
Ha pedig nem merőleges az egyenes a síkra, akkor a síkra vett merőleges vetülete is egyenes.

Ez azért fontos számunkra, mert ennek a segítségével tudjuk értelmezni egyenes és sík hajlásszögét.



Definíció Egy egyenes és egy rá nem merőleges sík hajlásszöge az egyenesnek és az egyenes síkra vett merőleges vetületének a hajlásszöge.

(Ezzel két egyenes hajlásszögeként értelmeztük ezt a szöget.)



2.6. ábra Egy pont síkra vett merőleges vetülete



3. példa Mekkora szöget zár be a téglatest testátlója a legkisebb területű lapjának síkjával, ha a téglatest éleinek hossza 8 cm, 11 cm, illetve 15 cm?

Megoldás:

A legkisebb területű lap nyilván az, amelyiknek az oldalai 8 cm és 11 cm.



A téglatestnek négy testátlója van, de könnyen látható, hogy mindegyik ugyanakkora szöget zár be ezzel az oldallappal. (Gondoljunk például az élek felezőmerőleges síkjaira, amelyekre a téglatest szimmetrikus!)

Használjuk a 2.7. ábra jelöléseit! Az EC testátlónak a $BCGF$ lap síkjával bezárt szögét keressük. Ehhez vesszük az EC testátlónak erre a síkra vett merőleges vetületét. Mivel a C pont rajta van a síkon, ezért a C merőleges vetülete saját maga: $C' = C$. Az E pont merőleges vetülete pedig az F pont lesz, hiszen EF merőleges a $BCGF$ síkra. Így az EC testátló merőleges vetülete a $BCGF$ lap síkjára az FC lapátló. Tehát az $\angle ECF$ meghatározása a feladat. Az $\triangle EFC$ derékszögű, így ha ismerjük két oldalának hosszát, akkor a szögeit is meg tudjuk határozni. Rajzoljunk egy ezzel a háromszöggel egybevágó háromszöget úgy, hogy az oldalai eredeti nagyságban látszanak, azaz készítsünk síkmetszetet (2.8. ábra)!

Az EF befogó 15 cm, így elég kiszámolnunk például az FC befogót. Az FC szakasz pedig egyben átfogója is egy másik derékszögű háromszögnek, az FGC -nek. Ezért $d = FC = \sqrt{8^2 + 11^2} = \sqrt{185}$ cm.

$$\text{Innen: } \tan \varphi = \frac{15}{\sqrt{185}} \Rightarrow \varphi \approx 47,8^\circ.$$

A testátló a legkisebb területű oldallal kb. $47,8^\circ$ -os szöget zár be.



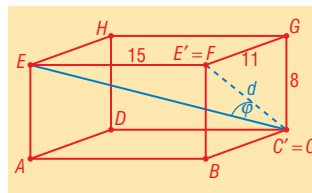
Két sík hajlásszögét is két egyenes hajlásszögére vezetjük vissza. Ha két sík párhuzamos, akkor szögüket 0° -osnak tekintjük. Ha pedig nem párhuzamosak, akkor egy egyenesben metszik egymást. Ennek az egyenesnek egy tetszőleges pontjában merőlegest állítunk a metszésvonalra mindkét síkban. E két egyenes hajlásszögét nevezzük a két sík hajlásszögének. Ezt a két egyenest úgy is megkaphatjuk, ha egy harmadik síkkal mindkét síkot merőlegesen metsszük (2.9. ábra). Az így keletkező két metszésvonal teljesíti az előbb elmondott feltételeket.



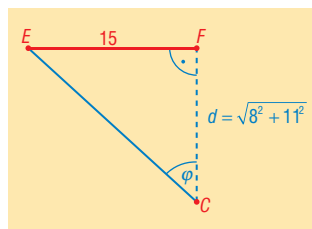
4. példa Az $ABCDEFGH$ kocka E , B és G csúcspontja által meghatározott sík mekkora szöget zár be a kocka lapjaival?

Megoldás:

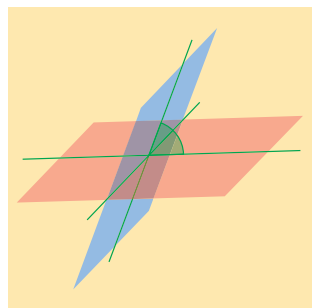
A kockában az EB , a BG és a GE él páronként egymáshoz csatlakozó lapátlók, melyek hossza egyenlő egymással. Tehát az EBG háromszög egy szabályos háromszög. Ennek a háromszögnek a síkja a $BCGF$ oldallap síkját a BG átló egyenesében metszi. (Ez nyilvánvaló, hiszen a BG átló mindkét síkban benne fekszik.) Mivel az EBG háromszög is és az FBG háromszög is tengelyesen szimmetrikus a BG szakasz megfelelő síkbeli felezőmerőlegesére, ezért ha merőlegest állítunk a BG átlóra az E és az F pontból, akkor mindkét esetben a BG átló K felezőpontját kapjuk eredményül. A két sík hajlásszöge tehát egyenlő az $\angle EKF$ -gel (2.10. ábra).



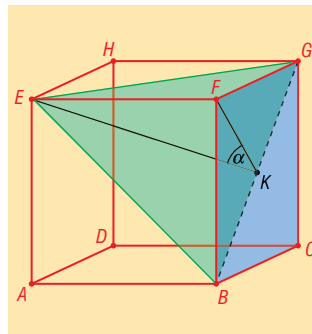
2.7. ábra A 3. példa ábrája



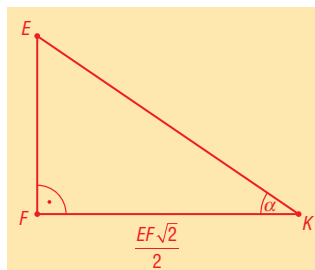
2.8. ábra Egy hasznos síkmetszet



2.9. ábra Két sík hajlásszöge



2.10. ábra A 4. példa ábrája



2.11. ábra Az EFK háromszög

Az $EKF\Delta$ az F csúcsnál derékszögű, egyik befogója (EF) a kocka éle, másik befogója (FK) a kocka fél lapátlója, mivel a négyzet átlója $\sqrt{2}$ -szöröse a négyzet oldalának, ezért $FK = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot EF$ (2.11. ábra). Az EFK derékszögű háromszögből $\operatorname{tg} \alpha = \frac{EF}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot EF} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha \approx 54,74^\circ$.

Az $ABFE$ és az $EFGH$ síknak ugyanolyan az elhelyezkedése az EBG háromszöghöz képest, így azok síkjával is ugyanekkora szöget zár be az EBG háromszög síkja. A kocka szemközti oldallapjai pedig párhuzamosak, tehát az azokkal bezárt szög is egyenlő az imént meghatározott kb. $54,74^\circ$ -kal.



Foglalkozzunk most pontthalmazok távolságával!
9. osztályban a következőképpen definiáltuk a fogalmat:



2.12. ábra Mekkora a távolság közöttük?



Definíció Két pontthalmaz távolságán a pontjaik közötti távolságok minimumát értjük.

(Ez a minimum az általunk vizsgált egyszerű pontthalmazok esetében általában létezik.)

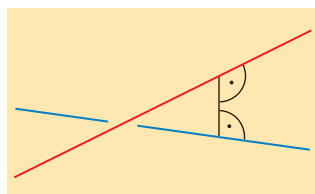
Ezt a definíciót alkalmazhatjuk a térben elhelyezkedő pontthalmazok esetében is (2.12. ábra). Így általában két pont távolságára vezetjük vissza két pontthalmaz távolságát.

Ennek megfelelően pont és sík távolsága egyenlő a pont és a pontnak a síkra vett merőleges vetülete közötti távolsággal.

Két metsző pontthalmaz távolsága a definíció értelmében 0. Ha egy egyenes nem metsz egy síkot, akkor csak párhuzamos lehet vele, ekkor minden pontja egyenlő távol van a síktól: ez az egyenes és a sík távolsága. Két sík esetén hasonló helyzettel állunk szemben: a két sík vagy metsző (távolságuk 0) vagy párhuzamos.

A legérdekesebb kérdés: mi lesz két kitérő egyenes távolsága?

Bebizonyítható, hogy pontosan egy olyan egyenes van, amely mindkét kitérő egyenest metszi, és mindkettőre merőleges. Ennek az egyenesnek a kitérő egyenesekkel vett metszéspontjai által alkotott szakasz hossza lesz a minimális távolság a két egyenes pontjai között, tehát ez lesz a két egyenes távolsága (2.13. ábra).



2.13. ábra Kitérő egyenesek távolsága



5. példa Egy téglatest 18 egységnyi élének felezőpontja milyen távol van a téglatest lapjainak középpontjától, ha a másik két él hossza 10 egység és 16 egység?



Megoldás:

Az előző években már találkoztunk a térbeli Pitagorasz-tétellel, vagyis egy téglatest élének (a , b és c) ismeretében ki tudjuk számítani a téglatest testátlóját (e): $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Arra kell tehát törekednünk, hogy a keresett távolsághoz találjunk olyan szakaszt, amellyel párhuzamos, vagy olyan derékszögű háromszöget, amelynek átfogója, vagy olyan téglatestet, amelynek testátlója az adott szakasz.

A 2.14. ábrán kékkel jelöltük a téglatest lapközepontjait, L -lel a 18 egységnyi él felezőpontját.

Könnyen leolvashatók: $LR = 10 : 2 = 5$ és $LM = 16 : 2 = 8$.

Az LQ távolság az LRQ derékszögű háromszög átfogójaként számolható ki:

$$LQ = \sqrt{LR^2 + RQ^2} = \sqrt{5^2 + 16^2} = \sqrt{281}.$$

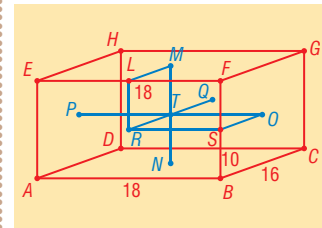
Az LN szakasz pedig az LMN derékszögű háromszög átfogója.

$$LN = \sqrt{LM^2 + MN^2} = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164}.$$

Az EF él felezőmerőleges síkjára való szimmetria miatt $LO = LP$.

Az LO szakasz testátlója az $RSOT$ alapú téglatestnek. Ezért

$$LO = LP = \sqrt{LR^2 + RS^2 + SO^2} = \sqrt{5^2 + 9^2 + 8^2} = \sqrt{170}.$$



2.14. ábra Az 5. példa ábrája



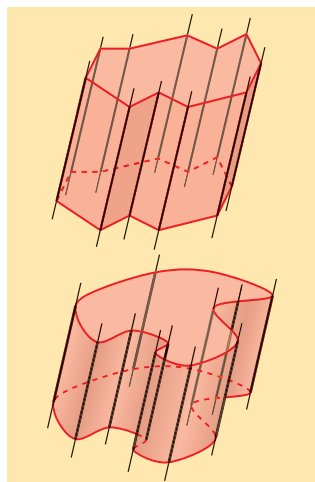
Oldjuk meg!

- Határozzuk meg az $ABCDEFGH$ téglatest
 - EF élének és BG lapátlójának;
 - BD és EG lapátlójának;
 - AH lapátlójának és HB testátlójának a szögét, ha $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm és $BF = 14$ cm!
- Határozzuk meg az előző feladatban szereplő szakaszpárok távolságát!
- Milyen távol vannak egymástól annak a téglatestnek a lapközepontjai, amelynek élei 24, 30 és 36 egység hosszúak? Hányféle hosszúságot kapunk eredményül?

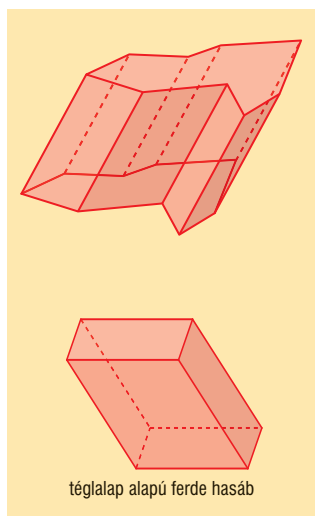
3. Testek és csoportosításuk

A valóságban előforduló tárgyak alakja, formája általában igen összetett. Sok esetben ezek a tárgyak egyszerűbb testekből állnak, amelyeket matematikai szempontok szerint jellemezhetünk: rendelkezhetnek bizonyos szimmetriákkal, mérhető a térfogatuk, a felszínük.

Tekintsük át a legegyszerűbb matematikai testeket!

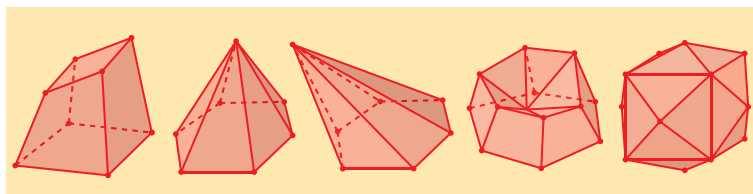


3.2. ábra Hengersizű testek származtatása



3.3. ábra Ferde hasábok

Azokat a korlátos térbeli ponthalmazokat, amelyeket sokszöglapok határolnak, **poliédereknek** szoktuk nevezni (3.1. ábra).



3.1. ábra Poliéderek

Vannak olyan testek is, amelyeket nem csak síklapok határolnak. Ezek között külön figyelmet fordítunk az ún. hengersizű, illetve kúpszerű testekre, valamint a gömbre.

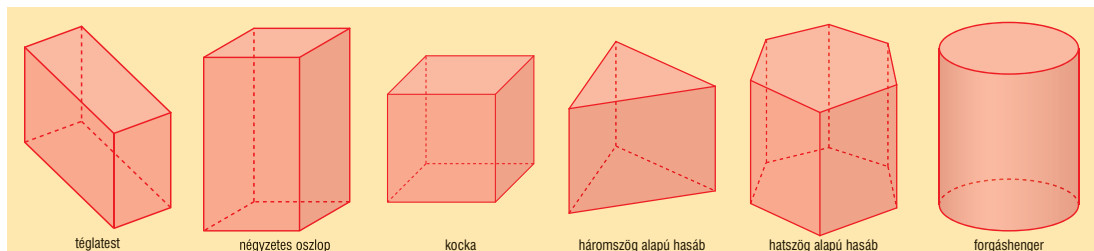
A hengersizű testeket a következőképpen értelmezzük. Vesszünk egy zárt síkgörbét és egy olyan egyenest, amelyik a görbe síkjával nem párhuzamos. Gondolatban a görbe minden pontján át párhuzamost húzunk az adott egyenessel. Ezzel egy végtelen hengerfelülethez jutunk. Ezt elmetsszük egy a görbe síkjával párhuzamos síkkal (3.2. ábra).

A hengerfelület és a párhuzamos síkok által határolt térrészt **hengersizű testnek** nevezzük. A párhuzamos síkokon fekvő zárt görbék által határolt síkidomot a hengersizű test alapjainak (alap- és fedőlapjának) nevezzük. A párhuzamos síkok közé eső hengerfelületet palástnak nevezzük. A párhuzamos síklapok távolságát nevezzük a hengersizű test magasságának.

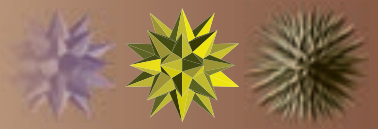
A síkgörbe lehet sokszög is – ekkor **hasábokról** beszélünk; a megadott irány lehet merőleges is a görbe síkjára – ekkor **egyenest hengersizű testet** kapunk. Ha a síkgörbe kör, az irány pedig merőleges ennek a síkjára, akkor **egyenest körhengert**, más néven **forgáshengert** kapunk.

Hengersizű test például: a téglatest (téglalap alapú egyenes hasáb), ennek speciális esetei a négyzetes oszlop (négyzet alapú egyenes hasáb) és ennek is speciális esete a kocka; a háromszög alapú hasáb; a hatszög alapú hasáb; a téglalap alapú ferde hasáb; a forgáshenger (3.3. és 3.4. ábrák).

A forgáshenger alapkörének sugarát szoktuk a henger sugaraként is említeni.



3.4. ábra Egyenes hengersizű testek



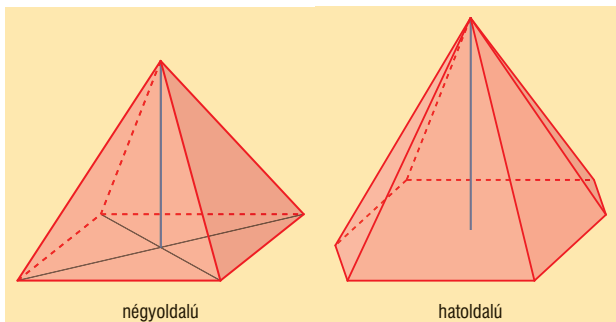
Egy másik nagy csoportot alkotnak a kúpszerű testek.

Vesünk egy zárt síkgörbét és a görbe síkján kívül egy pontot. A görbe minden pontját egy egyenessel összekötjük a felvett ponttal. Az összekötő egyenesek egy végtelen (kettős) kúpfelületet alkotnak. A kúpfelület és a görbe síkja közötti térrészt nevezzük **kúpszerű testnek** (3.5 ábra). Ha a görbe egy sokszög, akkor **gúlát** kapunk; ha pedig kör, és a felvett pontnak a kör síkjára vett merőleges vetülete a kör középpontja, akkor **egyenest kúpról** vagy más néven **forgáskúpról** beszélünk.

Az adott síkgörbe által határolt síkidomot alaplapnak nevezzük, (forgáskúp esetében alapkörnek), a kúpfelületnek a kúpszerű testhez tartozó részét palástnak, a megadott pontot pedig a kúpszerű test csúcspontjának. A csúcspontnak az alaplap síkjától vett távolságát nevezzük a kúpszerű testek magasságának. (Akkor is, ha ennek talppontja kívül esik az alaplapon 3.6. ábra.)

Az alapgörbe pontjait a kúpszerű test csúcspontjával összekötő szakaszokat a test alkotóinak nevezzük. Forgáskúp esetén minden alkotó hossza egyenlő (3.7 ábra).

A gúlák között is speciálisak a szabályos gúlák (3.8. ábra). Akkor mondjuk, hogy egy gúla szabályos n oldalú gúla, ha az alaplapja szabályos n oldalú sokszög, és a magasságának talppontja a sokszög középpontja. Így minden szabályos n oldalú gúlának n oldallapja és egy alaplapja van. Oldalélei egyenlő hosszúak, oldallapjai egybevágó egyenlő szárú háromszögek.

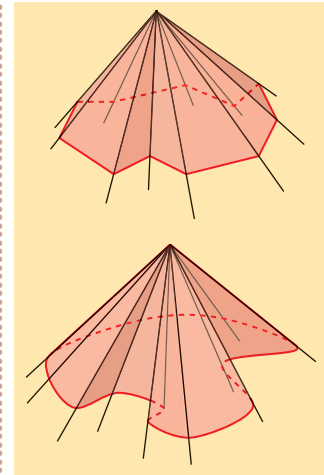


3.8. ábra Szabályos gúlák

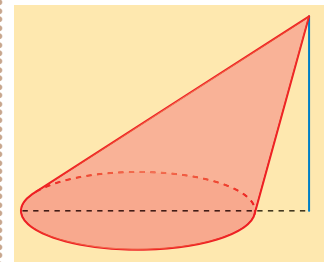
Ha egy gúla alaplapja háromszög, akkor **tetraédernek** nevezzük („négy lap” által határolt test) (3.9. ábra).

A szabályos háromoldalú gúla is tetraéder. Sőt, ha egy szabályos háromoldalú gúla oldallapjait alkotó háromszögek nemcsak egyenlő szárúak, hanem szabályosak is, akkor szabályos tetraédernek nevezzük.

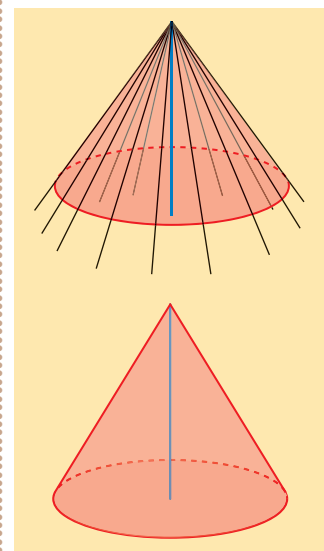
Nem kúpszerű testek, de azokból származtathatóak a csonka gúlák és a csonka kúpok. Messzük a kúpszerű testet egy az alaplapjával párhuzamos síkkal. Ez két részre vágja a testet, egy az eredetihez hasonló kisebb kúpszerű testre és egy az alaplaphoz közelebb eső másik testre. Ezt a másik testet nevezzük csonka gúlának, illetve csonka kúpnak annak megfelelően, hogy az alaplapja sokszög-e vagy sem.



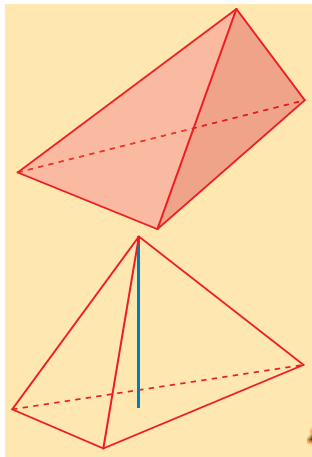
3.5. ábra Kúpszerű test származtatása



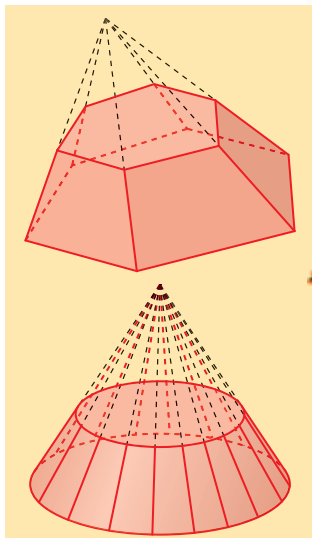
3.6. ábra Ferde körkúp



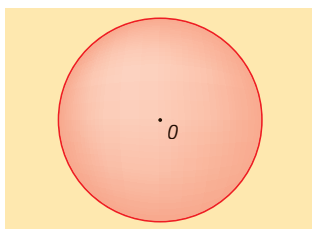
3.7. ábra Egyenes körkúp



3.9. ábra Tetraéderek



3.10. ábra Csonka gúla és csonka kúp



3.11. ábra Gömb

A csonka gúla és a csonka kúp két párhuzamos lapját alap- és fedőlapnak nevezzük, illetve ha a csonka kúp forgáskúpából származik, akkor alapkörnek és fedőkörnek. A kúppalástnak a párhuzamos síkok közé eső részét a csonka kúp palástjának nevezzük, az eredeti kúpszerű testet meghatározó egyeneseknek a párhuzamos síkok közé eső részét alkotóknak. A csonka gúlánál és a csonka kúpoknál is a párhuzamos síkok távolsága a testek magassága. A szabályos gúlából származtatott csonka gúlát szabályos csonka gúlának nevezzük. Csonka kúp esetén általában a forgáskúpából keletkező testre gondolunk (hivatalosan ez az egyenes csonka kúp 3.10. ábra).

A gömböt egyik eddig megadott módon sem tudnánk előállítani. Új definícióra van szükségünk (3.11. ábra).



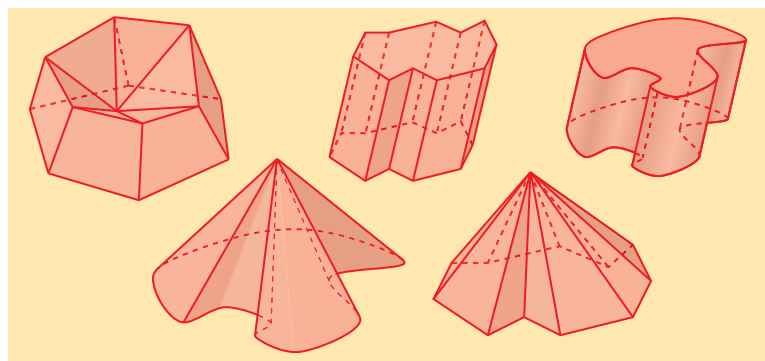
Definíció A gömb azon pontok halmaza (a térben), amelyek egy megadott ponttól adott távolságnál nem nagyobb távolságra vannak. A megadott pont a gömb középpontja, az adott távolság pedig a gömb sugara.

A poliéderek és a hengerszerű vagy akár a kúpszerű testek között éppúgy lehetnek konvexek és konkávok, mint a síkidomok között. S a megfogalmazás is egészen ugyanolyan, mint síkidomok esetében volt.



Definíció Egy testet akkor nevezünk konvexnek, ha a test bármely két pontját összekötő szakasz minden pontja is a testhez tartozik.

A leckében szereplő testek közül a 3.12. ábrán összegyűjtött testek konkávok, a többi pedig konvex.

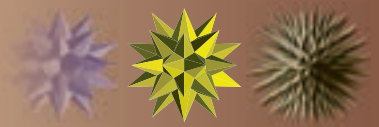


3.12. ábra Konkáv testek



Oldjuk meg!

1. Válasszuk ki a felsorolt tárgyak közül a konkáv testeket: kulcs, labda, hurkapálca, gyűrű, gyufásdoboz, olló!



4. Testek térfogata és felszíne

A legegyszerűbb testek térfogatát átismételtük 10. osztályban, és más tantárgyaknál is előbukkanhattak. Így a következő feladattal új ismeretek nélkül is megbirkózhatunk.



1. példa a) Számítsuk ki a 4.1. ábrán látható test térfogatát és felszínét! Alaplapja egy $23\text{ cm} \times 58\text{ cm}$ -es téglalap, első és hátsó lapja egymással párhuzamos, az alaplapra merőleges derékszögű trapéz. b) Rajzoljuk le a test kiterített hálójának kicsinyített képét!

Megoldás:

a) Ezt a testet felbonthatjuk két részre: egy négyzetes oszlopra és egy háromszög alapú hasábra. (Ez talán nem látszik ránézésre, mert eddig a hasábokat úgy rajzoltuk le, hogy az alaplapjuk „vízszintes” síkon feküdt.) Így a térfogatot könnyen ki tudjuk számolni. Legyen $a = 23\text{ cm}$, $b = 58\text{ cm}$, és vegyük észre, hogy a megadott 46 cm -es magasság éppen kétszerese a 23 cm -es élnek.

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{négyzetes oszlop}} + V_{\text{hasáb}} = a^2 b + \frac{a \cdot a}{2} \cdot b = \\ &= 23^2 \cdot 58 + \frac{23 \cdot 23}{2} \cdot 58 = 46023 \text{ (cm}^3\text{)}. \end{aligned}$$

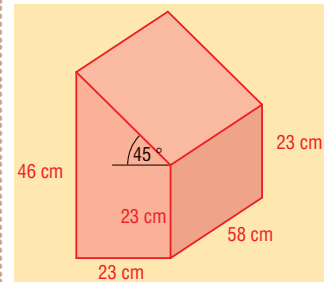
Vegyük észre, hogy az egész test együtt is egy hasábot alkot: egy derékszögű trapéz alapú hasábot. A térfogatát így is kiszámíthatjuk:

$$V = T_{\text{trapéz}} \cdot b = \frac{46 + 23}{2} \cdot 23 \cdot 58 = 46023 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

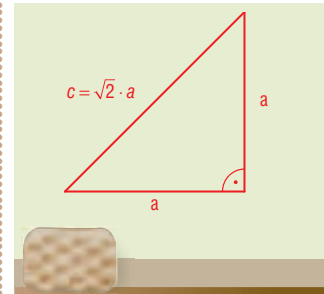
A felszínhez csak össze kell adnunk a határoló lapok területét. Ehhez egy adatot kell még kiszámolnunk: a vízszintessel 45° -os szöget bezáró „tető” ismeretlen élét. Jelöljük ezt c -vel. Ez átfogója egy egyenlő szárú derékszögű háromszögnek (4.2. ábra), amelynek befogói 23 cm hosszúak. Ezért az átfogó $\sqrt{2}$ -szöröse a befogóknak: $c = \sqrt{2} \cdot a = \sqrt{2} \cdot 23 \text{ (cm)}$.

A testnek két egybevágó trapéz lapja van, ezek területe egyenként: $T_1 = \frac{46 + 23}{2} \cdot 23$. Két egybevágó téglalap lapja van (amelyen a 4.3. ábrán áll, és az egyik oldallapja), területük egyenként: $T_2 = 23 \cdot 58$. Továbbá még két különböző fajta téglalap határolja: a másik oldallap $T_3 = 46 \cdot 58$ és a „tető” $T_4 = 23 \cdot \sqrt{2} \cdot 58$. A felszín tehát:

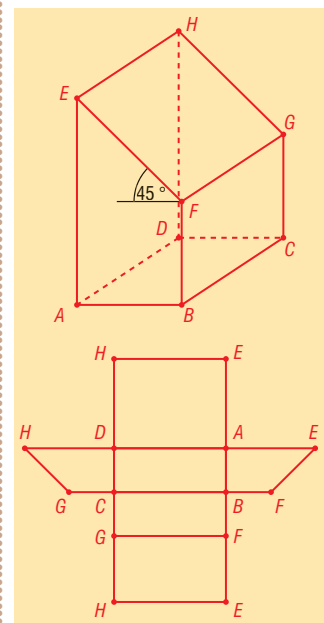
$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot T_1 + 2 \cdot T_2 + T_3 + T_4 = \\ &= 2 \cdot \frac{46 + 23}{2} \cdot 23 + 2 \cdot 23 \cdot 58 + 46 \cdot 58 + 23 \cdot \sqrt{2} \cdot 58 = \\ &= 6923 + 1334 \cdot \sqrt{2} \approx 8810 \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$



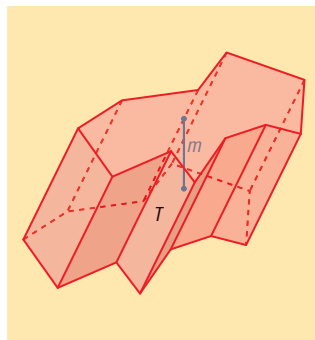
4.1. ábra Az 1. példában szereplő test



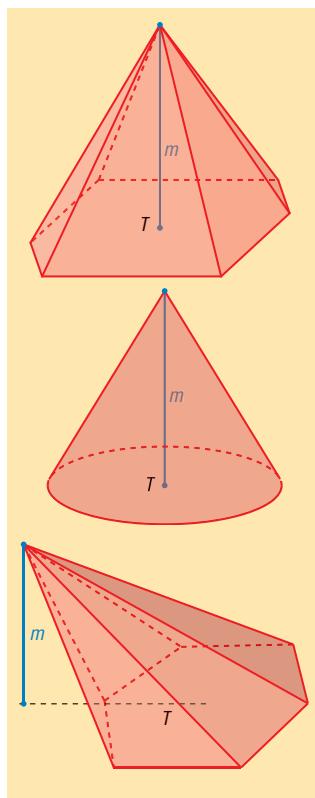
4.2. ábra Egyenlő szárú derékszögű háromszög



4.3. ábra A test és hálój



4.4. ábra Ferde hasáb és magassága



4.6. ábra Kúpszerű testek és magasságuk

b) Nevezzük el a test csúcsait, hogy be tudjuk azonosítani a megfelelő részeket a kiterített hálón (4.3. ábra)!

A hálón természetesen egy-egy pont több helyen is megjelenik.



Az előző feladatban felhasználtunk néhány fontos gondolatot a térfogat- és felszínszámítás témaköréből. Ezeket most kiegészítve, általánosítva foglaljuk össze!

✦ Egybevágó testek térfogata egyenlő.

✦ Ha egy testet szétdarabolunk, akkor az egyes részek térfogatának összege egyenlő az eredeti test térfogatával.

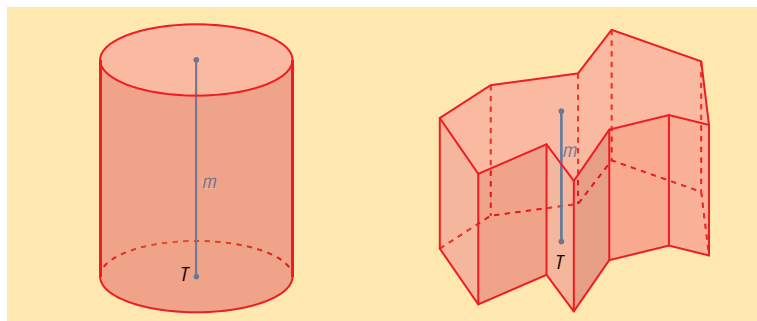
Az előző leckeiben tárgyalt testek közül egyedül a gömb felülete nem teríthető ki síkba. Az összes többinél a test felszíne egyenlő a síkba terített hálóján szereplő síkidomok területének összegével. Speciálisan: mivel a poliédereket csupa síkbeli sokszöglap határolja, ezért ott a határoló lapok területének összege adja a felszínt.

Nézzük ezután az egyes testcsoportok térfogatát.

A hengerszerű testek térfogata egyenlő alapterületük és magasságuk szorzatával:

$$V = T \cdot m.$$

Az egyenes hengerszerű testeknél a magasság egyenlő az oldal-élek, illetve az alkotók hosszával (4.4. és 4.5. ábrák).



4.5. ábra Egyenes hengerszerű testek és magasságuk

A kúpszerű testek térfogata egyenlő alapterületük és magasságuk szorzatának harmadrészeivel (4.6. ábra): $V = \frac{T \cdot m}{3}.$

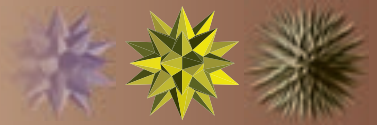


2. példa Kössük össze egy kocka szomszédos lapjainak középpontjait!

- Hány csúcsa, éle és lapja van az így kapott testnek?
- Határozzuk meg az így keletkező test térfogatát és felszínét, ha a kocka élének hossza 6 cm!

Megoldás:

Készítsünk ábrát (4.7. ábra)!



a) Mivel a kocka minden lapjának középpontja a test egy-egy csúcsa (és más csúcsa nincs a testnek), ezért a kapott testnek 6 csúcsa van.

A kocka két-két szomszédos oldallapján lévő pontot az új testben él köti össze. A kockán pedig a két lap egy élben találkozik. Így a két test élei kölcsönösen egyértelműen egymáshoz rendelhetők, ugyanannyi van belőlük. A kapott testnek is 12 éle van. Lapja pedig ugyanannyi van, mint ahány csúcsa a kockának, hiszen a kocka három, páronként szomszédos oldallapja egyértelműen meghatározza a kocka egy csúcsát is, és az új test egy-egy lapját is. Így a test lapjainak száma 8. Ezért szokták ezt a testet (szabályos) oktaédernek nevezni.

(Természetesen ránézésre is tudhatjuk ezeket a számokat, de a fenti összefüggésekbe érdemes volt belegondolni.)

b) A térfogat meghatározásánál az első példához hasonlóan itt is azt érdemes kihasználnunk, hogy a test szétbontható két testre: két egybevágó gúlára. (Például az AE él felezőmerőleges síkjára vonatkozó szimmetria miatt.) Azt is észrevehetjük, hogy ezen gúlák közös alaplapja, a $KLMN$ négyszög minden oldala egyenlő hosszúságú, és szomszédos oldalai egyenlő szöget zárnak be egymással. Tehát a $KLMN$ négyszög egy négyzet, a $KLMNO$ (és ezzel együtt a $KLMNJ$) gúla pedig egy szabályos négyoldalú gúla.

A gúla magassága a kocka élének (a) a fele (4.8. ábra). A $KLMN$ négyzet átlója pedig a kocka élhosszával egyenlő. Így a $KLMN$ négyzet

$$\text{területe: } T_{KLMN} = \frac{KM \cdot LN}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{6^2}{2} = 18 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{Egy gúla térfogata: } V_{\text{gúla}} = \frac{T_{KLMN} \cdot OP}{3} = \frac{\frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2}}{3} = \frac{18 \cdot 3}{3} = 18 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{Az oktaéder térfogata tehát: } V_{\text{oktaéder}} = 2 \cdot V_{\text{gúla}} = 2 \cdot 18 = 36 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A felszín kiszámításakor észrevehetjük, hogy az oktaédert nyolc egybevágó, ráadásul szabályos háromszög határolja, hiszen a kocka bármely két szomszédos lapközeppontjának távolsága egyenlő. Egy ilyen háromszög oldalhosszát kell tehát meghatároznunk.

A KPL háromszög egyenlő szárú derékszögű, befogóinak hossza $\frac{a}{2}$ (4.9. ábra). Így átfogója $\sqrt{2}$ -szöröse a befogóinak:

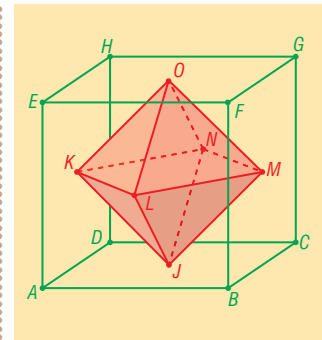
$$KL = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

A KLO szabályos háromszög területe:

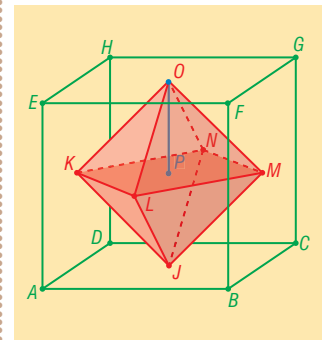
$$T_{KLO} = \frac{KL \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot KL}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot KL^2.$$

A felszín tehát:

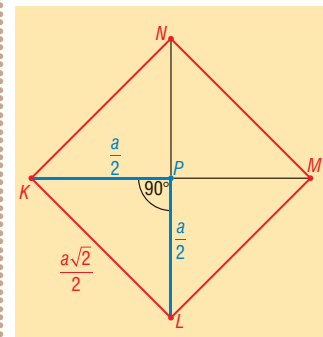
$$\begin{aligned} A &= 8 \cdot T_{\triangle} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot KL^2}{4} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot KL^2 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot (3 \cdot \sqrt{2})^2 = \\ &= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 9 \cdot 2 = 36 \cdot \sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)} \approx 62,35 \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$



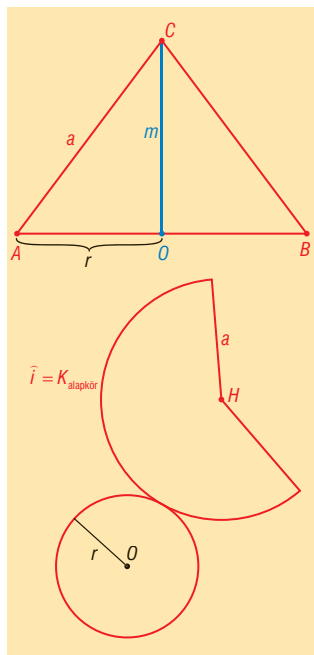
4.7. ábra A 2. példában szereplő test



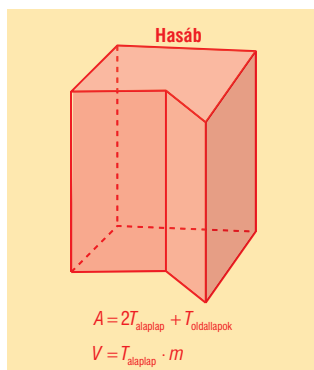
4.8. ábra Itt már egy magasság is látható



4.9. ábra Egy hasznos síkmetszet



4.10. ábra A forgáskúp tengelymetszete és hálój



4.11. ábra A hasáb felszíne és térfogata

Megjegyzés:

1. A felszín számításakor ne essünk abba a csapdába, hogy a két szabályos négyoldalú gúla felszínének összegét akarjuk venni. Hiszen ebben feleslegesen kétszer is megjelenik a $KLMN$ négyzet területe.
2. A megoldás menetéből kiderült, hogy a kocka térfogatának $\frac{1}{6}$ része az oktaéder térfogata.



3. példa Egy forgáskúp alapkörének sugara 12 cm, magassága 16 cm. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát! A felszínt dm^2 -ben, a térfogatot dm^3 -ben, két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg!

Megoldás:

A kúp térfogatának kiszámításához minden adat rendelkezésünkre áll:

$$V_{\text{kúp}} = \frac{r^2 \pi \cdot m}{3} = \frac{12^2 \pi \cdot 16}{3} = 768\pi \approx 2412,7 \text{ (cm}^3\text{)} \approx 2,41 \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Mivel a kúp minden alkotója egyenlő hosszúságú, ezért a kúp kiterített palástja egy körcikk, amelynek a sugara a kúp alkotója. A körcikk határoló ívének hossza az alapkör kerületével egyenlő. A körcikk területét, vagyis a palást területét ezekből az adatokból már meg tudjuk határozni. Az alkotó hossza Pitagorasz-tétellel kapható meg, hiszen a kúp forgástengelyén át az alapkör síkjára állított merőleges sík a kútból egy egyenlő szárú háromszöget vág ki. Ezt röviden úgy is szoktuk mondani, hogy a forgáskúp tengelymetszete egyenlő szárú háromszög (4.10. ábra).

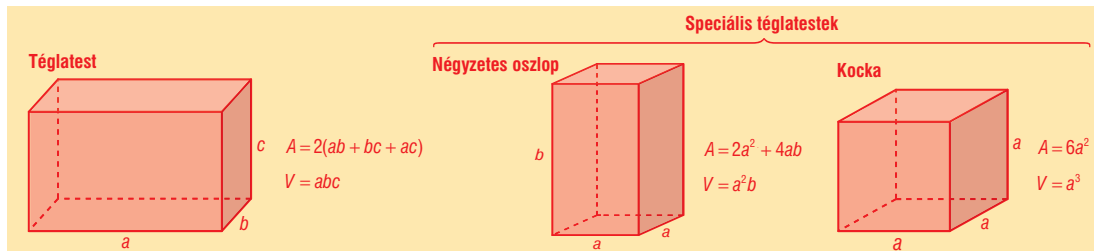
Az alkotó hossza: $a = \sqrt{r^2 + m^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ (cm)}.$

A felszín:

$$\begin{aligned} A &= T_{\text{alapkör}} + T_{\text{palást}} = r^2 \pi + \frac{K_{\text{alapkör}} \cdot a}{2} = r^2 \pi + \frac{2r\pi \cdot a}{2} = \\ &= r^2 \pi + r\pi a = 12^2 \pi + 12\pi \cdot 20 = \\ &= 384\pi \approx 1206,4 \text{ (cm}^2\text{)} \approx 12,06 \text{ (dm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

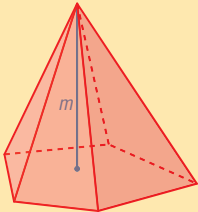
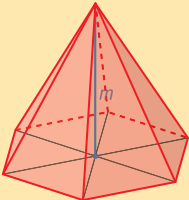
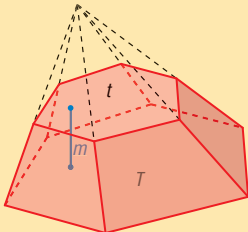
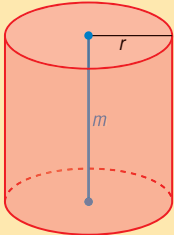
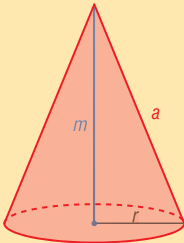
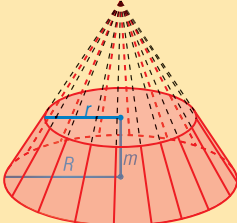
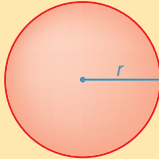


A bemelegítő példák után tekintsük át mindazon speciális testek térfogat- és felszínképleteit, amelyeket használni fogunk. (Ezek között csak a csonka gúlára és a csonka kúpra vonatkozó képletek jelenthetnek újdonságot) (4.11., 4.12. és 4.13. ábrák).



4.12. ábra Speciális hasábok felszíne és térfogata



Gúla  Felszín: $A = T_{\text{alaplap}} + T_{\text{oldallapok}}$ Térfogat: $V = \frac{T \cdot m}{3}$	Szabályos gúla (szabályos sokszög az alapja)  $A = T_{\text{alaplap}} + n \cdot T_{\text{oldallap}}$ $V = \frac{T \cdot m}{3}$	Csonka gúla  $A = T_{\text{alaplap}} + t_{\text{fedőlap}} + T_{\text{oldallapok}}$ $V = \frac{m}{3} (T + \sqrt{Tt} + t)$	
Henger (egyenes körhenger)  Felszín: $A = 2r^2\pi + 2r\pi m = 2r\pi(r + m)$ Térfogat: $V = r^2\pi m$	Kúp (egyenes körkúp)  $A = r^2\pi + ra\pi = r\pi(r + a)$ $V = \frac{r^2\pi m}{3}$	Csonka kúp  $A = (R^2 + (R + r)a + r^2)\pi$ $V = \frac{m}{3} (R^2 + Rr + r^2)\pi$	Gömb  $A = 4r^2\pi$ $V = \frac{4r^3\pi}{3}$

4.13. ábra További testek felszíne és térfogata



4. példa Egy szabályos négyoldalú csonka gúla alaplapjának és fedőlapjának éle rendre 86 cm és 32 cm, oldaléleinek hossza 50 cm. Határozzuk meg a felszínét és a térfogatát!

Megoldás:

A szabályos négyoldalú csonka gúla alaplapja és fedőlapja is négyzet, oldallapjai egybevágó húrtrapézok. A felszín kiszámításához az oldallapok magasságára van szükségünk.

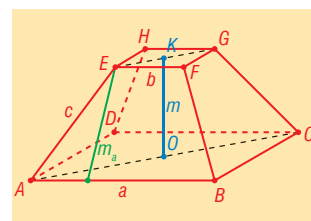
Használjuk a 4.14. ábra jelöléseit! Rajzoljuk meg az egyik oldallapot alkotó húrtrapézt (4.15. ábra)!

A Pitagorasz-tétel alapján:

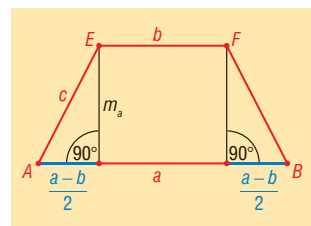
$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + m_a^2 = c^2;$$

$$m_a^2 = 50^2 - \left(\frac{86-32}{2}\right)^2;$$

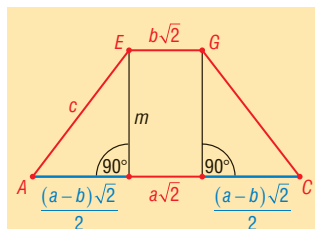
$$m_a \approx 42,083 \text{ (cm)}.$$



4.14. ábra Szabályos négyoldalú csonka gúla



4.15. ábra Egy hasznos síkmetszet



4.16. ábra Egy másik hasznos síkmetszet

Így a felszín:

$$A = T_{\text{alaplap}} + t_{\text{fedőlap}} + 4T_{\text{oldallap}} = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot m_a \approx$$

$$\approx 86^2 + 32^2 + 4 \cdot \frac{86+32}{2} \cdot 42,083 \approx 18\,351,6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A test magasságát az $ACGE$ húrtrapéz (4.16. ábra) oldalainak segítségével számoljuk ki. AC és EG egy-egy négyzet átlója, így hosszuk a négyzetoldal $\sqrt{2}$ -szöröse. A számolás ugyanúgy zajlik le, mint az előző esetben:

$$m^2 = 50^2 - \left(\frac{(86-32) \cdot \sqrt{2}}{2} \right)^2;$$

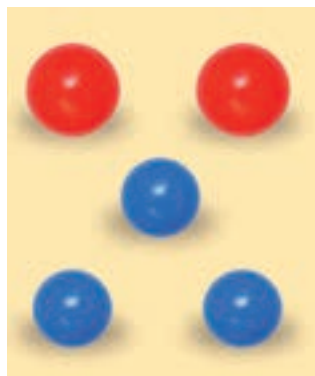
$$m \approx 32,28 \text{ (cm)}.$$

A térfogat:

$$V = \frac{m}{3} (T + \sqrt{Tt} + t) \approx \frac{32,28}{3} (86^2 + \sqrt{86^2 \cdot 32^2} + 32^2) \approx$$

$$\approx 120\,210,7 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Megjegyzés: a szabályos négyoldalú csonka gúla térfogata az előbbi jelölésekkel így is felírható: $V = \frac{m}{3} (a^2 + ab + b^2)$.



4.17. ábra A golyók



5. példa Van két darab 6 cm sugarú piros fagolyó és három darab 5 cm sugarú kék fagolyó (4.17. ábra). Melyik nagyobb:
a) a piros golyók össztérfogata vagy a kék golyók össztérfogata?
b) a piros golyók együttes felszíne vagy a kék golyók együttes felszíne?

Megoldás:

a) A gömb térfogatképlete alapján

$$2V_{\text{piros}} = 2 \cdot \frac{4R^3\pi}{3} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 6^3\pi}{3} = 576\pi \text{ (cm}^3\text{)},$$

$$3V_{\text{kék}} = 3 \cdot \frac{4r^3\pi}{3} = 3 \cdot \frac{4 \cdot 5^3\pi}{3} = 500\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A piros golyók össztérfogata nagyobb, mint a kék golyók össztérfogata.

b) A gömb felszínképlete alapján

$$2A_{\text{piros}} = 2 \cdot 4R^2\pi = 2 \cdot 4 \cdot 6^2\pi = 288\pi \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$3A_{\text{kék}} = 3 \cdot 4r^2\pi = 3 \cdot 4 \cdot 5^2\pi = 300\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A kék golyók együttes felszíne nagyobb, mint a piros golyók együttes felszíne.

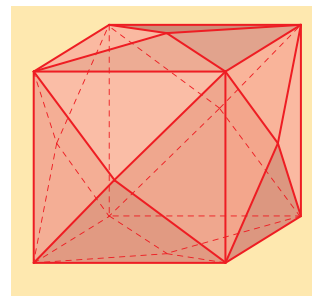
Megjegyzés:

1. Vegyük észre, hogy az a) rész megoldásából nem következtethetünk a b) rész eredményére.
2. Nem volt szükség a térfogat- és felszínértékek közelítő meghatározására. Elegendő volt azokat π -vel kifejezni.



Oldjuk meg!

1. Számítsuk ki a szabályos hatoldalú hasáb felszínét és térfogatát, ha alapélének hossza 10 cm, magassága 3 cm!
2. A 4.18. ábrán látható test úgy keletkezett, hogy egy 12 cm élű kocka minden oldallapjának középpontját a megfelelő oldallapra merőlegesen „kihúztuk” attól 2 cm-re, és ezeket a pontokat összekötöttük az adott lap csúcaival. Számítsuk ki az így kapott test felszínét és térfogatát!
3. Egy hengeres alakú óriásceruza egyik vége (a „hegye”) kúpban, másik vége félgömbben végződik. Határozzuk meg a felszínét és a térfogatát, ha tudjuk, hogy a ceruza átmérője 16 mm, teljes hossza 25 cm, és ebből 2 cm a „hegye”!
4. Egy csonka kúp alap- és fedőkörének sugara $R = 8$ cm és $r = 6$ cm. Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát, ha magassága $m = 5$ cm!
5. Tekintsünk három testet: egy r sugarú és $2r$ magasságú forgáshengert (egyenlő oldalú henger), egy r sugarú gömböt és egy r alapkör sugarú, $2r$ magasságú forgáskúpot! Határozzuk meg a három test térfogatának arányát!
6. Egy kocka minden oldallapjára ragasszunk egy vele egybevágó kockát! Hány csúcsa, éle és lapja lesz az így kapott testnek? Mekkora lesz a felszíne és a térfogata, ha a kocka éle 7 cm?
7. Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla oldallapjának párhuzamos oldalai 9 cm és 3 cm, szárai 10 cm hosszúak. Számítsuk ki a csonka gúla felszínét és térfogatát!



4.18. ábra A test

5. Vegyes feladatok I.



1. példa Egy téglatest éleinek aránya 2:3:5. Számítsuk ki a térfogatát, ha a felszíne 992 cm^2 !

Megoldás:

Jelölje a téglatest egy csúcsából kiinduló éleinek hosszát a , b és c ! A megadott arány alapján bevezethetünk egy x pozitív számot, melynek a segítségével ki tudjuk fejezni az éleket: $a = 2x$, $b = 3x$ és $c = 5x$. Így x -szel kifejezhető a felszín is (5.1. ábra):

$$A = 2ab + 2ac + 2bc = 2(2x \cdot 3x + 2x \cdot 5x + 3x \cdot 5x) = 62x^2.$$

Ebből

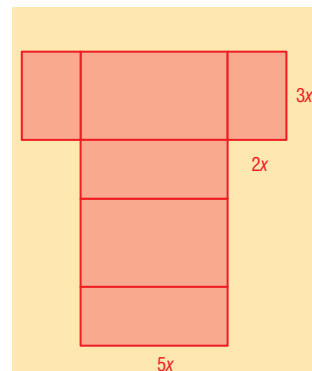
$$62x^2 = 992;$$

$$x^2 = 16;$$

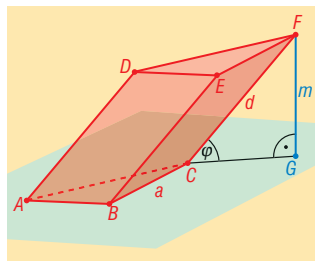
$$x = 4 \text{ (cm)}.$$

Így a térfogata:

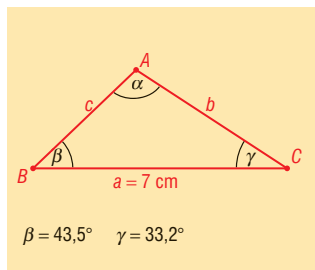
$$V = abc = 2x \cdot 3x \cdot 5x = 30x^3 = 30 \cdot 4^3 = 1920 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



5.1. ábra A téglatest hálójája



5.2. ábra Háromoldalú ferde hasáb



5.3. ábra Az alaplap

2. példa Egy háromoldalú ferde hasáb alapja egy olyan háromszög, amelynek egyik oldala 7 cm, a rajta fekvő két szög $43,5^\circ$ és $33,2^\circ$. Mekkora szöget zárnak be az 5 cm hosszú oldalélei az alaplappal, ha a ferde hasáb térfogata 36 cm^3 ?

Megoldás:

A keresett szöget a CGF derékszögű háromszögből fogjuk tudni kiszámítani, ha annak a CF oldalán kívül még egy oldalát ismerjük. Ez a magasság lehet, amelyre a térfogatból és az alapterületből következtethetünk (5.2. ábra). Tehát elsődleges célunk meghatározni az ABC alaplap területét (5.3. ábra).

Mivel a háromszög belső szögeinek összege 180° , így az A -nál lévő szög: $\alpha = 103,3^\circ$. Szinusztétellel kiszámolhatjuk például a b oldal

$$\text{hosszát: } \frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \Rightarrow b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 7 \cdot \frac{\sin 43,5^\circ}{\sin 103,3^\circ} \approx 4,95 \text{ (cm)}.$$

Az ABC háromszög területe trigonometrikus területképlettel:

$$T_{ABC\Delta} = \frac{ab \sin \gamma}{2} \approx \frac{7 \cdot 4,95 \cdot \sin 33,2^\circ}{2} \approx 9,487 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A hasáb térfogatképletéből most meghatározzuk a hasáb magasságát:

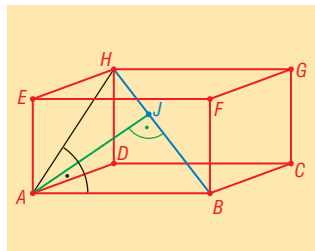
$$V = T \cdot m \Rightarrow m = \frac{V}{T} \approx \frac{36 \text{ cm}^3}{9,487 \text{ cm}^2} \approx 3,795 \text{ (cm)}.$$

A CGF derékszögű háromszögből meghatározható az oldaléleknek az alaplap síkjával bezárt φ szöge:

$$\sin \varphi = \frac{m}{d} \approx \frac{3,795}{5} \approx 0,759 \Rightarrow \varphi \approx 49,4^\circ.$$

3. példa Az $ABCDEFGH$ téglatest AB , AD és AE éleinek hossza rendre 20 cm, 12 cm és 9 cm (5.4. ábra).

- Határozzuk meg az A pont és a BH testátló távolságát!
- Milyen arányban bontja két részre a BH testátlót az A pontból rá bocsátott merőleges?
- Mekkora szöget zár be a BH testátló az AF lapátlóval?
- Mekkora a BEG háromszög területe?
- Mekkora az F pont és a BEG háromszög síkjának távolsága?

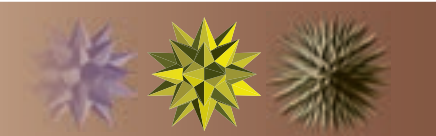


5.4. ábra A példa a) és b) részéhez

Megoldás:

a) Mivel az AB él merőleges az $ADHE$ négyszög síkjára, így annak AH szakaszára is. Tehát a BAH háromszög derékszögű. Ennek a háromszögnek az AB befogóját ismerjük, az AH befogóját pedig ki tudjuk számolni Pitagorasz-tétellel: $AH = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \text{ (cm)}$. Az A pont távolsága a BH szakasztól az A pontból a BH -ra állított merőleges szakasz hossza, vagyis a BAH derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága.

A BH testátló hossza: $BH = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ (cm)}$.



Írjuk fel kétféleképpen a BAH háromszög területét:

$$T_{BAH\Delta} = \frac{AB \cdot AH}{2} = \frac{BH \cdot AJ}{2} \Rightarrow AJ = \frac{AB \cdot AH}{BH} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12 \text{ (cm)}.$$

Az A csúcsnak a BH testátlótól vett távolsága 12 cm.

b) A kérdés megválaszolásához folytathatjuk az előző gondolatmenetet. A $HJ : JB$ arány a kérdés, vagyis az, hogy milyen arányban osztja két részre az ABH derékszögű háromszög BH átfogójához tartozó magassága az átfogót. Jelöljük a HJ szakasz hosszát x -szel (5.5. ábra)! A derékszögű háromszögre érvényes befogótétel szerint

$$AH = \sqrt{x \cdot BH} \Rightarrow x = \frac{AH^2}{BH} = \frac{15^2}{25} = 9 \text{ (cm)}.$$

Így $BJ = 25 - 9 = 16 \text{ (cm)}$.

A keresett arány: $HJ : JB = 9 : 16$.

c) Mivel a BH testátló és az AF lapátló kitérők, ezért legalább az egyiket el kell tolnunk úgy, hogy legyen közös pontjuk. Toljuk el az AF lapátlót az $\overrightarrow{FB}$ oldalélvektorral! Könnyebben látható az eltolás eredménye, ha az egész téglatestet is eltoljuk ezzel a vektorral (5.6. ábra).

Így az AF lapátló eltolta az $A'B$ szakasz lesz, amelynek van közös pontja a BH testátlóval: a B . Az $A'BH$ háromszög minden oldalának hosszát ki tudjuk számolni a Pitagorasz-tétellel, így a keresett γ szög meghatározható a koszinusztétellel.

$$A'B = \sqrt{20^2 + 9^2} = \sqrt{481}, \quad A'H = \sqrt{12^2 + (2 \cdot 9)^2} = \sqrt{468}, \quad BH = 25$$

(lásd: b) rész megoldása).

A koszinusztétel az $A'BH$ háromszögre:

$$A'H^2 = A'B^2 + BH^2 - 2 \cdot A'B \cdot BH \cdot \cos \gamma;$$

$$468 = 481 + 625 - 2 \cdot \sqrt{481} \cdot 25 \cdot \cos \gamma;$$

$$50 \cdot \sqrt{481} \cos \gamma = 638;$$

$$\cos \gamma \approx 0,5818;$$

$$\gamma \approx 54,4^\circ.$$

A BH testátló és az AF lapátló által bezárt szög kb. $54,4^\circ$.

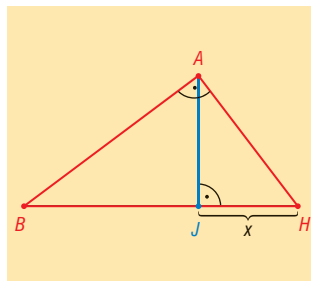
d) A megoldás vázlatát, részeredményeit és végeredményét közöljük, a részletes számításokat az olvasóra bizzuk. A három lapátló hosszának meghatározása után koszinusztétellel kiszámítjuk az $EGB\angle = \delta$ értéket, majd alkalmazzuk a trigonometrikus területképletet a háromszögre (5.7. ábra):

$$EB = \sqrt{481}, \quad BG = 15, \quad EG = \sqrt{544} \Rightarrow$$

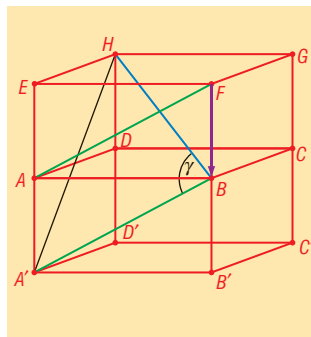
$$\Rightarrow \delta \approx 65,69^\circ \Rightarrow T_{EGB\Delta} \approx 159,4 \text{ cm}^2.$$

e) Az F pontnak a BEG háromszög síkjára vett merőleges vetülete legyen F' (5.7. ábra)! Ekkor a $BEGF$ tetraéder térfogatát felírhatjuk két-

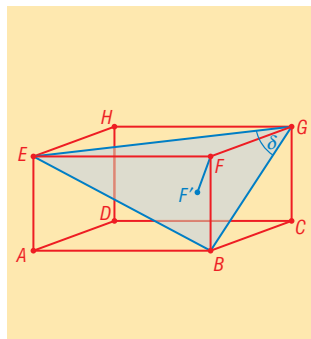
féleképpen. Egyrészt $V = \frac{T_{BEG\Delta} \cdot FF'}{3}$, másrészt, ha például az FBG háromszöget tekintjük a tetraéder alapjának, akkor a hozzá tartozó



5.5. ábra A BAH háromszög



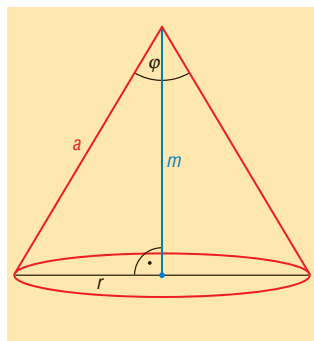
5.6. ábra Az eltolás után



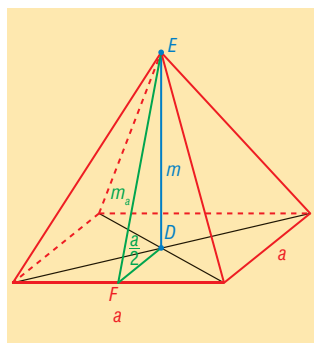
5.7. ábra A d) és e) feladat megoldásához



5.8. ábra Egyrészt – másrészt



5.9. ábra A kúp nyílásszöge



5.10. ábra Szabályos négyoldalú gúla

magasság az EF él lesz: $V = \frac{T_{FBG\Delta} \cdot EF}{3}$. Az utóbbi képletben minden mennyiség ismert, így a térfogat kiszámolható, ahonnan megkaphatjuk az FF' szakasz hosszát is. $V = \frac{T_{FBG\Delta} \cdot EF}{3} = \frac{FB \cdot FG \cdot EF}{6} = 360 \text{ (cm}^3\text{)}$. A BEG háromszög területét a d) részben határoztuk meg, innen $360 = \frac{99,3 \cdot FF'}{3} \Rightarrow FF' \approx 10,88 \text{ cm}$.



Ha egy forgáskúpot az alaplap középpontján átmenő, s arra merőleges síkkal elmetsszük (ezt hívjuk a kúp tengelymetszetének), akkor egy egyenlő szárú háromszöget kapunk. Ennek szárszögét nevezzük a kúp nyílásszögének (az 5.9. ábrán φ).



4. példa Egy forgáskúp palástjának területe 3-szor akkora, mint az alaplapjának területe. Számítsuk ki a nyílásszögét!

Megoldás:

A palást területe: $P = ra\pi$, az alapterület: $T = r^2\pi$.

A feltétel szerint $P = 3 \cdot T$, azaz $ra\pi = 3r^2\pi \Rightarrow a = 3r$. A tengelymetszeti képen az alkotó, az alapkör sugara és a kúp magassága egy derékszögű háromszöget határoz meg, innen:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi \approx 38,9^\circ.$$



5. példa Egy szabályos négyoldalú gúla felszíne 500 cm^2 , oldallapjainak magassága 14 cm . Határozzuk meg a gúla térfogatát és a határoló lapok egymással bezárt szögét!

Megoldás:

Jelölje a gúla alapélét a , oldallapjainak magasságát m_a , a gúla magasságát m (5.10. ábra)!

A felszín ismeretében kiszámíthatjuk az a értékét:

$$A = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot m_a}{2} \Rightarrow 500 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 14;$$

$$a^2 + 28a - 500 = 0;$$

$$a_{1,2} = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-500)}}{2} = \frac{-28 \pm \sqrt{2784}}{2} = -14 \pm \sqrt{696};$$

$a_1 \approx 12,38$, $a_2 < 0$, így ez nem megoldása a feladatnak.

A térfogathoz már csak az m -et kellene ismernünk. Ezt az EDF derékszögű háromszögből számolhatjuk ki (F az alapél felezőpontja.)



$$m = \sqrt{m_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \approx \sqrt{14^2 - 6,19^2} \approx 12,56 \text{ (cm)}.$$

$$\text{A térfogat: } V = \frac{T_{\text{alap}} \cdot m}{3} \approx \frac{12,38^2 \cdot 12,56}{3} \approx 641,7 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A határoló lapok hajlásszögénél először azt a kérdést vizsgáljuk meg, hányféle szöget is kell meghatároznunk. Nyilván minden oldallap egyenlő szöget zár be az alaplappal. Az is világos, hogy a szomszédos oldallapok szöge is egyenlő egymással. Viszont nem (feltétlenül) egyenlő a szemközti oldallapok hajlásszögével. A legutóbbi szöget a síkok hajlásszögére vonatkozó definíció miatt azért nehéz elképzelni, mert e két síknak csak egyetlen közös pontját látjuk: az E -t. Ezért egészítsük ki egy kicsit az ábrát: helyezzünk rá gondolatban egy olyan sátrát, amelyik csak egy-egy – a gúla valamely alapélével párhuzamos – egyenes mentén „hajlik”. Ez a hajtásél lesz a két sík metszévonal, s erre mindkét síkban merőleges az EF , illetve az EF' szakasz. Így ezek szöge lesz a két szemközti sík hajlásszöge (5.11. ábra).

Egy oldallap és az alaplappal metszévonal a gúla egy alapéle. Ennek egy pontjában, például F -ben állítsunk merőlegest az alapélre a két síkban! Ezek szöge lesz az alaplappal és egy oldallap hajlásszöge. Tehát az 5.12. ábrán az alaplappal és egy oldallap szöge egyenlő az EFD szöggel. Így az EFF' egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge és szárszöge is egy-egy keresett szög lesz.

Az FDE derékszögű háromszögből:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{m_a} \approx \frac{6,19}{14} \Rightarrow \alpha \approx 63,76^\circ,$$

$$\text{így } \beta \approx 180^\circ - 2 \cdot 63,76^\circ = 52,48^\circ.$$

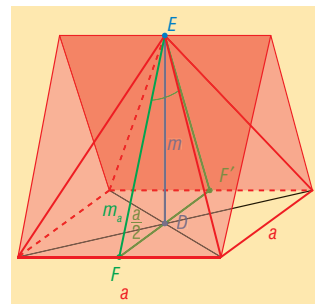
Az oldallapok az alaplappal kb. $63,76^\circ$ -os szöget zárnak be, a szemközti oldallapok pedig kb. $52,48^\circ$ -osat.

A szomszédos oldallapok szögének megállapításához egy alkalmas pontot kell választanunk a két lap síkjának metszévonalán, vagyis az oldalél egyenesén. Mivel az oldallapok egybevágó háromszögek, ezért az ABE háromszögben az A csúcsból induló magasságvonal talppontja ugyanaz a pont lesz a BE élen, mint a BCE háromszögben a C csúcsból induló magasságvonal talppontja (G). Tehát AG az ABE háromszög síkjában, CG a BCE háromszög síkjában merőleges a közös BE élre. A két sík hajlásszöge így az AGC szög lesz (5.13. ábra).

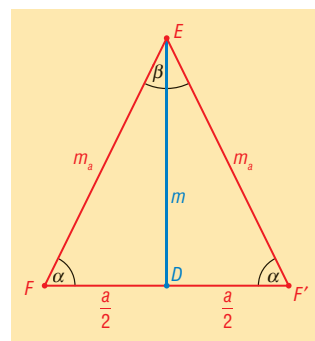
Mivel AG az ABE háromszög egyik magassága, így ki tudjuk számolni az ABE háromszög területének kétféle felírásából, ha tudjuk a BE él hosszát is. Az EFB derékszögű háromszögből

$$BE = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2} \approx \sqrt{6,19^2 + 14^2} \approx 15,3 \text{ (cm)}.$$

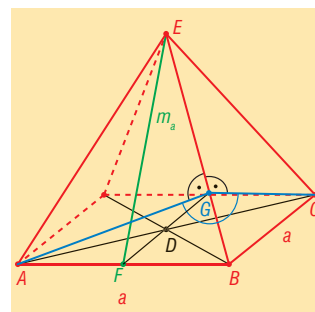
$$\begin{aligned} T_{ABE\Delta} &= \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{BE \cdot AG}{2} \Rightarrow 12,38 \cdot 14 \approx 15,3 \cdot AG \Rightarrow \\ &\Rightarrow AG \approx 11,3 \Rightarrow CG \approx 11,3. \end{aligned}$$



5.11. ábra Két szemközti oldallap síkjai



5.12. ábra A hasznos síkmetszet



5.13. ábra Oldallapok hajlásszöge



5.14. ábra Piramisok

Továbbá AC átlója az a oldalú négyzetnek, hossza tehát:

$$AC = \sqrt{2} \cdot a \approx \sqrt{2} \cdot 12,38 \approx 17,5 \text{ (cm)}.$$

Az AGC egyenlő szárú háromszögben a szárszög meghatározását az olvasóra bizzuk, értéke: kb. $101,6^\circ$.

Oldjuk meg!

1. Egy téglatest éleinek aránya: $1:2:4$, térfogata 189 cm^3 . Számítsuk ki a felszínét és lapátlóinak hosszát!
2. Egy ferde henger alapkörének sugara 5 cm , térfogata 610 cm^3 . Milyen hosszúak az alkotói, ha azok az alaplap síkjával $78,2^\circ$ -os szöget zárnak be?
3. Hajtsuk végre a 3. példában leírt feladatokat, ha az AB , AD és AH élek hossza rendre 12 cm , 9 cm és 20 cm ! Mely kérdéseknél marad ugyanaz a végeredmény, mint a 3. példában? Véletlen egybeesésekről lehet szó vagy sem? Sejtésünket indokoljuk!
4. Egy téglatestnek kétféle hosszúságú lapátlója van. Mit mondhatunk a téglatestről? Mekkora lehet a téglatest testátlója, felszíne és térfogata, ha a két különböző hosszúságú lapátló 7 cm és 8 cm ?
5. Egy szabályos négyoldalú gúla oldalélei kétszer olyan hosszúak, mint alapélei. Felszíne 870 cm^2 . Mekkora a gúla térfogata? Mekkora szöget zárnak be a gúla oldallapjai az alaplappal? Mekkora szöget zárnak be a gúla oldalélei az alaplappal?

6. Vegyes feladatok II.

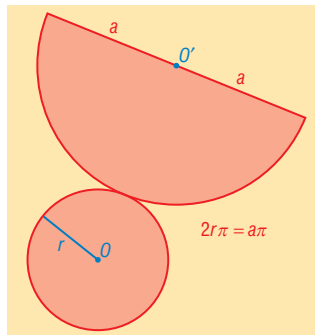


6.1. ábra A magyar királyi palást



1. példa A magyar királyi palást kiterítve majdnem pontosan félkör alakú (6.1. ábra).

- a) Mekkora annak a kúpnak a nyílásszöge, amelynek kiterített palástja félkör alakú?
- b) Igaz-e, hogy a kúp nyílásszöge és kiterített palástjának középponti szöge között egyenes arányosság van?
- c) Mekkora annak a kúpnek a nyílásszöge, amelynek kiterített palástjában a középponti szög 130° ?



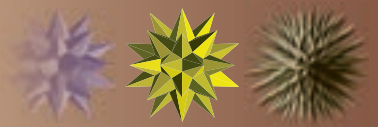
6.2. ábra Az első kúp hálója

Megoldás:

a) A félkörív hosszának és az alapkör kerületének egyenlőnek kell lennie, azaz $2r\pi = a\pi$, innen $2r = a$.

Vagyis egy olyan kúpot kapunk, amelynek az alkotói egyenlő hosszúak az alapkör átmérőjével (6.2. ábra). Így ennek a kúpnek a tengelymetszete szabályos háromszög, a kúp nyílásszöge tehát 60° (6.3. ábra).

b) Ha egyenes arányosság lenne a kúp nyílásszöge és a kiterített palást középponti szöge között, akkor pl. egy 150° -os nyílásszögű kúp kiterített palástjának középponti szöge $\frac{150}{60} \cdot 180^\circ$ lenne, ami nem lehetséges, mivel ez az érték nagyobb 360° -nál.



c) A kiterített palást határoló íve hosszának és az alapkör kerületének egyenlőnek kell lennie (6.4. ábra): $2r\pi = \frac{130^\circ}{360^\circ} \cdot 2a\pi$. Ebből meghatározható az $\frac{r}{a} = \frac{130}{360} = \frac{13}{36}$, ez pedig a kúp fél nyílásszögének a szinusza. $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{13}{36} \Rightarrow \varphi \approx 42,3^\circ$.

Megjegyzés: a c) és az a) feladat megoldásának összevetéséből is következik, hogy nem egyenes arányosság áll fenn a kúp nyílásszöge és kiterített palástjának középponti szöge között.



2. példa Egy szabályos hatoldalú gúla magassága 24 cm, alapéle 5 cm (6.5. ábra). Vágjuk el a gúlát egy olyan síkkal, mely az alaplappal párhuzamos és átmegy a magasságnak az alaphoz legközelebbi negyedelőpontján (6.6. ábra)! Határozzuk meg az így keletkező két test térfogatának és felszínének arányát!

Megoldás:

Legyen a gúla alapéle: a , magassága: m .

A két test közül a gúla csúcsához közelebbi egy, az eredetihez hasonló kisebb gúla, hiszen nagyítással egymásba vihetők. A kicsinyítés aránya

pedig a magasságok arányával egyenlő: $\lambda = \frac{\frac{3}{4}m}{m} = \frac{3}{4}$. A két gúla térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbe, azaz $V_{\text{kis gúla}} = \frac{27}{64} V_{\text{gúla}}$.

Ebből már látszik, hogy a csonka gúla térfogata az eredeti gúla másik része, azaz

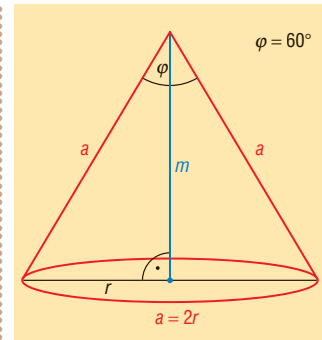
$$V_{\text{csonka gúla}} = V_{\text{gúla}} - V_{\text{kis gúla}} = \left(1 - \frac{27}{64}\right) V_{\text{gúla}} = \frac{37}{64} V_{\text{gúla}}.$$

Így a kis gúla és a csonka gúla térfogatának aránya:

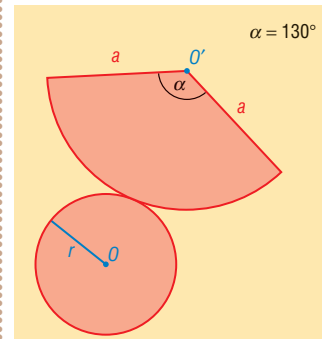
$$\frac{V_{\text{kis gúla}}}{V_{\text{csonka gúla}}} = \frac{\frac{27}{64} V_{\text{gúla}}}{\frac{37}{64} V_{\text{gúla}}} = \frac{27}{37}.$$

Eddig a gúla adatait egyáltalán nem kellett felhasználnunk, a csonka gúla felszínét viszont ki kell számolnunk. A $\lambda = \frac{3}{4}$ arányú kicsinyítés miatt a csonka gúla fedőlapja is szabályos hatszög, s oldalainak hossza az eredeti hatszög oldalai hosszának $\frac{3}{4}$ része. Így területe $t = \frac{9}{16} T$, ahol T az alapterület. Az alapterület pedig:

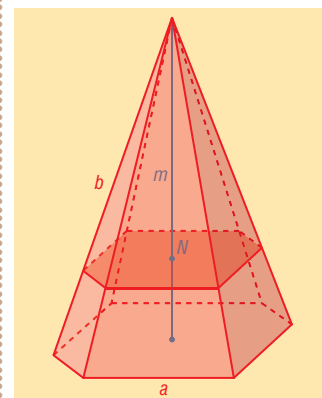
$T = 6T_{\text{szabályos háromszög}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 5^2 = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$. Így a fedő-



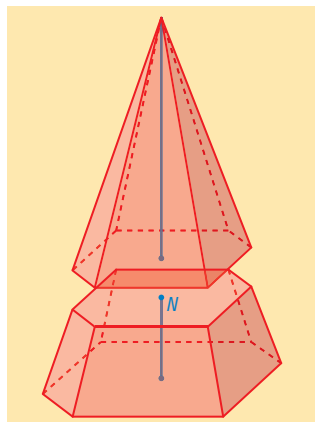
6.3. ábra Az első kúp tengelymetszete



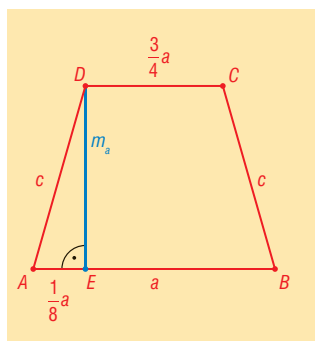
6.4. ábra A második kúp hálójá



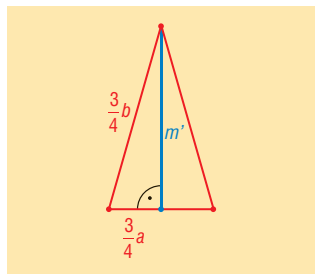
6.5. ábra Vágás előtt ...



6.6. ábra ... és vágás után



6.7. ábra Oldallap



6.8. ábra A kis gúla oldallapja

lap területe: $t = \frac{9}{16} \cdot \frac{75\sqrt{3}}{2} = \frac{675\sqrt{3}}{32} \text{ (cm}^2\text{)}$. A csonka gúla oldallapjai egybevágó húrtrapézok (6.7. ábra). Ezek alapjainak hossza 5 cm és $\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4} \text{ cm}$. Szárainak hossza az eredeti gúla oldaléleinek megmaradó $\frac{1}{4}$ része. Ehhez ki kell számolnunk az oldalélek hosszát (b).

Mivel a szabályos hatszöget hat darab szabályos háromszögre lehet bontani, ezért egy oldalélnak az alaplapon lévő végpontja a távolságra van az alaplap középpontjától. Az oldalél hossza a Pitagorasz-tétellel:

$$b = \sqrt{a^2 + m^2} = \sqrt{5^2 + 24^2} = \sqrt{701} \text{ (cm)}. \text{ A trapéz szárainak hossza (c):}$$

$$c = \frac{\sqrt{701}}{4} \text{ (cm)}. \text{ A trapéz tengelyes szimmetriája miatt } AE = \frac{1}{8}a = \frac{5}{8}.$$

A trapéz magassága:

$$m_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{1}{8}a\right)^2} = \sqrt{\frac{701}{16} - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{2779}}{8} \approx 6,59 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Egy trapéz területe: } T_{\text{trapéz}} \approx \frac{5 + \frac{15}{4}}{2} \cdot 6,59 \approx 28,83 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A csonka gúla felszíne:

$$A_{\text{csonka gúla}} = T + t + 6T_{\text{trapéz}} \approx \frac{75\sqrt{3}}{2} + \frac{675\sqrt{3}}{32} + 6 \cdot 28,83 \approx 274,47 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A kis gúla felszínének meghatározásához még ki kell számolnunk egy-egy oldallap magasságát (m') (6.8. ábra).

$$m' = \sqrt{\left(\frac{3}{4}b\right)^2 - \left(\frac{3}{4}a\right)^2} \approx \sqrt{394,31 - 3,52} \approx 19,77 \text{ (cm)}.$$

$$A_{\text{kis gúla}} = t + 6 \cdot T_{\text{oldallap}} \approx \frac{675\sqrt{3}}{32} + 6 \cdot \frac{\frac{15}{4} \cdot 19,77}{2} \approx 258,95 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{A kis gúla és a csonka gúla felszínaránya: } \frac{A_{\text{kis gúla}}}{A_{\text{csonka gúla}}} \approx \frac{258,95}{274,47} \approx 0,94.$$



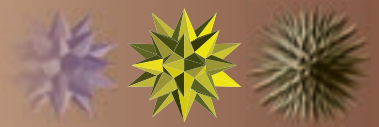
3. példa

Egy csonka kúp alakú tejfölszophár alapkörének átmérője 6 cm, fedőkörének átmérője 7,5 cm, alkotója 10 cm (6.9. ábra). Mennyi a benne lévő 375 gramm 20% zsírtartalmú tejföl sűrűsége!

Megoldás:

Számítsuk ki először a csonka kúp térfogatát!

$r = 3 \text{ cm}$, $R = 3,75 \text{ cm}$, $a = 10 \text{ cm} \Rightarrow$ a csonka kúp tengelymetszete egy húrtrapéz, s ennek magassága egyenlő a csonka kúp



magasságával. A magasságot ugyanúgy határozzuk meg, mint az előző feladatban:

$$m = \sqrt{a^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 0,375^2} \approx 9,99 \approx 10 \text{ (cm)}.$$

Annyira kicsi a pohár két alapkörének a sugara között a különbség, hogy az alkotó hosszával magasságként is számolhatunk.

$$V_{\text{csónka kúp}} = \frac{m}{3} (R^2 + Rr + r^2) \pi \approx \frac{10}{3} (3,75^2 + 3,75 \cdot 3 + 3^2) \pi \approx 359 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A tejföl sűrűsége:

$$\rho = \frac{\text{tömeg}}{\text{térfogat}} \approx \frac{375 \text{ g}}{359 \text{ cm}^3} \approx 1,045 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$



4. példa Egy szabályos háromoldalú gúla alapéleinek hossza 6 cm, oldaléleinek hossza 9 cm (6.10. ábra).

- Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát!
- Mekkora szöget zárnak be az oldallapjai az alaplappal?
- Mekkora szöget zárnak be az oldalélei az alaplappal?

Megoldás:

a) Jelöljük a -val a gúla alapélét, és b -vel az oldalélét! Egy szabályos háromoldalú gúla magasságának talppontja az alaplapon az alapot képező szabályos háromszög középpontja (egyben súlypontja). A súlypont a súlyvonal csúcsától távolabbi harmadolópontjába esik. Így

$$ES = \frac{s_a}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}{3} = \frac{\sqrt{3}a}{6} = \frac{\sqrt{3} \cdot 6}{6} = \sqrt{3}.$$

$$m_a = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{72}.$$

$$m = \sqrt{m_a^2 - ES^2} = \sqrt{72 - 3} = \sqrt{69};$$

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 m}{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot 36 \cdot \sqrt{69}}{12} \approx 43,16 \text{ (cm}^3\text{)};$$

$$A = T + 3T_{\text{oldallap}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 3 \cdot \frac{am_a}{2} = 9\sqrt{3} + 9\sqrt{72} \approx 91,96 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

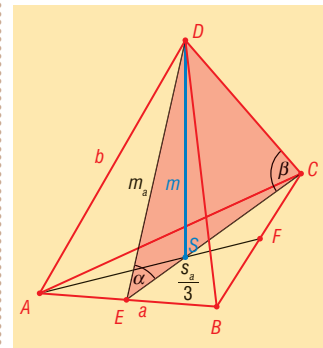
b) és c) Mindkét feladat megoldható az ECD háromszög segítségével (6.11. ábra). Az oldallapok az alaplappal az α szöget zárják be, az élek pedig a β szöget.

$$\text{tg } \alpha = \frac{m}{ES} = \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \approx 78,22^\circ;$$

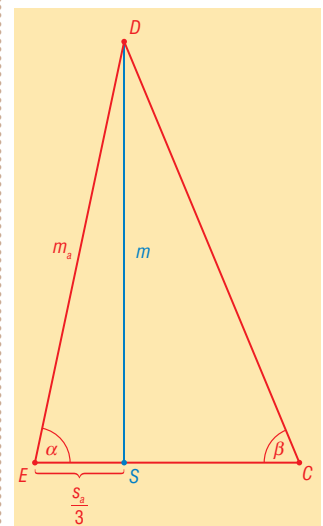
$$\sin \beta = \frac{m}{b} = \frac{\sqrt{69}}{9} \Rightarrow \beta \approx 67,36^\circ.$$



6.9. ábra Tejfölöspohár



6.10. ábra Szabályos háromoldalú gúla



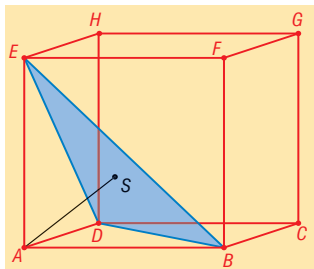
6.11. ábra Az ECD háromszög



Oldjuk meg!

1. Egy forgáskúp kiterített palástjának középponti szöge 210° . A kúp alapkörének területe 49π terület-egység. Számítsuk ki a kúp felszínét, térfogatát és nyílásszögét!
2. Egy forgáskúp nyílásszöge
 - a) 90° ; b) 120° .
 Tengelymetszetének területe 18 cm^2 . Mekkora a kúp magassága, alapkörének sugara, felszíne és térfogata?
3. Egy szabályos négyoldalú gúlát a magasság alaptól távolabbi harmadolópontján át az alappal párhuzamos síkkal elmetsszük.
 - a) Hogyan aránylik egymáshoz a levágott kis gúla és az eredeti gúla felszíne?
 - b) Hogyan aránylik egymáshoz a levágott kis gúla és az eredeti gúla térfogata?
 - c) Hogy aránylik egymáshoz az eredeti gúla és a csonka gúla térfogata?
 - d) Milyen magasságban kell elvágnunk ahhoz, hogy a keletkező két test térfogata egyenlő legyen, ha a gúla magassága 12 cm ?
4. Egy szabályos négyoldalú csonka gúla 8 cm hosszú oldalélei az alaplappal 70° -os szöget zárnak be. Mekkora a csonka gúla felszíne és térfogata, ha fedőlapján az élek hossza 3 cm ?
5. Forgassunk meg egy derékszögű háromszöget
 - a) az a befogója,
 - b) a b befogója;
 - c) a c átfogója körül!
 Számítsuk ki a keletkező forgástestek térfogatának arányát! Határozzuk meg az egyes esetekben a felszín értékét, ha $a = 16 \text{ cm}$ és $b = 30 \text{ cm}$! Melyik esetben kapjuk a legnagyobb felszínű forgástestet?
6. Egy csonka kúp alapkörének és fedőkörének átmérője 10 cm és 6 cm . Számítsuk ki az alkotójának és a magasságának a hosszát, ha tudjuk, hogy a felszíne $66\pi \text{ cm}^2$! Mekkora szöget zárnak be az alkotók az alaplappal?
7. Melyik testnek nagyobb a térfogata: a 3 mm átmérőjű 2 m hosszú (hengeres) alumínium rúdnak vagy a 3 cm átmérőjű vasgolyónak?

7. A kocka és más szabályos testek



7.1. ábra A vizsgált háromszög a kockában

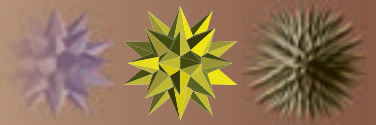


1. példa Adott egy 4 cm élű kocka.

- a) Milyen messze van a kocka egyik csúcsa a belőle kiinduló három él másik végpontja által meghatározott síktól?
- b) Milyen távol van az ebből a csúcsból a síkra bocsátott merőleges talppontja az egyes csúcsoktól?

Megoldás:

Használjuk a 7.1. ábra jelöléseit! Legyen a kiszemelt csúcs az A , a belőle kiinduló élek végpontjai B , D és E ! Az ezeken átmenő síknak a kockával közös része a BDE háromszög. Mivel a kocka minden lapátlója



egyenlő hosszú, ezért a BDE háromszög szabályos. Ha a kocka élének hosszát a -val jelöljük, akkor $BD = DE = EB = \sqrt{2} \cdot a$!

a) Használhatjuk az 5. lecke 3. e) feladatára adott megoldás ötletét, miszerint egy tetraéder térfogatát kétféleképpen írjuk fel. Az egyik felírásban a BDE háromszög területe szerepel. Mivel szabályos, ezért

$$T_{BDE\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4} BD^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Az $ABDE$ tetraéder térfogata

$$V_{ABDE} = \frac{T_{BDE\Delta} \cdot AS}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a^2}{3} \cdot AS = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 \cdot AS.$$

Ugyanakkor, ha az ABD háromszöget tekintjük alapjának, akkor:

$$V_{ABDE} = \frac{T_{ABD\Delta} \cdot AE}{3} = \frac{\frac{a^2}{2}}{3} \cdot a = \frac{a^3}{6}.$$

A kétféle felírásból: $\frac{\sqrt{3}}{6} a^2 \cdot AS = \frac{a^3}{6}$. Ebből $AS = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2,31$ (cm)

b) 1. módszer:

Mivel az AS szakasz merőleges a BED háromszög síkjára, ezért az $ASE \angle$, az $ASB \angle$ és az $ASD \angle$ derékszögek. Az ASE háromszögre, az ASB háromszögre és az ASD háromszögre alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tételt:

$$AS^2 + ES^2 = AE^2; AS^2 + BS^2 = AB^2; AS^2 + DS^2 = AD^2.$$

Mivel $AE = AB = AD$, így

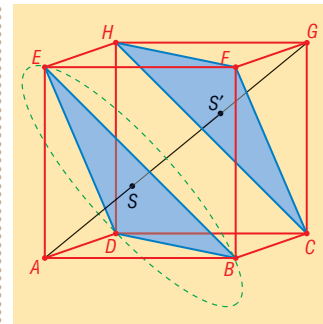
$$ES = BS = DS = \sqrt{AE^2 - AS^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

2. módszer:

Először rajzoljuk meg az A csúsból induló testátlót. Képzeltben forgassuk el a kockát a testátló körül (7.2. ábra). Mivel az AEG és az ABG háromszög egybevágó (az A csúcs felől a befogójú, a G csúcs felől $\sqrt{2} \cdot a$ befogójú derékszögű háromszögek), és átfogója mindkettőnek az AG forgástengelyre illeszkedik, ezért egy elegendően nagy szöggel való elforgatáskor az E csúcs a B -be megy át. De pontosan ugyanígy a B csúcs átmegy a D -be, a D pedig az E -be. Az AG testátló körüli forgatáskor a testátlóra nem illeszkedő pontok a testátlóra merőleges síkban mozognak, így a BDE háromszög síkja merőleges a testátlóra, s az itt elmondottakból is következik, hogy a BDE háromszög szabályos. Ez viszont azt jelenti, hogy a forgástengely csak a szabályos háromszög középpontjában dőfheti a háromszög síkját. Így az S dőféspont a B , a D és az E csúcstól egyenlő távolságra van, amit könnyű kiszámítani, hiszen a szabályos háromszög középpontja egyben a háromszög súlypontja is, így harmadolja a súlyvonalakat:

$$SB = SD = SE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} BD = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot a = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot a \approx 3,27 \text{ (cm)}.$$

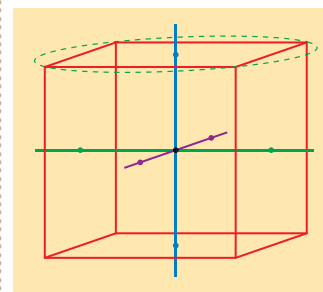
Megjegyzés: a CFH háromszög ugyanilyen helyzetű az AG testátlóhoz képest, tehát az is szabályos, annak a síkja is merőleges az AG



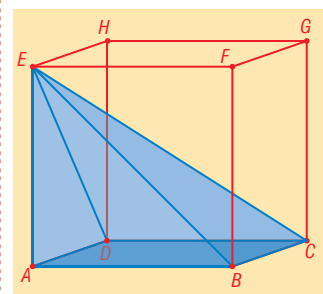
7.2. ábra Párhuzamos síkok



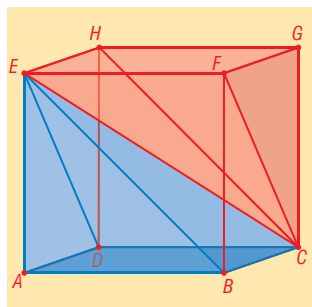
7.3. ábra Dőféspont



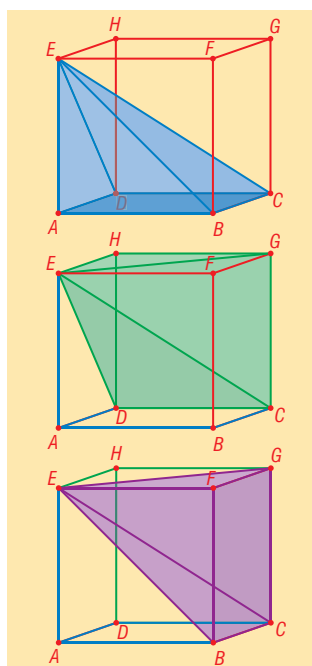
7.4. ábra A szemközti lapközép-pontokat összekötő egyenesek



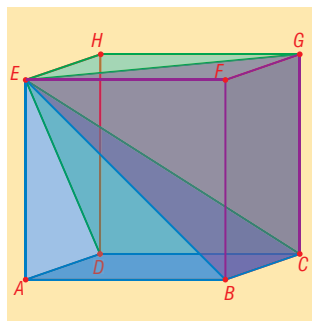
7.5. ábra A vizsgált gúla a kockában



7.6. ábra Egy újabb gúla



7.7. ábra A három gúla



7.8. ábra A három gúla kitölti a kockát

testátlóra, tehát a BDE és a CFH háromszög síkja párhuzamos egymással, a kocka pedig az AG testátló körüli harmadrendű forgásszimmetriával rendelkezik. (A 2. megoldásban emlegetett elegendően nagy szög pedig nyilván 120° .) Ez a gondolat szokatlan lehet, ha eddig csak a szemközti lapok középpontját összekötő egyenesek körüli negyedrendű forgásszimmetriát vettük észre (7.4. ábra).



2. példa Hányad része a kocka a térfogatának egy olyan gúla térfogata, amelynek alaplappja a kocka egyik lapja, szemközti csúcsa pedig a kocka többi négy csúcsának valamelyike (7.5. ábra)? El tudnánk-e helyezni ebben a kockában még egy, az előbbivel egybevágó gúlát? És még egyet?

Megoldás:

A kockát hasábként tekintve térfogata az alapterület és a magasság szorzata, míg a gúláé ugyanezen alapterület és ugyanezen magasság szorzatának a harmada. A gúla térfogata tehát harmada a kocka térfogatának.

Ha el tudunk helyezni még egy az eredetivel egybevágó gúlát a kockába, akkor annak az öt határoló lapja közül az egyiknek ugyanúgy egybe kell esnie a kocka egy teljes lapjával, és két másik lapjának illeszkednie kell a kocka egy lapjára. Ráadásul ennek a három lapnak a kockán egy közös csúccsal kell rendelkeznie. Így kézenfekvőnek látszik, hogy ez a közös csúcs a G csúcs legyen. El tudunk így helyezni egy második gúlát (7.6. ábra).

Ekkor a két gúla össztérfogata a kocka kétharmada, s ettől akár el is lehetne helyezni a kockában egy harmadik, az előzőekkel egybevágó gúlát, de jól látható, hogy nem maradt ép négyzetlapja a kockának, ahová el tudnánk helyezni ezt a gúlát.

Itt könnyen fel is adhatnánk a próbálkozást, de figyeljünk arra, hogy a harmadik gúlát úgy akartuk elhelyezni, hogy feltételeztük, hogy a második így áll. Ha figyelünk arra is, hogy miért nem tudtuk a harmadik gúlát elhelyezni a kockában, akkor kereshetünk tudatosan egy olyan helyzetet a második gúlának, hogy „maradjon ki” még ennek az elhelyezése után is egy teljes lapja a kockának. Egy ilyen megoldást mutat a 7.7. ábra.

Ebben az elrendezésben pontosan egymás mellé került az ADE egyenlő szárú derékszögű háromszög és a DHE egyenlő szárú derékszögű háromszög, így ezek együttesen kitöltik az $ADHE$ négyzetet. És az egyetlen kockalap, amely teljesen kimaradt: a $BCGF$ oldal. Ezzel szemben egyedül az E csúcs maradt ki, amivel összekötve a $BCGF$ lap csúcsait egy az előzőekkel egybevágó gúlát kapunk, aminek nincs közös belső pontja a másik két gúlával. (Ennek ellenőrzése nem nehéz, az olvasóra bízunk.)

Ez a három gúla ki is tölti a kockát (7.8. ábra).

Megjegyzés:

Ez a feldarabolás az alapja annak, hogy miért kell hárommal osztani a gúla térfogatképletében az alapterület és a magasság szorzatát.



3. példa Számítsuk ki az x élű szabályos tetraéder magasságát (7.9. ábra)!

Megoldás:

- Itt is használhatnánk ugyanazt a megoldási módot, amelyet a 6. lecke 4. a) feladatában ismertettünk. Ezt most az olvasóra bizzuk.
- Térjünk vissza most a lecke elejére, az 1. példára! Azt már megállapítottuk, hogy (az ott használt jelölésekkel) például a BDE háromszög szabályos. De ugyanígy nyilván a BDG , sőt a DEG és a BEG háromszög is szabályos.

Így tehát felfedezhető egy szabályos tetraéder a kockában, amelynek oldalélei $x = \sqrt{2} \cdot a$ hosszúságúak. Innen is kétféleképpen fejezhetjük be a feladat megoldását.

I. Mivel az AS távolság az AG testátló hosszának harmada, ezért

$$SG = \frac{2}{3} AG = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} x.$$

Így az x segítségével kifejezve a tetraéder térfogata:

$$V = \frac{T_{BDG\Delta} \cdot SG}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} x^3.$$

II. A $BDEG$ tetraéder térfogatát úgy is megkaphatjuk, ha a kocka térfogatából levonjuk annak a négy tetraédernek a térfogatát, amelyeket a $BDEG$ szabályos tetraéder lapsíkjai levágnak a kockából. Ezeknek egy-egy lapja a $BDEG$ tetraéder egy-egy oldallapja, negyedik csúcsuk pedig A , C , F , illetve H . Ezt már szintén kiszámoltuk az 1. példában, tehát most alkalmazhatjuk:

$$V_{BDEG} = a^3 - 4 \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}.$$

Ezt a tetraéder x éle és a kocka a éle közti összefüggést felhasználva az x -szel így fejezhetjük ki:

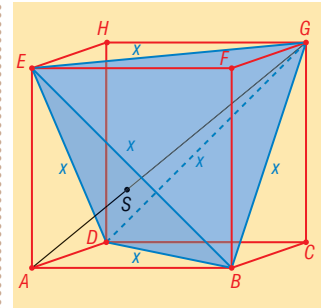
$$V_{BDEG} = \frac{a^3}{3} = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^3}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} x^3.$$



A 4. lecke 2. példájában már találkoztunk a szabályos oktaéder nevű testtel is.

Keressük meg, mi a közös a szabályos tetraéderben, a szabályos oktaéderben és a kockában!

Azt fedezhetjük fel, hogy mindegyik test oldallapjai egybevágó szabályos sokszögek. Tudunk viszont olyan példát mondani, amely teljesíti ugyanezeket a feltételeket, mégis más fajtának érezhetjük. Ilyen például egy olyan test, amelyet 7 kockából úgy építünk fel, hogy



7.9. ábra A tetraéder a kockában



7.10. ábra Egy tetraéder



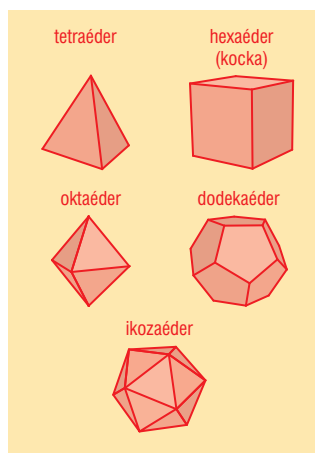
7.11. ábra Platón filozófiájában is fontos szerepet kaptak a szabályos testek



7.12. ábra Melyik nem szabályos szerencsehozó test?

Sokszöglapok oldalainak száma	Egy csúcsban találkozó lapok száma
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

7.13. ábra Szabályos testek jellemző paraméterei



7.14. ábra A szabályos testek

egyetlen kocka minden lapjára egy vele egybevágó kockát ragasztunk úgy, hogy azok teljes lapjukkal érintkezzenek. Abban különbözik ez az előzőektől, hogy a test nem egyformán viselkedik minden csúcsa közelében. Legyen akkor ez az új feltétel, ahhoz, hogy a testet szabálynak nevezhessük.



Definíció Azokat a poliédereket nevezzük **szabályos testeknek**, amelyeket csupa egybevágó szabályos sokszöglap határol és minden szöglete is egybevágó.

(Azaz a csúcsaiból ugyanannyi él indul ki, és a szomszédosak egyenlő szögeket zárnak be.)

A síkban végtelen sok szabályos sokszög létezik. Vajon mi a helyzet a szabályos testekkel?

Hány oldalúak lehetnek azok a sokszöglapok, amelyek egy ilyen testet határolnak? Ahhoz, hogy létrejöhessenek a sokszög csúcsai, a test kiterített hálóján az egy csúcsához tartozó sokszögek együttesen nem adhatnak teljes vagy annál nagyobb szöget. És mivel legalább három sokszögnek kell találkozni egy csúcsban, így hat vagy annál több oldalú nem lehet a sokszög (hiszen már a szabályos hatszögnek is 120° -os egy belső szöge, amelyből három darab már egy teljes szög). Tehát csakis szabályos háromszögek, négyzetek vagy szabályos ötszögek lehetnek az oldalak.

Következő kérdés, hogy hány szabályos sokszög találkozhat egy csúcsban. Ismét a kiterített hálón látható szögekkel dolgozunk. A 60° -os belső szögű háromszögből hat darab már sok lenne, legfeljebb tehát 5 darab lehet belőle. A négyzetből és a szabályos ötszögekből pedig már csak három (7.13. ábra).

Több lehetőség tehát nincs.

Ezek a testek mind léteznek is, bár azt már nem ennyire könnyű megmutatni. A szabályos testeket a határoló lapjaik számáról nevezték el.

A 7.13. táblázatbeli előfordulásuk sorrendjében: tetraéder (4 lapú), oktaéder (8 lapú), ikozaéder (20 lapú), hexaéder (6 lapú, más néven kocka) és dodekaéder (12 lapú) (7.14. ábra).



Oldjuk meg!

- Mekkora annak a gömbnek a sugara, felszíne és térfogata, amelyik az a élű kocka
 - minden lapját érinti;
 - minden csúcsán átmegy;
 - minden élét érinti?
- Milyen téglatestekre igaz, hogy van olyan gömb, amelyik a téglatest
 - minden lapját érinti;
 - minden csúcsán átmegy?
- Milyen testet kapunk, ha egy szabályos oktaéder szomszédos lapközpontjait összekötjük? Hogy aránylik egymáshoz az oktaéder és a kapott test térfogata? (Vajon milyen testet kapunk, ha egy dodekaéder szomszédos lapközpontjait kötjük össze?)
- Keressük meg a kocka összes szimmetriásíkját!

III. fejezet

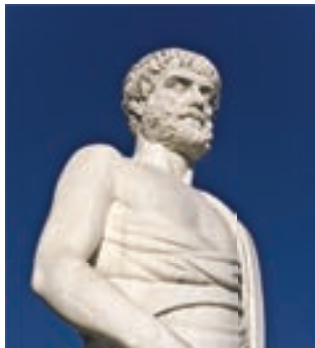
Logika



Logikus?



1. Matematikai logika



1.1. ábra Arisztotelész szobra szülőhelyén Sztageirában



A paradoxonok feloldhatatlan ellentmondások (pl.: Russel-paradoxon).

A mindennapi szóhasználat gyakran használja a „paradoxon” kifejezést dilemmákra vagy valamilyen meghökkentő jelenségekre (pl.: születésnap paradoxon, Hilbert Grand Hotel paradoxonja).

A paradoxonokról további ismereteket szerezhetsz Richard Mark Sainsbury: *Paradoxonok* és Raymund Smullyan: *Emlékek, történetek, paradoxonok* című művekből.

1.2. ábra Paradoxon



1.3. ábra Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

A **matematikai logika** a matematika azon területe, amely a matematikai rendszereket és az azokban szereplő bizonyításokat matematikai módszerekkel vizsgálja. Kezdetben a logikát a filozófia részének tekintették, a logikai törvények első nagy rendszerezője Arisztotelész görög polihisztor volt (1.1. ábra). A paradoxonok felfedezése (1.2. ábra) vetette fel a helyes definíciók, illetve helyes következtetések vizsgálatának igényét. Ehhez a bizonyítások formalizálására volt szükség, illetve arra, hogy minden bizonyításról belássuk, hogy leírhatók egy adott formális nyelven. A mai értelemben vett matematikai logika megszületése Leibniz (1.3. ábra) nevéhez fűződik.

A továbbiakban a matematikai logika azon ágával foglalkozunk, amely az egyértelműen igaz vagy hamis kijelentő mondatokkal, az **ítéletekkel** vagy – más szóhasználatlaltal – **kijelentésekkel**, **állításokkal** foglalkozik. Az ítéleteket $A, B, C, \dots$ vagy $p, q, r, \dots$ betűkkel jelöljük. Az „igaz”, illetve „hamis” az ítélet **logikai értéke** vagy **igazságértéke**. A logikának azt az ágát, amelynek alapfogalmai az ítélet, a logikai érték és az ítéletek halmazán értelmezett logikai függvény, amely az ítéletekhez egy logikai értéket rendel, **ítéletkalkulusnak** vagy **ítéletlogikának** nevezik.



1. példa Válasszuk ki az alábbi mondatok közül az ítéleteket! Adjuk meg az ítélet logikai értékét!

$A = „2 \cdot 2$ egyenlő 5-tel.”

$B = „2 \cdot 2$ egyenlő 4-gyel.”

$C = „De$ szeretnék okos lenni!”

$D = „Kata$ szép lány.”

$E = „Most$ hazudok.”

Megoldás:

Az A és a B kijelentő mondatok ítéletek, az A logikai értéke hamis, a B logikai értéke igaz. Jelekkel: $|A| = h$, $|B| = i$ vagy $A = h$, $B = i$. C nem ítélet. (A felkiáltó, a felszólító, az óhajtó és a kérdő mondatok nem ítéletek.)

D nem ítélet, mert nem dönthető el egyértelműen, hogy igaz vagy hamis.

E nem ítélet, mert ellentmondásos. Ha E igaz lenne, akkor nem mondanék igazat, tehát mégsem lenne igaz, ha pedig az állítás hamis lenne, akkor igazat mondanék, tehát az állítás igaz lenne.

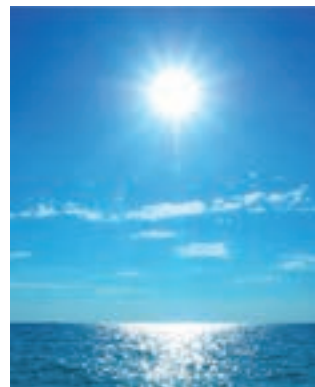
Ha az ítéleteket tagadószóval (*nem*) látjuk el, vagy kötőszavakkal (*és; vagy; ha..., akkor...; akkor és csak akkor..., ha...;*) kapcsoljuk össze, akkor újabb ítéleteket kapunk. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az ítéletek halmazán műveleteket hajtottunk végre. Ezeket a műveleteket



logikai műveleteknek nevezzük. A logikai műveleteket ún. **igazságtáblázattal** adjuk meg. Az igazságtáblázat a benne szereplő ítéletekhez tartozó logikai értékek ismeretében adja meg a művelet eredményének logikai értékét.

Az alábbiakban a fent említett módon kapott ítéleteket vizsgáljuk meg logikai szempontból.

A „legegyszerűbb” művelet a **negáció (tagadás)**. Például az $A =$ „Forog a Föld.” ítélet negációja vagy tagadása a „Nem forog a Föld.” ítélet. Az A ítélet negációjának jelölése: $\neg A$, olvasása: nem A .



1.4. ábra Süt a nap



Definíció Negáció

A	$\neg A$
i	h
h	i

Szavakkal: az A ítélet **negációja** igaz, ha az A hamis, és hamis, ha az A igaz.

A példában szereplő $\neg A$ ítélet logikai értéke hamis, mivel A igaz volt.



2. példa Fogalmazzuk meg az alábbi ítéletek tagadását!

$A =$ „Süt a nap.”

$B =$ „A 0 nem páratlan szám.”

$C =$ „A 30 osztható 5-tel és osztható 6-tal.”

$D =$ „Esik az eső vagy fúj a szél.”

$E =$ „Minden prímszám páratlan.”

$F =$ „Van olyan deltoid, amelyik nem trapéz.”



1.5. ábra Esik az eső

Megoldás:

Tagadáskor nem egy mondatrészt tagadunk, hanem az egész mondatot. Praktikus a „Nem igaz, hogy...” formát alkalmazni, majd a kapott kijelentő mondatot a legegyszerűbb alakban megadni.

$\neg A =$ „Nem igaz, hogy süt a nap.” = „Nem süt a nap.”

$\neg B =$ „Nem igaz, hogy a 0 nem páratlan szám.” =
= „A 0 páratlan szám.”

$\neg C =$ „Nem igaz, hogy a 30 osztható 5-tel és 6-tal.” =
= „A 30 nem osztható 5-tel vagy nem osztható 6-tal.”

$\neg D =$ „Nem igaz, hogy esik az eső vagy fúj a szél.” =
= „Nem esik az eső és nem fúj a szél.”

$\neg E =$ „Nem igaz, hogy minden prímszám páratlan.” =
= „Van olyan prímszám, amelyik nem páratlan.” =
= „Van olyan prímszám, amelyik páros.”



1.6. ábra Fúj a szél



1.7. ábra Igaz vagy hamis



1.8. ábra Forog a Föld



1.9. ábra Múlik az idő

$\neg F$ = „Nem igaz, hogy van olyan deltoid, amelyik nem trapéz.” =
= „Nincs olyan deltoid, amelyik nem trapéz.” =
= „Minden deltoid trapéz.”



Vegyük észre, hogy a B ítélet éppen a G = „A 0 páratlan szám.” ítéletnek a tagadása, azaz $B = \neg G$. A fentiekből pedig $\neg B = G$, így $G = \neg(\neg G)$.

Belátható az alábbi tétel:



Tétel Bármely ítélet tagadásának tagadása az eredeti ítélet. Jelekkel: $A = \neg(\neg A)$. Ezt a tételt a **kettős tagadás** törvényének nevezzük.



3. példa Tekintsük az A = „Forog a Föld.” és a B = „Múlik az idő.” ítéleteket! Kapcsoljuk össze az A , B ítéleteket
a) az „és” kötőszóval!
b) a „vagy” kötőszóval!

Megoldás:

a) „ A és B ” ítélet: „Forog a Föld és múlik az idő.”, amely akkor és csak akkor igaz, ha a „Forog a Föld.” és a „Múlik az idő.” ítéletek mindegyike igaz.

Ezt az ítéletet az A és B ítéletek **konjunkciójának** nevezzük. Jelölése: $A \wedge B$, olvasása: A és B .



Definíció Konjunkció

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Szavakkal: az A és B ítélet konjunkciója az az ítélet, amely akkor és csak akkor igaz, ha az A , B ítéletek mindegyike igaz.

b) „ A vagy B ” ítélet: „Forog a Föld vagy múlik az idő”, amely akkor és csak akkor hamis, ha a „Forog a Föld” és a „Múlik az idő” ítéletek mindegyike hamis.

Ezt az ítéletet az A és B ítéletek **diszjunkciójának** nevezzük. Jelölése: $A \vee B$, olvasása: A vagy B .



Definíció Diszjunkció

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Szavakkal: az A, B ítéletek diszjunkciója az az ítélet, amely akkor és csak akkor hamis, ha A, B ítéletek mindegyike hamis.

A definíciók alapján belátható, hogy tetszőleges A, B, C ítéletek esetén

- $A \wedge B = B \wedge A$, $A \vee B = B \vee A$, azaz a konjunkció és a diszjunkció **kommutatív**;
- $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$, $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$, azaz a konjunkció és a diszjunkció **asszociatív**;
- $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, azaz a **konjunkció disztributív a diszjunkcióra nézve**;
- $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, azaz a **diszjunkció disztributív a konjunkcióra nézve**;



4. példa Készítsük el az alábbi műveletek igazságtáblázatát!

a) $A \wedge \neg A$; b) $A \vee \neg A$.

Megoldás:

a)

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
i	h	h
h	i	h

A táblázat alapján megfogalmazhatjuk a tételt.



Tétel Bármely A ítélet esetén: $A \wedge \neg A = h$, azaz egy ítélet és negációja nem lehet egyszerre igaz. Ezt a tételt szokás az **ellentmondásmentesség elvének** nevezni.

b)

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
i	h	i
h	i	i

A táblázat alapján megfogalmazhatjuk a tételt.



Tétel Bármely A ítélet esetén: $A \vee \neg A = i$, azaz egy ítélet és negációja nem lehet egyszerre hamis (legalább az egyik ítélet igaz). Ez a **harmadik kizárásának elve**.



1.10. ábra Az „igazság szája”. A legenda szerint a szobor megkapja annak a kezét, aki nem mond igazat



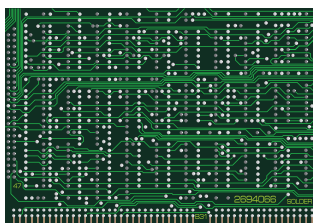
1.11. ábra Az igazságot gyakran bekötött szemű, mérleget tartó fiatal nőként ábrázolják, amellyel a pártatlanságára utalnak



1.12. ábra Augustus de Morgan (1806–1870)



1.13. ábra Az olyan logikai feladatok megoldása, mint a sudoku, fejlesztik a gondolkodást



1.14. ábra Logikai áramkör



5. példa Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B ítéletek esetén teljesülnek az

a) $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$;

b) $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ azonosságok (a *De Morgan-azonosságok*).

Megoldás:

Készítsük el az azonosságok jobb, és bal oldalán álló műveleteinek igazságtáblázatát!

a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
i	i	h	h	h
i	h	h	i	h
h	i	i	h	h
h	h	i	i	i

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
i	i	i	h
i	h	i	h
h	i	i	h
h	h	h	i

b)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
i	i	i	h
i	h	h	i
h	i	h	i
h	h	h	i

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
i	i	h	h	h
i	h	h	i	i
h	i	i	h	i
h	h	i	i	i

A táblázatok alapján az egyenlőségek az A, B ítéletek bármely logikai értékeire fennállnak. Ezzel az állításokat beláttuk.



Vegyük észre, hogy a 2. példában a C és a D ítéletek felírhatóak $C = P \wedge Q$, $D = R \vee S$ alakban, ahol P = „30 osztható 5-tel”, Q = „30 osztható 6-tal”, R = „Esik az eső.” és S = „Fúj a szél.” ítéletek.



A De Morgan-azonosságok alapján a C és a D ítéletek negációja:
 $\neg C = \neg P \vee \neg Q =$ „30 nem osztható 5-tel vagy nem osztható 6-tal.”
 $\neg D = \neg R \wedge \neg S =$ „Nem esik az eső és nem fúj a szél.”



6. példa Fogalmazzuk meg azokat az ítéleteket, amelyeknek az alábbi ítéletek a negációi!

$A =$ „Zenét hallgatok vagy nem tanulok.” és $B =$ „Nem írok és nem olvasok.”

Megoldás:

A De Morgan-azonosságok és a kettős tagadás törvénye alapján a keresett ítéletek:

$\neg A =$ „Nem hallgatok zenét és tanulok.”; $\neg B =$ „Írok vagy olvasok.”



7. példa Tekintsük az $A =$ „Forog a Föld.” és a $B =$ „Múlik az idő.” ítéleteket!

Kapcsoljuk össze az A , B ítéleteket

a) a „ha..., akkor...” kötőszavakkal!

b) az „akkor és csak akkor..., ha...” kötőszavakkal!

Megoldás:

a) „Ha A , akkor B .” ítélet: „Ha forog a Föld, akkor múlik az idő.”, amely akkor és csak akkor hamis, ha a „Forog a Föld.” ítélet igaz és a „Múlik az idő.” ítélet hamis.

Ezt az ítéletet az A és B ítéletek **implikációjának** nevezzük. Az A ítéletet az implikáció előtagjának, a B ítéletet az implikáció utótagjának hívjuk. Jelölése: $A \rightarrow B$, olvasása: ha A , akkor B .



Definíció

Implikáció

A	B	$A \rightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Szavakkal: az A és B ítéletek implikációja az az ítélet, amely akkor és csak akkor hamis, ha az A ítélet igaz és a B ítélet hamis.

Könnyen belátható, hogy az implikáció nem kommutatív és nem asszociatív.



1.15. ábra Zenét hallgatok



1.16. ábra Tanulok



1.17. ábra Nem írok és nem olvasok



b) „Akkor és csak akkor A , ha B ” ítélet: „Akkor és csak akkor forog a Föld, ha múlik az idő.”, amely akkor és csak akkor igaz, ha az A , B ítéletek logikai értéke egyenlő.

Ezt az ítéletet az A és B ítéletek **ekvivalenciájának** nevezzük. Jelölése: $A \leftrightarrow B$, olvasása: akkor és csak akkor A , ha B .



1.18. ábra Esik a hó

Definíció

Ekvivalencia

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Szavakkal: az A és B ítéletek ekvivalenciája az az ítélet, amely akkor és csak akkor igaz, ha az A , B ítéletek logikai értéke megegyezik.

A definícióval igazolható, hogy tetszőleges A , B , C ítéletek esetén:

- $A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$, azaz az **ekvivalencia kommutatív**;
- $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C = A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$, azaz az ekvivalencia **asszociatív**.



Vegyük észre, hogy a negációnál egy ítéletből, míg a többi műveletnél két ítéletből indulva kaptunk új ítéletet. Ilyenkor a negáció egyváltozós művelet, a konjunkció, a diszjunkció, az implikáció és az ekvivalencia pedig kétváltozós műveletek.



1.19. ábra Fúj a szél

8. példa

Legyen az A = „Esik a hó.”, a B = „Fúj a szél.”

Írjuk le logikai jelekkel a következő mondatokat!

- „Esik a hó és fúj a szél.”;
- „Nem esik a hó vagy fúj a szél.”;
- „Ha esik a hó, akkor fúj a szél.”;
- „Ha a szél fúj, akkor nem esik a hó.”.

Megoldás:

- a) $A \wedge B$; b) $\neg A \vee B$; c) $A \rightarrow B$; d) $B \rightarrow \neg A$.

9. példa

Az $ABC\Delta$ oldalainak hosszúsága: $a = 10$, $b = 24$ és $c = 26$ egység. Tekintsük az A = „Az $ABC\Delta$ tengelyesen szimmetrikus.”, B = „Az $ABC\Delta$ derékszögű.”, C = „Az $ABC\Delta$ egyik középvonalának hossza egyenlő a köréírt kör sugarának hosszával.” ítéleteket! Fogalmazzuk meg az alább megadott formális kifejezéseket, és adjuk meg logikai értéküket!

- a) $A \vee B$; b) $\neg A \wedge C$; c) $B \rightarrow A$; d) $B \leftrightarrow C$.



Megoldás:

Először adjuk meg az ítéletek logikai értékét! Nyilvánvaló, hogy $A = h$. Mivel $10^2 + 24^2 = 26^2$ egyenlőség fennáll, ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög derékszögű, tehát $B = i$. A háromszögek középvonalára vonatkozó tétel alapján az ABC háromszög c oldalával párhuzamos középvonalának hossza $\frac{c}{2} = 13$ egység, Thalész tételének a megfordítása miatt az ABC háromszög köréírt körének sugara $\frac{c}{2} = 13$ egység hosszúságú, tehát $C = i$.

a) $A \vee B =$ „Az ABC háromszög tengelyesen szimmetrikus vagy derékszögű.” A diszjunkció definíciója alapján:

$$A \vee B = i.$$

b) $\neg A \wedge C =$ „Az ABC háromszög nem tengelyesen szimmetrikus és az egyik középvonalának hossza egyenlő a köréírt körének sugarával.” A negáció és a konjunkció definíciója szerint:

$$\neg A \wedge C = i.$$

c) $B \rightarrow A =$ „Ha az ABC háromszög derékszögű, akkor tengelyesen szimmetrikus.” Az implikáció definíciója értelmében:

$$B \rightarrow A = h.$$

d) $B \leftrightarrow C =$ „Az ABC háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha az egyik középvonalának hossza egyenlő a köréírt körének sugarával.” Az ekvivalencia definíciója miatt:

$$B \leftrightarrow C = i.$$



A logikai feladatok, fejtörők megoldásában is ítéletekkel dolgozunk. Erre mutatunk most egy példát.



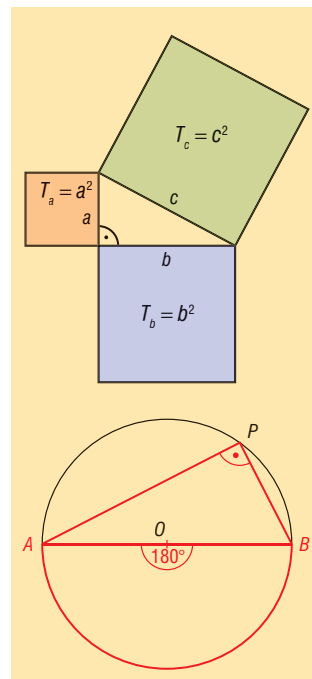
10. példa Dolgozatíráskor X -et, Y -t és Z -t a felügyelő tanár puskázással vádolta. A következő kijelentéseket sikerült bizonyítékokkal igazolni:

- (1) „ X bűnös vagy Z ártatlan”;
- (2) „Ha X ártatlan vagy Y bűnös, akkor Z bűnös”;
- (3) „ Z akkor és csak akkor ártatlan, ha Y bűnös”.

Ki vagy kik lehetnek a bűnösök?

Megoldás:

A (3) alatti ítélet és az ekvivalencia definíciója értelmében az „ Y bűnös” és a „ Z ártatlan” ítéletek logikai értéke egyenlő. Ha az „ Y bűnös” és a „ Z ártatlan” ítéletek logikai értéke igaz, akkor a diszjunkció és az implikáció definíciója miatt a (2) alatti ítélet logikai értéke hamis. Így az „ Y bűnös” és a „ Z ártatlan” ítéletek logikai értéke hamis. Az (1) alatti ítélet és a diszjunkció definíciója miatt az „ X bűnös” ítélet logikai értéke igaz. Ekkor az (1), (2) és (3) alatti ítéletek logikai értéke igaz. Tehát X és Z bűnös, Y ártatlan.



1.20. ábra A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel



1.21. ábra Puskázik valaki?



Oldjuk meg!

1. Válasszuk ki az alábbi mondatok közül az ítéleteket! Adjuk meg az ítéletek logikai értékét!
Deák Ferenc államférfi volt. De szeretnék gazdag lenni! Messi brazil focista. Van élet a Földön kívül?
2. Tagadjuk a következő ítéleteket!
 - a) A foci-vb-t négyévente rendezik meg.
 - b) Ha esik a hó, akkor zenét hallgatok.
 - c) Van olyan gimnazista, aki nem készül az órákra.
 - d) Vasárnap olvasok vagy kirándulok.
 - e) Kék a fű, és zöld az ég.
 - f) Minden nyáron megrendezik a Szegedi Szabadtéri Játékokat és a Szegedi Ifjúsági Napokat.
 - g) Minden háztartásban van legalább egy számítógép.
 - h) A 24 osztható 3-mal és 4-gyel.
 - i) Van olyan deltoid, amelyik húrnégyszög.
3. Tekintsük az $A = „n$ osztható 4-gyel.”, $B = „n$ osztható 3-mal.” és $C = „n$ osztható 12-vel.” ítéleteket! Írjuk fel a $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ logikai műveletek segítségével az alábbi kijelentéseket!
 - a) „ n nem osztható 4-gyel.”;
 - b) „ n osztható 4-gyel és osztható 3-mal.”;
 - c) „ n osztható 4-gyel vagy nem osztható 3-mal.”;
 - d) „Ha n osztható 12-vel, akkor osztható 3-mal.”;
 - e) „Ha n nem osztható 12-vel, akkor nem osztható 3-mal.”;
 - f) „ n akkor és csak akkor osztható 12-vel, ha n osztható 4-gyel és osztható 3-mal.”.
4. Fogalmazzuk meg az alább megadott formális kifejezéseket!
 $A = „A$ rabok átveszik a börtön irányítását.”;
 $B = „A$ rabok legalább 6 őrt leszerelnek.”;
 $C = „A$ BBC és a CNN élőben közvetíti a lázadást.”
 - a) $(\neg A) \vee B$; b) $\neg(A \wedge B)$; c) $A \rightarrow C$; d) $(A \wedge B) \leftrightarrow C$.
5. András, Béla és Csaba barátok. Az egyikük építész, a másik informatikus, a harmadik fizikus. Mindhárman egy-egy sportágat üznek: egyikük úszik, a másik ejtőernyőzik, a harmadik kerékpározik. Béla és Csaba nem kerékpározik, Béla nem informatikus. A fizikus nem úszik, az informatikus ejtőernyőzik. Kinek mi a foglalkozása és milyen sportot üznek?
6. Egyszerűsítsük az alábbi formulákat igazságtáblázat segítségével!
 - a) $A \vee (A \wedge B)$; b) $A \wedge (A \vee B)$; c) $(\neg A) \vee B$.
7. Mutassuk meg, hogy bármely A, B, C ítéletek esetén igaz, hogy
 - a) $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$;
 - b) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$;
 - c) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
 - d) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$!

IV. fejezet

Rendszerező összefoglalás



Ismétlés a tudás anyja



Rendszerező összefoglalás

1. Halmazok

A **halmaz** és a **halmaz eleme** alapfogalom.



1.1. ábra Alapfogalmak

Az A halmaz elemszáma:
 $|A|$.



1.2. ábra Halmaz számossága

2, 3, 5, 7

1.3. ábra Egyjegyű prímszámok

Az olyan halmaz, amelynek nincs eleme, **üres halmaz**.
Jelölése: $\emptyset$, vagy $\{ \}$.



1.4. ábra Üres halmaz

Halmazokkal kapcsolatos fogalmak



1. példa Soroljuk fel, és számoljuk meg az alábbi halmazok elemeit (1.1. és 1.2. ábrák)!

- a) $A = \{ \text{A római szerződést aláíró államok} \}$;
- b) $B = \{ \text{egyjegyű prímek} \}$ (1.3. ábra);
- c) $C = \{ \text{az } x^3 - 4x^2 = 0 \text{ egyenlet megoldásai} \}$;
- d) $D = \{ \text{a 26-ra végződő, 4-gyel osztható egész számok} \}$.

Megoldás:

- a) $A = \{ \text{Belgium; Franciaország; Hollandia; Luxemburg; Németország; Olaszország} \}$.

Az A halmaz elemszáma: $|A| = 6$.

- b) $B = \{ 2; 3; 5; 7 \}$. A B halmaz elemszáma: $|B| = 4$.

- c) Az $x^3 - 4x^2 = 0$ harmadfokú egyenlet alaphalmaza, értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

Az egyenlet bal oldalán kiemeljük az

$$x^2\text{-et: } x^2(x - 4) = 0.$$

Mivel egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamely tényezője 0-val egyenlő, ezért $x^2 = 0$ vagy $x - 4 = 0$. Innen $C = \{ 0; 4 \}$, $|C| = 2$.

- d) Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyből képzett szám osztható 4-gyel.

Mivel a 26 nem osztható 4-gyel, ezért a 26-ra végződő számok nem oszthatóak 4-gyel, tehát $D = \emptyset$, $|D| = 0$ (1.4. ábra).



2. példa

Tekintsük az $A = \left\{ a + 3b; a - b; \frac{a}{b}; \left(\frac{a}{c} + d \right) \left(\frac{b}{15a} - \frac{d}{5c} \right); \sqrt{bd} \right\}$ hal-

mazt, ahol $a = 2$, $b = 9$, $c = -4$ és $d = \frac{7}{4}$!

- a) Hány elemű a $B = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \in A \}$ halmaz?

- b) Milyen számjegy szerepel a 0,5496 számban a tizedesvessző után a 101. helyen? Írjuk fel a 0,5496 tizedes törtet $\frac{a}{b}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$ és $b \neq 0$!

Megoldás:

a) A B halmaz az A halmaz azon részhalmaza, melynek elemei természetes számok. A feladat megoldásához határozzuk meg az A halmaz elemeit!

$$a + 3b = 2 + 3 \cdot 9 = 29 \in \mathbb{N}; \quad a - b = 2 - 9 = -7 \in \mathbb{Z}^-; \quad \frac{a}{b} = \frac{2}{9} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z};$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{c} + d\right) \left(\frac{b}{15a} - \frac{d}{5c}\right) &= \left(-\frac{2}{4} + \frac{7}{4}\right) \left(\frac{9}{30} + \frac{\frac{7}{4}}{20}\right) = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{10} + \frac{7}{80}\right) = \\ &= \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{24}{80} + \frac{7}{80}\right) = \frac{31}{64} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

$$\sqrt{bd} = \sqrt{9 \cdot \frac{7}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{2} \in \mathbb{Q}^*. \text{ Tehát az } B \text{ halmaz egyelemű } (|B| = 1).$$

Megjegyzés:

A természetes számok halmaza zárt a szorzás és az összeadás, nem zárt a kivonás és az osztás műveletekre nézve. Ahhoz, hogy a kivonást, illetve az osztást elvégezhessük, bővíteni kellett a számfogalmat. Ez a gondolat vezetett az egész számok, illetve a racionális számok halmazához (1.5., 1.6., 1.7. és 1.8. ábrák). A fentiek és $a, b \in \mathbb{N}$, $b > a$ miatt az A halmaz $a + 3b$; $a - b$; $\frac{a}{b}$ elemeiről számolás nélkül is eldönthetjük, hogy mely számhalmazba tartoznak:

$$a + 3b \in \mathbb{N}, \quad a - b \in \mathbb{Z}^-, \quad \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}.$$

b) A 0,5496 számban a tizedesvessző után a második számjegytől kezdve 3 számjegy ismétlődik. Mivel a 100 hármask maradéka 1, ezért a keresett számjegy az ismétlődő szakasz első jegye: 4.

Legyen $A = 0,5496$! Ekkor $10000 \cdot A = 5496,496$ és $10 \cdot A = 5,496$.

A két szám különbsége: $9990 \cdot A = 5491$, ahonnan $0,5496 = \frac{5491}{9990}$.



3. példa Az alábbi halmazok közül melyek egyenlők?

Van-e a halmazok között olyan pár, amelyek közül az egyik halmaz a másiknak részhalmaza?

$$A = \{2x \mid 5 \leq x < 50, x \in \mathbb{N}\};$$

$$B = \{x \mid -2 < x \leq 5, x \in \mathbb{Z}\};$$

$$C = \{\text{a 3-ra végződő természetes számok}\};$$

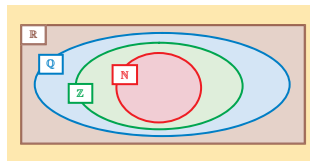
$$D =]-2; 5];$$

$$E = \{10k + 3 \mid k \in \mathbb{N}\};$$

$$F = \{\text{a kétjegyű pozitív egész számok}\}.$$

$\mathbb{N}$: természetes számok halmaza
 $\mathbb{Z}$: egész számok halmaza
 $\mathbb{Q}$: racionális számok halmaza
 $\mathbb{Q}^*$: irracionális számok halmaza
 $\mathbb{R}$: valós számok halmaza

1.5. ábra Számhalmazok



1.6. ábra Számhalmazok kapcsolatának szemléltetése Venn-diagrammallyal

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ és } b \neq 0 \right\}$$

Tizedes tört alakjuk: véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört.



1.7. ábra Racionális számok

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Tizedes tört alakjuk: nem szakaszos végtelen tizedes tört.



1.8. ábra Irracionális számok



Rendszerező összefoglalás

Ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$, akkor $A \subseteq B$.



1.9. ábra Részhalmaz

Tetszőleges A halmaz esetén: $A \subseteq A$ és $\emptyset \subseteq A$.



1.10. ábra Triviális részhalmazok

Ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$, akkor $A \subset B$.

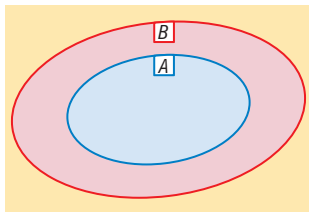


1.11. ábra Valódi részhalmaz

Az A és B halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.



1.12. ábra Halmazok egyenlősége



1.13. ábra Részhalmazok Venn-diagramon ($A \subseteq B$)

Megoldás:

A matematikai szabállyal megadott halmazokat adjuk meg elemeik felsorolásával vagy szavakkal!

Az A halmaz megadásában az x értékei ötnél nem kisebb, ötvennél kisebb természetes számok, ezért az x lehet 5, 6, 7, ..., 48, 49. A kifejezés szerint ezen számoknak kell venni a kétszeresét, így az A halmaz:

$$A = \{10; 12; 14; \dots; 96; 98\} = \{\text{a kétjegyű páros pozitív számok}\}.$$

$$B = \{a - 2\text{-nél nagyobb és az } 5\text{-nél nem nagyobb egész számok}\} = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\};$$

A C halmaz elemei: 3; 13; 23; 33; ...

A $D = \{a - 2\text{-nél nagyobb és az } 5\text{-nél nem nagyobb valós számok}\}.$

Az E halmaz megadásában a k lehet 0, 1, 2, 3, 4, ... Így a kifejezés szerint az E halmaz elemei: a 3-ra végződő természetes számok, azaz 3; 13; 23; 33; ... Tehát $A \subset F$, $B \subset D$ (1.11. ábra) és $C = E$ (1.12. ábra).



4. példa

- Hány részhalmaza van az $A = \{a; b; c\}$ halmaznak (1.9. ábra)?
- Hány olyan részhalmaza van a $B = \{1; 2; 3; 4\}$ halmaznak, amelynek a 2 eleme?
- Hány elemű az a halmaz, amely részhalmazainak száma 512?
- Egy 12 fős csoportból vagy 6 tagú vagy 4 tagú delegációt választhatunk. A lehetséges 6 tagú delegációk száma hány százaléka a 4 tagúakénak?

Megoldás:

a) 1. módszer:

Adjuk meg az A halmaz részhalmazait!

Praktikus az elemszámok alapján számba venni a részhalmazokat:

- Az üres halmaz részhalmaza az A -nak (1.10. ábra).
- Az egyelemű részhalmazok: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$.
- A kételemű részhalmazok: $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$.
- Háromelemű részhalmazból csak egy van, az A halmaz.

Így az A halmaz összes részhalmazának a száma: 8.

2. módszer:



Tétel

Az n elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n , ahol $n \in \mathbb{N}$.

Ez alapján az A halmaz összes részhalmazának száma: $2^3 = 8$.

b) Mivel egy elemet (a 2-t) már kiválasztottuk a négy elem közül, ezért a maradék háromelemű halmaz részhalmazainak a számát kell meghatározni. A fenti tétel miatt a B halmaznak $2^3 = 8$ olyan részhalmaza van, amelynek a 2 eleme.

c) Jelöljük a halmaz elemszámát n -nel ($n \in \mathbb{N}$)! Ekkor a véges halmazok részhalmazainak számára vonatkozó tétel és a feladat feltétele alapján: $2^n = 512$. Írjuk fel az exponenciális egyenlet jobb oldalát is 2 hatványaként: $2^n = 2^9$! Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt: $n = 9$. Tehát a halmaz kilencelemű.

d) A feladat szövege szerint egy tizenkét elemű halmaz hatelemű és négyelemű részhalmazainak a számát (1.14. ábra) kell összevetnünk:

$$\text{a } C_{12}^6 = \binom{12}{6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} \text{ -t a } C_{12}^4 = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} \text{ -sal.}$$

$$\text{Így } \frac{C_{12}^6}{C_{12}^4} \cdot 100 = \frac{\frac{12!}{6! \cdot 6!}}{\frac{12!}{4! \cdot 8!}} \cdot 100 = \frac{4! \cdot 8!}{6! \cdot 6!} \cdot 100 = \frac{4! \cdot 6! \cdot 7 \cdot 8}{4! \cdot 6! \cdot 5 \cdot 6} \cdot 100 = 186,6\%.$$

Tehát a lehetséges 6 tagú delegációk száma 186,6%-a a 4 tagúakénak.

Műveletek halmazokkal



5. példa Határozzuk meg az $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\overline{B}$ halmazokat!

a) $A = \{\text{számjegyek}\}$,

$B = \{\text{két szabályos dobókockával dobható számok összege}\}$,

$U = \{17\text{-nél kisebb természetes számok}\}$ (1.15. ábra);

b) $A = [-3; 2]$, $B =]-1; 3]$, $U = [-4; 4[$;

c) $A = \{\text{Az } (xy) \text{ sík azon pontjai, amelyeknek a } (0; 0) \text{ koordinátájú ponttól vett távolsága 5 egységnél nem nagyobb}\}$,

$B = \{(x; y) \mid x - 1 < y < x + 1, x \in \mathbb{R} \text{ és } y \in \mathbb{R}\}$,

$U = \{\text{Az } (xy) \text{ koordináta-sík pontjai}\}$.

Megoldás:

a) Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal! Az 1.16. ábra és a halmazműveletek definíciói alapján:

$$A \cap B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\},$$

$$A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\},$$

$$A \setminus B = \{0; 1\} \text{ és } \overline{B} = \{0; 1; 13; 14; 15; 16\}.$$

b) Ábrázoljuk számegyenesen a halmazokat!

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a száma:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ ahol}$$

$n, k \in \mathbb{N}$ és $k \leq n$.

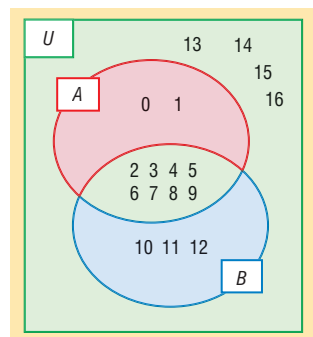


1.14. ábra Binomiális együttható

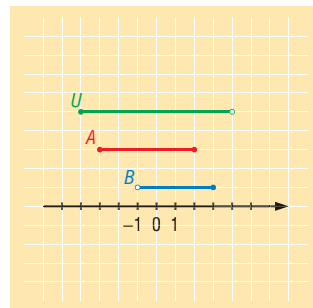
A halmazműveleteket egy alaphalmaz, U (univerzum) részhalmazai között értelmezzük.



1.15. ábra Alaphalmaz



1.16. ábra Venn-diagram az 5. a) feladat megoldásához



1.17. ábra 5. b) feladat megoldásához

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$



1.18. ábra Halmazok metszete

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$



1.19. ábra Halmazok uniója

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

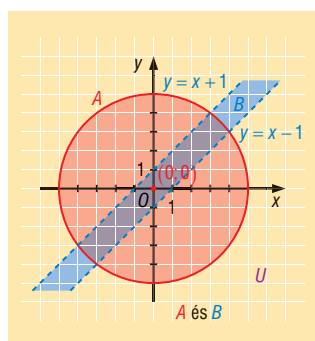


1.20. ábra Halmazok különbsége

$$\overline{A} = U \setminus A$$



1.21. ábra Halmaz komplementere



1.22. ábra Az 5. c) feladat megoldásához. Ponthalmazok a koordinátasíkon

Az 1.17. ábra és a halmazműveletek definíciói alapján:

$$A \cap B =]-1; 2] \quad (1.18. \text{ ábra}),$$

$$A \cup B = [-3; 3] \quad (1.19. \text{ ábra}),$$

$$A \setminus B = [-3; -1] \quad (1.20. \text{ ábra}),$$

$$\overline{B} = [-4; -1;] 3; 4[\quad (1.21. \text{ ábra}).$$

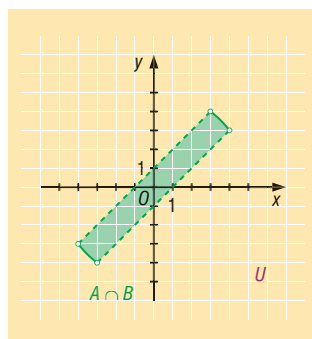
c) Egy adott ponttól adott távolságnál nem nagyobb távolságra levő pontok halmaza a síkon a körlap. Így az A halmaz elemei a $(0; 0)$ középpontú, öt egység sugarú körlap pontjai.

Azon pontok, melyek koordinátapárjai megoldásai az $y = x + 1$ egyenletnek, egy olyan egyenes pontjai, mely az ordinát tengelyt az $y = 1$ pontban metszi és a meredeksége 1.

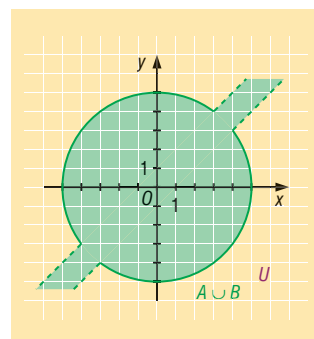
Hasonlóan az $y = x - 1$ egyenletnek azon egyenes pontjai tesznek eleget, mely az ordinát tengelyt az $y = -1$ pontban metszi és meredeksége 1.

A B halmaz elemei az $y = x + 1$ és az $y = x - 1$ egyenletű egyenesek közötti ponthalmaz pontjai. A két egyenes pontjai nem elemei a halmaznak.

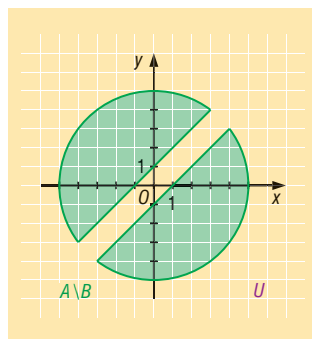
A ponthalmazokat satírozással jelöltük (1.22. ábra). Az $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\overline{B}$ halmazokat az 1.23., 1.24., 1.25., 1.26. ábrákon ábrázoltuk.



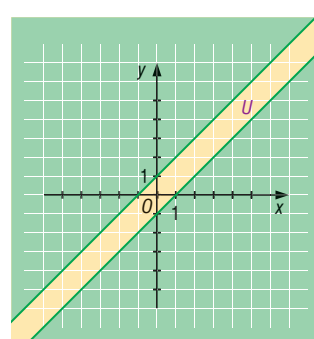
1.23. ábra $A \cap B$



1.24. ábra $A \cup B$



1.25. ábra $A \setminus B$



1.26. ábra $\overline{B}$



6. példa Egy osztály tanulójának 75%-a közepesnél nem jobb, míg az $\frac{5}{8}$ része közepesnél nem rosszabb osztályzatot kapott matematikából év végén.

- Hányan járnak az osztályba, ha közepes érdemjegye tizenkét tanulónak volt?
- Hányan kaptak legfeljebb kettes osztályzatot?

Megoldás:

a) Ebben a feladatban az osztály tanulói alkotják az alaphalmazt (U). Az alaphalmaz elemszáma legyen: $|U| = x$, ahol $x \in \mathbb{Z}^+$! A közepesnél nem jobb osztályzatú tanulók halmaza legyen A , ennek elemszáma a feladat szövege alapján $|A| = 0,75x$. A közepesnél nem rosszabb osztályzatú tanulók halmaza B , ennek elemszáma $|B| = \frac{5}{8}x$. Mivel mindenki kapott érdemjegyet az év végén, ezért $U = A \cup B$, így az A és B halmaz uniójának elemszámát kell meghatározni.

Az $A \cap B$ halmaz a közepes tanulók halmaza, a feladat szövege alapján $|A \cap B| = 12$. Így a logikai szitaformula (1.27. ábra) szerint:

$x = 0,75x + \frac{5}{8}x - 12$, ahonnan $x = 32$. Az osztály tehát 32 fős. Az osztály tanulójának 75%-a legfeljebb közepes, $32 \cdot 0,75 = 24$ fő.

b) A legfeljebb kettes osztályzatú tanulók száma $24 - 12 = 12$ fő.



7. példa Egy osztály minden tanulója tanul angolul vagy franciául vagy kínaiul. Egy olyan diák van, aki mindhárom nyelvet tanulja. Az osztály harmada tanul angolul, az angolul tanulók harmada csak az angol nyelvvel ismerkedik. Az angol nyelvet tanulók közül ötven két nyelvet tanulnak. A francia nyelvet tanulók közül hárman tanulnak angolul, de nem tanulják a kínai nyelvet. Akik pontosan két nyelvet tanulnak, ugyanannyian vannak, mint ahányan az angol nyelvet tanulják. A csak kínai nyelvet tanuló diákok száma kettővel nagyobb a csak francia nyelvet tanulók számánál.

- Hány fős ez az osztály?
- Hányan tanulnak angolul?
- Hányan tanulnak franciául?
- Hányan tanulnak kínaiul?

Megoldás:

a) Ebben a feladatban is az osztály tanulói alkotják az alaphalmazt (U). Legyen az angolul tanuló diákok halmaza A , a franciául tanulóké B , a kínaiul tanulóké pedig C ! Jelöljük x -szel ($x \in \mathbb{Z}^+$) az osztály létszámát! Mivel mindenki tanul valamilyen nyelvet, ezért $U = A \cup B \cup C$,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



1.27. ábra Szitaformula két halmazra

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= \\ &= |A| + |B| + |C| - \\ &\quad - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + \\ &\quad + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$



1.28. ábra Szitaformula három halmazra

Tetszőleges A, B, C halmazokra:

- ★ $A \cup B = B \cup A$
- ★ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
- ★ $A \cup A = A$
- ★ $A \cup \emptyset = A$



1.29. ábra Az unió tulajdonságai

Tetszőleges A, B, C halmazokra:

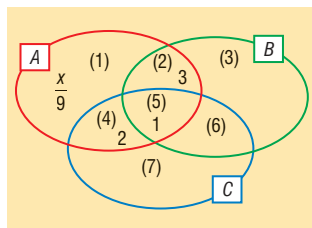
- ★ $A \cap B = B \cap A$
- ★ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- ★ $A \cap A = A$
- ★ $A \cap \emptyset = \emptyset$



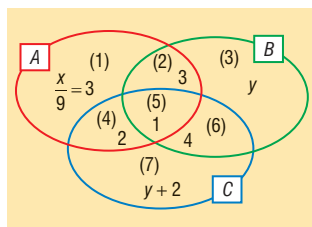
1.30. ábra A metszet tulajdonságai



Rendszerező összefoglalás



1.31. ábra A 7. a) és b) példa megoldásához



1.32. ábra A 7. c) és d) példa megoldásához

Tetszőleges A, B, C halmazokra:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap C &= \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= \\ &= (A \cup C) \cap (B \cup C)\end{aligned}$$



1.33. ábra Disztributivitás

és $|U| = x$. Készítsünk halmazábrát (1.31. ábra)! Egy olyan diák van, aki mindhárom nyelvet tanulja, ezért az (5) jelű tartomány elemszáma: 1. „Az osztálynak a harmada tanul angolul, az angolul tanulók harmada csak az angol nyelvvel ismerkedik.” feltételek miatt $|A| = \frac{x}{3}$ és az (1) jelű tartomány elemszáma: $\frac{x}{9}$. „A francia nyelvvel tanulók közül hár-

man tanulnak angolul, de nem tanulják a kínai nyelvet.” feltétel miatt a (2) jelű tartomány elemszáma: 3.

A fentiek és „az angol nyelvvel tanulók közül ötven két nyelvet tanulnak.” feltétel alapján a (4) jelű tartomány elemszáma: 2. Az angolul tanuló diákok számát felírhatjuk kétféleképpen: $\frac{x}{3} = \frac{x}{9} + 6$, ahonnan

$x = 27$. Tehát az osztály 27 fős.

b) Az osztály harmada, azaz 9 tanuló tanul angolul.

c) Akik pontosan két nyelvet tanulnak, ugyanannyian vannak, mint ahányan az angol nyelvet tanulják. Emiatt a (6) jelű tartomány elemszáma: 4. Jelöljük y -nal a csak franciául tanuló diákok számát! Ekkor a (7) jelű tartomány elemszáma: $y + 2$ (1.32. ábra). Mivel $U = A \cup B \cup C$ és $|U| = 27$, ezért $27 = 15 + 2y$, ahonnan $y = 6$. Tehát 14-en tanulnak franciául.

d) Az 1.32. ábra alapján 15 diák tanul kínaiul.

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}\end{aligned}$$



1.34. ábra A De Morgan-azonosságok

Tetszőleges A halmazra:

$$\begin{aligned}\star A \setminus A &= \emptyset \\ \star A \setminus \emptyset &= A \\ \star \emptyset \setminus A &= \emptyset\end{aligned}$$



1.35. ábra A különbség tulajdonságai



Oldjuk meg!

1. Soroljuk fel az alábbi halmazok elemeit! Hány elemük az alábbi halmazok?

- $A = \{\text{Az EU 2004. január 1-e előtti tagállamai}\};$
- $B = \{\text{A 40-nél kisebb prímek}\};$
- $C = \{\text{az } x^4 - 4x^2 - 5 = 0 \text{ egyenlet megoldásai}\};$
- $D = \{\text{a 14-re végződő, 12-vel osztható egész számok}\}.$

2. Az alábbi halmazok közül melyek egyenlők? Van-e a halmazok között olyan pár, amelyek közül az egyik halmaz a másik részhalmaza?

$$A = \{2n+1 \mid 5 \leq n < 50, n \in \mathbb{N}\};$$

$$B = \{x \mid -2 < x, x \in \mathbb{R}\};$$

$$C = \{a \mid a \text{ 7-re végződő természetes számok}\};$$

$$D = [3; \infty[;$$

$$E = \{100k + 7 \mid k \in \mathbb{N}\};$$

$$F = \{a \text{ kétjegyű pozitív páratlan egész számok}\}.$$

3. a) Hány részhalmaza van az $A = \{1; 2; 3; 4\}$ halmaznak?
 b) Hány olyan részhalmaza van a $B = \{a; b; c; d; e\}$ halmaznak, amelynek a b vagy a d eleme?
 c) Hány elemű az a halmaz, amely részhalmazainak száma 4096?
 d) Egy 10 fős csoportból vagy 6 tagú vagy 4 tagú delegációt választhatunk. A lehetséges 6 tagú delegációk száma hányszorosa a 4 tagúakénak?
4. Határozzuk meg az $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$ halmazokat!
 a) $A = \{\text{trapézok}\}$, $B = \{\text{deltoidok}\}$, $U = \{\text{négyszögek}\}$;
 b) $A = \{20\text{-nál kisebb prímszámok}\}$, $B = \{3k + 1 \mid 3 < k < 7, k \in \mathbb{N}\}$, $U = \{x \mid x < 20, x \in \mathbb{N}\}$;
 c) $A = \{\text{számjegyek}\}$, $B = \{\text{két szabályos dobókockával dobható számok szorzata}\}$,
 $U = \{40\text{-nél kisebb természetes számok}\}$;
 d) $A = [-30; 28]$, $B =]-19; 31]$, $U = [-43; 49[$;
 e) $A = \{\text{az } (xy) \text{ sík azon pontjai, amelyekből a } (0; 5) \text{ és a } (0; -5) \text{ koordinátájú pontokat összekötő szakasz tompaszögben látszik}\}$;
 $B = \{\text{az } (xy) \text{ sík azon pontjai, amelyeknek az } x \text{ tengelytől vett távolsága legfeljebb 3 egység}\}$;
 $U = \{\text{az } (xy) \text{ koordinátasík pontjai}\}.$
5. Határozzuk meg az A , B , C halmazokat, ha tudjuk, hogy $A \cap C = \{23; 28\}$, $A \setminus C = \{2; 3; 5; 6\}$,
 $B \setminus C = \{6; 7; 11\}$, $C \setminus B = \{13; 19; 28\}$, $(B \setminus A) \cap C = \{17; 20\}$, $(A \cup B) \setminus C = \{2; 3; 5; 6; 7; 11\}$ és
 $A \cup B \cup C = \{2; 3; 5; 6; 7; 11; 13; 17; 19; 20; 23; 28\}$!
6. Egy hajcsatokat gyártó cég egy új csatkollekción dob piacra.
 A gyűjtemény elemeinek tulajdonságai a következők:
 ★ színük lehet: piros, sárga, zöld vagy kék;
 ★ alakjuk lehet: ovális vagy egyenes;
 ★ méretük lehet: kicsi, közepes vagy nagy;
 ★ fényezésük lehet: csillogó vagy matt.
 a) Hány csatból áll a kollekción, ha minden lehetséges szín, forma, méret, fényezés szerinti csatból pontosan egy van a gyűjteményben?
 Jelöljük a piros csatok halmazát P -vel, az ovális alakúak halmazát O -val, a matt fényezésűek halmazát M -mel! Hány eleműek az alábbi halmazok?
 b) M ; c) $P \cap O$; d) $P \cup M$; e) $\{\text{kicsi ovális csatok}\}$; f) $\overline{P} \cap M$; g) $(P \cup O) \cap \overline{M}$.
7. Az 1000-nél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amely a 3, 4, 5 számok közül
 a) pontosan kettővel;
 b) pontosan az egyikkel;
 c) legalább az egyikkel;
 d) egyikkel sem osztható?



2. Számelmélet, algebra

2.1. Hatvány, gyök, logaritmus

- ★ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}},$ ahol
 $n \in (\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}), a \in \mathbb{R};$
- ★ $a^1 = a,$ ahol $a \in \mathbb{R};$
- ★ $a^0 = 1,$ ahol
 $a \in (\mathbb{R} \setminus \{0\});$
- ★ $a^{-n} = \frac{1}{a^n},$ ahol
 $n \in \mathbb{Z}^+, a \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}).$



2.1. ábra Egész kitevőjű hatvány

Az egész kitevőjű hatvány



1. példa Tegyük növekvő sorrendbe az alábbi kifejezéseket!

$$A = 3,765^0, \quad B = (-2)^3, \quad C = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}.$$

Megoldás:

Mivel bármely nullától különböző valós szám nulladik hatványa 1, ezért $A = 3,765^0 = 1$.

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója alapján (2.1. ábra) $B = (-2)^3 = -8$.

A negatív egész kitevőjű hatvány definíciója alapján $C = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$.

Tehát $B < A < C$.



2. példa Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

- Van olyan negatív egész szám, melynek van 0-nál nagyobb, pozitív egész kitevőjű hatványa.
- Bármely pozitív egész szám 2011. hatványa nagyobb, mint a 2010. hatványa.
- Van olyan racionális szám, amelynek negyedik hatványa kisebb, mint a második hatványa.
- Ha két valós szám 2012. hatványa egyenlő, akkor a két valós szám is egyenlő.
- Ha $a^n < b^n$, akkor $a < b$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{Z}^+$.

Megoldás:

a) Igaz, hiszen $(-2)^2 = 4 > 0$.

b) Hamis, hiszen $1^{2010} = 1 = 1^{2011}$.

c) Igaz, hiszen $0,1^4 = 0,0001 < 0,01 = 0,1^2$.

d) Hamis, hiszen a $(-1)^{2012} = 1 = 1^{2012}$, de $1 \neq -1$.

e) Hamis, hiszen $1^2 = 1 < 4 = (-2)^2$, de $-2 < 1$.



3. példa Melyik nagyobb?

$$\text{Az } A = \frac{2^3 \cdot 2^{-5} \cdot 2^7}{2^{-2} \cdot 2^4} \text{ vagy a } B = \frac{(3^5 \cdot 5^2)^3 \cdot 3^8 \cdot 3^{-22}}{3^{-3} \cdot 3^2} \left(\frac{1}{5}\right)^6 ?$$



2.2. Igaz vagy hamis?

Megoldás:

Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait (2.3. ábra) és számoljuk ki az egyes kifejezések értékét!

$$A = \frac{2^3 \cdot 2^{-5} \cdot 2^7}{2^{-2} \cdot 2^4} = \frac{2^5}{2^2} = 2^3 = 8;$$

$$B = \frac{(3^5 \cdot 5^2)^3 \cdot 3^8 \cdot 3^{-22}}{3^{-3} \cdot 3^2} \left(\frac{1}{5}\right)^6 = \frac{3^{15} \cdot 5^6 \cdot 3^8 \cdot 3^{-22}}{3^{-3} \cdot 3^2} \frac{1}{5^6} = \frac{3}{3^{-1}} = 3^2 = 9.$$

Tehát $A < B$.



4. példa Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi algebrai kifejezéseket!

$$a) \frac{(x^5)^{-2} \cdot (y^6)^3 \cdot (x^3 \cdot y^{-5})^4 \cdot y^2}{(x^5 \cdot y^3)^2 \cdot x^{-9} y^{-6}}, \quad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$b) \frac{(a^{-5} \cdot b^4)^{-4} \cdot (a^{10} \cdot b^{-1})^{-2} \cdot (b^{-5})^{-3}}{(a^{-2} \cdot b^{-4})^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-4}}, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Megoldás:

Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait!

$$a) \frac{(x^5)^{-2} \cdot (y^6)^3 \cdot (x^3 \cdot y^{-5})^4 \cdot y^2}{(x^5 \cdot y^3)^2 \cdot x^{-9} y^{-6}} = \frac{x^{-10} \cdot y^{18} \cdot x^{12} \cdot y^{-20} \cdot y^2}{x^{10} \cdot y^6 \cdot x^{-9} \cdot y^{-6}} = \frac{x^2 \cdot y^0}{x \cdot y^0} = x;$$

$$b) \frac{(a^{-5} \cdot b^4)^{-4} \cdot (a^{10} \cdot b^{-1})^{-2} \cdot (b^{-5})^{-3}}{(a^{-2} \cdot b^{-4})^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-4}} = \frac{a^{20} \cdot b^{-16} \cdot a^{-20} \cdot b^2 \cdot b^{15}}{a^{-4} \cdot b^{-8} \cdot a^4} = \frac{a^0 \cdot b}{a^0 \cdot b^{-8}} = b^9.$$



5. példa A 20. század végéig katódsugárcsővet használtak a tv-képernyőkben, monitorokban, azóta megjelentek a plazmaképernyők, folyadékkristály-képernyők és más technikák.

A Windows-alkalmazásokhoz vagy egyéb grafikus felületek használatához legalább egy 640×480 felbontású 70 Hz képfrekvenciájú monitorra van szükség. Ez azt jelenti, hogy a monitoron másodpercenként $N = 70$ kép jelenik meg, mely $S = 640$ sorból és soronként $K = 480$ képelemről áll. A képernyőbe csapódó elektronok száma képelemenként $X = 5 \cdot 10^8$ (2.4. ábra), az elektron töltése $Q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Ha t idő alatt $Q = N \cdot S \cdot K \cdot X \cdot Q_e$ a becsapódó össztöltés, akkor a katódsugárcső átlagos áramerőssége $I = \frac{Q}{t}$ képlettel számolható ki. Mekkora a katódsugárcső áramerőssége a megadott monitor esetén (2.6. ábra)?

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m}; \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m}; \quad (a \neq 0) \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m}; \\ (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n; \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}; \quad (b \neq 0) \end{aligned}$$



2.3. ábra A hatványozás azonosságai

Az x valós szám esetén az $x = a \cdot 10^n$ alakot, ahol $1 \leq |a| < 10$ és $n \in \mathbb{Z}$, az x szám **normálalakjának** nevezzük.



2.4. ábra Normálalak

10^{12}	tera-	T
10^9	giga-	G
10^6	mega-	M
10^3	kilo-	k
10^2	hekto-	h
10^1	deka-	da
10^{-1}	deci-	d
10^{-2}	centi-	c
10^{-3}	milli-	m
10^{-6}	mikro-	μ
10^{-9}	nano-	n
10^{-12}	piko-	p
10^{-15}	femto-	f
10^{-18}	atto-	a

2.5. ábra Prefixumtáblázat



Rendszerező összefoglalás



A katódsugárcsöves képernyő

(CRT: Cathode Ray Tube)

„Az első működőképes televíziót 1926. január 26-án Londonban mutatták be. Az első színes adást 1928. július 3-án továbbították nagy távolságra. A technika feltalálója Karl Ferdinand Braun volt, aki 1897-ben már meg tudott jeleníteni így egy képpontot. (Ezért régi neve a Braun-cső.) A töltéscsatolt elvű CRT tévé és kamera feltalálója Tihanyi Kálmán volt (1928).

Működési elve: a CRT monitorban egy katódsugárcső található, elektronágyúval az egyik végén, foszforral bevont képernyővel a másik végén. Az elektronágyú elektronnyalábot lő ki, ezt elektromágneses térrel térítik el. Az elektronnyaláb a foszforborításba ütközik és felvillan, majd elhalványodik. Ha elég gyorsan követik egymást az elektronnyalábok, akkor az a pont nem halványodik el. Tehát az elektronágyúk írnak a képernyőre a számítógép utasításának megfelelően, balról jobbra, egy másodperc alatt többször is frissítve a képpontokat. Az első monitorok egyetlen szín árnyalatait tudták megjeleníteni (monokóm): a fekete-fehér mellett a borostyánsárga és a zöld színűek is elterjedtek voltak.

Azt, hogy másodpercenként hányszor frissítik a képpontokat, képfrekvenciának nevezzük. (Az CRT monitoroknál a képfrekvenciát a képfrekvencia egy kicsit más jelent, lásd az LCD monitornál.) Ezt Hertzben adjuk meg. A mai monitorok 60–130 hertzesek. A színes monitoroknak három alapszíne van: a piros, a zöld, és a kék (RGB). Ezek keverésével bármelyik szín előállítható. Mindegyik színhez tartozik egy elektronágyú.”

<http://hu.wikipedia.org/wiki/Monitor>

2.6. ábra A katódsugárcsőről

Megoldás:

A feladat szövegéből kiderül, hogy ha t idő alatt $Q = N \cdot S \cdot K \cdot X \cdot Q_e$ a becsapódó össztöltés, akkor az átlagos áramerősség

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{N \cdot S \cdot K \cdot X \cdot Q_e}{t} \text{ képlettel számolható. Mivel a feladatban}$$

$t = 1$ s alatt $N = 70$ kép jelenik meg, mely képenként $S = 640$ sorból és soronként $K = 480$ képelemből áll, valamint képelemenként átlagosan $X = 5 \cdot 10^8$ elektron csapódik be, így

$$\begin{aligned} I &= \frac{Q}{t} = \frac{70 \cdot 640 \cdot 480 \cdot 5 \cdot 10^8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{1 \text{ s}} = \\ &= 7 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^2 \cdot 4,8 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{C}}{\text{s}} = \\ &= 7 \cdot 6,4 \cdot 4,8 \cdot 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{s}} = 1720,32 \cdot 10^{-6} \text{ A} = \\ &= 1720,32 \mu\text{A}. \end{aligned}$$

Tehát a katódsugárcső áramerőssége $I = 1720,32 \mu\text{A} \approx 1,72 \text{ mA}$.

A gyökvonás



6. példa Végezzük el a kijelölt műveleteket!

- a) $\sqrt[4]{16}$; b) $\sqrt[3]{27}$; c) $\sqrt[5]{-100000}$; d) $\sqrt[10]{-8}$;
e) $\sqrt{0,01}$; f) $\sqrt[2012]{0}$; g) $\sqrt[2011]{-1}$.

Megoldás:

- a) $\sqrt[4]{16} = 2$, mert $2^4 = 16$, és a 2 nemnegatív szám (2.7. ábra).
b) $\sqrt[3]{27} = 3$, mert $3^3 = 27$.
c) $\sqrt[5]{-100000} = -10$, mert $(-10)^5 = -100000$.
d) $\sqrt[10]{-8}$ nincs értelmezve, mert a gyökkitevő páros, és a gyökjel alatt negatív szám áll.
e) $\sqrt{0,01} = 0,1$, mert $0,1^2 = 0,01$, és a 0,1 nemnegatív.
f) $\sqrt[2012]{0} = 0$, mert $0^{2012} = 0$, és a 0 nemnegatív szám.
g) $\sqrt[2011]{-1} = -1$, mert $(-1)^{2011} = -1$.



7. példa Végezzük el az alábbi műveleteket!

- a) $(4\sqrt{5} + 5\sqrt{3})(4\sqrt{5} - 5\sqrt{3})$; b) $(6\sqrt{7} + 3)(2\sqrt{7} - 5)$;
c) $(\sqrt{6} + 2)^2 + (\sqrt{6} - 2)^2$; d) $(\sqrt[4]{12} + 2)^2 - (\sqrt[4]{12} - 1)^2$;
e) $(1 - \sqrt[3]{4})^3 - (1 + \sqrt[3]{4})^3$.

Megoldás:

a) Alkalmazzuk a két tag összegének és különbségének szorzatára vonatkozó azonosságot és a négyzetgyök definícióját (2.8. ábra)!

$$\begin{aligned}(4\sqrt{5} + 5\sqrt{3})(4\sqrt{5} - 5\sqrt{3}) &= (4\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{3})^2 = \\ &= 16 \cdot 5 - 25 \cdot 3 = 80 - 75 = 5.\end{aligned}$$

b) Végezzük el a kéttagú kifejezések összeszorozását, és alkalmazzuk a négyzetgyök definícióját!

$$\begin{aligned}(6\sqrt{7} + 3)(2\sqrt{7} - 5) &= 6\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} + 3 \cdot 2\sqrt{7} - 5 \cdot 6\sqrt{7} - 15 = \\ &= 12 \cdot 7 + 6\sqrt{7} - 30\sqrt{7} - 15 = 69 - 24\sqrt{7}.\end{aligned}$$

c) Alkalmazzuk a két tag összegének, illetve különbségének négyzetére vonatkozó azonosságot, valamint a négyzetgyök definícióját!

$$\begin{aligned}(\sqrt{6} + 2)^2 + (\sqrt{6} - 2)^2 &= (\sqrt{6})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{6} + 2^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{6} + 2^2 = \\ &= 6 + 4\sqrt{6} + 4 + 6 - 4\sqrt{6} + 4 = 20.\end{aligned}$$

d) Alkalmazzuk a négyzetgyök definícióját, majd vonjunk össze!

$$\begin{aligned}(\sqrt[4]{\sqrt{12} + 2})^2 - (\sqrt[4]{\sqrt{12} - 1})^2 &= \sqrt[4]{12} + 2 - (\sqrt[4]{12} - 1) = \\ &= \sqrt[4]{12} + 2 - \sqrt[4]{12} + 1 = 3.\end{aligned}$$

e) Alkalmazzuk a két tag különbségének, illetve összegének köbére vonatkozó azonosságot és a köbgyök definícióját!

$$\begin{aligned}(1 - \sqrt[3]{4})^3 - (1 + \sqrt[3]{4})^3 &= 1 - 3\sqrt[3]{4} + 3(\sqrt[3]{4})^2 - 4 - (1 + 3\sqrt[3]{4} + 3(\sqrt[3]{4})^2 + 4) = \\ &= 1 - 3\sqrt[3]{4} + 3(\sqrt[3]{4})^2 - 4 - 1 - 3\sqrt[3]{4} - 3(\sqrt[3]{4})^2 - 4 = -6\sqrt[3]{4} - 8.\end{aligned}$$



8. példa Végezzük el az alábbi műveleteket, és adjuk meg az eredményt egy racionális számként!

a) $\sqrt[6]{\sqrt{107} - \sqrt{43}} \sqrt[6]{\sqrt{107} + \sqrt{43}};$ b) $(\sqrt{7 + \sqrt{24}} + \sqrt{7 - \sqrt{24}})^2;$

c) $\frac{\sqrt[5]{(10 + \sqrt{68})^2 (10 - \sqrt{68})}}{\sqrt[5]{10 + \sqrt{68}}};$ d) $\frac{\sqrt[3]{128^5} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1}{81}\right)^{-3}}}{\sqrt[3]{216^2}}.$

Megoldás:

Mind a négy feladatban alkalmazzuk az n -edik gyök azonosságait (2.9. ábra) és az n -edik gyök definícióját!

$$\begin{aligned}\text{a) } \sqrt[6]{\sqrt{107} - \sqrt{43}} \sqrt[6]{\sqrt{107} + \sqrt{43}} &= \sqrt[6]{(\sqrt{107} - \sqrt{43})(\sqrt{107} + \sqrt{43})} = \\ &= \sqrt[6]{(\sqrt{107})^2 - (\sqrt{43})^2} = \sqrt[6]{107 - 43} = \sqrt[6]{64} = 2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{a}\right)^{2k} &= a, \text{ ahol } a \geq 0 \text{ és} \\ \sqrt[n]{a} &\geq 0, \\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^{2k+1} &= a, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \\ a &\in \mathbb{R}.\end{aligned}$$



2.7. ábra Az n -edik gyök

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2, \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a-b)^3 &= \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$



2.8. ábra Nevezetes szorzatok

$$\begin{aligned}\text{a) } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}; \\ \text{b) } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \\ \text{c) } \sqrt[n]{a^k} &= (\sqrt[n]{a})^k, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ \text{d) } \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[n \cdot k]{a}.\end{aligned}$$

A azonosságokban szereplő betűk az n -edik gyök és az egész kitevőjű hatvány definíciójában meghatározott értékeket vehetik fel.



2.9. ábra Az n -edik gyök azonosságai



Rendszerező összefoglalás

Az a osztója b -nek akkor és csak akkor, ha létezik olyan c , amelyre igaz:

$$a \cdot c = b, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$



2.10. ábra Oszthatóság

A prímszám olyan pozitív egész szám, amelynek pontosan két pozitív osztója van.



2.11. ábra Prímszám

Az olyan pozitív egész számot, amelynek kettőnél több pozitív osztója van, összetett számnak nevezzük.



2.12. ábra Összetett szám

Bármely összetett szám a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen írható fel prímszámok szorzataként.



2.13. ábra A számelmélet alaptétele

A prímtényezős előállításban az azonos prímek szorzatát hatványként írjuk fel. Az így nyert előállítást nevezzük az összetett szám **kanonikus alakjának**.

$$\text{Pl.: } 3240 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5.$$



2.14. ábra Kanonikus alak

$$\begin{aligned} \text{b) } & \left(\sqrt{7+\sqrt{24}} + \sqrt{7-\sqrt{24}} \right)^2 = \\ & = \left(\sqrt{7+\sqrt{24}} \right)^2 + 2 \cdot \sqrt{7+\sqrt{24}} \cdot \sqrt{7-\sqrt{24}} + \left(\sqrt{7-\sqrt{24}} \right)^2 = \\ & = 7 + \sqrt{24} + 2 \cdot \sqrt{(7+\sqrt{24})(7-\sqrt{24})} + 7 - \sqrt{24} = \\ & = 14 + 2\sqrt{49 - (\sqrt{24})^2} = 14 + 2\sqrt{49-24} = 14 + 2\sqrt{25} = 24; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \frac{\sqrt[5]{(10+\sqrt{68})^2(10-\sqrt{68})}}{\sqrt[5]{10+\sqrt{68}}} = \sqrt[5]{\frac{(10+\sqrt{68})^2(10-\sqrt{68})}{10+\sqrt{68}}} = \\ & = \sqrt[5]{(10+\sqrt{68})(10-\sqrt{68})} = \sqrt[5]{100-68} = \sqrt[5]{32} = 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \frac{\sqrt[3]{128^5} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1}{81}\right)^{-3}}}{\sqrt[3]{216^2}} = \frac{\left(\sqrt[3]{128}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{1}{81}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt[3]{216}\right)^2} = \\ & = \frac{(2)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{(6)^2} = \frac{2^5 \cdot 3^3}{3^2 \cdot 2^2} = 2^3 \cdot 3 = 24. \end{aligned}$$



9. példa Írjuk fel egy racionális számként!

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left(\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{242} + \sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{108} \right) \left(\sqrt{128} + \sqrt{192} \right); \\ \text{b) } & \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{375}. \end{aligned}$$

Megoldás:

Hozzunk ki az n -edik gyökjel alól! Ehhez írjuk fel az n -edik gyök alatti számok kanonikus alakját (2.14. ábra), és alkalmazzuk a szorzat n -edik gyökére vonatkozó azonosságot!

a)

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{242} + \sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{108} \right) \left(\sqrt{128} + \sqrt{192} \right) = \\ & = \left(\sqrt{5^2 \cdot 2} + \sqrt{7^2 \cdot 2} - \sqrt{11^2 \cdot 2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{5^2 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 3^3} \right) \left(\sqrt{2^7} + \sqrt{2^6 \cdot 3} \right) = \\ & = \left(5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 11\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \right) \left(8\sqrt{2} - 8\sqrt{3} \right) = \\ & = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} \right) \left(\sqrt{2} - \sqrt{3} \right) 8 = \left((\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 \right) 8 = -8; \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{375} &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{5^3 \cdot 3} = \\ &= 2 \cdot \sqrt[3]{3} + 3 \cdot \sqrt[3]{3} - 5 \cdot \sqrt[3]{3} = 0. \end{aligned}$$



10. példa Írjuk fel egy gyökjellel!

a) $\sqrt[3]{2^4 \cdot 3}$; b) $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[4]{6}}$.

Megoldás:

a) Vigyük be a kettőt a negyedik gyökjel alá, majd alkalmazzuk az n -edik gyök negyedik azonosságát!

$$\sqrt[3]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4} \cdot 3} = \sqrt[12]{48}$$

b) Keressük meg a gyökkitevők legkisebb közös többszörösét (2.15. ábra)! Ez lesz a közös gyökkitevő, ami jelen esetben a 12.

$$\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[4]{6}} = \frac{\sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{3^6}}{\sqrt[12]{6^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^4 \cdot 3^6}{2^3 \cdot 3^3}} = \sqrt[12]{2 \cdot 3^3} = \sqrt[12]{54}.$$



11. példa Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét!

a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{8}{\sqrt{11} - \sqrt{3}}$; c) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$; d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$.

Megoldás:

a) Bővítsük a törtet $\sqrt{3}$ -mal!

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3};$$

b) Bővítsük a törtet az $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ azonosságnak (2.8. ábra) megfelelően $\sqrt{11} + \sqrt{3}$ -mal!

$$\begin{aligned} \frac{8}{\sqrt{11} - \sqrt{3}} &= \frac{8}{\sqrt{11} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{\sqrt{11} + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{8(\sqrt{11} + \sqrt{3})}{8} = \sqrt{11} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

c) Bővítsük a törtet $\sqrt[5]{2^4}$ -nél!

$$\frac{3}{\sqrt[5]{2}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \frac{3\sqrt[5]{2^4}}{2}.$$

d) Bővítsük a törtet az $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosságnak (2.16. ábra) megfelelően $(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1$ -gyel!

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1.$$

Ha $a, b \in \mathbb{Z}^+$, akkor

a) a legkisebb közös többszörösük a pozitív közös többszöröseik közül a legkisebb. Jelölés: $[a, b]$.

b) a legnagyobb közös osztójuk a közös osztóik közül a legnagyobb. Jelölés: (a, b) .



2.15. ábra Legkisebb közös többszörös, legnagyobb közös osztó

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2); \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$



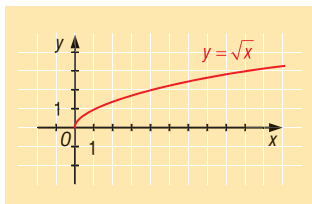
2.16. ábra További nevezetes szorzatok



2.17. ábra Különbség



Rendszerező összefoglalás



2.18. ábra Az n -edik gyökfüggvény és így a négyzetgyökfüggvény is szigorúan monoton növekvő



2.19. ábra Melyik a nagyobb?

Legyen a pozitív valós szám, p egész szám, q pedig egynél nagyobb egész szám! Ekkor az a szám $\frac{p}{q}$ -adik hatványa egyenlő az a alap p -edik hatványának q -adik gyökével, azaz $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.



2.20. ábra Törtkitevőjű hatvány



12. példa

Melyik nagyobb: a $\frac{15}{\sqrt{3}}$ vagy a $\frac{46}{\sqrt{48}-\sqrt{2}}$?

Megoldás:

Gyöktelenítsük mindkét tört nevezőjét, majd használjuk fel, hogy a négyzetgyökfüggvény szigorúan monoton növekvő!

$$\frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3};$$

$$\frac{46}{\sqrt{48}-\sqrt{2}} = \frac{46(\sqrt{48}+\sqrt{2})}{46} = \sqrt{48}+\sqrt{2} = 4\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

$$\text{Tehát } \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3}+\sqrt{3} > 4\sqrt{3}+\sqrt{2} = \frac{46}{\sqrt{48}-\sqrt{2}}.$$



13. példa

Melyik nagyobb: az $\sqrt[5]{6}$ vagy a $\sqrt[4]{3}$?

Megoldás:

Hozzuk közös gyök alá a két számot! A közös gyökkitevő a két gyökkitevő legkisebb közös többszöröse, ami jelen esetben 20. Így $\sqrt[5]{6} = \sqrt[20]{6^4}$ és $\sqrt[4]{3} = \sqrt[20]{3^5}$. Mivel $\frac{6^4}{3^5} = \frac{2^4}{3} = \frac{16}{3} > 1$, és a huszadik gyökfüggvény szigorúan monoton növekvő, ezért $\sqrt[5]{6} > \sqrt[4]{3}$.

A törtkitevőjű hatvány



14. példa

Írjuk fel 5 hatványaként!

$$\text{a) } \frac{\sqrt{125} \cdot \sqrt[3]{625}}{\sqrt[4]{35}}; \quad \text{b) } \frac{\sqrt{\frac{1}{125}} \cdot \sqrt[5]{25}}{\sqrt[3]{\frac{1}{625}} \cdot \frac{1}{5}}.$$

Megoldás:

Használjuk fel a törtkitevőjű hatvány definícióját (2.20. ábra) és írjuk fel az egyes tényezőket hatvány alakban, majd alkalmazzuk a hatványozás azonosságait, melyek törtkitevőjű hatványokra is teljesülnek!

$$\text{a) } \frac{\sqrt{125} \cdot \sqrt[3]{625}}{\sqrt[4]{35}} = \frac{\sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^4}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{5^{\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{1}{4}}} = 5^{\frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4}} = 5^{\frac{11}{4}};$$

$$b) \frac{\sqrt{\frac{1}{125}} \cdot \sqrt[5]{25}}{\sqrt[3]{\frac{1}{625}} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5^{-3}} \cdot \sqrt[5]{5^2}}{\sqrt[15]{5^{-4}} \cdot 5^{-1}} = \frac{5^{-\frac{3}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{5}}}{5^{-\frac{4}{15}} \cdot 5^{-1}} = 5^{-\frac{3}{2} + \frac{2}{5} - (-\frac{4}{15} - 1)} = 5^{-\frac{3}{2} + \frac{2}{5} + \frac{4}{15} + 1} = 5^{\frac{1}{6}}.$$



15. példa Végezzük el a kijelölt műveleteket!

$$a) \frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt{a^3}}{\left(a^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-\frac{7}{10}} \cdot a^{\frac{2}{5}}}, \quad (a > 0);$$

$$b) \left(b^{\frac{5}{2}} - 2\right)^2 + \left(b^{\frac{5}{2}} + 2\right)^2 - 2\left(b^{\frac{5}{2}} + 5\right)\left(b^{\frac{5}{2}} - 5\right), \quad (b > 0).$$

Megoldás:

a) Írjuk fel mindegyik tényezőt törtkitevőjű hatvány alakban, majd alkalmazzuk a hatványozás azonosságait!

$$\frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt{a^3}}{\left(a^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-\frac{7}{10}} \cdot a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{4}{5}} \cdot a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{15}{4}} \cdot a^{-\frac{7}{10}} \cdot a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{3}{2}}}{a^{\frac{15}{4} - \frac{7}{10} + \frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{61}{20}}}{a^{\frac{69}{20}}} = a^{-\frac{2}{5}};$$

$$b) \left(b^{\frac{5}{2}} - 2\right)^2 + \left(b^{\frac{5}{2}} + 2\right)^2 - 2\left(b^{\frac{5}{2}} + 5\right)\left(b^{\frac{5}{2}} - 5\right) = \\ = b^5 - 4b^{\frac{5}{2}} + 4 + b^5 + 4b^{\frac{5}{2}} + 4 - 2b^5 + 50 = 58.$$

A logaritmus



16. példa Adjuk meg egy racionális számként!

$$a) \log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_{125} 5;$$

$$b) \frac{10^{\lg 5} \cdot 25^{\log_5 3}}{7^{\log_{49} 36}};$$

$$c) 5^{\frac{\log_1 10 + 1}{5}} - 4^{\log_{64} 27} + \log_{\frac{1}{9}} 3.$$

Megoldás:

Használjuk a logaritmus definícióját (2.22. ábra)!

$$a) \log_2 8 = 3, \text{ mert } 2^3 = 8.$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2, \text{ mert } \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4.$$



2.21. ábra Tört, de nem kitevő

Legyen a 1-től különböző pozitív valós szám és b pozitív valós szám! Az $\log_a b$ („a alapú logaritmus b”) az a kitevő, amelyre a -t hatványozva b -t kapunk. Az a a logaritmus **alapja**, a b a logaritmus **numerusza**. Jelekkel leírva: $a^{\log_a b} = b$, ahol $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.



2.22. ábra A logaritmus definíciója



Rendszerező összefoglalás

1. A szorzat logaritmusa:
 $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$;
 $a, b, c > 0$; $a \neq 1$.
2. A hányados logaritmusa:
 $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;
 $a, b, c > 0$; $a \neq 1$.
3. A hatvány logaritmusa:
 $\log_a b^c = c \log_a b$;
 $a, b > 0$; $a \neq 1$; $c \in \mathbb{R}$.
4. Az n -edik gyök logaritmusa:
 $\log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b$;
 $a, b > 0$; $a \neq 1$; $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$.



2.23. ábra A logaritmus azonosságai

Ha a és c 1-től különböző pozitív valós szám és b pozitív valós szám, akkor

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$


2.24. ábra Áttérés más alapú logaritmusra

$$\log_{125} 5 = \frac{1}{3}, \text{ mert } 125^{\frac{1}{3}} = 5.$$

$$\text{Így } \log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_{125} 5 = 3 - 2 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

b) Mivel

$$\begin{aligned} 10^{\lg 5} &= 5, \\ 25^{\log_5 3} &= (5^2)^{\log_5 3} = (5^{\log_5 3})^2 = 3^2 = 9 \text{ és} \\ 7^{\log_{49} 36} &= \left(49^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{49} 36} = (49^{\log_{49} 36})^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = 6, \\ \text{ezért } \frac{10^{\lg 5} \cdot 25^{\log_5 3}}{7^{\log_{49} 36}} &= \frac{5 \cdot 9}{6} = 7,5. \end{aligned}$$

c) Az előzőek alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 5^{\frac{\log_1 10 + 1}{5}} - 4^{\log_{64} 27} + \log_{\frac{1}{9}} 3 &= 5 \cdot 5^{\frac{\log_1 10}{5}} - 4^{\log_{64} 27} + \log_{\frac{1}{9}} 3 = \\ &= 5 \cdot \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right]^{\frac{\log_1 10}{5}} - \left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{64} 27} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= 5 \cdot \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_1 10}\right]^{-1} - (64^{\log_{64} 27})^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= 5 \cdot 10^{-1} - 27^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 3 - \frac{1}{2} = -3. \end{aligned}$$



17. példa Írjuk fel csökkenő sorrendben!

$$A = 4 \log_5 10 + \log_5 35 - \log_5 16 - \log_5 175;$$

$$B = \frac{1}{2} \log_3 99 + 4 \log_3 2 + \log_3 25 - \log_3 100 - \frac{1}{2} \log_3 176;$$

$$C = \frac{\log_3 7}{\log_{18} 7} - \log_3 2.$$

Megoldás:

Az első két esetben alkalmazzuk a logaritmus azonosságait, majd a kanonikus alakok felírása után egyszerűsítsünk!

$$\begin{aligned} A &= 4 \log_5 10 + \log_5 35 - \log_5 16 - \log_5 175 = \\ &= \log_5 10^4 + \log_5 35 - \log_5 16 - \log_5 175 = \\ &= \log_5 \frac{10^4 \cdot 35}{16 \cdot 175} = \log_5 \frac{2^4 \cdot 5^4 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7} = \log_5 5^3 = 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \log_3 99 + 4 \log_3 2 + \log_3 25 - \log_3 100 - \frac{1}{2} \log_3 176 = \\ &= \log_3 99^{\frac{1}{2}} + \log_3 2^4 + \log_3 25 - \log_3 100 - \log_3 176^{\frac{1}{2}} = \end{aligned}$$

$$= \log_3 \frac{99^{\frac{1}{2}} \cdot 2^4 \cdot 25}{100 \cdot 176^{\frac{1}{2}}} = \log_3 \frac{3 \cdot 11^{\frac{1}{2}} \cdot 2^4 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 11^{\frac{1}{2}}} = \log_3 3 = 1.$$

A C-nél először írjuk fel mindegyiket 3-as alapú logaritmussal, majd alkalmazzuk a logaritmus azonosságait!

$$\begin{aligned} C &= \frac{\log_3 7}{\log_{18} 7} - \log_3 2 = \frac{\log_3 7}{\frac{\log_3 7}{\log_3 18}} - \log_3 2 = \log_3 7 \frac{\log_3 18}{\log_3 7} - \log_3 2 = \\ &= \log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \frac{18}{2} = \log_3 9 = 2. \end{aligned}$$

Tehát $A > C > B$.



18. példa Ha a levegő tengerszinten pascalban mért nyomását p_0 jelöli, és h méter magasságban a nyomás pascalban mérve p , akkor ezen mennyiségek között az alábbi összefüggést írhatjuk fel:

$$\lg p = \lg p_0 - 5,203 \cdot 10^{-5} \cdot h.$$

- a) Ha tengerszinten a nyomás 10^5 Pa, akkor mekkora a nyomás a Mount Everest csúcsán, azaz 8848 m magasan?
(Az eredményt két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg!)
- b) Milyen magasságban lesz a nyomás 50%-a a tengerszinten mért nyomásnak?
(A megoldást egész értékre kerekítve adjuk meg!)

Megoldás:

- a) Helyettesítsük be a képletbe a megadott értéket!

$$\lg p = \lg 10^5 - 5,203 \cdot 10^{-5} \cdot 8848 \approx 5 - 0,4604 = 4,5396.$$

Így $p = 10^{4,5396}$ Pa $\approx 34641,76$ Pa légnyomás mérhető a Mount Everesten.

- b) Rendezzük át a formulát az alábbi módon!

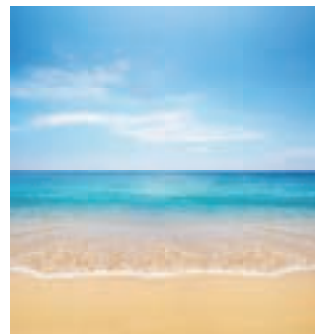
$$\lg p - \lg p_0 = -5,203 \cdot 10^{-5} \cdot h;$$

$$\lg \frac{p}{p_0} = -5,203 \cdot 10^{-5} \cdot h.$$

Innen kapjuk, hogy

$$h = \frac{\lg \frac{p}{p_0}}{-5,203 \cdot 10^{-5}} = \frac{\lg 0,5}{-5,203 \cdot 10^{-5}} \approx 5786 \text{ m.}$$

Tehát megközelítőleg 5786 m magasan lesz a légnyomás fele a tengerszinten mért nyomásnak.



2.25. ábra Tengerszint



2.26. ábra Mount Everest



Rendszerező összefoglalás



Oldjuk meg!

1. Számítsuk ki számológép használata nélkül az alábbi kifejezések értékeit, és rendezzük azokat növekvő sorrendbe!

$$A = \frac{(5^3 \cdot 5^2)^4 \cdot (3^4 \cdot 5^5)^2}{(3^2 \cdot 5^3)^4 \cdot (5^5)^3},$$

$$B = \frac{((-7)^4)^5 \cdot (2^8 \cdot 3^2)^3}{(2^3 \cdot 7)^7 \cdot 7^9 \cdot (7^2 \cdot 3^3)^2},$$

$$C = \left(\frac{3^2}{5^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{(2 \cdot 5^5)^3}{(5 \cdot 2)^9 \cdot 3^4}\right)^2.$$

2. Számítsuk ki!

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$; b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; c) $0,01^{-2}$; d) $0,1^{-3}$; e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$; f) $(-4)^{-3}$; g) $3^{-2} \cdot 3^3 : 3^{-1}$;

h) $(5^3 \cdot 2^{-2})^{-2} \cdot (2^2)^{-2} \cdot (5^2)^3$; i) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot 2^{-4} \cdot (5^4 \cdot 2^4)^2 : (2^{-2} \cdot 5^{-4})^{-2}$.

3. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{(a^3 \cdot b^5)^2 \cdot (b^4)^5 \cdot (a^4)^3}{(b^5 \cdot a^3)^6}, a \neq 0, b \neq 0$; b) $\left(\frac{a^2 \cdot b^3}{c^6}\right)^4 \cdot \left(\frac{c^8}{a^2 \cdot b^4}\right)^3, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$;

c) $\frac{(a^{-3} \cdot b^2)^{-3} \cdot (a^5 \cdot b^2)^{-2} \cdot (b^{-2})^{-6}}{(a^2 \cdot b^{-1})^{-2} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-3}}, a \neq 0, b \neq 0$;

d) $\frac{(a^{-4} \cdot b^{-3})^2}{(a^{-4} \cdot b^{-3})^3} \cdot \left(\frac{a^2}{b^{-2}}\right)^{-2}, a \neq 0, b \neq 0$.

4. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! (Állításunkat indokoljuk!)

- a) Bármely valós szám ötödik és harmadik hatványának az összege egyenlő a szám nyolcadik hatványával.
b) Bármely nullától különböző valós szám mínusz második és hetedik hatványának a szorzata a szám ötödik hatványával egyenlő.
c) Van olyan valós szám, melynek mínusz harmadik hatványa egyenlő a harmadik hatványával.
d) Bármely két valós szám összegének a négyzete egyenlő a két valós szám négyzetösszegével.
e) Van olyan pozitív valós szám, amelynek reciproka nagyobb a szám négyzeténél.
f) Van olyan valós szám, melyre teljesül, hogy a mínusz harmadik hatványának az ellentettje nagyobb a szám harmadik hatványánál.

5. Az alumínium lineáris hőtágulási együtthatója $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$. Mivel a lineáris hőtágulási együttható értéke kicsi, ezért a 0°C -on V_0 térfogatú alumínium test térfogatát t hőmérsékleten – a hőmérsékletet Celsius fokban mérve – $V = V_0(1 + 3\alpha t)$ összefüggés adja meg. Mekkora a 0°C -on 10 cm^3 térfogatú alumínium kocka térfogata 250°C -on? Hány centiméter ezen utóbbi kockának egy éle? (A kocka élét négy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.)

6. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $(3\sqrt{12} + 2\sqrt{7})(3\sqrt{12} - 2\sqrt{7})$; b) $(2\sqrt{11} + 4\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{11} - 4\sqrt{5})^2$;

c) $\left(\sqrt[4]{2\sqrt[3]{15} + 6}\right)^4 - \left(\sqrt[4]{2\sqrt[3]{15} - 6}\right)^4$; d) $(\sqrt[3]{3} + 2)^3 + (\sqrt[3]{3} - 2)^3$.

7. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

$$\text{a) } \sqrt[6]{11+\sqrt{57}} \sqrt[6]{11-\sqrt{57}}; \quad \text{b) } \frac{\sqrt[3]{(135-54\sqrt{6})(9+3\sqrt{6})}}{\sqrt[3]{9-\sqrt{54}}}; \quad \text{c) } \left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2.$$

8. Adjuk meg egy racionális számként!

$$\text{a) } (3\sqrt{180} - \sqrt{500} - \sqrt{245} + 4\sqrt{27} - \sqrt{300})(3\sqrt{20} - \sqrt{125} + \sqrt{108} - 2\sqrt{48})$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{1250}$$

9. Gyöktelenítsük az alábbi törték nevezőjét!

$$\text{a) } \frac{7}{\sqrt{5}}; \quad \text{b) } \frac{12}{\sqrt{37-5}}; \quad \text{c) } \frac{21}{\sqrt{83+2\sqrt{5}}}; \quad \text{d) } \frac{6}{\sqrt[4]{3}}; \quad \text{e) } \frac{1}{\sqrt[3]{2+1}}.$$

10. Melyik nagyobb?

$$\text{a) } \frac{35}{\sqrt{5}} \text{ vagy } \frac{174}{\sqrt{180}-\sqrt{6}}; \quad \text{b) } \sqrt[12]{5} \text{ vagy } \sqrt[8]{3}.$$

11. Végezzük el a kijelölt műveleteket!

$$\text{a) } \frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a^{-3}} \cdot a^{\frac{5}{6}}}{\sqrt[4]{a^5}}, \quad (a > 0); \quad \text{b) } \left(\sqrt{c^3} - 3\right)^2 + \left(c^{\frac{3}{2}} + 3\right)^2 - 2\left(c^{\frac{3}{2}} + 7\right)\left(\sqrt{c^3} - 4\right), \quad (c > 0).$$

12. Tegyük növekvő sorrendbe az alábbi kifejezéseket!

$$A = \log_5 625 + \log_3 \frac{1}{27} - \log_{\frac{1}{36}} 6; \quad B = \log_{\pi} \log_4 \log_3 81; \quad C = 7^{\log_7 5} - 36^{\log_6 2} + 11^{\log_{121} 49}.$$

13. Írjuk fel egy racionális számként!

$$\text{a) } \log_a \frac{a^{-4} \cdot a^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{a^{-12} \cdot a^8 \cdot \sqrt[12]{a^{25}}} \quad (a > 0, a \neq 1); \quad \text{b) } \frac{1}{2} \lg 13 + 3 \lg 12 + 6 \lg 5 - \frac{1}{2} \lg 117 - 2 \lg 3;$$

$$\text{c) } \frac{\log_{49} 5}{\log_7 5} \cdot \log_3 7 \cdot \log_7 3.$$

14. Egy radioaktív anyag kis mennyisége 10^{23} darab radioaktív atomot tartalmaz. A felezési idő 1 óra. Ha

egy radioaktív anyag eredetileg N_0 db bomlatlan atomot tartalmaz, akkor t idő múlva $N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$ darab bomlatlan atomot fog tartalmazni, ahol T a felezési idő. Mennyi bomlatlan atomot fog tartalmazni a feladatban megadott anyagminta 15 perc múlva? Mennyi idő alatt bomlik el az anyagminta 40%-a?

2.2. Algebrai egész és törtkifejezések

Algebrai egész kifejezések

Ha valós számokra és betűkre a négy alpműveletet véges sokszor alkalmazzuk, akkor algebrai kifejezést kapunk. Ha az algebrai kifejezésben nem szerepel olyan tört, amelynek nevezője tartalmaz határozatlant, akkor algebrai egész kifejezést vagy polinomot kapunk. Az előző leckében már átsimételtük, hogy a nevezetes szorzatok is algebrai egész



Rendszerező összefoglalás



2.27. ábra Határozatlan

- kiemelés
- csoportosítás és kiemelés
- nevezetes azonosságok alkalmazása
- gyöktényezős alak alkalmazása (Ezzel a másodfokú egyenleteknél foglalkozunk.)



2.28. ábra Szorzattá alakítási módszerek

kifejezések. A továbbiakban többek között ezek alkalmazására is nézünk példákat.



1. példa Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd összevonas után számítsuk ki a megadott helyen a polinomok helyettesítési értékét!

a) $(a-3)(2a+5) - (5a+1)(2a-5) + (4a-1)(2a+3)$, $a = 7$;

b) $(x-7)^2 + (3x+4)^2 - 10(x-5)(x+5)$, $x = \frac{1}{2}$;

c) $(y-2)^3 + (y+3)^3 - 2(y+2)(y^2-2y+4)$, $y = \frac{1}{3}$;

Megoldás:

a)
$$(a-3)(2a+5) - (5a+1)(2a-5) + (4a-1)(2a+3) =$$

$$= 2a^2 - 6a + 5a - 15 - 10a^2 - 2a + 25a + 5 + 8a^2 - 2a + 12a - 3 =$$

$$= 32a - 13;$$

Ha $a = 7$, akkor a kifejezés helyettesítési értéke $32 \cdot 7 - 13 = 224 - 13 = 211$.

b)
$$(x-7)^2 + (3x+4)^2 - 10(x-5)(x+5) =$$

$$= x^2 - 14x + 49 + 9x^2 + 24x + 16 - 10x^2 + 250 =$$

$$= 10x + 315.$$

Ha $x = \frac{1}{2}$, akkor a helyettesítési érték $10 \cdot \frac{1}{2} + 315 = 320$.

c)
$$(y-2)^3 + (y+3)^3 - 2(y+2)(y^2-2y+4) =$$

$$= y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - 2y^3 - 16 =$$

$$= 3y^2 + 39y + 3;$$

Ha $y = \frac{1}{3}$, akkor a helyettesítési érték

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 39 \cdot \frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{3} + 13 + 3 = \frac{49}{3}.$$



2. példa Alakítsuk szorzattá az alábbi polinomokat!

- a) $x^2 - 3x$; b) $ax^2 + 2bx + ay + 2by$; c) $3xy - 2zv - 2zy + 3xv$;
d) $16x^2 - 9y^2$; e) $25x^2 - 30x + 9$; f) $x^2 - 8x + 12$.

Megoldás:

a) Mivel mindkét tagban szerepel az x tényezőként, ezért kiemelhetjük (2.28. ábra).

$$x^2 - 3x = x(x-3).$$

b) Ennél a kifejezésnél csoportosítással és kiemeléssel végezhetjük a szorzattá alakítást.

$$ax + 2bx + ay + 2by = x(a + 2b) + y(a + 2b) = (a + 2b)(x + y).$$

c) Először rendezzük egymás mellé azokat a tagokat, amelyek tartalmaznak azonos határozatlan, majd az előző feladatban látott módon elvégezhetjük a szorzattá alakítást.

$$\begin{aligned} 3xy - 2zv - 2zy + 3xv &= 3xy - 2zy + 3xv - 2zv = \\ &= y(3x - 2z) + v(3x - 2z) = (y + v)(3x - 2z). \end{aligned}$$

d) Alkalmazzuk a két tag négyzetének különbségére vonatkozó azonosságot!

$$16x^2 - 9y^2 = (4x)^2 - (3y)^2 = (4x - 3y)(4x + 3y).$$

e) Vegyük észre, hogy ez a kifejezés egy teljes négyzet!

$$25x^2 - 30x + 9 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3 + 3^2 = (5x - 3)^2.$$

f) Ezt a polinomot az azonosságok felhasználásával és kiemeléssel is szorzattá alakíthatjuk, így nézzünk rá két megoldást!

1. megoldás:

Égészítsük ki teljes négyzetté, majd alkalmazzuk a két tag négyzetének különbségére vonatkozó azonosságot!

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 12 &= x^2 - 8x + 16 - 4 = (x - 4)^2 - 2^2 = \\ &= (x - 4 - 2)(x - 4 + 2) = (x - 6)(x - 2). \end{aligned}$$

2. megoldás:

Csoportosítsuk a tagokat az alábbi módon!

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 12 &= x^2 - 2x - 6x + 12 = \\ &= x(x - 2) - 6(x - 2) = (x - 2)(x - 6). \end{aligned}$$

További szorzattá alakítási lehetőséggel a Másodfokú egyenletek című leckében találkozhatunk.

Algebrai törtek

Ha az algebrai kifejezésben szereplő tört nevezőjében van határozatlan, akkor azt a kifejezést algebrai törtnek nevezzük.



3. példa

Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi algebrai törteket!

$$\text{a) } \frac{a^2 - a}{a^2 - 1}; \quad \text{b) } \frac{b^2 - 25}{b^2 - 10b + 25}; \quad \text{c) } \frac{d^2c^4 - d^216}{5c^3 + 20c}.$$

Megoldás:

a) Határozzuk meg az algebrai tört értelmezési tartományát!

Mivel a nevező értéke nem lehet 0, ezért $a^2 - 1 \neq 0$. Ebből következik, hogy $a \neq 1$ és $a \neq -1$.



2.29. ábra Kiemelés



2.30. ábra Teljes négyzet



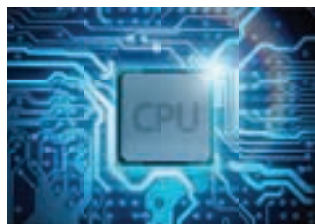
2.31. ábra Egyszerű alak



Rendszerező összefoglalás



2.32. ábra Számláló



2.33. ábra Műveletvégzés



2.34. ábra Tört

Tehát a tört értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Alakítsuk szorzattá a tört számlálóját és nevezőjét, majd egyszerűsítsünk!

$$\frac{a^2 - a}{a^2 - 1} = \frac{a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a}{a+1}.$$

b) A nevező ebben az esetben sem lehet 0, így $b^2 - 10b + 25 \neq 0$, amiből következik, hogy $(b-5)^2 \neq 0$, tehát $b \neq 5$.

A tört értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

$$\frac{b^2 - 25}{b^2 - 10b + 25} = \frac{(b-5)(b+5)}{(b-5)^2} = \frac{b+5}{b-5}.$$

c) Az előzőekhez hasonlóan

$$5c^3 + 20c \neq 0;$$

$$c(5c^2 + 4) \neq 0.$$

így $c \neq 0$. Tehát az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 c^4 - d^2 16}{5c^3 + 20c} &= \frac{d^2 (c^4 - 16)}{5c(c^2 + 4)} = \\ &= \frac{d^2 (c^2 - 4)(c^2 + 4)}{5c(c^2 + 4)} = \frac{d^2 (c^2 - 4)}{5c}. \end{aligned}$$



4. példa Végezzük el az alábbi műveleteket! Ha lehet, egyszerűsítsünk!

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{8}{x^2 - 9} - \frac{1}{x-3} + \frac{x-4}{x^2 - 3x}; & \text{b) } & \frac{5x^2 - 180}{7x^2 - 35x} : \frac{x^2 + 6x}{2x^2 - 50}; \\ \text{c) } & \left(\frac{3x+4}{2x-10} - \frac{3x-4}{2x+10} + \frac{95}{x^2 - 25} \right) : \frac{19}{x-5}. \end{aligned}$$

Megoldás:

a) Mivel a törtnek nevezője nem lehet 0, ezért $x^2 - 9 \neq 0$, $x-3 \neq 0$, $x^2 - 3x \neq 0$, ez alapján az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$.

Alakítsuk szorzattá a nevezőket, majd végezzük el a közös nevezőre hozást! Összevonás és a számláló szorzattá alakítása után egyszerűsítsünk, ha lehet!

$$\begin{aligned} \frac{8}{x^2 - 9} - \frac{1}{x-3} + \frac{x-4}{x^2 - 3x} &= \frac{8}{(x-3)(x+3)} - \frac{1}{x-3} + \frac{x-4}{x(x-3)} = \\ &= \frac{8x - x(x+3) + (x-4)(x+3)}{(x-3)(x+3)x} = \frac{8x - x^2 - 3x + x^2 - x - 12}{(x-3)(x+3)x} = \\ &= \frac{4x - 12}{(x-3)(x+3)x} = \frac{4(x-3)}{(x-3)(x+3)x} = \frac{4}{(x+3)x}. \end{aligned}$$

b) Ahhoz, hogy értelmezett legyen a kifejezés, teljesülnie kell, hogy $7x^2 - 35x \neq 0$, $x^2 + 6x \neq 0$, $2x^2 - 50 \neq 0$. Ez alapján az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{-6; -5; 0; 5\}$.

A törtek osztási szabálya alapján

$$\begin{aligned} & \frac{5x^2 - 180}{7x^2 - 35x} : \frac{x^2 + 6x}{2x^2 - 50} = \frac{5x^2 - 180}{7x^2 - 35x} \cdot \frac{2x^2 - 50}{x^2 + 6x} = \\ & = \frac{5(x-6)(x+6)}{7(x-5)x} \cdot \frac{2(x-5)(x+5)}{(x+6)x} = \frac{10(x-6)(x+5)}{7x^2}. \end{aligned}$$

c) Az értelmezési tartományát könnyen meghatározhatjuk: $\mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3x+4}{2x-10} - \frac{3x-4}{2x+10} + \frac{95}{x^2-25} \right) : \frac{19}{x-5} = \\ & = \left(\frac{3x+4}{2(x-5)} - \frac{3x-4}{2(x+5)} + \frac{95}{(x-5)(x+5)} \right) : \frac{19}{x-5} = \\ & = \frac{(3x+4)(x+5) - (x-5)(3x-4) + 190}{2(x-5)(x+5)} \cdot \frac{x-5}{19} = \\ & = \frac{3x^2 + 19x + 20 - 3x^2 + 19x - 20 + 190}{2(x-5)(x+5)} \cdot \frac{x-5}{19} = \\ & = \frac{38(x+5)}{2(x-5)(x+5)} \cdot \frac{x-5}{19} = 1. \end{aligned}$$



2.35. ábra Kivétel



Oldjuk meg!

1. Végezzük el a kijelölt műveleteket, és számoljuk ki a kifejezések helyettesítési értékét a megadott helyen!

- a) $(3x-2)(2x+1) + (2x-4)(x+2) - (4x-2)(2x-5)$, $x = \frac{2}{3}$;
- b) $(2x+5)^2 - (4x-3)^2 + (x-4)(x+4) + 11x(x+8)$, $x = 0,25$;
- c) $(x-1)^3 - (x+1)^3 - 2(x-1)(x^2-x+1) + 2(x+1)(x^2+x+1)$, $x = \frac{4}{3}$.

2. Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket!

- a) $4x^3 - 16x^2$;
- b) $4ax + 4ay - y - x$;
- c) $10a^2 + 35xy - 70ax - 5ay$;
- d) $x^4z^2 - 25y^4$;
- e) $x^2 + 16x + 64$;
- f) $81x^2 + 108x + 36$;
- g) $x^2 - 2x - 15$;
- h) $x^2 + 5x - 6$.



Rendszerező összefoglalás

3. Egyszerűsítsük az alábbi algebrai törteteket!

a) $\frac{s-2}{s^2-4}$; b) $\frac{5a^2-45}{4a^2-12a}$; c) $\frac{2x^2+24x+72}{4x^2-144}$; d) $\frac{d^4-c^4}{d^2-c^2}$; e) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-16}$; f) $\frac{x^2+3x-40}{x^2-6x+5}$.

4. Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\frac{3+x}{x^2-10x+25} + \frac{5}{4x-20}$; b) $\frac{3}{x^2-16} - \frac{x}{x-4} + \frac{x+1}{x+4}$; c) $\frac{5x^2+15x}{x^3-9x} \cdot \frac{4x^2-12x}{x}$;
d) $\frac{5x^2-125}{x^2-4x} : \frac{x^2+5x}{x^2-16}$; e) $\left(\frac{x}{x+1} + 2\right) : \left(1 - \frac{8x^2-3}{1-x^2}\right)$.

2.3. Számelmélet

Ha két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 1, akkor azokat relatív prímeknek nevezzük.



2.36. ábra Relatív prímek

Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 2-vel (5-tel), ha az utolsó számjegye osztható 2-vel (5-tel).

Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 3-mal (9-cel), ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal (9-cel). Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel (25-tel), ha az utolsó két számjegyből képzett kétjegyű szám osztható 4-gyel (25-tel).

Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 8-cal, ha az utolsó három számjegyből képzett háromjegyű szám osztható 8-cal.



2.37. ábra Oszthatósági szabályok

Az n -edik gyök témakörén belül már átismételtük az oszthatóság, a prímszám, összetett szám, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös fogalmát és a számelmélet alaptételét. A továbbiakban nézzünk néhány példát ezek alkalmazására!



1. példa Az alábbi hatjegyű számokban határozzuk meg az x, y számjegyeket úgy, hogy a felírt oszthatóság teljesüljön!

a) $12 \mid 37x25y$; b) $45 \mid 42x68y$.

Megoldás:

a) Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel, mert a 3 és a 4 relatív prímek (2.36. ábra) és szorzatuk 12.

Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel (2.37. ábra), ha az utolsó két számjegyből képzett szám osztható 4-gyel, ezért $4 \mid 37x25y$ akkor és csak akkor, ha $4 \mid 5y$. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $y = 2$ vagy $y = 6$.

I. eset: $y = 2$.

Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható hárommal, ha számjegyeinek az összege osztható hárommal, így $3 \mid 37x25y$ akkor és csak akkor, ha $3 \mid (3+7+x+2+5+y)$. Ha $y = 2$, akkor $3+7+x+2+5+2=19+x$. Ez pontosan akkor osztható 3-mal, ha $x = 2$, $x = 5$, $x = 8$.

II. eset: $y = 6$.

Ekkor is hasonlóan gondolkodhatunk. A számjegyek összege $23+x$. Ez pedig pontosan akkor osztható 3-mal, ha $x = 1$, $x = 4$ vagy $x = 7$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk ennek helyességéről.

b) Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 45-tel, ha osztható 9-cel és 5-tel, mert a 9 és az 5 relatív prímek, és szorzatuk 45.

Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha 0-ra vagy 5-re végződik. Tehát $y = 0$ vagy $y = 5$.

I. eset: $y = 0$.

Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek az összege osztható 9-cel, így $9 \mid 42x68y$ akkor és csak akkor, ha $9 \mid (4 + 2 + x + 6 + 8 + y)$. Ha $y = 0$, akkor $4 + 2 + x + 6 + 8 + 0 = 20 + x$.

Ez pontosan akkor osztható 9-cel, ha $x = 7$.

II. eset: $y = 5$.

Ekkor a számjegyek összege $25 + x$. Ez pontosan akkor osztható 9-cel, ha $x = 2$.



2. példa 2012 darab 1-es és 5 darab 2-es számjegyből leírjuk az összes lehetséges 2017 jegyű számot.

- Hány prímszám van a leírt számok között?
- Hány négyzetszám van a leírt számok között?

Megoldás:

a) Mivel mindegyik szám 2012 db 1-esből és 5 db 2-es számjegyből áll, ezért a számjegyek összege 2022, ami osztható 3-mal, így mindegyik általunk leírt 2017 jegyű szám osztható 3-mal, és nem 3, tehát egyik sem prímszám. Így nincs köztük prímszám.

b) Mivel mindegyik szám számjegyeinek összege 2022, amely osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel, ezért nincs köztük négyzetszám sem.



3. példa Határozzuk meg a 75 600 és a 17 820 legkisebb közös többszörösét és legnagyobb közös osztóját!

Megoldás:

Írjuk fel a két szám kanonikus alakját:

$$75\,600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \text{ és } 17\,820 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11$$

A két szám legkisebb közös többszöröse

$$[75\,600; 17\,820] = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 2\,494\,800 \quad (2.38. \text{ ábra}),$$

a legnagyobb közös osztójuk

$$(75\,600; 17\,820) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540 \quad (2.39. \text{ ábra}).$$



4. példa Határozzuk meg a 75 600 pozitív osztóinak a számát!

Megoldás:

A 75 600 pozitív osztóinak kanonikus alakjában a prímek közül csak a 2, a 3, az 5 vagy a 7 szerepelhet, még hozzá a 2 legfeljebb a negyedik,

Két egytől különböző pozitív egész szám legkisebb közös többszörösét előállíthatjuk a két szám kanonikus alakjából úgy, hogy vesszük a bennük szereplő prímszámokat az előforduló legnagyobb kitevőjű hatványon, és az így kapott prímszámokat összeszorozzuk.

2.38. ábra Két egytől különböző pozitív egész szám legkisebb közös többszöröse

Két egytől különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztóját előállíthatjuk a két szám kanonikus alakjából úgy, hogy vesszük a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb kitevőjű hatványon, és az így kapott prímszámokat összeszorozzuk.

2.39. ábra Két egytől különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója



Rendszerező összefoglalás

1	1	1	1
2	3	5	7
2^2	3^2	5^2	
2^3	3^3		
2^4			

2.40. ábra Segítség a 4. példa megoldásához

$279 : 2 = 139$
 1
 $139 : 2 = 69$
 1
 $69 : 2 = 34$
 1
 $34 : 2 = 17$
 0
 $17 : 2 = 8$
 1
 $8 : 2 = 4$
 0
 $4 : 2 = 2$
 0
 $2 : 2 = 1$
 0
 $1 : 2 = 0$
 1

2.41. ábra Átírás kettes számrendszerbe

a 3 legfeljebb a harmadik, az 5 legfeljebb a második és a 7 legfeljebb az első hatványon. Olyan is előfordulhat, hogy ezek közül valamelyik prím nem szerepel a kanonikus alakban. Az összeszámlálásban segít a 2.40. ábra. A 75 600 bármely pozitív osztóját előállíthatjuk úgy, hogy kiválasztunk a táblázat minden oszlopából pontosan egy számot, és a kapott négy számot összeszorozzuk. Mivel az első oszlopból öt, a másodikból négy, a harmadikból három, a negyedikből pedig kettő szám közül választhatunk, így a 75 600-nak összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ pozitív osztója van.



5. példa Két pozitív egész szám relatív prím, legkisebb közös többszörösük 2012. Melyik lehet ez a két szám?

Megoldás:

Mivel a két szám legnagyobb közös osztója 1, ezért legkisebb közös többszörösük egyenlő a szorzatukkal. Tehát a két szám szorzata 2012. Mivel a kanonikus alakja $2012 = 2^2 \cdot 503$, ezért a lehetséges számpárok 1 és 2012, illetve 4 és 503.



6. példa Írjuk át kettes számrendszerbe a 279 tízes számrendszerbeli számot!

Megoldás:

Végezzük el a megfelelő maradékos osztásokat (2.41. ábra)! Az utolsó nem 0 maradék a kettes számrendszerbeli szám első számjegye, és így a maradékokon visszafelé haladva megkapjuk a 279 kettes számrendszerbeli alakját, ami $279 = 10001011_2$.



7. példa Írjuk fel az 1100111_2 kettes számrendszerbeli számot tízes számrendszerben!

Megoldás:

A kettes számrendszerbeli helyi értékes számírás alapján $1100111_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 103$. Tehát $1100111_2 = 103$.



Oldjuk meg!

- Határozzuk meg az x, y számjegyeket úgy, hogy az alábbi oszthatóságok teljesüljenek!
 - $36 \mid \overline{357x8y}$;
 - $15 \mid \overline{452x7y}$;
 - $72 \mid \overline{36yx72}$.
- Összeszoroztuk az első száz prímszámot. Milyen számjegyre végződik a szorzat?
- Prímszám, illetve négyzetszám-e a $10^{2012} + 2021$ szám?

4. Lehet-e prímszám öt egymást követő pozitív egész szám összege?
5. Határozzuk meg a 441 000 és az 58 212 legkisebb közös többszörösét és legnagyobb közös osztóját!
6. Két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 2, legkisebb közös többszöröse 2012. Melyik lehet ez a két szám?
7. Határozzuk meg a 17 820 pozitív osztóinak a számát!
8. Írjuk fel a 321 tízes számrendszerbeli számot kettes számrendszerben!
9. Írjuk fel a 10101011_2 kettes számrendszerbeli számot tízes számrendszerben!

3. Függvények

A mindennapi élet számos területén találkozunk a függvény fogalmával. A függvényfogalom definíciójában két halmaz között teremtünk kapcsolatot. A halmazok elemei lehetnek: számok, pontok, síkidomok, testek, hőmérséklet, idő, emberek stb.

Függvényekkel kapcsolatos fogalmak

Az alábbiakban néhány példa segítségével felelevenítjük a függvényekkel kapcsolatos ismereteinket.



1. példa Függvényt adnak-e meg az alábbi hozzárendelések?

- a) Egy iskola minden tanulójaához rendeljük hozzá azt a hónapot, amelyikben született!
- b) A sík pontjainak halmazát jelöljük S -sel. Legyen adott az S síkon egy O pont. Az S pontjaihoz rendeljük hozzá az S pontjait úgy, hogy minden ponthoz hozzárendeljük az O -ra vonatkozó tükörképét.
- c) Minden egész számhoz hozzárendeljük a pozitív osztóit.
- d) Magyarország minden városához rendeljük hozzá a földrajzi szélességüket!

Megoldás (3.1. ábra):

- a) Igen, mert minden diákhoz pontosan egy olyan hónap tartozik, amelyben született.
- b) Igen, mert minden pontnak pontosan egy tükörképe van.
- c) Nem, mert pl. a 6-hoz az 1-et, a 2-t, a 3-at és a 6-ot is hozzá kell rendelni.
- d) Igen, mert minden városhoz pontosan egy földrajzi szélesség tartozik.

A továbbiakban olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek a valós számok valamely részhalmazán értelmezettek, és értékkészletük részhalmaza a valós számok halmazának. Ezeket a függvényeket **valós függvényeknek** nevezzük.

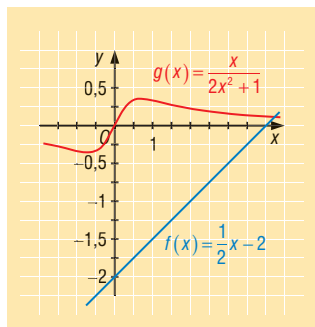
$f: A \rightarrow B$ függvény olyan hozzárendelés, amely a nem üres A (értelmezési tartomány: D_f) minden eleméhez pontosan egy B -beli (képhalmaz) elemet rendel. A hozzárendelt elemek halmaza a függvény értékkészlete (R_f).



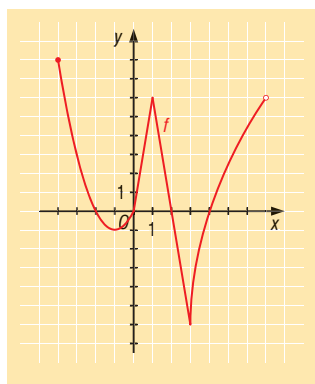
3.1. ábra Függvény



3.2. ábra Függő



3.3. ábra Az f és a g függvény grafikonjai



3.4. ábra A 3. példához

Az f minimuma (maximuma) az R_f legkisebb (legnagyobb) eleme, minimum- (maximum-) helye az értelmezési tartomány azon eleme, amelyhez a függvény a minimumát (maximumát) rendeli.



3.5. ábra Szélsőérték

Az értelmezési tartomány azon eleme, amelyhez a függvény 0-t rendel.



3.6. ábra Zérushely



2. példa

Legyen az $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ és a $g(x) = \frac{x}{2x^2 + 1}$ ($D_f = D_g = \mathbb{R}$).

- Határozzuk meg a $\frac{4}{3} \cdot f\left(\frac{2}{5}\right) - \frac{5}{7} \cdot g\left(\frac{1}{2}\right)$ kifejezés értékét!
- Mely valós x -re teljesül, hogy $f(x) = 2$?

Megoldás:

a) Az f függvény az $x = \frac{2}{5}$ értékhez az $f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 2 = -\frac{9}{5}$ -öt,

a g függvény az $x = \frac{1}{2}$ értékhez a $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{3}$ -ot rendeli.

Így a keresett érték: $\frac{4}{3} \cdot f\left(\frac{2}{5}\right) - \frac{5}{7} \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) - \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{277}{105}$.

b) Ebben az esetben a kérdés tulajdonképpen az, hogy „Hol veszi fel a függvény a 2 értéket?”. Így az $f(x) = 2$ egyenletet kell megoldanunk. Az egyenlet értelmezési tartománya megegyezik az f függvény értelmezési tartományával ($\mathbb{R}$). A $2 = \frac{1}{2}x - 2$ egyenlet megoldása: $x = 8$.

A keresett x érték tehát: $x = 8$.



3. példa

Adott az f függvény a grafikonjával (3.4. ábra).

- Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!
- Állapítsuk meg a függvény szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit!
- Hol vesz fel a függvény 0 értéket?
- Mely értelmezési tartománybeli értékek esetén lesz a függvény helyettesítési értéke pozitív?
- Írjuk le a függvény monotonitási viszonyait!

Megoldás:

a) A függvény értelmezési tartományát az x tengelyről, az értékkészletet az y tengelyről olvashatjuk le. A függvény értelmezési tartománya: $D_f = [-4; 7]$, értékkészlete: $R_f = [-6; 8]$.

b) A függvény (abszolút) szélsőértékei (3.5. ábra):
minimumhelye: $x = 3$, minimuma: $y = -6$;
maximumhelye: $x = -4$, maximuma: $y = 8$.

c) A függvény a 0 értéket négy helyen veszi fel, azaz négy zérushelye van, ezek (3.6. ábra): $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$.

d) A függvény pozitív értéket vesz fel ott, ahol a grafikonja az x tengely „felett” halad. Ez alapján a függvény helyettesítési értéke pozitív, ha $x \in [-4; -2] \cup]0; 2] \cup]4; 7]$.

e) A $[-4; -1]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[-1; 1]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, az $[1; 3]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, és a $[3; 7]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő (3.7. ábra).



4. példa Egyenlők-e az alábbi f és g függvények?

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-, f(x) = |3 - 5x|$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-, g(x) = \begin{cases} 5x - 3, & \text{ha } x \geq 0,6 \\ 3 - 5x, & \text{ha } x < 0,6 \end{cases}$$

Megoldás (3.8. ábra):

Mindkét függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Az abszolút érték definíciója alapján:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 5x, & \text{ha } 3 - 5x > 0 \\ -3 + 5x, & \text{ha } 3 - 5x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 3 - 5x, & \text{ha } x < 0,6 \\ 5x - 3, & \text{ha } x \geq 0,6 \end{cases}$$

Látható, hogy a két függvény helyettesítési értéke az értelmezési tartomány bármely elemére egyenlő.

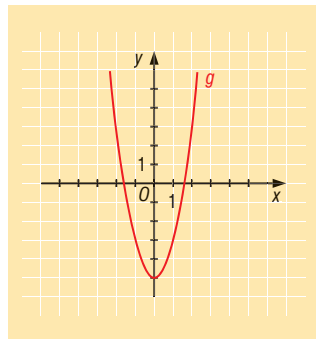
A fentiek miatt a két függvény egyenlő.

Függvénytípusok, függvénytranszformáció

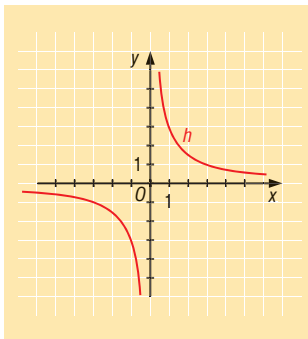


5. példa A 3.9.–3.13. ábrákon látható grafikonok a korábbi tanulmányainkban szereplő, a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett függvényekhez kapcsolódnak.

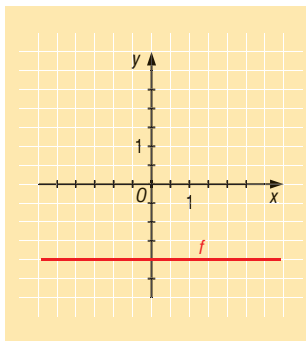
- Adjunk meg az egyes grafikonokhoz hozzárendelési utasítást!
- Adjuk meg az egyes függvények értékkészletét!
- Jellemezzük a függvényeket paritás és periodikusság szempontjából!



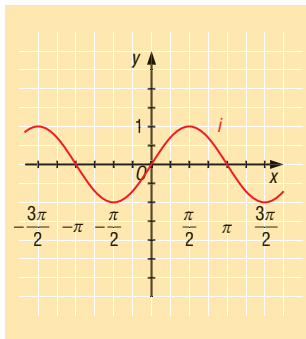
3.10. ábra A g függvény



3.11. ábra A h függvény



3.9. ábra Az f függvény



3.12. ábra Az i függvény

f szigorúan monoton növekedő (csökkenő) az I intervallumon, ha $I \subseteq D_f$ és bármely $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

f monoton növekedő (csökkenő) az I intervallumon, ha $I \subseteq D_f$ és bármely $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).



3.7. ábra A függvény menete

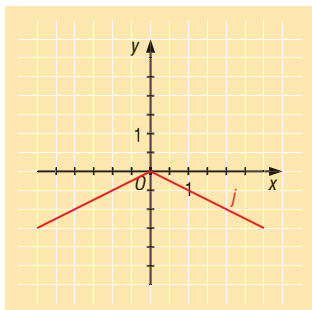
$f = g$ akkor és csak akkor, ha $D_f = D_g$, és bármely $x \in D_f$ esetén $f(x) = g(x)$.



3.8. ábra Függvények egyenlősége



Rendszerező összefoglalás



3.13. ábra A j függvény

Az f páros akkor és csak akkor, ha bármely $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = f(x)$.



3.14. ábra Páros függvény

Az f páratlan akkor és csak akkor, ha bármely $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = -f(x)$.

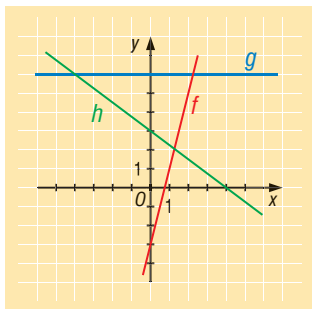


3.15. ábra Páratlan függvény

Az f periodikus, ha van olyan $p > 0$ úgy, hogy bármely $x \in D_f$ esetén $x + p \in D_f$ és $f(x + p) = f(x)$. Ha létezik legkisebb ilyen p , akkor ez az f periódusa.



3.16. ábra Periodikus függvény



3.17. ábra A 6. példa megoldásához

Megoldás:

- a) $f(x) = -2$, $D_f = \mathbb{R}$; $g(x) = 2x^2 - 5$, $D_g = \mathbb{R}$; $h(x) = \frac{3}{x}$, $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $i(x) = \sin x$, $D_i = \mathbb{R}$; $j(x) = -\frac{1}{2}|x|$, $D_j = \mathbb{R}$;
 b) $R_f = \{-2\}$; $R_g = [-5; \infty[$; $R_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $R_i = [-1; 1]$; $R_j = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$.
 c) Mivel bármely értelmezési tartománybeli x esetén: $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = g(x)$, $h(-x) = -h(x)$ ($x \neq 0$), $i(-x) = -i(x)$ és $j(-x) = j(x)$, ezért az f, g, j függvények párosak (3.14. ábra), a h, i függvények páratlanok (3.15. ábra). Az f, i függvények periodikusak, az f függvénynek nincs periódusa, az i függvény (3.16. ábra) periódusa 2π . A g, h, j függvények nem periodikusak.



6. példa Határozzuk meg és ábrázoljuk azt a valós számok halmazán értelmezett lineáris függvényt, amely grafikonjának meredeksége m , és grafikonja y tengellyel való metszéspontjának ordinátája b !

- a) $m = 4$, $b = -3$; b) $m = 0$, $b = 6$; c) $m = -\frac{3}{4}$, $b = 3$.

Megoldás:

A lineáris függvények grafikonja egyenes, hozzárendelési utasítása $f(x) = mx + b$ alakú, ahol m az egyenes meredeksége és b az egyenes y tengellyel való metszéspontjának ordinátája ($m, b \in \mathbb{R}$). Így a keresett függvények:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 3$ elsőfokú függvény;
 b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 6$ konstans függvény;
 c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = -\frac{3}{4}x + 3$ elsőfokú függvény;

Az egyes függvények grafikonjai a 3.17. ábrán láthatóak.



7. példa Adjuk meg azokat a lineáris függvényeket, amelyeknek a grafikonjai a 3.18. ábrán láthatóak.

Megoldás:

Az f függvény értelmezési tartománya $[-4; \infty[$, értékkészlete $\{-1\}$. Grafikonja olyan félegyenes, amelynek meredeksége 0, y tengellyel való metszéspontjának ordinátája -1 .

Így $f: [-4; \infty[\rightarrow \{-1\}$, $f(x) = -1$.

A g függvény értelmezési tartománya $[-1; 4[$, értékkészlete $[-5; 5]$. Grafikonja olyan szakasz, amelynek meredeksége 2, y tengellyel való metszéspontjának ordinátája -3 .

Tehát $g : [-1; 4[\rightarrow [-5; 5[$, $g(x) = 2x - 3$.

A h függvény értelmezési tartománya $]-\infty; 6[$, értékkészlete $]-2; \infty[$.

Grafikonja olyan félegyenes, amelynek meredeksége $-\frac{2}{3}$, y tengely-lyel való metszéspontjának ordinátája 2. Innen $h :]-\infty; 6[\rightarrow]-2; \infty[$,
 $h(x) = -\frac{2}{3}x + 2$.



3. példa A függvénytranszformációról tanultak felhasználásával a megfelelő alapfüggvényekből kiindulva, lépésenként ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Adjuk meg a függvények zérushelyeit, szélsőértékének helyeit és értékét!

a) $f(x) = 3 \sin 2x$, $D_f = \mathbb{R}$;

b) $g(x) = -\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

c) $h(x) = -\log_2\left(\frac{2}{x}\right)$, $D_h =]0; 8]$;

d) $i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 2$, $D_i = [-3; 3]$;

e) $j(x) = -\sqrt{x-1} + 2$, $D_j = [1; 10]$.

Megoldás:

a) Az f grafikonját megkaphatjuk az $x \mapsto \sin x$ ($D = \mathbb{R}$) alapfüggvényből kiindulva függvénytranszformációk segítségével. Az $x \mapsto \sin 2x$ ($D = \mathbb{R}$) függvény képét megkapjuk, ha a szinuszfüggvény grafikonját az x tengely mentén felére zsugorítjuk. Ha az $x \mapsto \sin 2x$ függvény grafikonját az y tengely mentén háromszorosára nyújtjuk, akkor az f függvény grafikonját kapjuk (3.20. ábra).

Az f függvény zérushelyei az $f(x) = 0$, azaz a $3 \sin 2x = 0$ egyenlet megoldásai: $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$),

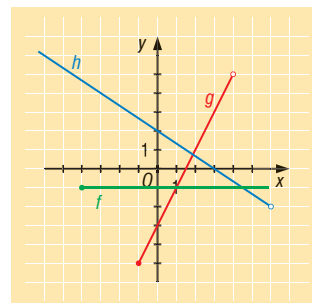
▶ minimuma: -3 ,

▶ minimumhelyei: $x = -\frac{\pi}{4} + l\pi$ ($l \in \mathbb{Z}$);

▶ maximuma: 3 ,

▶ maximumhelyei: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).

b) A $h(x) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ ($D_h = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$) függvény képét megkapjuk, ha a tangensfüggvény grafikonját az x tengely mentén

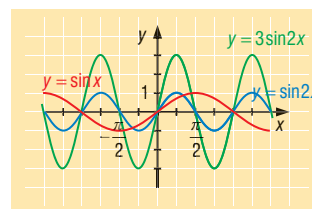


3.18. ábra A 7. példához

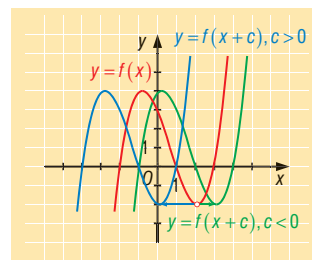
Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris függvény, ha bármely $x \in D_f$ esetén $f(x) = m \cdot x + b$. Ha $m = 0$, akkor f konstans függvény, egyébként f elsőfokú függvény. A lineáris függvény grafikonja egyenes.



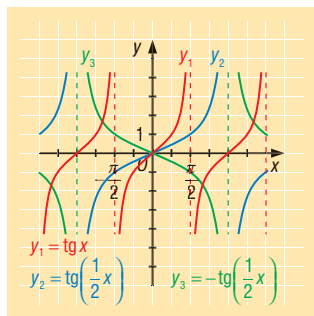
3.19. ábra A lineáris függvény



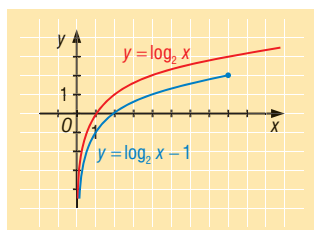
3.20. ábra A 8. a) példa megoldásához



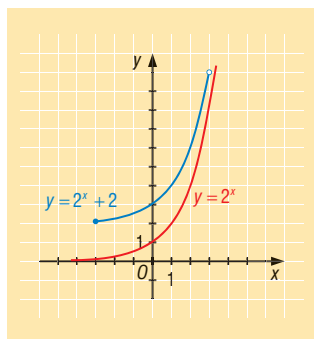
3.21. ábra Változó transzformációk I.



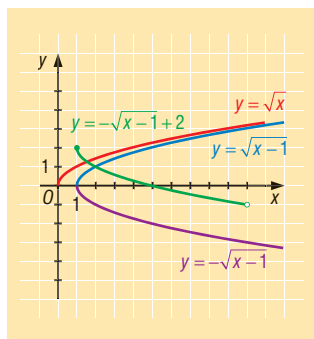
3.22. ábra A 8. b) példa megoldásához



3.23. ábra A 8. c) példa megoldásához



3.24. ábra A 8. d) példa megoldásához



3.25. ábra A 8. e) példa megoldásához

a kétszeresére nyújtjuk. A $g(x) = -h(x)$, így, ha a h függvény grafikonját az x tengelyre tükrözzük, akkor a g függvény grafikonját kapjuk (3.22. ábra).

A g függvény zérushelyei a $-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$ egyenlet megoldásai:

$x = k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). A függvénynek nincs szélsőértéke.

c) A logaritmus azonosságai alapján:

$$h(x) = -\log_2\left(\frac{2}{x}\right) = -(\log_2 2 - \log_2 x) = -1 + \log_2 x. \text{ A } h \text{ függvény ké-}$$

pét megkaphatjuk, ha az $x \mapsto \log_2 x$ ($D = \mathbb{R}^+$) grafikonját az y tengely mentén 1 egységgel a negatív irányban eltoljuk, és az így kapott görbének a $]0; 8]$ intervallumhoz tartozó részét tekintjük (3.23. ábra).

A h függvény zérushelye a $-1 + \log_2 x = 0$ egyenlet megoldása: $x = 2$; maximuma: 2, maximumhelye: $x = 8$. Minimuma nincs.

d) A hatványozás definíciója és azonosságai alapján: $i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 2 = (2^{-1})^{-x} + 2 = 2^x + 2$. Az i függvény grafikonját megkaphatjuk, ha az $x \mapsto 2^x$ ($D = \mathbb{R}$) grafikonját az y tengely mentén 2 egységgel pozitív irányban eltoljuk, és az így kapott görbének a $[-3; 3[$ intervallumhoz tartozó részét tekintjük (3.24. ábra).

Az i függvénynek nincs zérushelye. A függvénynek maximuma nincs (a 3 nem tartozik az értelmezési tartományhoz!), a minimuma: 2, minimumhelye: $x = -3$.

e) A j függvény képét úgy kapjuk, hogy az $x \mapsto \sqrt{x}$ ($D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$) alapfüggvény grafikonját eltoljuk az x tengely mentén pozitív irányba 1 egységgel, majd a (-1) -es szorzó miatt ezt tükrözzük az x tengelyre, végül eltoljuk az y tengely mentén pozitív irányba 2 egységgel, és az így kapott görbének az $[1; 10[$ intervallumhoz tartozó részét tekintjük (3.25. ábra).

Zérushelye a $-\sqrt{x-1} + 2 = 0$ egyenlet megoldása: $x = 5$.

A függvénynek minimuma nincs (a 10 nem eleme az értelmezési tartománynak!), a maximuma: $y = 2$, maximumhelye: $x = 1$.



9. példa Az f függvény ($D_f = \mathbb{R}$) grafikonját úgy kaptuk,

hogy a g függvény ($D_g = \mathbb{R}$) képét az $\vec{e}$ vektorral eltoltuk. Ábrázoljuk az f függvényt! Adjuk meg az $\vec{e}$ vektort!

a) $g(x) = 2|x|$, $f(x) = 2|x-5| - 4$.

Adjuk meg azt a h függvényt, amelynek grafikonja az $x \mapsto \frac{2}{3} \cos x$ ($D = \mathbb{R}$) függvény grafikonjának $\vec{e}$ vektorral eltolt képe!

b) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 2,5$.

Adjuk meg azt az i függvényt, amelynek grafikonja az $x \mapsto 3 \cdot 2^x$ ($D = \mathbb{R}$) függvény grafikonjának $\vec{e}$ vektorral eltolt képe!

Megoldás:

a) Az f függvény grafikonját a függvénytranszformációról tanultak felhasználásával a g függvény képéből kiindulva, lépésenként ábrázoljuk.

A 3.27. ábra alapján a keresett vektor: $\vec{e}(5; -4)$.

A feladat feltételének megfelelő trigonometrikus függvény:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{3} \cos(x-5) - 4.$$

b) Ábrázolás előtt alakítsuk teljes négyzetté az f függvény hozzárendelési szabályát:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 2,5 = -\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 5) = \\ &= -\frac{1}{2}[(x+3)^2 - 4] = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 2. \end{aligned}$$

Az f függvény grafikonját a függvénytranszformációról tanultak felhasználásával a g függvény képéből kiindulva, lépésenként ábrázoljuk.

A 3.28. ábra alapján a keresett vektor: $\vec{e}(-3; 2)$.

A megfelelő exponenciális függvény: $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i(x) = 3 \cdot 2^{x+3} + 2$.



10. példa Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{21}{2} \quad \text{és} \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} \quad \text{függvényeket!}$$

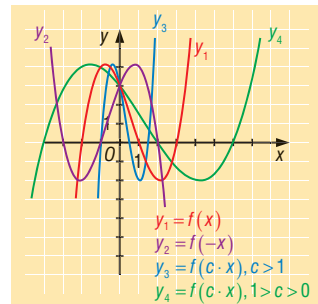
- Ábrázoljuk az f és a g függvényeket közös koordináta-rendszerben!
- Mely x -ekre teljesül, hogy $f(x) \leq g(x)$?

Megoldás:

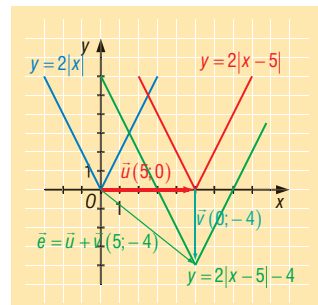
a) Ábrázolás előtt alakítsuk teljes négyzetté az f és a g függvények hozzárendelési szabályait: $f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2 - 12$, $g(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$.

Az f függvény képe pozitív irányba nyíló parabola, amelynek tengelypontja: $(1; -12)$. A g függvény grafikonja negatív irányba nyíló parabola, amelynek tengelypontja: $(3; 2)$. A grafikonok a 3.29. ábrán láthatóak.

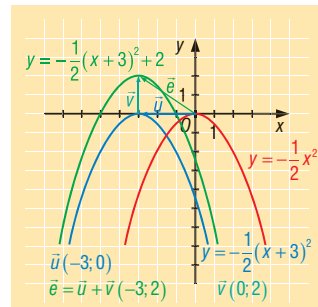
b) Az $f(x) \leq g(x)$ egyenlőtlenség megoldásakor keressük a változó azon értékeit (x -eket), amely értékeknél az f függvény helyettesítési értéke nem nagyobb, mint a g függvény helyettesítési értéke. A grafikonok közös pontjainak abszcisszáit az $f(x) = g(x)$, vagyis az $\frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{21}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$ egyenlet megoldásai adják. A fenti egyenletet 0-ra redukáljuk: $2x^2 - 6x - 8 = 0$, majd 2-vel elosztjuk: $x^2 - 3x - 4 = 0$, és felírjuk a megoldóképletet, ahonnan $x_1 = -1$ és $x_2 = 4$ adódik. A grafikonoknak két közös pontja van: $M_1(-1; -6)$ és $M_2(4; 1,5)$. A két függvény helyettesítési értéke tehát $x_1 = -1$ és



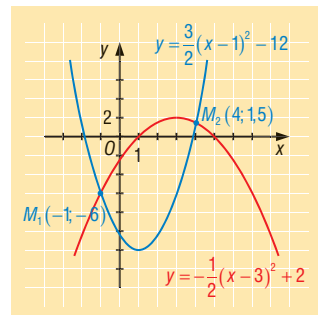
3.26. ábra Változó transzformációk II.



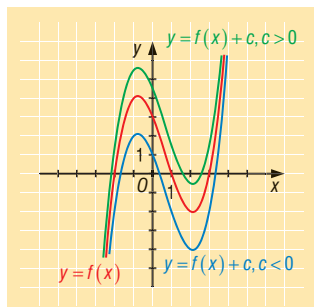
3.27. ábra A 9. a) példa megoldásához



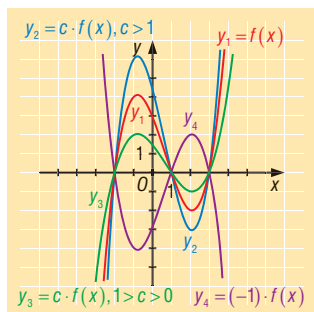
3.28. ábra A 9. b) példa megoldásához



3.29. ábra A 10. a) példa megoldásához



3.30. ábra Függvényérték-transzformációk I.



3.31. ábra Függvényérték-transzformációk II.

Az f valós függvény másodfokú függvény, ha bármely $x \in D_f$ esetén:

$$f(x) = a \cdot x^2 + bx + c,$$

ahol $a \neq 0$.

3.32. ábra Másodfokú függvény

A valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvény grafikonja parabola.

3.33. ábra A másodfokú függvény grafikonja

$x_2 = 4$ esetén egyenlő. A $]-\infty; -1[$ intervallumon az $f(x) > g(x)$, a $[-1; 4]$ intervallumon $f(x) \leq g(x)$ és végül a $]4; \infty[$ intervallumon $f(x) > g(x)$ teljesül. Tehát a megoldás: $[-1; 4]$.

11. példa Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 - b \cdot x + 10$. Határozzuk meg a b értékét úgy, hogy

- a függvény -2 helyen vett helyettesítési értéke -6 legyen!
- két zérushelye legyen!
- a függvény szélsőértéke 1 legyen!
- a függvény értékkészlete $[-6; \infty[$ legyen!

Megoldás:

a) Mivel $f(-2) = -6$, így $-6 = (-2)^2 - b(-2) + 10$. Innen a feladat megoldása: $b = -10$.

b) A feltétel szerint az $x^2 - b \cdot x + 10 = 0$ ($f(x) = 0$) másodfokú egyenletnek két különböző valós megoldása van. Ez pontosan akkor teljesül, ha az egyenlet diszkriminánsa pozitív, azaz $D = b^2 - 4ac = b^2 - 40 > 0$. Ebből kapjuk, hogy $|b| > 2\sqrt{10}$, tehát $b > 2\sqrt{10}$ vagy $b < -2\sqrt{10}$.

c) A főegyüttható pozitív ($a = 1$), tehát az f függvénynek bármely b valós paraméter esetén (abszolút) minimuma van, maximuma nincs. Így a legkisebb függvényérték az 1 . Az $f(x) = x^2 - b \cdot x + 10 =$

$$= \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + 10 - \frac{b^2}{4} \geq 10 - \frac{b^2}{4} \text{ és a fentiek miatt } 10 - \frac{b^2}{4} = 1, \text{ innen}$$

adódik a megoldás: $b_1 = 6, b_2 = -6$.

d) A c) részben azt kaptuk, hogy bármely valós x -re $f(x) \geq 10 - \frac{b^2}{4}$ teljesül. Így a feladat feltétele teljesül, ha $10 - \frac{b^2}{4} = -6$, ahonnan a megoldás: $b_1 = 8, b_2 = -8$.

12. példa Adjuk meg egy olyan, a valós számok halmazán értelmezett függvény hozzárendelési szabályát, amelynek

- abszolút minimumhelye: $x = -1$;
- nincs szélsőértéke;
- egy zérushelye van;
- értékkészlete: $]-\infty; 2]$;
- értékkészlete: $[-2011; 2011]$;
- periódusa: 4π .

Megoldás:

Korábbi tanulmányaink és az előző feladatok alapján több megoldást is találhatunk az egyes feladatrészekre, az alábbiakban egy-egy megoldást adunk csak meg.

- a) $f(x) = |x+1| - 10$;
 b) $f(x) = 3^x$;
 c) $f(x) = x + 4$;
 d) $f(x) = -x^2 + 2$;
 e) $f(x) = 2011 \sin x$;
 f) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.



13. példa Jellemezzük az alábbi függvényeket!

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x^2 - 4x - 5|$;
 b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2|x+1| + |x-5|$.

Megoldás:

A függvények jellemzését megkönnyíti ábrázolásuk. Ábrázoljuk az f, g függvényeket!

a) Először az $x^2 - 4x - 5$ kifejezést alakítjuk teljes négyzetté:

$$x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 9,$$

majd ábrázoljuk az $x \mapsto (x-2)^2 - 9$ másodfokú függvényt! A keresett f függvény értékeit úgy kapjuk meg, hogy vesszük ezen másodfokú függvény értékeinek abszolút értékét. Az abszolút érték definíciója alapján a nemnegatív függvényértékek abszolút értéke önmaga, a negatív függvényértékek abszolút értéke pedig a számok ellentettje.

Így az f függvény grafikonját megkaphatjuk, ha az $x \mapsto (x-2)^2 - 9$ függvény képének az x tengely „fölötti” részét helyben hagyjuk, az x tengely „alatti” részét pedig tükrözzük az x tengelyre (3.36. ábra).

b) Az $x+1$ kifejezés $x = -1$ -nél, az $x-5$ pedig $x = 5$ -nél vált előjelet.

Ennek megfelelően táblázatba foglalhatjuk az egyes intervallumokon érvényes hozzárendelési szabályokat (3.37. ábra), majd vázoljuk fel a függvény grafikonját (3.38. ábra) és jellemezzük (3.39. ábra)!

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 5$	$x = 5$	$5 < x$
$ x+1 $	$-x-1$	0	$x+1$	6	$x+1$
$ x-5 $	$-x+5$	6	$-x+5$	0	$x-5$
$2 x+1 + x-5 $	$-3x+3$	6	$x+7$	12	$3x-3$

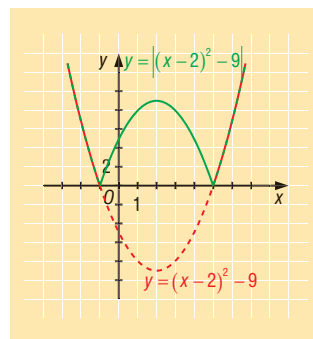
3.37. ábra Az egyes intervallumokon érvényes hozzárendelési szabályok



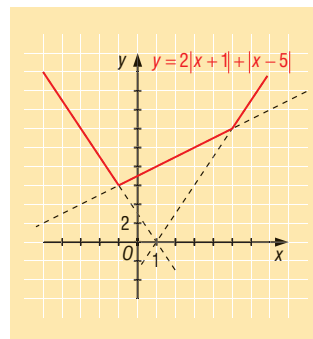
3.34. ábra Minimum, maximum



3.35. ábra Utasítás



3.36. ábra A 13. a) példa megoldásához



3.38. ábra A 13. b) példa megoldásához



Rendszerező összefoglalás

	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ $x \mapsto x^2 - 4x - 5 $	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$ $g(x) = 2 x+1 + x-5 $
Értékkészlet	$[0; \infty[$	$[6; \infty[$
Zérushely	$x_1 = -1, x_2 = 5$	nincs
Szélsőérték	minimumhelye: $x_1 = -1, x_2 = 5$ minimum: $y_1 = y_2 = 0$ helyi maximumhely: $x = 2$ helyi maximum: $y = 9$	minimumhelye: $x = -1$ minimum: $y = 6$
Monotonitás	$]-\infty; -1]$ -on szigorúan monoton csökkenő $[-1; 2]$ -on szigorúan monoton növekvő $[2; 5]$ -on szigorúan monoton csökkenő $[5; \infty[$ -on szigorúan monoton növekvő	$]-\infty; -1]$ -on szigorúan monoton csökkenő $[-1; \infty[$ -on szigorúan monoton növekvő
Paritás	nincs	nincs

3.39. ábra Az f és g függvények jellemzése



Oldjuk meg!

- Az alábbi hozzárendelések közül melyek határoznak meg függvényt?
 - Minden osztályzathoz hozzárendeljük azt a diákot, akinek az előző év végi történelem érdemjegye ez az osztályzat.
 - A 2011-ben megjelent versekhez hozzárendeljük a vers költőjét.
 - A Föld minden lakójához hozzárendeljük a testtömegüket.
- Legyen az $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ és a $g(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$ ($D_f = D_g = \mathbb{R}$).
 - Határozzuk meg a $-\frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{4}{3}\right) + g\left(-\frac{1}{2}\right)$ kifejezés értékét!
 - Mely valós x -re teljesül, hogy $f(x) = 0$?
- Egyenlőek-e az alábbi f és g függvények?

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-, f(x) = |3 - x|, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-, g(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{ha } x \geq 3 \\ 3 - x, & \text{ha } x < 3 \end{cases}$$
- Ábrázoljuk a következő, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket derékszögű koordináta-rendszerben:
 - $f(x) = -2x + 5;$
 - $g(x) = x - 4;$
 - $h(x) = -\frac{1}{2}x;$
 - $i(x) = \frac{5}{3}x + 5.$
- Egy elsőfokú f függvény ($D = \mathbb{R}$) grafikonja áthalad az $A(3; 2)$ és a $B(-3; -5)$ ponton.
 - Adjuk meg a függvényt!
 - Határozzuk meg azon x valós számok halmazát, amelyekre teljesül, hogy $f(x) \leq 0$!
- Ábrázoljuk és jellemzzük az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!
 - $x \mapsto x^2 - 3x;$
 - $x \mapsto -x^2 + 2x + 8;$
 - $x \mapsto 2x^2 + 4x - 6;$
 - $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}.$

7. Tekintsük az $f: [-2; 4[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x - 5$ függvényt!
- Határozzuk meg $f(-1) - f(2)$ értéket!
 - Adjunk meg egy olyan zárt intervallumot, ahol az f függvény szigorúan monoton nő!
 - Mely változóhoz rendeli az f függvény a -5 értéket?
 - Határozzuk meg az f függvény szélsőérték helyét, szélsőértékének értékét!
8. Egy vállalkozás költségét a $C(x) = 0,5x + 500$ függvény írja le, a bevételét pedig az $R(x) = -5x^2 + 125,5x$ függvény a gyártott mennyiség ($x > 0$) függvényében. ($C(x), R(x)$ értéke ezer forintban értendő.)
- Írjuk fel a nyereséget ($\pi(x)$) a gyártott mennyiség függvényében!
 - Mekkora mennyiség előállításánál lesz a termelés nyereséges?
 - Mekkora mennyiség előállításánál lesz a nyereség maximális? Mekkora ez a maximális nyereség?
9. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 5x + p$ függvényt! Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy
- az f függvény $x = -\frac{1}{2}$ helyen felvett értéke 3 legyen;
 - az f függvénynek egy zérushelye legyen;
 - az f függvény szélsőértékének értéke $\frac{39}{32}$ legyen!
10. Adjuk meg egy olyan, a valós számok halmazán értelmezett függvény hozzárendelési szabályát, amelynek
- abszolút maximumhelye: $x = 4$;
 - nincs zérushelye;
 - két zérushelye van;
 - értékkészlete: $[-1; \infty[$;
 - értékkészlete: $[-3; 3]$;
 - periódusa: $\frac{\pi}{2}$.
11. Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi függvényeket! Milyen értéket vesznek fel a függvények -3 -nál és 0 -nál?
- $f: [-4; 6] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2|x+1| - 3$;
 - $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -|x+5| + 3$;
 - $h:]-4; 7[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{3}{2}|x| - 5$;
 - $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i(x) = |x^2 - 8x + 12|$;
 - $j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j(x) = |x+3| - 2|x-2|$.
12. Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi függvényeket!
- $f(x) = \sqrt{x-4}, D_f = [4; \infty[$;
 - $g(x) = 3\sqrt{x+2}, D_g = [-2; \infty[$;
 - $h(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} - 1, D_h = [0; \infty[$;
 - $i(x) = 2\sqrt{-x} - 1, D_i =]-\infty; 0]$.



Rendszerező összefoglalás

13. Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvényeket!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 3;$

b) $g: [-2\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2 \cos 3x;$

c) $h: \left]-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[\rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{2} - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$

d) $i: \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, i(x) = 1 - 2 \operatorname{ctg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$

14. Számítsuk ki az alábbi függvények helyettesítési értékét az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen!

a) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right), D_f = \mathbb{R};$

b) $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) - 3, x \neq \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z});$

c) $h(x) = -\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), x \neq -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

15. A függvénytranszformációról tanultak felhasználásával az alapfüggvényekből kiindulva, lépésenként ábrázoljuk az alábbi függvényeket!

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}|x+1| - 3.$

Adjuk meg azt a trigonometrikus függvényt, amelynek ábrázolásánál az $x \mapsto \sin x$ ($D = \mathbb{R}$) alapfüggvényből kiindulva ugyanezeket a transzformációs lépéseket kell végrehajtani!

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2 \cdot 3^{x-1} - 2.$

Adjuk meg azt a másodfokú függvényt, amelynek ábrázolásánál az $x \mapsto x^2$ ($D = \mathbb{R}$) alapfüggvényből kiindulva ugyanezeket a transzformációs lépéseket kell végrehajtani!

16. Az f függvény ($D_f = \mathbb{R}$) grafikonját úgy kapjuk meg, hogy a g függvény ($D_g = \mathbb{R}$) képét a $\vec{e}(-2; -4)$ vektorral eltoltuk. Adjuk meg az f függvény hozzárendelési utasítását képlettel! Ábrázoljuk az f függvényt a $[-4; 0[$ intervallumon!

a) $g(x) = 2|x|;$ b) $g(x) = \frac{1}{3}|x|;$ c) $g(x) = x^2;$ d) $g(x) = \frac{1}{2}x^2.$

17. Határozzuk meg az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenség megoldásait!

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}, D_f = \mathbb{R};$

b) $f(x) = \frac{2}{3}|x+5| - 4, D_f =]-7; 4];$

c) $f(x) = -\log_3(x-2) + 1, D_f = \mathbb{R};$

d) $f(x) = 2 \cos x + 1, D_f = [-\pi; 2\pi].$

4. Elsőfokú egyenletre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre, egyenlőtlenségrendszerre vezető feladatok

A természettudományokban, a technikában, a gazdasági életben nagyon sok olyan problémával kerülünk szembe, amelyeknek a megoldásában jó eszköznek bizonyul a probléma egyenletre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre fordítása, a matematikai modell megalkotása.

Mielőtt az egyenletek megoldására rátérnénk, érdemes tisztázni, hogy nem létezik olyan módszer, amelynek alkalmazásával bármely egyenlet automatikusan megoldható lenne. Az alábbiakban néhány olyan gondolatot elevenítünk fel, amelyek ismerete a középiskolai tanulmányaink során „felbukkanó” problémák megoldásában segíthet.



1. példa Oldjuk meg grafikus módszerrel (4.1. ábra) a

$$4\sqrt{x+3} = \frac{1}{2}x^2 - x \text{ egyenletet!}$$

Megoldás:

Az egyenlet alaphalmaza $\mathbb{R}$. A négyzetgyökvonás definíciója miatt az $x+3 \geq 0$ feltételnek fenn kell állnia, így az egyenlet értelmezési tartománya a $[-3; \infty[$ intervallum. Ábrázoljuk az egyenlet jobb és bal oldalának megfelelő $f(x) = 4\sqrt{x+3}$ ($D_f = [-3; \infty[$) és $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}$ ($D_g = \mathbb{R}$) függvényeket derékszögű koordináta-rendszerben (4.2. ábra)!

A grafikonoknak két közös pontja van: $M_1(-2; 4)$ és $M_2(6; 12)$. A két függvény helyettesítési értéke $x = -2$ -nél és $x = 6$ -nál egyenlő, amelyről ellenőrzéssel meg is győződhetünk:

$$f(-2) = 4\sqrt{-2+3} = 4 \text{ és } g(-2) = \frac{1}{2}(-2-1)^2 - \frac{1}{2} = 4,$$

$$f(6) = 4\sqrt{6+3} = 12 \text{ és } g(6) = \frac{1}{2}(6-1)^2 - \frac{1}{2} = 12.$$

Innen az egyenlet megoldáshalmaza: $\{-2; 6\}$.



2. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{x-2012} + \sqrt{2011-x} = 2;$ b) $\sqrt{3-x} + (y+x-1)^{2020} = 0;$

c) $\sqrt[4]{x-7} = \sqrt{2} + \sqrt[4]{11-x}.$

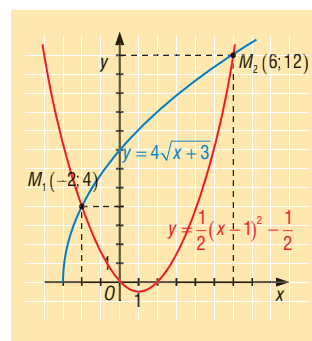
Megoldás:

a) Az egyenlet alaphalmaza $\mathbb{R}$. A négyzetgyökvonás definíciója miatt az $x-2012 \geq 0$ és a $2011-x \geq 0$ feltételeknek kell teljesülni, ahonnan

Az egyenlet megoldása grafikus úton.



4.1. ábra Módszer I.



4.2. ábra Az 1. példa megoldásához

Egyenlet megoldása értelmezési tartomány vizsgálatával.



4.3. ábra Módszer II.



Rendszerező összefoglalás

Egyenlet megoldása érték-
készlet vizsgálatával.

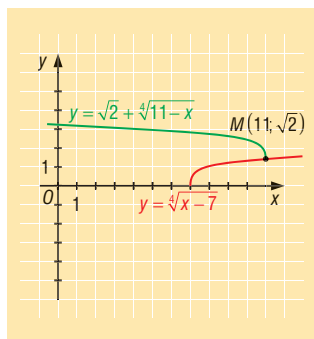


4.4. ábra Módszer III.

Egyenlet megoldása értelme-
zési tartomány és értékészlet
vizsgálatával.



4.5. ábra Módszer IV.



4.6. ábra A 2. c) példa megoldása
grafikus úton

Egyenlet megoldása szorzattá
alakítással.



4.7. ábra Módszer V.

$x \geq 2012$ és $x \leq 2011$ adódik, ezeknek a feltételeknek eleget tevő va-
lós szám nem létezik. Az egyenlet értelmezési tartománya tehát üres
halmaz, amelynek következtében az egyenlet megoldáshalmaza is üres
halmaz (4.3. ábra).

b) Ez egy kétismeretlenes egyenlet. A négyzetgyökvonás definíciója
miatt $3 - x \geq 0$, ahonnan $x \leq 3$ adódik, így az egyenlet értelmezési tar-
tományában végtelen sok $(x; y)$ számpár van. Vegyük észre, hogy az
egyenlet bal oldalán kijelölt műveletek (négyzetgyökvonás, páros kite-
vőjű hatványozás) nemnegatív számokat eredményeznek, érdemes tehát
megvizsgálnunk az egyenlet jobb és bal oldalának értékészletét. A bal
oldalon két nemnegatív szám összege áll, a jobb oldalon pedig 0. Mivel
nemnegatív számok összege akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha
a számok külön-külön 0-val egyenlők, ezért a bal oldal mindkét tagja
0, azaz

$$\begin{aligned} \sqrt{3-x} &= 0 \quad \text{és} \quad (y+x-1)^{2020} = 0; \\ 3-x &= 0 \quad \text{és} \quad y+x-1 = 0; \\ x &= 3 \quad \text{és} \quad y = -x+1. \end{aligned}$$

Innen az egyenlet megoldása: $x = 3, y = -2$ (4.4. ábra).

c) Az egyenlet alaphalmaza a páros gyökkitevőjű gyökvonás definíció-
ja miatt $x-7 \geq 0$ és $11-x \geq 0$, ahonnan az egyenlet értelmezési tarto-
mánya az $(1) \ 7 \leq x \leq 11$ számok halmaza. Vizsgáljuk meg a jobb és a
bal oldal értékészletét! A bal oldal értékészlete (1) miatt a $[0; \sqrt{2}]$,
a jobb oldalé pedig $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$, így az egyenlet csak akkor állhat fenn,
ha mindkét oldal $\sqrt{2}$ -vel egyenlő, azaz

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x-7} &= \sqrt{2} \quad \text{és} \quad \sqrt{2} + \sqrt[4]{11-x} = \sqrt{2}; \\ x &= 11 \quad \text{és} \quad x = 11. \end{aligned}$$

Az egyenlet megoldása $x = 11$ (4.5. és 4.6. ábrák).



3. példa Oldjuk meg a racionális számok halmazán az alábbi
egyenleteket!

a) $(x-2)^3 = 9x-18$

b) $\frac{x+3}{12} - \frac{5x-1}{7} = 2-x - \frac{8x+4}{21} + \frac{2x-1}{6}$

c) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} + \frac{x+4}{x^2+2x} = \frac{3}{x^2-2x}$

Megoldás:

a) Az egyenlet alaphalmaza, értelmezési tartománya a racionális számok
halmaza. Ha elvégeznénk a kijelölt műveleteket, akkor egy harmadfokú
egyenlethez jutnánk, amelynek megoldása általában meghaladja ismer-
reteinket. Az egyenlet bal oldalán egy szám köbe, jobb oldalán a szám
9-szerese áll, először emeljük ki a jobb oldalon a 9-et:

$$(1) \ (x-2)^3 = 9(x-2).$$

Az egyenlet mindkét oldalán olyan tag áll, amelynek egyik tényezője $(x-2)$, ilyenkor az összes tagot az egyenlet egyik oldalára rendezzük, az egyenlet másik oldalára ekkor 0 kerül, az egyenletet 0-ra rendezzük:

$$(2) \quad (x-2)^3 - 9(x-2) = 0.$$

A kapott egyenlet bal oldalán kiemeljük a közös tényezőt, az $(x-2)$ -t:

$$(3) \quad (x-2)[(x-2)^2 - 9] = 0.$$

A második tényező két négyzet különbsége, így a két tag négyzetének a különbségére vonatkozó azonosság alapján az $(x-2)^2 - 9 = ((x-2)-3)((x-2)+3) = (x-5)(x+1)$ (4.7. ábra).

Az egyenlet (4) $(x-2)(x-5)(x+1) = 0$ alakba írható. Most ott tartunk, hogy az egyenlet egyik oldalán egy szorzat, másik oldalán a 0 áll. Mivel egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért $x-2=0$ vagy $x-5=0$ vagy $x+1=0$. Az egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, így az egyenlet megoldáshalmaza $\{2; 5; -1\}$ (4.8. ábra).

b) Az egyenlet alaphalmaza és az értelmezési tartománya is a racionális számok halmaza. Mivel törtek helyett egész számokkal könnyebb dolgozni, ezért az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a nevezők legkisebb közös többszörösével, 84-gyel:

$$(1) \quad 7(x+3) - 12(5x-1) = 168 - 84x - 4(8x+4) + 14(2x-1).$$

Felbontjuk a zárójeleket:

$$(2) \quad 7x + 21 - 60x + 12 = 168 - 84x - 32x - 16 + 28x - 14.$$

Összevonjuk az egyenmű kifejezéseket mindkét oldalon:

$$(3) \quad -53x + 33 = -88x + 138.$$

Az egyenlet elsőfokú, ezért az ismeretlent az egyenlet egyik oldalára, a számokat az egyenlet másik oldalára rendezzük. Az egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk 88x-et:

$$(4) \quad 35x + 33 = 138 \quad / -33;$$

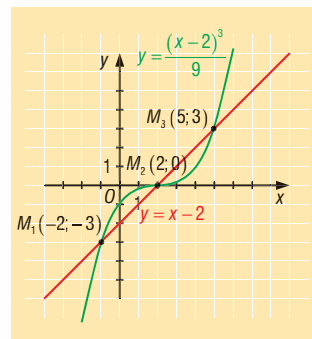
$$(5) \quad 35x = 105 \quad / :35;$$

$$(6) \quad x = 3.$$

Az egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, tehát az egyenlet megoldása $x = 3$.

c) Az egyenlet alaphalmaza $\mathbb{Q}$. A nevezők szorzattá alakítása után könnyen megállapíthatjuk az egyenlet értelmezési tartományát és az egyenletben szereplő törtek közös nevezőjét is. Az $x-2 \neq 0$, az $x^2-4 = (x-2)(x+2) \neq 0$, az $x^2-2x = x(x-2) \neq 0$ és az $x^2+2x = x(x+2) \neq 0$ feltételek miatt az egyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{Q} \setminus \{-2; 0; 2\}$, a közös nevező (a nevezők legkisebb közös többszörösé) pedig $x(x-2)(x+2)$. Hozzunk közös nevezőre, ügyeljünk a bővítésre:

$$(1) \quad \frac{2x}{x(x-2)(x+2)} - \frac{x(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{(x+4)(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{3(x+2)}{x(x-2)(x+2)}$$



4.8. ábra A 3. a) példa megoldása grafikus úton

Egyenletmegoldás a mérlegelv alkalmazásával.



4.9. ábra Módszer VI.



4.10. ábra Mérleg



Rendszerező összefoglalás



4.11. ábra Ellenőrzés

Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg az $x(x-2)(x+2)$ kifejezéssel: (2) $2x - x(x+2) + (x+4)(x-2) = 3(x+2)$.

Bontsuk fel a zárójeleket: (3) $2x - x^2 - 2x + x^2 + 4x - 2x - 8 = 3x + 6$.

Vonjuk össze az egymemű tagokat: (4) $2x - 8 = 3x + 6$. Rendezzük az egyenletet:

$$(4) \quad 2x - 8 = 3x + 6 \quad / -2x;$$

$$(5) \quad -8 = x + 6 \quad / -6;$$

$$(6) \quad x = -14.$$

Az $x = -14$ megoldása az eredeti egyenletnek, erről ellenőrzéssel meggyőződhetünk. $\left(\text{Bal oldal: } \frac{1}{96} + \frac{1}{16} - \frac{5}{84} = \frac{3}{224}; \text{ jobb oldal: } \frac{3}{224} \right)$



4. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2\sqrt[3]{5x+1} + 3 = 0;$

b) $\sqrt{2x-7} - \sqrt{x+21} = 0;$

c) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 2x - 1;$

d) $|x+3| + |x-7| = 10.$

Megoldás:

a) A gyökös egyenletek megoldásánál arra törekszünk, hogy kiküszöböljük a gyököt. Ez általában hatványozással történik.

A páratlan kitevőjű gyökvonás definíciója alapján az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Az egyenlet köbre emelése előtt rendezzük át az egyenletet úgy, hogy a bal oldalon csak a köbgyökös kifejezés szerepeljen: $2\sqrt[3]{5x+1} = -3$! Köbre emelés után a $8(5x+1) = -27$ egyenletet kapjuk, ahonnan rendezés után $x = -\frac{7}{8}$ adódik. Ez megoldása az egyenletnek, melyről ellenőrzéssel meggyőződhetünk.

b) A négyzetgyökvonás definíciója miatt a $2x-7 \geq 0$ és az $x+21 \geq 0$ feltételeknek kell teljesülniük, így az egyenlet értelmezési tartománya a $[3, 5; \infty[$ intervallum. Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy a jobb és a bal oldalon egy-egy négyzetgyökös kifejezés szerepeljen: $\sqrt{2x-7} = \sqrt{x+21}$! A négyzetgyökvonás definíciója értelmében az egyenlet mindkét oldalán nemnegatív szám áll, ezért a négyzetre emelés a $[3, 5; \infty[$ intervallumon ekvivalens átalakítás lesz. Most emeljük négyzetre! Ekkor a $2x-7 = x+21$ egyenlethez jutunk, innen rendezés után $x = 28$ -at kapjuk. Mivel az átalakítások ekvivalensek voltak és $28 \in [3, 5; \infty[$, ezért az $x = 28$ az eredeti egyenlet megoldása.

c) Az egyenlet alaphalmaza a $\mathbb{R}$, értelmezési tartománya pedig mindazon valós számok halmaza, amelyekre a négyzetgyökvonás definíciója miatt az $x^2 - 10x + 25 \geq 0$ feltétel teljesül. Az $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$,



4.12. ábra Átrendezés

ezért az $x^2 - 10x + 25 \geq 0$ feltétel bármely valós szám esetén fennáll, tehát az egyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. Továbbá az egyenlet bal oldalán a négyzetgyökvonás elvégezhető, így az $|x-5| = 2x-1$ egyenlethez jutunk, amely az eredeti egyenlettel ekvivalens. Az abszolút érték definíciója alapján:

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{ha } x-5 \geq 0, \text{ azaz } x \geq 5; \\ -x+5, & \text{ha } x-5 < 0, \text{ azaz } x < 5. \end{cases}$$

A feladat megoldását két esetre kell bontanunk, egyik esetben az egyenlet megoldását az 5-nél nem kisebb valós számok között, a másik esetben az 5-nél kisebb valós számok között keressük.

I. eset: ha $x \geq 5$, akkor az egyenlet (1) $x-5 = 2x-1$ alakban írható fel. Az egyenlet megoldására $x = -4$ adódik, ami nem tesz eleget az $x \geq 5$ feltételnek, ezért az eredeti egyenletnek nem megoldása.

II. eset: ha $x < 5$, akkor az egyenlet (1) $-x+5 = 2x-1$ alakban írható fel. Az egyenlet megoldására $x = 2$ adódik, ami eleget tesz az $x < 5$ feltételnek, a vizsgált tartományba esik. Mivel az (1) alatti egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az $x = 2$ az eredeti egyenletnek is megoldása (4.13. ábra).

Az I. és II. eset miatt az eredeti egyenlet megoldása az $x = 2$.

d) Az egyenlet alaphalmaza és értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. A felírt egyenlet két abszolút értékes kifejezést is tartalmaz, a definíció szerint:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{ha } x+3 \geq 0, \text{ azaz } x \geq -3 \\ -x-3, & \text{ha } x+3 < 0, \text{ azaz } x < -3 \end{cases}$$

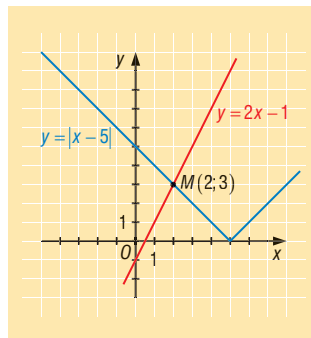
$$|x-7| = \begin{cases} x-7, & \text{ha } x-7 \geq 0, \text{ azaz } x \geq 7 \\ -x+7, & \text{ha } x-7 < 0, \text{ azaz } x < 7 \end{cases}$$

Az $x+3$ kifejezés az $x = -3$ -nál, az $x-7$ kifejezés az $x = 7$ -nél vált előjelet. Ezért az egyenletet az $x = -3$ és az $x = 7$ által meghatározott három intervallumon (I. $x < -3$, az II. $-3 \leq x < 7$ és az III. $x \geq 7$) kell vizsgálnunk (4.14. ábra).

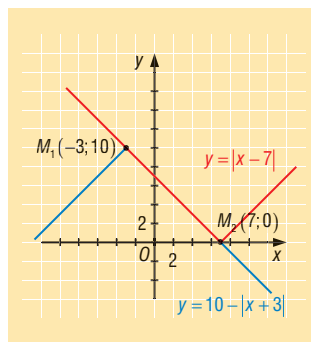
I. Ha $x < -3$, akkor $-x-3-x+7=10$; $-2x+4=10$; $x=-3$.	II. Ha $-3 \leq x < 7$, akkor $x+3-x+7=10$; $0=0$.	III. Ha $x \geq 7$, akkor $x+3+x-7=10$; $2x-4=10$; $x=7$.
Az $x = -3$ nem esik a vizsgált tartományba.	Azonosságot kaptunk, amelynek megoldáshalmaza egyenlő a vizsgált intervallummal: $[-3; 7[$.	Az $x = 7$ a vizsgált tartományba esik.

4.15. ábra Az egyes esetek

Mivel az egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a táblázat alapján az eredeti egyenlet megoldáshalmaza: $[-3; 7]$.



4.13. ábra A 4. c) példa megoldása grafikus úton



4.14. ábra A 4. d) példa megoldása grafikus úton



Rendszerező összefoglalás



4.16. ábra Cipődiszkont



5. példa Egy cipődiszkontban az egyik márkájú női cipőből már csak 40 darab azonos fazonú, azonos méretű cipő maradt. A maradék cipők 40%-a apró hibával rendelkezik. A hibátlan cipők eredeti ára darabonként 17 000 Ft, a hibás cipőké 12 000 Ft volt. Egy viszonteladó megvásárolta a maradék cipők felét, egységesen 15 000 Ft-os darabonkénti áron. A kereskedő a vásárolt cipőket egyenlő valószínűséggel választja ki a maradék cipők közül. Legfeljebb hány hibás cipőt vásárolt, ha kevesebbet fizetett, mintha a cipőket az eredeti áron vette volna meg?

Megoldás:

A feladat szövege szerint a maradék cipők között $0,4 \cdot 40 = 16$ darab hibás, $40 - 16 = 24$ darab hibátlan cipő van. A viszonteladó $\frac{40}{2} = 20$ darab cipőt vásárolt, összesen $20 \cdot 15\,000 = 300\,000$ forint értékben. Jelöljük x -szel a vásárolt hibás cipők számát! A feladat feltételei alapján $0 \leq x \leq 16$ és $x \in \mathbb{Z}$. Mivel a kereskedő kevesebbet fizetett, mintha a cipőket az eredeti áron vette volna meg, ezért a $300\,000 < 12\,000x + 17\,000(20 - x)$ egyenlőtlenség áll fenn. A zárójel felbontása és az egyenlő tagok összevonása után a $300\,000 < -5\,000x + 340\,000$ egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan $x < 8$ adódik. Tehát a kereskedő legfeljebb 7 hibás cipőt vásárolt.



6. példa Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} \leq 5$; b) $|x - 4| \leq \frac{1}{3}x$.

Megoldás:

a) Vegyük észre, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán a négyzetgyökvonás elvégezhető, így az $|2x - 3| \leq 5$ egyenlőtlenséghez jutunk, amely az eredeti egyenlőtlenséggel ekvivalens. Innen könnyen adódik, hogy az egyenlőtlenség értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. A $|2x - 3| \leq 5$ egyenlőtlenség megoldásakor keressük azokat a valós számokat, amelyek abszolút értéke egyenlő 5-tel vagy kisebb 5-nél. Ez akkor teljesül, ha a szám -5 vagy annál nagyobb, és 5 vagy annál kisebb, azaz

$$-5 \leq 2x - 3 \leq 5 \quad / +3$$

$$-2 \leq 2x \leq 8 \quad / :2$$

$$-1 \leq x \leq 4$$

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $[-1; 4]$.

b) 1. megoldás:

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget algebrai úton!

Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. Az abszolút érték definíciója alapján az $|x - 4| = \begin{cases} x - 4, & \text{ha } x - 4 \geq 0, \text{ azaz } x \geq 4 \\ -x + 4, & \text{ha } x - 4 < 0, \text{ azaz } x < 4. \end{cases}$

Egyismeretlenes egyenlőtlenségek grafikus megoldása.



4.17. ábra Módszer VII.

A megoldást két esetre kell bontanunk, az egyik esetben az egyenlőtlenség megoldását a 4-nél nem kisebb valós számok között, a másik esetben a 4-nél kisebb valós számok között keressük.

I. eset: ha $x \geq 4$, akkor az egyenlőtlenség $x - 4 \leq \frac{1}{3}x$ alakban írható fel, ahonnan az $x \leq 6$ adódik, amelyet összevetve az $x \geq 4$ feltétellel (4.18. ábra) az egyenlőtlenség megoldáshalmazát kapjuk: $[4; 6]$.

II. eset: ha $x < 4$, akkor az egyenlőtlenség $-x + 4 \leq \frac{1}{3}x$ alakban írható fel, ahonnan az $x \geq 3$ adódik, amelyet összevetve az $x < 4$ feltétellel (4.19. ábra) az egyenlőtlenség megoldáshalmazát kapjuk: $[3; 4[$. Az I. és a II. eseteket összegezve az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $[3; 6]$.

2. megoldás:

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget grafikus úton is (4.17. ábra)! Az egyenlőtlenség bal oldalának megfelelő függvény:

$$f(x) = |x - 4| \quad (D_f = \mathbb{R}),$$

jobb oldalának megfelelő függvény:

$$g(x) = \frac{1}{3}x \quad (D_g = \mathbb{R}).$$

Ábrázoljuk a függvények grafikonjait közös koordináta-rendszerben!

A 4.20. ábráról leolvashatjuk a grafikonok közös pontjait.

A közös pontok meghatározásának pontosságáról ellenőrzéssel is meggyőződhetünk. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $[3; 6]$.



7. példa Ha egy téglalap alakú nézőtér sorainak számát 4-gyel csökkentenénk, és a soronként elhelyezett székek számát 2-vel növelnénk, akkor a férőhelyek száma 32-vel csökkenne. Ha a sorok számát 6-tal növelnénk, és az egy sorban levő székek számát 2-vel csökkentenénk, akkor a férőhelyek száma 48-cal növekedne. Hány szék van egy sorban? Hány sorból áll a nézőtér? Hány férőhely van a nézőtérben?

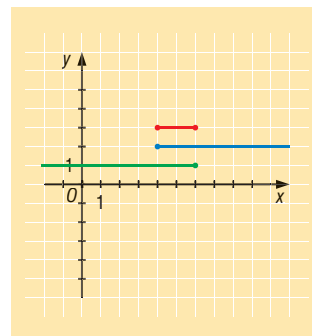
Megoldás:

Jelöljük az egy sorban levő székek számát x -szel, a sorok számát pedig y -nal, ahol $x \in \mathbb{Z}^+$, $y \in \mathbb{Z}^+$. A feladat szövege szerint:

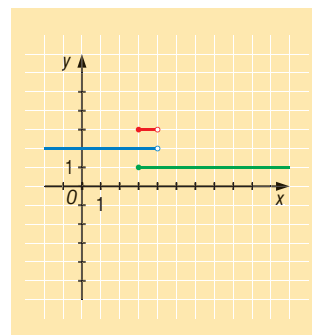
$$\begin{cases} (y - 4)(x + 2) = yx - 32 \\ (y + 6)(x - 2) = yx + 48 \end{cases}$$

egyenletrendszert írhatjuk fel. Végezzük el a kijelölt műveleteket:

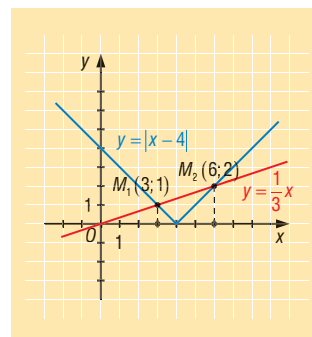
$$\begin{cases} yx - 4x + 2y - 8 = yx - 32 \\ yx + 6x - 2y - 12 = yx + 48 \end{cases}$$



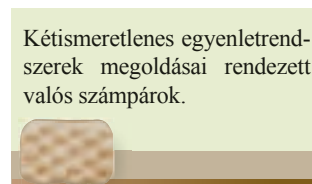
4.18. ábra A 6. b) példa 1. megoldásának I. esetéhez



4.19. ábra A 6. b) példa 1. megoldásának II. esetéhez



4.20. ábra A 6. b) példa megoldása grafikus úton



4.21. ábra Módszer VIII.

Kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldásai rendezett valós számpárok.

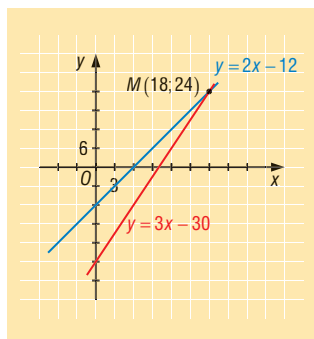


Rendszerező összefoglalás

Lineáris egyenletrendszer megoldása grafikus úton.



4.22. ábra Módszer IX.



4.23. ábra A 7. példa 1. megoldásához

Egyenlő együtthatók módszere



4.24. ábra Módszer X.

Behelyettesítő módszer



4.25. ábra Módszer XI.

$$\text{Rendezés után } \begin{cases} -4x + 2y = -24 \\ 6x - 2y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow (1) \begin{cases} -2x + y = -12 \\ 3x - y = 30 \end{cases}$$

elsőfokú (vagy lineáris) kétismeretlenes egyenletrendszert kapjuk. Az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszereket többféleképpen megoldhatjuk:

- grafikus úton,
- a behelyettesítő módszerrel,
- az egyenlő együtthatók módszerével.

1. megoldás:

Oldjuk meg grafikus úton (4.21. ábra) az (1) alatti egyenletrendszert! Mindkét egyenletből kifejezzük az y -t:

$$\begin{cases} y = 2x - 12 \\ y = 3x - 30 \end{cases}, \text{ majd ábrázoljuk az egyenletek által meghatározott}$$

egyeneseket (4.23. ábra). A két egyenesnek egy közös pontja van: az $M(18; 24)$, ahonnan $x = 18$, $y = 24$.

$$\text{Ellenőrzés: } \begin{cases} y = 2 \cdot 18 - 12 = 24 \\ y = 3 \cdot 18 - 30 = 24 \end{cases} \Rightarrow \text{a közös pont valóban } M(18; 24),$$

és a $20 \cdot 20 = 24 \cdot 18 - 32$, $30 \cdot 16 = 24 \cdot 18 + 48$ egyenlőségek is teljesülnek. Tehát egy sorban 18 szék van, 24 sorból áll a nézőtér, és a férőhelyek száma: $18 \cdot 24 = 432$.

2. megoldás:

Oldjuk meg a behelyettesítő módszerrel (4.25. ábra) az (1) alatti egyenletrendszert!

Fejezzük ki az y -t az első egyenletből:

$$(1) \begin{cases} -2x + y = -12 \\ 3x - y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x - 12.$$

Helyettesítsük be a második egyenletbe: $3x - (2x - 12) = 30$, innen $x = 18$ adódik, ahonnan $y = 2 \cdot 18 - 12 = 24$ -et kapjuk.

Számítással ellenőrizhető, hogy egy sorban 18 szék van, 24 sorból áll a nézőtér, és a férőhelyek száma 432.

Ez a megoldásmenet számtalan más problémára is jó, nem csak lineáris egyenletrendszer megoldásakor alkalmazható.

3. megoldás:

Oldjuk meg az egyenlő együtthatók (4.24. ábra) módszerével az (1) alatti egyenletrendszert! Vegyük észre, hogy az y együtthatói egymás ellentettjei! A két egyenlet összeadásakor az y -os tagok összege nulla: $-2x + y + 3x - y = -12 + 30$, innen $x = 18$ adódik.

Ahhoz, hogy az egyenletrendszerben az x együtthatói egymás ellentettjei legyenek, szorozzuk meg az első egyenletet 3-mal, a második egyenletet pedig 2-vel, így az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} -6x + 3y = -36 \\ 6x - 2y = 60 \end{cases}, \text{ a két egyenletet összeadva } y = 24\text{-et kapjuk.}$$

A kapott számpár megoldása a feladatnak, erről ellenőrzéssel meggyőződhetünk. Tehát egy sorban 18 szék van, 24 sorból áll a nézőtér, és a férőhelyek száma: $18 \cdot 24 = 432$.



8. példa Mely valós x számok esetén nem értelmezhető a

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$$
 kifejezés?

1. megoldás:

A négyzetgyökvonás definíciója miatt a kifejezés nem értelmezhető azon x -ekre, amelyekre az $\frac{2x-1}{x+2} < 0$ egyenlőtlenség teljesül. Egy tört akkor és csakis akkor negatív, ha a számlálója és a nevezője különböző előjelű. Tehát két esetet kell megvizsgálnunk:

I. $2x-1 < 0$ és $x+2 > 0$ vagy II. $2x-1 > 0$ és $x+2 < 0$. Az egyenlőtlenségünk két-két újabb egyenlőtlenséghez, két ún. egyenlőtlenség-rendszerhez (I., II.) vezetett.

Az egyenlőtlenség-rendszereket külön-külön megoldjuk:

$$\text{I. } 2x-1 < 0 \quad /+1 \quad \text{és} \quad x+2 > 0 \quad /-2;$$

$$2x < 1 \quad \text{és} \quad x > -2;$$

$$x < \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad x > -2;$$

$$\text{I. megoldása: } -2 < x < \frac{1}{2};$$

vagy

$$\text{II. } 2x-1 > 0 \quad /+1 \quad \text{és} \quad x+2 < 0 \quad /-2;$$

$$2x > 1 \quad \text{és} \quad x < -2;$$

$$x > \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad x < -2;$$

$$\text{II. megoldása: } \emptyset.$$

Az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza az egyenlőtlenség-rendszerek megoldáshalmazainak uniója, így a kifejezés $\left]-2; \frac{1}{2}\right[$ intervallumon nem értelmezhető.

2. megoldás:

A $\frac{2x-1}{x+2} < 0$ egyenlőtlenség megoldásában sokat segít egy előjeltáblázat

készítése. A $2x-1$ kifejezés $x = \frac{1}{2}$ -nél, az $x+2$ kifejezés $x = -2$ -nél vált előjelet.

Mivel ugyanazon x érték mellett kell a számláló és a nevező előjelét ismernünk a tört előjelének megállapításához, ezért egy előjeltáblázatban célszerű összefoglalni a számláló és a nevező előjelét (4.28. ábra).

A táblázat utolsó sora alapján a tört negatív előjelű, ha $x \in \left]-2; \frac{1}{2}\right[$, tehát a feladat megoldása: $\left]-2; \frac{1}{2}\right[$.

Egy tört vagy egy szorzat akkor és csak akkor pozitív (negatív), ha benne páros (páratlan) negatív tényező van.



4.26. ábra Egy tört vagy szorzat előjele



4.27. ábra Egyenlőtlenség

x	$2x-1$ elő- jele	$x+2$ elő- jele	A tört elője- le
$x \in]-\infty; -2[$	—	—	+
$x = -2$	—	0	Nem értelmezt.
$x \in \left]-2; \frac{1}{2}\right[$	—	+	—
$x = \frac{1}{2}$	0	+	0
$x \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right[$	+	+	+

4.28. ábra Előjeltáblázat



4.29. ábra Előjelek



Rendszerező összefoglalás



Oldjuk meg!

- Fordítsuk át az alábbi problémákat egyenletekre, majd grafikus módszerrel oldjuk is meg a felírt egyenleteket!
 - Melyek azok a valós számok, amelyek hattal kisebbek a négyzetüknél?
 - Melyek azok az egész számok, amelyeknek a negyedénél eggyel nagyobb szám egyenlő a szám abszolút értékénél kettővel kisebb számmal?
 - Melyek azok a valós számok, amelyeknek négyzetének az ellentettje a szám reciprokanak abszolút értékével egyenlő?
 - Melyek azok a racionális számok, amelyek ellentettjének négyzetgyöke egyenlő a számnál kettővel nagyobb számmal?
- Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!
 - $4x - \frac{1}{6} \left\{ \frac{5}{3}x - \frac{3}{2}(x-10) + 5 \right\} = \frac{4}{3} \left[\frac{1}{12}(x+36) - 5 \right];$
 - $(x+3)^2 - (x+1)(x-2) = (x+4)(2x-1) - 2(x-5)(x+5);$
 - $3x - \frac{7(x-5)}{24} + \frac{13-5x}{18} = \frac{(x-1)2}{3} - \frac{5-6x}{12} + \frac{1}{2};$
 - $\frac{x^2-12x+36}{6x-24} \cdot \frac{3x-12}{x^2-36} = \frac{1}{2};$
 - $\frac{2}{z^2-9} - \frac{1}{z-3} + \frac{z-4}{z^2+3z} = \frac{3}{z^2-3z};$
 - $\frac{3}{4z} + \frac{5z+2}{3z^2} - \frac{7}{6z} = \frac{5}{8z^2};$
 - $3x-2\{x-3(x-1)+1\} \leq 5[3(x-8)-2];$
 - $\frac{x-3}{12} + \frac{x+5}{20} - x > \frac{x-4}{6} - \frac{6-5x}{5}.$
- Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!
 - $\sqrt{6-x} = \sqrt{x-6};$
 - $|x+5| = -\left(y + \frac{3}{5}x - 3\right)^{18};$
 - $\sqrt{x-3} - \sqrt{4-x} = 1;$
 - $x^6 - 2x^3 + 2 = -z + 4\sqrt{z} - 3.$
- Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket!
 - $|x-13| = 14;$
 - $\left|\frac{3}{2}x+5\right| - \frac{7}{2} = 0;$
 - $|2x-1| < 3;$
 - $|5-x| + 12 = 0;$
 - $|6-7x| - 6 = -x;$
 - $\left|\frac{2}{3}x+1\right| \geq 8;$
 - $\sqrt{x^2+2x+1} \geq 3-x;$
 - $|3x+4| > x+5.$
- Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!
 - $\frac{2+x}{x-5} > 0;$
 - $\frac{4-3x}{x+6} \geq 0;$
 - $(5x-3)(3x+7) < 0;$
 - $\frac{3x+7}{x-1} \leq 2;$
 - $\frac{x-6}{x+1} > \frac{1}{3}.$
- Egy kereskedő 1000 darab cipőt vett 50 000 euróért. A cipők egy részét 12%-os haszonnal, másik részét 6%-os veszteséggel adta el, így 2400 euro haszonra tett szert. Hány cipőt adott el nyereséggel és hányat veszteséggel?

7. Hány liter 20%-os és hány liter 36%-os töménységű sósavat keverjünk össze ahhoz, hogy
- 40 liter 28%-os töménységű sóoldatot kapjunk?
 - 32 liter 25%-os töménységű sóoldatot kapjunk?
8. Egy négyszög három belső szögének aránya 3 : 4 : 5. Mekkora a belső szögei, ha a négyszög
- deltoid; b) trapéz?
9. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket ($x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Q}$)!
- $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} 7x - y = -8 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} 3x - 4y = 14 \\ 7x + 5y = -39 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} -2x + \frac{3}{2}y = 14\frac{1}{2} \\ 5x + y = 60 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} x - \frac{5y-2}{6} = 7 \\ \frac{9y-8}{4} - \frac{7(x+12)}{6} = -11 \end{cases}$.

5. Másodfokú egyenletre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre vezető feladatok



1. példa Az ABC derékszögű háromszög befogói: $BC = 30$ cm, $AC = 18$ cm. A BC oldalnak melyik P pontjára teljesül, hogy a B -től és A -tól vett távolságainak aránya 1 : 5?

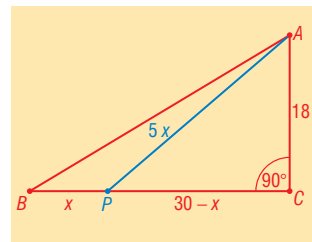
Megoldás:

Legyen $BP = x$, ekkor a feladat feltétele alapján $AP = 5x$, ahol $x > 0$! Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével (5.1. ábra)!

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt a PCA derékszögű háromszögre: $(30 - x)^2 + 18^2 = (5x)^2$. A műveletek elvégzése után az $x^2 - 60x + 1224 = 25x^2$ másodfokú egyenletet kapjuk. Az egyenletet 0-ra rendezzük: $24x^2 + 60x - 1224 = 0$, majd az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk 12-vel: $2x^2 + 5x - 102 = 0$. Az egyenlet diszkriminánsa: $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-102) = 841$, a megoldóképlet (5.2. ábra) alapján:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{841}}{4} = \frac{-5 \pm 29}{4}. \text{ Az } x > 0 \text{ feltétel miatt } x = 6. \text{ Tehát a } BC$$

oldal azon P pontjára teljesül, hogy a B -től és az A -tól vett távolságainak aránya 1 : 5, amely a C ponttól 24 cm, a B ponttól 6 cm távolságban van.



5.1. ábra Az 1. példa megoldásához

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0; \quad a, b, c \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0; \\ D &= b^2 - 4ac \geq 0; \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$



5.2. ábra A másodfokú egyenlet megoldóképlete



2. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

$$\text{a) } x^4 - 2x^2 - 63 = 0; \quad \text{b) } \sqrt{3x-8} + 2 = x.$$



Rendszerező összefoglalás

Az $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ ($a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$) alakú egyenlet $y = x^n$ helyettesítéssel visszavezethető másodfokú egyenletre.



5.3. ábra Magasabb fokú egyenlet

Az $ax^2 + bx + c = 0$, ahol az adott $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, másodfokú egyenletnek

- ★ két valós megoldása van, ha a diszkriminánsa pozitív, azaz $D = b^2 - 4ac > 0$;
- ★ egy valós megoldása vagy két egyenlő valós megoldása van, ha a diszkriminánsa nulla, azaz $D = b^2 - 4ac = 0$;
- ★ nincs valós megoldása, ha a diszkriminánsa negatív, azaz $D = b^2 - 4ac < 0$.



130 5.4. ábra Megoldások száma

Megoldás:

a) Az első egyenlet egy hiányos negyedfokú egyenlet (nem tartalmaz harmadfokú és elsőfokú tagot) (5.3. ábra). Mivel $x^4 = (x^2)^2$, ezért azt mondjuk, hogy az egyenlet x^2 -re nézve másodfokú. Célszerű az x^2 helyett egy új ismeretlent bevezetni, legyen $y = x^2$! Így az $y^2 - 2y - 63 = 0$ egyenletből kell meghatároznunk y értékét, amelyből kiszámolhatjuk x -et. Az egyenlet diszkriminánsa $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-63) = 4 + 252 = 256$. Így $y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{2 \pm 16}{2} \Rightarrow y_1 = 9$ és $y_2 = -7$. Ebből $x^2 = 9 \Rightarrow |x| = 3$, azaz $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Az $x^2 = -7$ egyenlet ellentmond a bármely valós számra fennálló $x^2 \geq 0$ egyenlőtlenségnek, az $x^2 = -7$ egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán. Az egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat végeztünk, így az egyenlet megoldásai: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

b) A négyzetgyökvonás definíciója miatt a $3x - 8 \geq 0$ feltételnek kell teljesülni, így az egyenlet értelmezési tartománya $\left[\frac{8}{3}; \infty\right]$ intervallum. Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy a jobb oldalon egy négyzetgyökös kifejezés szerepeljen: $\sqrt{3x - 8} = x - 2$! A négyzetgyökvonás definíciója értelmében az egyenlet bal oldalán nemnegatív szám áll, az $x \in \left[\frac{8}{3}; \infty\right]$ feltétel miatt $x - 2 \geq 0$ egyenlőtlenség is teljesül. Így a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás lesz a $\left[\frac{8}{3}; \infty\right]$ intervallumon. Most emeljük négyzetre az egyenlet két oldalát! Ekkor a $3x - 8 = x^2 - 4x + 4$ egyenlethez jutunk, innen rendezés után $x^2 - 7x + 12 = 0$. Az egyenlet diszkriminánsa $D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1$. Ebből $x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}$, ahonnan $x_1 = 4$, $x_2 = 3$. Mivel az átalakítások ekvivalensek voltak és $x_1, x_2 \in \left[\frac{8}{3}; \infty\right]$, ezért az $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ az eredeti egyenletnek is megoldása.

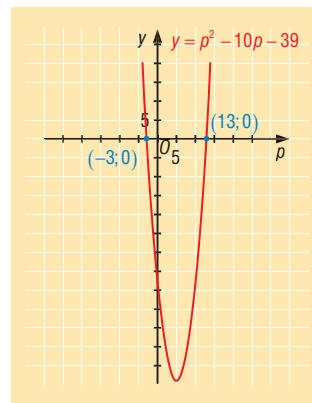


3. példa Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy a $2x^2 + (p-1)x + p+5 = 0$ másodfokú egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke legyen!

Megoldás:

Egy másodfokú egyenletnek pontosan akkor van legfeljebb egy valós gyöke, ha a diszkrimináns nempozitív (5.4. ábra), azaz $D = b^2 - 4ac \leq 0$. Az egyenletben szereplő együtthatók $a = 2$, $b = p - 1$ és $c = p + 5$. Így $D = (p - 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (p + 5) \leq 0$, azaz

$D = p^2 - 10p - 39 \leq 0$. Vázoljuk fel a valós számok halmazán értelmezett $f(p) = p^2 - 10p - 39$ függvény grafikonját (5.5. ábra)! Ekkor az egyenlőtlenség megoldásakor keressük azokat a p értékeket, amelyekhez tartozó helyettesítési értékek nempozitívak. Emiatt a parabola felvázolásához elegendő meghatározni azt, hogy milyen irányban nyílik, és mik a zérushelyei. Az $a > 0$ miatt az f függvény képe pozitív irányba nyíló parabola. A függvény zérushelyeinek meghatározásához oldjuk meg a $p^2 - 10p - 39 = 0$ egyenletet! Az egyenlet megoldásai $p_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{10 \pm 16}{2}$, innen az f függvény zérushelyei: $p_1 = 13$ és $p_2 = -3$ (5.6. ábra). A $D = p^2 - 10p - 39 \leq 0$ egyenlőtlenség a $-3 \leq p \leq 13$ számokra teljesül. Tehát a megoldáshalmaz: $[-3; 13]$.



5.5. ábra A 3. példa megoldásához



4. példa

Egyszerűsítsük az $\frac{x^2 - 5x - 6}{3x^2 + 4x + 1}$ algebrai törtet!

Megoldás:

Először határozzuk meg a tört értelmezési tartományát! Mivel a nevező nem lehet 0, ezért számítsuk ki a nevező gyökeit, azaz oldjuk meg a $3x^2 + 4x + 1 = 0$ egyenletet! A $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$, így $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6}$, tehát $x_1 = -1$ és $x_2 = -\frac{1}{3}$. Az értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}, -1 \right\}$.

Ahhoz, hogy az algebrai tört egyszerűsíteni tudjuk, szorzattá kell alakítani a számlálóját és a nevezőjét is. Használjuk fel a gyöktényezős alakot (5.7. ábra)! Mivel a nevező gyökei -1 , illetve $-\frac{1}{3}$, így

$3x^2 + 4x + 1 = 3(x+1)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x+1)(3x+1)$. Határozzuk meg a számláló gyökeit! Ehhez megoldjuk az $x^2 - 5x - 6 = 0$ másodfokú egyenletet. A $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 49$, innen $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$, tehát $x_1 = -1$ és $x_2 = 6$. A számláló szorzatalakja $x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6)$.

Tehát $\frac{x^2 - 5x - 6}{3x^2 + 4x + 1} = \frac{(x+1)(x-6)}{(x+1)(3x+1)} = \frac{x-6}{3x+1}$.



5. példa

Adjunk meg egy olyan másodfokú polinomot, amelynek gyökei -6 és $\frac{3}{2}$!

Az algebrai és a grafikus megoldási módok együttes alkalmazása.



5.6. ábra Módszer I.

Ha $a > 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$ és az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet valós megoldásai x_1 , x_2 , akkor $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$.



5.7. ábra Gyöktényezős alak



Rendszerező összefoglalás

Ha $a > 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$ és az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet valós megoldásai x_1, x_2 , akkor az $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

5.8. ábra Viète-formulák



5.9. ábra François Viète (1540–1603)

1. megoldás:

Használjuk a másodfokú polinom gyöktényezős alakját! Legyen $a = 1$!

Mivel $x_1 = -6$ és $x_2 = \frac{3}{2}$, így $(x+6)\left(x-\frac{3}{2}\right) = x^2 + 6x - \frac{3}{2}x - 9 = x^2 + \frac{9}{2}x - 9$. Tehát a keresett polinom $p(x) = x^2 + \frac{9}{2}x - 9$.

2. megoldás:

Használjuk a másodfokú polinomra felírt Viète-formulákat (5.8. ábra)!

Legyen $a = 1$! Ekkor az $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, és az $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ alapján $-b = (-6) + \frac{3}{2}$ és $c = (-6) \cdot \frac{3}{2}$, így $b = \frac{9}{2}$ és $c = -9$. Tehát a keresett polinom: $p(x) = x^2 + \frac{9}{2}x - 9$.



6. példa Egy kétjegyű szám 27-tel nagyobb annál a számnál, melyet úgy kapunk, hogy a számjegyeit felcseréljük, és $\frac{16}{9}$ -szer akkora, mint a számjegyeinek a szorzata. Melyik ez a szám?

Megoldás:

Legyen $\overline{xy}$ a keresett kétjegyű szám! Értéke: $\overline{xy} = 10x + y$. A számjegyek felcserélésével kapott szám értéke: $\overline{yx} = 10y + x$, ahol az x és az y egyjegyű pozitív egészek. Felírható a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 10x + y = 10y + x + 27; \\ 10x + y = \frac{16}{9}xy. \end{cases}$$

Az első egyenletből rendezéssel adódik: $x - y = 3$, azaz $x = y + 3$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$10(y+3) + y = \frac{16}{9}(y+3)y.$$

Rendezés után az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$16y^2 - 51y - 270 = 0.$$

Az egyenlet diszkriminánsa $D = (-51)^2 - 4 \cdot 16 \cdot (-270) = 19881$, in-

nen $y_{1,2} = \frac{51 \pm \sqrt{19881}}{32} = \frac{51 \pm 141}{32}$, az egyenlet gyökei: $y_1 = -\frac{45}{16}$ és

$y_2 = 6$, amelyek közül nyilván csak az y_2 felel meg a feladat feltételeinek (y egyjegyű pozitív egész). Így $x = y + 3 = 9$, ahonnan $\overline{xy} = 96$.

Ellenőrzés: a 96 a 69-nél 27-tel nagyobb és $\frac{16}{9}$ -szer akkora, mint a számjegyeinek a szorzata: $96 = \frac{16}{9} \cdot 9 \cdot 6$. Tehát a keresett szám a 96.



7. példa Mely egész x -ek esetén értelmezhető a $\log_{\pi}(x^2 + 5x - 24) - \sqrt[4]{-x^2 + 4x + 5}$ kifejezés?

Megoldás:

A feladat feltétele, a logaritmus és a páros gyökkitevőjű gyökvonás definíciója miatt a kifejezés azon egész x -ekre értelmezhető, amelyekre az $x^2 + 5x - 24 > 0$ és $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$ egyenlőtlenség-rendszer fennáll. Keressük meg az $x^2 + 5x - 24$ és a $-x^2 + 4x + 5$ másodfokú polinomok zérushelyeit!

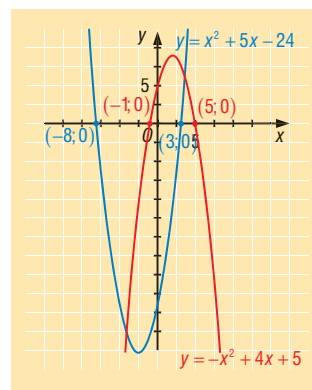
Az $x^2 + 5x - 24$ diszkriminánsa: $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 121$. Ez alapján a zérushelyei: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-5 \pm 11}{2}$, azaz $x_1 = 3$ és $x_2 = -8$.

Mivel a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 + 5x - 24$ függvény képe felfelé nyíló parabola, ezért a függvény helyettesítési értéke a két zérushely között negatív, azon kívül pozitív.

A $-x^2 + 4x + 5$ diszkriminánsa: $D = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5 = 36$. Ez alapján a zérushelyei: $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{-4 \pm 6}{-2}$, azaz $x_1 = 5$ és $x_2 = -1$. Mivel

a valós számok halmazán értelmezett $g(x) = -x^2 + 4x + 5$ függvény képe negatív irányba nyíló parabola, ezért a függvény helyettesítési értéke a két zérushely között pozitív, azon kívül negatív (5.10. ábra).

A fentiek alapján készítsuk el az előjeltáblázatot!



5.10. ábra A 7. példa megoldásához

x	$]-\infty; -8[$	-8	$]-8; -1[$	-1	$]-1; 3[$	3	$]3; 5[$	5	$]5; \infty[$
$x^2 + 5x - 24$	+	0	–	–	–	0	+	+	+
$-x^2 + 4x + 5$	–	–	–	0	+	+	+	0	–
$\log_{\pi}(x^2 + 5x - 24) - \sqrt[4]{-x^2 + 4x + 5}$	nincs értelme	nincs értelme	nincs értelme	nincs értelme	nincs értelme	nincs értelme	értelmezhető	értelmezhető	nincs értelme

5.11. ábra Előjeltáblázat

Az $x \in \mathbb{Z}$ feltétel és a táblázat utolsó sora alapján a kifejezés értelmezhető a $\{4; 5\}$ halmazon.



Oldjuk meg!

- Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek az átlóinak száma a) 9; b) 20; c) 90; d) 350?
- Egy cipő árát először felemelték valahány százalékkal, majd kétszer annyi százalékkal csökkentették, mint amennyivel emelték, így 5,5%-kal olcsóbb lett, mint eredetileg volt. Hány százalékkal emelték az árát?



Rendszerező összefoglalás

3. Egy vállalkozás költségét a $C(x) = 2x + 60$ függvény, a bevételét pedig az $R(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 12x$ függvény írja le, ahol x a kibocsátás nagyságát jelöli ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$), $C(x), R(x)$ értéke ezer forintban értendő. Mekkora kibocsátás esetén lesz a termelés nyereséges?
4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a racionális számok halmazán!
- a) $(x-4)(2x+3) - (x-2)(x+9) = 7x+12$; b) $(x-4)^2 + (x+2)^2 = 28-6x$;
- c) $\frac{x-3}{x} - \frac{5x+1}{3x^2} = 0$; d) $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{34x}{x^2-16}$;
- e) $x^8 - 80x^4 - 81 = 0$; f) $8x^6 - 63x^3 - 8 = 0$;
- g) $\sqrt{3x-11} + x = 7$; h) $\sqrt{2x^2-3x+1} - 1 = 2x$.
5. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!
- a) $\left. \begin{array}{l} x+2y=3 \\ x^2-3x+4y^2-2y=0 \end{array} \right\}$; b) $\left. \begin{array}{l} \sqrt{3x-5y-5}=0 \\ 2x^2+7x-y^2-12y=57 \end{array} \right\}$;
- c) $\left. \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{10}{3} \\ x^2-6xy+9y^2-25=0 \end{array} \right\}$; d) $\left. \begin{array}{l} xy=12 \\ 4x^2+y^2=73 \end{array} \right\}$.
6. Két pozitív szám számtani közepe 70, mértani közepe 56. Melyek ezek a számok?
7. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 10. Ha a számhoz hozzáadjuk a számjegyei felcserélésével kapott szám reciprokát, akkor eredményként $\frac{2297}{82}$ -et kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?
8. Mekkora annak a rombusznak a kerülete, melynek a területe 24 cm^2 , és az egyik átlója 2 cm-rel kisebb, mint a másik?
9. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!
- a) $x^2 - 4x - 12 < 0$; b) $\frac{x-5}{-x^2+3x+4} \geq 0$; c) $\frac{3x+1}{x+1} - \frac{x+1}{x-2} \leq 1$.
10. Határozzuk meg az a , b , illetve c valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenleteknek két különböző valós megoldása legyen!
- a) $ax^2 - x + 5 = 0$; b) $-\frac{1}{2}x^2 - bx + 9 = 0$; c) $3x^2 + 7x - c = 0$.
11. Írjuk fel elsőfokú polinomok szorzataként az alábbi másodfokú polinomokat!
- a) $x^2 - 3x - 88$; b) $-x^2 + x + 20$; c) $3x^2 + 7x + 10$.
12. Egyszerűsítsük az alábbi algebrai törtet, ha az alaphalmaz a valós számok halmaza!
- a) $\frac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}$; b) $\frac{x^2+11x+30}{x^2+10x+25}$; c) $\frac{x^2+19x}{x^2+9x-190}$.
13. Adjunk meg olyan másodfokú egyenletet, amelynek megoldásai
- a) 4 és $\frac{7}{3}$; b) -1 és 13; c) $2+\sqrt{3}$ és $2-\sqrt{3}$.
14. Határozzuk meg a $2x^2 - 3x - 2 = 0$ másodfokú egyenlet esetén
- a) a gyökök reciprokösszegét; b) a gyökök négyzetösszegét!

6. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek



1. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$; c) $\operatorname{ctg}^2 x = 2$.

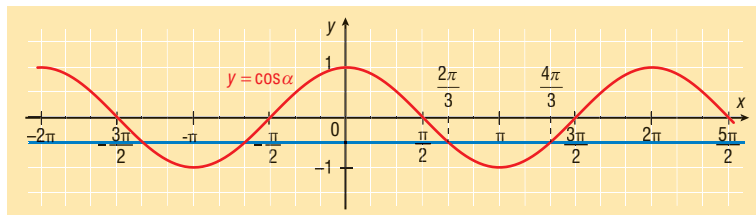
Megoldás:

a) Az egyenlet alaphalmaza és az értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A szögfüggvények definíciója alapján a $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlet megoldása során keressük azokat a $2x$ forgásszögeket, amely szögekkel az $\vec{i}$ vektorhoz képest elforgatott egységvektor második koordinátája $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -vel egyenlő az xy koordinátasíkon (6.1. ábra).

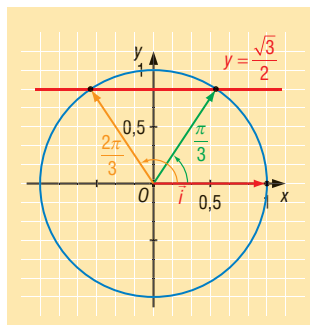
A $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenletnek két megoldása van a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ -on, ezek a szögek π -re egészítik ki egymást. Ezen az intervallumon az egyik megoldás $\frac{\pi}{3}$. A másik megoldást megkaphatjuk, ha az imént kapott értéket π -ből kivonjuk: $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ radián. Innen $2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ vagy $2x = \frac{2\pi}{3} + l \cdot 2\pi$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$. Így az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi, \quad \text{ahol } k, l \in \mathbb{Z}.$$

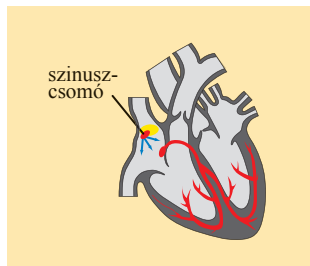
b) Az egyenlet alaphalmaza és értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$ egyenletet rendezve, a vele ekvivalens $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ egyenletet kapjuk. Oldjuk meg a kapott egyenletet grafikus úton (6.3. ábra)!



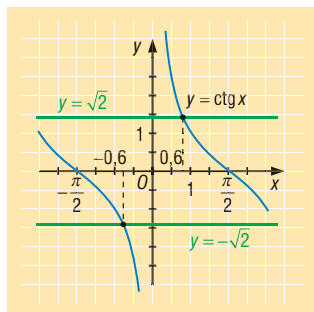
6.3. ábra Az 1. b) példa megoldásához. A $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$ egyenlet megoldása grafikus úton



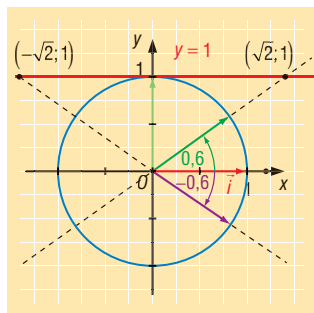
6.1. ábra A 1. a) példa megoldásához. A $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlet megoldása az egységsugarú kör segítségével



6.2. ábra Szinuszcsomó



6.4. ábra Az 1. c) példa megoldásához. A $\text{ctg}^2 x = 2$ egyenlet megoldása grafikus úton



6.5. ábra Az 1. c) példa megoldásához. A $\text{ctg}^2 x = 2$ egyenlet megoldása az egységsugarú kör segítségével

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \beta \\ \Updownarrow \\ \alpha &= \beta + k \cdot 2\pi \\ \text{vagy} \\ \alpha + \beta &= \pi + l \cdot 2\pi \text{ ahol } k, l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

6.6. ábra Mikor egyenlő két szög szinusza?

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \beta \\ \Updownarrow \\ \alpha &= \beta + k \cdot 2\pi \\ \text{vagy} \\ \alpha + \beta &= 2\pi + l \cdot 2\pi \text{ ahol } k, l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

6.7. ábra Mikor egyenlő két szög koszinusza?

Jelöljük α -val koszinuszfüggvény argumentumában álló szöget $\left(\alpha = x - \frac{\pi}{3}\right)$! Az egyenlet bal oldalának megfelelő függvény:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(\alpha) = \cos \alpha$, a jobb oldalnak megfelelő függvény:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(\alpha) = -\frac{1}{2}.$$

A 6.3. ábra alapján $x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + m \cdot 2\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, ahol $m, n \in \mathbb{Z}$. Innen a feladat megoldása:

$$x_1 = \pi + m \cdot 2\pi \text{ vagy } x_2 = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

c) A $\text{ctg}^2 x = 2$ egyenlet értelmezési tartománya a kotangens szögfüggvény értelmezése miatt $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Az egyenlet mindkét oldala nemnegatív, így négyzetgyökvonás után $|\text{ctg} x| = \sqrt{2}$ adódik. Innen az abszolút érték definíciója miatt $\text{ctg} x = \pm \sqrt{2}$. Innen $\text{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$ adódik, amelyből a számológép segítségével, a szögek visszakeresésével határozhatjuk meg az egyenlet megoldásait: $x_1 \approx 0,6 + m \cdot \pi$, $x_2 \approx -0,6 + l \cdot \pi$, ahol $m, l \in \mathbb{Z}$. Mindkét gyöksorozat megoldása az eredeti egyenletnek (6.4. és 6.5. ábrák).



2. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

- $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin 2x$;
- $\text{tg } 2x - \text{tg } x = 0$.

Megoldás:

a) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

A $-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$ azonosságot felhasználva az egyenlet $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(-2x)$ alakban írható fel. A kapott egyenlet mindkét oldalán egy-egy szög szinusza áll. Mivel két szög szinusza akkor és csak akkor egyenlő, ha a két szög a 2π (a szinuszfüggvény periódusának) egész számú többszörösében tér el egymástól, vagy ha a két szög π páratlan többszörösére egészíti ki egymást (6.6. ábra), ezért

$$x + \frac{\pi}{4} = -2x + k \cdot 2\pi \text{ vagy } -2x + x + \frac{\pi}{4} = \pi + l \cdot 2\pi, \text{ innen az egyenlet}$$

$$\text{megoldásai: } x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad x_2 = -\frac{3\pi}{4} - l \cdot 2\pi, \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

b) Az egyenlet értelmezési tartománya a tangens szögfüggvény értelmezése miatt $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ vagy } \frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$.

A $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = 0$ egyenletet átrendezve az egyenlet $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$ alakban írható fel. Mivel két szög tangense akkor és csakis akkor egyenlő, ha a két szög a π (a tangensfüggvény periódusának) egész számú többszörösében tér el egymástól (6.8. ábra), ezért $2x = x + n \cdot \pi$, innen $x = n \cdot \pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) adódik. Az $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) feltétel miatt meg

kell vizsgálnunk, hogy az $n \cdot \pi \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mely $k, n \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül.

A $\frac{\pi}{2}(2n) \neq \frac{\pi}{2}(1+2k)$ bármely $k, n \in \mathbb{Z}$ esetén fennáll, mert bal oldalon a $\frac{\pi}{2}$ páros, a jobb oldalon a $\frac{\pi}{2}$ páratlan többszöröse állnak.

Hasonlóan az $x \neq \frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2}$ feltétel miatt ($l \in \mathbb{Z}$): $n \cdot \pi \neq \frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2}$ -nek kell teljesülni. A $\frac{\pi}{4}(4n) \neq \frac{\pi}{4}(1+2l)$ bármely $l, n \in \mathbb{Z}$ esetén fennáll, mert a bal oldalon a $\frac{\pi}{4}$ páros, a jobb oldalon a $\frac{\pi}{4}$ páratlan többszöröse állnak. Tehát az egyenlet megoldásai: $x = n \cdot \pi$ ($n \in \mathbb{Z}$).



3. példa Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 5$; b) $\cos x \cdot \operatorname{ctg} x = \frac{3}{2}$.

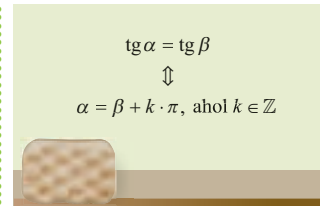
Megoldás:

a) A tangens és a kotangens szögfüggvények értelmezése miatt az egyenlet értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ebben az egyenletben ugyanazon szög tangense és kotangense szerepel, a közöttük fennálló $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ ($x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$) összefüggés alapján :

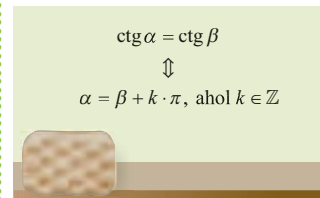
$2 \operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 5$, a $\operatorname{tg} x$ -szel való szorzás után a $2 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 5 \operatorname{tg} x$ egyenletet kapjuk. A kapott egyenlet $\operatorname{tg} x$ -re nézve másodfokú, 0-ra redukálva:

$$2 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 3 = 0. \text{ Megoldása: } (\operatorname{tg} x)_{1;2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4},$$

azaz $\operatorname{tg} x = 1$ vagy $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$. Innen visszakereséssel adódik, hogy $x_1 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$, $x_2 \approx 0,9828 + m \cdot \pi$ ($l, m \in \mathbb{Z}$). A kapott értékek eleget tesznek az eredeti egyenletnek.



6.8. ábra Mikor egyenlő két szög tangense?



6.9. ábra Mikor egyenlő két szög kotangense?



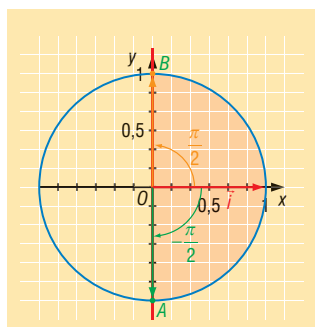
6.10. ábra Oldjuk meg!



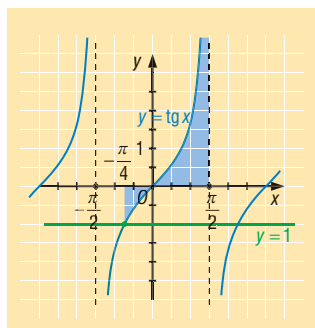
Rendszerező összefoglalás



6.11. ábra Ne felejtse el a trigonometrikus azonosságokat



6.12. ábra A 4. a) példa megoldásához. A $\cos x > 0$ egyenlőtlenség megoldása grafikus úton



6.13. ábra A 4. b) példa megoldásához. A $\text{tg } x + 1 \geq 0$ egyenlőtlenség megoldása grafikus úton

b) A kotangens szögfüggvény értelmezése miatt az egyenlet értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ebben az egyenletben ugyanazon szög koszinusza és kotangense szerepel, a közöttük fennálló $\text{ctg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ($x \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$) összefüggés alapján: $\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{3}{2}$, a $\sin x$ -szel való szorzás után a $\cos^2 x = \frac{3}{2} \sin x$ egyenletet kapjuk. Ugyanazon szög szinusza és koszinusza között fennálló $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot felhasználva, a $\cos^2 x$ helyére $1 - \sin^2 x$ -et helyettesítve az egyenletben egyféle szögfüggvény lesz: $1 - \sin^2 x = \frac{3}{2} \sin x$. A kapott egyenlet $\sin x$ -re nézve másodfokú, 0-ra redukálva: $\sin^2 x + \frac{3}{2} \sin x - 1 = 0$, azaz $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$. Megoldása: $(\sin x)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$, innen $\sin x = -2$ vagy $\sin x = \frac{1}{2}$. A szinuszfüggvény értékkészlete a $[-1; 1]$, ezért csak a $\sin x = \frac{1}{2}$ teljesülhet. Innen $x_1 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + m \cdot 2\pi$ ($l, m \in \mathbb{Z}$). A kapott értékek eleget tesznek az eredeti egyenletnek.



4. példa Mely x valós számok esetén értelmezhetőek az alábbi kifejezések?

- a) $\lg(\cos x)$; b) $\sqrt{\text{tg } x + 1}$.

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója miatt $\cos x > 0$. A definíció értelmében a $\cos x > 0$ egyenlőtlenség megoldásakor keressük azokat a forgásszögeket, amelyekkel az $\vec{i}$ egységvektort elforgatva a kapott egységvektor első koordinátája pozitív. Az egységsugarú kör A és B pontjaiba húzott egységvektorok x koordinátája 0, az $\widehat{AB}$ ív belső pontjaiba húzott egységvektorok x koordinátája 0-nál nagyobb (6.12. ábra).

Az ábra alapján a $\lg(\cos x)$ kifejezés értelmezési tartománya:

$$\left\{ -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) A tangens szögfüggvény és a négyzetgyökvonás definíciója miatt $\text{tg } x + 1 \geq 0$ és $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Oldjuk meg az egyenlőtlenséget grafikusán! A $\text{tg } x \geq -1$ egyenlőtlenség jobb oldalának megfelelő függvény: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -1$, a bal oldalnak megfelelő függvény:

$$f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \text{tg } x.$$

A 6.13. ábra alapján a $\sqrt{\lg x + 1}$ kifejezés értelmezési tartománya:

$$\left\{ -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0;$ b) $|\cos(x - \pi)| = \frac{\sqrt{3}}{2};$ c) $\lg^2 x - 1 = 0;$ d) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3};$
 e) $\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \cdot \sin 3x = 0;$ f) $\cos^2 2x - \frac{1}{2} = 0;$ g) $\left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)\right| = 1;$ h) $\operatorname{ctg} 4x - 2 = 0.$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin x;$ b) $\cos 2x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0;$
 c) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} x;$ d) $\operatorname{ctg}\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} 3x.$

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2\sin^2 x + 3\sin(-x) + 1 = 0;$ b) $\cos^2 x = -\frac{5}{2}\sin x + 2;$
 c) $2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x = -1;$ d) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = 2.$

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2};$ b) $2\cos x - 1 < 0;$ c) $\operatorname{tg} 2x < \sqrt{3};$ d) $\operatorname{ctg} 7x \geq 1.$

7. Exponenciális és logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

A természetben számos folyamat leírása exponenciális függvények segítségével történik. Néhány példa:

- Ideális körülmények között (táplálékhiány, ragadozók hiánya) kezdetben exponenciálisan növekszik sok populáció.
- A jóindulatú vagy rosszindulatú daganatok (rák) kialakulásakor a sejtburjánzás exponenciális függvénnyel közelíthető.
- Egy homogén sűrűségű folyadékon áthaladó napfényből az elnyelődő energia lefelé haladva exponenciálisan csökkenő mértékű.
- Radioaktív bomlásokor a bomlatlan atomok száma exponenciálisan csökken (7.1. ábra).
- A világ népessége exponenciálisan növekszik.



7.1. ábra Radioaktív



Rendszerező összefoglalás



A sakk feltalálójának a monda szerint búza lett volna a jutalma: az első mezőre egy szemet, és minden további mezőre kétszer annyi szemet kellett tenni, mint az előzőre. Hamar kiderült, hogy ennyi búza 2000 év alatt sem terem a Földön.

7.2. ábra Legenda a sakkról



Minden félbehajtásnál a fólia vagy papír vastagsága a kétszeresére nő. Ha egy ötször félbehajtott fólia vastagsága 480 μm , akkor kiszámítható, hogy egy réteg 15 μm . Tízszori összehajtás után 15 mm, további tíz összehajtás után 15,7 m vastag lesz. Különböző mechanikai tulajdonságai miatt egy normál rajzlap vagy írógéppapír sem hajtható össze hétnél többször, még nagy papírfelület esetén sem. Egy ennél vékonyabb típusú papírt egy amerikai tévéműsorban (MythBusters) kilencszer sikerült félbehajtani.

7.3. ábra Hajtogatás



1. példa Oldjuk meg a racionális számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{8^{x-2}} = \frac{1}{64} \left(\frac{1}{4} \right)^{-x}$; b) $7^{x+2} + 14 \cdot 7^{x-1} - 31 \cdot 7^x = 20$;
c) $25^{x-1} - 5^{x+1} + 5^{x-3} = 1$.

Megoldás:

a) Az egyenlet alaphalmaza és értelmezési tartománya a racionális számok halmaza. Vegyük észre, hogy mindkét oldalon 2 hatványai szerepelnek, és közöttük a szorzás, az osztás és a hatványozás műveletek vannak kijelölve! Írjuk fel tehát mindkét oldalt 2 hatványként, a törtkitevőjű hatvány és a hatványozás azonosságainak felhasználásával!

$$\sqrt{8^{x-2}} = \frac{1}{64} \left(\frac{1}{4} \right)^{-x},$$

$$2^{\frac{3(x-2)}{2}} = 2^{-6} \cdot 2^{2x},$$

$$2^{\frac{3(x-2)}{2}} = 2^{-6+2x}.$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt:

$$\frac{3(x-2)}{2} = -6 + 2x,$$

$$3x - 6 = -12 + 4x,$$

$$x = 6.$$

Ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk, így az eredeti egyenlet egyetlen megoldása: $x = 6$.

b) Az egyenlet alaphalmaza és értelmezési tartománya a racionális számok halmaza. Az egyenlet bal oldalán azonos alapú hatványok összege szerepel. Azonos alapú hatványokat általában akkor tudunk összevonni, ha a kitevők is azonosak. A hatványozás azonosságainak felhasználásával elérhető, hogy minden tagban azonos alapú azonos kitevőjű hatvány szerepeljen:

$$7^{x+2} + 14 \cdot 7^{x-1} - 31 \cdot 7^x = 20,$$

$$7^2 \cdot 7^x + 14 \cdot \frac{1}{7} \cdot 7^x - 31 \cdot 7^x = 20,$$

$$49 \cdot 7^x + 2 \cdot 7^x - 31 \cdot 7^x = 20,$$

$$20 \cdot 7^x = 20,$$

$$7^x = 7^0.$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt: $x = 0$. Az egyenlet megoldása során minden átalakítás ekvivalens volt, így az eredeti egyenlet egyetlen megoldása: $x = 0$.

c) Az egyenlet alaphalmaza és értelmezési tartománya a racionális számok halmaza. Az egyenlet bal oldalán azonos alapú hatványok összege szerepel, így hasonlóképpen járhatunk el, mint a b) feladatrészen:

$$25^{x-1} - 5^{x+1} + 5^{x-3} = 1,$$

$$\frac{1}{25} \cdot (5^2)^x - 5 \cdot 5^x + \frac{1}{5^3} 5^x = 1.$$

Vegyük észre, hogy a kapott egyenlet 5^x -re nézve másodfokú! Vezessünk be új ismeretlent, legyen $y = 5^x$! Az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza, ezért az $y > 0$ feltételnek kell teljesülni. Ekkor az egyenlet:

$$\frac{1}{25} \cdot y^2 - 5 \cdot y + \frac{1}{125} y = 1,$$

$$5 \cdot y^2 - 625 \cdot y + y = 125,$$

$$5 \cdot y^2 - 624 \cdot y - 125 = 0.$$

Az egyenlet diszkriminánsa: $D = (-624)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-125) = 626^2$, innen

$$y_{1,2} = \frac{624 \pm 626}{10} \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{5}, y_2 = 125 \text{ adódik. Az } y > 0 \text{ feltétel miatt}$$

az $y_1 = -\frac{1}{5}$ nem megoldás. Az $y_2 = 125$ visszahelyettesítéséből kapjuk, hogy

$$125 = 5^x,$$

$$5^3 = 5^x.$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt $x = 3$. A kapott értéket ellenőrizzük le! Az eredeti egyenlet bal oldala: $25^{3-1} - 5^{3+1} + 5^{3-3} = 625 - 625 + 1 = 1$, jobb oldala: 1. Tehát a megoldás:

$$x = 3.$$



2. példa Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt[7]{4^{x-5}} \geq \frac{1}{32};$ b) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}} > \left(\frac{27}{8}\right)^{x-12}.$

Megoldás:

a) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Írjuk fel mindkét oldalt 2 hatványaként!

$$\sqrt[7]{4^{x-5}} \geq \frac{1}{32},$$

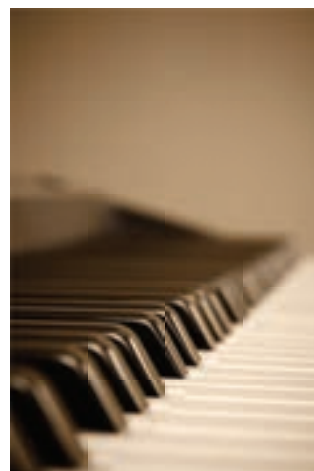
$$\left(2^2\right)^{\frac{x-5}{7}} \geq 2^{-5},$$

$$2^{\frac{2x-10}{7}} \geq 2^{-5}.$$

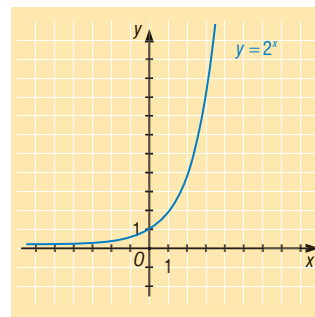
Az $x \mapsto 2^x$ ($D = \mathbb{R}$) exponenciális függvény (7.6. ábra) szigorúan monoton növekvő (az alap 1-nél nagyobb), ezért a $2^{\frac{2x-10}{7}} \geq 2^{-5}$



7.4. ábra Exponenciális



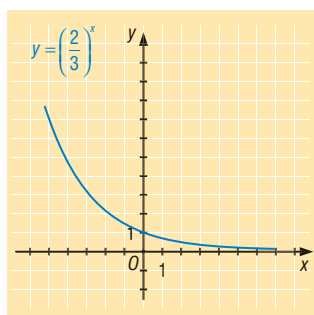
7.5. ábra Monoton



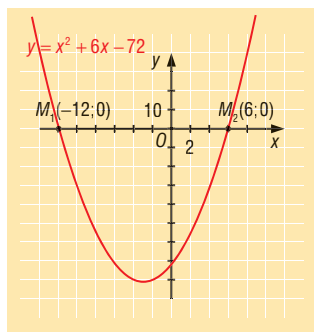
7.6. ábra Az $x \mapsto 2^x$ ($D = \mathbb{R}$) exponenciális függvény grafikonja



Rendszerező összefoglalás



7.7. ábra Az $x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$ ($D = \mathbb{R}$) exponenciális függvény grafikonja



7.8. ábra A 2. b) példához. Az $x^2 + 6x - 72 < 0$ egyenlőtlenség megoldásához

egyenlőtlenség ekvivalens a $\frac{2x-10}{7} \geq -5$ egyenlőtlenséggel. Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{2x-10}{7} &\geq -5, \\ 2x-10 &\geq -35, \\ 2x &\geq -25, \\ x &\geq -\frac{25}{2}.\end{aligned}$$

Tehát a megoldáshalmaz: $\left[-\frac{25}{2}; \infty\right[$.

b) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Írjuk fel mindkét oldalt $\frac{2}{3}$ hatványaként!

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}} &> \left(\frac{27}{8}\right)^{x-12}, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2}{2}} &> \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\right)^{x-12}, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2}{2}} &> \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+36}.\end{aligned}$$

Az $x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$ ($D = \mathbb{R}$) exponenciális függvény (7.7. ábra) szigorúan monoton csökkenő (az alap 1-nél kisebb pozitív szám), ezért a

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2}{2}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+36} \text{ egyenlőtlenség ekvivalens az } \frac{x^2}{2} < -3x+36$$

egyenlőtlenséggel. Ahonnan az $x^2 + 6x - 72 < 0$ másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk. Az $a > 0$ miatt az $f(x) = x^2 + 6x - 72$ ($D = \mathbb{R}$) függvény képe pozitív irányba nyíló parabola. A függvény zérushelyeinek meghatározásához oldjuk meg az $x^2 + 6x - 72 = 0$ egyenletet! Az egyenlet diszkriminánsa $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72) = 18^2$, megoldásai

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 18}{2}, \text{ innen az } f \text{ függvény zérushelyei: } x_1 = 6 \text{ és } x_2 = -12 \text{ (7.8. ábra). A megoldáshalmaz: }]-12; 6[.$$



3. példa Oldjuk meg az egész számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\log_5 \sqrt{2x-1} + \log_5 \sqrt{3x+10} = \log_5 75 - 1;$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \left\{ \log_3 \left[1 + 4 \log_5 (x-2) \right] \right\} = -1;$ c) $\lg^2 x - \lg x^2 = 8.$

Megoldás:

a) A logaritmus és a négyzetgyökvonás definíciója miatt $2x-1 > 0$ és $3x+10 > 0$, így az egyenlet értelmezési tartománya a $\mathbb{Z}^+$. A logaritmus definíciója miatt $1 = \log_5 5^1$, így a logaritmus azonosságai alapján az egyenlet $\log_5(\sqrt{2x-1}\sqrt{3x+10}) = \log_5 \frac{75}{5^1}$ alakban írható fel. A logaritmusfüggvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt: $\sqrt{2x-1}\sqrt{3x+10} = \frac{75}{5}$. Innen négyzetre emeléssel és egyenletrendezéssel kapjuk a következő másodfokú egyenletet:

$$(2x-1) \cdot (3x+10) = 225,$$

$$6x^2 + 17x - 235 = 0.$$

A diszkriminánsa: $D = 17^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-235) = 77^2$, ebből $x_{1,2} = \frac{-17 \pm 77}{12}$,

azaz $x_1 = 5$ és $x_2 = -\frac{47}{6}$. Az $x = 5$ eleme az értelmezési tartománynak és megoldása az eredeti egyenletnek is. Az $x = -\frac{47}{6}$ nem eleme az

értelmezési tartománynak, így nem megoldás. Tehát az egyenlet megoldása az egész számok halmazán az $x = 5$.

b) A $\log_{\frac{1}{2}} \left\{ \log_3 \left[1 + 4 \log_5 (x-2) \right] \right\} = -1$ egyenlet értelmezési tartománjának meghatározása körülményesebb, mint az egyenlet megoldása. Így ettől most eltekintünk, helyette a megoldás során kapott értéket fogjuk ellenőrizni. A logaritmus definíciója alapján kapjuk, hogy

$$\log_3 \left[1 + 4 \log_5 (x-2) \right] = 2.$$

Alkalmazzuk ismét a logaritmus definícióját!

$$1 + 4 \log_5 (x-2) = 9,$$

$$4 \log_5 (x-2) = 8,$$

$$\log_5 (x-2) = 2.$$

Innen a logaritmus definíciója miatt kapjuk, hogy

$$x-2 = 25,$$

$$x = 27.$$

Ellenőrzés: az egyenlet jobb oldala -1 , az egyenlet bal oldala

$$\log_{\frac{1}{2}} \left\{ \log_3 \left[1 + 4 \log_5 (27-2) \right] \right\} = \log_{\frac{1}{2}} \left\{ \log_3 \left[1 + 4 \cdot 2 \right] \right\} = \log_{\frac{1}{2}} \{2\} = -1.$$

Tehát az egyenlet megoldása $x = 27$.

c) A logaritmus értelmezése alapján $x > 0$ és $x^2 > 0$, így az egyenlet értelmezési tartománya a $\mathbb{Z}^+$. A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság alapján az egyenlet a $\lg^2 x - 2 \lg x = 8$ egyenlettel ekvivalens. A kapott egyenlet $\lg x$ -re nézve másodfokú, legyen $y = \lg x$! Ekkor az egyenlet $y^2 - 2y - 8 = 0$ alakban írható fel. Az egyenlet



7.9. ábra Logarléc



7.10. ábra Ötlet kell a megoldáshoz



7.11. ábra Keressük a megoldást!



Rendszerező összefoglalás



7.12. ábra Egyenlőtlenség

diszkriminánsa: $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 6^2$, ebből kapjuk, hogy $y_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2}$, azaz $y_1 = -2$, $y_2 = 4$. Innen egyrészt $\lg x = -2$, ahonnan a logaritmus definíciója szerint $x_1 = 0,01$, amely nem eleme az értelmezési tartománynak, tehát nem megoldás. Másrészt $\lg x = 4$, ahonnan a logaritmus definíciója szerint $x_2 = 10\,000$, amely eleme az értelmezési tartománynak, és eleget tesz az eredeti egyenletnek is. Tehát a feladat megoldása $x = 10\,000$.



4. példa Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\log_{\frac{1}{4}}(x-4) \geq \frac{1}{2}$; b) $\log_3(4x-2) - \log_3 x \leq 1$.

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója alapján $x-4 > 0$, így az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a $]4; \infty[$ intervallum. Mivel $\frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, ezért az egyenlőtlenség $\log_{\frac{1}{4}}(x-4) \geq \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ alakban írható fel. 1-nél kisebb alap esetén a logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, így a $\log_{\frac{1}{4}}(x-4) \geq \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ egyenlőtlenség ekvivalens az $x-4 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ egyenlőtlenséggel. Innen adódik, hogy $x-4 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, ebből

$$x-4 \leq \frac{1}{2},$$

$$x \leq \frac{9}{2}.$$

Ezt egybevetve az egyenlőtlenség értelmezési tartományával a $\left]4; \frac{9}{2}\right]$ megoldáshalmazt kapjuk.

b) A logaritmus definíciója alapján $4x-2 > 0$ és $x > 0$, így az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a $\left]\frac{1}{2}; \infty\right[$ intervallum. A logaritmus azonosságai alapján az egyenlőtlenség $\log_3 \frac{4x-2}{x} \leq \log_3 3^1$ alakban írható fel. 1-nél nagyobb alap esetén a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, így a $\log_3 \frac{4x-2}{x} \leq \log_3 3^1$ egyenlőtlenség ekvivalens a $\frac{4x-2}{x} \leq 3$ egyenlőtlenséggel. A kapott egyenlőtlenséget 0-ra redukáljuk, majd az ismeretlent tartalmazó oldalt közös nevezőre hozzuk:



7.13. ábra Ez sem egyenlőség

$$\frac{4x-2}{x} - 3 \leq 0,$$

$$\frac{x-2}{x} \leq 0.$$

Mivel $x \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$, ezért a tört nevezője pozitív. Így a tört pontosan akkor nempozitív, ha a számlálója nempozitív, azaz $x-2 \leq 0$. Innen $x \leq 2$ adódik. Ezt az egyenlőtlenség értelmezési tartományával összevetve az $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ megoldáshalmazt kapjuk.



5. példa Elhelyezünk a bankban egy bizonyos összeget évi 8%-os kamatra. Hány évig kell kamatoztatni a pénzünket évenkénti tőkésítés mellett, hogy a betétben levő pénzünk az elhelyezett összeg 10-szerese legyen? (Az eredményt egész számra kerekítve adjuk meg!)

Megoldás:

Jelölje n az évek számát, t_0 az elhelyezett összeg nagyságát! Mivel $t_n = 10 \cdot t_0$, ezért az alábbi egyenletet írhatjuk fel:

$$10 \cdot t_0 = t_0 \cdot 1,08^n$$

$$10 = 1,08^n$$

Tekintettel arra, hogy az egyenlet oldalai pozitívak, vehetjük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát!

$$\lg 10 = \lg 1,08^n;$$

$$1 = n \lg 1,08;$$

$$n = \frac{1}{\lg 1,08} \approx 30 \text{ év.}$$

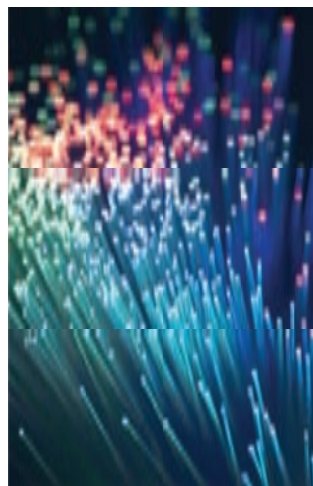
Tehát 30 évig kell kamatoztatni a pénzünket ahhoz, hogy a betétben levő pénzünk az elhelyezett összeg 10-szerese legyen.



6. példa Az üvegszálak távközlésre gyakorlatban az 1300 nm-es, illetve az 1550 nm-es hullámhosszakat alkalmazzák, az ott található csillapítási minimumok miatt. Miközben a fény az üvegen áthalad, energiája a megtett úttal arányosan csökken. Egy z távolság megtétele után a fény energiája $P(z) = P_0 \cdot e^{-Kz}$, ahol P_0 a kezdeti energia, az $e \approx 2,718$ (Euler-féle szám vagy Napier-állandó), és a K állandó az ún. csillapítási tényező. Mekkora út megtétele után csökken a fény energiája 10%-kal, ha $K = 0,0027 \frac{1}{\text{km}}$? (Az eredményt egész km-re kerekítve adjuk meg!)



7.14. ábra A bizonyos összeg



7.15. ábra Üvegszálak



Rendszerező összefoglalás



7.16. ábra A fény energiája

Megoldás:

A feladat szövege szerint $P(z) = 0,9 \cdot P_0$, amelyet a $P(z) = P_0 \cdot e^{-Kz}$ egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0,9 \cdot P_0 &= P_0 \cdot e^{-0,0027z}, \\ 0,9 &= e^{-0,0027z}. \end{aligned}$$

Vegyük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát!

$$\begin{aligned} \lg 0,9 &= \lg e^{-0,0027z}; \\ \lg 0,9 &= -0,0027z \lg e; \end{aligned}$$

$$z = -\frac{\lg 0,9}{0,0027 \lg e} \approx 39 \text{ km.}$$

Tehát 39 km megtétele után csökken a fény energiája 10%-kal.



7. példa Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } 7^x - 3^{y+3} &= 22 \\ 11 \cdot 7^{x-2} + 2 \cdot 3^y &= 13 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \text{b) } \lg x - \lg y &= 2 \\ 5 \lg \sqrt[5]{x^9} + 7 \lg y^2 &= -5 \end{aligned} \right\}.$$

Megoldás:

a) Az egyenletrendszer bármely valós x és y esetén értelmezhető. Alakítsuk át az egyenleteket a hatványozás azonosságainak alkalmazásával!

$$\left. \begin{aligned} 7^x - 3^{y+3} &= 22 \\ 11 \cdot 7^{x-2} + 2 \cdot 3^y &= 13 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} 7^x - 27 \cdot 3^y &= 22 \\ 11 \cdot \frac{7^x}{49} + 2 \cdot 3^y &= 13 \end{aligned} \right\}.$$

Legyen $a = 7^x$, $b = 3^y$! Az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza, ezért $a > 0$, $b > 0$ feltételeknek kell teljesülni. Ekkor az egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} a - 27 \cdot b &= 22 \\ 11 \cdot \frac{a}{49} + 2 \cdot b &= 13 \end{aligned} \right\}$$

alakban írható fel.

Az első egyenletből fejezzük ki az a -t: $a = 27b + 22$. Ezt a kifejezést helyettesítsük be a második egyenletbe!

$$\begin{aligned} 11 \cdot \frac{27b + 22}{49} + 2b &= 13, \\ 297b + 242 + 98b &= 637, \\ 395b &= 395, \\ b &= 1. \end{aligned}$$

Innen $a = 27 \cdot 1 + 22 = 49$. Az exponenciális függvény szigorúan monoton tulajdonsága miatt $x = 2$, $y = 0$. A megoldás során ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért ezek és csak ezek a megoldások.



7.17. ábra Ki vagy Te szép ismeretlen?

b) 1. megoldás:

A logaritmus definíciója alapján $x > 0$ és $y > 0$. Alkalmazzuk a logaritmus definícióját és azonosságait!

$$\left. \begin{aligned} \lg x - \lg y &= 2 \\ 5 \lg \sqrt[5]{x^9} + 7 \lg y^2 &= -5 \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} \lg \frac{x}{y} &= \lg 10^2 \\ \lg(x^9 y^{14}) &= \lg 10^{-5} \end{aligned} \right\}.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monoton tulajdonsága miatt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{y} &= 10^2 \\ x^9 y^{14} &= 10^{-5} \end{aligned} \right\}.$$

Az első egyenletből fejezzük ki az x -et: $x = 10^2 y$. Ezt a kifejezést helyettesítsük be a második egyenletbe!

$$\begin{aligned} (10^2 y)^9 y^{14} &= 10^{-5}, \\ 10^{18} y^9 y^{14} &= 10^{-5}, \\ y^{23} &= 10^{-23}, \\ y &= 10^{-1}. \end{aligned}$$

Innen $x = 10$ adódik. A kapott számpár helyességéről ellenőrzéssel meggyőződhetünk. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 10$ és $y = 0,1$.

2. megoldás:

A logaritmus definíciója alapján $x > 0$ és $y > 0$. Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait!

$$\left. \begin{aligned} \lg x - \lg y &= 2 \\ 5 \lg \sqrt[5]{x^9} + 7 \lg y^2 &= -5 \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} \lg x - \lg y &= 2 \\ 5 \cdot \frac{9}{5} \lg x + 7 \cdot 2 \lg y &= -5 \end{aligned} \right\}.$$

Legyen $a = \lg x$, $b = \lg y$! A kapott egyenletrendszer első egyenletének mindkét oldalát szorozzuk meg 14-gyel, majd adjuk össze azokat!

$$\left. \begin{aligned} a - b &= 2 \\ 9a + 14b &= -5 \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} 14a - 14b &= 28 \\ 9a + 14b &= -5 \end{aligned} \right\},$$

$$\begin{aligned} 23a &= 23, \\ a &= 1. \end{aligned}$$

Ekkor $b = -1$. Innen a logaritmus definíciója alapján $x = 10$, $y = 0,1$. Ezek megoldásai az egyenletrendszernek.



7.18. ábra Új ismeretlen bevezetése



7.19. ábra Azonosság



Rendszerező összefoglalás



Oldjuk meg!

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{1}{7} \sqrt[5]{343^{8x-2}} = \left(\frac{1}{49}\right)^{3-8x}$; b) $4^{x+1} - 2 \cdot 2^{2x-1} + 3 \cdot 4^x = 48$;

c) $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28$; d) $5 \lg^2 x - 3 \lg x^2 = 11$;

e) $\log_2(3x+4) - \log_2 \sqrt{3x-11} = \log_2 3 + 2$;

f) $\log_{\frac{1}{2}} \left\{ 3 + \log_3 [\log_2(x+12)] \right\} = -2$.

2. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{4}{25} \left(\frac{2}{5}\right)^{x-6} > \sqrt[3]{\left(\frac{125}{8}\right)^{3x-1}}$; b) $9^x - 3^{x+1} \leq 54$;

c) $\log_{\frac{3}{2}}(3x-4) \geq \frac{2}{3}$; d) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}} x \geq 2$.

3. T_1 állandó hőmérsékletű környezetben, kezdetben T_0 hőmérsékletű anyag t (óra) idő múlva T hőmérsékletre hűl, ezt a folyamatot az ún. Newton-féle lehűlési törvény $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-Kt}$ írja le,

ahol $K\left(\frac{1}{\text{óra}}\right)$ hőátbocsátási tényező. Állandó, 22°C -os hőmérsékletű lakásban mennyi idő alatt

„hűl le” a 85°C -os kávé 28°C -ra? $\left(K = 13 \frac{1}{\text{óra}}, e \approx 2,718\right)$

4. A radioaktív bomlást az $m = m_0 \cdot 2^{\frac{-t}{T}}$ egyenlet írja le, ahol m a pillanatnyi bomlatlan tömeg, m_0 a kezdeti tömeg, t az eltelt idő, és T a felezési idő. A $^{226}_{88}\text{Ra}$ izotópmennyiségének fele 1614 év alatt bomlik el, azaz a felezési ideje 1614 év.

a) Egy régi fa lelet cm^3 -enként 9375 $^{226}_{88}\text{Ra}$ -izotópot tartalmaz. Milyen öreg lehet ez a lelet, ha ugyanilyen élő fa 10 000 $^{226}_{88}\text{Ra}$ -izotópot tartalmaz cm^3 -enként?

b) Legalább mennyi idő szükséges ahhoz, hogy egy adott mennyiségnek több mint a $\frac{3}{5}$ -öd része elbomoljon?

5. A fényerőt (I) a fényforrástól $d(m)$ távolságban $I(d) = I_0 \cdot a^d$ függvény adja meg, ahol I_0 a kezdeti fényerő; „ a ” a közegtől függő állandó ($0 < a < 1$). Tudjuk, hogy egy helyen egy motorke-rek-páros lámpája még a ködben is észrevehető, ha ott a fényerő az eredeti fényerejének legalább a 60%-a. Legfeljebb milyen távolságból lehet látni a motorkerekpárost, ha $a = 0,94$?

6. Oldja meg a következő egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

a) $\left. \begin{aligned} 2^x + 3^{y+1} &= 13 \\ 5 \cdot 2^{x-1} - 2 \cdot 3^y &= 4 \end{aligned} \right\}$; b) $\left. \begin{aligned} \lg x - \lg y &= -2 \\ 5 \lg x^4 + 3 \lg \sqrt[3]{y} &= 23 \end{aligned} \right\}$;

c) $\left. \begin{aligned} \log_3 \frac{x}{y} - \log_3 \frac{y}{x} &= 2 \\ 4^{\sqrt{x^2+3y-3}} &= 0,5^{\frac{-2x}{y}} \end{aligned} \right\}$.

8. Geometria

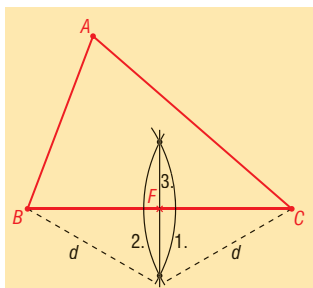
8.1. Elemi geometria



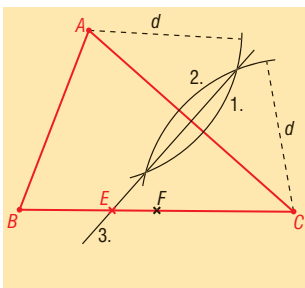
1. példa Hogyan szerkesztenénk meg az ABC hegyesszögű

- háromszög BC oldalának azt a pontját, amely egyenlő távolságra van a B és a C csúctól;
- egyenlő távolságra van az A és a C csúctól;
- egyenlő távolságra van az AB és az AC oldal egyenesétől;
- a legközelebb van az A csúcshoz?

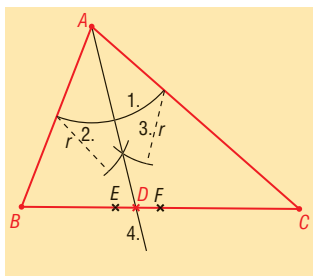
Megoldás:



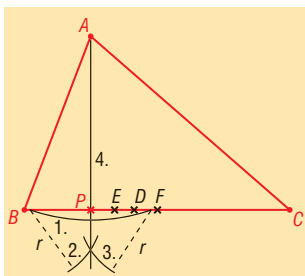
8.1. ábra Az 1. a) példához. A BC szakasz felezőpontja (F)



8.2. ábra Az 1. b) példához. Az AC oldal felezőmerőlegesének és a BC oldalnak a metszéspontja (E)



8.3. ábra Az 1. c) példához. Az A -nál lévő szög szögfelezőjének és a BC oldalnak a metszéspontja (D)

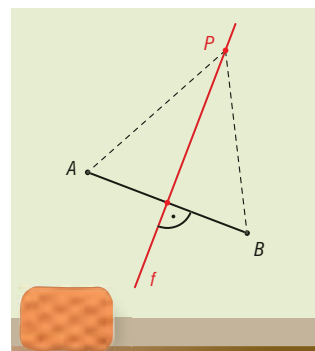


8.4. ábra Az 1. d) példához. Az A csúcsból induló magasság talponti pontja: az A pontból a BC oldal egyenesére állított merőleges és a BC oldal metszéspontja (P)

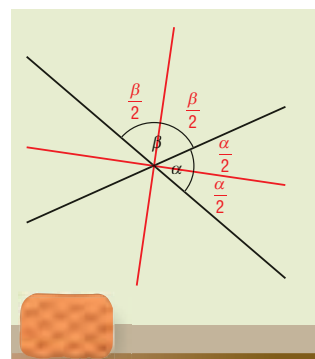


2. példa Mekkora az a szög,

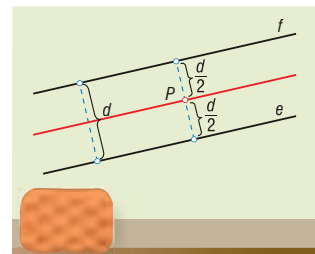
- amelyik háromszorosa a pótszögének (8.8. ábra);
- amelyik egyenlő a mellékszögével;
- amelyikhez hozzáadva a szög másfélszeresét, egyenesszöget kapunk eredményül?



8.5. ábra Két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban a szakaszfelező merőleges



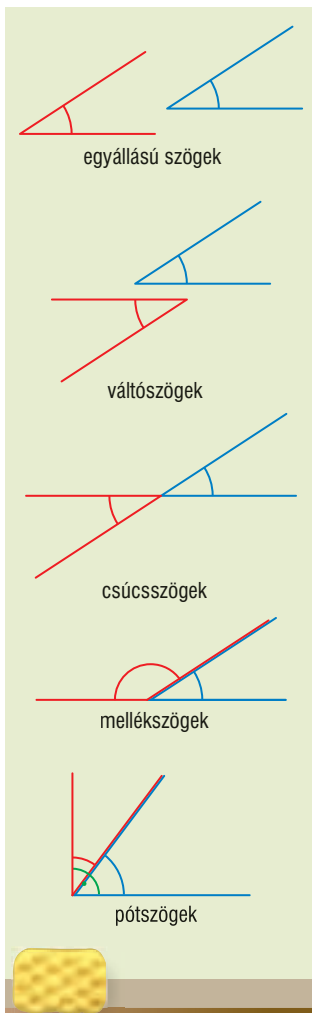
8.6. ábra Két metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban a két szögfelező



8.7. ábra Középpárhuzamos egyenes: két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban



Rendszerező összefoglalás



8.8. ábra Szögpárok

Ha egy háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldalának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű



8.10. ábra A Pitagorasz-tétel megfordítása

Megoldás:

a) Jelöljük a szöget α -val! A pótszöge $90^\circ - \alpha$. Az összefüggés:

$$\alpha = 3(90^\circ - \alpha) \Rightarrow \alpha = 67,5^\circ.$$

b) Egy szöget a mellékszöge 180° -ra egészít ki. A keresett szög 90° .

c) Legyen a keresett szög β . Egyenlettel: $\beta + 1,5\beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 72^\circ$.



3. példa

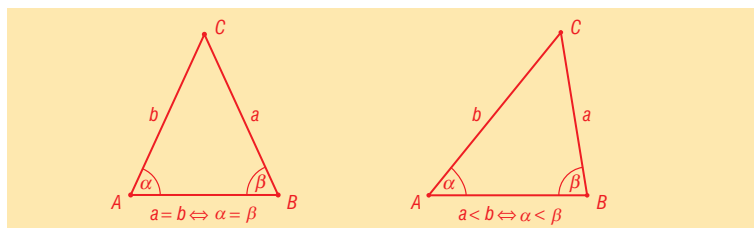
a) Egy egyenlő szárú háromszög egyik mellékszöge 110° -os. Mekkora lehetnek a szögei?

b) Egy háromszög szögeiről tudjuk, hogy $\alpha < \beta < \gamma$. Melyik szög melyik oldallal szemközt van, ha a háromszög oldalai 20, 17 és 19 egység hosszúak?

c) Döntsük el a következő számhármakról, hogy egy derékszögű háromszög oldalhosszai-e vagy sem (a választ indokoljuk): 15, 18 és 23; 8, 15 és 17; 6, 15 és 22!

Megoldás:

a) A háromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek találhatók (8.9. ábra) és megfordítva (egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak), így a háromszögnek van két egyenlő nagyságú szöge. Ugyanakkor a belső szögek összege 180° , és a megadott mellékszög alapján az egyik belső szög 70° -os. Ez lehet alapon fekvő szög, s akkor a háromszögnek van két 70° -os és egy 40° -os szöge, vagy lehet szárszög is, ekkor van egy 70° -os és két 55° -os szöge.



8.9. ábra Összefüggés a háromszög oldalai és szögei között

b) A háromszögben nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög fekszik és megfordítva (nagyobb szöggel szemközt nagyobb oldal). Ez alapján: a 20 egység hosszú oldallal szemközt a γ szög van, a 17 egység hosszú oldallal szemközt az α szög, a 19 egység hosszú oldallal szemközt a β szög.

c) Ha egy háromszög derékszögű, akkor a két rövidebb oldalának (a befogóinak) négyzetösszege egyenlő a leghosszabb oldal (átfogó) négyzetével. Itt $15^2 + 18^2 = 549$, de $23^2 = 529$, így mivel ezek nem egyenlők, ezért a Pitagorasz-tétel szerint ez nem derékszögű háromszög.

A Pitagorasz-tétel megfordítása (8.10. ábra) szerint ha egy háromszög két rövidebb oldalának négyzetösszege egyenlő a leghosszabb oldalának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű. Itt $8^2 + 15^2 = 289 = 17^2$, vagyis a háromszög derékszögű.

Mielőtt elkezdenénk az oldalak négyzetösszegét vizsgálni, vegyük észre, hogy a két rövidebb oldal összege kisebb, mint a leghosszabb oldal, így a háromszög-egyenlőtlenség miatt nincs ilyen háromszög.

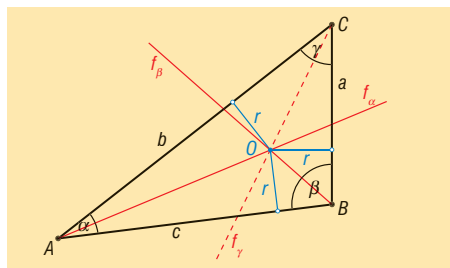


4. példa Döntsük el, melyik igaz az alábbi állítások közül!

- Minden háromszög belsejében van olyan pont, amelyik a háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra van.
- Minden háromszög belsejében van olyan pont, amelyik a háromszög oldalegyeneseitől egyenlő távolságra van.
- Minden háromszögnek van olyan magasságvonala, amelyiknek talppontja (a szemközti oldalegyenessel vett metszéspontja) valamelyik oldal belső pontja.
- Van olyan háromszög, amelynek a magasságpontja egybeesik a háromszög valamelyik csúcsával.
- A háromszög súlypontja 2:3 arányban osztja a súlyvonalakat.

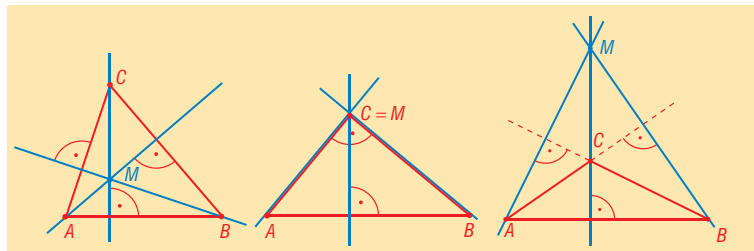
Megoldás:

- A sík bármely három, nem egy egyenesbe eső pontjához található pontosan egy olyan pont a síkon, amelyik mindhárom ponttól egyenlő távolságra van. Ez azt is jelenti, hogy minden háromszögnek van körülírt köre. De ennek középpontja nem feltétlenül esik a háromszög belsejébe. Az állítás hamis.
- Két-két oldalegyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a két oldalegyenes által bezárt szög(ek) szögfelezője. A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást, ez a háromszög beírt körének középpontja. Ez mindig a háromszög belsejébe esik (8.12. ábra). Az állítás igaz.

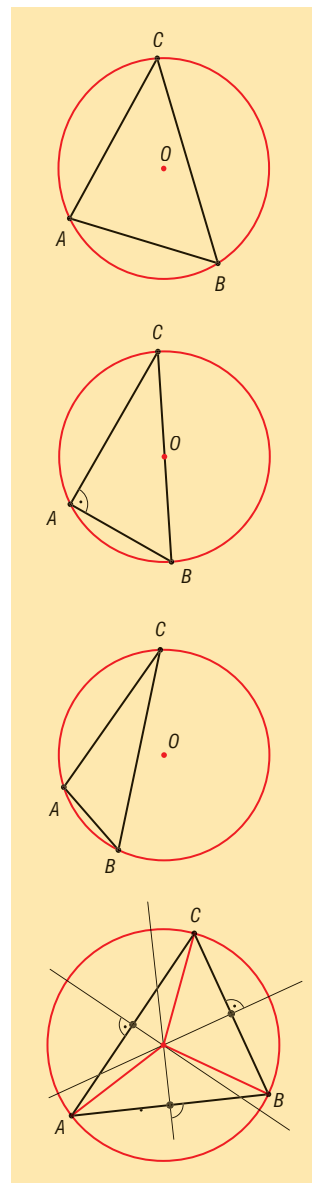


8.12. ábra A 4. b) példához

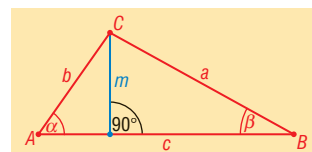
- Igaz: a leghosszabb oldalhoz tartozó magasság talppontja mindig a szemközti oldalszakasz belső pontja. (A leghosszabb oldalon fekvő szögek hegyesszögek 8.13. ábra.)
- Igaz: a derékszögű háromszög magasságpontja a derékszög csúcsa (8.14. ábra).



8.14. ábra A 4. d) példához. A háromszög magasságpontja



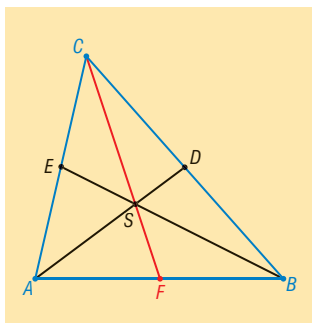
8.11. ábra A 4. a) példához. A háromszög köré írt kör középpontja az oldalfélező merőlegesei metszéspontja



8.13. ábra A 4. c) példához



Rendszerező összefoglalás



8.15. ábra 4. e) példához
 $CS : SF = 2 : 1$

Az n oldalú sokszög átlói-
nak száma:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

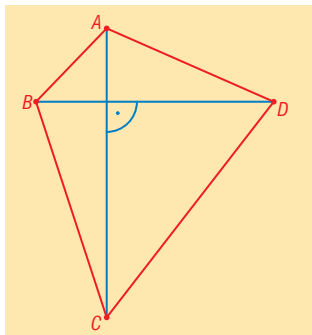


8.16. ábra Átlók száma

Az n -oldalú sokszög belső
szögeinek összege:
 $(n-2) \cdot 180^\circ.$



8.17. ábra Belső szögek összege



8.18. ábra A 6. b) példához

e) Hamis. A háromszög súlypontja 2:1 arányban osztja a súlyvonalakat, ez a pont a súlyvonalaknak a csúctól távolabbi harmadolópontjába esik (8.15. ábra).



5. példa Mennyi a belső szögek összege abban a sokszögben, amelynek 65 átlója van?

Megoldás:

Egy n oldalú sokszögnek $\frac{n(n-3)}{2}$ átlója van (8.16. ábra) ($n \geq 3$). Így az $\frac{n(n-3)}{2} = 65$ egyenlet megoldásából megkaphatjuk n értékét.

$$n^2 - 3n - 130 = 0, \quad n_1 = -10 \text{ és } n_2 = 13.$$

Negatív szám nem lehet megoldása a feladatnak, így a sokszög 13 oldalú. Belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180^\circ = (13-2) \cdot 180^\circ = 1980^\circ$ (8.17. ábra).



6. példa Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e vagy sem.

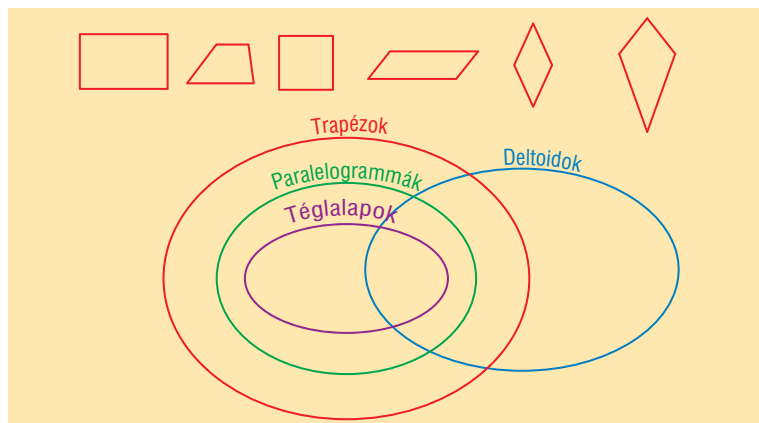
- Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.
- Ha egy négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor a négyszög deltoid.
- Ha egy négyszög két-két szöge egyenlő, akkor a négyszög paralelogramma.
- Ha egy négyszög egyszerre deltoid és téglalap is, akkor négyzet.
- Minden téglalaphoz van két párhuzamos oldala.
- Nem minden négyzet rombusz.
- Van olyan paralelogramma, amelynek átlói merőlegesek egymásra.
- Van olyan trapéz, amelynek a szárjai is párhuzamosak.

Megoldás:

- Igaz.
- Hamis. Ellenpélda: 8.18. ábra. Olyan négyszög, amelynek átlói merőlegesek egymásra, de nem deltoidok.
- Hamis. Ellenpélda: a húrtapéz két-két szomszédos szöge egyenlő.
- Igaz. Az átlójára szimmetrikus téglalap csak négyzet lehet.
- Igaz.
- Hamis. Minden négyzet oldalai egyenlők, így rombusz.
- Igaz. A négyzet.
- Igaz. A paralelogrammák.

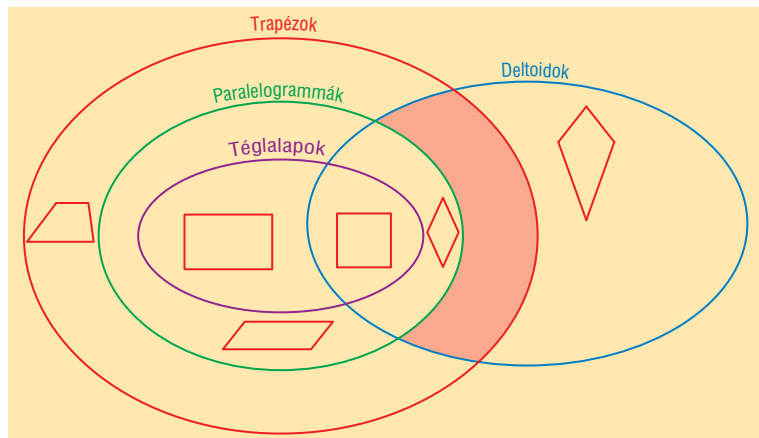


7. példa Helyezzük el az alábbi négyszögeket a 8.20. ábra halmazainak megfelelő rekeszeibe! Melyik részbe nem kerülhet semmilyen négyszög?



8.20. ábra A 7. példa halmazai

Megoldás:



8.21. ábra A megoldás

A trapézok és deltoidok halmazának metszetébe csak paralelogrammák tartoznak. Tehát a satírozott rész üres halmaz.



8. példa Egy 3,7 cm sugarú kör P pontja a kör AB átmérőjének A végpontjától 2,4 cm-re van. Milyen messze van a P pont az átmérő B végpontjától?

Megoldás:

A Thalész-tétel (8.22. ábra) szerint az $\angle APB = 90^\circ$. Így az APB derékszögű háromszögre alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tételt.

$$AB = 7,4 \text{ cm}, AP = 2,4 \text{ cm}$$

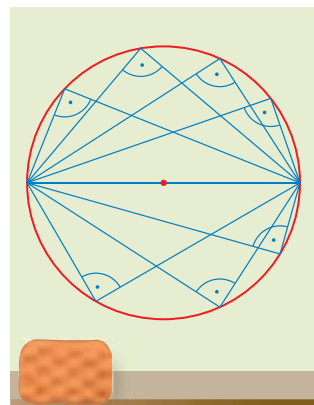
$$AP^2 + PB^2 = AB^2$$

$$PB = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{7,4^2 - 2,4^2}$$

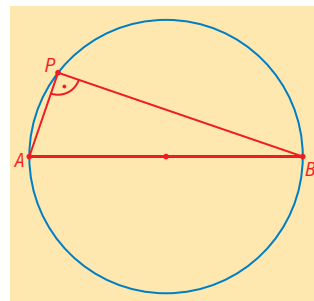
$$PB = 7 \text{ (cm)}.$$



8.19. ábra Görze vonalú négyszög kártyán



8.22. ábra Thalész-tétel



8.23. ábra $\angle APB = ?$



Rendszerező összefoglalás



Oldjuk meg!

1. Egy téglalap oldalainak hossza 12 cm és 18 cm. Hogyan szerkesztenénk meg a téglalap határoló vonalának azokat a pontjait, amelyek az egyik átló végpontjaitól egyenlő távolságra vannak? Számítsuk ki, mekkora ez a távolság!
2. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 36 cm és 48 cm. Számítsuk ki a háromszög magasságainak és súlyvonalainak a hosszát, valamint a háromszög köré és a háromszögbe írható körök sugarát! Mekkora távolságra van a háromszög súlypontja a magasságpontjától?
3. Egy konvex sokszögnek 18-cal több átlója van, mint oldala. Mennyi a belső szögeknek összege? Mennyi a külső szögeknek összege? Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha a sokszög két csúcsát véletlenszerűen kiválasztjuk, akkor azokat átló köti össze?
4. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis!
 - A) Ha egy háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak, akkor a háromszög hegyesszögű.
 - B) Ha egy háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak, akkor a háromszögnek van 60° -os szöge.
 - C) Ha egy háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak, akkor a háromszög szabályos.
 - D) Ha egy négyszög szögei számtani sorozatot alkotnak, akkor a négyszögnek van 90° -os szöge.
 - E) Ha egy négyszög szögei számtani sorozatot alkotnak, akkor a négyszög konvex.
5. Az ABC háromszög körülírt körének középpontja a háromszögön kívül van. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
 - A) Az ABC háromszög beírt körének középpontja a háromszögön kívül van.
 - B) Az ABC háromszög magasságpontja a háromszögön kívül van.
 - C) Az ABC háromszög oldalfelező merőlegesei a háromszögön belül metszik egymást.
 - D) Az ABC háromszög középvonalai tompaszögű háromszöget alkotnak.
 - E) Van olyan pont az ABC háromszög belsejében, amelyik mindhárom csúcstól egyenlő távolságra van.
6. a) Hogyan aránylik egymáshoz a szabályos háromszög beírt körének sugara, körülírt körének sugara és a súlyvonala?
b) Hogyan aránylik egymáshoz a beírt kör sugara, a körülírt kör sugara és az átfogóhoz tartozó súlyvonal abban a derékszögű háromszögben, amelynek van egy 30° -os szöge?

8.2. Geometriai transzformációk



8.24. ábra Transzformáció

A geometriai transzformáció olyan függvény, melynek értelmezési tartománya és képhalmaza is ponthalmaz. Egy P ponthoz a függvény által hozzárendelt pontot a P képének nevezzük, és P' -vel szoktuk jelölni.

Középiskolai tanulmányaink során különösen fontosak voltak az egybevágósági és a hasonlósági transzformációk. Az alábbiakban néhány példán keresztül felelevenítjük az ebben a témakörben szerzett ismereteinket.

Egybevágósági transzformációk a síkon:

- **identitás** (van 3, nem egy egyenesre illeszkedő fixpontja)

- ✦ **tengelyes tükrözés** (van 2 fixpontja, és nincs 3 olyan fixpontja, amely nem egy egyenesre illeszkedik)
- ✦ **pont körüli forgatás** (pontosan 1 fixpontja van)
(A középpontos tükrözés speciális pont körüli forgatás.)
- ✦ **eltolás** (nincs fixpontja)



1. példa Az ABC háromszög a oldalán fekvő szögeinek nagysága: $40^\circ, 80^\circ$. A háromszög magasságpontjának az a oldal egyenesére vonatkozó tükörképe: M' .

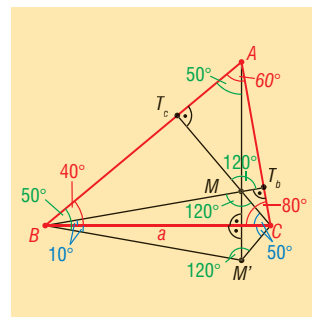
- Határozzuk meg az $ABM'C$ négyszög belső szögeit!
- Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis?
 - Az $MBM'C$ négyszög rombusz.
 - Az $MBM'C$ négyszög deltoid.
 - Az ABM' háromszög egyenlőszárú.

Megoldás:

a) A háromszög hiányzó szögének nagysága a háromszög belső szögeinek összegére vonatkozó összefüggés alapján 60° . A háromszög magasságpontja a magasságvonalak közös pontja. Készítsünk ábrát, és használjuk annak jelöléseit (8.25. ábra)!

Az AT_cMT_b négyszög belső szögeire vonatkozó tétel alapján $T_bMT_c\angle = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 120^\circ$. A $T_bMT_c\angle$ és a $BMC\angle$ csúcsszögek, tehát $BMC\angle = T_bMT_c\angle = 120^\circ$. A háromszög belső szögeinek összege 180° , így a BCT_b háromszögben a $CBT_b\angle = 10^\circ$, a BCT_c háromszögben a $T_cCB\angle = 50^\circ$. A tengelyes tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt: $M'BC\angle = 10^\circ$, $BCM'\angle = 50^\circ$ és $CM'B\angle = 120^\circ$. Innen az $ABM'C$ négyszög belső szögei rendre: $60^\circ, 50^\circ, 120^\circ$ és 130° .

b) Az 8.25. ábra alapján az (1) alatti állítás hamis, a (2) alatti állítás igaz. Mivel az ABT_a derékszögű háromszögben $BAT_a\angle = 50^\circ$ és $M'BA\angle = 50^\circ$, így az ABM' háromszög egyenlőszárú. Tehát a (3) alatti állítás igaz.



8.25. ábra Az 1. példa megoldásához

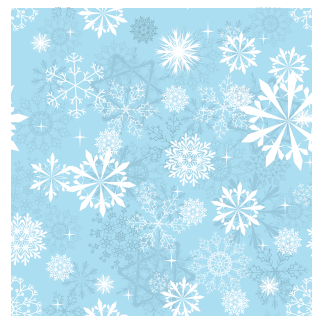


2. példa Hány szimmetriatengelye van, és hány különböző hosszúságú átlója van egy

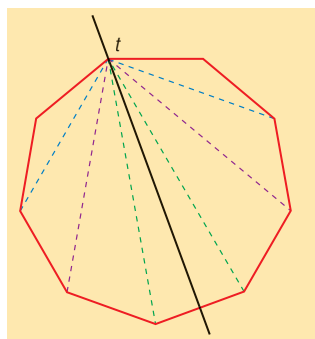
- egyenlőszárú háromszögnek,
- téglalapnak,
- rombusznak,
- szabályos kilencszögnek,
- szabályos százszögnek?

Megoldás:

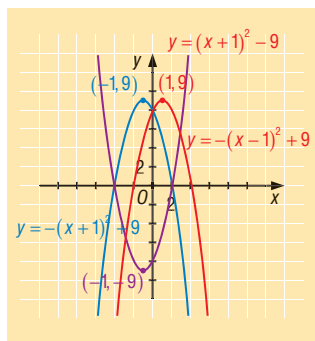
Az a), b), c) részek megoldása az 8.27. ábrán látható.



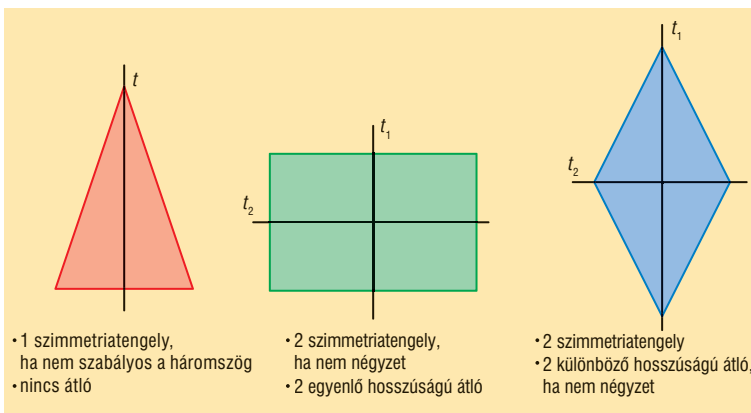
8.26. ábra Hópelyhek



8.28. ábra A szabályos kilencszög egy csúcsából húzható átlók



8.29. ábra A 3. példa megoldásához



8.27. ábra A 2. a)-c) példához

Mivel egy szabályos n -szögnek n darab szimmetriatengelye van, ezért a szabályos kilencszögnek 9, a szabályos százszögnek pedig 100. A szabályos n -szögek forgásszimmetrikusak, ezért elegendő az egy csúcsból kiinduló átlók hosszúságait vizsgálnunk. A szabályos kilencszög egy csúcsából 6 átló húzható, ezek között 3-3 egymás tükörképe (8.28. ábra), így ezek páronként egyenlő hosszúságúak. Tehát egy szabályos kilencszögnek 3 különböző hosszúságú átlója van. A szabályos százszög egy csúcsából 97 átló húzható, ezek között 48-48 egymás tükörképe a csúcsból a szemköztí csúcsba húzott átlóra, így ezek páronként egyenlő hosszúságúak. Tehát egy szabályos százszögnek $48 + 1 = 49$ különböző hosszúságú átlója van.



3. példa Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett g függvény hozzárendelési utasítását képlettel, ha a g függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy az $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ függvény grafikonját ($D_f = \mathbb{R}$) tükröztük

a) az origóra,
b) az y tengelyre?

Megoldás:

Az f függvény hozzárendelési szabályát teljes négyzetté kiegészítéssel az $f(x) = -(x-1)^2 + 9$ alakra hozhatjuk. Az f függvény grafikonja negatív irányba nyíló parabola, amelynek tengelypontja: $(1; 9)$ (8.29. ábra).

a) Az f függvény grafikonjának az origóra vonatkozó tükörképe pozitív irányba nyíló parabola, tengelypontja $(-1; -9)$. Megoldás:

$$g(x) = (x+1)^2 - 9 \quad (D_g = \mathbb{R}).$$

b) Az f függvény grafikonjának az y tengelyre vonatkozó tükörképe negatív irányba nyíló parabola, tengelypontja $(-1; 9)$. Megoldás:

$$h(x) = -(x+1)^2 + 9 \quad (D_h = \mathbb{R}).$$

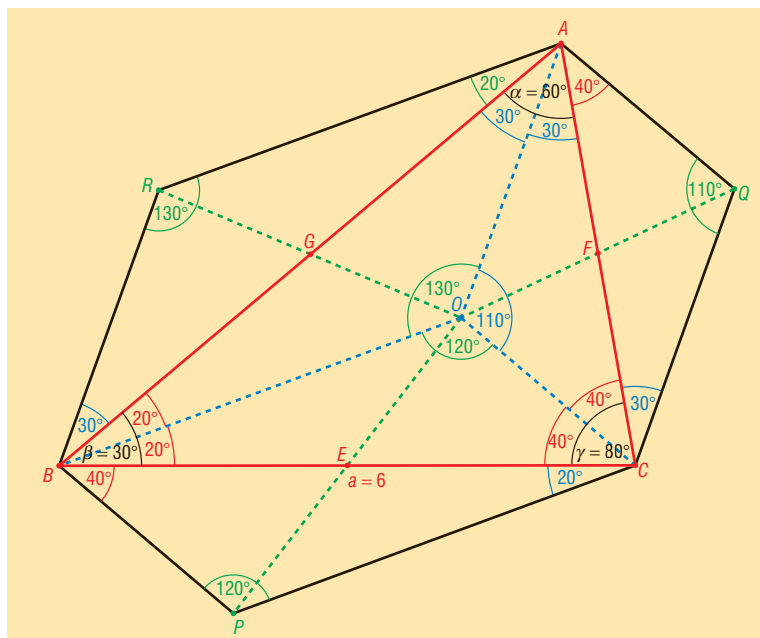


4. példa Az ABC háromszög $a = 6$ m oldalán fekvő szögeinek nagysága: 40° , 80° . A háromszög beírt körének középpontját tükröztük a háromszög oldalainak felezőpontjaira. E három pont a háromszög csúsaival együtt egy konvex hatszöget alkot.

- Mekkora a hatszög szögei?
- Hány négyzetméter a hatszög területe?

Megoldás:

a) A háromszög hiányzó szögének nagysága a háromszög belső szögeinek összegére vonatkozó összefüggés alapján 60° . A háromszög beírt körének középpontja a belső szögfelezők közös pontja. Készítsünk ábrát és használjuk annak jelöléseit (8.33. ábra)!



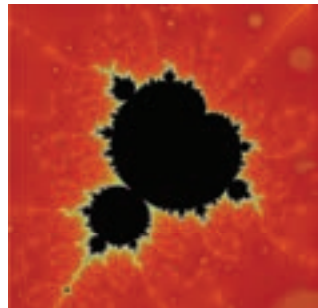
8.33. ábra A 4. példa megoldásához

Az OBC háromszögben a $\angle BOC = 180^\circ - 20^\circ - 40^\circ = 120^\circ$, COA háromszögben $\angle COA = 110^\circ$ és AOB háromszögben $\angle AOB = 130^\circ$.

A középpontos tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt

$$\begin{aligned} \angle CPB &= \angle BOC = 120^\circ, \quad \angle AQC = \angle COA = 110^\circ, \\ \angle BRA &= \angle AOB = 130^\circ, \quad \angle PBC = \angle BCO = 40^\circ, \\ \angle QAC &= \angle OCA = 40^\circ, \quad \angle ACQ = \angle CAO = 30^\circ, \\ \angle OAB &= \angle RBA = 30^\circ, \quad \angle BAR = \angle ABO = 20^\circ \text{ és} \\ \angle BCP &= \angle CBO = 20^\circ. \end{aligned}$$

Innen a kapott hatszög belső szögeinek nagysága: $\angle QAR = 120^\circ$, $\angle ARB = 130^\circ$, $\angle RBP = 110^\circ$, $\angle BPC = 120^\circ$, $\angle PCQ = 130^\circ$ és $\angle CQA = 110^\circ$.



8.30. ábra Mandelbrot-halmaz (tengelyesen szimmetrikus)



8.31. ábra Mandelbrot-halmaz más színezéssel

Pont körüli forgatás:

Adott O , α . Ha $P = O$, akkor $P' = O$.

Egyébként: $PO = P'O$ és $\angle POP' = \alpha$.



8.32. ábra Pont körüli forgatás



Rendszerező összefoglalás

A pont körüli forgatás tulajdonságai: egybevágósági transzformáció; irányítástartó; egy fixpont (O).



8.34. ábra Tulajdonságok



8.35. ábra Forgatás



8.36. ábra „Forgásszimmetria”

b) A középpontos tükrözés miatt

$$BOC\Delta \cong CPB\Delta, \quad COA\Delta \cong AQC\Delta \quad \text{és} \quad AOB\Delta \cong BRA\Delta.$$

$$\text{Így } T_{\text{hatszög}} = 2 \cdot T_{ABC} = 2 \cdot \frac{6^2 \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ}{2 \cdot \sin 60^\circ} \approx 26,31 \text{ (m}^2\text{)}.$$



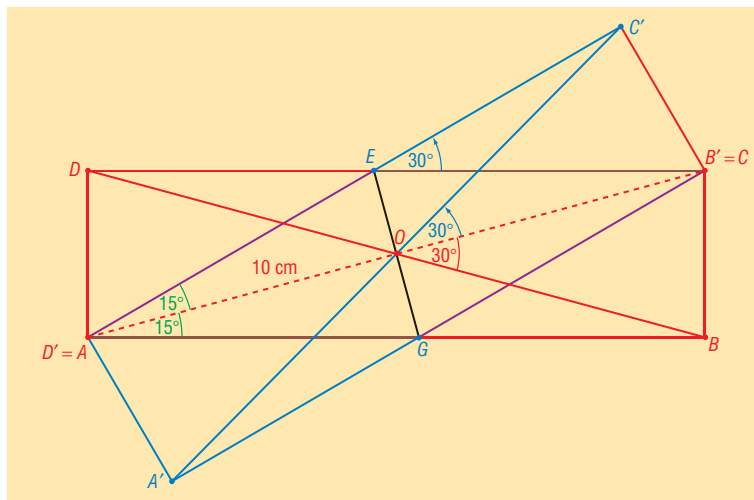
5. példa Egy téglalap átlóinak hajlásszöge 30° , az átlók hossza 20 cm. A téglalapot az átlók metszéspontja körül 30° nagyságú szöggel elforgatjuk és megjelöljük az eredeti téglalap és az elforgatáskor kapott téglalap oldalainak metszéspontjait (ha léteznek).

a) Milyen sokszöget határoznak meg ezek a metszéspontok?

b) Mekkora ennek a sokszögnek a szögei, oldalai?

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát (8.37. ábra)! A téglalap átlóinak hossza egyenlő, és az átlók hajlásszögének nagysága egyenlő a forgatás szögével, a pont körüli forgatás definíciója miatt $B' = C$ és $D' = A$. Az eredeti téglalap és az elforgatáskor kapott téglalap oldalainak metszéspontjai a $CEAG$ négyszöget határozzák meg. A téglalap szemben levő oldalai párhuzamosak, így a $CEAG$ négyszög paralelogramma. Mivel az AOB egyenlőszárú háromszögnek a $BOC\angle = 30^\circ$ külső szöge, ezért $GAO\angle = 15^\circ$. Hasonlóan adódik, hogy $OAE\angle = 15^\circ$. A fentiek miatt a $CEAG$ négyszög rombusz.



8.37. ábra Az 5. példa megoldásához

b) A $CEAG$ rombusz belső szögeinek nagysága: 30° , 150° . Az AGO derékszögű háromszögben a koszinusz szögfüggvény definíciója alapján:

$$AG = \frac{10}{\cos 15^\circ} \approx \frac{10}{0,9659} \approx 10,35 \text{ (cm)}.$$

A $CEAG$ rombusz oldalainak hossza közelítőleg 10,35 cm.



6. példa A valós számok halmazán értelmezett g függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy az f függvény grafikonját ($D_f = \mathbb{R}$) az $\vec{e}$ vektorral eltoltuk (8.38. ábra).

a) Adjuk meg az $\vec{e}$ vektor koordinátáit, ha $f(x) = -x^2$ és $g(x) = -(x+3)^2 + 4$!

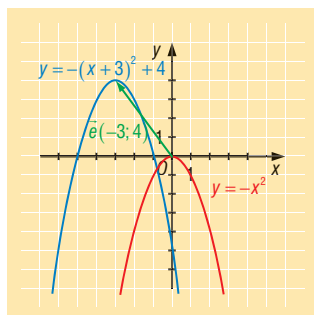
b) Határozzuk meg a g függvény hozzárendelési utasítását képlettel, ha $f(x) = \frac{1}{2}|x|$ és $\vec{e}(2; -3)$!

Megoldás:

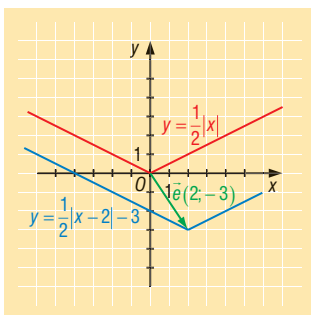
Készítsünk ábrát!

a) Az 8.39. ábra alapján a megoldás: $\vec{e}(-3; 4)$.

b) Az 8.40. ábra alapján a megoldás: $g(x) = \frac{1}{2}|x-2|-3$ ($D_g = \mathbb{R}$).



8.39. ábra A 6. a) példához



8.40. ábra A 6. b) példához

Hasonlósági transzformációk

A hasonlóság egyik leggyakoribb alkalmazása a modellek, makettek készítése. A mérnöki tervezéskor a nagyon nagy vagy nagyon kicsi dolgok hétköznapi méretű modelljei segítenek elképzelni a tárgyak alakját, tulajdonságait.

A modelleken végzett tesztek eredményei alapján alakítják ki például a repülőgépek, autók alakját (kis légellenállási tényező).



7. példa A k kör egyenlete: $x^2 + y^2 + 12x - 6y = 36$. Írjuk fel a k körnek az origóból való $\frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlósággal kapott képének egyenletét!

Megoldás:

A kör minden P pontja r távolságra van a kör C középpontjától, a középpontos hasonlóság aránytartó tulajdonsága miatt mindegyik pont

P' képe $\frac{2}{3}r$ távolságban lesz a középpont C' képétől. Tehát a kör

Eltolás:

Adott egy vektor: $\vec{v}$ Minden P pontnak olyan P' pont legyen a képe, amelyre $\vec{PP'} = \vec{v}$!



8.38. ábra Eltolás

Az eltolás tulajdonságai: egybevágósági transzformáció; irányítástartó; nincs fix-pont; bármely egyenes és képe párhuzamos.



8.41. ábra Tulajdonságok



8.42. ábra Modell

Középpontos hasonlóság:

adott O és $\lambda \neq 0$.

$OP' = |\lambda|OP$, $P' \in l(OP)$, ha

$\lambda > 0$, $O \notin \overline{PP'}$, egyébként

$O \in \overline{PP'}$.

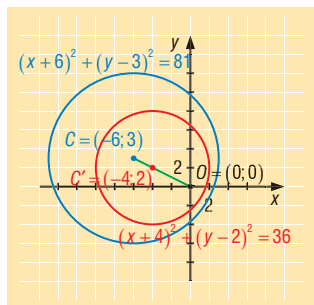


8.43. ábra Középpontos hasonlóság

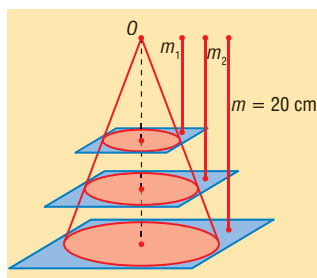
A középpontos hasonlóság tulajdonságai: aránytartó; szögtartó; irányítástartó; bármely egyenes és képe párhuzamos.



8.44. ábra Tulajdonságok



8.45. ábra A 7. példához

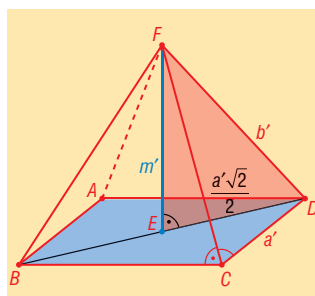


8.46. ábra A 8. példa megoldásához

Hasonló síkidomok területének aránya egyenlő a hasonlóság arányának négyzetével. Hasonló testek felszínének (térfogatának) aránya egyenlő a hasonlóság arányának négyzetével (köbével).



8.47. ábra Hasonló pontthalmazok mértékei



8.48. ábra Szabályos négyoldalú gúla

pontjainak képe illeszkedik egy C' középpontú $r' = \frac{2}{3}r$ sugarú k' körre (8.45. ábra). Először határozzuk meg a k kör C középpontjának koordinátáit, sugarának nagyságát!

A kör egyenlete: $x^2 + y^2 + 12x - 6y = 36$,

$$(x+6)^2 + (y-3)^2 = 81.$$

Ahonnán $C(-6;3)$ és $r = 9$. A C pont képe az OC szakasz C -hez közelebbi harmadolópontja. A harmadolópont koordinátáira vonatkozó

összefüggés alapján $C'\left(\frac{2 \cdot (-6) + 1 \cdot 0}{3}; \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{3}\right)$, azaz $C'(-4;2)$ és

$r' = \frac{2}{3}r = 6$. Innen a k kör k' képének egyenlete:

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 36.$$



8. példa Egy forgáskúpot az alaplapjával párhuzamos síkokkal 3 részre osztottunk. A keletkező térrészek térfogatainak aránya 8:19:37 (kis kúp, csonka kúp, csonka kúp), a kúp magassága 20 cm. Milyen távolságban vannak a metsző síkok az alaplaptól?

Megoldás:

Készítsünk ábrát (8.46. ábra)!

A T területű alaplappal párhuzamos síkok az eredeti forgáskúpból a T_1 alapterületű, m_1 magasságú (V_1 térfogatú), illetve T_2 alapterületű, m_2 magasságú (V_2 térfogatú) forgáskúpokat metszik le. A keletkezett forgáskúpok hasonlóak az eredeti forgáskúphoz, mert az O középpontú

$\lambda_1 = \frac{m_1}{m}$, illetve $\lambda_2 = \frac{m_2}{m}$ arányú középpontos hasonlósági transzformáció az eredeti forgáskúpot a keletkezett kúpokba viszi át. Jelölje V az adott forgáskúp térfogatának nagyságát! A feladat feltétele alapján a keletkező kúpok térfogatainak aránya $V_1 : V = 8 : 64$ (8.47. ábra) és $V_2 : V = 27 : 64$. Mivel hasonló testek megfelelő szakaszainak aránya

megegyezik a hasonlóság arányával, és hasonló testek térfogatainak aránya egyenlő a hasonlóság arányának a köbével, így $m_1 : m = 1 : 2$ és $m_2 : m = 3 : 4$. Innen $m_1 = 10$ cm, $m_2 = 15$ cm adódik. Tehát a metsző síkok az alaplaptól 10 cm, illetve 5 cm távolságban vannak.



9. példa Egyiptomban a kereskedők az odalátogató turisták-nak emléktárgy gyanánt olyan piramis alakú gyertyákat (négyoldalú szabályos gúlákat) kínálnak, amelyek a Kheopsz piramis 1:1500 arányú másai. A Kheopsz piramis magassága közelítőleg 138 m, alapéle 228 m.

a) Mekkora egy gyertya alapéle, oldaléle?

b) A piramis palástjának területe hányszor akkora, mint egymillió gyertya palástjának területe?

Megoldás:

a) A feladat feltétele alapján a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{1}{1500}$. Mivel hasonló testek megfelelő szakaszainak aránya egyenlő a hasonlóság arányával, így a gyertya alapéle, magassága: $a' = \lambda a = \frac{228}{1500} m = 15,2 \text{ cm}$ és $m' = \lambda m = 9,2 \text{ cm}$. Az oldalél hosszának meghatározásához készítünk ábrát (8.48. ábra)!

A DFE derékszögű háromszög egyik befogója a gúla magassága, a másik befogója az ABCD négyzet fél átlója és átfogója a gúla oldaléle. Erre a háromszögre alkalmazva a Pitagorasz-tételt:

$$b'^2 = m'^2 + \left(\frac{a'\sqrt{2}}{2} \right)^2, \text{ innen } b' \approx 14,15 \text{ cm}.$$

b) Hasonló síkidomok területének aránya egyenlő a hasonlóság arányának négyzetével. Így egy gyertya egy oldallapjának területe és a piramis egy oldallapjának területe úgy aránylik egymáshoz, mint $\lambda^2 = \left(\frac{1}{1500} \right)^2$.

Innen a piramis palástjának területe $\frac{1}{10^6 \cdot \lambda^2} = \frac{1500^2}{10^6} = 2,25$ -szor akkora, mint egymillió gyertya palástjának területe.



Oldjuk meg!

1. Hány átlója van annak a szabályos sokszögnek, amelynek pontosan 26 szimmetriatengelye van?
2. Egy négyzet oldalának harmadolópontjait összekötöttük a 8.52. ábrán látható módon. Igaz-e, hogy az így kapott két négyszög közös részeként kapott nyolcszög szabályos?
3. Tükrözzünk egy szabályos háromszöget a középpontjára! Milyen síkidom az eredeti és a képháromszög közös része, és hányad része a területe az eredeti háromszög területének?
4. Az $A(8;-4)$, $B(0;12)$ és $C(-4;0)$ pontok által meghatározott háromszögön hajtsunk végre egy origó középpontú $\lambda = -\frac{3}{4}$ arányú középpontos hasonlóságot! Mik lesznek a képként kapott háromszög csücsai? Hányadrésze a képháromszög területe az eredeti háromszög területének?
5. Adjuk meg a valós számok halmazán értelmezett g függvény hozzárendelési utasítását képlettel! A g függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy az $f(x) = x^2 - 6x + 5$ valós függvény grafikonját tükröztük a) az origóra, b) az y tengelyre, c) az x tengelyre.
6. Egy szabályos négyoldalú gúlát az alaplappal párhuzamos síkkal két egyenlő térfogatú részre vágunk. Hogy aránylik egymáshoz a két test magassága?
7. Egy trapéz alapjainak hossza 15 cm és 7 cm. Milyen arányban osztják egymást két részre az átlói? Milyen arányban osztja két részre az átlók metszéspontja a rajta átmenő magasságot, illetve a rajta átmenő alapokkal párhuzamos egyenesnek a trapézba eső szakaszát?

Hasonlósági transzformáció: egy egybevágósági transzformáció és egy középpontos hasonlóság egymásutánja.



8.49. ábra Hasonlósági transzformáció

A hasonlósági transzformáció egyenestartó; szögtartó; aránytartó.

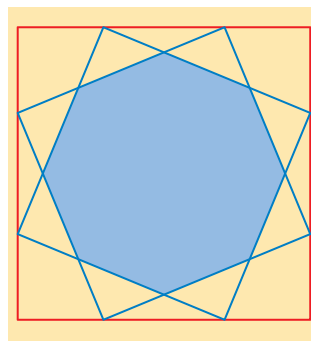


8.50. ábra Tulajdonságai

Két pontthalmaz hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyiket a másikba átviszi.



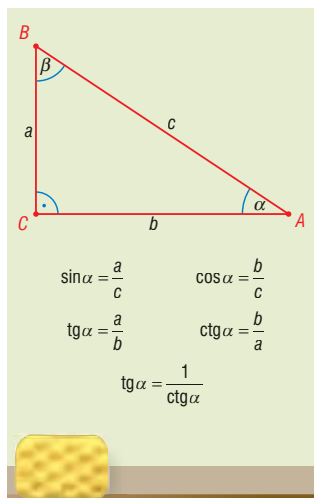
8.51. ábra Pontthalmazok hasonlósága



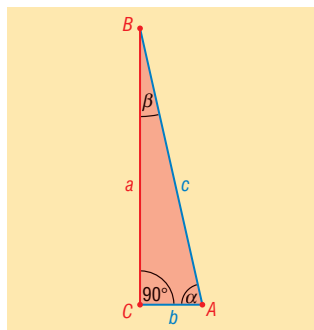
8.52. ábra A 2. feladat ábrája



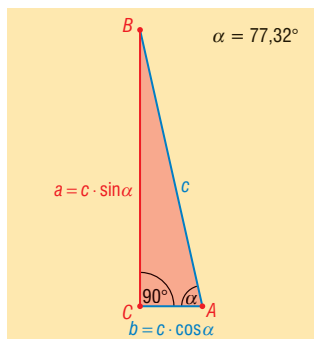
9. A trigonometria alkalmazásai



9.1. ábra Hegyesszögek szögfüggvényei



9.2. ábra Az 1. a) példa megoldásához



9.3. ábra Az 1. b) példa megoldásához

A háromszögek oldalai és szögei közötti összefüggésekkel a matematika egyik ága, a trigonometria foglalkozik. Az alábbi feladatok segítségével áttekintjük az ebben a témakörben megszerzett ismereteinket.



1. példa Valamely derékszögű háromszög területe 90 cm, az egyik befogó és az átfogó hosszának aránya $\frac{9}{41}$. Határozzuk meg

- a háromszög szögeinek nagyságát!
- a háromszög oldalainak hosszát!
- a háromszög köré írt körének sugarát!

Megoldás:

a) A feladat feltétele és a hegyesszögek koszinuszának definíciója (9.1. ábra) miatt $\cos \alpha = \frac{9}{41}$, ahonnan $\alpha \approx 77,32^\circ$ adódik. A $\beta = 90^\circ - \alpha$ összefüggésből kapjuk, hogy $\beta \approx 12,68^\circ$ (9.2. ábra). Tehát a háromszög szögeinek nagysága: $12,68^\circ$, $77,32^\circ$ és 90° .

b) **1. megoldás:**

A hegyesszögek szinuszának és koszinuszának definíciója alapján $a = c \cdot \sin \alpha$, $b = c \cdot \cos \alpha$ egyenlőségek írhatók fel (9.3. ábra). Így a háromszög területéből:

$$\begin{aligned} c + c \cdot \sin 77,32^\circ + c \cdot \cos 77,32^\circ &= 90, \\ c(1 + 0,9756 + 0,2195) &= 90, \\ c &\approx 41. \end{aligned}$$

Innen $a = c \cdot \sin 77,32^\circ \approx 40$ cm, $b = c \cdot \cos \alpha \approx 9$ cm adódik. Tehát a háromszög oldalainak nagysága: 9 cm, 40 cm, 41 cm.

2. megoldás:

Az α hegyesszög szinusza a $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ azonosság alapján egyenlő $\frac{40}{41}$ -del. Innen a terület felírásából

$$\begin{aligned} c + c \cdot \frac{40}{41} + c \cdot \frac{9}{41} &= 90, \\ c \cdot \frac{90}{41} &= 90, \\ c &= 41. \end{aligned}$$

Ebből pedig $b = 9$ cm, $a = 40$ cm adódik.

c) A Thalész-tétel megfordítása értelmében a derékszögű háromszög köré írt körének sugara: $R = \frac{c}{2} = 20,5$ cm.



2. példa Egy 1489 m magas hegycsúcsról egy léghajó $15,26^\circ$ -os emelkedési szögben, míg a léghajónak a hegy melletti tóban levő tükörképe $63,74^\circ$ -os depressziószögben látszik.

a) Milyen magasan van a léghajó a tó víztükre felett?
b) Milyen távol van a léghajó (légvonalban) a hegycsúcstól?

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével és használjuk a jelöléseit (9.5. ábra)! Az ABC és az $A'BC$ derékszögű háromszögekben a tangens szögfüggvény definíciója szerint:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 15,26^\circ &= \frac{x - 1489}{y} \\ \operatorname{tg} 63,74^\circ &= \frac{x + 1489}{y} \end{aligned} \right\}$$

Osszuk el a két egyenletet egymással, majd a kapott egyenletből fejezzük ki az x -et!

$$\frac{\operatorname{tg} 15,26^\circ}{\operatorname{tg} 63,74^\circ} = \frac{x - 1489}{x + 1489},$$

$$(x + 1489) \cdot \operatorname{tg} 15,26^\circ = (x - 1489) \cdot \operatorname{tg} 63,74^\circ,$$

$$x \cdot \operatorname{tg} 15,26^\circ + 1489 \cdot \operatorname{tg} 15,26^\circ = x \cdot \operatorname{tg} 63,74^\circ - 1489 \cdot \operatorname{tg} 63,74^\circ,$$

$$1489 \cdot (\operatorname{tg} 15,26^\circ + \operatorname{tg} 63,74^\circ) = x \cdot (\operatorname{tg} 63,74^\circ - \operatorname{tg} 15,26^\circ),$$

$$x = \frac{1489 \cdot (\operatorname{tg} 15,26^\circ + \operatorname{tg} 63,74^\circ)}{\operatorname{tg} 63,74^\circ - \operatorname{tg} 15,26^\circ} \approx 1952,18 \text{ m.}$$

Tehát a léghajó 1952,18 méter magasan van a tó víztükre felett.

b) Az ABC derékszögű háromszögekben a szinusz szögfüggvény definíciója szerint:

$$\sin 15,26^\circ = \frac{x - 1489}{c},$$

$$c = \frac{1952,18 - 1489}{\sin 15,26^\circ} \approx 1759,81 \text{ m.}$$

Tehát a léghajó és a hegycsúcs távolsága légvonalban 1759,81 méter.



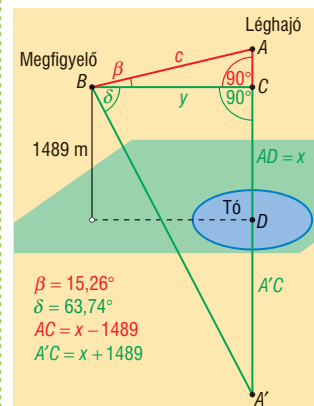
3. példa Anna vásárolt két üveggolyót. Mekkora nyílásszögű forgáskúpba helyezhetők el az üveggolyók úgy, hogy a golyók egymást és a kúp palástját is érintsék, ha a golyók átmérője 2 cm és 8 cm?

Megoldás:

A térgeometriai feladatok megoldásakor megfelelő síkmetszeteket és azokban derékszögű háromszögeket keresünk. Ezek segítségével határozzuk meg a keresett szakaszokat, szögeket. Ennél a feladatnál egy, a



9.4. ábra Léghajó



9.5. ábra A 2. példa megoldásához



Rendszerező összefoglalás



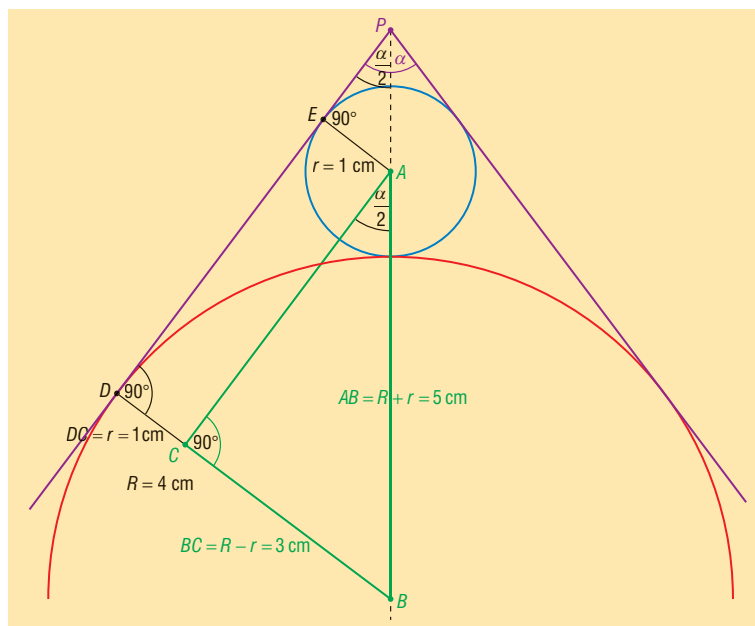
9.6. ábra Üveggolyók



9.8. ábra A sátozottós ház

kúp csúcsát és a gömbök középpontjait tartalmazó síkmetszettel dolgozunk. Így a példa feltételei miatt két egymást kívülről érintő kör közös külső érintőinek hajlásszögét keressük. Készítsünk ábrát! Az ábra készítésekor használjuk fel, hogy:

- az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra,
- két egymást kívülről érintő kör esetén a középpontok távolsága egyenlő a sugarak összegével,
- a kúp csúcsa és a gömbök középpontjai egy egyenesre illeszkednek, és az ábra szimmetrikus erre az egyenesre (9.7. ábra).



9.7. ábra A 3. példa megoldásához

Az ABC derékszögű háromszög A , B csúcsa a körök (gömbök) középpontjai, a C csúcs pedig a D pont $\overrightarrow{EA}$ vektorú párhuzamos eltolással kapott képe. A fentiek miatt, az ABC derékszögű háromszögben a hegyesszögek szinuszának definíciója értelmében: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$, ahonnan $\frac{\alpha}{2} \approx 36,87^\circ$. Tehát a kúp nyílásszöge: $\alpha \approx 73,74^\circ$.



4. példa Egy sátozottós ház padlástérének alapja olyan téglalap, amelynek oldalhosszúságai 12 m és 16 m. Az alap 16 m-es oldalára illeszkedő tetősíkok a vízszintessel 50° -os szöget zárnak be.

a) Hány darab cserép szükséges a tetőfedéshez, ha egy cserép $0,075 \text{ m}^2$ területet fed le, és az elméletileg számított cserépszámot gyakorlati okokból 10%-kal meg kell növelni?

b) Hány m^3 a padlástér térfogata?

(Az eredményeket egészen kerekítve adjuk meg!)

A sátoztető egy egyenlőszárú háromszög alapú egyenes hasáb. Készítsünk ábrát, és használjuk a jelöléseit (9.9. ábra)!

a) A befedendő terület nagyságának meghatározásához ki kell számolni a b oldal hosszát. A CAG derékszögű háromszögben a hegyesszögek koszinuszának definíciója értelmében: $\cos 50^\circ = \frac{GC}{b}$, ahonnan $b = \frac{6}{\cos 50^\circ} \approx 9,33$ m. A befedendő terület nagysága:

$$2T_{ACED} = 2ab \approx 2 \cdot 9,33 \cdot 16 = 298,56 \text{ m}^2.$$

Elméletileg $\frac{298,56}{0,075} = 3980,8$ darab cserép kellene, de gyakorlati okok-

ból e mennyiség 110%-a, azaz 1,1-szerese kell: 4378,88 darab. Tehát 4379 darab cserép szükséges.

b) A hasáb térfogatának kiszámításához az alaplappjának területét és magasságát kell meghatároznunk. A hasáb magassága egyenlő a téglalap a oldalával: $M = 16$ m. A hasáb alaplappjának területe a trigonometrikus területképlet alapján:

$$T_{\text{alaplapp}} = T_{ABC} = \frac{BC \cdot AC \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{12 \cdot 9,33 \cdot \sin 50^\circ}{2} \approx 42,88 \text{ m}^2. \text{ Innen a}$$

padlás térfogata egészre kerekítve: $V_{\text{padlás}} = T_{\text{alaplap}} \cdot M \approx 686 \text{ m}^3$.



5. példa

5. példa Határozzuk meg az α hegyesszög hiányzó szögfüggvényértékeit, ha tudjuk, hogy

a) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$; b) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{9}{40}$!

a) 1. megoldás:

Egy hegyesszög szinusza és koszinusza között a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ összefüggés áll fenn. Mivel hegyesszög koszinusza csak pozitív érték lehet,

ezért $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}$. Innen az α he-

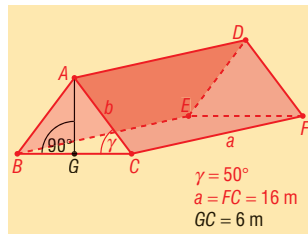
gyésszög tangense, szinusa és koszinusa között fennálló $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

azonosság miatt $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$. Az α hegyesszög tangense és kotan-

gense között fennálló $\text{ctg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$ azonosság miatt $\text{ctg } \alpha = \frac{24}{7}$.

2. megoldás:

A feladat feltétele és az α hegyesszög szinuszának definíciója miatt az α hegyesszöggel szemközti befogó hossza $7x$, az átfogó hossza $25x$, ahol $x > 0$ teljesül (9.11. ábra). A Pitagorasz-tétel alapján: $(7x)^2 + b^2 = (25x)^2$, ahonnan $b = 24x$ adódik. Így az α



9.9. ábra A 4. példa megoldásához

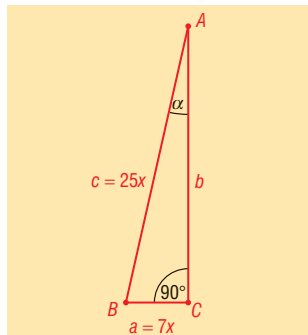
Bármely $x \in \mathbb{R}$ estén
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, ak-

$$\text{kor } \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$



9.10. ábra Trigonometrikus összefüggések



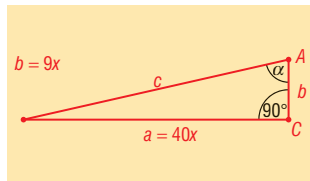
9.11. ábra Az 5. a) példa megoldásához

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

9.12. ábra Nevezetes szögek szögfüggvényértékei



Rendszerező összefoglalás



9.13. ábra Az 5. b) példa megoldásához

Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $\sin x$ ($\cos x$) az x irányszögű egységvektor második (első) koordinátája.



9.14. ábra Tetszőleges szögek szinusza (koszinusza)

Ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, akkor $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.



9.15. ábra A tangens definíciója

Ha $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, akkor $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.



9.16. ábra A kotangens definíciója

hegyesszög szögfüggvényeinek definíciói szerint: $\cos \alpha = \frac{24x}{25x} = \frac{24}{25}$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7x}{24x} = \frac{7}{24} \text{ és } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{24x}{7x} = \frac{24}{7}.$$

b) 1. megoldás:

Az α hegyesszög kotangense, szinusza és koszinusza között fennálló

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \text{ a } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ azonosságok és a feladat feltétele}$$

alapján:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ (2) \frac{9}{40} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ (3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \end{array} \right\}$$

A (3) alatti egyenletről a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{40}{9}$ -et kapjuk. Az (1) és a (2) alatti egyenletekből álló egyenletrendszert kell megoldanunk: az egyik ismeretlenünk a szög szinusza, a másik a szög koszinusza. A (2) alatti egyenletről kifejezzük a $\cos \alpha$ -t: $\cos \alpha = \frac{9}{40} \sin \alpha$, majd behelyettesítjük az (1) alatti egyenletbe:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \frac{81}{1600} \sin^2 \alpha &= 1, \\ \frac{1681}{1600} \sin^2 \alpha &= 1, \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1600}{1681}. \end{aligned}$$

Innen négyzetgyökvonás után a $\sin \alpha > 0$ miatt $\sin \alpha = \frac{40}{41}$ adódik,

$$\text{ahonnan azt kapjuk, hogy } \cos \alpha = \frac{9}{40} \sin \alpha = \frac{9}{40} \cdot \frac{40}{41} = \frac{9}{41}.$$

2. megoldás:

Az α hegyesszög kotangensének definíciója és a feladat feltétele miatt az α hegyesszög melletti befogó hossza $9x$, az α hegyesszöggel szemközti befogó hossza $40x$, ahol $x > 0$ teljesül (9.13. ábra).

A Pitagorasz-tétel alapján: $(9x)^2 + (40x)^2 = c^2$, ahonnan $c = 41x$ adódik. Így az α hegyesszög szögfüggvényeinek definíciói szerint:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{40x}{9x} = \frac{40}{9}, \quad \sin \alpha = \frac{40x}{41x} = \frac{40}{41} \text{ és } \cos \alpha = \frac{9x}{41x} = \frac{9}{41}.$$



6. példa Számológép és táblázat használata nélkül adjuk meg egyetlen valós számként az alábbi kifejezések értékét!

a)

$$\frac{1 - 2 \cos 90^\circ + \sin 120^\circ}{3 - 2 \sin 90^\circ} (3 \operatorname{tg} 210^\circ + 4 \operatorname{ctg}(-225^\circ) + \operatorname{tg}(-315^\circ) + 2 \cos 300^\circ);$$

b) $(1 + \cos 36^\circ) \cdot (1 - \sin 54^\circ) + \cos 54^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \operatorname{ctg} 36^\circ + \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\operatorname{ctg} 70^\circ}.$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{1 - 2 \cos 90^\circ + \sin 120^\circ}{3 - 2 \sin 90^\circ} (3 \operatorname{tg} 210^\circ + 4 \operatorname{ctg}(-225^\circ) + \operatorname{tg}(-315^\circ) + 2 \cos 300^\circ) = \\ & = \frac{1 - 2 \cdot 0 + \sin 60^\circ}{3 - 2} (3 \operatorname{tg} 30^\circ - 4 \operatorname{ctg} 45^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ + 2 \cdot \cos 60^\circ) = \\ & = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (\sqrt{3} - 4 + 1 + 1) = \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 2)}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Vegyük észre, hogy a 36° és az 54° , valamint a 20° és a 70° egymás pótszögei. Innen a pótszögek szögfüggvényeire vonatkozó azonosságok alapján (9.18. ábra), a kijelölt műveletek elvégzése és összevonás után adódik:

$$\begin{aligned} & (1 + \cos 36^\circ) \cdot (1 - \sin 54^\circ) + \cos 54^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \operatorname{ctg} 36^\circ + \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\operatorname{ctg} 70^\circ} = \\ & = (1 + \cos 36^\circ) \cdot (1 - \cos 36^\circ) + \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} + \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ} = \\ & = 1 - \cos^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ + 1 = 2. \end{aligned}$$

Tehát a kifejezés értéke 2.



7. példa Válasszuk ki az alábbi koordinátpárok közül azokat, amelyek az $\vec{i}$ vektorhoz képest -1110° -kal elforgatott egységvektor ($\vec{e}$) koordinátáit adják meg!

a) $\vec{e}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right);$

b) $\vec{e}\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

c) $\vec{e}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right);$

d) $\vec{e}\left(\cos \frac{\pi}{6}; -\sin \frac{\pi}{6}\right).$

Megoldás:

A szögfüggvények definíciója alapján az $\vec{e}$ első koordinátája: $x_e = \cos(-1110^\circ)$, a második koordinátája: $y_e = \sin(-1110^\circ)$, azaz $\vec{e}(\cos(-1110^\circ); \sin(-1110^\circ))$. A szinuszfüggvény páratlan, a koszinuszfüggvény páros, ezért $y_e = -\sin 1110^\circ$ és $x_e = \cos 1110^\circ$.

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) &= \sin x, \\ \cos(2\pi - x) &= \cos x, \\ \operatorname{tg}(-x) &= -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{ctg}(-x) &= -\operatorname{ctg} x, \\ \operatorname{tg}(x + \pi) &= \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{ctg}(x + \pi) &= \operatorname{ctg} x, \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x \text{ és} \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x, \end{aligned}$$

ha a kifejezések értelmezve vannak.



9.17. ábra Trigonometrikus azonosságok

Bármely szög szinusza (koszinusza) egyenlő pótszögének koszinuszával (szinuszával).



9.18. ábra Pótszög szinusza és koszinusza

$$\begin{aligned} \text{Ha } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, \\ \text{akkor } \operatorname{tg} x &= \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \\ \text{Ha } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ akkor} \\ \operatorname{ctg} x &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \end{aligned}$$



9.19. ábra A pótszögek tangense, kotangense



Rendszerező összefoglalás

Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 2r \sin \alpha$.



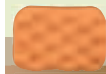
9.20. ábra Egy hasznos tétel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

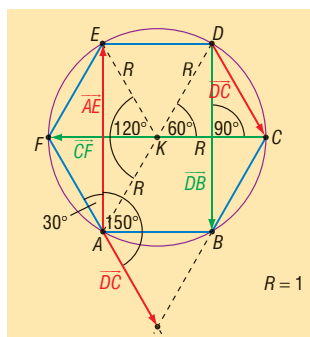


9.21. ábra Két vektor skaláris szorzata

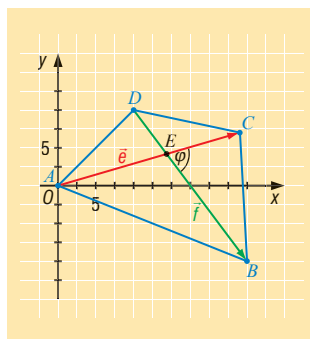
Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk 0.



9.22. ábra Vektorok merőlegessége



9.23. ábra A 8. példa megoldásához



9.24. ábra A 9. a) példa megoldásához

A szinusz- és a koszinuszfüggvények periódusa 360° , ezért $y_e = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ és $x_e = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ és a fentiek miatt az $\vec{e}$ koordinátáit a c) és a d) pontok alatti koordinátapárok adják meg helyesen.



8. példa Az egység sugarú körbe írt szabályos hatszög csúcsai rendre: A, B, C, D, E, F . Határozzuk meg az alábbi skaláris szorzatok értékét!

- a) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC}$; b) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CF}$.

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát (9.23. ábra)! A skaláris szorzat kiszámításához meg kell határoznunk a vektorok abszolút értékeit és hajlásszögüket. Az $|\overrightarrow{AE}|$ egyenlő a 120° -os középponti szöghöz tartozó húr hosszával, a $|\overrightarrow{DC}|$ pedig a szabályos hatszög oldalának hosszával. Mivel a KCD háromszög szabályos, ezért $|\overrightarrow{DC}| = R = 1$. Az AKE háromszögben alkalmazva a háromszög belső szöge, e szöggel szemközti oldal és a köré írt körének sugara közötti összefüggést azt kapjuk, hogy $|\overrightarrow{AE}| = 2R \sin 120^\circ = \sqrt{3}$. A két vektor hajlásszöge 150° -os. Felhasználva a $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ azonosságot: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos 150^\circ = -\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = -\frac{3}{2}$ adódik.

b) Az $\overrightarrow{CF}$ vektor egyenese a szabályos hatszög egyik szimmetriatengelye, a B és a D pontok egymás tükörképei erre a tengelyre. Tehát $\overrightarrow{DB}$ és $\overrightarrow{CF}$ vektorok egymásra merőlegesek, ezért a skaláris szorzatuk 0-val egyenlő: $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$.



9. példa Egy négyszög csúcsai: $A(0;0)$, $B(25;-10)$, $C(24;7)$, $D(10;10)$! Határozzuk meg a) az átlók hajlásszögét, b) a négyszög területét!

Megoldás:

a) A négyszög átlóvektorai: $\vec{e} = \overrightarrow{AC}(24;7)$ és $\vec{f} = \overrightarrow{DB}(15;-20)$ (9.24. ábra)! Ekkor az átlók hajlásszöge egyenlő az $\vec{e}$ és $\vec{f}$ vektorok hajlásszögével.

A vektorok hajlásszögét skaláris szorzatuk kétféle felírásából (9.25. ábra) határozhatjuk meg az $e_1 \cdot f_1 + e_2 \cdot f_2 = |\vec{e}| \cdot |\vec{f}| \cdot \cos \varphi$

összefüggés alapján. Behelyettesítés előtt határozzuk meg a vektorok hosszait! $|\vec{e}| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ és $|\vec{f}| = \sqrt{15^2 + (-20)^2} = 25$.

Így $24 \cdot 15 + 7 \cdot (-20) = 25 \cdot 25 \cdot \cos \varphi$, ahonnan $\cos \varphi = 0,352$.

A $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ miatt a két átló hajlásszöge: $\varphi \approx 69,39^\circ$.

b) A négyszögek területének kiszámítására vonatkozó összefüggés alapján (9.28. ábra):

$$T = \frac{e \cdot f \cdot \sin \varphi}{2} = \frac{25 \cdot 25 \cdot \sin 69,39^\circ}{2} \approx 292,5 \text{ területegység.}$$



10. példa Egy jacht Palermóból (Szicília szigetéről) elindulva észak felé haladt, majd az eredeti haladási irányhoz képest 80° -ot nyugat felé fordulva 1,5 órán át $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ egyenletes sebességgel folytatta útját. Az indulás után 2,5 órával a jacht zátonyra futott.

a) Mennyi utat kell a mentőhajónak megtennie, ha a legrövidebb úton közelíti meg a jachtot, és északnyugati irányban kell útnak indítani Palermóból?

b) Mekkora a jacht átlagsebessége?

Megoldás:

Készítsünk ábrát a feladat szövege alapján és használjuk jelöléseit (9.27. ábra)! Az elfordulás után megtett út $a = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,5 \text{ h} = 60 \text{ km}$, az el-

fordulás szöge az ABC háromszög külső szöge: $\beta = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. A mentőhajó északnyugati irányban indul, így $\alpha = 45^\circ$. A háromszög belső szögeinek összege 180° , innen $\gamma = 35^\circ$. Alkalmazzuk az ABC

háromszögre a szinuszételt: $\frac{b}{60} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 45^\circ}$! Innen $b \approx 83,56 \text{ km}$. Tehát a mentőhajónak $83,56 \text{ km}$ -t kell megtennie.

b) A jacht átlagsebességének meghatározásához ki kell számítanunk az elfordulás előtt megtett utat. Alkalmazzuk ismét az ABC háromszögre a

szinuszételt: $\frac{c}{60} = \frac{\sin 35^\circ}{\sin 45^\circ}$! Innen $c \approx 48,67 \text{ km}$. A jacht átlagsebessége:

$$v = \frac{\text{összes út}}{\text{összes idő}} \approx \frac{60 + 48,67}{2,5} = 43,47 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$



11. példa Egy cég logója egy 35 mm , 43 mm és 48 mm oldalhosszúságú háromszög. Készítésekor a háromszög csúcsai körül egymást érintő köröket rajzolnak. A körök háromszögbe eső kör-cikkeit a kék árnyalataira színezik, a háromszög megmaradó részét arany színűre festik.

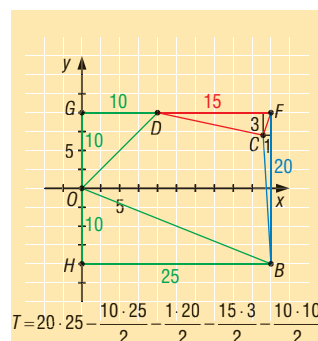
a) A háromszög területének hány százaléka arany színű? (A végeredményt egészre kerekítve adjuk meg!)

b) Kivágható-e a logó egy 50 mm átmérőjű körlepből?

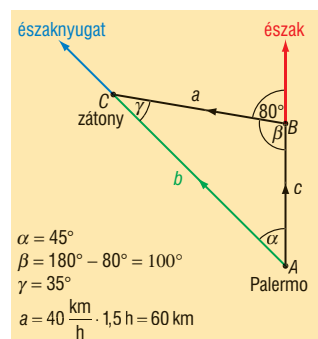
Két vektor skaláris szorzata egyenlő a megfelelő koordináták szorzatának összegével.



9.25. ábra A skaláris szorzat koordinátákkal



9.26. ábra Az $ABCD$ négyszög területe a derékszögű koordinárendszerben



9.27. ábra A 10. példa megoldásához

A négyszög területe:

$$T = \frac{e \cdot f \cdot \sin \varphi}{2}.$$

e, f : átlók

φ : az átlók hajlásszöge

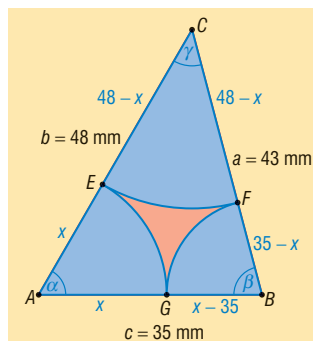


9.28. ábra A konvex négyszög területe

Bármely háromszögben két oldal hosszának aránya egyenlő a velük szemkösti szögek szinuszaival arányával.



9.29. ábra Szinusztétel



9.30. ábra A 11. példa megoldásához

Bármely háromszögben a szokatlan jelölésekkel

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\text{vagy} \\ \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



9.31. Koszinusztétel

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát, és használjuk a jelöléseit (9.30. ábra)!

Az aranszínű rész területének meghatározásához ki kell számítanunk a háromszög területét és az egyes csúcsoknál keletkezett körcikkek területeit. Ehhez szükségünk lesz a háromszög belső szögeire és az egyes körcikkek sugaraira. Először a háromszög szögeit számítjuk ki.

Írjuk fel az ABC háromszög oldalaira a koszinusztételt (9.31. ábra):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

Ezekből az összefüggésekből fejezzük ki a $\cos \alpha$ -t, a $\cos \beta$ -t, majd helyettesítsünk be a formulákba:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{48^2 + 35^2 - 43^2}{2 \cdot 48 \cdot 35} = \frac{1}{2},$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{43^2 + 35^2 - 48^2}{2 \cdot 43 \cdot 35} \approx 0,2558.$$

Innen azt kapjuk, hogy $\alpha = 60^\circ$, $\beta \approx 75,18^\circ$. A háromszög belső szögeinek összegére vonatkozó tétel szerint: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 44,82^\circ$.

Az ábra alapján a háromszög a oldala: $43 = 48 - x + 35 - x$, innen $x = 20$ mm, ahonnan az A , B , C középpontú körcikkek sugarainak hossza rendre: $r_1 = 20$ mm, $r_2 = 15$ mm és $r_3 = 28$ mm. A körcikkek területére vonatkozó összefüggés alapján a kékre festett rész területének nagysága:

$$T_{\text{kék}} = \frac{r_1^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360^\circ} + \frac{r_2^2 \cdot \pi \cdot \beta}{360^\circ} + \frac{r_3^2 \cdot \pi \cdot \gamma}{360^\circ} \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{360^\circ} (20^2 \cdot 60^\circ + 15^2 \cdot 75,18^\circ + 28^2 \cdot 44,82^\circ) = 663,70 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

A háromszög területe a trigonometrikus területképlet alapján:

$$T_{ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{48 \cdot 35 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 420\sqrt{3} \approx 727,46 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

Az aranszínű rész területének nagysága:

$$T_{\text{arany}} = T_{ABC} - T_{\text{kék}} \approx 63,76 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

Tehát a háromszög területének a $\frac{63,76}{727,46} \cdot 100 \approx 9\%$ -a aranszínű.

b) Az $a = 2R \cdot \sin \alpha$ összefüggés alapján a háromszög köré írt kör átmérője:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{43}{\sin 60^\circ} = \frac{43\sqrt{3}}{6} \approx 49,65 \text{ mm. Mivel } 2R < 50 \text{ mm,}$$

ezért a logó kivágható egy 50 mm átmérőjű körlepből.



Oldjuk meg!

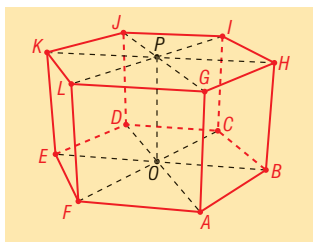
1. Egy derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság 25:144 arányú részekre bontja. A háromszög legkisebb oldalának hossza 10 cm. Mekkora a háromszög oldalai és szögei, köréírt körének sugara, beírt körének sugara?

2. Marcsi rombusz alakú faliképének egyik belső szöge: 30° , rövidebb átlójának hossza 50 cm.
 a) Milyen hosszúságú pálcákat kell az oldalak mentén elhelyezni?
 b) Hány cm^2 vászont kell vásárolnia a képhez, ha a felhasznált anyagmennyiség 5%-a hulladék?
3. Az n oldalú szabályos sokszög beírt körének sugara 10 cm. Számítsd ki a szabályos sokszögnek az oldalát és a leghosszabb átlójának hosszát! Hány százaléka lesz a kör területe a sokszög területének, ha
 a) $n = 6$; b) $n = 8$; c) $n = 15$?
4. Egy dombtetőre vezető egyenes út a vízszintessel 24° -ot zár be. A domb magassága 248 m. Milyen hosszú az út? Hány százalékos az út emelkedése?
5. Egy szabályos hatoldalú hasáb legrövidebb testátlója 20 cm, és az oldaléllel 30° -os szöget zár be.
 a) Mekkora a hasáb térfogata, felszíne? b) Mekkora szöget zár be a leghosszabb testátló az alaplappal?
6. Valamely torony CT magassága a T talpponttal egy vízszintes síkban levő 120 m hosszúságú AB alapvonal A pontjából 45° -os emelkedési szögben, a C pontból a B pont 60° -os depressziószögben látszik. Tudjuk továbbá, hogy $TBA \angle = 30^\circ$.
 a) Mekkora a torony magassága? b) Mekkora szög alatt látszik az AB alapvonal a C pontból?
7. Egy szabályos négyoldalú gúla magassága 30 cm, oldaléle 34 cm hosszúságú. Mekkora szöget zár be
 a) az oldallal és az alaplap; b) az oldalél és az alaplap; c) az oldalél és az alapél?
8. Határozzuk meg az alábbi vektorok hajlásszögét!
 a) $\vec{a}(4; -3)$ és $\vec{b}(-1; 1, 25)$; b) $\vec{a}(12; 5)$ és $\vec{b}(-10; 24)$.
9. Egység sugarú körbe írt szabályos nyolcszög csúcsai rendre: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$. Határozzuk meg az alábbi skaláris szorzatok értékét!
 a) $\overrightarrow{A_2 A_6} \cdot \overrightarrow{A_4 A_8}$; b) $\overrightarrow{A_1 A_5} \cdot \overrightarrow{A_6 A_3}$;
10. Szögei szerint milyen az a háromszög, amelyben a szokásos jelöléseket használva fennáll, hogy
 a) $a = \frac{4}{3}b$, $b = \frac{6}{5}c$; b) $a = 6,7 \text{ cm}$, $b = 4,9 \text{ cm}$ és $\gamma = 53^\circ$; c) $a = 35 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$ és $\beta = 40^\circ$?
11. Egy trapéz oldalai rendre $a = 45 \text{ cm}$, $b = 30 \text{ cm}$, $c = d = 25 \text{ cm}$ és tudjuk, hogy $a \parallel c$. Határozzuk meg a trapéz szögeit, területét!
12. Egy háromszög két oldalának hossza 32 dm és 28 dm, a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal hossza 29 dm. Határozzuk meg a háromszög hiányzó oldalát, köré írt körének sugarát, szögeit és területét!
13. Egy háromszög középvonalainak hossza 12,5 cm, 17,5 cm és 20 cm. Számítsuk ki a háromszög területét és belső szögeit!
14. Egy paralelogramma egyik átlója 16 cm, az egyik oldala 20 cm, ez az oldal a paralelogramma középpontjából 110° -os szögben látszik. Határozzuk meg a paralelogramma oldalait és területét!
15. Egy háromszög területe 180 m^2 , egyik oldalának hossza 360 dm, másik két oldal hosszának négyzetösszege 950 m^2 . Határozzuk meg a háromszög hiányzó oldalait, köré írt körének sugarát, szögeit!
16. Mekkora a $\text{tg } \alpha + \text{ctg } \alpha$ értéke, ha $\cos \alpha = \frac{15}{17}$?
17. Mekkora a $\frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - \cos \alpha}$ értéke, ha $\text{tg } \alpha = \frac{5}{8}$?
18. Bizonyítsuk be, hogy bármely hegyesszög esetén
 a) $(\sin \alpha - 2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 5$; b) $2 \text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} + \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$.

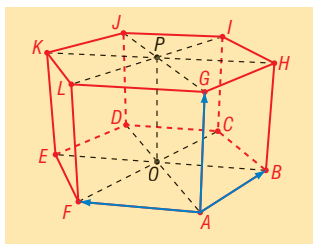


10. Vektorok, koordináta geometria

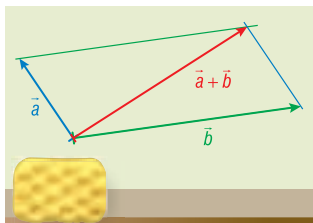
10.1. Vektorok



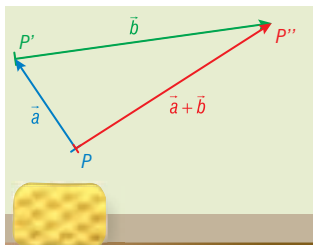
10.1. ábra A szabályos hatszög alapú egyenes hasáb



10.2. ábra Az 1. példa megoldásához



10.3. ábra Két vektor összege paralelogramm módszerrel



10.4. ábra Két vektor összege háromszögmódszerrel

A következő példák a 10.1. ábrán látható szabályos hatszög oldalú egyenes hasábra vonatkoznak, amelynek minden éle egységnyi hosszú.



1. példa Legyen $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AG} = \vec{g}$ és $\overrightarrow{AF} = \vec{f}$! Fejezzük ki ezekkel a vektorokkal az $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{FP}$, $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{DG}$ és $\overrightarrow{LB}$ vektorokat!

Megoldás:

A vektorösszeadás paralelogrammamódszerrel: $\overrightarrow{AO} = \vec{b} + \vec{f}$ (10.3. ábra).

A vektorösszeadás háromszögmódszerrel: $\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OP}$. (10.4. ábra)

Egyenlő vektorok behelyettesítésével: $\overrightarrow{FP} = \vec{b} + \vec{g}$.

Hasonlóképpen $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EK} = 2\vec{f} + \vec{g}$.

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = -2(\vec{b} + \vec{f}) + \vec{g} = -2\vec{b} - 2\vec{f} + \vec{g}.$$

$$\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FL} = (\vec{b} - \vec{f}) - \vec{g} = \vec{b} - \vec{f} - \vec{g}.$$



2. példa Keressünk az alábbi vektorok között egyenlőket, ellentetteket!

$$\overrightarrow{LH}, \overrightarrow{KG}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AE}$$

Megoldás:

$$\overrightarrow{LH} = \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{DB}.$$

$\overrightarrow{DB}$ és $\overrightarrow{AE}$ ellentett vektorok.



3. példa Adjuk meg a következő vektorok abszolút értékét!
 $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{FP}$

Megoldás:

$|\overrightarrow{OC}| = 1$, egységnyi oldalú szabályos háromszög oldala.

$|\overrightarrow{BD}| = 2 \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, egységnyi oldalú szabályos háromszög magasságának a kétszerese.

A Pitagorasz-tétel az EBH háromszögben:

$$|\overline{EH}| = \sqrt{EB^2 + BH^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

$$|\overline{FP}| = \sqrt{2}, \text{ egységnyi oldalú négyzet átlója.}$$



4. példa Adjuk meg az alábbi skaláris szorzatokat egyetlen valós számként!

$$\overline{FB} \cdot \overline{KL}, \overline{FC} \cdot \overline{EJ}, \overline{AB} \cdot \overline{FE}, \overline{FO} \cdot \overline{IL}$$

Megoldás:

$$\overline{FB} \cdot \overline{KL} = 0, \text{ mert merőleges vektorok.}$$

$$\overline{FC} \cdot \overline{EJ} = 2 \cdot \sqrt{2} \cos 45^\circ = 2 \cdot \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{FE} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\overline{FO} \cdot \overline{IL} = 1 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ = -2$$



Ezen a ponton elbúcsúzunk a szabályos hatoldalú hasábtól, és síkbeli vektorok koordinátaival kapcsolatos problémákat oldunk meg. Tekintsük a szokásos $(\vec{i}; \vec{j})$ bázisban a következő vektorokat:

$$\vec{a}(-1; 2), \vec{b}(3; 4), \vec{c}(3; -4)!$$



5. példa Adjuk meg a következő vektor abszolút értékét!

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$$

Megoldás: (10.5. ábra)

$$2\vec{a}(-2, 4), -3\vec{b}(-9, -12), 4\vec{c}(12, -16) \Rightarrow$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}(1, -24) \Rightarrow |2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}| = \sqrt{1 + 24^2} = \sqrt{577} \text{ (10.6. ábra).}$$



6. példa Adjuk meg a következő vektorok hajlásszögét!

$$-3, 5\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} \text{ és } \vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c}$$

Megoldás:

$$-3, 5\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} \left(\frac{1}{2}; 13 \right) \Rightarrow |-3, 5\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}| = \frac{\sqrt{677}}{2}$$

$$\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c}(8; -26) \Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c}| = 2\sqrt{185}$$

$\vec{a}$ vektor és λ valós szám.
 $\lambda \vec{a}$ olyan vektor, amelyre
 $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, és ha $\lambda > 0$,
akkor $\lambda \cdot \vec{a} \uparrow \vec{a}$, ha $\lambda < 0$,
akkor $\lambda \cdot \vec{a} \downarrow \vec{a}$. (Ha $\lambda = 0$,
akkor $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.)

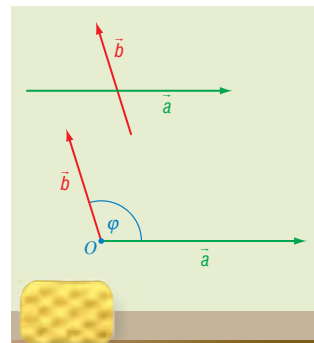


10.5. ábra Vektor szorzása számmal

Koordinátaival adott vektor hossza egyenlő a koordinátáinak négyzetösszegéből vont négyzetgyökkel.



10.6. ábra Vektor hossza



10.7. ábra Két vektor hajlásszöge



Rendszerező összefoglalás

A síkon (vagy a térben) kijelölünk egy tetszőleges pontot, ezt **origónak** vagy **vonatkoztatási pontnak** nevezzük. Az origó kezdőpontú vektorokat **helyvektoroknak** nevezzük.



10.8. ábra Helyvektor

$$(-3, 5\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot 8 + 13 \cdot (-26) = -334$$

$$\cos \varphi = \frac{-334}{\frac{\sqrt{677}}{2} \cdot 2\sqrt{185}} \approx -0,9438 \Rightarrow \varphi = 160,7^\circ$$



7. példa Legyen az A helyvektora $\vec{a}$, B helyvektora $\vec{b}$ és C helyvektora $\vec{c}$! Adjuk meg

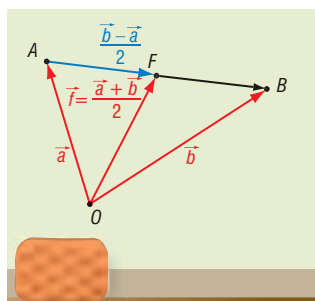
- az AC szakasz F felezőpontja
- a BC szakasz B -hez közelebbi H harmadolópontja
- az ABC háromszög S súlypontja

Megoldás:

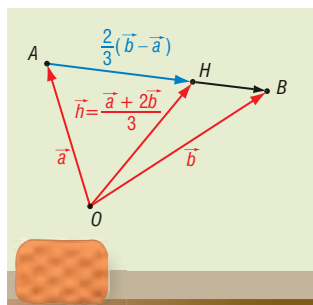
$$\vec{f} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} \Rightarrow \vec{f}(1; -1) \quad (10.9. \text{ ábra})$$

$$\vec{h} = \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3} \Rightarrow \vec{h}\left(3; \frac{4}{3}\right) \quad (10.10. \text{ ábra})$$

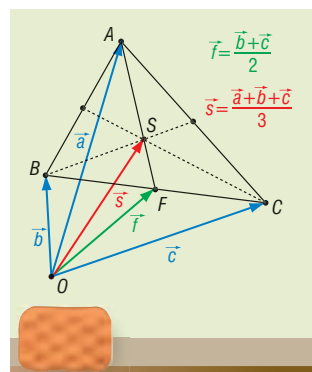
$$\vec{s} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \Rightarrow \vec{s}\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right) \quad (10.11. \text{ ábra})$$



10.9. ábra Felezőpont helyvektora



10.10. ábra Harmadolópont helyvektora



10.11. ábra Háromszög súlypontjának helyvektora



Oldjuk meg!

1. Legyen a korábban tárgyalt hasáb F csúcsának P -re vonatkozó tükörképe F' !

a) Legyen $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AG} = \vec{g}$ és $\overrightarrow{AF} = \vec{f}$! Fejezzük ki ezekkel a vektorokkal az $\overrightarrow{AF'}$, $\overrightarrow{F'C}$, $\overrightarrow{F'G}$, $\overrightarrow{HF'}$ vektorokat!

b) Adjuk meg a következő vektorok abszolút értékét!

$$\overrightarrow{OF'}, \overrightarrow{F'D}, \overrightarrow{F'H}, \overrightarrow{FF'}$$

c) Adjuk meg az alábbi skaláris szorzatokat egyetlen valós számként!

$$\overrightarrow{FF'} \cdot \overrightarrow{JG}, \overrightarrow{F'C} \cdot \overrightarrow{FP}, \overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{F'P}$$

2. Az A helyvektora $\vec{a}$, a B helyvektora $\vec{b}$! Fejezzük ki ezek segítségével az AB szakasz B -hez közelebbi negyedelőpontja helyvektorának koordinátáit!

10.2. Koordináta-geometria

Ebben a leckében egy, a csúcsaival adott háromszögre vonatkozó problémákat vizsgálunk, és így ismételjük át a koordináta-geometriai ismereteinket. A háromszög csúcsai a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben (10.12. ábra): $A(-3; -2)$, $B(5; 1)$, $C(1; 5)$. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a korábbi megoldásokban alkalmazott jelöléseket a későbbiekben használjuk.



1. példa Adjuk meg a háromszög területét!

Megoldás:

Egy szakasz hossza egyenlő a végpontok koordinátakülönbségei négyzetösszegéből vont négyzetgyökkel, így

$$a = BC = \sqrt{(5-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

$$b = \sqrt{65},$$

$$c = \sqrt{73}.$$

Ebből következően a háromszög kerülete: $K = 4\sqrt{2} + \sqrt{65} + \sqrt{73}$.



A példa megoldásában megadtuk a háromszög oldalainak hosszát. Ezeknek ismeretében a trigonometria eszközeivel kiszámíthatóak a háromszög szögei, területe és a beírt körének sugara. Gyakorlásképpen érdemes elvégezni ezeket a számolásokat. Az eredmények közelítő értékét láthatjuk a 10.13. ábrán.

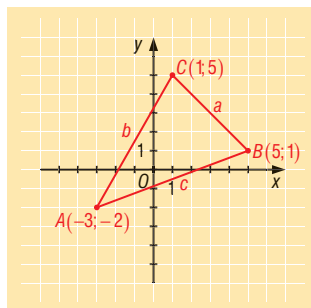


2. példa Adjuk meg a háromszög A -ra illeszkedő súlyvonalának hosszát, meredekségét és a súlypontjának koordinátáit!

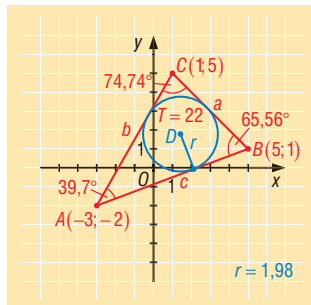
Megoldás:

Szakasz felezőpontjának koordinátái a végpontok koordinátáinak számítani közepei, így a BC szakasz felezőpontja:

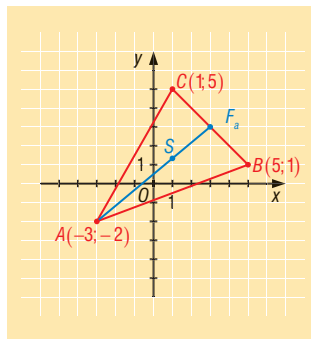
$$F_a \left(\frac{1+5}{2}; \frac{5+1}{2} \right) \Rightarrow F_a(3; 3)$$



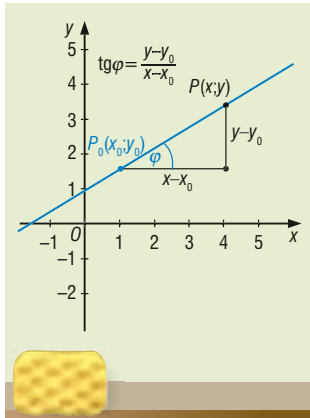
10.12. ábra A vizsgált háromszög



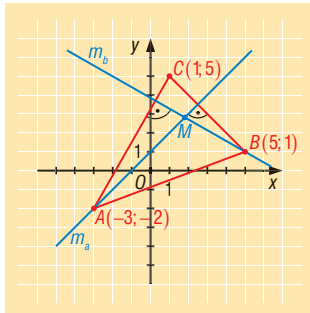
10.13. ábra A háromszög jellemző adatai



10.14. ábra A vizsgált súlyvonal

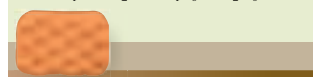


10.15. ábra Meredekség

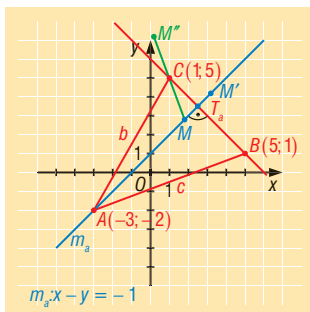


10.16. ábra A 3. példához

Adott:
 $\vec{n}(n_1, n_2)$ és $P_0(x_0, y_0)$.
 Az egyenes normálvektoros
 egyenlete:
 $n_1x + n_2y = n_1x_0 + n_2y_0$.



10.17. ábra Normálvektoros egyenlet



10.18. ábra A 4. példához

Az A -ra illeszkedő súlyvonal az AF_a szakasz, amelynek hossza $\sqrt{61}$.

A súlyvonal meredeksége: $m_{s_a} = \frac{3 - (-2)}{3 - (-3)} = \frac{5}{6}$ (10.15. ábra).

A háromszög súlypontjának koordinátái a végpontok koordinátáinak számtani közepei, így

$$S\left(\frac{-3+5+1}{3}; \frac{-2+1+5}{3}\right) \Rightarrow S\left(1; \frac{4}{3}\right).$$



3. példa Adjuk meg a háromszög magasságpontjának koordinátáit!

Megoldás:

A magasságpont a magasságegyenesek metszéspontja. Az A -ra illeszkedő magasságegyenes (m_a) normálvektora bármely olyan nem nullvektor, amely párhuzamos a $\overrightarrow{CB}(5-1; 1-5) = (4; -4)$ vektorral. Legyen a normálvektor $\vec{n}(1; -1)$! Az m_a egyenes egyenlete (10.17. ábra):

$$1 \cdot x - 1 \cdot y = 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-2) \Rightarrow x - y = -1.$$

Hasonlóképpen a B -re illeszkedő magasságegyenes (m_b) egyenlete:

$$4x + 7y = 27.$$

A két egyenes metszéspontjának koordinátáit az egyenletrendszer megoldása adja:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 4x + 7y = 27 \end{cases} \Rightarrow y = x + 1$$

$$4x + 7(x + 1) = 27$$

$$11x = 20$$

$$x = \frac{20}{11}$$

$$y = \frac{31}{11}$$

A háromszög magasságpontja tehát: $M\left(\frac{20}{11}; \frac{31}{11}\right)$.



4. példa Adjuk meg az M pont BC oldal egyenesére és a C pontra vonatkozó tükörképét!

Megoldás:

Az M és annak a BC oldal egyenesére vonatkozó tükörképe ($M'(t, v)$) által meghatározott szakasz felezőpontja a háromszög A -ra illeszkedő magasságának talppontja (T_a). Ennek meghatározásához szükség van a BC oldal egyenesének egyenletére. Ennek irányvektora például az

m_a normálvektora: $\vec{i}(1;-1)$. A BC -re illeszkedő egyenes irányvektoros egyenlete (10.19. ábra):

$$1 \cdot x + 1 \cdot y = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \Rightarrow x + y = 6.$$

A T_a koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldása adja:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad (m_a \text{ egyenlete})$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{7}{2}$$

A felezőpont koordinátáira vonatkozó tétel szerint:

$$\frac{5}{2} = \frac{\frac{20}{11} + t}{2} \quad \frac{7}{2} = \frac{\frac{31}{11} + v}{2}$$

$$t = \frac{35}{11} \quad v = \frac{46}{11}$$

$$\text{Így } M' \left(\frac{35}{11}; \frac{46}{11} \right).$$

Az M és annak a C pontra vonatkozó tükörképe ($M''(k, l)$) által meghatározott szakasz felezőpontja a C , így

$$1 = \frac{\frac{20}{11} + k}{2} \quad 5 = \frac{\frac{31}{11} + l}{2}$$

$$k = \frac{2}{11} \quad l = \frac{79}{11}$$

$$M'' \left(\frac{2}{11}; \frac{79}{11} \right).$$

Adott $\vec{v}(v_1; v_2)$ és $P_0(x_0; y_0)$, az egyenes irányvektoros egyenlete:

$$v_2 x - v_1 y = v_2 x_0 - v_1 y_0.$$

10.19. ábra Irányvektoros egyenlet



10.20. ábra Magasság



5. példa Adjuk meg a háromszög köré írt kör egyenletét!

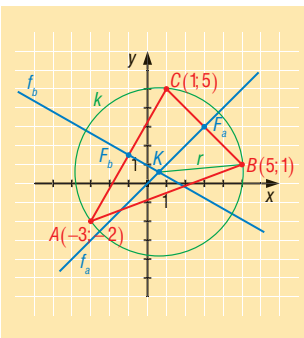
Megoldás:

A köré írt kör (K) középpontja az oldalfelezőmerőlegesek metszéspontja. Az a oldal f_a felezőmerőlegese illeszkedik az F_a -ra és párhuzamos az m_a -val, ezért az egyenlete:

$$x - y = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \Rightarrow x - y = 0.$$

A b oldal felezőpontja: $F_b \left(\frac{-3+1}{2}; \frac{-2+5}{2} \right) \Rightarrow F_b \left(-1; \frac{3}{2} \right)$. A b oldal f_b

felezőmerőlegese illeszkedik az F_b -re és párhuzamos az m_b -vel, ezért az egyenlete:



10.21. ábra Az 5. példához

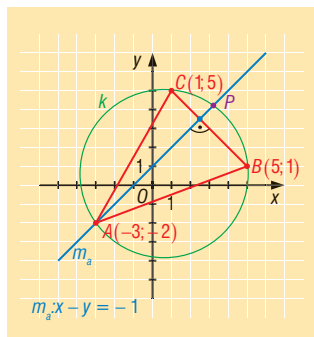


Rendszerező összefoglalás

A $C(u;v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete:
 $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$.



10.22. ábra A kör egyenlete



10.23. ábra A 6. példához

$$4x + 7y = 4 \cdot (-1) + 7 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow 4x + 7y = \frac{13}{2}.$$

A K koordinátáinak meghatározása a következő egyenletrendszer megoldásával történhet:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 4x + 7y = \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$11x = \frac{13}{2}$$

$$x = y = \frac{13}{22}$$

$$K\left(\frac{13}{22}; \frac{13}{22}\right).$$

A körülírt kör sugara:

$$r = KB = \sqrt{\left(5 - \frac{13}{22}\right)^2 + \left(1 - \frac{13}{22}\right)^2} = \sqrt{\frac{9409}{484} + \frac{81}{484}} = \sqrt{\frac{4745}{242}}.$$

A k kör egyenlete: $\left(x - \frac{13}{22}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{22}\right)^2 = \frac{4745}{242}$ (10.22. ábra).



6. példa Hol metszi másodszor az m_a egyenes a k kört?

Megoldás:

Megoldandó az alábbi egyenletrendszer.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ \left(x - \frac{13}{22}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{22}\right)^2 = \frac{4745}{242} \end{cases} \Rightarrow y = x + 1$$

$$\left(x - \frac{13}{22}\right)^2 + \left(x + 1 - \frac{13}{22}\right)^2 = \frac{4745}{242}$$

$$\left(x - \frac{13}{22}\right)^2 + \left(x + \frac{9}{22}\right)^2 = \frac{4745}{242}$$

...

$$11x^2 - 2x - 105 = 0$$

$$x_1 = -3 \quad y_1 = -2$$

$$x_2 = \frac{35}{11} \quad y_2 = \frac{46}{11}$$

$$P\left(\frac{35}{11}; \frac{46}{11}\right).$$

Ezzel a ponttal találkoztunk már korábban?



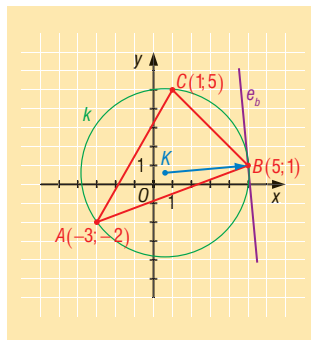
7. példa Adjuk meg a k kör B -beli érintőjének egyenletét!

Megoldás:

Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ebből következően a keresett (e_b) érintő normálvektorai párhuzamosak az

$$\overrightarrow{KB} \left(5 - \frac{13}{22}; 1 - \frac{13}{22} \right) = \left(\frac{97}{22}; \frac{9}{22} \right) \text{ vektorral, ezért az } e_b \text{ egyenlete:}$$

$$97x + 9y = 494.$$



10.24. ábra A 7. példához



8. példa Az alábbi, egyenleteikkel megadott ponthalmazok közül az egyik kör. Adjuk meg ennek és a k körnek a közös pontjai koordinátáit!

$$p: 2x^2 - 3y^2 - 12x + 12y - 5 = 0$$

$$q: x^2 + y^2 - 12x - 12y + 46 = 0$$

$$o: 3x^2 + 3y^2 - 12xy - 12y + 46 = 0$$

$$w: x^2 + y^2 + 2x + 4y + 50 = 0$$

Megoldás:

A p nem kör, mert a másodfokú tagok együtthatói nem egyenlők. Az o nem kör, mert az egyenletnek van xy -t tartalmazó tagja. A q és a w egyenletei teljesítik a szükséges feltételeket, ezért alakítsuk w egyenletét teljes négyzetté.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x + 4y + 50 &= 0 \\ (x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 50 &= 0 \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 &= -45 \end{aligned}$$

Az egyenlet jobb oldalán negatív szám áll, ezért nem kör egyenlete, így w nem kör.

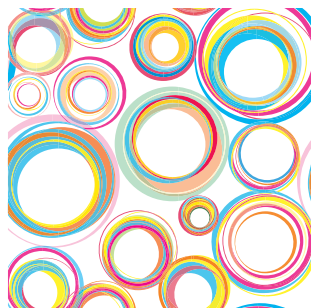
A q egyenletét teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 26$, ami azt jelenti, hogy a q olyan kör, amelynek középpontja a $Q(6; 6)$ pont, sugara $\sqrt{26}$.

A q és k közös pontjait az egyenleteikből álló egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk.

$$\left\{ \begin{aligned} (x-6)^2 + (y-6)^2 &= 26 \\ \left(x - \frac{13}{22}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{22}\right)^2 &= \frac{4745}{242} \end{aligned} \right.$$

Elvégezzük a négyzetre emeléseket és a lehetséges összevonásokat.

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 - 12x - 12y + 46 &= 0 \\ x^2 + y^2 - \frac{13}{11}x - \frac{13}{11}y - \frac{208}{11} &= 0 \end{aligned} \right.$$



10.25. ábra Körök



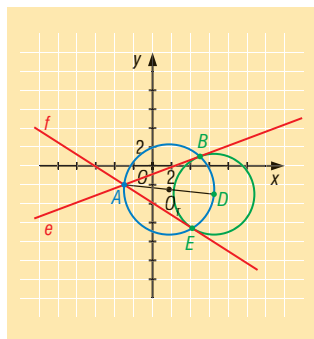
Rendszerező összefoglalás



10.26. ábra Számolni tudni kell



10.27. ábra Érintő



10.28. ábra A 9. példa megoldásához

Kivonjuk egymásból a két egyenletet, és azt kapjuk, hogy

$$x + y = 6$$

$$y = 6 - x$$

Visszahelyettesítve az első egyenletbe egy másodfokú egyenlethez jutunk, amit megoldunk.

$$x^2 + (6 - x)^2 - 12x - 12(6 - x) + 46 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = 1$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = 5$$

A közös pontok a B és a C .



9. példa

Adott a $d: \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 = \frac{73}{4}$ kör. Adjuk meg az A -ra illeszkedő érintőinek egyenletét!

Megoldás:

A d kör középpontja: $D\left(\frac{13}{2}; -3\right)$. Az érintési pontok az OD szakasz Thalész-körének (k_T) és a d körnek a közös pontjai. Az OD szakasz felezéspontja, a Thalész-kör középpontja: $O_T\left(\frac{7}{4}; -\frac{5}{2}\right)$. A Thalész-kör sugara:

$$r_T = AO_T = \frac{\sqrt{365}}{4}. \text{ A Thalész-kör } (k_T): \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{365}{16}.$$

Az érintési pontok megadásához megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{cases} \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{365}{16} \\ \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 = \frac{73}{4} \end{cases}$$

Teljes négyzetté alakítás és összevonás után:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{7}{2}x + 5y - \frac{27}{2} = 0 \\ x^2 + y^2 - 13x + 6y + 33 = 0 \end{cases}$$

Kivonva a két egyenletet egymásból:

$$19x - 2y = 93$$

$$y = \frac{19x - 93}{2}$$

Visszahelyettesítve az első egyenletbe, az összevonásokat elvégezve azt kapjuk, hogy:

$$5x^2 - 46x + 105 = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = \frac{21}{5}$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = -\frac{33}{5}$$

Az érintési pontok tehát a B és az $E\left(\frac{21}{5}; -\frac{33}{5}\right)$.

Az érintők egyenlete: $3x - 8y = 7$ és $23x + 36y = -141$.



Oldjuk meg!

1. Adjuk meg a háromszög középvonal háromszögének súlypontját!
2. Adjuk meg a C -re illeszkedő súlyvonal egyenesének és az m_a egyenes közös pontjának koordinátáit!
3. Adjuk meg az SOM háromszög területét!
4. Döntsük el, hogy az M' és az M'' pontok a k körhöz viszonyítva hol helyezkednek el!
5. Adjuk meg az M pont F_a -ra vonatkozó tükörképének koordinátáit és azt, hogy hol helyezkedik el a k -hoz viszonyítva!
6. Az a oldal egyenesének mely pontjaiból látszik derékszögben az AB szakasz?
7. A q kör mely pontjai vannak egyenlő távolságra a B és C pontoktól?
8. Adjuk meg a q kör C -re és B -re illeszkedő érintőinek metszéspontját és hajlásszögét!
9. Adjuk meg a q kör A -ra illeszkedő érintőinek egyenletét és hajlásszögét!

11. Gondolkodási módszerek, kombinatorika, gráfok



1. példa Egy osztályban kiosztották a matematikadolgozatokat. Mindenki elérte a kettes szintet, de volt hármas, négyes és ötös érdemjeggyel értékelt dolgozat is. Legalább hányan járnak az osztályba, ha biztosan állíthatjuk, hogy van köztük hét olyan diák, akik azonos érdemjegyet kaptak a dolgozatukra. (Csak egész érdemjegyek születtek.)

Megoldás:

A feladat szövege szerint négyféle érdemjeggyel értékelték a dolgozatokat. A skatulyaelv értelmében $6 \cdot 4 + 1 = 25$ diák esetén biztosan állíthatjuk, hogy van köztük 7 tanuló, akik azonos jegyet kaptak a dolgozatukra. Mivel $24 = 6 \cdot 4$, ezért 24 diák esetén előfordulhat, hogy csak hat olyan tanuló van, akik azonos érdemjegyet kaptak a dolgozatukra. Így legalább 25-en járnak az osztályba.

Bárhogyan is helyezzünk el n skatulyába $n \cdot k + 1$ darab tárgyat, lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe legalább $k + 1$ tárgy kerül.



11.1. ábra Skatulyaelv



Rendszerező összefoglalás



11.2. ábra Cukorkák

A négyzetszámok

- ♥ hármask maradéka 0 vagy 1;
- ♥ négyes maradéka 0 vagy 1;
- ♥ ötös maradéka 0, 1 vagy 4;
- ♥ végződése 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9.



11.3. ábra A négyzetszámok maradékai

Ha egy rendezett elempár első tagját m -féleképpen választjuk ki, a másodikat n -féleképpen, akkor az elempárokat a megadott sorrendben $m \cdot n$ -féleképpen.



11.4. ábra A szorzási szabály



2. példa Egy zacskóban 10 epres, 8 citromos és 7 narancsos cukorka van. Legalább hány cukrot kell csukott szemmel kivenni ahhoz, hogy biztos legyen köztük

- a) egy epres;
- b) citromos vagy narancsos;
- c) citromos és narancsos;
- d) mindhárom fajtából legalább egy?

Megoldás:

- a) Ha csak 15 cukorkát vennénk ki a zacskóból, akkor még előfordulhatna, hogy nincs közöttük epres, mivel ezután már csak epres cukorka lenne a zacskóban, ezért 16. húzásra biztosan epres cukorkát húznánk. Tehát legalább 16 cukorkát kell kivenni a zacskóból.
- b) Mivel 10 epres cukorka van a zacskóban, ezért 10 húzás esetén még előfordulhat, hogy nem vettünk ki sem citromos, sem narancsos cukorkát. 11. húzásra viszont biztosan lesz köztük legalább az egyikből, ami azt jelenti, hogy ha 11 cukorkát veszünk ki a zacskóból, akkor biztosan lesz a kihúzottak között citromos vagy narancsos.
- c) Mivel mind citromos, mind narancsos cukorkának kell lennie a kihúzottak között, ezért az előzőekhez hasonlóan könnyen végiggondolható, hogy legalább 19 cukorkát kell kihúzni a zacskóból.
- d) Ez lényegében azonos a feladat előző részével, tehát ebben az esetben is 19 cukorkát kell kihúzni.



3. példa Véletlenszerűen leírnunk egy papírra 7 db különböző négyzetszámot. Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

- a) Biztos van köztük hárommal osztható.
- b) Közülük bármely kettőnek a szorzata négyzetszám.
- c) Van köztük kettő, melyek különbsége nulla végződik.
- d) Van köztük négy szám, melyek számtani közepe egész szám.

Megoldás:

- a) Mivel a négyzetszámok hármask maradéka 0 vagy 1 (11.3. ábra), ezért előfordulhat, hogy egyik sem osztható 3-mal. Tehát ez az állítás hamis.
- b) Ez az állítás igaz, hisz bármely kettő felírható a^2 , illetve b^2 alakban, ahol $a, b \in \mathbb{N}$. Ezek szorzata $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$, ami négyzetszám, mert a és b természetes szám, így szorzatuk is az.
- c) A négyzetszámok lehetséges végződései 0, 1, 4, 5, 6, és 9. Ez hatféle lehetőség. Mivel hét négyzetszámot írtunk a papírra, így a skatulyaelv értelmében biztosan lesz köztük kettő, melyek végződése azonos. Ezek különbsége nulla végződik, így az állítás igaz.
- d) A négyzetszámok négyes maradéka 0 vagy 1. Mivel hét négyzetszámot választottunk ki és $7 = 2 \cdot 3 + 1$, ezért a skatulyaelv értelmében biztosan van köztük négy, melyek négyes maradéka azonos. Ezek

összege osztható négygel, így számtani közepük egész szám, tehát igaz az állítás.



4. példa Az iskolai diákönkormányzatba a 27 osztály mindegyikéből egy diákot delegálnak. A diákönkormányzat vezetőséget választ: egy titkárt, egy titkárhelyettest, egy pénztárost és egy kultúrfelelőst. Hányféleképpen alakulhat a vezetőség összetétele, ha egy diák legfeljebb csak egy funkciót tölthet be?

Megoldás:

A feltételek alapján a diákönkormányzatnak 27 tagja van. Titkári funkcióra 27 diák közül választhatunk, helyettest 26, pénztárost már csak 25, míg kultúrfelelőst 24 diák közül. Így a szorzási szabály (11.4. ábra) értelmében $V_{27}^4 = 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 = 421\,200$ féleképpen (11.5. és 11.6. ábrák) alakulhat a választás eredménye.



5. példa A hármas számrendszerben a számok leírására a 0, 1, 2 számjegyeket használják.

- Hány darab legfeljebb ötjegyű hármas számrendszerbeli nem negatív egész szám készíthető?
- Ezek között hány darab olyan van, mely számjegyei között van 2-es?

Megoldás:

a) Mivel legfeljebb ötjegyű nem negatív egész számokat készítünk, így mind az öt helyre választhatjuk mind a három számjegyet. Így a szorzási szabály értelmében $V_3^{5(i)} = 3^5 = 243$ ilyen szám készíthető (11.7. és 11.8. ábrák).

b) Számoljuk meg ezek közül azokat, amelyek nem tartalmaznak 2-es számjegyet, majd az összeadási szabály (11.9. ábra) értelmében vonjuk ki ezek számát az előző feladatban kapott értékből.

Olyan legfeljebb ötjegyű hármas számrendszerbeli szám, melynek a számjegyei között nincs kettes, $V_2^{5(i)} = 2^5 = 32$ darab van. Így azok száma, melynek a számjegyei között van 2-es $243 - 32 = 211$.



6. példa Leírjuk az összes olyan ötjegyű számot, amely a 0, 3, 4, 5 és 6 számjegyek mindegyikének felhasználásával készíthető.

- Hány ötjegyű számot írtunk le?
- Ezek között hány olyan van, amely ötten osztható?
- Hányféleképpen választhatunk ki a leírt ötjegyű számok közül tetszőlegesen hármat? (Nem számít különbözőnek a kiválasztott számok különböző sorrendje.)
- Hány esetben lehet a kiválasztottak között legfeljebb egy páratlan?

Az n elemű halmaz elemeiből képezett rendezett k -asokat ($k \leq n$) az n elem k -adosztályú ismétlés nélküli variációinak nevezzük.



11.5. ábra Ismétlés nélküli variáció

Egy n elemű halmaz k -adosztályú ismétlés nélküli variációinak a száma:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$



11.6. ábra Ismétlés nélküli variációk száma

Adott egy n elemű halmaz. Ha úgy hozunk létre rendezett k -asokat, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk, akkor az n elem k -adosztályú ismétléses variációit kapjuk.



11.7. ábra Ismétléses variáció

Egy n -elemű halmaz k -adosztályú ismétléses variációinak a száma

$$V_n^{k(i)} = n^k.$$



11.8. ábra Ismétléses variációk száma



Rendszerező összefoglalás

Ha egy A „objektumot” n -féleképpen lehet megvalósítani, egy másik B „objektumot” pedig m -féleképpen, és a kettő együtt nem valósulhat meg, akkor a „vagy A , vagy B ” megvalósítása $n + m$ -féleképpen lehetséges.

11.9. ábra Összeadási szabály

Egy n ($n \in \mathbb{Z}^+$) elemű halmaz elemeiből képzett rendezett n -es az n elem ismétlés nélküli permutációja.

11.10. ábra Ismétlés nélküli permutáció

$0! = 1! = 1$. Ha $n \in \mathbb{Z}^+$ és $n > 1$, akkor $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

11.11. ábra Faktoriális

Egy n elemű halmaz ismétlés nélküli permutációinak a száma $P_n = n!$

11.12. ábra Ismétlés nélküli permutációk száma

Egy n ($n \in \mathbb{N}$) elemű halmaz k ($k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$) elemű részhalmazait, az n elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük.

11.13. ábra Ismétlés nélküli kombináció

Megoldás:

a) A feladat szerint mindegyik szám képzésénél fel kell használni az összes számjegyet, így egy-egy számban egy számjegy csak egyszer szerepelhet. Mivel 0-val nem kezdődhet egy ötjegyű szám, ezért az első helyre négy számjegy közül választhatunk. A második helyre is négy számjegy közül választhatunk, mert amit az első helyre leírtunk, nem írhatjuk a másodikra, de a 0-t már igen. A harmadik helyre három, a negyedik helyre kettő, az ötödikre egy számjegy közül választhatunk, így a szorzási szabály alapján $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ ötjegyű számot készíthetünk a 0, 3, 4, 5 és 6 számjegyek mindegyikének felhasználásával.

b) Egy pozitív egész szám pontosan akkor osztható öttel, ha 0-ra vagy 5-re végződik.

Ha az utolsó helyi értéken 0 áll, akkor az első helyre négy, a másodikra három, a harmadikra kettő, a negyedikre egy számjegy közül választhatunk, így a szorzási szabály alapján $4! = 24$ (11.11. ábra) ilyen ötjegyű szám képezhető (11.10. és 11.12. ábrák).

Ha az utolsó helyi értéken 5-ös áll, akkor az első helyre három, a másodikra is három, a harmadikra kettő, a negyedikre egy számjegy közül választhatunk. Eszerint ilyen ötjegyű szám $3 \cdot 3! = 18$ darab képezhető. Az összeadási szabály szerint a leírt számok között $24 + 18 = 42$ 5-tel osztható szám van.

c) Mivel nem számít különböznek a kiválasztott elemek különböző sorrendje, ezért egy 96 elemű halmaz 3 elemű részhalmazainak a számát kell megadni. Ezek száma pedig $C_{96}^3 = \binom{96}{3} = \frac{96!}{3! \cdot 93!} = \frac{96 \cdot 95 \cdot 94}{3!} = 142\,880$

(11.13., 11.14. és 11.15. ábrák).

d) A feladat szerint a kiválasztottak között legfeljebb egy páratlan lehet, ami azt jelenti, hogy nincs közöttük páratlan, vagy csak egy páratlan van közöttük.

Először adjuk meg, hogy hány páratlan, illetve páros ötjegyű számot írtunk le!

Ahhoz, hogy páratlan számot kapjunk, az utolsó számjegynek páratlannak kell lennie, így az utolsó helyi értékre két számjegy közül választhatunk. Amit ide írtunk, valamint a 0-t nem írhatjuk az első helyre, így oda csak három számjegy közül, a másodikra is három közül – hisz ide kerülhet a nulla is –, a harmadikra kettő közül, míg a negyedikre egy közül választhatunk. Így összesen $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$ páratlan szám van a papírra írt ötjegyű számok között.

A párosak száma $96 - 36 = 60$.

A kiválasztott számok között

$$C_{60}^3 = \binom{60}{3} = \frac{60!}{3! \cdot 57!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58}{3!} = 34\,220 \text{ esetben nincs páratlan és}$$

$$C_{36}^1 C_{60}^2 = \binom{36}{1} \binom{60}{2} = \frac{36!}{1! \cdot 35!} \cdot \frac{60!}{2! \cdot 58!} = 36 \cdot \frac{60 \cdot 59}{2!} = 63\,720 \text{ esetben lesz}$$

egy páratlan. Azaz legfeljebb egy páratlan szám $34\,220 + 63\,720 = 97\,940$ esetben lehet a kiválasztott számok között.



7. példa Az 1, 2, 3, 4 számjegyekből olyan tízjegyű számokat képezünk, melyekben mindegyik számjegy annyiszor fordul elő, amennyi az értéke.

- a) Hány ilyen tízjegyű számot készíthetünk?
b) Ezek közül mennyi osztható 12-vel?

Megoldás:

a) Mivel minden számjegyet annyiszor használunk fel, amennyi az értéke, ezért a tízjegyű számok mindegyikében egy darab 1-es, két darab 2-es, három darab 3-as és négy darab 4-es számjegy szerepel. Tehát annyi ilyen számot készíthetünk, ahányféleképpen sorbarendeizhetünk egy darab 1-es, két darab 2-es, három darab 3-as és négy darab 4-es számjegyet. Ezek száma

$$P_{10}^{(1,2,3,4)} = \frac{10!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!} = 12\,600$$

Tehát 12 600 ilyen tízjegyű számot készíthetünk.

b) Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel, hisz a 3 és a 4 relatív prímek, és $3 \cdot 4 = 12$. Mivel a számjegyek összege $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 30$, így mindegyik szám osztható 3-mal.

Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyből képzett szám osztható 4-gyel. Jelen esetben ez akkor teljesül, ha a tízjegyű szám 12-re, 24-re, 32-re vagy 44-re végződik.

A 11.16. táblázatban megadjuk ezek számát.

Végződés	Megmaradt számjegyek	A tízjegyű számok száma
12	2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4	$P_8^{(1;3,4)} = \frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 4!} = 280$
24	1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4	$P_8^{(1;1;3,3)} = \frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3!} = 1120$
32	1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4	$P_8^{(1;1;2,4)} = \frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 4!} = 840$
44	1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4	$P_8^{(1;2;3,2)} = \frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2!} = 1680$

11.16. ábra A lehetőségek száma

Tehát összesen $280 + 1120 + 840 + 1680 = 3920$ szám osztható 12-vel.

Binomiális együttható: Ha $n, k \in \mathbb{N}$ és $k \leq n$, akkor

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$



11.14. ábra Binomiális együttható

Egy n elemű halmaz k elemű részalmazainak a száma

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$



11.15. ábra Ismétlés nélküli kombinációk száma

Adott n darab elem, melyek közül n_1 egyforma, n_2 egyforma, de az előzőektől különböző, n_3 egyforma, de az előzőektől különböző, ..., n_k egyforma, de az előzőektől különböző, ahol $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$. Ezen n darab elem egy lehetséges sorrendjét, az n elem egy ismétléses permutációjának nevezzük.



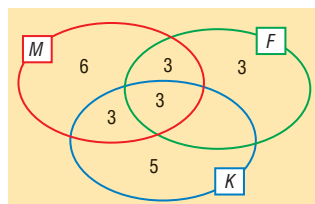
11.17. ábra Ismétléses permutáció

Az előző definícióban megadott n elem esetén az ismétléses permutációk száma

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$



11.18. ábra Ismétléses permutációk száma

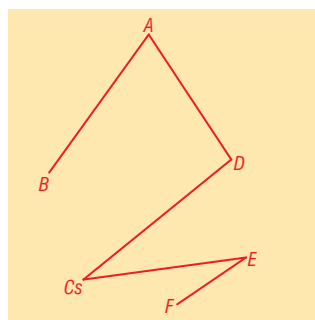


11.19. ábra Halmazábra a 8. példához

Véges gráf: egy véges pont-halmaz pontjai közül néhány éllel összekötve.



11.20. ábra Gráf



11.21. ábra A 9. példa gráfja



8. példa Egy 30 fős osztály minden tagja jár a következő három délutáni foglalkozás valamelyikére: matematika-, fizikaszakkör, kosárlabdaedzés. Az osztály 10 százaléka vesz részt mindhárom foglalkozáson. Azok, akik matematika- és fizikaszakkörre is járnak, kétszer annyian vannak, mint akik mindháromra járnak. Az osztály 20 százaléka jár matematikaszakkörre is és kosárlabdaedzésre is, és ugyanennyien csak a matematikaszakkört látogatják. Csak fizikaszakkörre feleannyian járnak, mint csak matematikaszakkörre. Csak kosárlabdaedzésre kettővel többen járnak, mint csak fizikaszakkörre.

a) Hányan járnak fizikaszakkörre és kosárlabdaedzésre?
b) Ha az osztályból kiválasztunk három diákot az összes lehetséges módon, akkor hány esetben fordulhat az elő, hogy a kiválasztottak között legalább kettő olyan van, aki legalább két foglalkozásra jár?

Megoldás:

a) Mivel az osztály 30 fős, ezért 3-an vesznek részt mindhárom foglalkozáson. Ebből következik, hogy matematika- és fizikaszakkörre 6-an járnak. Matematikaszakkörre és kosárlabdaedzésre is 6-an járnak, mint ahogy csak matematikaszakkörre is. Csak fizikaszakkörre 3-an, míg csak kosárlabdázni 5-en járnak. Készítsük el az eddigi adatok alapján a Venn-diagramot (11.19. ábra).

Mivel az eddig beírt számok összege 23 és mindenki jár valamilyen foglalkozásra, ezért csak fizikaszakkörre és kosárlabdaedzésre 7-en járnak, tehát a Venn-diagramról hiányzó szám a 7. Így kosárlabdaedzésre és fizikaszakkörre összesen 10-en járnak.

b) Az előzőek alapján legalább két foglalkozásra 16-an járnak. Két eset lehetséges. Az egyik, amikor a három közül pontosan egy jár egy szakkörre, kettő legalább kettőre, ezen lehetőségek száma

$$\binom{14}{1} \binom{16}{2} = 14 \cdot \frac{16 \cdot 15}{2} = 1680. \text{ A másik, amikor mindhárman legalább}$$

$$\text{két szakkörre járnak, ezek száma } \binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3!} = 560.$$

Tehát $1680 + 560 = 2240$ -féleképpen választhatunk ki közülük három diákot úgy, hogy közülük legalább kettő legalább két foglalkozáson vegyen részt.



9. példa Egy iskolai sakkbajnokság döntőjébe hatan jutottak be: Aladár, Béla, Csaba, Dénes, Ferenc és Emil. Délután két óráig a következő mérkőzéseket már lejátszották: Aladár–Béla, Dénes–Csaba, Emil–Ferenc, Aladár–Dénes, Csaba–Emil.

a) Szemléltessük ezt az állapotot gráf (11.20. ábra) segítségével! Két pontot akkor és csak akkor kössünk össze vonallal, ha a nekik megfelelő diákok már játszottak egymással.

b) A mérkőzések hányad részét játszották már le, ha a döntőben mindenki játszik mindenkivel?

Megoldás:

- a) A döntő délután két órai állapotát a 11.21 ábrán látható gráf szemlélteti.
- b) Mivel mindenki játszik mindenkivel, így a döntőben összesen $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$ (11.29. ábra) mérkőzést játszanak le, így délután két óráig a mérkőzések harmadát játszották le (11.28. ábra).



10. példa Az alábbi állítások közül melyik igaz?

- Létezik olyan hétfős társaság, melyben mindenkinek három ismerőse van társaságon belül.
- Létezik olyan ötfős társaság, melyben az ismeretségi számok 2, 2, 2, 3, 3.
- Létezik olyan négycsúcsú gráf, melyben az egyes csúcsok fokszáma 0 (izolált csúcs), 2, 3, 5.
- Ha egy hétcúcsú egyszerű gráfban páratlan sok élt húztunk be, akkor a komplementerében is páratlan sok él van.

Megoldás:

- Hamis, ugyanis a társasághoz tartozó ismeretségi gráfban (11.26. ábra) a fokszámok összege páratlan lenne, ami ellentmond a fokszám-tételnek (11.27. ábra).
- Igaz, a társaságnak megfelelő ismeretségi gráf (11.24. ábra).
- Igaz, pl. (11.25. ábra).
- Hamis, mivel a hétcúcsú teljes gráf éleinek a száma (11.29. ábra):

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21,$$

tehát ha egy hétcúcsú egyszerű gráfban páratlan sok él van, akkor komplementerében páros sok élnek kell lennie (11.30. ábra).

Egyszerű gráf: olyan gráf, amelyben nincs többszörös él és hurokél.



11.26. ábra Egyszerű vagy ismeretségi gráf

Bármely véges gráfban a csúcsok fokszámának összege egyenlő az élek számának kétszeresével.



11.27. ábra Fokszám-tétel

Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, amelyben bármely két pontot él köt össze.



11.28. ábra Teljes gráf

Egy n csúcsú teljes gráf éleinek a száma $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.



11.29. ábra Teljes gráf éleinek száma

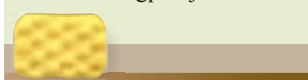
Gráf pontjának fokszáma a pontra illeszkedő élek száma.



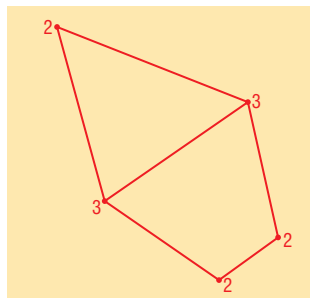
11.22. ábra Fokszám

Többszörös él: két pont közötti több él.

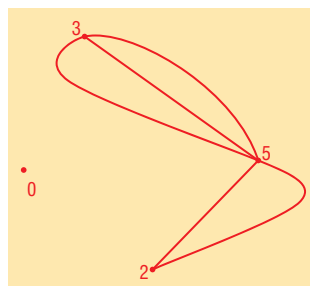
Hurokél: olyan él, amelynek kezdő- és végpontja azonos.



11.23. ábra Többszörös él, hurokél



11.24. ábra A 10. b) gráfja



11.25. ábra A 10. c) gráfja

Ha két egyszerű gráf csúcsai azonosak, de az egyik gráfban pontosan azok a csúcsok vannak összekötve, melyek a másikban nincsenek, akkor a két gráfot egymás **komplementerének** nevezzük.



11.30. ábra Gráf komplementere



Rendszerező összefoglalás



Oldjuk meg!

1. Igaz-e, hogy egy 25 fős osztályban biztosan van legalább három olyan diák, akik ugyanabban a hónapban ünneplik a születésnapjukat?
2. Igaz-e, hogy négy négyzetszám között biztosan van kettő, amelyek különbsége 5-re vagy 0-ra végződik?
3. Egy dobókockát négyszer egymás után feldobunk, és a kapott eredményeket egymás mellé írjuk.
 - a) Hány olyan négyjegyű számot kaphatunk, amelyekben van hárommal osztható számjegy?
 - b) Mi a válasz az előző kérdésre, ha egy számjegy csak egyszer szerepelhet a számban?
4. Egy lézerbemutatót öt különböző alakú csillagot vetítenek ki egymás mellé, melyek lehetnek piros vagy kék színűek. Hány különböző díszítősor lehet készíteni ebből az öt elemből?
5. Egy urnába beteszünk 25 db papírlapot, melyekre 1-től 25-ig írtuk rá a számokat.
 - a) Hányféleképpen húzhatunk ki belőle hármat úgy, hogy közöttük legalább kettő olyan legyen, amelynek számjegyei között van 7-es vagy a szám 7-tel osztható?
 - b) Az előző urnából hányféleképpen húzhatunk ki négy cédulát úgy, hogy több olyan cédula legyen a kezünkben, melyen páros szám van, mint olyan, amelyen páratlan?
6. Szemléltessünk gráffal négy olyan települést, melyek közül egyből 3, kettőből 2 és egyből 1 út indul ki a többi három település felé!
7. Legfeljebb hány éle lehet egy olyan egyszerű négycsúcsú gráfnak, melynek több éle van, mint a komplementerének? Rajzoljunk fel egy ilyen gráfot!

12. Statisztika, valószínűség-számítás

12.1. Statisztika

Sokaság: a vizsgált egyedek összessége.
Ismérv: a vizsgált tulajdonság.



12.1. ábra Sokaság, ismérv

Gyakoriság (f): adatfajta előfordulásának száma a sokaságban.



12.2. ábra Gyakoriság

Adatok összegzésére, elemzésére, tudományos elméletek adatok segítségével történő igazolására vagy megcáfolására számtalan természet- és társadalomtudománynak szüksége van. A tömegesen előforduló jelenségek és folyamatok számbavételével, az így nyert adatok elemzésével foglalkozó tudomány a statisztika.



1. példa Adjunk meg egy olyan 7 pozitív egész számból álló, egymóduszú sokaságot (12.1. ábra), amelynek mediánja 4, átlaga 2011 és a módusz a) 2, b) 4, c) 2000, d) maximális!

Megoldás:

A számsokaság elemszáma 7, átlaga 2011 (12.3. ábra), így az átlag definíciója miatt az elemek összege: $7 \cdot 2011 = 14\,077$. A medián definíciója értelmében a hételemű sokaság három eleme nem nagyobb, és három

eleme (12.4. ábra) nem kisebb a 4-nél. Ha a $Mo \neq 4$, akkor a módusz (12.5. ábra) gyakorisága (12.2. ábra) 3 vagy 2. $Mo = 4$ esetén a módusz gyakorisága legalább 2 és legfeljebb 7.

Így a fentiek miatt a keresett sokaságok például:

a) 2, 2, 2, 4, 4, 7031, 7032.

b) 4, 4, 4, 4, 4, 14 053.

c) 1, 2, 3, 4, 2000, 2000, 10 067.

d) Ha azt szeretnénk, hogy a módusz a lehető legnagyobb legyen az adott feltételek mellett, akkor a gyakoriságát 2-nek, a többi számot pedig a lehető legkisebbnek kell választanunk. Ügyelnünk kell arra, hogy a móduszon kívüli adatok gyakorisága 1. Ekkor $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 2 \cdot Mo = 14\ 077$, innen adódik, hogy a módusz maximális értéke 7031.



2. példa Egy aquaparkba egy forró nyári napon 2500 fizetővendég látogatott el. Az eladott jegyek 30%-a 3600 Ft-os (felnőtt, nem helyi lakos), 20%-a 2000 Ft-os (diák, nyugdíjas, nem helyi lakos), 15%-a 1800 Ft-os (diák, nyugdíjas, helyi lakos), 10%-a bébijegy volt. Az eladott belépők átlagosan 2600 Ft-ba kerültek.

a) Mennyibe került egy bébijegy?

b) Ábrázoljuk kördiagramon az eladott jegyek ár szerinti százalékos megoszlását!

Megoldás:

a) Jelöljük a bébijegyek árát x -szel ($x > 0$)! Az átlag kiszámítására vonatkozó képlet alapján:

$$2600 = 0,3 \cdot 3600 + 0,25 \cdot 2000 + 0,15 \cdot 1800 + 0,1 \cdot x,$$

$$100 = 0,1 \cdot x,$$

$$x = 1000.$$

Tehát egy bébijegy 1000 Ft-ba került.

b) Az ábrázoláshoz ki kell számolnunk az egyes adatfajtáknak megfelelő körcikkek középponti szögeit az $\alpha_i^\circ = 360^\circ \cdot g_i$ összefüggés alapján, ahol g_i az egyes adatfajták relatív gyakorisága (12.6. ábra). Az egyes jegyáraknak megfelelő körcikkek középponti szögei:

$$\alpha_{3600 \text{ Ft}} = \frac{360^\circ}{100} \cdot 30 = 108^\circ,$$

$$\alpha_{2000 \text{ Ft}} = \frac{360^\circ}{100} \cdot 25 = 90^\circ,$$

$$\alpha_{1800 \text{ Ft}} = \frac{360^\circ}{100} \cdot 20 = 72^\circ,$$

$$\alpha_{1000 \text{ Ft}} = \frac{360^\circ}{100} \cdot 15 = 54^\circ,$$

$$\alpha_{3000 \text{ Ft}} = \frac{360^\circ}{100} \cdot 10 = 36^\circ. \quad (12.7. \text{ ábra})$$

Átlag ($\bar{x}$): a számsokaság elemei összegének és elemei számának hányadosa.



12.3. ábra Átlag

Medián (Me): nem csökkenő sorrendbe rendezett számsokaság középső eleme, ha az elemszám páratlan, két középső elemének átlaga, ha az elemszám páros.



12.4. ábra Medián

Módusz (Mo): a sokaság maximális gyakoriágú eleme(i).

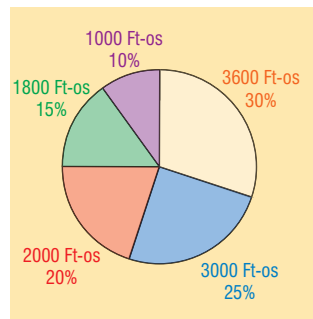


12.5. ábra Módusz

Relatív gyakoriság (g): a gyakoriság és a sokaság elemszámának hányadosa.



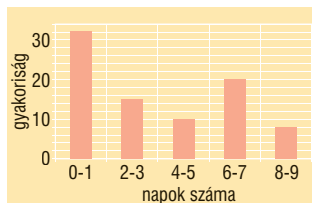
12.6. ábra Relatív gyakoriság



12.7. ábra Az eladott belépők ár szerinti eloszlása



Rendszerező összefoglalás



12.8. ábra A 3. példához



3. példa 85 embert megkérdeztek, hogy hány napot volt betegszabadságon az elmúlt évben. A válaszokat az alábbi oszlopdiagramon ábrázolták (12.8. ábra).

- Készítsünk táblázatot a betegszabadságon eltöltött napok eloszlásáról!
- Becsüljük meg, hogy a megkérdezettek átlagosan hány napot voltak betegszabadságon az elmúlt évben!

Megoldás:

a) A betegszabadságon eltöltött napok eloszlását a 12.9. táblázat mutatja.

b) Osztályközös gyakorisági sor esetén, egyenlő osztályközöknél, az egy osztályba eső adatokat a felső határokkal becsüljük. Így az átlag:

$$\bar{x}_{\text{becsült}} = \frac{32 \cdot 1 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 20 \cdot 7 + 8 \cdot 9}{85} \approx 4. \text{ Tehát a megkérdezettek}$$

átlagosan négy napot voltak betegszabadságon.

Napok száma	Gyakoriság
0-1	32
2-3	15
4-5	10
6-7	20
8-9	8

12.9. ábra A 3 a) példa megoldása



4. példa A 12.10. táblázat három portfólió reálhozamainak alakulását mutatja az előző évhez képest százalékban.

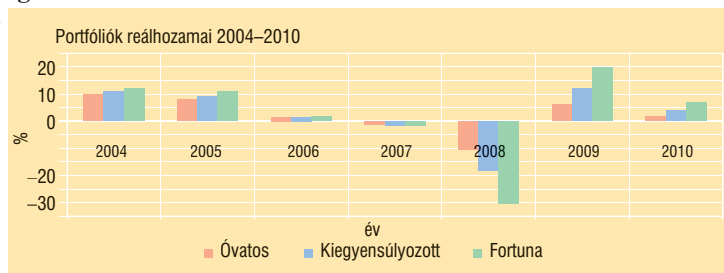
- Ábrázoljuk az adatokat oszlopdiagramon!
- Határozzuk meg az egyes portfóliók átlagos évi reálhozamait! Melyik portfóliónak a legnagyobb az átlagos éves reálhozama?

	Óvatos	Kiegyensúlyozott	Fortuna
2004	10%	11%	12%
2005	8%	9%	11%
2006	1,4%	1,6%	1,9%
2007	-1,2%	-1,4%	-1,6%
2008	-10%	-18%	-30%
2009	6%	12%	20%
2010	2%	4%	7%

12.10. ábra A reálhozamok alakulása

Megoldás:

a)



12.11. ábra A 4. a) példa megoldása

Terjedelem (R): a számsokaság maximális és minimális elemének különbsége.



12.12. ábra Terjedelem

b) Az egyes portfóliók 2004 év elejéhez viszonyított értékét a 2010 év végén, kamatoskamat-számítás alapján kaphatjuk meg. Az Óvatos portfólió értéke 2010 év végén: $1,1 \cdot 1,08 \cdot 1,014 \cdot 0,988 \cdot 0,9 \cdot 1,06 \cdot 1,02 \approx 1,1581$ -szerese a 2004 év eleji értéknek.

A Kiegyensúlyozott portfólió értéke 2010 év végén:

$1,11 \cdot 1,09 \cdot 1,016 \cdot 0,986 \cdot 0,82 \cdot 1,12 \cdot 1,04 \approx 1,1577$ -szerese a 2004 év eleji értéknek.

A Fortuna portfólió értéke 2010 év végén:

$1,12 \cdot 1,11 \cdot 1,019 \cdot 0,984 \cdot 0,7 \cdot 1,20 \cdot 1,07 \approx 1,1204$ -szerese a 2004 év eleji értéknek. Már ezekből is látszik, hogy az Óvatos portfóliónak a legnagyobb az átlagos évi reálhozama.

Az Óvatos portfólió értéke évente átlagosan:

$\sqrt[7]{1,1 \cdot 1,08 \cdot 1,014 \cdot 0,988 \cdot 0,9 \cdot 1,06 \cdot 1,02} \approx 1,0212$ -szeresére nőtt, innen a portfólió átlagos évi reálhozama (7 évre) 2,12%.

A Kiegyensúlyozott portfólió értéke évente átlagosan :

$\sqrt[7]{1,1577} \approx 1,0211$ -szeresére nőtt, így a portfólió átlagos évi reálhozama (7 évre) 2,11%.

A Fortuna portfólió értéke 2010 év végén: $\sqrt[7]{1,1204} \approx 1,0164$ -szeresére nőtt, tehát a portfólió átlagos évi reálhozama (7 évre) 1,64%.



5. példa Egy iskola 9. évfolyamos tanulóinak félévi matematika és fizika osztályzatait összesítettük (12.14. ábra).

- Összesen hány tanulót kérdeztek meg?
- Adjuk meg a matematikajegyek mediánját, móduszát, terjedelmét!
- Adjuk meg a fizikajegyek átlagát, átlagos abszolút eltérését, szórást!

Megoldás:

a) Az egy-egy sorban levő számok összege rendre megadja a fizika tantárgyból elégtelen, elégséges, közepes, jó és jeles osztályzatot kapott tanulók számát. Az oszlopokban levő számok összege pedig matematika elégtelen, elégséges, közepes, jó és jeles osztályzatot kapott tanulók számát adja meg (12.15. ábra). A sorösszegek (oszlopösszegek) összege a megkérdezett tanulók számával egyenlő. Tehát 240 tanulót kérdeztek meg.

b) A 12.15. ábra utolsó sora és a sokaság statisztikai jellemzőinek definíciói alapján a matematikajegyek mediánja: $Me = \frac{x_{120} + x_{121}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$, módusza: $Mo = 3$, terjedelme (12.12. ábra): $R = x_{\max} - x_{\min} = 4$.

c) A fizikajegyek átlagának, átlagos abszolút eltérésének (12.13. ábra) és szórásának (12.16. ábra) meghatározásához bővítsük ki a gyakorisági eloszlás táblázatát az $|x_i - \bar{x}|$, az $f_i \cdot |x_i - \bar{x}|$, az $f_i x_i$, az x_i^2 és az $f_i \cdot x_i^2$ oszlopokkal!

Átlagos abszolút eltérés: a sokaság elemeinek átlagától való eltéréseinek átlaga.



12.13. ábra Átlagos abszolút eltérés

		matematika				
		1	2	3	4	5
fizika	1	5	12	-	-	-
	2	6	25	26	6	2
	3	6	13	38	17	6
	4	-	6	18	14	9
	5	-	4	6	13	8

12.14. ábra Az 5. példához

		matematika					
		1	2	3	4	5	
fizika	1	5	12	-	-	-	17
	2	6	25	26	6	2	65
	3	6	13	38	17	6	80
	4	-	6	18	14	9	47
	5	-	4	6	13	8	31
		17	60	88	50	25	240

12.15. ábra Az 5. példa megoldásához



Rendszerező összefoglalás

Szórás (σ): a számsokaság elemeinek átlagtól való eltéréseinek négyzetei átlagának négyzetgyöke.



12.16. ábra Szórás

x_i	f_i	$f_i x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i \cdot x_i - \bar{x} $	x_i^2	$f_i \cdot x_i^2$
1	17	17	2,041667	34,70833	1	17
2	65	130	1,041667	67,70833	4	260
3	80	240	0,041667	3,333333	9	720
4	47	188	0,958333	45,04167	16	752
5	31	155	1,958333	60,70833	25	775
Összesen:	240	730		211,5		2524
		$\bar{x} \approx 3,04$		$\delta \approx 0,88$		$\overline{x^2} \approx 10,52$

12.17. ábra A kibővített táblázat

A fizika osztályzatok átlaga: $\bar{x} \approx 3,04$, átlagos abszolút eltérése:

$\delta \approx 0,88$, szórása: $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \approx 1,13$.



Oldjuk meg!

- Van-e olyan tizenegy pozitív egész számból álló számsokaság, amelynek mediánja 11, az átlaga 2012 és módusza
a) 6; b) 496; c) 4298?
- Hogyan változik az 1,2,3,3,2,5,6,2,2,2,5,6,5,3,5 számokból álló sokaság átlaga, módusza, mediánja, ha minden
a) eleméhez hozzáadunk -5 -öt? b) elemét szorozzuk $\frac{1}{2}$ -del?
- Az alábbi táblázat (12.18. ábra) 30 tizenhat éves lány adatait tartalmazza, az összetartozó adatok rendre: testtömeg – az előző tanév végi történelem osztályzat. A testtömegeket egész kg-ra kerekítve adtuk meg.

54-3	49-5	51-5	54-3	55-3
56-3	50-2	52-3	54-4	56-4
47-4	50-2	53-3	54-4	57-2
47-5	51-3	54-2	54-4	57-3
48-4	51-4	54-2	55-3	48-2
49-3	48-4	49-3	50-4	51-5

12.18. ábra A lányok adatai

- Adjuk meg a testtömegek gyakorisági eloszlását táblázattal, szemléltessük oszlopdiagrammal!
 - Adjuk meg a történelem osztályzatok gyakorisági eloszlását táblázattal, szemléltessük kördiagrammal!
 - Határozzuk meg a testtömegek terjedelmét, átlagos abszolút eltérését, szórását!
 - Határozzuk meg az osztályzatok átlagát, móduszát, mediánját!
- Egy osztály matematika dolgozatának eredménye a következőképpen alakult: 5 jeles, 4 jó, valahány közepes, 5 elégséges és 3 elégtelen.
a) Hányan írtak közepes osztályzatú dolgozatot, ha az osztályátlag 3,105-nél nagyobb és 3,110-nél kisebb?
b) Ábrázoljuk kördiagramon az osztályzatok gyakoriságát!
c) Adjuk meg az osztályzatok móduszát, mediánját, átlagos abszolút eltérését, szórását!

5. A 12.19. ábra egy nyolcosztályos gimnázium kor és nem szerinti eloszlását adja meg.

- Hány lány és hány fiú diák jár ebbe a gimnáziumba?
- Melyik korcsoport a legnépesebb?
- Ábrázoljuk közös oszlopdiagramon, a lányok és a fiúk korcsoportok szerinti eloszlását!
- Számítsuk ki a lányok százalékos arányát a 14 évnél fiatalabbak korcsoportjában!

Korcsoport (év)	Lányok száma	Fiúk száma
10-11	3	2
12-13	85	130
14-15	139	91
16-17	123	87
18-19	108	79
19-20	12	21

12.19. ábra A gimnazisták adatai

12.2. Valószínűség-számítás

A véletlen jelenségek vizsgálatával a matematika egyik legfiatalabb ága, a valószínűség-számítás foglalkozik.



1. példa Dobjunk fel egy piros és egy zöld dobókockát!

Az A esemény jelentse azt, hogy a két kockán dobott számok szorzata páratlan!

- Adjuk meg a kísérlethez tartozó eseményteret! (12.22 ábra)
- Adjuk meg az A eseményt!
- Számítsuk ki az A esemény valószínűségét!

Megoldás:

a) Mivel a két dobókocka különböző, ezért nem mindegy, hogy melyik számot melyik kockán dobjuk. Mindkettőn hatféle számot dobhatunk egymástól függetlenül, így a szorzási szabály értelmében 6·6-féle kimenetel lehetséges. A kísérlethez tartozó eseménytér elemi eseményei olyan rendezett számpárok, amelyek első tagja a piros dobókockával dobott szám, a második tagja pedig a zöld dobókockával dobott szám. Ezt szemléltetjük a 12.21. ábrán.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

12.21. ábra Az 1. példa kísérletéhez tartozó eseménytér

Valószínűségi kísérlet:

- kimeneteleinek bekövetkezése a véletlentől függ.
- azonos körülmények között akárhányszor megismételhető.



12.20. ábra Kísérlet

Eseménytér (H): a lehetséges kimeneteleinek halmaza.

Esemény: az eseménytér részhalmaza.

Elemi esemény: egyelemű esemény.

Biztos esemény: H

Lehetlen esemény: $\emptyset$.



12.22. ábra Eseménytér



Rendszerező összefoglalás

Az események relatív gyakorisága egy, az **eseményre jellemző szám** „közeliében van”. Ez a szám a $[0;1]$ intervallum eleme. Ezt a számot az esemény valószínűségének nevezzük.

A valószínűségtől elvárjuk, hogy:

- I. Bármely A eseményre $0 \leq P(A) \leq 1$
- II. $P(H) = 1$ (A biztos esemény valószínűsége 1.)
- III. Ha A és B egymást kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$



12.23. ábra Valószínűség

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

12.24. ábra Az 1. példa megoldásához

Ha H véges, elemeinek száma n , elemi eseményei egyenlő valószínűségűek, és A esemény elemeinek száma k , akkor $P(A) = \frac{k}{n}$.



12.25. ábra Klasszikus valószínűség

b) A 12.24. ábrán a kis négyzetekbe írt számok a dobott számok szorzatát adják meg. A dobott számok szorzata pontosan akkor páratlan, ha mindkét tényező páratlan. Az A esemény :

$$A = \{(1,1); (1,3); (1,5); (3,1); (3,3); (3,5); (5,1); (5,3); (5,5)\}.$$

c) A 12.24. ábrában kézzel színeztük azokat a mezőket, amelyekben a dobott pontok szorzata páratlan. Ezek száma 9. Feltételezhetjük, hogy bármelyik elemi esemény ugyanakkora valószínűséggel következik be, így alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűség-számítási modellt. Tehát

$$P(A) = \frac{9}{36} = 0,25 \text{ (12.25. ábra).}$$



2. példa Egy gyártósor két futószalagból és egy szeletelőből áll. Jelentse az A azt az eseményt, hogy az első futószalag működik, B azt, hogy a második futószalag üzemképes, C pedig azt, hogy a szeletelő működik. Mit jelentenek az alábbi események?

- a) $A + B + C$; b) $A \cdot B \cdot C$; c) $\bar{B} \cdot C$; d) $\bar{A} + B$; e) $(A - B) \cdot C$ (12.26. ábra)

Megoldás:

- a) A két futószalag és a szeletelő közül legalább az egyik működik.
 b) A futószalagok is és a szeletelő is működik.
 c) A szeletelő működik, a második futószalag nem működik.
 d) Egyik futószalag sem üzemképes.
 e) Az első futószalag működik, a második nem és a szeletelő is működik.

Az alábbi feladatokban feltételezzük, hogy bármelyik elemi esemény ugyanakkora valószínűséggel következik be, így alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűség-számítási modellt.



3. példa Egy csomag magyar kártyából kiválasztunk négy lapot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a kiválasztott lapok között van ász, a B azt, hogy van piros és C azt, hogy közöttük van a piros ász!

- a) Az A , a B és a C események közül melyek között áll fenn, hogy az egyik maga után vonja a másikat (12.27. ábra)?
 b) Függetlenek-e az A és a B események?

Megoldás:

- a) Mivel $C \subseteq A$, $C \subseteq B$, így a C esemény maga után vonja az A és a B eseményeket.
 b) A kiválasztásnál a lapok sorrendje nem számít, ismétlődés nem lehetséges, ezért az összes eset száma 32 elem 4-ed osztályú ismétlés nélküli

kombinációja: $\binom{32}{4} = 35\,960$.

Mivel az A , a B és az $A + B$ események valószínűségeinek meghatározásánál több esetet kell vizsgálni, mint az előbbi események komplementer eseményeinek valószínűségeinél, ezért praktikusabb az események komplementereinek valószínűségeit meghatározni. Az $\overline{A}$ jelenti azt az eseményt, hogy a kiválasztott lapok között nincs ász. Az ezt megvalósító elemi események száma:

$$\binom{28}{4} = 20\,475.$$

$$\text{Így } P(\overline{A}) = \frac{20\,475}{35\,960} = \frac{4095}{7192}, \text{ ahonnan}$$

$P(A) = 1 - \frac{4095}{7192} = \frac{3097}{7192}$ (12.28. ábra). A B esemény komplementere jelenti azt az eseményt, hogy a kiválasztott lapok között nincs piros, az ezt megvalósító elemi események száma $\binom{24}{4} = 10\,626$.

$$\text{Innen } P(\overline{B}) = \frac{10\,626}{35\,960} = \frac{5313}{17\,980}, \text{ így}$$

$$P(B) = \frac{12\,667}{17\,980}.$$

Az $\overline{A+B}$ jelenti azt az eseményt, hogy a kiválasztott lapok között nincs piros és nincs ász, az ezt megvalósító elemi események száma:

$$\binom{32-11}{4} = \binom{21}{4} = 5985.$$

Innen $P(A+B) = 1 - \frac{5985}{35\,960} = \frac{5995}{7192}$. A két esemény összegére vonatkozó szitaformula (12.29. ábra) alapján az $A \cdot B$ esemény szorzatának valószínűsége:

$$P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A+B) = \frac{3097}{7192} + \frac{12\,667}{17\,980} - \frac{5995}{7192} = \frac{2711}{8990}$$

Mivel $P(A \cdot B) \neq P(A) \cdot P(B)$ teljesül, ezért az A és B események nem függetlenek.



4. példa

Egy hatfős baráti társaság színházba ment, az egymás mellett levő helyeket véletlenszerűen foglalták el. Mekkora annak a valószínűsége, hogy

- Gábor és Tamás (a társaság két tagja) egymás mellé ült?
- Gábor és Tamás (a társaság két tagja) nem ült egymás mellé?
- a három házaspárból álló társaságban a házastársak egymás mellé ültek le?

Megoldás:

a) Legyen az A az az esemény, hogy Gábor és Tamás egymás mellé ült. Az összes eset száma: $P_6 = 6!$. Gábort és Tamást egy kettős székre ültetve

Események összege:

$$A + B = A \cup B$$

Események szorzata:

$$A \cdot B = A \cap B$$

Események különbsége:

$$A - B = A \setminus B$$

Komplementer esemény:

$$\overline{A} = H \setminus A$$

Ha $A \cdot B = \emptyset$, akkor A és B egymást kizáró események.



12.26. ábra Műveletek eseményekkel

A maga után vonja B -t, akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$.



12.27. ábra Maga után vonás

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$



12.28. ábra Komplementer esemény valószínűsége

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$



12.29. ábra Szitaformula eseményekre



Rendszerező összefoglalás

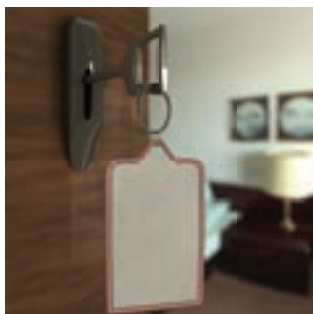
A és B függetlenek akkor és csak akkor, ha $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.



12.30. ábra Események függetlensége



12.31. ábra A színház



12.32. ábra Kizáró

a társaság 5!-féleképpen foglalhat helyet. Gábor és Tamás cseréje a lehetséges esetek számát megkétszerezi. Így $P(A) = \frac{2 \cdot 5!}{6!} = \frac{1}{3}$.

b) Ez az esemény az A esemény komplementere, innen

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}.$$

c) Legyen a B az az esemény, hogy a házastársak egymás mellett ülnek. Az összes eset száma: 6!. 3 házaspár sorban 3! számú „kettős” széket foglal el. Minden házaspár férfi- és nőtagjának cseréje a lehetséges esetek számát megkétszerezi, tehát a feltételeknek megfelelő esetek száma: $2^3 \cdot 3!$. Tehát $P(B) = \frac{2^3 \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{15}$.



5. példa Hét egyforma cédulára felírjuk az 1, 2, 2, 2, 5, 5, 5 számjegyeket, ezután a cetliket beletesszük egy urnába. Egy-
más után hétszer húzunk úgy, hogy a cédulákat nem tesszük vissza.
A kihúzott számjegyeket a húzás sorrendjében egymás mellé írjuk.
Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kapott hétjegyű szám
osztható négygyel?

Megoldás:

Legyen a C az az esemény, hogy a kapott hétjegyű szám osztható négygyel. A négygyel való oszthatóság szabálya értelmében az utolsó két számjegy által alkotott szám 12 vagy 52. Legyen az A az az esemény, hogy a kapott hétjegyű szám utolsó két számjegye 12, B az az esemény, hogy a kapott hétjegyű szám utolsó két számjegye 52! Ezen események összege a C esemény. Az összes eset számát hét elem ismétléses permutációinak száma adja: $P_7^{(1,3,3)} = \frac{7!}{1! \cdot 3! \cdot 3!} = 140$. Az A eseményt

megvalósító elemi események száma: $P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$, a B eseményt

megvalósító elemi események száma $P_5^{(1,2,2)} = \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = 30$.

Ezek az események páronként kizárják egymást, így a

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{140} + \frac{30}{140} = \frac{2}{7}.$$



6. példa Egy pályázatra 35 pályamunka érkezett, 5 kategóriában hirdettek 1-1 győztest. Mekkora annak a valószínűsége, hogy
Tóth Béla pályázata nyer, ha
a) egy pályamunka csak egy kategóriában lehet győztes;
b) egy pályamunka több kategóriában is lehet győztes?

Megoldás:

Legyen az A az az esemény, hogy Tóth Béla pályázata nyer! Ekkor az $\bar{A}$ jelenti azt az eseményt, hogy Tóth Béla pályázata nem nyer.

a) Az összes eset számát 35 elem 5 tagú ismétlés nélküli variációinak száma adja: $V_{35}^5 = 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 = 38\,955\,840$. Az $\bar{A}$ eseményt megvalósító elemi események számát 34 elem 5 tagú ismétlés nélküli variációinak száma adja: $V_{34}^5 = 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 = 33\,390\,720$. Innen adódik, hogy $P(A) = 1 - \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30}{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31} = \frac{1}{7}$.

b) Az összes eset számát 35 elem 5 tagú ismétléses variációinak száma adja: $V_{35}^{5(i)} = 35^5 = 52\,521\,875$. Az $\bar{A}$ eseményt megvalósító elemi események számát 34 elem 5 tagú ismétléses variációinak száma adja:

$$V_{34}^{5(i)} = 34^5 = 45\,435\,424.$$

$$\text{Így } P(A) = 1 - \frac{34^5}{35^5} \approx 0,1349.$$



12.33. ábra Ki lesz a győztes?



7. példa Egy lámpát gyártó cég 200 lámpájából 8 selejtes. Minőségellenőrzéskor a 200 lámpából 4 darabot választanak ki. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között legalább két selejtes van, ha a mintavétel visszatevés nélküli?

Megoldás:

Legyen az A az az esemény, hogy a kiválasztottak között legalább két selejtes van! Az A esemény komplementere jelenti azt az eseményt, hogy a kiválasztott lámpák között legfeljebb egy selejtes van. Az összes eset számát 200 elem negyedosztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma adja $\binom{200}{4}$. Az $\bar{A}$ esemény bekövetkezik, ha a kiválasztott lámpák között 0 vagy 1 selejtes van. 0 darab selejtes van a kihúzott lámpák között,

ha mind a 4 darabot a 192 jó lámpa közül húztuk. Ezek száma: $\binom{192}{4}$.

1 darab selejtes van a kihúzott lámpák között, ha a 8 selejtes darab közül húztunk 1-et, és 3 lámpát a 192 jó lámpa közül húztunk. Ezek száma: $\binom{8}{1} \binom{192}{3}$. Tehát az összeadási szabály alapján legfeljebb egy selejtes lámpát $\binom{192}{4} + \binom{8}{1} \binom{192}{3}$ -féleképpen húzhatunk. Innen

selejtes lámpát $\binom{192}{4} + \binom{8}{1} \binom{192}{3}$ -féleképpen húzhatunk. Innen

selejtes lámpát $\binom{192}{4} + \binom{8}{1} \binom{192}{3}$ -féleképpen húzhatunk. Innen

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{192}{4} + \binom{8}{1} \binom{192}{3}}{\binom{200}{4}} \approx 0,0081.$$



12.34. ábra Minőségellenőr

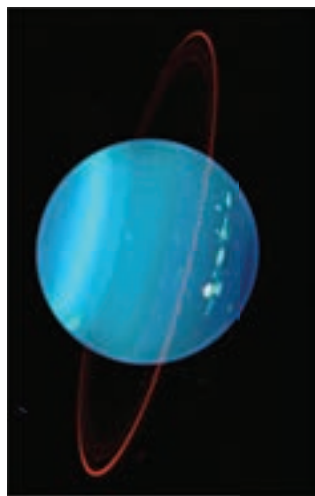


Rendszerező összefoglalás



8. példa Egy távoli bolygón hímnemű, illetve nőnemű egyedek élnek. A statisztikai adatok szerint egy hímnemű egyed születésének a valószínűsége 0,6. Egy családban az egyik utód neme független a többi utód nemétől. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy négy utódot nevelő családban az utódok között

a) egy hímnemű utód van?
b) legfeljebb egy hímnemű utód van?



12.35. ábra Egy távoli bolygó

Megoldás:

a) Legyen A az az esemény, hogy a négy utód között egy hímnemű és három nőnemű utód van. Mivel a születési sorrendben egy helyre hímnemű és három helyre nőnemű utódnak kell kerülnie, ezért az ennek megfelelő események száma $\binom{4}{1}$. Ezek az események egyenlő valószínűségűek: $0,6^1 \cdot 0,4^3$. Mivel páronként kizárják egymást, így a keresett valószínűség ezen események valószínűségeinek összege:

$$P(A) = \binom{4}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^3 = 0,1536.$$

b) „Legfeljebb egy” azt jelenti, hogy a négy utód között 0 vagy 1 hímnemű utód van. Legyen B az az esemény, hogy mind a négy utód nőnemű! Így az az esemény, hogy egy négy utódot nevelő családban az utódok között legfeljebb egy hímnemű utód van, egyenlő az A és B események összegével. Az a) rész alapján $P(B) = \binom{4}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^4 = 0,0256$. Az A és B események páronként kizárják egymást, így az összegük valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségeinek az összegével:

$$P(A + B) = \binom{4}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^4 + \binom{4}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^3 = 0,1792.$$



Oldjuk meg!

- Öt kártyára felírjuk a 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket, majd betesszük azokat egy dobozba. Ezután kihúzzunk belőlük kettőt egymás után, majd a húzás sorrendjében letesszük azokat az asztalra.
 - Adjuk meg az eseményteret!
 - Az A jelentse azt az eseményt, hogy kétjegyű prímszámot kapunk. Mekkora az A esemény valószínűsége?
- Anna, Béla, Cecil, Dezső, Emese véletlenszerűen leülnek egy kör alakú asztalhoz. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a két fiú nem ül egymás mellett?
- Egy pénzürmét hatszor egymás után feldobunk, és a dobások eredményét leírjuk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy

- 
- a) nem dobtunk írást;
b) legalább négyszer írást dobtunk?
4. Egy dobókockát háromszor egymás után feldobunk, majd a dobott számokat leírjuk egymás mellé. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kapott háromjegyű szám
- a) osztható kilencvel;
b) nem tartalmaz 5-ös számjegyet;
c) a számjegyek között nincs 4-es vagy nincs 6-os;
d) a számjegyek összege 11;
e) a számjegyek szorzata négyzetszám?
5. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy lottószelvénnel játszva az ötös lottón
- a) nincs találatunk;
b) legalább négyesünk;
c) legfeljebb hármassunk van?
6. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy totószelvénnel egy oszlopot kitöltve
- a) nincs találatunk;
b) legalább 12 találatunk;
c) legfeljebb 12 találatunk van?
7. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy n fős társaságban van két olyan ember, akik az év ugyanazon napján ünneplik a születésnapjukat, ha
- a) $n = 366$;
b) $n = 16$;
c) $n = 24$?
8. Egy kockajáték egy menete legfeljebb két dobásból áll. A játékosnak minden dobásért három fabatkát kell fizetnie. Az első dobás után a játékos eldöntheti, hogy dob még egyet vagy kéri a nyereményét. Ekkor a nyereménye annyi fabatka, mint a dobott szám nagysága. Ha a második dobás lehetőségét választja, akkor a nyereménye annyi fabatka, mint a dobott számok összege. Adjuk meg a játékos két dobás utáni lehetséges egyenlegeit! Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy menetben legalább két fabatkát nyerünk?
9. Egy dobozban 300 telefon van, melyeknek az 5%-a selejtes. Visszatevéssel egy hatelemű mintát veszünk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy
- a) van köztük selejtes;
b) pontosan egy selejtes van köztük;
c) legalább négy selejtes van köztük?
10. Egy dobozban 100 izzó van, melyeknek 4%-a selejtes. Visszatevés nélkül egy ötelemű mintát veszünk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy
- a) nincs köztük selejtes;
b) pontosan két selejtes van köztük;
c) legfeljebb két selejtes van köztük?



alap	95	egyenletrendszer	125
alaphalmaz	83	egyenlőszárú háromszög	155
<i>alaplap</i>	47	egyenlőtlenség	124
algebrai egész kifejezés	99	egyenlőtlenségrendszer	127
algebrai kifejezés	99	egyismeretlenes egyenlőtlenség	124
algebrai tört	101	egységvektor	166
<i>állítás</i>	70	egyszerű gráf	187
<i>alsó korlát</i>	16	egyszerűsítés	131
<i>alulról korlátos sorozat</i>	16	<i>ekvivalencia</i>	76
<i>annuitás</i>	33	elemi események	193
aránytartó	159	<i>ellentmondásmentesség elve</i>	73
asszociatív	73	elsőfokú függvény	110
átfogó	150	eltolás	159
átlag	189	érintő	180
átlagos abszolút eltérés	191	értékkészlet	107
átló	152	értelmezési tartomány	107
befogó	150	esemény komplementere	195
belső szög	150	esemény	193
binomiális együttható	83, 185	események különbsége	195
biztos esemény	193	események összege	195
<i>csonka gúla</i>	47	események szorzata	195
<i>csonka kúp</i>	47	eseménytér	193
csúcscsögek	150	exponenciális függvény	141
De Morgan-azonosságok (halmazok)	86	faktoriális	184
<i>De Morgan-azonosságok (logika)</i>	74	<i>fedőlap</i>	48
deltoid	153	felezőmerőleges	149
derékszögű háromszög	150	felezőpont	149
<i>différenca</i>	18	<i>felső korlát</i>	16
<i>diszjunkció</i>	73	felszín	49
diszkrimináns	129	<i>felülről korlátos sorozat</i>	16
disztributív	73	Fibonacci-sorozat	13
<i>dodekaéder</i>	68	fixpont	154
egész számok	81	fokszám	187
egyállású szögek	150	fokszámtétel	187
egybevágósági transzformáció	154	<i>forghenger</i>	46
<i>egyenes és sík hajlásszöge</i>	42	<i>forghaskúp</i>	47
<i>egyenes hengerszerű test</i>	46	forghásszög	135
<i>egyenes körhenger</i>	46	független események	196
<i>egyenes körkúp</i>	47	függvény	107
egyenes	111	függvényérték-transzformáció	114
<i>egyenesek hajlásszöge</i>	41	<i>gömb</i>	48
egyenlet	119	gráf	186

<i>gúla</i>	47	ismétlés nélküli permutáció	184
gyakoriság	188	ismétlés nélküli variáció	183
gyök	91	ismétlése permutáció	185
gyöktényező alak	131	ismétlése variáció	183
gyökvonás	90	<i>ítélet</i>	70
halmaz eleme	80	<i>ítélethalkulus</i>	70
halmaz	80	<i>ítéletlogika</i>	70
halmazok különbsége	84	izolált csúcs	187
halmazok metszete	84	<i>kamat</i>	30
halmazok uniója	84	<i>kamatláb</i>	30
<i>hamis</i>	70	<i>kamatoskamat-számítás</i>	30
<i>harmadik kizárásának elve</i>	73	kanonikus alak	92
háromszög alapú hasáb	46	képhalmaz	107
háromszög köré írt kör középpontja	151	kerület	38
háromszög	150	<i>két kitérő egyenes távolsága</i>	44
<i>hasáb</i>	46	két metsző egyenes hajlásszöge	41
hasonló	160	két pontthalmaz távolsága	44
hasonlósági transzformáció	159	<i>két sík hajlásszöge</i>	43
határozatlan	99	<i>kettős tagadás</i>	72
<i>hatszög alapú hasáb</i>	46	kiemelés	120
hatvány	88	<i>kijelentés</i>	70
hatványozás azonosságai	89	kísérlet	193
helyettesítési érték	100	kitérő egyenesek hajlásszöge	41
helyvektor	174	kitevő	88
<i>henger sugara</i>	46	kizáró események	194
<i>hengersizű test</i>	46	kocka	46
<i>hexaéder</i>	68	kommutatív	73
hozzárendelési utasítás (szabály)	109	komplementer esemény valószínűsége	195
húr	38	komplementer gráf	187
hurokél	187	komplementer halmaz	84
húrtrapéz	39	<i>konjunkció</i>	72
identitás	154	<i>konkáv test</i>	48
<i>igaz</i>	70	konstans függvény	110
<i>igazságérték</i>	70	<i>konvex test</i>	48
<i>igazságtáblázat</i>	71	koordináta	175
<i>ikozaéder</i>	68	<i>korlátos sorozat</i>	16
<i>implikáció</i>	75	koszinusz	166
<i>index</i>	11	koszínusztétel	37, 170
intervallum	109	kotangens	166
irányítástartó	158	kör egyenlete	178
irányvektoros egyenlet	177	kör	159
irracionalis számok	81	körcikk	189
ismeretlen	141	kördiagram	189
ismeretségi gráf	187	körgyűrűcikk	39
ismétlés nélküli kombináció	184	körív	38



körlap	38	<i>monoton növekvő sorozat</i>	15
középpárhuzamos egyenes	149	n-edik gyök azonosságai	91
középponti szög	39	<i>negáció</i>	71
középpontos hasonlóság	159	négyszögek	152
középpontos tükrözés	155	négyszet	152
középvonal	39	<i>négyzetes oszlop</i>	46
<i>kúpszerű test</i>	47	négyzetszám	182
kúpszerű testek magassága	47	normálalak	89
<i>kvóciens</i>	24	normálvektoros egyenlet	176
lapátló	42	numerusz	95
legkisebb közös többszörös	93	<i>oktaéder</i>	68
legnagyobb közös osztó	93	oldallap	47
lehetlen esemény	193	oszlopdiaagram	190
lineáris függvény grafikonja	110	oszthatóság	104
lineáris függvény	111	osztó	92
logaritmus azonosságai	96	osztópont	174
logaritmus függvény	112	összeadási szabály	184
logaritmus	95	összegvektor	172
<i>logikai érték</i>	70	összetett szám	92
<i>logikai függvény</i>	70	<i>palást</i>	47
<i>logikai művelet</i>	71	parabola	114
maga után vonás	195	<i>paradoxon</i>	70
magasságpont	155	paralelogramma	153
maradék	106	páratlan függvény	110
maradékos osztás	106	párhuzamos	149
másodfokú egyenlet	129	páros függvény	110
másodfokú függvény grafikonja	114	periodikus függvény	110
másodfokú függvény	114	piramis (szabályos négyoldalú gúla)	58
<i>matematikai logika</i>	70	Pitagorasz-tétel megfordítása	150
maximum	108	Pitagorasz-tétel	36
maximumhely	108	<i>poliéder</i>	46
medián	189	polinom	99
megoldás	130	pont körüli forgatás	157
mellékszögek	150	pótszögek	150
mérlegelv	121	pozitív egész számok	81
merőleges vetítés	42	prefixum	89
mértani közép	24	prím	92
<i>mértani sorozat</i>	24	racióális számok	81
metszésvonal	43	<i>rekurzív megadás</i>	12
minimum	108	relatív gyakoriság	189
minimumhely	108	relatív prím	104
módusz	189	részhalmaz	82
monoton csökkenő függvény	109	rombusz	152
<i>monoton csökkenő sorozat</i>	15	síkidom	160
monoton növekedő függvény	109	síkmetszet	43

skaláris szorzat	168	távolságtartó	154
skatulyaelv	181	téglalap alapú ferde hasáb	46
sorozat általános tagja	11	téglalap	153
statisztika	188	téglatest	46
statisztikai sokaság	188	teljes gráf	187
súlypont	174	teljes négyzet	101
szabályos csonka gúla	48	tengelyes tükrözés	155
szabályos gúla	47	tényező	121
szabályos háromszög	36	térfogat	49
szabályos hatoldalú gúla	47	terjedelem	190
szabályos hatszög	168	természetes számok	81
szabályos kilencszög	156	terület	36
szabályos négyoldalú gúla	58	test alkotói	47
szabályos test	68	test hálójá	49
szakaszfelező merőleges	149	testátló	42
számelmélet alaptétele	92	tetraéder	47
számjegy	106	Thalész-tétel	153
számrendszer	106	többszörös él	187
számsorozat	11	többszörös	93
számítani közép	18	tőke	30
számítani sorozat	18	tőkésítés	30
szárszög	58	trapéz	153
szélsőérték	108	trigonometria	162
szigorúan monoton csökkenő függvény	109	trigonometrikus Pitagorasz-tétel	165
szigorúan monoton csökkenő sorozat	15	trigonometrikus területképlet	37, 169
szigorúan monoton növekedő függvény	109	univerzum	83
szigorúan monoton növekvő sorozat	15	valódi részhalmaz	82
szimmetriasík	68	valós függvény	107
szimmetriatengely	156	valós számok	81
szinusz	166	valószínűség	194
szinusztétel	37, 170	valószínűség-számítás klasszikus modellje	194
szitaformula	85, 195	váltószögek	150
szórás	192	változó transzformáció	111
szorzási szabály	182	vektor hossza	173
szög	152	vektor szorzása számmal	173
szögfelező	149	vektorok hajlásszöge	173
szögtartó	159	vektorok különbsége	173
tag	11	vektorok összege	172
talppont	47	Viète-formulák	132
tangens	166	zérushely	108



- Kiadja: Maxim Könyvkiadó Kft., 6728 Szeged, Kollégiumi út 11/H
- E-mail: info@maxim.co.hu
- Telefon: (62) 548 444
- Fax: (62) 548 443
- Felelős kiadó: Puskás Norbert
- Nyomda: Generál Nyomda Kft., felelős vezető: Hunya Ágnes