MATEMATIKA „C”
12. évfolyam

5. modul
Ismétlés a tudás anyja

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	A középszintű érettségi vizsgakövetelményeiben szereplő ismeretanyag ismétlése feladatokon keresztül.
Időkeret	14 foglalkozás (14×2×45 perc)
Ajánlott korosztály	12. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika, biológia, földrajz, gazdaságtan, szociológia Szűkebb környezetben: A középiskolai matematika tananyag a modulcímek által megadott témakörökben. Ajánlott megelőző tevékenységek: A 12-edik osztályos tananyag ismétlése. Ajánlott követő tevékenységek: Próbaérettségi feladatsor megírása.
A képességfejlesztés fókuszai	Rendszerezés, érvelés, bizonyítás, probléma-érzékenység, probléma-reprezentáció, ábrázolás, térlátás, prezentáció, kombinativitás, induktív és deduktív következtetés, mennyiségi következtetés, valószínűségi következtetés, szövegértés, szövegértelmezés, relációszókincs, értelmes memória, metakogníció

AJÁNLÁS

A 12. tanév második féléve az ismétlés időszaka. A délutáni matematikafoglalkozásokat is erre szánjuk. Egy-egy foglalkozás anyaga messze meghaladja a 45 perces munkaidőt, éppen amiatt, hogy a feladatanyaga használható legyen a délelőtti matematika órákon is. Gyakran található a tanári mellékletben a foglalkozás témaköréhez kapcsolódó u. n. tudáspróba, amellyel a tanulók lemérhetik ismereteik mélységét.

A modulban az ismétlés kizárólag feladatok megoldásán keresztül valósul meg.

A MODUL FOGLALKOZÁSAINAK JAVASOLT SORRENDJE

1. foglalkozás: **Halmazok**
2. foglalkozás: **Számok különböző alakban**
3. foglalkozás: **Függvények**
4. foglalkozás: **Szöveges egyenletek**
5. foglalkozás: **Egyenletek**
6. foglalkozás: **Egyenlőtlenségek**
7. foglalkozás: **Sorozatok**
8. foglalkozás: **Háromszög nevezetes vonalai, pontjai és körei**
9. foglalkozás: **Hasonlóság**
10. foglalkozás: **Trigonometria**
11. foglalkozás: **Geometriai számolási feladatok**
12. foglalkozás: **Koordinátageometria**
13. foglalkozás: **Statisztika**
14. foglalkozás: **Kombinatorika és valószínűségszámítás**

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Halmazok			
1.	Halmazok megadása, halmazműveletek, halmazok számossága	Rendszerezés, szövegértés, szövegértelmezés, metakogníció	Feladatlap: 1–15. feladat
2.	Tudáspróba	Metakogníció	Feladatlap: 1–4. feladat

II. Számok különböző alakban			
1.	A négyzetgyök, *n*-edik gyök, abszolútérték, reciprok, hatvány, logaritmus, szögfüggvények fogalma, azok tulajdonságai	Rendszerezés, metakogníció	Feladatlap: 1–11. feladat
2.	Tudáspróba	Gondolkodási sebesség, metakogníció, logikus gondolkodás	Feladatlap: 1–10. feladat

III. Függvények			
1.	A másodfokú, négyzetgyök-, *n*-edik gyök-, abszolútérték-, reciprok-, hatvány-, logaritmus-, és szögfüggvények. Függvények ábrázolása transzformációval. A függvények néhány tulajdonsága.	Rendszerezés, metakogníció, probléma-reprezentáció, ábrázolás, szövegértés, szövegértelmezés	Feladatlap: 1–4. feladat
2.	Tudáspróba	Gondolkodási sebesség, metakogníció, logikus gondolkodás	Feladatlap: 1–7. feladat

IV. Szöveges egyenletek			
1.	Szöveg lefordítása az algebra nyelvére. Szöveg alapján egyenletek felírása kis segítséggel, majd segítség nélkül.	Rendszerezés, metakogníció, szövegértés, szövegértelmezés	Feladatlap: 1–14. feladat

V. Egyenletek			
1.	A tanult alapfogalmak (abszolútérték, hatvány, négyzetgyök, logaritmus, szögfüggvények), és azok tulajdonságainak alkalmazása egyenletek megoldása során.	Rendszerezés, metakogníció, probléma-reprezentáció, deduktív következtetés, mennyiségi következtetés	Feladatlap: 1–11. feladat

VI. Egyenlőtlenségek			
1.	Az ismert alapfüggvények monotonitásának vizsgálata, annak alkalmazása egyenlőtlenségek megoldása során. Grafikus megoldás. Szélsőérték feladatok megoldása elemi úton.	Rendszerezés, metakogníció, ábrázolás, deduktív és mennyiségi következtetés	Feladatlap: 1–8. feladat

VII. Sorozatok			
1.	A sorozat fogalma, néhány tulajdonsága. Számtani és mértani sorozat alkalmazása szöveggel megadott problémákban. Modell-alkotás.	Rendszerezés, metakogníció, probléma-reprezentáció, ábrázolás, szövegértés, szövegértelmezés, modell-alkotás	Feladatlap: 1–10. feladat
2.	Tudáspróba	Gondolkodási sebesség, metakogníció, logikus gondolkodás	Feladatlap: 1–7. feladat

VIII. Háromszög nevezetes vonalai, pontjai és körei			
1.	A háromszög nevezetes vonalai, pontjai, körei, és azok néhány tulajdonságának áttekintése feladatokon keresztül. Szerkesztési és számolási feladatok.	Rendszerezés, metakogníció, probléma-reprezentáció, ábrázolás, kreativitás	Feladatlap: 1–12. feladat
IX. Hasonlóság			
1.	Hasonló síkidomok felismerése, szerkesztése, területarányuk kiszámítása Hasonló testek térfogatarányának meghatározása.	Rendszerezés, metakogníció, probléma-reprezentáció, ábrázolás, szövegértés, szövegértelmezés	Feladatlap: 1–14. feladat

X. Trigonometria			
1.	A szögfüggvények fogalma, néhány tulajdonsága. A hegyesszögek szögfüggvényeinek alkalmazása derékszögű háromszögben. A következő foglalkozás anyagának (szögfüggvények alkalmazása tetszőleges háromszögben) előkészítése.	Rendszerezés, metakogníció, probléma-reprezentáció, ábrázolás, szövegértés, szövegértelmezés, deduktív következtetés	Feladatlap: 1–15. feladat
2.	Tudáspróba	Gondolkodási sebesség, metakogníció	Feladatlap: 1–7. feladat

XI. Geometriai számolási feladatok			
1.	A koszinusz- és szinusztétel alkalmazása háromszögekben, sokszögekben. Poliéderek térfogatának és felszínének kiszámítása.	Rendszerezés, metakogníció, probléma-reprezentáció, szöveg alapján alakzat rekonstruálása, szövegértés, szövegértelmezés, számolás, térfogat és terület becslése	Feladatlap: 1–7. feladat
2.	Tudáspróba	Gondolkodási sebesség, metakogníció, logikus gondolkodás	Feladatlap: 1–5. feladat

XII. Koordinátageometria			
1.	Koordinátageometriai alapismeretek ismétlése feladatokon keresztül. Egyenletrendszerek megoldása. A szükséges elemi geometria és a vektorokkal kapcsolatos ismeretek felelevenítése.	Rendszerezés, metakogníció, probléma-reprezentáció, induktív és deduktív következtetés, számolás	Feladatlap: 1–11. feladat

XIII. Statisztika			
1.	A tanult statisztikai alapfogalmak meghatározása különböző szövegkörnyezetben.	Metakogníció, szövegértés, szövegértelmezés, számolás, becslése	Feladatlap: 1–6. feladat

XIV. Kombinatorika és valószínűségszámítás			
1.	Különböző kombinatorikai feladatok, a klasszikus valószínűségi modell alkalmazása. Binomiális eloszlás.	Metakogníció, szövegértés, szövegértelmezés, számolás, valószínűségi következtetés, kombinativitás	Feladatlap: 1–9. feladat

I. HALMAZOK

Módszertani megjegyzés: Sok érv szól amellett, hogy az ismétlést a halmazokkal kezdjük. Tapasztalat szerint az adott tananyag elméletének áttekintése nem eléggé hatékony, így ajánlatos, hogy a különböző halmazjelölések megbeszélése után, feladatokon keresztül elevenítsük fel a csoporttal az előkerülő fogalmakat, ismereteket! Célszerű egy-egy feladat megoldásának megbeszélése után összefoglalni a legfontosabb „tanulságokat”, rögzítendő ismereteket. Hívjuk fel a tanulók figyelmét, hogy otthon ismét nézzék át (tankönyvből, vagy a megfelelő modul kislexikonjából) az adott tananyaggal kapcsolatos ismeretanyagot!
A tanári mellékletben szerepel egy tudáspróba. Ezt – ha a tanár jónak látja – a következő foglalkozás elején lehetne megíratni. A tanári mellékletben megtalálható a megoldása, illetve az értékelése is.
A feladatokat önállóan vagy párban oldják meg a tanulók.

1. Határozd meg

a) az 1 224 555 hétjegyű szám számjegyeinek halmazát!

b) a pozitív páros prímszámok halmazát!

c) az egyjegyű négyzetszámok halmazát!

d) a 15-tel osztható kétjegyű számok halmazát!

e) a π szám egy tizedes jegyre, 2 tizedes jegyre, 3, 4, illetve 5 tizedes jegyre kerekített értékeinek halmazát!

f) a $\{-3;-2;-1;-0;1;2;3\} \to \mathbf{Z};\, x \mapsto 2-|x-1|$ függvény értékkészletét!

g) a valós számok lehető legbővebb részhalmazát, amely megoldáshalmaza a $(x-2)(4-x)>0$ egyenlőtlenségnek!

Megoldás:

a) $\{1;2;4;5\}$; b) $\{2\}$; c) $\{0;1;4;9\}$; d) $\{15;30;45;60;75;90\}$;

e) $\{3{,}1;3{,}14;3{,}142;3{,}1416;3{,}14159\}$; f) $\{-2;-1;0;1;2\}$; g) $]2;4[$.

2. Az A és B halmazról a következőket tudjuk:

- $A \setminus B = \{0;1;3;4\}$
- $B \setminus A = \{6;7;8\}$
- $A \cup B$ az egyjegyű természetes számok halmaza.

Add meg az A, a B, és az $A \cap B$ halmazokat elemeik felsorolásával!

Megoldás: $A=\{0;1;2;3;4;5;9\}$, $B=\{2;5;6;7;8;9\}$, $A \cap B=\{2;5;9\}$.

3. Az A és a B halmaz is 4 elemű, és minden elemük pozitív egész szám. Az $A \cap B$ halmaznak 3 eleme van, és elemeinek szorzata 12. Az A halmaz elemeinek szorzata 60, a B halmaz elemeinek összege 12. Határozd meg az A és a B halmazt!

Megoldás:

$12 = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1 \cdot 3 \cdot 4$, tehát kétféleképpen írható fel három különböző pozitív egész szám szorzataként. Az $A \cap B \neq \{1;3;4\}$, mert a négyelemű B halmaz elemeinek összege 12, és a 4 már eleme. Ha $A \cap B = \{1;2;6\}$, tehát a B halmaz még hiányzó eleme 3. Mivel az A halmaz négyelemű, és az elemek szorzata 60, így $A \setminus B = \{5\}$.

$A = \{1;2;5;6\}$ és $B = \{1;2;3;6\}$.

4. Jelöljük A-val a 630 prímosztóinak halmazát, B-vel a 300 egyjegyű pozitív osztóinak halmazát, és legyen $C = \{y \in \mathbf{Z} \mid y = 2x+1, x \in \mathbf{N} \text{ és } x \leq 4\}$.

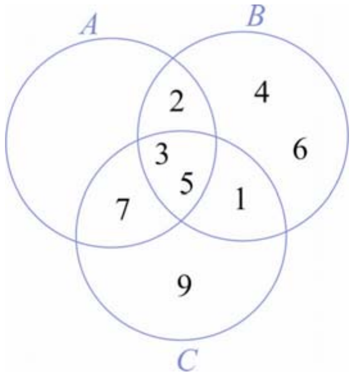
a) Add meg mind a három halmazt elemeik felsorolásával is!

b) Szemléltesd a három halmazt Venn-diagrammal! Mindhárom halmaz elemeit írd be a halmazábrába!

c) Add meg elemeik felsorolásával az $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B \cup C$ és $A \setminus (B \cup C)$ halmazokat!

Megoldás:

a) $A = \{2;3;5;7\}$, $B = \{1;2;3;4;5;6\}$, $C = \{1;3;5;7;9\}$.



c) $A \cap C = \{3;5;7\}$, $B \cap C = \{1;3;5\}$,

$A \cup B \cup C = \{1;2;3;4;5;6;7;9\}$, $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$.

5. Egy középiskola tanulóközösségének néhány – nem üres – részhalmaza a következő:

A: a kitűnő tanulók halmaza;

B: kollégiumban lakó tanulók halmaza;

C: a középiskola leánytanulóinak halmaza.

Add meg az A, B, C halmazok és a halmazműveletek segítségével két különböző módon is a „*nem kitűnő, nem kollégista fiútanulók*" halmazát!

Megoldás: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$.

6. Jelölje D az $x^2 - x - 6 < 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmazát, és legyen

$E = \{x \in \mathrm{R} \mid (x+3)(1-x) \geq 0\}$.

a) Add meg intervallummal a D és E halmazokat, továbbá a $D \setminus E$ halmazt!

b) Oldd meg a valós számok halmazán az $\left.\begin{matrix} x^2 - x - 6 < 0 \\ (x+3)(1-x) \geq 0 \end{matrix}\right\}$ egyenlőtlenségrendszert!

Megoldás:

a) $D =]-2;3[$, $E = [-3;1]$, $D \setminus E =]1;3[$.

b) Megoldáshalmaz a $D \cap E$, és $D \cap E =]-3;1]$.

7. Jelölje A a trapézok, T a téglalapok, R a rombuszok és P a paralelogrammák halmazát.

a) Szemléltesd a négy halmazt Venn-diagrammal!

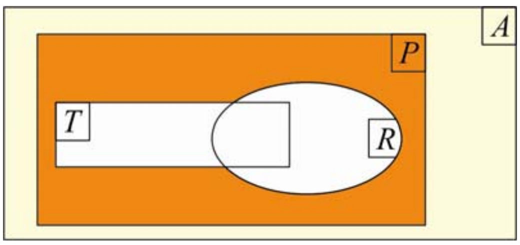
b) Milyen négyszögek halmaza a $T \cap R$ halmaz?

c) Add meg halmazműveletek alkalmazásával a nem derékszögű paralelogrammák halmazát!

d) A derékszögű trapézok D halmazát is vegyük hozzá a négy halmazhoz, és szemléltesd az öt halmazt Venn-diagrammal!

Megoldás:

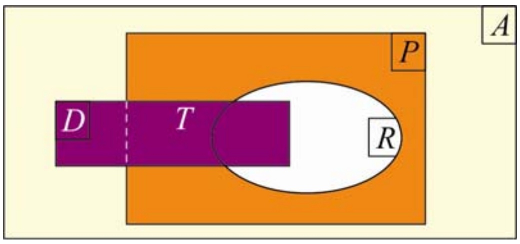
a)



b) A $T \cap R$ halmaz a négyzetek halmaza.

c) A nem derékszögű paralelogrammák halmaz: $P \setminus T$.

d)



8. Egy munkahelyen 52 nő dolgozik. A táblázat a nődolgozók hajának színéről és családi állapotáról készült felmérés adatait tartalmazza.

	Házas	Hajadon	Elvált
Barna	**8**	**6**	**6**
Vörös	**4**	**2**	**0**
Szőke	**6**	**4**	**3**
Fekete	**8**	**2**	**3**

Jelölje B a barnák, V a vörösek, S a szőkék, F a feketék, Z a házasok, H a hajadonok és E az elváltak halmazát.

a) $|H| = ?$ b) $|(H \cup E) \cap S| = ?$

c) $|(B \cup V) \setminus H| = ?$

d) Hány olyan nő dolgozik a munkahelyen, aki szőke vagy fekete, és házas vagy elvált?

Add meg ezt a halmazt az S, F, H, E halmazok és halmazműveletek felhasználásával is!

Megoldás:

a) $|H| = 14$; b) $|(H \cup E) \cap S| = 7$; c) $|(B \cup V) \setminus H| = 18$;

d) $(S \cup F) \cap (Z \cup E)$, és $|(S \cup F) \cap (Z \cup E)| = 20$.

9. Legyen $A = \{a; b; c\}$ és $C = \{a; b; d; e\}$. Hány olyan B halmaz állítható elő, amelynek az elemei szintén az ábécé betűi, és $B \subseteq C$, továbbá az $A \cap B$ halmaz kételemű?

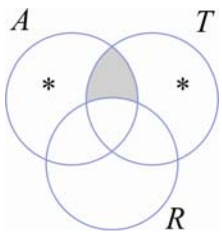
Megoldás: Négy, mégpedig: $B = \{a; b\}$, vagy $B = \{a; b; d\}$, vagy $B = \{a; b; e\}$, vagy $B = \{a; b; d; e\} = C$.

10. Tegyük fel, hogy van olyan tévé tulajdonos, akinek nincs rádiója. Továbbá tételezzük fel azt is, hogy akinek van autója, de nincs rádiója, annak nincs tévéje sem.

Következik-e ebből, hogy van olyan tévé tulajdonos, akinek nincs autója?

Megoldás:

Legyen a tévé tulajdonosok halmaza T, a rádióval rendelkezők halmaza R, és az autótulajdonosok halmaza A. Szemléltessük a három halmazt Venn-diagrammal! Az ábrán helyezzünk el egy *-ot abba a részhalmazba, amelyiknek a feltétel szerint biztosan van eleme. Ha van olyan részhalmaz, amelyik biztosan üres, satírozzuk be!



A feltételezés szerint nincs olyan autótulajdonos, akinek nincs rádiója, de van tévéje, viszont van olyan tévé tulajdonos, akinek nincs rádiója. Így van olyan tévé tulajdonos, akinek nincs autója.

A feltételekből tehát következik az állítás.

11. Egy 35 fős osztály minden tanulójának – egy vízitúra előtt – három kérdésre kellett válaszolnia. A kérdések a következők voltak:

1) Szereted-e a szilvásgombócot?

2) Este 11 órakor legyen-e a takarodó?

3) Végig tudsz-e úszni egy 200 m-es távot pihenés nélkül?

A kérdésekre az osztály minden tagja válaszolt, igennel vagy nemmel.

A válaszadás után kiderült, hogy az 1. és 3. kérdésre egyaránt 18-18 igen válasz érkezett, míg a 2. kérdésre 12. Az 1. kérdésre igennel válaszolók közül 12-en a 2., 8-an pedig a 3. kérdésre feleltek nemmel. Igent mondott a 2. és 3. kérdésre 6 tanuló, de közülük 2-en az első kérdésre nemmel válaszoltak.

Legyen $I = \{$az osztály tanulói$\}$, $I_1 = \{$az 1. kérdésre *igen*-nel válaszolók$\}$, $I_2 = \{$a 2. kérdésre *igen*-nel válaszolók$\}$, $I_3 = \{$a 3. kérdésre *igen*-nel válaszolók$\}$ halmaza.

a) Milyen választ adtak az 1. kérdésre az $I \setminus I_1$ halmazba tartozók?

b) Hány eleme van az $I_1 \setminus I_2$ halmaznak?

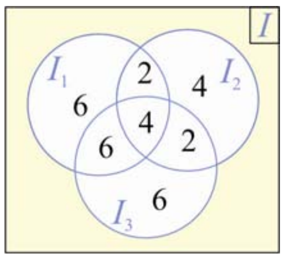
c) Hány eleme van az $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ halmaznak?

d) Szemléltesd a négy halmazt Venn-diagrammal, és írd be mindegyik részhalmazba annak elemszámát!

e) Hányan válaszoltak mind a három kérdésre nemmel?

Megoldás:

a) *Nem* választ; b) $|I_1 \setminus I_2| = 12$; c) $|I_1 \cap I_2 \cap I_3| = 4$;



e) Mivel $6+6+2+4+4+2+6=30$, azaz $|I_1 \cup I_2 \cup I_3| = 30$, és az osztály létszáma 35, és minden tanuló válaszolt a kérdésekre, így 5 tanuló válaszolt mindhárom kérdésre *nem*-mel.

TUDÁSPRÓBA – I. Halmazok

1. Add meg elemeinek felsorolásával az $A = \{1;2;4;8\}$ és a $B = \{x^2 \mid x \in \mathrm{N}; 0 \le x \le 4\}$ halmazok unióját, metszetét és különbségeit! **(5 pont)**

2. Írd le a $C = \{a;b;c;d\}$ halmaz összes kételemű részhalmazát! Hány 3 elemű részhalmaza van a C halmaznak? **(4 pont)**

3. Számegyenesen jelöld különböző színnel az $A = [2;4[$ és a $B =]1;2{,}5]$ halmazokat, majd egy-egy számegyenesen az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, illetve $B \setminus A$ halmazokat! **(6 pont)**

4. Egy 32 fős osztályban a német nyelvet 16 tanuló tanulja. Csak az angol nyelvvel 6, csak a francia nyelvvel 7 tanuló foglalkozik. Minden tanuló legalább egy idegen nyelvet tanul a három közül. Hányan tanulnak pontosan két nyelvet: angolt és franciát? **(5 pont)**

A tudáspróba feladatainak megoldása, értékelése

1. Add meg elemeinek felsorolásával az $A = \{1;2;4;8\}$ és a $B = \{x^2 \mid x \in \mathrm{N}\,;0 \le x \le 4\}$ halmazok unióját, metszetét és különbségeit!

Megoldás:

$B = \{0;1;4;9;16\}$	1 pont*
$A \cup B = \{0;1;2;4;8;9;16\}$	1 pont
$A \cap B = \{1;4\}$	1 pont
$A \setminus B = \{2;8\}$	1 pont
$B \setminus A = \{0;9;16\}$	1 pont
	Összesen: 5 pont

Megjegyzés:

1. A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha külön nem írja le a B halmaz elemeit, de a felhasználásból kiderül, hogy jól határozta meg azokat.
2. Ha a B halmaz elemeit rosszul határozza meg (pl. $B = \{0;1;2;3,4\}$), összesen legfeljebb 4 pont adható.

2. Írd le a $C = \{a;b;c;d\}$ halmaz összes kételemű részhalmazát! Hány 3 elemű részhalmaza van a C halmaznak?

Megoldás:

A kételemű részhalmazok: $\{a;b\},\{b;c\},\{c;d\},\{a;c\},\{b;d\},\{a;d\}$.	3 pont
A C halmaznak 4 db háromelemű részhalmaza van.	1 pont
	Összesen: 4 pont

3. Számegyenesen jelöld különböző színnel az $A = [2;4[$ és a $B =]1;2{,}5]$ halmazokat, majd egy-egy számegyenesen az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, illetve $B \setminus A$ halmazokat!

Megoldás:

Az A intervallum helyes megjelölése:	1 pont
A B intervallum helyes megjelölése:	1 pont
$A \cup B =]1;4[$	1 pont
$A \cap B = [2;2{,}5]$	1 pont
$A \setminus B =]2{,}5;4[$	1 pont
$B \setminus A =]1;2[$	1 pont
	Összesen: 6 pont

Megjegyzés:

1. Az 1-1 pont csak akkor adható, ha az intervallumok mindkét végpontja helyesen van bejelölve.
2. Ha az A vagy a B intervallum valamelyik végpontját nem helyesen jelölte be, és a művelettel kapott intervallumok helytelen végpontjelölése ennek következménye, akkor azokra megadható az 1 pont.

4. Egy 32 fős osztályban németül 16 tanuló tanul. Az osztályból csak az angol nyelvet 6, csak a franciát 7 tanuló tanulja. Minden tanuló legalább egy idegen nyelvet tanul a három közül. Hányan tanulnak pontosan két nyelvet: az angolt és a franciát?

Megoldás:

Ha Venn-diagramon helyesen írja be	
a csak angolul tanulók számát (6);	1 pont*
a csak franciául tanulók számát (7).	1 pont*
Mivel minden diák legalább egy nyelvet tanul a három közül,	1 pont
és $16+6+7=29$, így 3 tanuló tanulja csak az angolt és a franciát.	2 pont
	Összesen: 5 pont

Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha nem rajzol a tanuló Venn-diagramot, de a gondolatmenetéből kiderül, hogy e számosságokat helyesen alkalmazza.

Az elérhető maximális pontszám: 20 pont.

II. SZÁMOK KÜLÖNBÖZŐ ALAKBAN

Módszertani megjegyzés: A tanulók tanulmányaik során a számok többféle alakjával megismerkednek. Az algebra tanulási folyamata során a tanulók egy-egy új fogalommal mélyebben foglalkoznak, megismerik annak műveleti tulajdonságait is. Ám ezek a „találkozások” időben elkülönülnek, nem alkotnak egységes rendszert. Az ismétlésnek éppen az az egyik fontos célja, hogy az egymással összefüggő ismereteket együtt tárgyalva, a tanulók tudásának újabb minősége jöhessen létre. Ezen a foglalkozáson, feladatokon keresztül a számok ellentettjével, abszolútértékével, reciprokával, négyzetgyökével, hatványával, logaritmusával és szögfüggvényeivel foglalkozunk részletesebben.
A tanári mellékletben megtalálható tudáspróbával a tanulók önállóan is lemérhetik az adott témakörben ismereteik mélységét.

1. Írd fel a $\frac{1}{2}$ számot

a) egy szám négyzetgyökeként!
b) egy szám ellentettjeként!
c) egy szám négyzeteként!
d) egy szám 20%-aként!
e) egy szám abszolútértékeként!
f) egy szám 5-ödik hatványaként!
g) a 4 hatványaként!
h) a 10 hatványaként!
i) egy szám 8-as alapú logaritmusaként!
j) egy valós szám szinuszaként!

Megoldás:

$$\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}=\left|\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\left(\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)^5=4^{-\frac{1}{2}}=10^{\lg\frac{1}{2}}=\log_8\sqrt{8}=$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}+2n\pi\right),\ \text{ha } n\in\mathbf{Z}.$$

Megjegyzés: Az e) esetben kétféleképpen, a j) esetben végtelen sokféleképpen állítható elő a szám.

2. Állítsd elő a 12-t és a 37-et a 2 különböző egész kitevőjű hatványainak összegeként! Írd fel e két számot a 3 különböző egész kitevőjű hatványainak összegeként is!

Megoldás: $12=2^3+2^2$ és $37=2^5+2^2+2^0$; $12=3^2+3^1$ és $37=3^3+3^2+3^0$.

3. Állítsd elő a 10-et

a) két négyzetszám összegeként! b) két szám négyzetének összegeként!

Megoldás: a) $10 = 1^2 + 3^2$; b) Pl. $10 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{7})^2$.

4. Az alábbi számokat add meg egy-egy prímszám hatványaként!

a) $\sqrt{625}$; b) $\sqrt[5]{81}$; c) $\sqrt[10]{(-16)^4}$; d) $7^{\log_7 125}$; e) $\log_4 2^{32}$.

Megoldás: a) $\sqrt{625} = 5^2$; b) $\sqrt[5]{81} = 3^{\frac{4}{5}}$; c) $\sqrt[10]{(-16)^4} = 2^{\frac{8}{5}}$; d) $7^{\log_7 125} = 5^3$;

e) $\log_4 2^{32} = 2^4$.

5. Döntsd el, hogy az alábbi alakban megadott számok közül melyek racionális számok! Döntésedet indokold!

a) $4 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{8}$; b) $2 \cdot \sqrt{80} - \sqrt{45} - \sqrt{125} + 1$; c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{15}}{2}$;

d) $\left(\sqrt{21} - \sqrt{8}\right) \cdot \left(\sqrt{84} - 3 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} + 2 \cdot \sqrt{2}\right)$; e) $\frac{\sqrt[3]{-27} + \sqrt[4]{\frac{81}{16}}}{\sqrt{\frac{1}{16}}}$; f) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{24}$.

Megoldás: Mindegyik szám racionális.

a) $4 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{8} = \sqrt{\frac{16}{2}} - \sqrt{8} = 0$;

b) $2 \cdot \sqrt{80} - \sqrt{45} - \sqrt{125} + 1 = 8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 1 = 1$;

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} - \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{\sqrt{15} + 3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{3}{2}$;

d) $\left(\sqrt{21} - \sqrt{8}\right) \cdot \left(\sqrt{84} - 3 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} + 2 \cdot \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{21} - \sqrt{8}\right)\left(2 \cdot \sqrt{21} - \sqrt{21} + \sqrt{8}\right) =$

$= \left(\sqrt{21} - \sqrt{8}\right)\left(\sqrt{21} + \sqrt{8}\right) = 13$;

e) $\frac{\sqrt[3]{-27} + \sqrt[4]{\frac{81}{16}}}{\sqrt{\frac{1}{16}}} = \frac{-3 + \frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = -9$;

f) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{24} = 12 - 12\sqrt{6} + 18 + 12\sqrt{24} = 30$.

6. Melyik szám a $\sqrt{2}$ reciproka?

A: 2;　**B:** $\frac{\sqrt{2}}{2}$;　**C:** $-\sqrt{2}$;　**D:** Egyik eddigi válasz sem helyes.

Megoldás: A $\sqrt{2}$ reciproka az a szám, amellyel a $\sqrt{2}$-t megszorozva 1-et kapunk, így **B** a helyes válasz.

7. Melyik szám a $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ reciproka?

A: $-\sqrt{2}-3$;　**B:** $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$;　**C:** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$;　**D:** Egyik válasz sem helyes.

Megoldás: $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, **C** a helyes válasz.

8. Az alábbi hatványok között vannak olyanok, amelyeket nem értelmezünk. Válaszd ki közülük azokat, amelyek értelmezve vannak! Döntésedet indokold!

$$\frac{(-1)^{-3}}{2};\ \left(\frac{-1}{2}\right)^{-3};\ (\sqrt{2})^{-3};\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}};\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}};\ (-2)^{-3};\ (-3)^{\sin\frac{7\pi}{3}};\ (\sin 3)^{0,3};\ (-3)^{\sin(-3)}$$

Megoldás: $\frac{(-1)^{-3}}{2}=-\frac{1}{2}=-0,5$;　$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=-8$;　$(\sqrt{2})^{-3}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$;

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$ kifejezést nem értelmezzük;　$-\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{2}$;　$(-2)^{-3}=-\frac{1}{8}$;

$(-3)^{\sin\frac{7\pi}{3}}$: nem értelmezzük, mivel $\sin\frac{7\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ nem egész szám.

$(\sin 3)^{0,3}$: értelmezzük, mert $\frac{\pi}{2}<3<\pi$, így $0<\sin 3$, és a pozitív alapú hatvány tetszőleges valós kitevőjű hatványát értelmezzük.

$(-3)^{\sin(-3)}$: nem értelmezzük, mert $\sin(-3)$ nem egész szám.

9. Igazold, hogy az alábbi alakban megadott számok mindegyike racionális szám!

$3^{\log_{\frac{1}{3}} 2}$; $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; $0{,}25^{\log_2 3}$; $(\sqrt{2})^{4-\log_2 9}$.

Megoldás:

$$3^{\log_{\frac{1}{3}} 2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_{\frac{1}{3}} 2} = \frac{1}{2};\qquad \log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4};$$

$$0{,}25^{\log_2 3} = 2^{-2\log_2 3} = \frac{1}{9};\qquad (\sqrt{2})^{4-\log_2 9} = 2^{2-\frac{1}{2}\log_2 9} = \frac{4}{3}.$$

10. Vezessük be a következő jelölést: $\log_2 3 = k$. Fejezd ki k-val az alábbi kifejezéseket!

a) $\log_4 144$; b) $\log_2^2 6 - \log_2^2 3$?

Megoldás:

a) $\log_4 144 = \log_4 12^2 = 2\log_4 12 = 2\cdot(1+\log_4 3) = 2\cdot\left(1+\frac{\log_2 3}{\log_2 4}\right) = 2\cdot\left(1+\frac{k}{2}\right)$;

b) $\log_2^2 6 - \log_2^2 3 = (\log_2 6 - \log_2 3)(\log_2 6 + \log_2 3) =$

$= \left(\log_2 \frac{6}{3}\right)\cdot \log_2 18 = \log_2 2 + 2\log_2 3 = 1 + 2k$.

11. Közelítő értékek használata nélkül rendezd növekvő sorrendbe az alábbi számokat! Állításodat indokold!

sin 4; sin 4°; tg (– 495°); cos 28,5π; cos 6,3; sin²2 + cos²2.

Megoldás:

Mivel $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, így $-1 < \sin 4 < 0$; $0 < \sin 4^\circ < 1$;

$\mathrm{tg}(-495) = \mathrm{tg}(-135^\circ - 360^\circ) = -1$;

$\cos 28{,}5\pi = \cos(0{,}5\pi + 28\pi) = 0$;

Mivel $2\pi < 6{,}3 < \frac{5}{2}\pi$, így $0 < \cos 6{,}3 < 1$; $\sin^2 2 + \cos^2 2 = 1$.

A sorbarendezéshez már csak a $\sin 4^\circ$ és $\cos 6{,}3$ számokat kell megvizsgálnunk. Az egységkörön szemléltetve a megfelelő egységvektorokat, $\sin 4^\circ < \frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2} < \cos 6{,}3$.

$\mathrm{tg}(-495^\circ) < \sin 4 < \cos 28{,}5\pi < \sin 4^\circ < \cos 6{,}3 < \sin^2 2 + \cos^2 2$.

TUDÁSPRÓBA – II. Számok különböző alakban

Az alábbi tesztfeladatok mindegyikére adott 4 válasz közül pontosan egy helyes. Karikázd be a helyesnek vélt állítás betűjelét! Helyes válasz 6 pont, hibás válasz 1 pont levonás, ha nincs válasz, 0 pont. A teszt megírásakor számológép nem használható!

1. Az első 100 prímszám szorzata

A: osztható 25-tel. **B:** osztható 12-vel. **C:** osztható 26-tal. **D:** osztható 100-zal.

2. Mennyi a $(\sqrt{3}+2)^2-2(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)+(\sqrt{3}-2)^2$ kifejezés értéke?

A: 4; **B:** 16; **C:** 8; **D:** 2.

3. Melyik szám a $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ reciproka?

A: $2+\sqrt{3}$; **B:** $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; **C:** $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; **D:** A többi válasz nem helyes.

4. Melyik állítás igaz? **A:** 8^8 nyolcadik gyöke 4^4; **B:** 8^8 négyzetgyöke 4^4;

C: 8^8 negyedik gyöke 4^4; **D:** 8^8 köbgyöke 4^4.

5. Legyen $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, $b=\sqrt{50}-\sqrt{18}$ és $c=\dfrac{\sqrt{8}}{2}$. Melyik állítás az igaz?

A: $a>b>c$; **B:** $a>c>b$; **C:** $b>a>c$; **D:** $c>b>a$.

6. Állítsd növekvő sorrendbe a következő számokat!

$a=\sin^2 25°+\cos^2 25°$; $b=\cos\dfrac{3\pi}{4}+1$; $c=\sin\dfrac{3\pi}{2}+\cos\pi$.

A: $c<b<a$; **B:** $b<c<a$; **C:** $a<b<c$; **D:** $c<a<b$.

7. Mivel egyenlő $(\lg\sin 30°)(\lg\cos 60°)(\lg\sin 90°)(\lg\sin 120°)$?

A: Nem értelmezhető; **B:** $\lg\dfrac{\sqrt{3}}{8}$; **C:** 1; **D:** 0.

8. Mivel egyenlő $\dfrac{\lg(\sqrt[4]{3}-1)+\lg(\sqrt[4]{3}+1)+\lg(\sqrt{3}+1)}{\lg 2}$?

A: 0,5; **B**: 1; **C:** $\lg 2$; **D:** -1.

9. Hányszorosa a $\log_4 3$ a $\log_2 3$-nak? **A:** $\dfrac{1}{4}$; **B:** 2; **C:** 4; **D:** $\dfrac{1}{2}$.

10. Legyen $4^{\lg 2}=a$. Írd fel a $2^{\lg 4}+4^{\lg 16}$ kifejezést a-val!

A: a^2+a^4; **B:** $5a$; **C:** $a+a^4$; **D:** $a+4a^2$.

A tudáspróba feladatainak megoldása

1. Az első 100 prímszám szorzata

A: osztható 25-tel. **B:** osztható 12-vel. **<u>C</u>:** osztható 26-tal. **D:** osztható 100-zal.

Megoldás: Csak olyan szám lehet osztója, amelyik maga is különböző prímek (az első 100 prímszám közül valók) szorzata.

2. Mennyi a $(\sqrt{3}+2)^2-2(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)+(\sqrt{3}-2)^2$ kifejezés értéke?

A: 4; **<u>B</u>:** 16; **C:** 8; **D:** 2.

Megoldás: $(\sqrt{3}+2)^2-2(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)+(\sqrt{3}-2)^2=\left[(\sqrt{3}+2)-(\sqrt{3}-2)\right]^2=16$.

3. Melyik szám a $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ reciproka?

A: $2+\sqrt{3}$; **B:** $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; **<u>C</u>:** $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; **D:** A többi válasz nem helyes.

Megoldás: $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1$.

4. Melyik állítás igaz? **A:** 8^8 nyolcadik gyöke 4^4; **B:** 8^8 négyzetgyöke 4^4;

C: 8^8 negyedik gyöke 4^4; **D:** 8^8 köbgyöke 4^4.

Megoldás: 8^8 nyolcadik gyöke 8; 8^8 négyzetgyöke 4^6; 8^8 negyedik gyöke 4^3.

5. Legyen $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ $b=\sqrt{50}-\sqrt{18}$ és $c=\dfrac{\sqrt{8}}{2}$. Melyik állítás az igaz?

A: $a>b>c$; **B:** $a>c>b$; **<u>C</u>:** $b>a>c$; **D:** $c>b>a$.

Megoldás: $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$; $b=\sqrt{50}-\sqrt{18}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}>\sqrt{2}+1$;

$c=\dfrac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}$.

6. Állítsd növekvő sorrendbe a következő számokat!

$a = \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ$; $b = \cos\frac{3\pi}{4} + 1$; $c = \sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi$;

<u>A</u>: $c < b < a$; **B:** $b < c < a$; **C:** $a < b < c$; **D:** $c < a < b$.

Megoldás: $a = \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1$, $b = \cos\frac{3\pi}{4} + 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$, $c = \sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi = -2$.

7. Mivel egyenlő $(\lg\sin 30^\circ)(\lg\cos 60^\circ)(\lg\sin 90^\circ)(\lg\sin 120^\circ)$?

A: Nem értelmezhető; **B:** $\lg\frac{\sqrt{3}}{8}$; **C:** 1; **<u>D</u>:** 0.

Megoldás: A szorzat mindegyik tényezőjében pozitív szám logaritmusa áll, és mivel $\sin 90^\circ = 1$, a logaritmusa, és így a szorzat is nulla.

8. Mivel egyenlő $\frac{\lg(\sqrt[4]{3}-1) + \lg(\sqrt[4]{3}+1) + \lg(\sqrt{3}+1)}{\lg 2}$?

A: 0,5; **<u>B</u>:** 1; **C:** $\lg 2$; **D:** -1.

Megoldás:

$$\frac{\lg(\sqrt[4]{3}-1) + \lg(\sqrt[4]{3}+1) + \lg(\sqrt{3}+1)}{\lg 2} = \frac{\lg(\sqrt[4]{3}-1)(\sqrt[4]{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{\lg 2} = \frac{\lg(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\lg 2} = 1.$$

9. Hányszorosa a $\log_4 3$ a $\log_2 3$-nak? **A:** $\frac{1}{4}$; **B:** 2; **C:** 4; **<u>D</u>:** $\frac{1}{2}$.

Megoldás: $\log_4 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\cdot\log_2 3$.

10. Legyen $4^{\lg 2} = a$. Írd fel a $2^{\lg 4} + 4^{\lg 16}$ kifejezést *a*-val!

A: $a^2 + a^4$; **B:** $5a$; **<u>C</u>:** $a + a^4$; **D:** $a + 4a^2$.

Megoldás: $2^{\lg 4} + 4^{\lg 16} = 2^{2\lg 2} + 4^{4\lg 2} = 4^{\lg 2} + \left(4^{\lg 2}\right)^4 = a + a^4$.

III. FÜGGVÉNYEK

Módszertani megjegyzés: A függvények ismétlésére érdemes több időt fordítani. Most is célszerű feladatokon keresztül feleleveníteni a tanult ismereteket, fogalmakat. A *-gal jelölt feladatokat csak a legjobbaknak tűzzük ki megoldásra! A tanulók önállóan, vagy párban dolgozhatnak.

A függvényekkel való foglalkozást ismét tudáspróba követi. Nem kell feltétlenül a tudáspróba mind a 7 feladatát megoldatni, a csoport színvonalától függően el is hagyhatunk egy-két feladatot. Ha a szaktanár a feladatsor 7. feladatát túl nehéznek ítéli ebben a formában, alakítsa át a következőképpen: Hagyja el a *D* halmazt, és legyen a feladat a következő: „Igazold, hogy az alábbi halmazok mindegyikének van legnagyobb eleme!”

A tudáspróba a tanári mellékletben szerepel.

Függvények megadása képlettel

1. Az alábbi feladatokban szöveggel megadott függvények szerepelnek. Add meg képletével a kérdezett függvényt! (Az értelmezési tartomány megadásáról se feledkezz meg!)

a) Tekintsük azokat a téglatesteket, amelyeknek egy csúcsból kiinduló élei egy $d=2$ differenciájú számtani sorozat szomszédos tagjai. Jelöljük x-szel a téglatest leghosszabb élének hosszát. Add meg e téglatestek térfogatát x függvényében! Hogyan függ x-től e téglatestek felszíne?

b) Hogyan függ a sokszögek átlóinak száma a sokszög oldalszámától?

c) Hogyan függ a kör t területe a k kerületétől?

d)* Az üres 50 literes kád lefolyónyílását lezárjuk, és kinyitjuk a csapot, amelyből egyenletesen, percenként 4 liter víz folyik a kádba. 2 perc után kihúzzuk a lefolyó nyílásából a dugót, de nem zárjuk el a csapot. A lefolyón át percenként 1 liter víz folyik ki. Hogyan függ a kádban lévő víz mennyisége a csap kinyitásától eltelt időtől?

Megoldás:

a) $V: \left]4;+\infty\right[\to \mathrm{R};\ V(x)=x(x-2)(x-4)$;

$A: \left]4;+\infty\right[\to \mathbf{R};\ A(x)=2\cdot\left[x(x-2)+x(x-4)+(x-2)(x-4)\right]=6x^2-24x+16$.

b) $\{3;4;5;\ldots\}\to \mathbf{Z}; n \mapsto \dfrac{n(n-3)}{2}$.

c) $k=2r\pi$. Ebből $r=\dfrac{k}{2\pi}$.

Így a kör területe: $T = r^2\pi = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi = \frac{k^2}{4\pi}$.

Tehát a kérdéses függvény: $T:\ \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\, k \mapsto \frac{k^2}{4\pi}$.

d) Jelöljük x-szel a csap kinyitásától eltelt időt. Az első 2 percben egyenletesen 4 liter víz folyik percenként, tehát, ha $0 \le x \le 2$, akkor a kádban lévő víz V mennyisége $V = 4x$ módon számítható ki. Az első 2 percben összesen 8 liter víz folyik a kádba. 2 perc után a kádba percenként 3 liter kerül. Ha $2 < x$, akkor $x - 2$ percen keresztül $3(x-2)$ liter víz kerül a kádba a 8 literhez. De a kád 50 literes, és a $8 - 3(x-2) = 50$ egyenlet megoldása 16. Tehát 16 perc alatt megtelik a kád, és innentől kezdve a kádban változatlanul 50 liter víz lesz.

A kérdezett függvény tehát:

$$V:\ [0;+\infty[\to \mathbf{R};\ V(x) = \begin{cases} 4x, & \text{ha } 0 \le x \le 2 \\ 8 + 3(x-2), & \text{ha } 2 < x \le 16 \\ 50, & \text{ha } 16 < x \end{cases}$$

Alapfüggvények

2. Add meg a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi kifejezésekkel függvény adható meg!

$f(x) = x$; $g(x) = x^2$; $h(x) = \sqrt{x}$; $k(x) = \frac{1}{x}$; $m(x) = |x|$;

$n(x) = 3^x$; $p(x) = \log_2 x$; $r(x) = \sin x$; $r(x) = \cos x$; $t(x) = \operatorname{tg} x$.

a) Vázold az így értelmezett függvények grafikonját egy-egy koordináta-rendszerben!

b) Ha $-2 < x \le 3$, akkor milyen értékeket vehetnek fel a következő függvények:

x^2; $|x|$; 3^x; $\sin x$?

c) Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket, egyenletet!

$\log_2 x \le 3$; $\frac{1}{x} < 1$; $x^2 \ge 4$;

$\sqrt{x} + 4 = 0$; $\sin x = -0{,}5$; $\frac{\sin x}{\cos x} = 1$.

d) Az $f:\left[\frac{2}{13};4\right] \to \mathbf{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény függvényértékei között hány egész szám van?

Megoldás:

	$f(x)=x$	$g(x)=x^2$	$h(x)=\sqrt{x}$	$k(x)=\frac{1}{x}$	$m(x)=\lvert x\rvert$
Értelmezési tartománya:	**R**	**R**	$[0;+\infty[$	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	**R**
	$n(x)=3^x$	$p(x)=\log_2 x$	$r(x)=\sin x$	$r(x)=\cos x$	$t(x)=\operatorname{tg} x$
Értelmezési tartománya:	**R**	$]0;+\infty[$	**R**	**R**	$\mathrm{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi, n\in\mathbf{Z}\right\}$

b) Ha $-2<x\le 3$, akkor $0\le x^2\le 9$, $0\le |x|\le 3$, $\frac{1}{9}<3^x\le 27$.

Mivel $-\pi<-2<-\frac{\pi}{2}$, és $\frac{\pi}{2}<3<\pi$, a szinuszfüggvény grafikonjáról leolvasható, hogy ha $-2<x\le 3$, akkor $-1\le \sin x\le 1$.

c) $\log_2 x\le 3 \iff 0<x\le 8,\ x\in\mathbf{R}$;

$\frac{1}{x}<1 \iff 1<x$ vagy $x<0$ és $x\in\mathbf{R}$;

$x^2\ge 4 \iff 2\le x$ vagy $x\le -2$ és $x\in\mathbf{R}$;

$\sqrt{x}+4=0$. Nincs megoldása, mivel minden nemnegatív x esetén $0\le\sqrt{x}$.

$\sin x=-0{,}5 \iff x=-\frac{\pi}{6}+2n\pi,\ n\in\mathbf{Z}$ vagy $x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$;

$\frac{\sin x}{\cos x}=1 \iff \operatorname{tg} x=1 \iff x=\frac{\pi}{4}+n\pi$, ahol $n\in\mathbf{Z}$.

d) Az f függvény $f\left(\frac{2}{13}\right)=6{,}5$ és $f(4)=0{,}25$. A függvény grafikonjáról leolvasható, hogy 6-tól 1-ig minden egész értéket felvesz. A függvénynek tehát hat egész függvényértéke van.

Függvények ábrázolása transzformációval

3. a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=x^2$ függvény grafikonjából kiindulva ábrázold függvénytranszformációval a $g(x)=(x+2)^2-3$ függvényt, ahol $x\in\mathbf{R}$!

b) Ábrázold függvénytranszformációval a $h(x)=x^2+4x+1$ függvényt, ahol $x\in\mathbf{R}$!

c) Ábrázold függvénytranszformációval a $k(x)=\frac{1}{x+2}-3$ függvényt, ahol $x\in\mathrm{R}\setminus\{-2\}$!

d) Ábrázold függvénytranszformációval az $m(x)=\left|\log_2(x+2)\right|$ függvényt, ahol $x\in\mathbf{R}$ és $-2<x$!

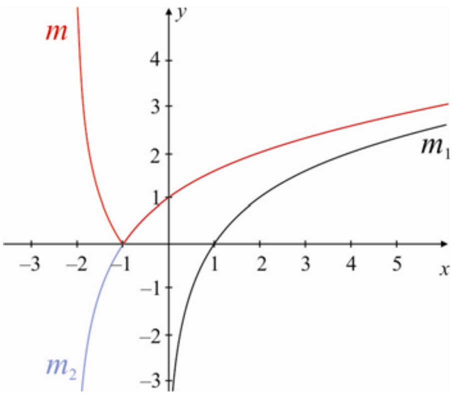
e) Told el a valós számok halmazán értelmezett $r(x)=\sin x$ függvény grafikonját a $\mathbf{k}\left(-\frac{\pi}{2};1\right)$ vektorral! Add meg képlettel is a kapott függvényt!

f)* Forgasd el a valós számok halmazán értelmezett $n(x)=3^x$ függvény grafikonját a koordináta-rendszer origója körül negatív irányba 90°-kal! A kapott függvényt add meg képlettel is!

Megoldás: $h(x)=x^2+4x+1=(x+2)^2-3$.

Az a), b), illetve c) feladatban megadott függvény grafikonja mindhárom esetben a megfelelő alapfüggvény grafikonjának $\mathbf{k}(-2;-3)$ vektorral való eltolásával kapható.

d)



e) Az eltolással kapott függvény: $v(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$ vagy $v(x)=\cos x+1$.

f) Néhány pont elforgatása után kialakulhat a tanulókban a sejtés, hogy a kapott függvény a $t(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$ (vagy $t(x)=-\log_3 x$). A sejtés igaz, és ennek egy lehetséges bizonyítása a következő:

Jelöljük az $n(x)=3^x$ függvény grafikonjának tetszőleges pontját P-vel. A P pont koordinátái: $P(p;3^p)$. Ha a P pontot negatív irányba 90°-kal elforgatjuk, a kapott P_1 pont koordinátái: $P_1(3^p;-p)$. Ez már az „új” függvény grafikonjának pontja. Ha a $0<3^p=x$ jelölést alkalmazzuk, akkor ebből $-p=-\log_3 x$.

Ez azt jelenti, hogy a keresett függvény grafikonján bármelyik pont koordinátái: $(x;-\log_3 x)$. A keresett függvény: $t(x)=-\log_3 x=\log_{\frac{1}{3}} x$, ahol $x\in\mathbf{R}$.

Néhány függvénytulajdonság

4. a) A valós számok halmazán értelmezett $d(x)=2^{\sin x-\cos x}$ függvény melyik számot rendeli a nullához?

b) Az *f* függvény minden kétjegyű, tízzel osztható pozitív egész számhoz hozzárendeli a szám különböző prímosztóinak számát. Pl. a 10-hez 2-t rendel, mert a 10-nek két különböző prímosztója van (2 és 5). Melyik számot rendeli a függvény a 60-hoz? Hányszor veszi fel a függvény a 3 értéket? Add meg a függvény értékkészletét!

c) Határozd meg a $g:\ ]2;+\infty[\ \to \mathrm{R},\ g(x)=\log_{0,4}(x-2)$ függvény zérushelyeit!

d) Állapítsd meg a valós számok halmazán értelmezett $h(x)=3-2\cdot|x-4|$ függvény szélsőértékét, és annak helyét!

e) Állapítsd meg $k:\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ k(x)=x^2+3x-2$ függvény minimumát, és annak helyét!

f) Számítsd ki az $n:\mathbf{R}\to\mathbf{R};x\mapsto(2-x)(x+6)$ függvény zérushelyeit, szélsőértékét, és annak helyét!

g) Határozd meg a $p:\mathbf{R}\to\mathbf{R};x\mapsto(x-3)(x-5)+3$ függvény minimumát!

Megoldás:

a) $d(0)=\frac{1}{2}$;

b) $f(60)=3$;

Négyszer veszi fel a függvény a 3 értéket: $f(30)=3$, $f(60)=3$, $f(70)=3$ és $f(90)=3$.

A függvény értékkészlete: $\{2;3\}$.

c) $\log_{0,4}(x-2)=0 \iff x=3$. Zérushely a 3.

d) Mivel $2\cdot|x-4|\ge 0$ minden valós x-re, így $3-2\cdot|x-4|\le 3$.

A legnagyobb függvényérték 3, és ezt a függvény a 4 helyen veszi fel.

Minimuma nincs a függvénynek, mert alulról nem korlátos.

e) $x^2+3x-2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}\geq-\frac{17}{4}$

A függvény minimuma $\left(-\frac{17}{4}\right)$, a minimum helye $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

f) $(2-x)(x+6)=0 \;\Leftrightarrow\; x=2$ vagy $x=-6$. A függvénynek két zérushelye van: 2 és (-6).

$(2-x)(x+6)=-x^2-4x+12$. Mivel a kifejezés főegyütthatója negatív, így a másodfokú függvénynek maximuma van. A maximum helye a zérushelyek számtani közepe: (-2). Ehhez a számhoz a függvény 16-ot rendel, tehát a függvény maximuma 16.

g) $(x-3)(x-5)+3=x^2-8x+18$. A függvénynek nincs zérushelye, mert az $x^2-8x+18=0$ egyenlet diszkriminánsa: $D=-8$ negatív.

Mivel $x^2-8x+18=(x-4)^2+2\geq 2$, így a függvény minimuma 2, és ezt a 4 helyen veszi fel.

TUDÁSPRÓBA – III. Függvények

1. Az $f:[-2;1]\to \mathrm{R}, x\mapsto 1-2x$ függvény melyik számhoz rendel 3-at? **(2 pont)**

2. Vizsgáljuk a következő függvényt!

$$f:\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}\to \mathrm{Z},\ x\mapsto \text{az } x \text{ pozitív osztóinak száma}.$$

a) Az *f* függvény milyen számot rendel a 6-hoz? **(2 pont)**

b) Hányszor veszi fel a függvény a 2 értéket? **(2 pont)**

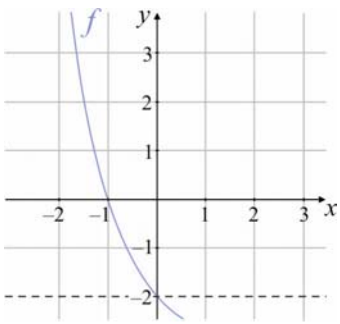
c) Add meg a függvény értékkészletét! **(2 pont)**

3. Hogyan függ a négyzet területe (*t*) a kerületétől (*k*)? **(5 pont)**

4. Ha $4\le x$ és *x* valós szám, akkor mekkora az $(1-x)(x+5)$ kifejezés értéke? **(7 pont)**

5. Mi a lehető legbővebb értelmezési tartománya az $f(x)=x^2-4x$ képlettel megadott függvénynek, ha az értékkészlete a $[-4;5]$ intervallum? **(7 pont)**

6. Egy, a valós számok halmazán értelmezett exponenciális függvény grafikonjának részlete látható az ábrán. Add meg képlettel a függvényt! **(7 pont)**



7. Melyik halmazban <u>nincs</u> legnagyobb elem? Döntésedet indokold! **(9 pont)**

A: Az $\frac{1}{n}$ alakú számok, ahol $n\in \mathbf{N}^+$.

B: $\mathbf{N}\to \mathbf{R}, n\mapsto \frac{1}{2^n}$ függvény értékkészlete.

C: A $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]\to \mathbf{R}, x\mapsto \cos x$ függvény értékkészlete.

D: A negatív racionális számok halmaza.

A tudáspróba feladatainak megoldása, értékelése

1. Az $f:[-2;1]\to \mathbf{R}, x\mapsto 1-2x$ függvény melyik számhoz rendel 3-at?

Megoldás:

$1-2x=3$ 1 pont

$x=-1$-hez 1 pont

Összesen: 2 pont

2. Vizsgáljuk a következő függvényt!

$f:\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}\to \mathbf{Z}, x\mapsto$ az x pozitív osztóinak száma.

a) Az f függvény milyen számot rendel a 6-hoz?

b) Hányszor veszi fel a függvény a 2 értéket?

c) Add meg a függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) A 6-hoz 4-et rendel a függvény. 2 pont

b) Annyiszor, ahány prímszám van az értelmezési tartományban, 1 pont*

tehát 4 esetben (2, 3, 5, 7). 1 pont**

c) Értékkészlete: $\{1;2;3;4\}$ 2 pont

Összesen: 6 pont

Megjegyzés:

A *-gal jelölt pont akkor is jár, ha a választ a tanuló szöveggel nem fogalmazza meg, de kiderül, hogy a prímszámokra gondol.

A **-gal jelölt pont csak akkor jár, ha a tanuló hibátlanul felsorolja a prímszámokat.

A c) kérdésre adható 2 pont nem bontható.

3. Hogyan függ a négyzet területe (t) a kerületétől (k)?

Megoldás:

$t=a^2$ és $k=4a$. 1 pont

$a=\frac{k}{4}$, tehát $t=\left(\frac{k}{4}\right)^2$. 2 pont

A függvény: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}; k\mapsto\left(\frac{k}{4}\right)^2$, vagy $t(k)=\frac{k^2}{16}$, ahol $0<k$. 2 pont*

Összesen: 5 pont

Megjegyzés: *Legfeljebb 1 pont adható, ha elmarad (vagy hibás) a függvény értelmezési tartománya.

4. Ha $4 \le x$ és x valós szám, akkor mekkora az $(1-x)(x+5)$ kifejezés értéke?

Megoldás:

Az $f(x)=(1-x)(x+5)$ függvény zérushelyei: $x=-5$ és $x=1$	2 pont
Az f függvénynek maximuma van, a maximum helye: $x=-2$	2 pont
$f(4)=-27$	1 pont
A függvény a $[4;+\infty[$ intervallumon szigorúan csökkenő,	1 pont*
így $(1-x)(x+5)\le -27$.	1 pont*
	Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha a tanuló jól vázolja a függvény grafikonját, és abból helyesen következtet a kifejezés értékeire.

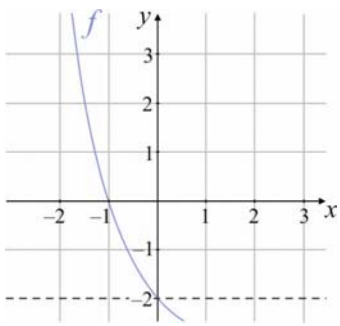
5. Mi a lehető legbővebb értelmezési tartománya az $f(x)=x^2-4x$ képlettel megadott függvénynek, ha az értékkészlete a $[-4;5]$ intervallum?

Megoldás:

$f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$	2 pont
A függvény grafikonja	2 pont
Értelmezési tartomány: $[-1;5]$	3 pont
	Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a lehetséges értelmezési tartománynak egy részhalmazát adja meg (pl. $[-1;2]$), akkor a 3 pont helyett legfeljebb 1 pont adható. Viszont adjuk meg a 3 pontot, ha hibás grafikonról jól adja meg a lehető legbővebb értelmezési tartományt.

6. Egy, a valós számok halmazán értelmezett exponenciális függvény grafikonjának részlete látható az ábrán. Add meg képlettel a függvényt!



Megoldás:

Ha felismeri, hogy a függvény az $\frac{1}{3}$ alapú exponenciális függvényből transzformációval adódik, 3 pont

$(0;-2)$ vektorral való eltolással. 2 pont

A függvény: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$. 2 pont

Összesen: 7 pont

7. Melyik halmazban <u>nincs</u> legnagyobb elem? Döntésedet indokold!

A: Az $\frac{1}{n}$ alakú számok, ahol $n \in \mathbf{N}^+$.

B: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}, n \mapsto \frac{1}{2^n}$ függvény értékkészlete.

C: A $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right] \to \mathbf{R}, x \mapsto \cos x$ függvény értékkészlete.

D: A negatív racionális számok halmaza.

Megoldás:

$\frac{1}{n} \le 1$, ha $n \in \mathbf{N}^+$, tehát e számok között van legnagyobb, az 1. 1 pont

A *B* halmaz legnagyobb eleme 1, 1 pont

mert az $\mathbf{N} \to \mathbf{R}, n \mapsto \frac{1}{2^n}$ függvény értékkészlete: $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots\right\}$. 1 pont

A *C* halmaz legnagyobb eleme a 0, 1 pont

mert a $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right] \to \mathbf{R}, x \mapsto \cos x$ függvény értékkészlete: $[-1;0]$. 2 pont

A *D* halmaznak nincs legnagyobb eleme, 1 pont

mert bármelyik negatív racionális szám fele is racionális,

és nagyobb, mint a szám. 2 pont

Összesen: 9 pont

IV. SZÖVEGES EGYENLETEK

Módszertani megjegyzés: A jó szövegértés, a szövegben rejlő összefüggések helyes felismerése olyan képesség, amelyet az élet minden területén hasznosíthatunk. A matematikai tanulmányok során e képesség fejlesztésére számtalan lehetőség nyílt már. Az ún. szöveges egyenletek megoldásának elsődleges célja éppen ez, hiszen a középiskola utolsó évében a tanulók számára a szöveg alapján felírt egyenlet megoldása már nem jelenthet igazi gondot.

Ezen a foglalkozáson a hangsúlyt a szöveg algebra nyelvére való lefordításra helyezzük. Ezért az első három feladatban próbáljuk elérni, hogy a tanulók a helyes egyenletet ne annak megoldásával (és a kapott eredmény ellenőrzésével) válasszák ki!

Szöveges feladatok megoldásakor elengedhetetlen az egyenlet megoldásával kapott eredmény szöveg szerinti ellenőrzése. Erről talán úgy győzhetjük meg legjobban a tanulókat, ha olyan szöveges feladatot is adunk, amelyre a tanuló látszólag kap megoldást, csak éppen az egyenlet gyöke nem tesz eleget a szövegben megadott összes feltételnek. Pl.

„Egy gyümölcsösben 5 év alatt összesen 223 t alma termett. Az egyes évek terméséről azt tudjuk, hogy az első és az ötödik évben ugyanannyi volt, a második évben negyedannyi, mint az elsőben. A harmadik évben kétszerannyi termett, mint a második évben, és a negyedik évben 50 t-val kevesebb, mint az előző évben. Mennyi gyümölcs termett az első évben?”

Ha a tanuló az első évben termett mennyiség függvényében felírt egyenletet megoldja, eredményül 84-et kap. Csak akkor derül ki, hogy a feladatnak nincs megoldása, ha a tanuló a szöveg alapján ellenőrzi a kapott eredményt.

A feladatokra adott megoldásban az ellenőrzésre nem utaltunk, de ezt minden esetben a tanulóktól feltétlenül követeljük meg!

Szöveg lefordítása az algebra nyelvére

A következő feladatok szövegében rejlő feltételek alapján négyféle egyenletet írtunk fel. Közülük pontosan egy felel meg a feltételeknek. Döntsd el, hogy melyik!

A helytelenül megadott egyenletek közül válassz egyet, és változtasd meg a szöveget úgy, hogy a kiválasztott egyenlet jól írja le az új szövegben rejlő összefüggéseket!

1. (Ez a feladat már Eukleidész könyvében is megtalálható, persze nem pontosan ebben a megfogalmazásban.)

Egy öszvér és egy szamár terhet cipelve beszélgetett. A szamár így szólt: „Ha átvenném a terhedből 100 kg-ot, az enyém kétszer olyan nehéz lenne, mint a tiéd.” Az öszvér így felelt:

„Az ám, de ha te adnál át nekem 100 kg-ot, akkor én háromszor annyi tömeget cipelnék, mint te."

Jelölje x a szamár, és y az öszvér terhének tömegét kilogrammban. Melyik egyenlet írja le helyesen a feladatot?

A: $\left.\begin{array}{l} x+100=2y \\ y+100=3x \end{array}\right\}$;

B: $\frac{x+100}{2}+100=3(x-100)-100$;

C: $\left.\begin{array}{l} 2(x+100)=y-100 \\ y+100=3(x-100) \end{array}\right\}$;

D: $\frac{x+100}{2}-100=3(x-100)+100$.

Megoldás:

$\frac{x+100}{2}$ az a teher, amelyet az öszvér cipelne a 100 kg levétele után, így az öszvér hátán eredetileg $\frac{x+100}{2}+100$ teher van. A $3(x-100)$ értéke az öszvér akkori terhével lenne megegyező, amikor 100 kg többletterhe lenne, ezért a $3(x-100)-100$ kifejezés értéke szintén az öszvér eredeti terhével megegyező. Így $\frac{x+100}{2}+100=3(x-100)-100$.

B egyenlet a helyes.

Szövegmódosítások:

A: A szamár így szólt: „~~Ha átvennék a terhedből 100 kg-ot~~ Ha még rámraknának 100 kg-ot, az enyém kétszer olyan nehéz lenne, mint a tiéd." Az öszvér így felelt: „Az ám, de ~~ha te adnál át nekem 100 kg-ot~~ ha énrám raknának még 100 kg-ot, akkor én háromszor annyi tömeget cipelnék, mint te."

C: A szamár így szólt: „Ha átvennék a terhedből 100 kg-ot, ~~az enyém kétszer olyan nehéz lenne, mint a tiéd~~. a tied még mindig kétszer olyan nehéz lenne, mint az enyém" Az öszvér így felelt: „Az ám, de ha te adnál át nekem 100 kg-ot, akkor ~~én háromszor annyi tömeget cipelnék, mint te.~~ én háromszor akkora terhet cipelnék, mint te."

D: A szamár így szólt: „~~Ha átvennék a terhedből 100 kg-ot~~ Ha rám és rád is tennének még 100-100 kg-ot, akkor az enyém kétszer olyan nehéz lenne, mint a tiéd." Az öszvér így felelt: „Az ám, de ha ~~te adnál át nekem 100 kg-ot~~ rólad és rólam is levennének 100-100 kg terhet, akkor én háromszor annyi tömeget cipelnék, mint te."

2. Az osztálykirándulás egyik napjára egy 24 km-es túrát tett meg az osztály. A lányok és a fiúk egyszerre indultak, és ugyanazon az útvonalon haladtak, de a fiúk óránként 2 km-rel többet tettek meg, mint a lányok, és így éppen egy órával hamarabb célba értek.

Jelölje v a lányok sebességét km/h-ban (illetve t azt az időt órában, amennyi idő alatt a lányok megtették a 24 km-es utat). Melyik egyenlet írja le pontosan az elmondottakat?

A: $\dfrac{24}{v+2}-1=\dfrac{24}{v}$; **B:** $\left.\begin{aligned} vt &= 24 \\ (v-2)(t-1) &= 24 \end{aligned}\right\}$;

C: $\dfrac{24}{t}=\dfrac{24}{t-1}+2$; **D:** $\dfrac{24}{v+2}+1=\dfrac{24}{v}$.

Megoldás:

A fiúk a 24 km-t $v+2$ sebességgel $\dfrac{24}{v+2}$ óra alatt teszik meg, míg a lányok $\dfrac{24}{v}$ óra alatt. A fiúk menetideje 1 órával kevesebb, mint a lányoké, tehát $\dfrac{24}{v+2}+1=\dfrac{24}{v}$.

A **D** egyenlet a helyes.

Szövegmódosítások:

A: Formálisan a következő módosítást lehet tenni: A lányok és a fiúk egyszerre indultak, és ugyanazon az útvonalon haladtak, de a fiúk óránként 2 km-rel többet tettek meg, mint a lányok, és így éppen egy órával ~~hamarabb~~ később értek célba.

A feladatnak nincs megoldása.

B: Formálisan a következő módosítást lehet tenni: A lányok és a fiúk egyszerre indultak, és ugyanazon az útvonalon haladtak, de a fiúk óránként 2 km-rel ~~többet~~ kevesebbet tettek meg, mint a lányok, és így éppen egy órával hamarabb célba értek.

A feladatnak nincs megoldása.

C: Formálisan a következő módosítást lehet tenni: A lányok és a fiúk egyszerre indultak, és ugyanazon az útvonalon haladtak, de a ~~fiúk~~ lányok óránként 2 km-rel többet tettek meg, mint a ~~lányok~~ fiúk, és így ~~éppen~~ a fiúk egy órával hamarabb célba értek.

A feladatnak nincs megoldása.

3. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 5. Ha a két számjegy közé beírunk egy 1-est, és a kapott háromjegyű számot elosztjuk 8-cal, a hányados az eredeti kétjegyű szám lesz, a maradék pedig 2. Jelöljük x-szel a kétjegyű szám utolsó számjegyét. Melyik egyenlet írja le helyesen a számok közötti kapcsolatot?

A: $100(5-x)+10x+1=8\cdot[10(5-x)+x]+2$; **B:** $10(5-x)+10+x=80(5-x)+x+2$;

C: $100(5-x)+10+x=8\cdot[10(5-x)+x]+2$; **D:** $\dfrac{100(5-x)+10+x}{8}=10(5-x)+x+2$.

Megoldás: A **C** egyenlet a helyes.

Szövegmódosítások:

A: Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 5. Ha a két számjegy ~~közé beírunk~~ után írunk egy 1-est, és a kapott háromjegyű számot elosztjuk 8-cal, a hányados az eredeti kétjegyű szám lesz, a maradék pedig 2.

A feladatnak nincs megoldása.

B: Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 5. Ha ~~a két számjegy közé beírunk egy 1-est~~ az első számjegyhez hozzáadunk 1-et, és a kapott ~~háromjegyű~~ kétjegyű számot elosztjuk 8-cal, a hányados az eredeti kétjegyű szám első számjegyének 10-szerese lesz, a maradék ~~pedig 2~~ az utolsó számjegynél 2-vel nagyobb szám.

A feladatnak nincs megoldása.

D: Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 5. Ha a két számjegy közé beírunk egy 1-est, és a kapott háromjegyű ~~számot elosztjuk 8-cal~~ szám osztható 8-cal, a hányados az eredeti kétjegyű ~~szám lesz~~ számnál 2-vel nagyobb~~, a maradék pedig 2~~.

A feladatnak nincs megoldása.

Egyenletek felírása kis segítséggel

4. Balázs mesélte, hogy 4 év múlva félannyi idős lesz, mint amennyi az apja 6 évvel ezelőtt volt, amikor ő harmadannyi éves volt, mint amennyi az apja most. Hány éves most az apa és a fia?

Segítség:

	Balázs	Apja
6 éve		
Most		
4 év múlva	$\frac{x}{2}$	

Megoldás:

	Balázs	Apja
6 éve	$\frac{x+6}{3}$	x
Most		$x+6$
4 év múlva	$\frac{x}{2}$	

Az $\frac{x}{2} = \frac{x+6}{3} + 10$ egyenlet megoldása: $x = 72$.

Az apa most 78 éves, Balázs pedig 32 éves.

5. Egy 12-edikes osztályba járó baráti társaság minden tagja másolatokat készített a tablóképéről, és a fényképeiket kölcsönösen kicserélték egymással. Erre a célra összesen 480 kép készült, de a cserék után kiderült, hogy 100 kép felesleges maradt. Hány tagja volt a baráti társaságnak?

(*Segítség:* Ha a baráti társaságnak *x* tagja volt, akkor egy tanuló hány képet osztott szét?)

Megoldás:

Az $x(x-1) = 380$ másodfokú egyenlet egyetlen pozitív megoldása: $x = 20$.

A baráti társaságnak 20 tagja volt.

6. Egy cink-réz ötvözetben 82% réz van. Ha az ötvözetbe még újabb 1,8 kg cinket teszünk, akkor az ötvözet réztartalma 70%-ossá válik. Hány kilogramm cinket és rezet tartalmazott eredetileg az ötvözet?

(*Segítség:* Ha az ötvözet tömege kezdetben *x* kg volt, akkor az új ötvözetben hány kilogramm réz lesz?)

Megoldás:

A réz mennyisége nem változott, így $0{,}82x = 0{,}7(x+1{,}8)$. Az egyenlet megoldása: $x = 10{,}5$. Az eredeti ötvözetben 8,61 kg réz, és 1,89 kg cink volt.

Egyenletek felírása segítség nélkül

7. Egy osztály tanulóinak $\frac{1}{3}$-a gyalog, 25%- kerékpárral, a többi 10 diák pedig busszal jár iskolába. Hány tanulója van az osztálynak?

Megoldás: Jelöljük *x*-szel az osztály létszámát.

Az $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 10 = x$ egyenlet megoldása: $x = 24$. Az osztályba 24 tanuló jár.

8. Egy benzinkút 1800 literes tankját egyszerre töltik fel két tartálykocsiból. Az egyik tartálykocsiból percenként 20 literrel kevesebb benzint lehet áttölteni, mint a másikból. Egyszerre kezdik el az üres tank töltését, és 15 perc alatt a benzinkút tankja 75%-ig telik meg. Hány liter benzin folyik át a benzinkútba az egyik, illetve másik tartálykocsiból percenként?

Megoldás:

Ha a gyorsabban töltő tartálykocsi percenként x litert tölt át a tankba, akkor a szöveg szerint $15x + 15(x - 20) = 1350$. Az egyenlet megoldása: $x = 55$.

Az egyik tank percenként 55 litert, a másik 35 litert tölt át percenként.

9. Egy áruház raktárában piros és kék kelme van összesen 160 000 Ft értékben. A piros kelme ára méterenként 600 Ft, a kék kelméé 500 Ft. Egyik nap eladták a piros kelme 25%-át és a kék kelme 20%-át összesen 35 000 Ft értékben. Mennyi piros és mennyi kék kelme maradt a raktárban?

Megoldás: Ha a raktárban eredetileg p méter piros és k méter kék anyag volt, akkor

$$\left.\begin{aligned} 600p + 500k &= 160\,000 \\ \frac{1}{4}p \cdot 600 + \frac{1}{5}k \cdot 500 &= 35\,000 \end{aligned}\right\}, \text{ azaz } \left.\begin{aligned} 6p + 5k &= 1600 \\ \frac{3}{2}p + k &= 350 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $p = 100$ és $k = 200$.

Piros kelméből 75 méter, kék kelméből 150 méter maradt a raktárban.

10. Egy háromtagú család (apa, anya és a lányuk) tagjainak az életkora most összesen 80 év. Az apa háromszor annyi idős, mint a lánya. Két éve az anya életkora volt háromszorosa a leány akkori életkorának. Hány évesek most?

Megoldás: Jelöljük x-szel a leány mostani életkorát. Ekkor az apa életkora $3x$, az anyáé $80 - 4x$. Két éve a lány $x - 2$, az anya $78 - 4x$ éves volt. Az $78 - 4x = 3(x - 2)$ egyenlet megoldása: $x = 12$. Az apa 36, az anya 32 és a lányuk 12 éves most.

11. Egy kereskedő 50 kg szőlőt vett 8000 forintért. A szőlőt szétválogatta, és egyik részét 15%-os haszonnal, másik részét 5%-os veszteséggel adta el, így 1008 Ft haszonra tett szert. Hány kilogramm szőlőt adott el nyereséggel és hány kg-ot veszteséggel?

Megoldás:

A kereskedő 1 kg szőlőt 160 Ft-ért vett. Jelöljük x-szel annak a szőlőnek a mennyiségét, amelyet 15% haszonnal adott el.

Ekkor $160 \cdot 1{,}15x + 160 \cdot 0{,}95(50 - x) = 9008$

(vagy $160 \cdot 0{,}15x - 160 \cdot 0{,}05(50 - x) = 1008$).

Az egyenlet megoldása: $x = 44$.

Tehát 44 kg-ot adott el nyereséggel, és 6 kg-ot veszteséggel.

12. Egy kereskedő nagyobb tételben cukrot akart vásárolni. Halogatta a vásárlást, és mire észbekapott, a cukor mázsájának ára 2000 Ft-tal emelkedett. Szüksége volt rá, így megvette a szükséges mennyiséget, de ekkor ugyanannyi cukorért 120 000 Ft-ot kellett fizetnie, míg korábban ugyanennyi pénzért 2 mázsával többet kaphatott volna. Hány mázsa cukrot vásárolt?

Megoldás: Ha x mázsa cukrot vásárolt, akkor az új ára mázsánként $\frac{120000}{x}$, a régi, kedvezőbb ár mázsánként $\frac{120000}{x+2}$. A kettő különbsége 2000 Ft. Így

$\frac{120000}{x}-\frac{120000}{x+2}=2000$, azaz $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+2}=1$. Ebből az $x^2+2x-120=0$ másodfokú egyenlet adódik. Ennek egyetlen pozitív megoldása a 10.

Tehát 10 mázsa cukrot vásárolt.

13. Egy kétjegyű szám számjegyeinek az összege 13. Ha a számot 12-vel osztjuk, akkor a hányados megegyezik a szám utolsó számjegyével, a maradék pedig ennél 2-vel kisebb. Melyik ez a szám?

Megoldás: A kétjegyű számban az egyesek helyén álló számjegyet jelölje x. Ekkor a tízesek helyén $13-x$ áll, a szám értéke $10(13-x)+x$, tehát $10(13-x)+x=12x+(x-2)$.

Ennek az egyenletnek a megoldása $x=6$.

A keresett kétjegyű szám a 76.

14.* Az apa életkora most 5 évvel több, mint a három fia életkorának az összege. 10 év múlva az apa kétszer olyan idős lesz, mint a legidősebb fia, 20 év múlva kétszer olyan idős lesz, mint a középső fia, 30 év múlva pedig kétszer olyan idős lesz, mint a legkisebb fia. Hány éves most az apa? És a fiúk?

Megoldás: Jelölje a fiúk mostani életkorát: x, y és z ($x>y>z$). Ekkor az apa életkora most $x+y+z+5$. A szöveg szerint $\left.\begin{aligned}2(x+10)&=x+y+z+15\\2(y+20)&=x+y+z+25\\2(z+30)&=x+y+z+35\end{aligned}\right\}$.

Adjuk össze a három egyenlet megfelelő oldalait. Ekkor

$2(x+y+z)+120=3(x+y+z)+75$ egyenlethez jutunk. Innen $x+y+z=45$.

A három fiú életkorának összege most 45 év, így az apa most 50 éves.

A három egyenletből álló egyenletrendszer első egyenletéből azt kapjuk, hogy a legidősebb fiú most 20 éves, a második egyenletből adódik, hogy a következő fiú most 15 éves, míg a legfiatalabb 10 éves.

V. EGYENLETEK

Módszertani megjegyzés: A tanult alapfogalmak (abszolútérték, hatvány, négyzetgyök, logaritmus, szögfüggvények) pontos ismerete előfeltétele összetettebb feladatok sikeres megoldásának. Ezen a foglalkozáson ezeknek a fogalmaknak az elmélyítse a célunk.
Célszerű a foglalkozás elején az idevágó alapfüggvények grafikonját felrajzoltatni a táblára.

Két legyet ütünk egy csapásra

1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $4x-3=10x$; b) $2^{x+2}=10\cdot 2^x+3$; c) $4\sqrt{x-1}-3=10\sqrt{x-1}$;

d) $4\sin x-3=10\sin x$; e) $\lg x^4-3=10\lg x$; f) $\frac{4}{x}-3=\frac{10}{x}$.

Megoldás: Egy-egy új változó bevezetésével mindegyik egyenlet az a) egyenlet alakjával egyezik meg.

a) $x=-\frac{1}{2}$;

b) $0<2^x=-\frac{1}{2}$, az egyenletnek nincs megoldása.

c) $0\le\sqrt{x-1}=-\frac{1}{2}$, az egyenletnek nincs megoldása.

d) $\sin x=-\frac{1}{2}$. Az egyenlet megoldásai: $x=-\frac{\pi}{6}+2n\pi$ ($n\in\mathbf{Z}$), $x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$).

e) $\lg x=-\frac{1}{2}$. Az egyenlet megoldása: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

f) $\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$. Az egyenlet megoldása: $x=-2$.

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $(x-1)(x+2)=0$; b) $3^{2x}+3^x-2=0$; c) $x+\sqrt{x}-2=0$;

d) $(\log_2 x-1)(\log_2 x+2)=0$; e) $\cos^2 x-\sin x+1=0$.

Megoldás: Mivel minden valós *x*-re $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$, mindegyik egyenlet alakja ezzel analóg.

a) $x=1$ vagy $x=-2$; b) $3^x=1$ vagy $0<3^x\ne-2$. Egyetlen megoldás: $x=0$.

c) $\sqrt{x} = 1$ vagy $0 \le \sqrt{x} \ne -2$. Egyetlen megoldás: $x = 1$.

d) $\log_2 x = 1$ vagy $\log_2 x = -2$. Az egyenlet megoldásai: $x = 2$ vagy $x = \frac{1}{4}$.

e) $\cos^2 x - \sin x + 1 = 0 \iff \sin^2 x + \sin x - 2 = 0 \iff \sin x = 1$ vagy $-1 \le \sin x \ne -2$.

Az egyenlet megoldásai: $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$).

3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{3}{2}$; b) $\frac{|x-1|}{x+2} = 3$; c) $\left|\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x}\right| = 2$.

Megoldás:

a) Nincs megoldása a valós számok körében. ($\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{3}{2} \iff 2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$, és az egyenlet diszkriminánsa negatív. Másik lehetőség: mivel $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ előjele megegyezik, csak $\operatorname{tg} x > 0$ lehet, és tudjuk, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2.

b) Ha $1 \le x$, akkor $\frac{|x-1|}{x+2} = 3 \iff x - 1 = 3x + 6$ és $1 \le x$. Ebből $x = -\frac{7}{2}$, ami nem megoldás.

Ha $x < 1$ és $x \ne -2$, akkor $\frac{|x-1|}{x+2} = 3 \iff 1 - x = 3x + 6$ és $2 \ne x < 1$. Innen $x = -\frac{5}{4}$.

Ez a szám megoldása az egyenletnek.

c) $\left|\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x}\right| = 2 \iff \frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} = 2$ vagy $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} = -2$ Az első egyenletnek nincs megoldása: $a + \frac{1}{a} = 2 \iff a = 1$, de $\frac{x}{x-1} \ne 1$. A második egyenlet megoldása $x = \frac{1}{2}$, mert pl. $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} = -2 \iff 2x^2 - 2x + 1 = -2x^2 + 2x \iff (2x-1)^2 = 0$.

Az egyenlet egyetlen megoldása: $x = \frac{1}{2}$.

Ha ez ennyi, akkor az mennyi?

4. Ha $(x-3)(x+5)=0$, akkor mivel egyenlő x^2+2x?

Megoldás: A feltételben megadott egyenletnek van megoldása.

$(x-3)(x+5)=0 \iff x^2+2x-8=0$. Tehát $x^2+2x=8$.

5. Ha $\sqrt{x+3}=2$, akkor mivel egyenlő $(x+3)^4$?

Megoldás: A feltételben megadott egyenletnek van megoldása, mert a nemnegatív számok négyzetgyöke nemnegatív. $(x+3)^4=256$.

6. Ha $\sin^2 x=0{,}3$, akkor mivel egyenlő $\cos^2 x$?

Megoldás: A feltételben megadott egyenletnek van megoldása, mert $-1\le \sin x\le 1$.

Mivel $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, így $\cos^2 x=0{,}7$.

7. Ha $\cos x=-0{,}6$, akkor mivel egyenlő $\sin x$?

Megoldás: A feltételben megadott egyenletnek van megoldása, mert $-1\le \cos x\le 1$.

Mivel $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, így $|\sin x|=0{,}8$. Tehát $\sin x=0{,}8$ vagy $\sin x=-0{,}8$.

8. Ha $\lg(x+36)=2$, akkor mivel egyenlő $\log_2 x$?

Megoldás: A feltételben megadott egyenletnek van megoldása, ha $-36<x$.

$\lg(x+36)=2 \iff x=64$. Így $\log_2 x=6$.

9. Ha $2^{x+2}=\frac{1}{2}$, akkor mivel egyenlő $\log_2 x$?

Megoldás: A feltételben megadott egyenletnek van megoldása, mégpedig $x=-3$. Ennek a számnak a 2-es alapú logaritmusa nincs értelmezve a valós számkörben, tehát a $\log_2 x$-nek nincs értéke.

10. Ha $x^2+4y^2=9+4xy$, akkor mivel egyenlő $x-2y$?

Megoldás: $x^2+4y^2=9+4xy \iff (x-2y)^2=9$. Így $x-2y=3$ vagy $x-2y=-3$.

Az egyenletnek nincs megoldása?

11. Igazold, hogy az alábbi egyenleteknek, illetve egyenletrendszernek nincs valós gyöke!

a) $\lg x - \lg(x+2) = 0{,}5$;

b) $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = 5$;

c) $\left(2^x + 4\right)\left(0{,}5^{x-1} + 1\right) = 0$;

d) $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x} = 0$;

e) $\left.\begin{array}{l} |x-y| = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\}$;

f)* $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x-16} = 8$.

Megoldás:

a) Mivel a 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan növekvő a pozitív számok halmazán, ezért $\lg(x+2) > \lg x$, így $\lg x - \lg(x+2) < 0$, azaz $\lg x - \lg(x+2) \neq 0{,}5$.

b) Az egyenlet alaphalmaza az üres halmaz, mivel a bal oldali kifejezés nincs értelmezve egyetlen valós számra sem.

c) A szorzat mindkét tényezője minden valós x-re pozitív.

d) $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x} = 0 \iff \sin x - 1 = 0$ és $\cos x \neq 0$. A két állítás egyszerre nem teljesül.

e) $\left.\begin{array}{l} |x-y| = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{l} x - y = 2 \text{ vagy } x - y = -2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \iff 2x^2 - 4x + 3 = 0$ vagy

$2x^2 + 4x + 3 = 0$.

Mindkét másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív.

f)* Az egyenlet alaphalmaza: $[16; +\infty[$. Ezen a halmazon az egyenlet bal oldalán álló háromtagú kifejezés mindegyikével egy-egy szigorúan növekvő függvény képezhető.

Így $4 \le \sqrt{x}$, $5 \le \sqrt{x+9}$ és $0 \le \sqrt{x-16}$. Ebből adódik, hogy

$9 \le \sqrt{x} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x-16}$, tehát $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x-16} \neq 8$.

VI. EGYENLŐTLENSÉGEK

Módszertani megjegyzés: Az egyenlőtlenségek, a szélsőérték-feladatok megoldása kiváló lehetőséget nyújt a különböző fogalmak és függvények tulajdonságainak felelevenítésére. Az utolsó középiskolai évben, ismétléskor már nem célszerű az egyenlőtlenségek tematikus kitűzése, hiszen a különböző fogalmak ismeretét feltételező egyenlőtlenségek egymás utáni megoldása során jobban kitűnik, hogy minden esetben elsősorban a megfelelő függvény monotonitásának ismerete szükséges. Erre még olyan esetben is érdemes rávilágítani, ha tisztán algebrai megoldást alkalmazunk. Az egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása nem tartozik a középszintű érettségi követelményrendszerébe, de egyszerűbb esetben érdemes alkalmazni, hiszen egyrészt sokkal szemléletesebb, másrészt segít elmélyíteni a függvényábrázolás „technikáját”, a függvény grafikonjának értő vizsgálatát. Ne feledjük azonban, hogy a grafikus megoldás pontossága igen sok kívánnivalót hagy maga után.

1. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $(4x-1)^2-6x<(3-4x)^2$; b) $\frac{3x+1}{2x-5}>2$; c) $2|x-1|\ge 4-x$;

d) $2x^2-7x+5\ge 0$; e) $-x^2+4x-5>0$; f) $3-\sqrt{2x-1}>0$*;

g) $\log_{\frac{1}{4}} x-\log_{\frac{1}{4}} x^2<2$; h) $\sin^2 x-0{,}25\le 0$; i) $1\le 0{,}5^{x+2}\le 4$.

Megoldás:

a) $(4x-1)^2-6x<(3-4x)^2 \Leftrightarrow 16x^2-8x+1-6x<9-24x+16x^2$. Az elsőfokú egyenlőtlenség megoldása minden olyan x valós szám, amelyre $x<\frac{4}{5}$.

b) *1. megoldás*: Esetszétválasztással.

Ha $2x-5>0$, azaz $x>\frac{5}{2}$, akkor $3x+1>4x-10$, azaz $x<11$.

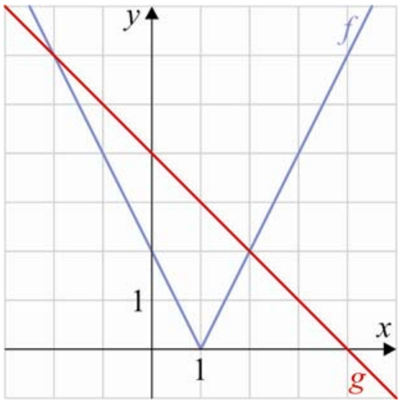
Innen a megoldás: $\frac{5}{2}<x<11$.

Ha $2x-5<0$, azaz $x<\frac{5}{2}$, akkor $3x+1<4x-10$, azaz $x>11$. A $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$ halmazon nincs megoldása az egyenlőtlenségnek.

2. megoldás: $\dfrac{3x+1}{2x-5} > 2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{3x+1}{2x-5} - \dfrac{4x-10}{2x-5} > 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{-x+11}{2x-5} > 0 \;\Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix} -x+11>0 \\ 2x-5>0 \end{matrix}\right\}$ vagy $\left.\begin{matrix} -x+11<0 \\ 2x-5<0 \end{matrix}\right\}$. A második egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása, első, és így az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $\dfrac{5}{2} < x < 11$.

c) Grafikus megoldás: $f(x) = 2|x-1|$ és $g(x) = 4 - x$.



$f(x) = g(x)$ pontosan akkor, ha $x = 2$ vagy $x = -2$.

A grafikonról leolvasható, hogy $2|x-1| \ge 4 - x$ akkor és csak akkor, ha $2 \le x$ vagy $x \le -2$.

Algebrai megoldás: $|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ ha } 1 \le x \\ -x+1, \text{ ha } x \le 1 \end{cases}$

$2|x-1| \ge 4-x \;\Leftrightarrow\; 2(x-1) \ge 4-x$ és $1 \le x$, vagy $2(-x+1) \ge 4-x$ és $x \le 1$. Innen adódik, hogy a megoldás: $2 \le x$ vagy $x \le -2$.

d) A $2x^2 - 7x + 5 = 0$ egyenlet megoldásai: $\dfrac{5}{2}$ és 1. A másodfokú kifejezéssel definiált függvény grafikonja felfelé nyíló parabola, zérushelyei $x_1 = \dfrac{5}{2}$ és $x_2 = 1$. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $]-\infty;1] \cup [2{,}5;+\infty[$.

e) A $-x^2 + 4x - 5 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív, ezért az $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ függvénynek nincs zérushelye. Mivel az f függvény képe egy lefelé nyíló parabola, ezért az *f* függvény minden értéke negatív, tehát a $-x^2 + 4x - 5 > 0$ egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

f) A $3 - \sqrt{2x-1} > 0 \;\Leftrightarrow\; 3 > \sqrt{2x-1}$. A négyzetgyökös kifejezés az $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ halmazon van értelmezve, és ezen a halmazon minden értéke nemnegatív. Az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve a relációjel nem változik, mert a négyzetfüggvény szigorúan növő a nemnegatív számok halmazán, így $9 > 2x - 1$, azaz $5 > x$.

Megoldás minden olyan *x* valós szám, amelyre $\dfrac{1}{2} < x < 5$.

g) Az egyenlőtlenség pozitív *x* számokra értelmezett. A pozitív számok halmazán $\log_{\frac{1}{4}} x^2 = 2\log_{\frac{1}{4}} x$, így a megoldandó egyenlőtlenség: $\log_{\frac{1}{4}} x - 2\log_{\frac{1}{4}} x < 2$. Ebből

$\log_{\frac{1}{4}} x > -2$, azaz $\log_{\frac{1}{4}} x > \log_{\frac{1}{4}} 16$. Mivel az $\frac{1}{4}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan csökkenő a pozitív számok halmazán, ezért $0 < x < 16$.

Célszerű ábrázoltatni az $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ függvényt.

h) $\sin^2 x - 0{,}25 \le 0 \;\Leftrightarrow\; -0{,}5 \le \sin x \le 0{,}5$. Az egyenlőtlenségrendszer megoldása minden olyan *x* valós szám, amelyre $-\frac{\pi}{6} + n\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

i) $1 \le 0{,}5^{x+2} \le 4 \;\Leftrightarrow\; 0{,}5^0 \le 0{,}5^{x+2} \le 0{,}5^{-2}$. A 0,5 alapú exponenciális függvény szigorúan csökken a valós számok halmazán, így $0 \ge x + 2 \ge -2$, ebből $-2 \ge x \ge -4$.

Érdemes ábrázoltatni az $f(x) = 0{,}5^{x+2}$ függvényt.

2. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $3\sin^2 x + 2\cos x < 2 - 3\cos^2 x$; b) $(2^x - 8)(\log_{0,5} x + 1) < 0$.

Megoldás:

a) $3\sin^2 x + 2\cos x < 2 - 3\cos^2 x \;\Leftrightarrow\; \cos x < -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{2\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$).

b) $(2^x - 8)(\log_{0,5} x + 1) < 0 \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{matrix} 2^x > 8 \\ \log_{0,5} x < -1 \end{matrix}\right\}$ vagy $\left.\begin{matrix} 2^x < 8 \\ \log_{0,5} x > -1 \end{matrix}\right\}$.

$\left.\begin{matrix} 2^x > 8 \\ \log_{0,5} x < -1 \end{matrix}\right\} \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{matrix} x > 3 \\ x > 2 \end{matrix}\right\}$. Megoldás minden olyan x valós szám, amelyre: $x > 3$.

$\left.\begin{matrix} 2^x < 8 \\ \log_{0,5} x > -1 \end{matrix}\right\} \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{matrix} x < 3 \\ 0 < x < 2 \end{matrix}\right\}$. Ebből adódnak a további megoldások: $0 < x < 2$.

Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $]0;2[\, \cup \,]3;+\infty[$.

Célszerű közös koordináta-rendszerben ábrázoltatni az $f(x) = \log_{0,5} x$ és $g(x) = 2^x$ függvényt.

3. Határozd meg a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezéssel megadott függvény értelmezhető!

a) $p(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$; b) $k(x)=\sqrt{x^2-x}$; c) $l(x)=\log_{\sqrt{2}}(x-x^2)$.

Megoldás:

a) $\text{É.T.}_p=\mathbf{R}\setminus\{0;1\}$; b) $\text{É.T.}_k=\left]-\infty;0\right]\cup\left[1;+\infty\right[$; *c) $\text{É.T.}_l=\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

4. Írj a következő egyenletekben p helyére olyan valós számot, hogy a kapott másodfokú egyenletnek pontosan két megoldása legyen!

a) $x^2-px+4=0$; b) $x^2+(p+1)x+p=0$.

Megoldás:

a) Az egyenlet diszkriminánsa: $D=p^2-16>0 \iff p<-4$ vagy $4<p$.

b) $D=(p+1)^2-4p=p^2-2p+1=(p-1)^2>0 \iff p\neq 1$ és $p\in\mathbf{R}$.

5. Hány olyan háromszög van, amelyben az oldal mérőszáma három egymást követő páratlan egész szám, és a kerülete kisebb 1000-nél? (Az egybevágó háromszögeket nem különböztetjük meg.

Megoldás:

Legyen a háromszög oldalainak hossza $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$. Ezekre a hosszakra teljesülnie kell a háromszög-egyenlőtlenségnek: $(2n-1)+(2n+1)>2n+3$. Innen $n>\dfrac{3}{2}$.

Mivel n egész számot jelöl, így $n\in\{2;3;4;...\}$. A háromszög kerülete:

$(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)<1000$, ebből $n<\dfrac{997}{6}\approx 166{,}17$. Így $2\le n\le 166$ és $n\in\mathbf{Z}$.

Tehát 165 ilyen háromszög van.

6. Egy állólámpához téglatest alakú lámpaburát szeretnénk készíteni. Először egy 400 cm hosszú drótból elkészítjük a téglatest vázát. Az egyik élét 30 cm hosszúnak választjuk. Hogyan válasszuk meg a többi él hosszát, hogy a lámpabura térfogata a lehető legnagyobb legyen?

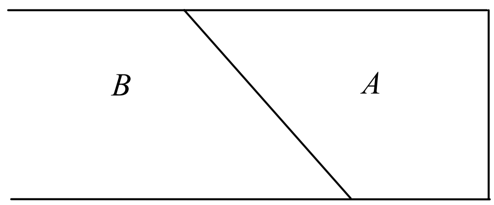
Megoldás:

Az élek hosszának összege 400 cm, így az egy csúcsból induló élek hosszának összege 100 cm. Az egyik él 30 cm, a másik kettő hosszát jelölje b és c. Így $b+c=70$.

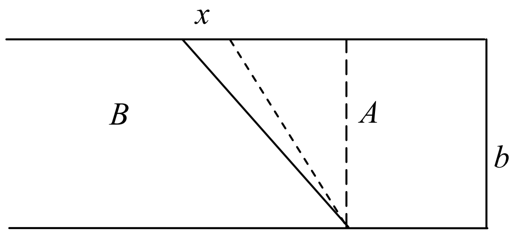
A téglatest térfogata: $V = 30bc$. Mivel $c = 70 - b$, ezért $V(b) = 30b(70 - b)$, ahol $0 < b < 70$. A V függvény képe egy lefelé nyíló parabola nyíltvégű darabja (végpontjai: $(0;0)$ és $(70;0)$). A függvény maximumhelye $b = 35$, maximuma 36 750.

A téglatest térfogata akkor a lehető legnagyobb, ha az egy csúcsból induló éleinek hossza 30 , 35 és 35 cm.

7. Egy telek – nevezzük *A*-nak – derékszögű trapéz alakú. Méretei: az alapok 12 m és 27 m hosszúak, a nem derékszögű szár hossza 30 m. Ezen az utóbbi oldalon csatlakozik a telekhez egy másik telek (*B*). A két telek közös határán még nem építették meg a kerítést. A *B* telek tulajdonosa tesz egy ajánlatot a szomszéd telek tulajdonosának: Megépítteti a kerítést a közös oldalon, ha átenged neki egy kis darabot a telkéből. Úgy gondolta a javaslatot tevő, hogy a kerítésnek azt a végét, amely a szomszéd telek 27 m-es oldalán lenne, néhány méterrel beljebb helyeznék el, így egy háromszög alakú telekrész az övé lenne. Mindkét gazda tudja, hogy a kerítés folyóméterének megépíttetése 3000 Ft-ba kerül, továbbá azt is, hogy ezen a vidéken a telek m^2-nek ára 20 000 Ft. Legfeljebb hány méterrel tegyék beljebb a kerítés végét, hogy az *A* telek tulajdonosa járjon jobban?



Megoldás:



Jelöljük *x*-szel azt a hosszat, amennyivel (méterben számítva) a kerítés végét arrébb helyeznék. Az A telek *b* oldalának hossza, a 30 m átfogójú és 15 m befogójú derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével kiszámítva: $b=\sqrt{675}\approx 25{,}98$ (m). Az „elcsatolandó” háromszög területe: $\frac{25{,}98x}{2}$. Ennek kereskedelmi értéke: $259800x$ (Ft).

A megépítendő kerítés c hossza: $c^2=30^2+x^2-60x\cos 60^\circ$, azaz

$c=\sqrt{900+x^2-30x}$.

A kerítés megépítése $3000\cdot\sqrt{900+x^2-30x}$ Ft-ba kerülne.

A kérdés az, hogy a $3000\cdot\sqrt{900+x^2-30x}>259800x$ egyenlőtlenség milyen pozitív x számokra teljesül.

$\sqrt{900+x^2-30x}>86{,}6x \Leftrightarrow 900+x^2-30x>7499{,}56x^2 \Leftrightarrow$

$0>7498{,}56x^2+30x-900$.

A másodfokú kifejezésnek egyetlen pozitív zérushelye van: $x\approx 0{,}34$. A másodfokú egyenlőtlenség pozitív megoldásai: $0<x<\approx 0{,}34$.

Az A telek tulajdonosa akkor jár jobban, ha kb. 3,4 dm-nél kevesebbel viszik arrébb a kerítés egyik végét.

8. Adott a koordinátasík két pontja: $A(1;2)$ és $B(3;0)$. Határozd meg az $x+2y=9$ egyenesnek azt a P pontját, amelyre a PA^2+PB^2 minimális!

Megoldás:

A P pont koordinátái: $P\left(x;\frac{9-x}{2}\right)$.

$PA^2=(x-1)^2+\left(\frac{9-x}{2}-2\right)^2$, azaz $PA^2=(x-1)^2+\frac{(5-x)^2}{4}$.

$PB^2=(x-3)^2+\frac{(9-x)^2}{4}$.

$PA^2+PB^2=(x-1)^2+\frac{(5-x)^2}{4}+(x-3)^2+\frac{(9-x)^2}{4}$. A kijelölt műveletek elvégzése után: $PA^2+PB^2=\frac{5}{2}x^2-15x+\frac{73}{2}$. Ennek a kifejezésnek keressük a minimumát és minimumának helyét.

Ismert, hogy az $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) függvény minimumhelye: $x=-\frac{b}{2a}$.

A $PA^2 + PB^2 = \frac{5}{2}x^2 - 15x + \frac{73}{2}$ függvény minimumhelye: $x = 3$. (A minimuma: 14).

A keresett pont: $P(3;3)$.

VII. SOROZATOK

Módszertani megjegyzés: A számtani sorozat fogalmával már általános iskolában találkoznak a tanulók. Középiskolában megismernek különbözőféle sorozatokat, osztályozzák azokat tulajdonságaik alapján, de a tanári gyakorlat azt mutatja, hogy kiemelten a számtani és a mértani sorozattal foglalkoznak, hiszen a középszintű érettségi vizsgakövetelményében e két speciális sorozat kap hangsúlyt. Indokolt, hiszen az ezekkel kapcsolatos ismeretek jól alkalmazhatók a gyakorlati életben is. A foglalkozás feladatai is elsősorban e két sorozat ismeretére támaszkodnak, bár néhány feladat a sorozatok egy-két tulajdonságának felelevenítésére is lehetőséget nyújt. A tanári mellékletben megtalálható tudáspróbával a tanulók önállóan is lemérhetik tudásukat az adott témakörben.

1. A következő sorozatok közül válaszd ki azokat, amelyek grafikonjának minden pontja egyetlen egyenesre illeszkedik!

$(a_n) =$ (Az n szám legkisebb pozitív osztója);

$(b_n) =$ (Az $n+2$ oldalú konvex sokszög átlóinak száma);

$(c_n) =$ (Az n egység oldalhosszú szabályos háromszög három magassághosszának összege);

$(d_n) =$ (Az $n+2$ oldalú szabályos sokszög szimmetriatengelyeinek száma);

$(e_n) =$ (A $k(n) = 2n$ sorozat első n tagjának összege).

Megoldás:

$$a_n = 1;\ b_n = \frac{(n+2)(n-1)}{2};\ c_n = \frac{3\sqrt{3}}{2}n;\ d_n = n+2;\ e_n = 2+4+6+\ldots+2n = (1+n)n.$$

Az (a_n), (c_n), (d_n) sorozatok grafikonja illeszkedik egy egyenesre.

2. A következő sorozatok közül válaszd ki azokat, amelyek

a) szigorúan növekvők vagy szigorúan csökkenők;

b) korlátosak;

c) periodikusak;

d) számtani sorozatok!

$a_n = -1 + (n-2)\cdot 3$; $\quad b_n = \dfrac{(2n-5)\cdot \lg(n+1)^2}{\lg(n+1)}$; $\quad c_n = \sin n\pi$;

$d_n = (-1)^n 2^{-n}$; $\quad e_n = \dfrac{1}{n^2}$; $\quad f_n = 5\cdot\dfrac{0{,}5^{n-1}}{0{,}5^{n+1}}$;

$g_n = \cos\dfrac{\pi}{3}n$; $\quad h_n = (n-2)^2 - n^2 + 7n$.

Megoldás:

$a_n = 3n - 7$; $b_n = 4n - 10$; $c_n = 0$; $f_n = 20$; $h_n = 3n + 4$.

Szigorúan növekvő: (a_n), (b_n), (h_n).

Szigorúan csökkenő: (e_n).

Korlátos: (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n).

Periodikus: (c_n), (f_n) és (g_n). Az első két sorozat periódushossza tetszőleges pozitív valós szám, a (g_n) sorozaté 6, mert $\cos\frac{\pi}{3}(n+6) = \cos\frac{\pi}{3}n$.

Számtani sorozat: (a_n), (b_n), (c_n), (f_n), (h_n).

3. Adj meg képlettel olyan sorozatot, amelyik

a) felülről korlátos, de alulról nem korlátos;

b) nem korlátos;

c)* felülről korlátos, a legkisebb felső korlátja 1, és szigorúan növekvő!

Megoldás:

a) Pl. Minden olyan számtani sorozat, amelynek a differenciája negatív szám.

b) Pl. $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$.

c)* Pl. $b_n = 1 - \frac{1}{n}$.

4. a) Egy számtani sorozat öt egymást követő tagjának összege 60. Tagja-e ennek a sorozatnak a 12?

b) Egy mértani sorozat öt egymást követő tagjának szorzata 1024. Tagja-e ennek a sorozatnak a 4?

Megoldás: Számtani sorozatban az egymást követő páratlan számú tag összegének ismeretében célszerű a középső tagból kiindulva jelölni a tagokat.

a) $a - 2d$, $a - d$, a, $a + d$, $a + 2d$ jelöléssel azonnal adódik, hogy az összeg: $5a = 60$, így $a = 12$. Tehát a 12 tagja a sorozatnak.

b) Mértani sorozat esetében az egymást követő páratlan számú tag szorzatának ismeretében itt is célszerű a középső tagból kiindulva jelölni a tagokat.

A $\frac{b}{q^2}, \frac{b}{q}, b, bq, bq^2$ jelölés esetén a szorzatuk: $b^5 = 1024$, így $b = 4$. Tehát a 4 tagja a sorozatnak.

5. Panni sálat köt. Az első napon 4 cm hosszú darabot kötött meg. Minden további napon 2 cm-rel többet, mint az azt megelőző napon.

Milyen hosszú lenne a sál 2 hét alatt?

Megoldás: A naponta kötött hosszúságok olyan számtani sorozatot határoznak meg, amelynek első tagja 4, differenciája 2. A kérdés a sorozat első 14 tagjának összegére vonatkozik.

Ha $a_1 = 4$, és $d = 2$, akkor $a_{14} = 30$, és $S_{14} = \frac{4+30}{2} \cdot 14 = 238$.

A sál 2 hét alatt 238 cm hosszú lenne.

6. Ági is sálat köt, de ő a második naptól kezdve minden nap kétszer akkora darabot köt, mint az azt megelőző napon. Az első három nap alatt a sál már 21 cm hosszú lett.

a) Mennyit kötött az első napon? b) Hányadik napon lenne a sál 240 cm hosszú?

Megoldás: A naponta kötött hosszúságok mértani sorozatot határoznak meg. A sorozat hányadosa 2, az első három tagjának összege 21. Ha az első tagját a-val jelöljük, akkor $a + 2a + 4a = 21$, ebből $a = 3$.

a) Az első napon 3 cm hosszú darabot kötött meg.

b) A kérdés az, hogy a sorozat első hány tagjának összege 240. Mivel a hányados 2, így

$$S_n = 3 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 3(2^n - 1).$$

$3(2^n - 1) = 240$, azaz $2^n = 81$. $2^n = 81 \iff n \lg 2 = \lg 81 \iff n = \frac{\lg 81}{\lg 2} \approx 6{,}34$.

A sál a 7-edik napon éri el 240 cm hosszúságot.

Természetesen eljuthatunk a megoldáshoz logaritmus alkalmazása nélkül is:

$64 = 2^6 < 81 < 2^7 = 128$, tehát $6 < n < 7$.

7. Egy csökkenő számtani sorozat első 15 tagjának az összege 0.

a) Hány pozitív tagja van a sorozatnak? Mely tagok ezek?

b) Ha még azt is tudjuk, hogy az első tíz tag összege 50, mekkora az első húsz tag összege?

Megoldás:

a) Ha a nyolcadik tagot a_8-cal jelöljük (és a differenciát d-vel), akkor az első 15 tag összege: $S_{15} = 15a_8$, és mivel $S_{15} = 0$, így a nyolcadik tag nulla. Csökkenő a sorozat, tehát az első hét tag pozitív.

b) $S_{10} = \dfrac{a_1 + (a_1 + 9d)}{2} \cdot 10$ és $S_{10} = 50$, így $2a_1 + 9d = 10$. Másrészt

$a_8 = a_1 + 7d = 0$.

A $\left.\begin{aligned} 2a_1 + 9d &= 10 \\ a_1 + 7d &= 0 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása: $a_1 = 14$ és $d = -2$.

$S_{20} = \dfrac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = -100$. Az első 20 tag összege (-100).

8. Egy téglatest egy csúcsban összefutó éleinek hossza egy számtani sorozat egymást követő tagjai, és e három él hosszának összege 30 cm. Módosítsuk a téglatest éleit: a legrövidebbet nem változtatjuk, a leghosszabb élek mindegyikét 10 cm-rel, míg a középsők mindegyikét 2 cm-rel megnöveljük. Az így létrejött téglatest egy csúcsban összefutó éleinek hossza egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Hány cm^3 az új téglatest térfogata?

Megoldás: Legyen az egy csúcsból induló élek hossza: $a - d$, a és $a + d$. Mivel a három szám összege 30, így $a = 10$, tehát az eredeti téglatest egy csúcsból induló élei hossza: $10 - d$, 10 és $10 + d$. Az új téglatest élei: $10 - d$, 12 és $20 + d$ ($0 < d < 10$). E három pozitív szám akkor mértani sorozat egymást követő tagjai, ha $12^2 = (10 - d)(20 + d)$. A másodfokú egyenletnek egyetlen pozitív megoldása van: $d = 4$.

Az új téglatest térfogata: $V = 6 \cdot 12 \cdot 24 = 1728$ (cm^3).

Megjegyzés: Ha $10 - d$ a leghosszabb él, ez azt jelenti, hogy $d < 0$. Ekkor a másodfokú egyenlet: $12^2 = (20 - d)(10 + d)$. Ennek egyetlen negatív megoldása: $d = -4$, és az új téglatest egy csúcsból induló élei: 24, 12 és 6 cm.

9. Egy erdő faállománya 3500 m^3. A mindenkori állomány évenként 3%-kal gyarapodik.

a) Feltételezve, hogy 10 év alatt egyetlen fa sem pusztul el, és nem vágnak ki egyet sem, hány m^3 lesz a faállomány 10 év elteltével?

b) Ha viszont minden év végére az előző évi faállomány 1%-át kivágják (a gyarapodás most is minden évben az előző évi faállomány 3%), akkor mekkora lenne a faállomány 10 év elteltével?

c) A b) kérdésben megfogalmazott feltételek esetén hány m^3 fát vágtak volna ki összesen az első három évben?

Megoldás:

a) $3500 \cdot 1{,}03^{10} \approx 4703{,}7\ (m^3)$.

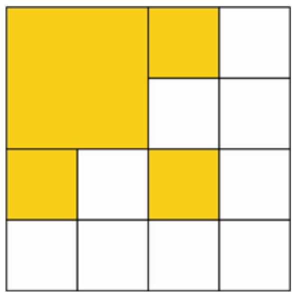
b) $3500 \cdot 1{,}02^{10} \approx 4266{,}5\ (m^3)$.

c) Az első évben $3500 \cdot 0{,}01 = 35\ (m^3)$ fát vágtak ki.

Az első év végén 3570 m^3 fa lesz, így a második év végéig $3570 \cdot 0{,}01 = 35{,}7\ (m^3)$ fát vágnak ki.

A második év végén $3500 \cdot 1{,}02^2 = 3641{,}4\ (m^3)$ a faállomány, így a harmadik évben $36{,}414\ m^3$ fát vágnak ki.

A három év alatt összesen $107{,}114 \approx 107\ m^3$ fát vágnak ki.



10. Egy 8 egység oldalhosszú négyzetet két, egymásra merőleges egyenessel 4 egybevágó négyzetre bontunk. A kapott négyzetek közül a bal felsőt kifestjük. A többi három négyzet mindegyikét ismét felosztjuk 4-4 egybevágó négyzetre, és ismét mindegyikben a bal felső négyzetet kifestjük. Az eljárást hasonló módon folytatjuk tovább.

Jelölje t_n az n-edik (n tetszőleges pozitív egész számot jelöl) alkalommal befestett négyzetek területének összegét.

a) Írd fel a (t_n) sorozat első öt tagját!

b) A tizedik alkalomkor hány területegység lenne befestve összesen?

Megoldás:

a) $t_1=\frac{1}{4}\cdot 64=16$; $t_2=\frac{3}{4}\cdot 64\cdot\frac{1}{4}=12$; $t_3=\frac{3}{4}\cdot 64\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=9$; $t_4=64\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{4}$;

$t_5=64\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\frac{1}{4}=\frac{81}{16}$.

b) Az n-edik alkalommal befestett négyzetek területének összege: $t_n=64\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Az egyes alkalmakkor befestett négyzetek területének összegei olyan mértani sorozatot határoznak meg, amelynek az első tagja 16, a hányadosa $\frac{3}{4}$. Az első 10 tag összege: $S_{10}=16\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}}{1-\frac{3}{4}}\approx 60{,}4$. Tehát az első 10 alkalommal összesen kb. 60,4 területegység lenne befestve.

11. Az utóbbi pár év mindegyikében 500 ezer Ft prémiumot kaptam, de sajnos rövid idő alatt el is költöttem. „Takarékoskodjunk!” – gondoltam, és nyitottam egy számlát, és lekötöttem 500 ezer Ft-ot évi 10%-os kamatra. Éppen egy év múlva újból kaptam 500 ezer Ft prémiumot, azt is rögtön beraktam a számlámra. Takarékoskodásom kezdete óta összesen egymás után 4 évben kaptam ugyanilyen összegű prémiumot, melyet rögtön el is helyeztem a számlámra. Az ötödik évben egy fillért sem kaptam, mérgemben azonnal felvettem a számlámról 500 ezer Ft-ot. A következő évben sem kaptam prémiumot, ekkor újból kivettem a „szokásos” 500 ezer Ft-ot. Ezt követő két évben ugyanígy jártam. Amikor a 4-edik alkalommal vettem fel 500 ezer Ft-ot, örömmel láttam, hogy még maradt pénz a számlámon. Mennyi maradt?

Megoldás: Vezessük be az $5\cdot 10^5=A$ jelölést!

1 év múlva: $1{,}1A+A$;

2 év múlva: $(1{,}1A+A)\cdot 1{,}1+A=1{,}1^2A+1{,}1A+A$;

4 év múlva: $1{,}1^4A+1{,}1^3A+1{,}1^2A+1{,}1A+A$;

5 év múlva: $(1{,}1^4A+1{,}1^3A+1{,}1^2A+1{,}1A+A)\cdot 1{,}1-A=$

$=1{,}1^5A+1{,}1^4A+1{,}1^3A+1{,}1^2A+1{,}1A-A$;

8 év múlva: $1{,}1^8 A + 1{,}1^7 A + 1{,}1^6 A + 1{,}1^5 A + 1{,}1^4 A - 1{,}1^3 A - 1{,}1^2 A - 1{,}1A - A = ?$

$$1{,}1^8 A + 1{,}1^7 A + 1{,}1^6 A + 1{,}1^5 A + 1{,}1^4 A - 1{,}1^3 A - 1{,}1^2 A - 1{,}1A - A =$$
$$= 1{,}1^4 A(1{,}1^4 + 1{,}1^3 + 1{,}1^2 + 1{,}1 + 1) - A(1{,}1^3 + 1{,}1^2 + 1{,}1 + 1) =$$
$$= 1{,}1^4 A \cdot \frac{1{,}1^5 - 1}{0{,}1} - A\frac{1{,}1^4 - 1}{0{,}1} \approx 429\,748\,;$$

A számlán kb. 429 748 Ft maradt.

TUDÁSPRÓBA – VII. Sorozatok

1. Egy számtani sorozat első tagja 5, differenciája 2. Mennyi a sorozat 9. és 15. tagjának számtani közepe?

2. Egy mértani sorozat első tagja és hányadosa is 2. Mennyi a 7. és 13. tag mértani közepe?

3. Egy nem konstans mértani sorozat első két tagjának összege 6-szorosa a harmadik tagjának. Mennyi a sorozat hányadosa?

4. Egy sorozat első öt tagja ebben a sorrendben: 1, 2, 3, 4, 5. A sorozat periodikus, periódushossza 5. Mennyi az első 202 tag összege?

5. Egy trapéz egymás után következő szögei rendre egy számtani sorozat szomszédos tagjai. Ha a legkisebb szöge 75°-os, mekkora a trapéz többi szöge?

6. A színház nézőterén az egymást követő sorokban lévő férőhelyek száma egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Mennyi a sorozat állandója, ha az első négy sorban 48-cal kevesebb hely van, mint a második négyben?

7. 10 éven keresztül minden év január elsején 300 000 Ft-ot rakunk a bankba. Mennyi pénzünk lesz a 10-edik év végén, ha az évi kamatláb 7,5%-os?

A: $300000 \cdot 1{,}075^9$; **B:** $300000 \cdot 1{,}075^{10}$;

C: $300000(1{,}075^{10} + 1{,}075^9 + \ldots + 1{,}075 + 1)$; **D:** $300000(1{,}075^{10} + 1{,}075^9 + \ldots + 1{,}075)$.

A tudáspróba feladatainak megoldása, értékelése

1. Egy számtani sorozat első tagja 5, differenciája 2. Mennyi a sorozat 9. és 15. tagjának számtani közepe?

Megoldás:

$a_9 = 5 + 8 \cdot 2 = 21$ és $a_{15} = 5 + 14 \cdot 2 = 33$, 1 pont

$\frac{a_9 + a_{15}}{2} = 27$. 1 pont

Összesen: 2 pont

Megjegyzés: A feladat megoldható annak ismeretében is, hogy a kérdezett tagok számtani közepe a sorozat 12. tagjával megegyező: $a_{12} = 5 + 11 \cdot 2 = 27$.

2. Egy mértani sorozat első tagja és hányadosa is 2. Mennyi a 7. és 13. tag mértani közepe?

Megoldás: $a_7 = 2 \cdot 2^6 (= 128)$ és $a_{13} = 2 \cdot 2^{12} (= 8192)$, 1 pont

$\sqrt{a_7 a_{13}} = \sqrt{2^{20}} = 2^{10} = 1024$. 2 pont

Összesen: 3 pont

Megjegyzés: Mivel a sorozat minden tagja pozitív, megoldhatja a tanuló a feladatot annak ismeretében is, hogy a kérdezett tagok mértani középe a sorozat 10. tagjával megegyező: $a_{10} = 2 \cdot 2^9 = 2^{10}$.

3. Egy nem konstans mértani sorozat első két tagjának összege 6-szorosa a harmadik tagjának. Mennyi a sorozat hányadosa?

Megoldás: A sorozat első tagját a-val, hányadosát q-val jelölve:

$a + aq = 6aq^2$. 2 pont

Mivel $a \neq 0$, így $1 + q = 6q^2$. 1 pont

A $6q^2 - q - 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei: $\frac{1}{2}$ és $\left(-\frac{1}{3}\right)$. 2 pont

Tehát a sorozat hányadosa $\frac{1}{2}$ vagy $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Összesen: 5 pont

4. Egy sorozat első öt tagja ebben a sorrendben: 1, 2, 3, 4, 5. A sorozat periodikus, periódushossza 5. Mennyi az első 202 tag összege?

Megoldás:

A sorozat 1, 2, 3, 4, 5 tagjai ismétlődnek.	1 pont
Az első 202 tagban a periódushossz 40-szer jelenik meg,	
és az utolsó két elem sorrendben 1 és 2.	2 pont
Mivel az egy periódusba tartozó tagok összege 15,	1 pont
az első 202 tag összege: $40 \cdot 15 + 1 + 2 = 603$.	1 pont
	Összesen: 5 pont

5. Egy trapéz egymás után következő szögei rendre egy számtani sorozat szomszédos tagjai. Ha a legkisebb szöge 75°-os, mekkora a trapéz többi szöge?

1. megoldás:

A trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180°.	1 pont
Így a trapéz legnagyobb szöge 105°-os.	1 pont
A szomszédos szögek differenciáját *d*-vel jelölve, $105 = 75 + 3d$.	1 pont
Ebből $d = 10$.	1 pont
A trapéz többi szöge: 85°, 95° és 105°.	1 pont

2. megoldás:

$75 + (75 + d) + (75 + 2d) + (75 + 3d) = 360$	2 pont
Ebből $d = 10$.	1 pont
A négyszög szögei: 75°, 85°, 95° és 105°.	1 pont
Mivel $75^\circ + 105^\circ = 85^\circ + 95^\circ = 180^\circ$, a négyszög valóban trapéz.	1 pont
	Összesen: 5 pont

6. A színház nézőterén az egymást követő sorokban lévő férőhelyek száma egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Mennyi a sorozat állandója, ha az első négy sorban 48-cal kevesebb hely van, mint a második négyben?

Megoldás: A sorozat első tagját a-val, differenciáját d-vel jelölve,

$S_4 = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) = 4a + 6d$, 1 pont

$S_8 = \frac{a + (a + 7d)}{2} \cdot 8 = 8a + 28d$, 1 pont

$S_4 = (S_8 - S_4) - 48$, 2 pont

$4a + 6d = 4a + 22d - 48$, 1 pont

$d = 3$. 1 pont

Összesen: 6 pont

7. 10 éven keresztül minden év január elsején 300 000 Ft-ot rakunk a bankba. Mennyi pénzünk lesz a 10-edik év végén, ha az évi kamatláb 7,5%-os?

A: $300000 \cdot 1{,}075^9$; **B:** $300000 \cdot 1{,}075^{10}$;

C: $300000(1{,}075^{10} + 1{,}075^9 + \ldots + 1{,}075 + 1)$; **D:** $300000(1{,}075^{10} + 1{,}075^9 + \ldots + 1{,}075)$.

Megoldás:

A helyes válasz: **D** 6 pont

(Mert a 10-edik év elején még betesz 300 000Ft-ot, és a 10-edik év végén kérdezi az összeget.)

Összesen: 6 pont

Az elérhető maximális pontszám: 32 pont

VIII. HÁROMSZÖG NEVEZETES VONALAI, PONTJAI ÉS KÖREI

Módszertani megjegyzés: A tanítási órák csökkenése, és a vizsgakövetelmények megváltozása miatt az elemi geometriai ismeretek tanítására kevesebb idő jut annál, mint amennyi szükséges lenne. Ennek az anyagrésznek a tanításakor különösen fontos a tanulói tapasztalatszerzés. Ezen a foglalkozáson – feladatokon keresztül – áttekintjük a háromszög nevezetes vonalait, pontjait, köreit, és azok néhány tulajdonságát.

1. Döntsd el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, és melyik hamis. Döntésedet indokold!

a) A háromszög bármelyik magasságvonala két derékszögű háromszögre bontja a háromszöget.

Megoldás: Hamis, hiszen pl. a tompaszögű háromszögnek van olyan magasságvonala, amelyik a háromszögön kívül halad.

b) Minden háromszögnek van olyan magasságvonala, amely két derékszögű háromszögre bontja a háromszöget.

Megoldás: Igaz, mert a háromszög legnagyobb szögének csúcsából húzott magasság talppontja a szemközti oldalnak belső pontja.

c) Van olyan háromszög, amelynek magassága egybeesik a háromszög egyik oldalával.

Megoldás: Igaz, a derékszögű háromszög mindkét befogója a háromszög egy-egy magassága.

d) A háromszög belső szögének szögfelezője két, egyenlő területű részre bontja a háromszöget.

Megoldás: Hamis, mert van olyan háromszög, amelynek a belső szögfelezője a szemközti oldalt nem egyenlő hosszú szakaszokra bontja.

e) A háromszögnek, ha van szimmetriatengelye, az csak a háromszög egyik magasságvonala lehet.

Megoldás: Igaz, hiszen ha a háromszögnek van szimmetriatengelye, akkor annak át kell mennie a háromszög egyik csúcsán, és merőlegesen kell feleznie a csúccsal szemközti oldalt.

f) Van olyan háromszög, amelyiknek pontosan 2 szimmetriatengelye van.

Megoldás: Hamis, mert ha a háromszög egyik csúcsán átmenő egyenes a háromszög szimmetriatengelye, akkor a csúcsból induló két oldal egyenlő hosszú. Ha van egy másik szimmetriatengelye is, akkor e másik csúcsból induló két oldal is egyenlő hosszú, tehát a háromszög szabályos, de annak a harmadik csúcsán átmenő magasságvonala is szimmetriatengely.

g) A háromszög középvonala két, egyenlő területű részre vágja a háromszöget.

Megoldás: Hamis. A három középvonal négy egybevágó háromszögre bontja a háromszöget, tehát egy középvonal 1:3 területarányú részekre vágja a háromszöget.

h) A háromszög síkjában pontosan három olyan pont van, amelyik a háromszög mindhárom csúcsától ugyanakkora távolságra van.

Megoldás: Hamis,egyetlen ilyen pont van, mivel a három oldalfelező merőleges egy pontban metszi egymást.

i) Van olyan háromszög, amelynél a körülírt körének középpontja a háromszög egyik magasságvonalán van.

Megoldás: Igaz. A körülírt kör középpontja rajta van a háromszög mindhárom oldalfelező merőlegesén, és van olyan háromszög (az egyenlőszárú), amelynek egyik oldalfelező merőlegese szimmetriatengelye, tehát magasságvonala.

j) A háromszög beírt körének középpontja rajta van a háromszög egyik belső szögének szögfelezőjén.

Megoldás: Igaz, mert a háromszög beírt körének középpontja a belső szögfelezők metszéspontja.

k) A háromszög súlyvonala harmadolja a háromszög egyik oldalát.

Megoldás: Hamis, a háromszög súlyvonala felezi a háromszög egyik oldalát.

l) A háromszög súlypontján átmenő egyenes két egyenlő területű részre vágja a háromszöget.

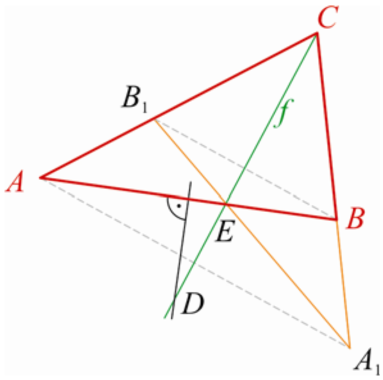
Megoldás: Hamis. Húzzunk a súlyponton át a háromszög egyik oldalával párhuzamos egyenest! Az egyenes a háromszögből egy hozzá hasonló háromszöget metsz le, a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$. Tudjuk, hogy a hasonló háromszögek területének aránya a hasonlóság arányának a négyzetével egyezik meg, tehát a lemetszett háromszög területe az eredeti háromszög területének $\frac{4}{9}$-szerese.

m)* A háromszög egyik csúcsából induló belső szögfelezőnek van olyan pontja, amelyik egyenlő távolságra van a háromszög másik két csúcsától.

Megoldás: Igaz.

Az egyenlőszárú háromszög szárszögéből induló belső szögfelező bármelyik pontja egyenlő távolságra van a másik két csúcstól.

Ha a szögfelezőt közrefogó két oldal hossza különböző, akkor azt kell belátnunk, hogy az általuk közrefogott szög szögfelező félegyenese és a szöggel szemközti oldal oldalfelező merőlegese metszi egymást.

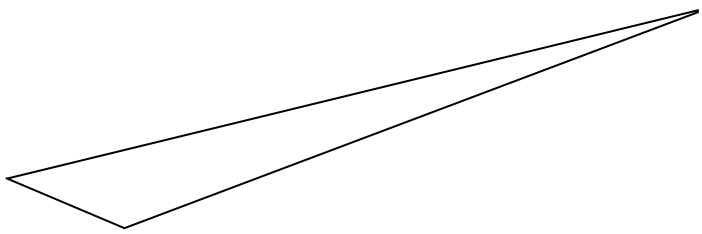


Az ABC háromszögben ($CA < CB$) húzzuk meg a C csúcsból induló belső szög f szögfelezőjét. Tükrözzük a háromszöget az f szögfelezőre (tükörkép: az A_1B_1C háromszög)! Jelöljük E-vel a szögfelező és az AB oldal metszéspontját.

Ha megmutatjuk, hogy az $AEC\angle$ nagyobb derékszögnél, akkor az f metszi az AB oldal felezőmerőlegesét. Mivel a szögfelező merőleges az AA_1 szakaszra, ezért az $AEC\angle$ tompaszög.

Módszertani megjegyzés: Ha a tanulók ismerik a kerületi szögek tételét, akkor annak felhasználásával könnyebben igazolható az állítás. (Ha megrajzoljuk a háromszög körülírt körét, a háromszög egyik oldalának felezőmerőlegese áthalad az oldal végpontjait összekötő kisebb körív felezőpontján. Az oldallal szemközti szög szögfelezője is áthalad a kör e pontján, mivel egyenlő kerületi szögekhez egyenlő ívek tartoznak.)

2. Szerkeszd meg az ábrán látható háromszög két magasságvonalát!



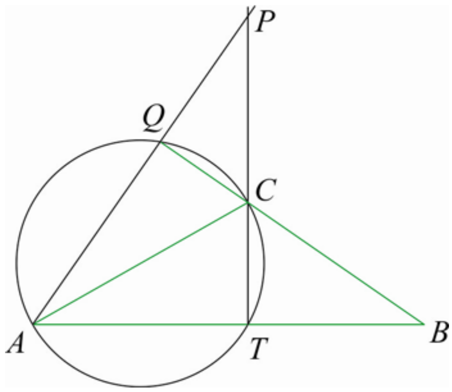
Módszertani megjegyzés: Ekkor érdemes megbeszélni a tanulókkal, hogy az írásbeli érettségin, ha „véletlenül” nincs náluk körző és vonalzó, és az egyik feladat egy szerkesztés végrehajtását kéri, akkor a szerkesztés végrehajtását helyettesíthetik a szerkesztési eljárás leírásával.

3. Szerkessz tompaszögű egyenlőszárú *ABC* háromszöget, amelynek az alapja *AB*, majd szerkeszd meg az *AC* szár Thalész-körét! A kör az *AB* alapot, a *T* pontban, a *BC* oldal egyenesét a *Q* pontban metszi.

a) Milyen arányban osztja a *T* pont az *AB* alapot?

b) Az *AQ* és *CT* egyenesek metszéspontját jelöljük *P*-vel. Milyen nevezetes pontja az *ABC* háromszögnek ez a *P* pont?

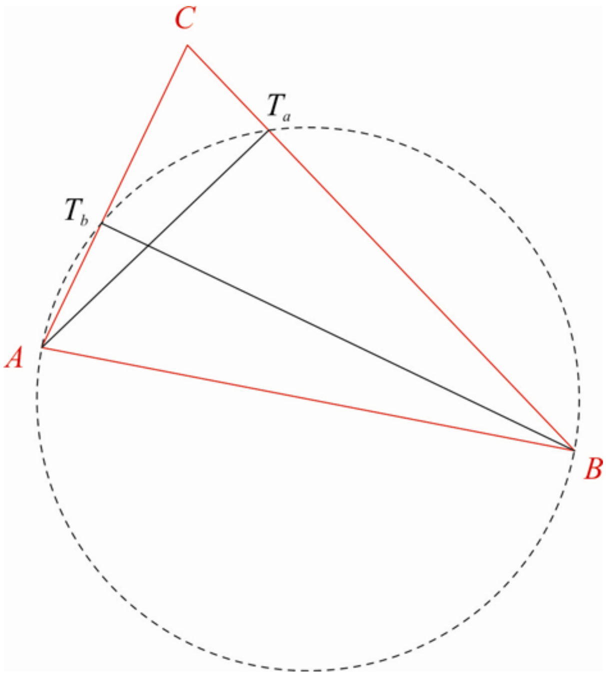
Megoldás:



a) Jelölje *T* a kör és az *AB* alap metszéspontját. Thalész tétele szerint *CT* merőleges az *AB* oldalra, *CT* egyenese tehát magasságvonala, így szimmetriatengelye az egyenlőszárú háromszögnek, tehát a kör felezi, azaz 1:1 arányban osztja az *AB* alapot.

b) A *P* pont az *ABC* háromszög magasságpontja, ugyanis a *CT* egyenes a háromszög egyik magasságvonala, és mivel *AP* merőleges a *BC* oldalegyenesére, így az *AP* egyenes a háromszög másik magasságvonala. A magasságvonalak metszéspontja pedig a háromszög magasságpontja.

4. Az ábrán látható *ABC* háromszög *A* és *B* csúcsából induló magasságok talppontját jelölje rendre T_a és T_b. Bizonyítsd be, hogy az ABT_aT_b négyszög köré kör írható!



Megoldás:

Mivel ABT_a és ABT_b közös átfogójú derékszögű háromszögek, Thalész tétele szerint a háromszögek derékszögének csúcsa az AB átmérőjű kör pontja. Tehát a négyszög köré valóban írható kör.

Megjegyzés: Az állítás a húrnégyszögek tételével is igazolható, kiszámítható, hogy a négyszög szemközti szögeinek összege 180°.

5. Vizsgáld meg, hogy a 4. feladatban megfogalmazott állítás igaz-e tompaszögű háromszög esetében is! Sejtésedet indokold!

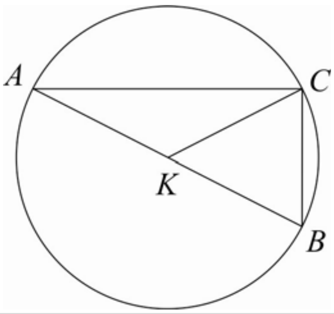
Megoldás: Az előző feladatban megfogalmazott állítás tompaszögű háromszögre is igaz. Bizonyítása analóg a hegyesszögű háromszögre adott bizonyítással.

Módszertani megjegyzés: Az állítás derékszögű háromszögre is igaz. Ha ennek vizsgálatát a tanulók nem vetik föl, mi kérdezzünk rá!

6. Szerkessz egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget, majd szerkeszd meg mindhárom háromszög körülírt körét!

Módszertani megjegyzés: A feladat célja ismét észrevétetni a tanulókkal, hogy a háromszög körülírt körének középpontja hegyesszögű háromszögnél annak belső tartományában, derékszögű háromszögnél az átfogó felezőpontjában, és tompaszögű háromszögnél a külső tartományban helyezkedik el.

7. Az ábrán a K pont az ABC háromszög körülírt körének középpontja. Az AKC háromszög területe 3 területegység. Hány területegység az ABC háromszög területe?

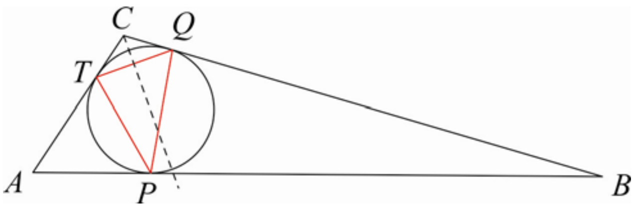


Megoldás: Az ABC háromszög területe 6 területegység.

Hangsúlyozzuk ki, hogy a CK szakasz a háromszög egyik súlyvonala.

8. Jelöld meg egy ABC háromszög beírt körének érintési pontjait! Ez a három pont meghatároz egy PQT háromszöget. Az ABC háromszög belső szögeinek szögfelezői milyen nevezetes vonalai a PQT háromszögnek? Sejtésedet indokold!

Megoldás: Az ABC háromszög bármelyik belső szögének szögfelezője a PQT háromszögnek oldalfelező merőlegese.

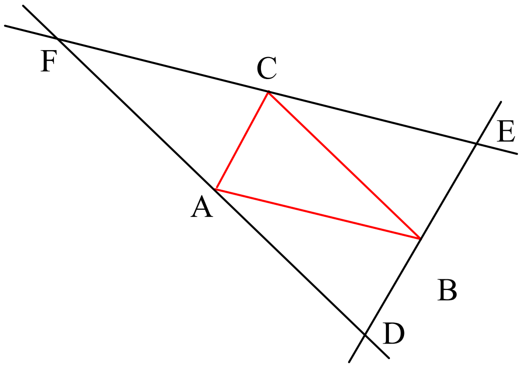


A kör külső C pontjából húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, így $CT = CQ$. Az ABC háromszög C csúcsából húzott belső szögfelező a TQC egyenlőszárú háromszög szárszögének szögfelezője, erről tudjuk, hogy merőlegesen felezi a TQ alapot. Hasonlóan látható be az ABC háromszög másik két szögfelezőjéről is az állítás.

9. Az ábrán látható ABC háromszög középháromszöge egy DEF háromszögnek (azaz, AB, BC és AC egy-egy középvonala a DEF háromszögnek).

a) Szerkeszd meg a DEF háromszöget!

b) Az ABC háromszög magasságvonalai milyen nevezetes vonalai a DEF háromszögnek? Sejtésedet indokold!



Megoldás:

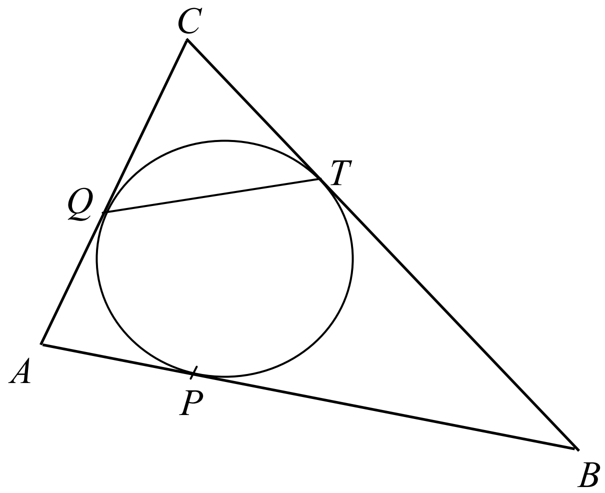
a) A háromszög középvonala párhuzamos a háromszög harmadik oldalával, és fele olyan hosszú. A középvonal e tulajdonságának ismeretében a DEF háromszög könnyen megszerkeszthető: az ABC háromszög csúcsain át párhuzamost húzunk a háromszög csúccsal szemközti oldalával. Ezeknek az egyeneseknek a páronkénti metszéspontjai a keresett DEF háromszög csúcsai.

b) Mivel az A, B és C pontok a DEF háromszög oldalainak felezőpontjai, és az ABC háromszög magasságvonala merőleges a DEF háromszög megfelelő oldalára, így az ABC háromszög magasságvonalai a DEF háromszög oldalfelező merőlegesei.

10. Az ABC háromszög beírt köre az AC oldalt a Q pontban, a BC oldalt pedig a T pontban érinti. Igazold, hogy az $ABTQ$ négyszögnek van olyan oldala, amelynek hossza két másik oldal hosszának összegével egyenlő!

Megoldás:

Érintse a kör a háromszög AB oldalát P pontban.



Mivel a kör külső pontjából húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, így $AQ = AP$ és $BT = BP$. Viszont $AP + BP = AB$, tehát $AQ + BT = AB$. Ezzel beláttuk, hogy a négyszögnek van két olyan oldala (AQ és BT), amelyek hosszának összege a négyszög AB oldalának hosszával egyenlő.

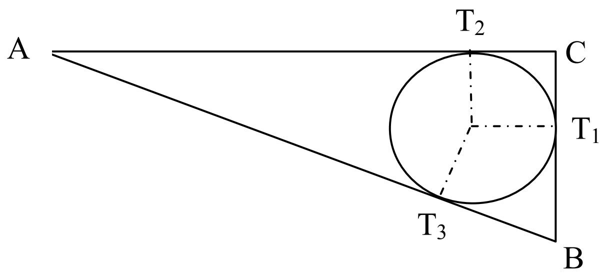
11. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza: 5 cm és 12 cm. Mekkora a háromszög beírt körének sugara?

1. megoldás:

Pitagorasz tételének alkalmazásával adódik, hogy a háromszög átfogója 13 egység hosszú. A háromszög területe kétféleképpen is felírható: $T = \frac{5 \cdot 12}{2}$ és $T = \frac{Kr}{2}$, ahol r a beírt kör sugarának hossza, T a háromszög területe, K a kerülete. Így $5 \cdot 12 = (5 + 12 + 13)r$. Ebből $r = 2$. A háromszög beírt körének sugara 2 egység hosszú.

2. megoldás:

Jelölje C az ABC háromszög derékszögű csúcsát, és a háromszög befogóin a kör érintési pontjait T_1 és T_2.



A kör külső pontjából húzott érintő szakaszok hossza egyenlő, továbbá a kör középpontjából az érintési pontba vezető sugár merőleges az érintőre, így 4 pont – a beírt kör középpontja, a T_1 és T_2 pontok, továbbá a háromszög C csúcsa – olyan négyzetet határoz meg, amelynek az oldalhossza a kör r sugarával megegyező. Ha $AC = 12$ és $BC = 5$, akkor $AT_2 = 12 - r$ és $BT_1 = 5 - r$.

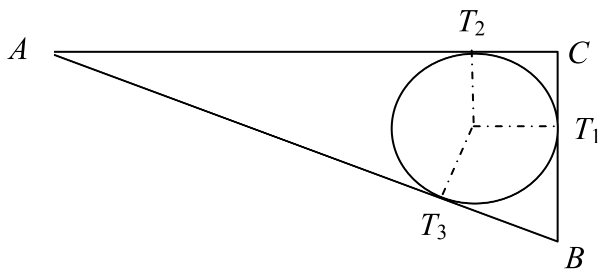
Mivel $AT_2 = AT_3$ és $BT_1 = BT_3$, így $(12 - r) + (5 - r) = 13$. Az egyenletet megoldása: $r = 2$.

A háromszög beírt körének sugara 2 egység hosszú.

12. Egy derékszögű háromszög átfogója 5, kerülete 12 egység. Hány egység a háromszög beírt körének sugara?

Megoldás:

Jelölje C az ABC háromszög derékszögű csúcsát, és T_1 és T_2 a háromszög befogóin a kör érintési pontjait.



A kör külső pontjából húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, továbbá a kör középpontjából az érintési pontba vezető sugár merőleges az érintőre, így a beírt kör középpontja, a T_1 és T_2 pontok, valamint a háromszög C csúcsa olyan négyzetet határoz meg, amelynek az oldalhossza a kör r sugarával megegyező. Legyen $BC = a$, $AC = b$ és $AB = c$.

Ekkor $AT_2 = b - r$ és $BT_1 = a - r$.

Mivel $AT_2 = AT_3$ és $BT_1 = BT_3$, így $(b - r) + (a - r) = c$, és mivel az átfogó 5 egység hosszú, így $a + b - 5 = 2r$.

Tudjuk, hogy $a + b + c = 12$ és $c = 5$, ezért $a + b = 7$. Tehát $2r = 2$, azaz $r = 1$.

A háromszög beírt körének sugara 1 egység hosszú.

IX. HASONLÓSÁG

Módszertani megjegyzés: A középszintű érettségi vizsgakövetelményei között a „Hasonlósági transzformációk” témakörben a hangsúly az ismeretek gyakorlati alkalmazásán van. („…Szakasz adott arányú felosztása. Hasonló alakzatok felismerése, (pl. háromszögek hasonlósági alapesetei) alkalmazása, arány felírása. Tudja és alkalmazza feladatokban a hasonló síkidomok területének arányáról és a hasonló testek felszínének és térfogatának arányáról szóló tételeket.”)
Az anyagrész ismétlését ezen a foglalkozáson is feladatokon keresztül hajtjuk végre. A megoldásra felkínált feladatsor utolsó feladata már előkészíti a következő foglalkozás témakörét, a szögfüggvények alkalmazását.

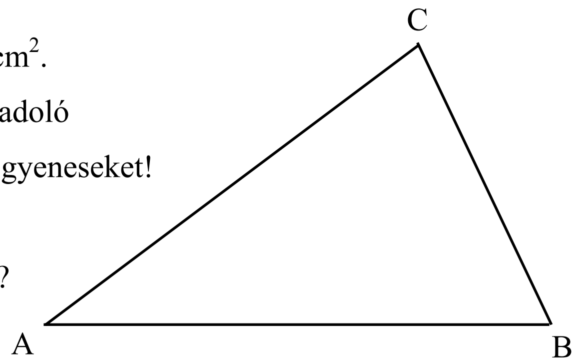
1. Egy 10°-os szöget 3-szoros nagyítású nagyítón át nézünk. Hány fokos a szög a nagyítón át nézve?

Megoldás: A hasonlósági transzformáció szögtartó, így a nagyítón át nézve a szög 10°-os.

2. Az ábrán látható *ABC* háromszög területe 18 cm^2.

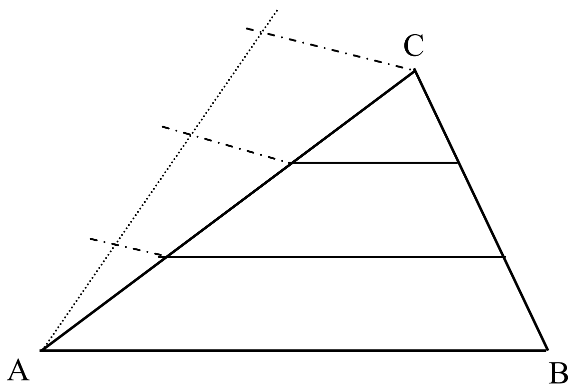
a) Szerkessz a háromszög *AC* oldalának harmadoló pontjain átmenő, az *AB* oldallal párhuzamos egyeneseket!

b) A megszerkesztett egyenesek mekkora területű részekre vágják az *ABC* háromszöget?



Megoldás:

a)



A harmadolópontokat egy segédegyenesen tetszőlegesen felvett szakasz háromszori felmérésével a szaggatott vonalakkal jelölt párhuzamosok szerkesztésével jelölhetjük ki.

b) Az ábrán három, közös *C* csúcsú hasonló háromszög keletkezett. Hasonló háromszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyezik meg. A háromszögek közül a legkisebbnek a területe: $t_1 = \frac{1}{9} T_{ABC} = \frac{1}{9} \cdot 18 = 2\ (\mathrm{cm}^2)$. A következő háromszög esetében a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$, így a területe:

$t_2 = \frac{4}{9} T_{ABC} = \frac{4}{9} \cdot 18 = 8\ (\mathrm{cm}^2)$. A középső négyszög (trapéz) területe tehát 6 cm^2.

A három rész területe rendre: 2 cm^2, 6 cm^2 és 10 cm^2.

3. Egy 8 cm^2-es diaképet a falon 0,32 m^2-es képnek látjuk. Milyen magasnak látszik az a betű, amelyik a dián 3 mm magas?

Megoldás: A falon látható kép a diakép középpontosan hasonló képe. Mivel $0{,}32\ \mathrm{m}^2 = 3200\ \mathrm{cm}^2$, a két hasonló négyszög területének aránya 400. Hasonló négyszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyezik meg, így a hasonlóság aránya 20. A dián 3 mm-nek látszó szakasz középpontosan hasonló képe $20 \cdot 3\ \mathrm{mm} = 60\ \mathrm{mm} = 6\ \mathrm{cm}$ hosszú.

4. Egy parkban egy kör alakú virágágyat fehér árvácskákkal ültettek tele. A virágágyat körbeültették lila árvácskákkal. A lila árvácskák virágágya körgyűrű alakú volt, amelynek területe 8-szorosa volt a kör alakú virágágynak. Hányszorosa a lila virágokkal beültetett körgyűrűt határoló külső kör kerülete a belsőének?

Megoldás: A két koncentrikus kör hasonló. A külső kör területe 9-szerese a belső körnek, így a hasonlóság aránya 3. Mivel a körök kerülete egyenesen arányos a körök sugarával, a körgyűrűt határoló külső kör kerülete 3-szorosa a belső kör kerületének.

5. Egy építkezésre az egyik nap 2 tonna homokot hoztak. Leszórták úgy, hogy a homokdomb kúp alakú lett. Másnap még hoztak valamennyi homokot, és ugyanoda leöntötték. Azt vettem észre, hogy az így kialakult kúp hasonló a tegnap látott kúphoz, de a magassága kétszer akkora. Hány tonna homokot szállítottak második alkalommal?

Megoldás: A két kúp hasonló, és a hasonlóság aránya 2. Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő, így a két kúp térfogatának aránya 8. A kúpok tömege egyenesen arányos a térfogatukkal. A nagyobb kúp tömege 8-szorosa a kisebbnek, tehát 16 tonna. Így másnap 14 tonna homokot szállítottak.

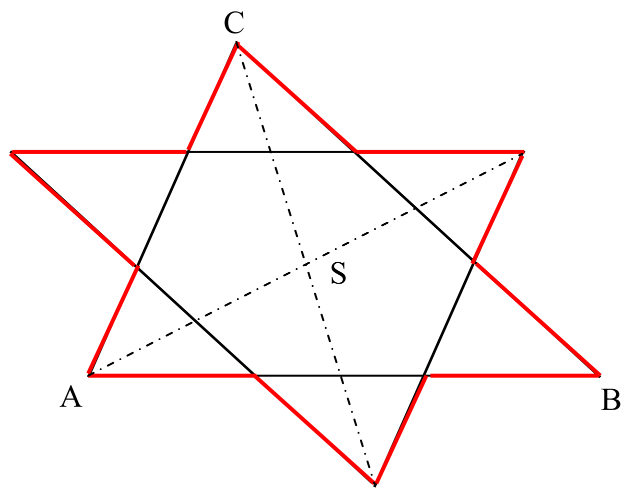
6. Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza: 3 cm és 9 cm. Mekkora a trapéz átlói által létrehozott két hasonló háromszög területének aránya?

Megoldás:

A két hasonló háromszög megfelelő oldalainak aránya $\frac{1}{3}$, így a területük aránya $\frac{1}{9}$.

7.* Tükrözd az ábrán látható *ABC* háromszöget a súlypontjára! Az eredeti és a tükörkép háromszög oldalai páronként metszik egymást. E hat metszéspont, az eredeti háromszög és a tükörképháromszög csúcsai egy csillagalakzatot (12 oldalú sokszöget) határoznak meg. Mekkora a csillagalakzat területe, ha az eredeti háromszög területe 12 cm^2?

Megoldás:



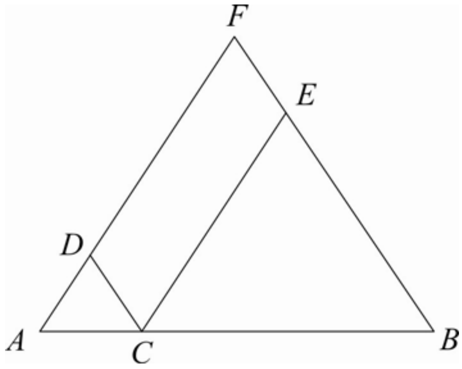
A 12 oldalú sokszög területének kiszámításához szükségünk van a tükörkép háromszög *ABC* háromszög külső tartományába eső részének (három kis háromszög) területére, hiszen a kérdéses terület e három kis háromszög és az eredeti háromszög területének összegével egyenlő.

E kis háromszögek oldalai párhuzamosak az *ABC* háromszög oldalaival, hiszen pontra tükrözéskor a szakasz képe párhuzamos az eredeti szakasszal, így e háromszögek hasonlóak az *ABC* háromszöghöz. A hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$, hiszen a háromszög súlypontja a súlyvonal oldalhoz közelebbi harmadoló pontja. A területük tehát az *ABC* háromszög területének $\frac{1}{9}$-szerese.

A 12 oldalú sokszög területe: $T = T_{ABC} + 3\cdot\frac{1}{9}T_{ABC} = 12 + 4 = 16\ (\text{cm}^2)$.

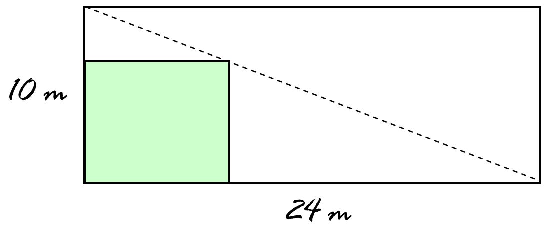
8. Az *AB* szakasz belső *C* pontjáról tudjuk, hogy *AC*:*CB* = 1:4. Az *AC*, *CB* és *AB* szakaszok mint oldalak fölé szabályos háromszögeket rajzolunk. Mi lesz a három háromszög területének $T_{AC} : T_{BC} : T_{AB}$ aránya?

Megoldás:



Bármilyen két szabályos háromszög hasonló egymáshoz, a hasonlóság aránya pl. az oldaluk arányával egyezik meg. Az ábra szerinti *ACD* háromszög hasonló az *ABF* háromszöghöz, a hasonlóság aránya $\frac{1}{4}$. A *CBE* és *ABF* hasonló háromszögek hasonlóságának aránya $\frac{3}{4}$. Mivel a hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, így $T_{ACD} = \frac{1}{16} T_{ABF}$, és $T_{CBE} = \frac{9}{16} T_{ABF}$. Tehát $T_{ACD} : T_{CBE} : T_{ABF} = 1:9:16$.

9. Egy téglalap alakú telek oldalainak hossza 10 m és 24 m. A tulajdonos a telek egyik sarkában el szeretne keríteni egy négyzet alakú részt konyhakertnek. Az ábrán a tulajdonos vázlatrajza látható. Mekkorák a tervezett négyzet oldalai?



Megoldás: Jelöljük *x*-szel a négyzet oldalának hosszát. Az ábrán (az egybevágóaktól eltekintve) három hasonló derékszögű háromszög van. Pl. a 10 és 24 befogójú hasonló az *x* és $24 - x$ befogójú háromszöghöz. A két háromszög megfelelő oldalainak aránya megegyezik, így $\frac{24}{10} = \frac{24 - x}{x}$. Az egyenlet megoldása: $x = \frac{120}{17} \approx 7{,}059$.

A négyzet oldalai kb. 7,1 m hosszúak.

10. Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogót 7 cm és 9 cm hosszú szakaszokra bontja. Mekkora a háromszög hosszabbik befogója?

Megoldás: A derékszögű háromszög átfogója 16 cm hosszú. Jelölje *b* a háromszög hosszabb befogójának hosszát. Alkalmazzuk a háromszögre a befogótételt: Mivel a háromszög hosszabb befogója a hosszabbik szelet végpontjából indul, így $b = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$.

A hosszabb befogó hossza: 12 cm.

11. Egy derékszögű háromszög befogói 8 cm és 15 cm hosszúak.

a) Mekkora a háromszög körülírt körének sugara?

b) Mekkora a háromszög átfogóhoz tartozó magassága?

c) Mekkora a háromszög beírt körének sugara?

d) Milyen távolságra van a háromszög súlypontja a háromszög körülírt körének középpontjától?

Megoldás:

a) A derékszögű háromszög átfogója 17 cm hosszú. A körülírt kör sugarának hossza: $R = 8{,}5\ \text{cm}$.

b) A derékszögű háromszögre alkalmazzuk a befogótételt: A 8 cm hosszú befogó átfogóra eső merőleges vetületét x-szel jelölve $8^2 = 17x$. Ebből $x = \frac{17}{64}$. Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót $\frac{17}{64}$ $(\approx 0{,}2656)$ és $\frac{17 \cdot 63}{64} = \frac{1071}{64} (\approx 16{,}73)$ hosszú szeletekre osztja. A magasságtétel szerint $m_c = \frac{17}{64}\sqrt{63} \approx 2{,}1\,(\text{cm})$ hosszú.

c) A $T = rs$ (ahol T a háromszög területe, s a félkerülete, r a beírt körének sugara) képlet alapján számolva: $\frac{8 \cdot 15}{2} = r \cdot \frac{8 + 15 + 17}{2}$, ahonnan $r = 3$.

A háromszög beírt körének sugara 3 cm hosszú.

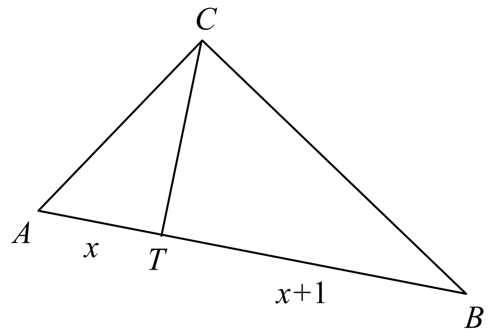
d) Mivel az átfogó felezőpontját a derékszög csúcsával összekötő sugár a háromszög egyik súlyvonala, és a súlypont a súlyvonal oldalhoz közelebbi harmadoló pontja, így a súlypont és a körülírt kör középpontjának távolsága 1 cm.

12. Egy derékszögű háromszög átfogóját a magasság két olyan szakaszra bontja, amelyek különbsége 1 cm. A háromszög kisebbik befogója 1 cm-rel rövidebb az átfogónál. Mekkora az átfogó?

Megoldás:

Jelölje az ABC háromszög derékszögnél lévő csúcsát C, rövidebb befogóját AC. Az átfogóhoz tartozó CT magasság az AB átfogót $AT = x$ és $TB = x + 1$ hosszú szakaszokra bontja. Ekkor $AC = x + (x + 1) - 1 = 2x$. Alkalmazzuk az ABC háromszög AC befogójára a befogótételt: $(2x)^2 = x(2x + 1)$, azaz $2x^2 - x = 0$. Ennek az egyenletnek egyetlen pozitív megoldása van: $x = \frac{1}{2}$.

A háromszög átfogója: 2 cm hosszú. (A derékszögű háromszög befogói 1 cm és $\sqrt{3}$ cm hosszúak.



13. Az *ABC* háromszög *BC* oldalának *C*-n túli meghosszabbításán lévő *D* pontra az $ABC_\angle = CAD_\angle$ teljesül. Milyen kapcsolat van az *AD*, *CD* és *BD* oldalak közül? Döntésedet indokold!

A: *CD* mértani közepe a másik kettőnek;

B: *BD* mértani közepe a másik kettőnek;

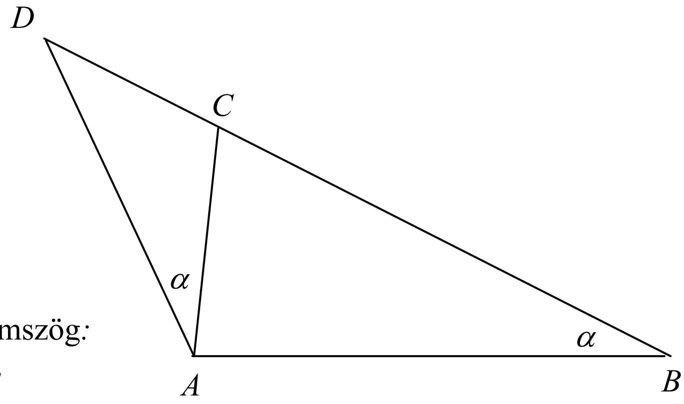
C: *AD* számtani közepe a másik kettőnek;

D: *AD* mértani közepe a másik kettőnek;

E: Az oldalak közötti kapcsolat nem felel meg sem az **A,** sem a **B,** sem a **C,** sem a **D** válaszoknak.

Megoldás: A helyes válasz: D.

Az *ABD* és *ACD* háromszögek hasonlóak, mert egy szögük közös (*ADB* szög), és $ABC_\angle = CAD_\angle$. A két háromszög megfelelő oldalai:

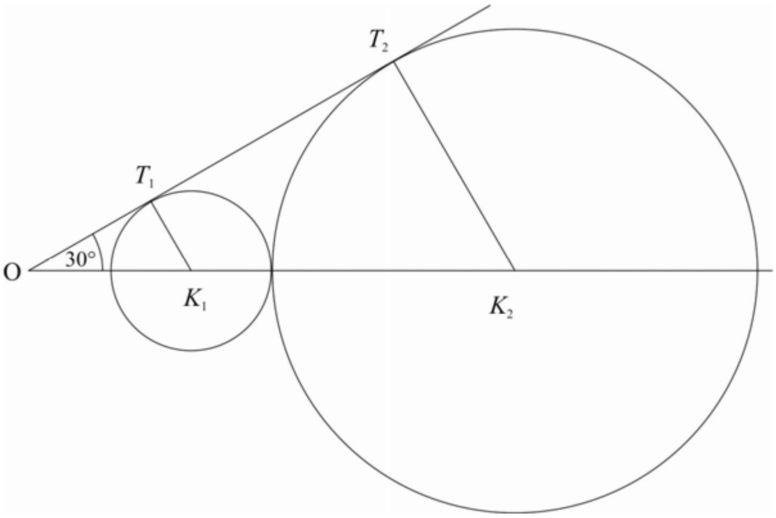


ABD háromszög:		*ACD* háromszög:
AB	$\mapsto$	*AC*
BD	$\mapsto$	*AD*
AD	$\mapsto$	*CD*

A megfelelő oldalak hányadosa ugyanakkora: $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$. Innen $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$.

14. Az $R = 10$ cm sugarú kört kívülről érinti a 10 cm-nél kisebb *r* sugarú kör. A két kör közös külső érintőinek hajlásszöge 60°-os. Hány cm hosszú az *r* sugár?

Megoldás:



Az ábrán látható jelölést használva: Az OK_1T_1 derékszögű háromszögben a $30°$-os szöggel szemközti befogó hossza fele az átfogónak, és mivel $K_1T_1 = r$, így $OK_1 = 2r$. Így $OK_2 = 3r + 10$.

Az OK_1T_1 háromszög hasonló az OK_2T_2 derékszögű háromszöghöz, ezért a megfelelő oldalak hányadosa megegyezik: $\frac{10}{3r+10} = \frac{r}{2r}$. Az egyenlet megoldása: $r = \frac{10}{3}$.

A keresett sugár hossza $\frac{10}{3}$ cm.

X. TRIGONOMETRIA

Módszertani megjegyzés: Ezen a foglalkozáson felelevenítjük a szögfüggvények fogalmát, néhány tulajdonságát, a hegyesszögek szögfüggvényének alkalmazását derékszögű háromszögben, és a következő foglalkozás előkészítéséül a szögfüggvények alkalmazását tetszőleges háromszögben.
A tanári mellékletben szereplő tudáspróbával a tanulók lemérhetik az ezen a területen szerzett ismereteiket. Ugyanitt található a tudáspróba feladatainak megoldása és értékelése.

1. Az $\mathbf{i}$ bázisvektor (-200°)-os forgatásával előállított vektor koordinátáit jelölje $(e_1; e_2)$. A következő szögek közül melyikre igaz, hogy

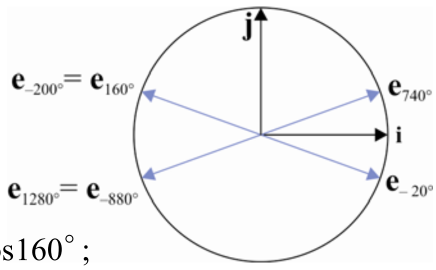
a) koszinusza egyenlő e_1-gyel?

b) szinusza e_2-vel egyenlő?

c) koszinusza egyenlő e_1-gyel, a szinusza pedig e_2-vel?

740°; -20°; 1280°; -880°; 160°.

Megoldás:



a) $e_1 = \cos(-200^\circ) = \cos 1280^\circ = \cos(-880^\circ) = \cos 160^\circ$;

b) $e_2 = \sin(-200^\circ) = \sin 740^\circ = \sin 160^\circ$;

c) $e_1 = \cos(-200^\circ) = \cos 160^\circ$ és $e_2 = \sin(-200^\circ) = \sin 160^\circ$.

2. Szerkeszd meg az alábbi egységvektorokat!

$\mathbf{e} = (\cos 2730^\circ)\mathbf{i} + (\sin 2730^\circ)\mathbf{j}$

$\mathbf{k} = (\cos(-450^\circ); \sin(-450^\circ))$

$\mathbf{n} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\sin\alpha)\mathbf{j}$, ahol $\operatorname{tg}\alpha = -1$

Megoldás:

$\mathbf{e} = (\cos 2730^\circ)\mathbf{i} + (\sin 2730^\circ)\mathbf{j} = (\cos 210^\circ)\mathbf{i} + (\sin 210^\circ)\mathbf{j}$

Egyetlen ilyen vektor szerkeszthető.

$\mathbf{k} = (\cos(-450^\circ); \sin(-450^\circ)) = -\mathbf{j}$, egyetlen ilyen vektor szerkeszthető.

$\text{tg}\,\alpha = -1 \iff \alpha = 135^\circ + 360^\circ \cdot n$ vagy $\alpha = -45^\circ + 360^\circ \cdot k$, ahol n és k tetszőleges egész számot jelöl. Így kétféle **n** egységvektor szerkeszthető, az egyik az **i** vektornak pl. 135°-os, a másik az **i** vektor (-45°)-os elforgatottja.

3. Számítsd ki az **e** $(-0{,}5\,;e_2)$ és **g** $(g_1\,;-1)$ egységvektorok hiányzó koordinátáját!

Megoldás: Ha az **e** egységvektor irányszöge α, akkor mivel $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, és $\cos\alpha = -0{,}5$, így $\sin^2\alpha = \frac{3}{4}$. Ebből $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tehát $e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $e_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

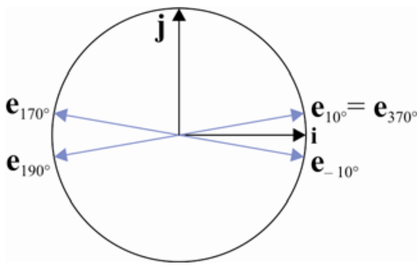
Hasonlóan $g_1^2 + (-1)^2 = 1$, azaz $g_1 = 0$.

4. Döntsd el az x értékének kiszámítása nélkül, hogy a következő négy állítás közül melyik igaz! Döntésedet indokold! Ha $\cos x = \cos 170^\circ$, akkor

A) $\cos x = \cos 10^\circ$; B) $\cos x = \cos 190^\circ$;

C) $\sin x = \sin(-10^\circ)$; D) $\cos x = \cos 370^\circ$.

Megoldás:



A) állítás <u>hamis</u>, mert $\cos 10^\circ = -\cos 170^\circ \neq \cos 170^\circ$.

B) állítás <u>igaz</u>, mert a 170°-os és a 190°-os irányszögű egységvektor első koordinátája megegyezik.

C) állítás <u>hamis</u>, mert ha $\cos x = \cos 170^\circ$, akkor

$\sin x = \sin 10^\circ$ vagy $\sin x = \sin(-10^\circ)$.

D) állítás <u>hamis</u>, mert $\cos 370^\circ = -\cos 170^\circ \neq \cos 170^\circ$.

5. Oldd meg az egyenleteket a megadott alaphalmazon!

a) $2\cos x - 1 = 0$, ahol $x \in [600^\circ, 1000^\circ]$

b) $2\sin x + 1 = 0$, ahol $x \in [600^\circ, 1000^\circ]$

c) $(2\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0$, ahol $x \in [-4\pi, 4\pi]$

d) $(2\cos x - 1) + (2\sin x + 1) = 0$, ahol $x \in [-4\pi, 4\pi]$

e) $\dfrac{2\cos x-1}{2\sin x+1}=0$, ahol $x\in\left[-4\pi,4\pi\right]$

Megoldás: (Az egyes egyenletek megoldáshalmazát *M*-mel jelöljük.)

a) $2\cos x-1=0$, ahol $x\in\left[600^\circ,1000^\circ\right]$.

$2\cos x-1=0 \iff \cos x=\dfrac{1}{2}$; $M=\left\{660^\circ;780^\circ\right\}$.

b) $2\sin x+1=0$, ahol $x\in\left[600^\circ,1000^\circ\right]$.

$2\sin x+1=0 \iff \sin x=-\dfrac{1}{2}$; $M=\left\{690^\circ;930^\circ\right\}$.

c) $(2\cos x-1)(2\sin x+1)=0$, ahol $x\in\left[-4\pi,4\pi\right]$.

$(2\cos x-1)(2\sin x+1)=0 \iff \cos x=\dfrac{1}{2}$ vagy $\sin x=-\dfrac{1}{2}$. Az adott alaphalmazon 16 megoldása van:

$x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, ahol $n\in\{-2;-1;0;1\}$, vagy $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, ahol $k\in\{-1;0;1;2\}$, vagy

$x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi m$, ahol $m\in\{-1;0;1;2\}$ vagy $x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi r$, ahol $r\in\{-2;-1;0;1\}$.

d) $(2\cos x-1)+(2\sin x+1)=0$, ahol $x\in\left[-4\pi,4\pi\right]$.

$(2\cos x-1)+(2\sin x+1)=0 \iff \cos x+\sin x=0 \iff \cos x=-\sin x$.

Az adott alaphalmazon 8 megoldása van:

$$M=\left\{-\frac{13\pi}{4};-\frac{9\pi}{4};-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{9\pi}{4};\frac{13\pi}{4}\right\}.$$

e) $\dfrac{2\cos x-1}{2\sin x+\sqrt{3}}=0$, ahol $x\in\left[-4\pi,4\pi\right]$.

$\dfrac{2\cos x-1}{2\sin x+\sqrt{3}}=0 \iff \cos x=\dfrac{1}{2}$ és $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $M=\left\{-\dfrac{11\pi}{3};-\dfrac{5\pi}{3};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{7\pi}{3}\right\}$.

6. Egy zsebszámológéppel csak a szögek szinuszát lehet kiszámítani, a többi szögfüggvényt nem. A gép még további négy műveletet képes végrehajtani. Az alábbiakban megadtunk néhány lehetőséget a négy műveletre.

Válaszd ki a megadott lehetőségek közül azt, amelyik esetben a négy megadott művelettel biztosan ki tudjuk számítani a géppel olyan tetszőleges szám koszinuszát, tangensét és kotangensét, amelyiknek mind a négy szögfüggvénye értelmezve van!

A: összeadás, szorzás, kivonás, reciprokképzés

B: négyzetgyökvonás, összeadás, kivonás, reciprokképzés

C: négyzetgyökvonás, szorzás, kivonás, reciprokképzés

D: négyzetgyökvonás, összeadás, szorzás, reciprokképzés

E: Az eddig megadott négy művelettel nem lehet kiszámítani.

Megoldás: A helyes választás: **C**.

$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ és $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, ha $x \neq n\cdot\dfrac{\pi}{2}$, ahol $n \in \mathbf{Z}$. Szükséges a négyzetgyökvonás művelete, így **A** nem megfelelő. Szükséges továbbá vagy a négyzetre emelés, vagy a szorzás művelete, ezért **B** nem megfelelő. A reciprokképzés és a szorzás műveletek egymás utáni végrehajtása az osztás műveletet „helyettesíti”, viszont az összeadás és kivonás műveletek közül csak a kivonás ismerete a jó, mert az összeadás mellett nem szerepel az ellentett képzése, így **D** nem megfelelő, viszont a **C**-ben szereplő négy művelettel a megadott alaphalmaz minden elemének mind a három szögfüggvénye kiszámítható.

(A $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$ is, hiszen $\cos x = 0 - \sqrt{1-\sin^2 x}$).

7. Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin x = \cos 0^\circ$; b) $\operatorname{tg} x\cdot(\cos x + 0{,}5) = 0$; c) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$.

Megoldás:

a) $\sin x = \cos 0^\circ \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

b) $\operatorname{tg}x\cdot(\cos x + 0{,}5) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x = 0$ vagy $\cos x = -0{,}5$ és $x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

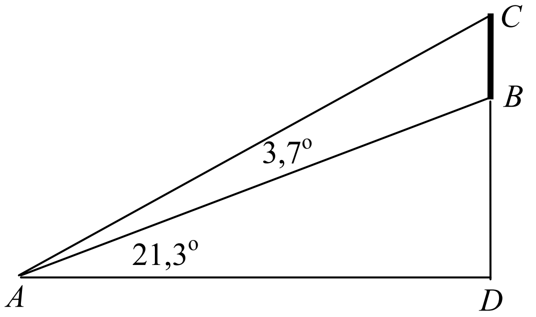
$x = n\pi$ vagy $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$ és $k \in \mathbf{Z}$.

c) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x - \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0$.

$x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

8. Egy 80 m hosszú lejtős út felső végén lévő templomot $3{,}7^\circ$-os szög alatt látjuk az út elejéről. A lejtő hajlásszöge $21{,}3^\circ$. Milyen magas a templom?

Megoldás:



Az ábra szerinti jelölést használva: Mivel $AB = 80$ m, az ADB derékszögű háromszögben $BD = 80\sin 21{,}3^\circ \approx 29{,}06$ és $AD = 80\cos 21{,}3^\circ \approx 74{,}54$.

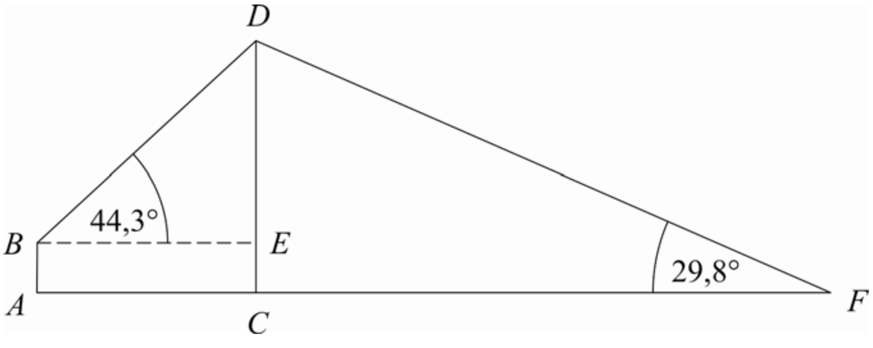
Az ADC derékszögű háromszögben $BC = x$ jelölés esetén

$DB + x = AD \cdot \cos 25^\circ \approx 67{,}55$. Így $x \approx 67{,}55 - 29{,}06 = 38{,}49$.

A templom kb. 38,5 méter magas.

9. Egy ház ablakából, a talajtól 2 m magasságból egy, a háztól 25 m távolságra lévő fa csúcsa $44{,}3^\circ$-os emelkedési szög alatt látszik. A ház alapját a fával összekötő egyenesen, a fa túloldalán egy kisfiú játszik a homokban, ahonnan a fa $29{,}8^\circ$ szög alatt látszik. Milyen távol van a kisfiú a háztól?

Megoldás:



Alkalmazzuk az ábra jelöléseit, és legyen továbbá $CF = x$.

A BED derékszögű háromszögben $DE = 25 \cdot \text{tg} 44{,}3^\circ \approx 24{,}4$, így $DC \approx 26{,}4$. A DCF derékszögű háromszögben $\text{tg} 29{,}8^\circ = \dfrac{DC}{x}$, és ebből $x = \dfrac{DC}{tg 29{,}8^\circ} \approx 46{,}1$. Így $AF \approx 71{,}1$.

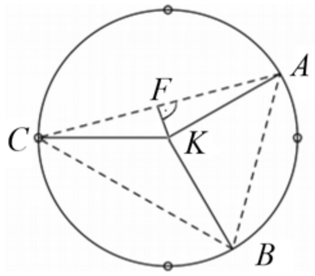
A kisfiú kb. 71 m-re van a háztól.

10. Egy 40 m sugarú, kör alakú park egy kerek órát jelenít meg. A 2 órát, az 5 órát és a 9 órát jelölő (A, B és C) körpontokból egy-egy egyenes út vezet a kör K középpontjába, továbbá e három pont közül bármelyik kettőt egyenes út köt össze.

a) Milyen messze van az AC út a kör középpontjától?

b) Számítsd ki méter pontossággal az $AB + BC + CA$ útvonal hosszát!

Megoldás:



a) Az $AKC_\angle = 150^\circ$, $BKA_\angle = 90^\circ$ és $BKC_\angle = 120^\circ$. Bocsássunk merőlegest a K pontból az AC húrra. A húr F felezőpontja, a K és az A pontok által meghatározott derékszögű háromszög átfogója 40 m, a K csúcsnál lévő hegyesszöge 75°-os.

$KF = 40 \cdot \cos 75^\circ \approx 10{,}35$.

Az AC út kb. 10,4 m távolságra van a kör középpontjától.

b) Az AKF derékszögű háromszögben $FA = 40 \cdot \sin 75^\circ \approx 38{,}64$. Így $AC \approx 77{,}28$.

Az AKB derékszögű háromszögben $AB = 2\sqrt{40} \approx 12{,}65$.

A BCK háromszögben a koszinusztételt alkalmazva

$BC^2 = 2 \cdot 40^2 - 2 \cdot 40^2 \cos 120^\circ = 3 \cdot 40^2$, így $BC = 40\sqrt{3} \approx 69{,}28$.

Tehát $AB + BC + CA \approx 159{,}21$.

A három útszakasz hosszának összege kb. 159 m.

11. Egy derékszögű háromszög területe 27 cm^2, továbbá ismerjük az α hegyesszög kotangensét: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$. Mekkorák a háromszög befogói?

Megoldás: Jelölje a háromszög befogóit a és b, továbbá az a oldallal szemközti szögét α.

Ekkor $ab = 54$ és $\frac{2}{3} = \frac{b}{a}$, azaz $b = \frac{2}{3} \cdot a$.

Az $\left.\begin{array}{l} ab = 54 \\ b = \frac{2}{3} \cdot a \end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldása: $a = 9$ és $b = 6$.

A háromszög befogói 9 cm és 6 cm hosszúak.

12. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{\left(2\cos^2 x-1\right)\left[\sin(2x-\pi)-1\right]}{\mathrm{tg}x-1}=0$$

Megoldás:

$$\frac{\left(2\cos^2 x-1\right)\left[\sin(2x-\pi)-1\right]}{\mathrm{tg}x-1}=0 \;\Leftrightarrow\; |\cos x|=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ és } \sin(2x-\pi)=1 \text{ és } \mathrm{tg}x\neq 1.$$

$|\cos x|=\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; x=\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}$, ahol $n\in\mathbf{Z}$. De a kapott szögek között a $\frac{\pi}{4}+k\pi$, ahol $k\in\mathbf{Z}$ alakban megadható szögek tangense 1, így $x=\frac{3\pi}{4}+n\pi$, ahol $n\in\mathbf{Z}$.

$\sin(2x-\pi)=1 \;\Leftrightarrow\; 2x-\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, ahol $k\in\mathbf{Z}$. Ebből $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, ahol $k\in\mathbf{Z}$.

Ezeknek a szögeknek a tangense nem 1.

Az egyenlet megoldásai: $x=\frac{3\pi}{4}+n\pi$, ahol $n\in\mathbf{Z}$.

13. Egy háromszög oldalai 2 cm, 3 cm és 4 cm hosszúak. Mekkora a legnagyobb szögének koszinusza?

Megoldás: Alkalmazzuk a háromszögre a koszinusztételt!

$4^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos\gamma \;\Leftrightarrow\; \cos\gamma=-0{,}25$. Mivel $0^\circ<\gamma<180^\circ$, az egyenlet egyetlen megoldása: $\gamma\approx104{,}48^\circ$.

A háromszög tompaszögű, a legnagyobb szöge kb. $104{,}48^\circ$.

14. Egy háromszög egyik oldala 3-szorosa egy másik oldalnak, s e két oldal által közrefogott szög 120°-os. A háromszög leghosszabb oldala hányszorosa a legrövidebbnek?

Megoldás: A háromszög leghosszabb oldala a 120°-os szöggel szemközti oldala. Jelöljük ezt az oldalt c-vel. A feladat szerint a másik két oldalt jelölhetjük a-val és $3a$-val. Alkalmazzuk a háromszögre a koszinusztételt!

$c^2=a^2+9a^2-6a^2\cos120^\circ \;\Leftrightarrow\; c^2=13a^2$. Ebből $c=\sqrt{13}\cdot a$.

A háromszög legrövidebb oldala a, így a leghosszabb oldal $\sqrt{13}$-szorosa a legrövidebbnek.

15. Az ABC háromszög oldalai $a = 5\,\text{cm}$, $b = 13$ cm és $c = 15\,\text{cm}$ hosszúak. Határozd meg a háromszög területét, belső szögeit, és a legrövidebb oldalához tartozó súlyvonalának hosszát!

Megoldás: Ha a háromszög területét a $T = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$ összefüggés segítségével akarjuk kiszámítani, szükségünk van az egyik szögének ismeretére. Alkalmazzuk a koszinusztételt a háromszög leghosszabb oldalára: $15^2 = 5^2 + 13^2 - 2\cdot 5\cdot 13\cdot\cos\gamma$. Ebből

$\cos\gamma = -\dfrac{31}{130} \approx -0{,}2385$, így $\gamma \approx 103{,}79^\circ$, és $\sin\gamma \approx 0{,}9712$. (Pontos értékkel számolva: $\sin\gamma = \dfrac{3\cdot\sqrt{1771}}{130}$.

A háromszög területe: $T \approx \dfrac{5\cdot 13\cdot 0{,}9712}{2} = 31{,}56$ (cm^2). (Pontos értéke: $T = \dfrac{3\sqrt{1771}}{2}$.)

A háromszög szögeinek kiszámításához alkalmazzuk a háromszögre a szinusztételt! A 13 cm hosszú oldallal szemközti szöget β-val jelölve: $\dfrac{\sin\beta}{\sin 103{,}79^\circ} = \dfrac{13}{15}$, ahonnan

$\sin\beta \approx 0{,}8417$, így $\beta \approx 57{,}32^\circ$.

A háromszög belső szögeinek mértéke kb. $103{,}79^\circ$, $57{,}32^\circ$ és $18{,}89^\circ$.

A legrövidebb oldalhoz tartozó s_a súlyvonal annak a háromszögnek a leghosszabb oldala, amelynek két oldala 2,5 cm és 13 cm, a közbezárt szögük pedig $\gamma \approx 103{,}79^\circ$. Koszinusztételt alkalmazva e háromszögben az s_a oldalra:

$s_a^2 = 2{,}5^2 + 13^2 - 65\cos 103{,}79^\circ$, ebből $s_a \approx 13{,}81$.

A háromszög legrövidebb oldalához tartozó súlyvonal hossza kb. 13,81 cm.

TUDÁSPRÓBA – X. Trigonometria

1. Egy hegyesszögű háromszögben szerkessz olyan félkört, melynek középpontja a háromszög egyik oldalán van, és amely érinti a háromszög másik két oldalát!

2. Döntsd el a derékszögű háromszögre vonatkozó állítások igazságtartalmát! Döntésedet indokold!

A: A befogók összegének négyzete egyenlő az átfogó négyzetével.

B: Magasságpontja a derékszög csúcsa.

C: A súlyvonalainak metszéspontja egyenlő távolságra van a háromszög oldalaitól.

D: Az egyik súlyvonalának hossza az egyik oldalhosszának felével egyenlő.

3. Rajzolj egy 3cm sugarú kört, és jelölj meg annak *K* középpontjától 5 cm távolságra egy *P* pontot!

a) Szerkeszd meg a kör *P* ponton átmenő érintőit! (Jelöld az érintési pontokat *E*-vel, illetve *G*-vel!)

b) Számítsd ki a *PE*, illetve a *PG* szakasz hosszát!

c) Számítsd ki az *EG* szakasz hosszát!

4. Derékszögű háromszöget egyik oldalának egyenesére tükrözve, az eredeti és a képháromszög egyesítésével olyan téglalapot kapunk, amelynek a területe 36 cm^2. Hány cm hosszú a háromszög legrövidebb oldala?

5. Az *ABCD* paralelogramma *BC* oldalának *E* pontjára teljesül a $BE : EC = 2 : 3$ arány.

a) Szerkeszd meg az ábrán látható paralelogramma E pontját!

b) Számítsd ki, hogy milyen arányban osztják egymást az *AE* és a *BD* szakaszok!

6. Egy gúlából az alaplapjával párhuzamos síkkal levágunk egy harmadakkora magasságú gúlát. Hányszorosa a visszamaradó csonkagúla térfogata a nagy gúláénak?

7. Egy egyenlőszárú háromszög alapja 6 cm, a szárhoz tartozó magassága 4,8 cm. Mekkorák a háromszög szögei?

A tudáspróba feladatainak megoldása és értékelése

1. Egy hegyesszögű háromszögben szerkessz olyan félkört, melynek középpontja a háromszög egyik oldalán van, és amely érinti a háromszög másik két oldalát!

Megoldás:

Ha a háromszög BC oldalán van a félkör középpontja,
mivel hegyesszögű a háromszög, a keresett félkör középpontja
egyenlő távolságra van az AB és AC oldalaktól. 1 pont
Így rajta van a BAC szög szögfelezőjén. 2 pont
A keresett félkör középpontja e szögfelező és a BC oldal metszéspontja. 1 pont
A félkör megszerkesztése. 2 pont

Összesen: 6 pont

2. Döntsd el a derékszögű háromszögre vonatkozó állítások igazságtartalmát! Döntésedet indokold!

A: A befogók összegének négyzete egyenlő az átfogó négyzetével.
B: Magasságpontja a derékszög csúcsa.
C: A súlyvonalainak metszéspontja egyenlő távolságra van a háromszög oldalaitól.
D: Az egyik súlyvonalának hossza az egyik oldalhosszának felével egyenlő.

Megoldás:

A: Hamis, mert ez azt jelentené, hogy a háromszög két oldalhosszának összege egyenlő a harmadik oldal hosszával, ami nem lehetséges. 2 pont

B: Igaz, mert egy-egy befogó egyenese a háromszög egy-egy magasságvonala, és a magasságvonalak egy pontban, a magasságpontban metszik egymást. 2 pont*

C: Hamis, mert a súlyvonalak metszéspontja a háromszög súlypontja, és az csak egyenlő oldalú háromszögnél esik egybe a belső szögfelezők metszéspontjával. 2 pont*

D: Igaz, mert az átfogóhoz tartozó súlyvonal a körülírt kör sugarával, az átfogó pedig e kör átmérőjével egyezik meg. 2 pont*

Összesen: 8 pont

Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha döntését a tanuló helyes ábrával indokolja.

3. Rajzolj egy 3cm sugarú kört, és jelölj meg annak *K* középpontjától 5 cm távolságra egy *P* pontot!

a) Szerkeszd meg a kör *P* ponton átmenő érintőit! (Jelöld az érintési pontokat *E*-vel, illetve *G*-ve!)

b) Számítsd ki a *PE*, illetve a *PG* szakasz hosszát!

c) Számítsd ki az *EG* szakasz hosszát!

Megoldás:

a) Mivel a keresett *E* (illetve *G*) pontból a *KP* szakasz derékszögben látszik, 1 pont

így mindkét pont rajta van a *KP* szakasz Thalész-körén 1 pont

A Thalész-kör megszerkesztése, a *PE* és *PG* érintőszakaszok megrajzolása. 1 pont

b) A *KPE* derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét alkalmazva:

$PE^2 + 3^2 = 5^2$. 1 pont

$PE = PG = 4$ cm. 1 pont

c) A *KP* és *EG* szakaszok metszéspontját *T*-vel jelölve, *ET* a *KPE* derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága. 1 pont

Alkalmazva a *KPE* háromszögre a befogótételt: $3^2 = KT \cdot 5$

(illetve $4^2 = PT \cdot 5$). 2 pont

$KT = \frac{9}{5}$, és így $PT = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$. 1 pont

Alkalmazva a *KPE* derékszögű háromszögre a magasságtételt:

$ET = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5}} = \frac{12}{5}$. 2 pont

$EG = 2 \cdot ET = \frac{24}{5} = 9{,}6$ (cm) 1 pont

Összesen: 12 pont

Megjegyzés: A c) kérdés megoldható úgy is, hogy a tanuló kiszámítja a *KPC* szöget szögfüggvénnyel (3 pont), az *EPG* szög az *EPK* szög 2-szerese (1 pont), és a *GPE* háromszög *EG* oldalára alkalmazza a koszinusztételt (2 pont), és abból jól számolja ki a kérdéses szakasz hosszát (1 pont).

4. Derékszögű háromszöget egyik oldalának egyenesére tükrözve, az eredeti és a képháromszög egyesítésével olyan téglalapot kapunk, amelynek a területe 36 cm^2. Hány cm hosszú a háromszög legrövidebb oldala?

Megoldás:

Az eredeti és a tükrözött háromszög egyesítése csak akkor alkot négyszöget, ha a tükörtengely az átfogó egyenese. 2 pont*

A négyszög két szemközti szöge derékszögű.
(A tengelyes tükrözés szögtartó.) 1 pont*

A négyszög másik két szöge csak úgy lehet derékszög, ha a háromszög hegyesszögei 45°-osak, mert a tengelyes tükrözés szögtartó. 3 pont*

A négyszög tehát csak négyzet lehet, melynek oldala 6 cm hosszú. 2 pont

Összesen: 8 pont

Megjegyzés: A *-gal jelölt pontok akkor is járnak, ha szöveggel nem fogalmazza meg, de a gondolat pl. a tanuló ábrájából kiderül.

5. Az *ABCD* paralelogramma *BC* oldalának *E* pontjára teljesül a $BE : EC = 2 : 3$ arány.

a) Szerkeszd meg a paralelogramma *E* pontját!

b) Számítsd ki, hogy milyen arányban osztják egymást az *AE* és a *BD* szakaszok!

Megoldás:

a) Az *E* pont helyes szerkesztése. 2 pont

b) Az *AE* és *BD* szakaszok metszéspontját *G*-vel jelölve, az *EGB* háromszög hasonló az *AGD* háromszöghöz, 1 pont

mert van egy csúcsszögpárjuk, és két váltószögpárjuk. 1 pont

Mivel $\frac{GE}{GA} = \frac{GB}{GD} = \frac{2}{5}$, a hasonlóság aránya $\frac{2}{5}$. 2 pont

Az *AE* és a *BD* szakaszok 2:5 arányban osztják egymást. 1 pont

Összesen: 7 pont

6. Egy gúlából az alaplapjával párhuzamos síkkal levágunk egy harmadakkora magasságú gúlát. Hányszorosa a visszamaradó csonkagúla térfogata a nagy gúláénak?

Megoldás:

A levágott gúla hasonló az eredeti gúlához, 1 pont

a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$. 2 pont

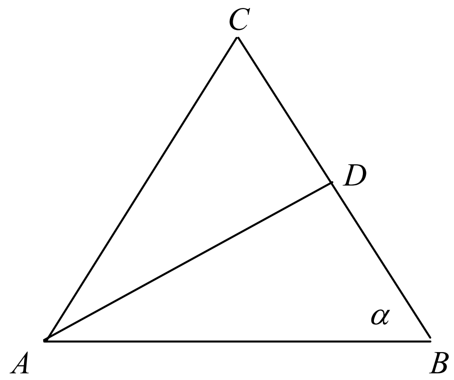
A kisgúla térfogata a nagy gúla térfogatának $\frac{1}{27}$-e. 3 pont

Így a visszamaradó csonkagúla térfogata a nagy gúla térfogatának $\frac{26}{27}$-szerese. 2 pont

Összesen: 5 pont

7. Egy egyenlőszárú háromszög alapja 6 cm, a szár-
hoz tartozó
magassága 4,8 cm. Mekkorák a háromszög szögei?

Megoldás:



Az ábra jelöléseit használva: $AB = 6$ m, $AD = 4{,}8$ m.

Az ABD derékszögű háromszögben: $\sin\alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{4{,}8}{6} = 0{,}8$, 2 pont

így $\alpha \approx 53{,}13^\circ$. 1 pont

A háromszög alapon fekvő szögei kb. $53{,}13^\circ$-osak, 1 pont

a szárszöge $73{,}74^\circ$-os. 1 pont

Összesen: 5 pont

Az elérhető maximális pontszám: 54 pont.

XI. GEOMETRIAI SZÁMOLÁSI FELADATOK

Módszertani megjegyzés: A foglalkozás feladatanyaga sík- és térgeometriai problémákat tartalmaz. A tanári mellékletben ismét szerepel tudáspróba.

1. Az A4-es papír méretei egészre kerekítve: 30 cm×21 cm. A lapot, az átlója mentén elvágjuk, így két egybevágó háromszöglapot kapunk. Az alábbi kérdések az egyik derékszögű háromszöglapra vonatkoznak.

a) Hogyan vágjuk el ezt a háromszöget, hogy két egyenlő területű háromszöglaphoz jussunk?

b) Hogyan és hol vágjuk el a háromszöget, hogy két hasonló háromszöglapot kapjunk? Mekkora a két keletkező háromszög hasonlóságának aránya?

c) A rövidebb oldalával párhuzamosan úgy szeretnénk elvágni a háromszöglapot, hogy két egyenlő területű laphoz jussunk. Hol vágjuk el? Milyen hosszú a metszésvonal?

d) A háromszöglapból levágunk egy hozzá hasonló, 35 cm^2 területű háromszöglapot. Hogyan és hol vágjuk el az eredeti háromszöglapot? Milyen hosszú a metszésvonal?

e) A háromszöglapból két vágással vágjuk ki a lehető legnagyobb területű négyzetet. Mekkora ennek a négyzetnek a területe?

f) A háromszöglapból kivágjuk a lehető legnagyobb területű kört. Mekkora ennek a körnek a sugara?

g) A háromszöglapból kivágunk egy olyan, lehető legnagyobb sugarú negyed körlapot, amelynek a középpontja a derékszög csúcsa. A kivágott lapot tekintsük egy kúp palástjának. Mekkora ennek a kúpnak a térfogata?

Megoldás: (Jelölés: Az eredeti háromszög csúcsai A, B és C, ahol C a derékszög csúcsa.

a) Ahhoz, hogy az ABC háromszöglap elvágása után két háromszöget kapjunk, a vágó egyenesnek az A, B és C csúcsok közül pontosan az egyiken kell áthaladnia. A keletkező két háromszögnek tehát lesz egy közös magassága, így ahhoz, hogy a két háromszög területe egyenlő legyen, a vágó egyenesnek feleznie kell a közös csúccsal szemközti oldalt.

Tehát a lapot háromféle módon vághatjuk el: az ABC háromszög súlyvonalai mentén.

b) Ahhoz, hogy a két háromszög hasonló legyen, szögeiknek páronként meg kell egyezni. Mivel az ABC háromszög derékszögű, a vágó egyenesnek át kell haladnia a háromszög derékszögének C csúcsán (másik csúcsán áthaladó egyenes egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget hozna létre), és a háromszög AB átfogóját merőlegesen kell metszenie, mert ellenkező esetben a keletkező két háromszög egyike tompaszögű, a másik hegyesszögű háromszög lenne.

Így az ABC háromszöget az átfogóhoz tartozó magassága mentén kell elvágni.

A két derékszögű háromszög hasonlóságának aránya a háromszögek átfogói hosszának arányával egyenlő: $\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$.

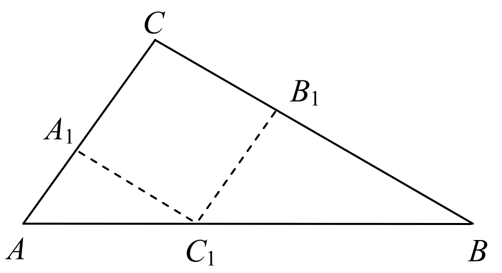
c) Az ABC háromszögből oldalával párhuzamos vágással egy, az eredeti háromszöghöz hasonló, fele akkora területű háromszöget kell levágnunk. Mivel hasonló sokszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, így a keletkező háromszög oldalai az eredeti háromszög megfelelő oldalának $\frac{1}{\sqrt{2}}$-szerese. Háromféleképpen hajthatjuk végre a vágást. Ha $AC=21\,\text{cm}$ és $BC=30\,\text{cm}$, akkor az AC-vel párhuzamos PQ egyenes által levágott PQB háromszög befogóinak hossza: $BQ=\frac{30}{\sqrt{2}}=15\sqrt{2}$ (cm) és $BP=\frac{21}{\sqrt{2}}=10{,}5\cdot\sqrt{2}$.

A PQ egyenes megszerkeszthető pl. annak alapján, hogy a $15\sqrt{2}$ cm hosszú szakasz a 15 cm oldalhosszúságú négyzet átlójának a hosszával egyenlő.

d) Az eredeti ABC háromszög területe: $T=\frac{21\cdot 30}{2}=315\,(\text{cm}^2)$. Az ABC háromszöghöz hasonló háromszög területe 35 cm^2. Tudjuk, hogy hasonló sokszögek területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő és mivel $\frac{315}{35}=9$, így a két háromszög hasonlóságának aránya 3.

Tehát háromféleképpen hajthatjuk végre a vágást, mégpedig az ABC háromszög egy-egy csúcsából induló oldalak csúcshoz közelebbi harmadolópontjain át. A metszővonalak hossza: az AB átfogóval párhuzamosé $\sqrt{149}$ cm, a $BC=30\,\text{cm}$ oldallal párhuzamosé 10 cm, és az $AC=21$ cm oldallal párhuzamosé 7 cm hosszú.

e) Két vágással úgy hozhatunk létre négyzetet, hogy a keletkező négyzet egyik csúcsa a háromszög derékszögének csúcsa, és két szomszédos csúcsa a CA és CB befogó egy-egy pontja. A területe pedig akkor lesz a lehető legnagyobb, ha a negyedik csúcsa a háromszög AB átfogójának pontja.



Ekkor pl. a $C_1\,BB_1$ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. A négyzet oldalát x-szel jelölve, $BB_1 = 30 - x$ és $B_1C_1 = x$, így $\frac{30-x}{x} = \frac{30}{21}$. Az egyenlet megoldása:

$x = \frac{210}{17} \approx 12{,}4$. A négyzet oldala kb. 12,4 cm hosszú.

f) A lehető legnagyobb sugarú kör (ezért a legnagyobb területű is) a háromszög beírt köre. A háromszög beírt körének r sugarát kiszámíthatjuk pl. $T_{ABC} = r \cdot s$ képlet alapján, ahol s a háromszög kerületének fele. Mivel $T_{ABC} = 315\ \text{cm}^2$, és

$s = \frac{21 + 30 + \sqrt{1341}}{2} \approx 43{,}8\,(\text{cm})$, így $r \approx 7{,}2$.

A háromszöglapból kivágható legnagyobb területű kör sugara kb. 7,2 cm hosszú.

g) A negyedkörív érinti a háromszög átfogóját, így annak sugara a háromszög átfogóhoz tartozó magasságával egyenlő. Mivel $T_{ABC} = 315$ és $T_{ABC} = \frac{\sqrt{1341} \cdot m_C}{2}$, ebből adódik, hogy a keresett magasság: $m_C = \frac{630}{\sqrt{1341}} \approx 17{,}2$. A negyedkörlap sugara tehát kb. 17,2 cm hosszú, és ezzel megadtuk a keletkező kúp alkotójának hosszát is. A negyedkör ívének hossza a kúp R sugarú alapkörének kerületével megegyező, ebből adódik, hogy $R = \frac{m_c}{4} \approx 4{,}3\ (\text{cm})$. A kúp m magassága Pitagorasz tételének alkalmazásával meghatározható: $m = \sqrt{m_c^2 - R^2} \approx 16{,}7\ (\text{cm})$.

A kúp térfogata: $V = \frac{R^2\pi \cdot m}{3} \approx 323{,}4\ (\text{cm}^3)$.

2. Az ABC háromszög területe 36 cm^2, AB oldalának hossza 6 cm. A háromszög az AB oldal felezőmerőlegeséből 4 cm hosszú szakaszt vág ki.

a) A C csúcsból húzott magasság talppontja hány cm-re van AB felezőpontjától?

b) Hány cm hosszú a háromszög AB oldalához tartozó súlyvonala?

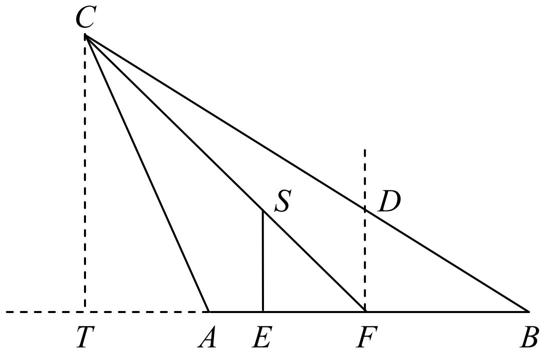
c)* Milyen hosszú az A csúcsból induló súlyvonal?

d)* Mekkora a háromszög másik két oldalának hossza?

Megoldás:

a) Az *AB* oldalhoz tartozó m_C magasság a háromszög területének ismeretében kiszámítható: $\frac{6m_C}{2} = 36$, így $m_c = 12\,(\text{cm})$. Ha az *ABC* háromszög *AB* oldalának *F* felezőpontján átmenő felezőmerőleges a *BC* oldalt *D*-ben metszi, és az m_C magasság talppontja *T*, akkor mivel *FBD* háromszög hasonló a *TBC* háromszöghöz, így $\frac{FD}{TC} = \frac{FB}{TB}$, azaz $\frac{4}{12} = \frac{3}{TB}$, és ebből $TB = 9\,(\text{cm})$. A keresett *TF* távolság tehát 6 cm. Ez azt is jelenti, hogy az m_C magasság *T* talppontja az *AB* szakasz külső pontja és így a *BAC* szög tompaszög.

b)



Az *FTC* derékszögű háromszög *FC* súlyvonalának hossza Pitagorasz tételének alkalmazásával kiszámítható: $CF = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}\ (\approx 13{,}5)$.

A háromszög *AB* oldalához tartozó súlyvonala kb. 13,5 cm hosszú.

c)* Az *AS* szakasz hossza a keresett súlyvonal hosszának $\frac{2}{3}$-szorosa. Az *AS* kiszámítható az *AES* derékszögű háromszögből, Pitagorasz tételének felhasználásával. Ehhez meg kell határoznunk az *ES* és *AE* oldalak hosszát. Mivel az *FES* háromszög hasonló az *FTC* háromszöghöz, és a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$, így $ES = \frac{CT}{3} = \frac{12}{3} = 4$ és $FE = \frac{FT}{3} = \frac{6}{3} = 2$. Tehát $AE = AF - FE = 3 - 2 = 1$.

Az *AES* derékszögű háromszögben: $AS = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$.

Az ABC háromszög A csúcsából induló súlyvonal hossza: $\frac{3}{2} \cdot AS = \frac{3\sqrt{17}}{2} \approx 6{,}2\ \text{cm}$.

d)* Az EFS derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} EFS_\angle = \frac{4}{2} = 2$, ebből az EFS hegyesszög: $EFS_\angle \approx 63{,}4^\circ$. Ezzel ismert az AFC háromszög két oldala és az általuk közrezárt szög. Az AC oldal hossza koszinusztétel alkalmazásával kiszámítható:

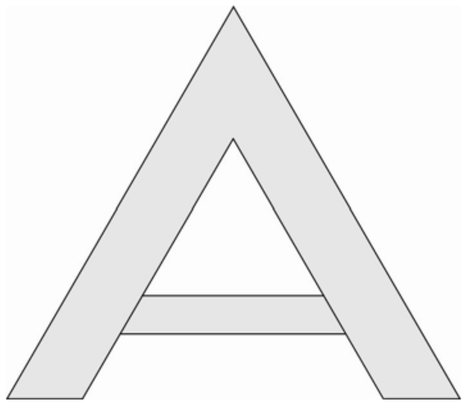
$AC^2 \approx 3^2 + (6\sqrt{5})^2 - 6 \cdot 6\sqrt{5}\cos 63{,}4^\circ \approx 153$, és így $0 < AC \approx 12{,}4\ \text{cm}$.

Hasonlóképpen BC a koszinusztétel alkalmazásával kiszámítható a BFC háromszögből:

$BC^2 \approx 3^2 + (6\sqrt{5})^2 + 6 \cdot 6\sqrt{5}\cos 63{,}4^\circ \approx 225$, így $BC \approx 15\ \text{cm}$.

3. Lacika, első osztályos kisiskolás rajzolt egy szép nagy A betűt. A betű szárai 60°-os szöget zárnak be egymással, és a külső szárak hossza 6 cm, a betű „talpai” 1 cm hosszúak. A szárakat összekötő vonalak közül az alsót a rövidebb szár talphoz közelebbi negyedelő pontjából kiindulva húzta meg, és a két összekötő szakasz távolsága 0,5 cm lett.

Lacika szeretné kifesteni az A betűjét. Hány cm^2 területet kell ehhez lefestenie?



Megoldás:

Az A betű külső szárai egy 6 cm oldalhosszúságú, szabályos háromszöget határoznak meg. Mivel az A betű „talpai” 1-1 cm hosszúak, a betű belső szárai is egy szabályos háromszöget határoznak meg, de ennek oldalhossza 4 cm. A betű szárai és „talpai” által meghatározott hatszög területét megkapjuk, ha a 6 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög terükletéből kivonjuk a 4 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög területét.

$$t_1 = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ (\approx 0{,}87\ \text{cm}^2).$$

A belső szárakat összekötő trapéz hegyesszögei 60°-osak, a hosszabbik alapja pedig $\frac{3}{4}$-szerese a szabályos háromszög 4 cm oldalhosszának, tehát 3 cm hosszú. A trapéz magassága a feladat szerint 0,5 cm. A trapéz rövidebb alapjának végpontjaiból meghúzva a trapéz magasságát, a kapott derékszögű háromszögben $\mathrm{ctg}60^\circ = \frac{x}{0,5}$, ebből

$x = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0,3$. A trapéz rövidebb c alapja: $c = 3 - 2x = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2,4$.

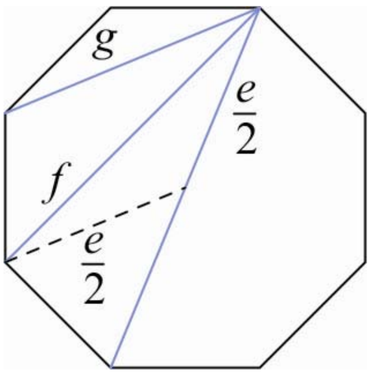
A trapéz területe: $t_2 = \frac{3 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 1,36\ (\mathrm{cm}^2)$.

$T = t_1 + t_2 \approx 2,23\ (\mathrm{cm}^2)$.

Lacika kb. 2 cm^2 területet fest be (ha sikerül csak a szándékának megfelelő síkidomot kifestenie).

4. Egy szabályos nyolcszög oldala 8 cm hosszú. Hány cm hosszúak a sokszög átlói? (Az eredményeket tizedre kerekítve add meg!)

Megoldás:



A szabályos nyolcszög belső szögei 135°-osak. A nyolcszög szimmetriaközéppontját egy oldal végpontjaival összekötve egy 45°-os szárszögű egyenlőszárú háromszöget kapunk, amelynek az alapja 8 cm hosszú. A háromszög szimmetriatengelye által létrehozott derékszögű háromszög átfogója a nyolcszög leghosszabb e átlójának felével egyenlő. Így $\frac{e}{2} = \frac{4}{\sin 22,5^\circ}$, ebből $e = \frac{8}{\sin 22,5^\circ} \approx 20,9$.

A leghosszabb átlója kb. 20,9 cm hosszú.

A nyolcszög két szomszédos oldala által meghatározott háromszög 135°-os szögével szemközti oldal a nyolcszög legrövidebb g átlója. Ennek hossza a háromszögből koszinusztétel alkalmazásával kiszámítható:

$g^2 = 2 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cos 135^\circ = 128 + 64\sqrt{2} \approx 218,5$, ebből $g = 8 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 14,8$.

A nyolcszög legrövidebb átlójának hossza kb. 14,8 cm.

Az e átló felezőpontját (a nyolcszög szimmetriaközéppontját) összekötve az f átló végpontjaival, a kapott egyenlőszárú háromszög szárszöge 135°-os, szárai $\frac{e}{2} \approx 10,45$ cm hosszúak.

A háromszög szárszögét felező szimmetriatengely által létrehozott derékszögű háromszögben: $\sin 67{,}5^\circ = \dfrac{\frac{f}{2}}{\frac{e}{2}} = \dfrac{f}{e}$, ahonnan $f = e\sin 67{,}5^\circ \approx 19{,}3$.

A nyolcszög f-fel megegyező hosszúságú átlói kb. 19,3 cm hosszúak.

5. Párizsban a Louvre udvarán látható üvegpiramis külső méretei: magassága 21,67 m, az alaplapját alkotó négyzet oldala 35,40 m hosszú. Hány m^2 területű a piramis felülete, ha eltekintünk a bejárat „beszögellésétől”?

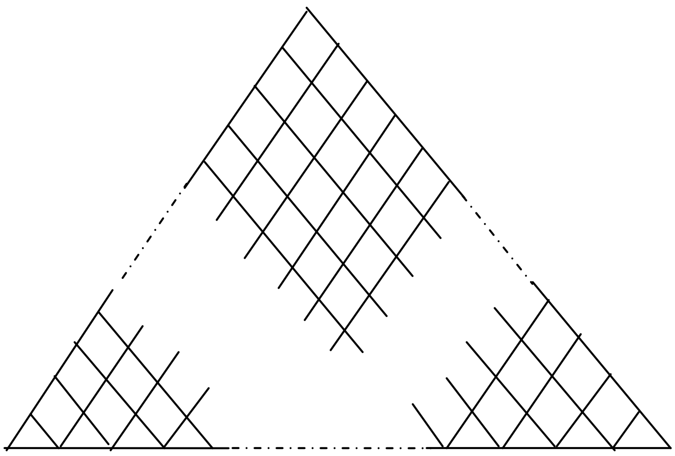
Megoldás:

A piramist tehát tekinthetjük egy *ABCD* négyzet alapú, egyenlő oldalélű gúlának. A gúla ötödik csúcsát *E*-vel jelöljük. A gúla *EK* magassága és az egyik alapél *F* felezőpontja által meghatározott *EKF* derékszögű háromszögben Pitagorasz tétel alkalmazásával kiszámíthatjuk az oldallap *EF* magasságát: $EF^2 = 21{,}67^2 + 17{,}7^2 \approx 782{,}9$, azaz $EF \approx 27{,}98$.

A gúla négy oldallapjának területösszege: $T \approx 4 \cdot \dfrac{35{,}40 \cdot 27{,}98}{2}$, azaz $T \approx 1980{,}98$.

A piramis felületének területe (a bejáratot is a gúla oldallap egy részének tekintve) kb. 1981 m^2.

6. Dan Brown: A Da Vinci-kód című könyve részint a Louvre-ban játszódik. A könyvben szerepel egy mondat, amely a piramis üvegtábláira vonatkozik. „…a piramist, Mitterrand elnök kifejezett kívánságára, pontosan 666 üvegtáblából építették – különös kívánság, amelyet széltében-hosszában tárgyaltak az összeesküvés-elméletek kedvelői, arra hivatkozva, hogy a 666 a Sátán száma.” *(GABO Kiadó, 2004, ford. Bori Erzsébet)*. A Louvre-múzeum tájékoztatása szerint a piramis összesen 673 üvegtáblából áll, 603 rombusz és 70 háromszög alakú, amelyek 2,1 cm vastagok. I.M. Pei tervezőirodája úgy nyilatkozott, hogy a piramisban lévő üveglapok száma 698.



Az ábra az üvegpiramis egyik oldallapjának lefedését mutatja be.

Az 5. feladat adatainak felhasználásával válaszold meg az alábbi kérdéseket!

a) Mekkora a rombusz alakú üvegtábla hegyesszöge?

b) Ha elfogadjuk a Louvre adatait, akkor az 5. feladat számolási eredményét felhasználva kb. hány m^2-nek adódik egy rombusz alakú üvegtábla területe?

Megoldás:

a) Az ábra szerinti borítás esetén a rombusz hegyesszöge a piramis oldallapjának szárszögével megegyező. A előző feladat szerint az oldallap alaphoz tartozó magassága: $EF \approx 27{,}98$; alapja 35,40. Így a keresett α szárszögre: $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \approx \frac{17{,}7}{27{,}98} \approx 0{,}6329$,

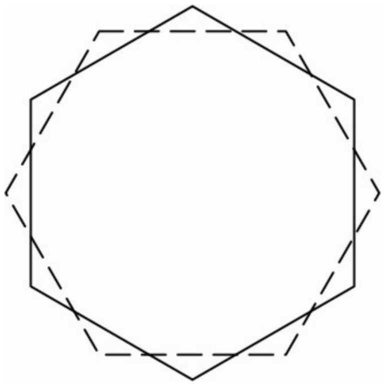
ahonnan $\alpha \approx 64{,}6^\circ$.

A rombusz alakú üvegtábla hegyesszöge kb. $64{,}6^\circ$-os.

b) Az ábra szerint a háromszög alakú üvegtábla a rombusz alakúnak a rövidebb átlója által létrehozott háromszöggel egybevágó. A 70 db háromszög alakú tábla területe megegyezik 35 db rombusz alakú területével. Ezért úgy számolhatunk (a Louvre adatainak és az előző feladat eredményét felhasználva), hogy 635 rombusz területének összege 1981 m^2-rel megegyező. Így egy rombusz területe kb. 3,12 m^2-nek adódik.

7. Egy 4 cm oldalhosszúságú szabályos hatszöget elforgatunk a szimmetriaközéppontja körül 30°-kal. Mekkora az oldalhossza és területe az eredeti és az elforgatott hatszög egyesítésével kapott csillagalakzatnak (huszonnégy oldalú konkáv sokszögnek)?

Megoldás:



A szimmetriaközéppont körüli forgatással a hatszög oldalának távolsága a forgatás középpontjától nem változott, tehát az ábrán szaggatott vonallal rajzolt hatszög oldalának távolsága a szimmetriaközépponttól szintén $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. A hatszögek csúcsai a szimmetriaközépponttól 4 cm távolságra vannak. A csillagalakzatban a „kiszögellő” háromszögek egybevágó egyenlőszárú háromszögek, amelyek alaphoz tartozó magassága $4-2\sqrt{3}$ hosszú. E háromszögek hegyesszöge 30°-os, így a száruk a csillagalakzat oldala: $\frac{4-2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$, azaz $8-4\sqrt{3} \approx 1{,}07$.

A csillagalakzat (a huszonnégy oldalú sokszög) minden oldalának hossza kb. 1,07 cm.

A csillagalakzat területe a hatszög területénél a hat kis háromszög területösszegével nagyobb. A hatszög területe: $T_6 = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}\ (\approx 41{,}57)$.

Egy kis háromszög területe: $t = \frac{(8-4\sqrt{3})^2 \sin 120^\circ}{2} = 28\sqrt{3} - 48 \approx 0{,}497$.

A hat kis háromszög területe összesen: $168\sqrt{3} - 288 \approx 2{,}99$.

A csillagalakzat területe: $24\sqrt{3} + (168\sqrt{3} - 288) = 192\sqrt{3} - 288 \approx 44{,}55\ (\text{cm}^2)$.

TUDÁSPRÓBA – XI. Geometriai számolási feladatok

1. Az egységoldalú négyzet átellenes csúcsai *A* és *C*. A *C*-ből induló oldalak *C*-hez legközelebbi ötödölő pontjai: *E, F* . Az *AEF* háromszög területe:

A: $\frac{\sqrt{6}}{11}$; **B:** $\frac{\sqrt{2}}{10}$; **C:** $0{,}18$; **D:** $\frac{11}{60}$.

2. Ha egy négyszöglapot egyetlen egyenes vágással három háromszöglappá darabolhatunk, akkor a négyszögre biztosan nem igaz, hogy

A: átlói egyenlő hosszúak; **B:** van egyenlő hosszúságú oldalpárja;

C: van egyenlő nagyságú szögpárja; **D:** szemközti belső szögeinek összege 180°.

3. Egy derékszögű háromszög befogója háromszorosa e befogó átfogóra eső merőleges vetületének. A háromszög átfogóhoz tartozó magassága 4 egység. Hány egység hosszú a háromszög átfogója?

A: $7\sqrt{2}$; **B:** $9{,}5\sqrt{2}$; **C:** $9\sqrt{2}$; **D:** $8\sqrt{2}$.

4. A háromszög egyik szöge 120°, a közrefogó oldalak aránya 1:2. A háromszög leghosszabb oldala hányszorosa a legrövidebb oldalának?

A: $\sqrt{3}$; **B:** $\sqrt{7}$; **C:** $\sqrt{5}$; **D:** $\sqrt{2}$.

5. Egy tömör kockát elvágunk egy olyan síkkal, amely illeszkedik a kocka egyik csúcsából induló él felezőpontjára, továbbá e csúcsból induló másik két él nem közös végpontjaira. Az így levágott test felszíne hányszorosa a visszamaradó test felszínének?

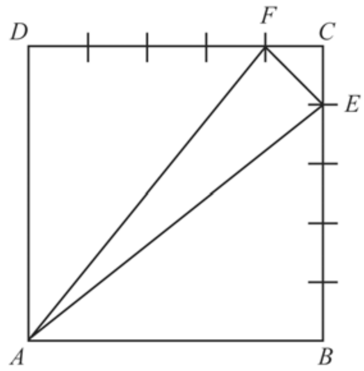
A: $\frac{4+\sqrt{6}}{20}$; **B:** $\frac{1+\sqrt{6}}{5}$; **C:** $\frac{4+\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}$; **D:** $\frac{1}{5}$.

A tudáspróba feladatainak megoldása

1. Az egységoldalú négyzet átellenes csúcsai *A* és *C*. A *C*-ből induló oldalak *C*-hez legközelebbi ötödölő pontjai: *E, F* . Az *AEF* háromszög területe:

A: $\frac{\sqrt{6}}{11}$; **B:** $\frac{\sqrt{2}}{10}$; **<u>C:</u>** $0{,}18$; **D:** $\frac{11}{60}$.

Megoldás:



Az *ABE* és *ADF* derékszögű háromszögek egybevágóak, területük: $\frac{2}{5}$ területegység. Az *ECF* derékszögű háromszög területe: $\frac{1}{50}$ területegység.

Az *AEF* háromszög területe: $1-2\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{50}=\frac{9}{50}=0{,}18$.

2. Ha egy négyszöglapot egyetlen egyenes vágással három háromszöglappá darabolhatunk, akkor a négyszögre <u>biztosan nem igaz</u>, hogy

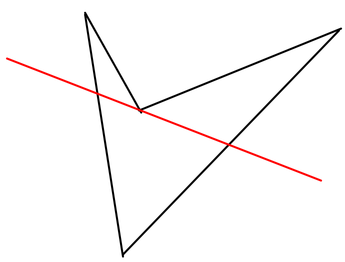
A: átlói egyenlő hosszúak; **B:** van egyenlő hosszúságú oldalpárja;

C: van egyenlő nagyságú szögpárja; **<u>D:</u>** szemközti belső szögeinek összege 180°.

Megoldás: A négyszöglap nem lehet konvex, mert a konvex négyszög csak

- két háromszögre (az átlója mentén), vagy
- egy háromszögre és egy négyszögre (egy csúcsán és egy ezt nem tartalmazó oldal belső pontján átmenő egyenes), vagy
- egy háromszögre és egy ötszögre (két szomszédos oldal belső pontján átmenő egyenes) vagy
- két négyszögre (szemközti oldalak belső pontján átmenő egyenes) vágható szét egyetlen vágással.

A négyszög tehát csak konkáv lehet. Konkáv négyszög szétvágható egyetlen vágással három háromszögre:



3. Egy derékszögű háromszög befogója háromszorosa e befogó átfogóra eső merőleges vetületének. A háromszög átfogóhoz tartozó magassága 4 egység. Hány egység hosszú a háromszög átfogója?

A: $7\sqrt{2}$; **B:** $9{,}5\sqrt{2}$; **C:** $9\sqrt{2}$; **D:** $8\sqrt{2}$.

Megoldás: Ha a befogó hosszát $3p$, ennek átfogóra eső merőleges vetületének hosszát p jelöli, akkor $16+p^2=9p^2$, azaz $p=\sqrt{2}$. A c átfogó hossza pl. a befogótétel alkalmazásával meghatározható: $9p^2=pc$, ebből $c=9p$, azaz $c=9\sqrt{2}$.

4. A háromszög egyik szöge $120°$, a közrefogó oldalak aránya 1:2. A háromszög leghosszabb oldala hányszorosa a legrövidebb oldalának?

A: $\sqrt{3}$; **B:** $\sqrt{7}$; **C:** $\sqrt{5}$; **D:** $\sqrt{2}$.

Megoldás: A $120°$-os szöget közrefogó oldalak hosszát jelölhetjük a-val és $2a$-val. Ekkor a $120°$-os szöggel szemközti c oldalra $c^2=5a^2-4a^2\cos 120°$, azaz $c^2=7a^2$ teljesül. Ebből adódik, hogy $c=\sqrt{7}a$.

5. Egy tömör kockát elvágunk egy olyan síkkal, amely illeszkedik a kocka egyik csúcsából induló él felezőpontjára, továbbá e csúcsból induló másik két él nem közös végpontjaira. Az így levágott test felszíne hányszorosa a visszamaradó test felszínének?

A: $\frac{4+\sqrt{6}}{20+\sqrt{6}}$; **B:** $\frac{1+\sqrt{6}}{5}$; **C:** $\frac{4+\sqrt{6}}{20}$; **D:** $\frac{1}{5}$.

Megoldás: A levágott testet határoló három derékszögű háromszög területének összege:

$\frac{a^2}{2}+2\cdot\frac{a^2}{4}$, azaz a^2, ahol a jelöli a kocka élének hosszát.

A gúla negyedik lapja olyan egyenlőszárú háromszög, amelynek alapja $a\sqrt{2}$, a hozzátartozó m magasság pedig az $a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ és $\frac{a}{2}$ befogójú derékszögű háromszög átfogója. Így m hossza Pitagorasz tételével kiszámítható: $m^2=\left(a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$, azaz $m^2=\frac{3a^2}{4}$.

Ebből $m=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$.

A gúla negyedik lapjának területe tehát: $a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$, azaz $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Így a levágott gúla felszíne: $a^2+\frac{a^2\sqrt{6}}{4}=\frac{a^2(4+\sqrt{6})}{4}$.

A kockából visszamaradó test felszíne: $6a^2-a^2+\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$, azaz $\frac{a^2(20+\sqrt{6})}{4}$.

A levágott és a visszamaradó test felszínének aránya: $\frac{4+\sqrt{6}}{20+\sqrt{6}}$.

XII. KOORDINÁTAGEOMETRIA

Módszertani megjegyzés: A foglalkozás elején célszerű átismételni a témakör fogalmait.

1. Add meg az $e: 3x-2y+5=0$ egyenletű egyenes három pontját és három normálvektorát!

Megoldás: $e: y=\frac{3x+5}{2}$ egyenes pontjai pl. $P_1(1;4)$, $P_2(-3;-2)$, $P_3\left(0;\frac{5}{2}\right)$.

Normálvektora pl. $\mathbf{n}_1$ (3; –2), $\mathbf{n}_2$ (–3; 2), $\mathbf{n}_3$ (6; –4).

2. Add meg az $\frac{x-2y}{3}=\frac{x+3}{4}$ egyenletű egyenes két pontját, egy vektort, amely merőleges az egyenesre, és egy vele párhuzamos vektort! Határozd meg az egyenes iránytangensét! Számítsd ki a kiválasztott két pont távolságát!

Megoldás: $\frac{x-2y}{3}=\frac{x+3}{4} \Leftrightarrow x-8y=9$. Az egyenesre merőleges vektor pl. $\mathbf{n}$ (1; 8), az egyenessel párhuzamos vektor pl. $\mathbf{v}$ (8; 1). Az egyenes iránytangense $m=\frac{1}{8}$.

3. Írd fel a $P(-2;-5)$ ponton átmenő, és az $\overrightarrow{AB}(3;-1)$ vektorra merőleges egyenes egyenletét!

Megoldás: $3x-y=-1$.

4. Írd fel az $e: x-3y=4$ egyenletű egyenessel párhuzamos, és az $F(4;0)$ ponton áthaladó *f* egyenes egyenletét!

Megoldás: $\mathbf{n}_e$(1; –3), és az *f* egyenes párhuzamos az *e* egyenessel, így az *f* egyik normálvektora $\mathbf{n}_f$(1; –3), egyik pontja pedig az $F(4;0)$ pont.

Az *f* egyenes egyenlete: $x-3y=4$.

5. Írd fel az $A(-1;2)$ és $B(3;4)$ pontokon átmenő *g* egyenes egyenletét, továbbá a $C(-3;11)$ ponton átmenő, a *g* egyenesre merőleges *f* egyenes egyenletét!.

a) Számítsd ki a két egyenes *F* metszéspontjának koordinátáit!

b) Milyen arányban osztja az *F* pont az *AB* szakaszt?

c) Határozd meg annak a ponthalmaznak az egyenletét, amelynek bármelyik pontjából az *AB* szakasz derékszögben látszik!

d) Mekkora területű háromszöget határoz meg az *x* tengely, a *g* egyenes és az *f* egyenes?

Megoldás: Mivel $\overrightarrow{AB}(4;2)$, így a g egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}_g(-1;\ 2)$, az egyenlete $g: -x+2y=5$. A C ponton átmenő, g egyenesre merőleges f egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}_f(2;\ 1)$, az egyenlete $f: 2x+y=5$.

a) A két egyenes metszéspontja: $F(1;3)$.

b) Mivel $\frac{-1+3}{2}=1$ és $\frac{2+4}{2}=3$, ezért az F pont az AB szakasz felezőpontja, így 1:1 arányban osztja az AB szakaszt. (Másként: $AF=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$ és $BF=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$.)

c) A keresett ponthalmaz az AB szakasz Thalész-köre, amelynek egyenlete $(x-1)^2+(y-3)^2=5$, ahol $x\neq -1$, illetve $x\neq 3$.

d) A g egyenes az x tengelyt $G(-5;0)$ pontban, az f egyenes $E\left(\frac{5}{2};0\right)$ pontban metszi. Mivel $GE=\frac{15}{2}$, és az EG oldalhoz tartozó magasság hossza 3, így az EFG háromszög területe $11{,}25$ területegység.

6. Igazold, hogy a $P(-8;3)$, $Q(692\,;503)$, $R(192\,;303)$ és $S(492\,;203)$ pontok egy paralelogramma csúcspontjai!

Megoldás: Mivel $\overrightarrow{PS}(500;200)$ és $\overrightarrow{RQ}(500;200)$, így a PS és RQ szakaszok egyenlő hosszúak, és ha a négy pont nem esik egy egyenesre, akkor párhuzamosak is. A PS egyenes egyenlete: $-2x+5y=31$, és az R pont nincs rajta ezen az egyenesen, tehát a két szakasz párhuzamos, és így a $PSQR$ négyszög paralelogramma. (Másként: A PQ szakasz felezőpontja $K(342;253)$, az RS szakasz felezőpontjának a koordinátái is $(342;253)$, tehát ha a 4 pont nem esik egy egyenesre, akkor a négyszög középpontosan szimmetrikus, ezért paralelogramma.

7. Számítsd ki az $x^2+y^2-6x-4y-16=0$ egyenletű kör x tengelyen lévő A és B pontjának koordinátáit!

a) Határozd meg az ABC háromszög M magasságpontjának koordinátáit, ahol $C(1\,;7)$!

b) Hol metszi az AB szakasz Thalész-köre az ABC háromszög BC oldalegyenesét?

c) Az ABC háromszög körülírt köre a háromszög A csúcsán átmenő m_a magasságvonalát a D pontban, a C csúcsán átmenő m_c magasságvonalát pedig az E pontban metszi. Igazold koordinátageometriai eszközökkel, hogy a D és E pontok egyenlő távolságra vannak a háromszög B csúcsától!

d)* Számítsd ki az ABC háromszög A csúcsából induló magasság T_a talppontjának, és a B csúcsából induló magasság T_b talppontjának koordinátáit! Igazold, hogy a T_aT_b szakasz merőleges a háromszög körülírt körének középpontját a háromszög C csúcsával összekötő sugárra!

Megoldás:

Az $y=0$ és $x^2+y^2-6x-4y-16=0$ egyenletrendszer megoldásait keressük. Az $x^2-6x-16=0$ egyenlet megoldásai: -2 és 8. Legyen $A(-2;0)$ és $B(8;0)$.

a) A C csúcson át haladó magasságvonal párhuzamos az y tengellyel, az egyenlete $x=1$. Mivel $\overrightarrow{BC}(-7;7)$, így az $A(-2;0)$ csúcson átmenő m_a magasságvonal egyik normálvektora **n**(–1; 1), az egyenlete $m_a: -x+y=2$.

Az $x=1$ és $-x+y=2$ egyenletrendszer megoldása $(1;3)$, és mivel a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást, az $M(1;3)$ pont a háromszög magasságpontja.

b) Mivel $\overrightarrow{BC}(-7;7)$, a BC egyenes egyik normálvektora **n**(1; 1), az egyenlete pedig $x+y=8$. Az AB szakasz Thalész-körének középpontja $F(3;0)$, sugara 5, az egyenlete: $(x-3)^2+y^2=25$, ahol $x\neq -2$ és $x\neq 8$. Az $(x-3)^2+y^2=25$ és $x+y=8$ egyenletrendszer, ahol $x\neq -2$ és $x\neq 8$ megoldását keressük.

Behelyettesítő módszerrel megoldva $(x-3)^2+(8-x)^2=25 \Leftrightarrow x^2-11x+24=0$.
$x=8$ vagy $x=3$. Mivel $x\neq 8$, az egyenletrendszer megoldása a $(3;5)$ számpár. Az AB szakasz Thalész-köre a BC egyenest a $T_a(3;5)$ pontban metszi.

(Másként: Thalész tétele szerint a keresett pontból az AB szakasz derékszögben látszik, így a keresett T_a pont az ABC háromszög A csúcsából húzott magasság talppontja. Az $A(-2;0)$ csúcson átmenő m_a magasságvonal egyenlete $m_a: -x+y=2$, a BC egyenes egyenlete $x+y=8$. A két egyenes metszéspontja $T_a(3;5)$.

c) Mivel a $C(1\,;7)$ pontot megadó számpár megoldása az adott,

$x^2+y^2-6x-4y-16=0$ egyenletnek, ezért az $x^2+y^2-6x-4y-16=0 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y-2)^2=29$ egyenlet az ABC háromszög körülírt körének egyenlete. Az

$m_a: -x+y=2$ egyenes és a kör D metszéspontjának koordinátái az

$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-6x-4y-16=0 \\ -x+y=2 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása.

Az $x^2+(x+2)^2-6x-4(x+2)-16=0$, azaz $x^2-3x-10=0$ egyenlet megoldásai: 5, illetve -2. A D pont koordinátái: $(5;7)$. Az m_c magasságvonal egyenlete $x=1$, így ennek a körülírt körrel való E metszéspontja $E(1;-3)$.

$BD=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{58}$ és $EB=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{58}$, tehát valóban $DB=EB$.

d)* Már kiszámítottuk a $T_a(3;5)$ pont koordinátáit. Mivel $\overrightarrow{AC}(3;7)$, az m_b magasságvonal egyenlete: $3x+7y=24$.

Az AC oldalegyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}(7;-3)$, az egyenlete $7x-3y=-14$.

Az m_b magasságvonal és az AC oldalegyenes metszéspontjának koordinátái, a

$3x+7y=24$ és $7x-3y=-14$ egyenletrendszer megoldása: $\left(-\frac{13}{29};\frac{105}{29}\right)$, így

$T_b\left(-\frac{13}{29};\frac{105}{29}\right)$.

A KC és T_bT_a szakaszok merőlegességét a vektorok skaláris szorzatának felhasználásával mutatjuk meg. $\overrightarrow{KC}(-2;5)$ és $\overrightarrow{T_bT_a}\left(\frac{100}{29};\frac{40}{29}\right)$, és mivel

$\overrightarrow{T_bT_a}\cdot\overrightarrow{KC}=-\frac{200}{29}+\frac{200}{29}=0$, a két vektor, és így a két szakasz valóban merőleges egymásra.

8. Az ABC háromszög C csúcsa az y tengelynek pontja, és $A(-2;3)$ továbbá $B(0\,;-3)$. A háromszög körülírt körének egyenlete $x^2+y^2+8x+2y-3=0$.

a) Határozd meg a háromszög oldalfelező merőlegesei metszéspontjának koordinátáit!

b) Add meg a C csúcs koordinátáit!

c) Számítsd ki a háromszög súlypontjának koordinátáit!

d) Hány területegység a háromszög területe?

e) Számítsd ki a körülírt kör A és B pontjában megrajzolt érintők E metszéspontjának koordinátáit!

Megoldás:

a) A háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja a háromszög körülírt körének középpontja, így mivel $x^2+y^2+8x+2y-3=0 \;\Leftrightarrow\; (x+4)^2+(y+1)^2=20$, a keresett K pont koordinátái: $K(-4;-1)$.

b) Kereshetjük a C pont koordinátáit $C(0;c)$ alakban. Ekkor $c^2+2c-3=0$. A másodfokú egyenlet megoldásai: 1 és -3. Mivel a $(0;-3)$ pont a háromszög B csúcsának koordinátái, így egyetlen ilyen ABC háromszög van, és $C(0;1)$.

c) A háromszög súlypontjának koordinátái: $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

d) Mivel a háromszög BC oldalának hossza 3 egység, a hozzá tartozó magasság pedig 2 egység hosszú, a háromszög területe 3 területegység.

e) Az A pontban megrajzolt e érintő egyenlete: $\overrightarrow{KA}(2;4)$, így $\mathbf{n}_e(1;2)$, az egyenlete $e: x+2y=4$.

A B pontban megrajzolt f érintő egyenlete: $\overrightarrow{KB}(4;-1)$, így $\mathbf{n}_f(4;-1)$, az egyenlete $f: 4x-y=2$.

A két egyenes metszéspontja $E\left(\frac{8}{9};\frac{14}{9}\right)$.

9. A $P(-1,\ 0)$ pontból az $x^2+y^2-10x+2y+10=0$ egyenletű körhöz milyen hosszú érintőszakasz húzható?

Megoldás: A P pontból húzott érintő, az érintési pontba húzott sugár, és a P pontot a kör K középpontjával összekötő egyenes olyan derékszögű háromszöget határoz meg, amelynek átfogója a KP szakasz. Mivel $x^2+y^2-10x+2y+10=0 \;\Leftrightarrow$ $(x-5)^2+(y+1)^2=16$, így $K(5;-1)$, és a kör sugara 4 egység hosszú. A $\overrightarrow{KP}(-6;1)$, és ennek a vektornak a hossza $KP=\sqrt{37}$. Pitagorasz tételét alkalmazva, az érintőszakasz hossza $\sqrt{21}$ egység.

10. Egy háromszög egyik csúcsa $A(-3;-1)$. A C csúcsból induló m_c magasságvonal egyenlete $2x+y=3$, és az ugyanonnan induló s_c súlyvonal egyenlete $x-y=1$. Számítsd ki a hiányzó két csúcspont koordinátáit!

Megoldás: A háromszög C csúcsa az m_c magasságvonal és az s_c súlyvonal metszéspontja, koordinátái a két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása: $C\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$. Az AB oldalegyenes merőleges az m_c magasságvonalra, és mivel ennek egyik normálvektora $\mathbf{n}_{m_c}(2;1)$ az AB egyenes egyik normálvektora $\mathbf{n}_{AB}(-1;2)$. Az AB egyenes egyenlete: $-x+2y=1$. Az AB egyenes és az s_c súlyvonal F metszéspontja az AB szakasz felezőpontja. Az $\left.\begin{array}{r}-x+2y=1\\ x-y=1\end{array}\right\}$ egyenletrendszer megoldása, azaz az F pont koordinátái $F(2;3)$. A keresett $B(b_1;b_2)$ pont az A pont F pontra vonatkozó tükörképe, így $2=\frac{-3+b_1}{2}$ és $3=\frac{-1+b_2}{2}$. Ebből $B(7;6)$.

11. Egy derékszögű háromszög átfogójának végpontjai: $A(-2;2)$ és $B(6;4)$. Az egyik befogót tartalmazó egyenes egyenlete $x+y=10$. Számítsd ki az átfogóhoz tartozó magasság hosszát!

Megoldás: A B pont rajta van az adott egyenletű egyenesen. Az ABC háromszög C csúcsa is ennek az egyenesnek pontja, és AC merőleges erre az egyenesre. Az AC egyenes egyenlete: $x-y=-4$. Az $x+y=10$ és $x-y=-4$ egyenletű egyenesek metszéspontja $C(3;7)$.

Az átfogóhoz tartozó magasság hossza kiszámítható pl. a háromszög területének ismeretében: $AC=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, így a háromszög területe 15 területegység, és mivel $AB=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$, az m_c magasság hosszára fennáll a $\frac{2\sqrt{17}\cdot m_c}{2}=15$. Ebből $m_c=\frac{15}{\sqrt{17}}=\frac{15\sqrt{17}}{17}$. A keresett magasság hossza $\frac{15\sqrt{17}}{17}$ egység.

XIII. STATISZTIKA

Módszertani megjegyzés: A statisztikai feladatok megoldása – feltéve, hogy a feladatban szereplő adatok valódiak – sok új információhoz juttathatja a tanulókat. A megoldásnak sokszor elengedhetetlen része a sok számolás, de ez sem felesleges, hiszen eközben talán jobban elmélyül a tanulóban a kérdéses mennyiség kiszámítási módja. A statisztikai feladatok esetében ismét előtérbe kerül a szövegértés. A tanulók gyakran figyelmetlenül olvassák el a feladat szövegét, és nem azt a mennyiséget számolják ki, ami a kérdésben előfordult.

Éppen a sok számolás miatt a feladatok megoldása eléggé időigényes. Ha szükséges, további feladat bőségesen található az utóbbi években megjelent matematika feladatgyűjteményekben.

Gondot szokott okozni a tanulóknak, hogy az eredményt milyen pontossággal adják meg. A statisztikai feladatok különösen alkalmasak ennek a problémának a feltárására, és megbeszélésére. Szerencsére az érettségi írásbeli feladatok esetében sokszor már beleírják a feladat szövegébe, hogy a tanulók az eredményt hány értékes jegyre kerekítve adják meg.

(Az 1., 3., 4. és 6. feladatban a Központi Statisztikai Hivatal (www.ksh.hu) adatait tüntettük fel.)

1. Az alábbi táblázatban Magyarország népességére vonatkozó adatok olvashatók.

Év	A népesség száma	Ebből férfi	Ebből nő	A házasságkötések száma	Az élveszületések száma
1949	9 204 799	4 423 420	4 781 379	107 820	190 398
1960	9 961 044	4 804 043	5 157 001	88 566	146 461
1970	10 322 099	5 003 651	5 318 448	96 612	151 819
1980	10 709 463	5 188 709	5 520 754	80 331	148 673
1990	10 374 823	4 984 904	5 389 919	66 405	125 679
2001	10 200 298	4 851 012	5 349 286	43 583	97 047
2002	10 174 853	4 836 980	5 337 873	46 008	96 804
2003	10 142 362	4 818 456	5 323 906	45 398	94 647
2004	10 116 742	4 804 113	5 312 629	43 791	95 137
2005	10 097 549	4 793 115	5 304 434	44 234	97 496
2006	10 076 581	4 784 579	5 292 002	44 500	99 850

a) A táblázatban feltüntetett évek közül melyikben volt a legnagyobb, illetve legkisebb a népesség száma?

b) A XXI. század első hat évében évente átlag hány házasságot kötöttek, és átlag hány gyerek született élve?

c) A táblázatban feltüntetett évek mindegyikében számítsd ki, hogy a férfiak hány százaléka kötött házasságot! Melyik évben volt ez az arány a lehető legnagyobb?

d) Számítsd ki a nők és férfiak számarányának átlagát!

e) Add meg ezresekre kerekítve az élveszületések számát, és az így kapott adatokat ábrázold oszlopdiagramon!

Megoldás:

a) A népesség száma legnagyobb 1980-ban volt, a legkisebb pedig 1949-ben.

b) Évente átlag (egészre kerekítve) 44 586 házasságot kötöttek és 96 830 gyerek született élve.

c)

Év	Ebből férfi	A házasságkötések száma	%
1949	4 423 420	107 820	2,44
1960	4 804 043	88 566	1,84
1970	5 003 651	96 612	1,93
1980	5 188 709	80 331	1,55
1990	4 984 904	66 405	1,33
2001	4 851 012	43 583	0,90
2002	4 836 980	46 008	0,95
2003	4 818 456	45 398	0,94
2004	4 804 113	43 791	0,91
2005	4 793 115	44 234	0,92
2006	4 784 579	44 500	0,93

1949-ben volt legnagyobb a kérdezett arány.

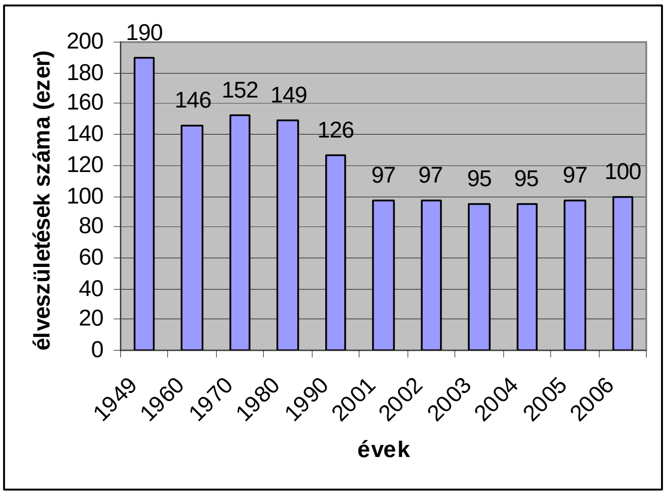
d)

Ebből férfi	Ebből nő	Nők száma/férfiak száma
4 423 420	4 781 379	1,0809
4 804 043	5 157 001	1,0735
5 003 651	5 318 448	1,0629
5 188 709	5 520 754	1,0640
4 984 904	5 389 919	1,0813
4 851 012	5 349 286	1,1677
4 836 980	5 337 873	1,1036
4 818 456	5 323 906	1,1049
4 804 113	5 312 629	1,1059
4 793 115	5 304 434	1,1067
4 784 579	5 292 002	1,1061

A nők és férfiak számarányának átlaga: 1,0961.

e)

Év	Az élveszületések száma	Ezresekre kerekítve
1949	190 398	190 000
1960	146 461	146 000
1970	151 819	152 000
1980	148 673	149 000
1990	125 679	126 000
2001	97 047	97 000
2002	96 804	97 000
2003	94 647	95 000
2004	95 137	95 000
2005	97 496	97 000
2006	99 850	100 000



2. A táblázatban egy 12-edikes csoport matematika dolgozatának eredményei láthatók.

A. Anna	4	H. Ildikó	5	M. Vera	5	P. Katinka	2
A. Kristóf	4	H. József	4	M. Andrea	2	P. Nóra	5
B. Kata	5	K. Attila	2	N. Péter	3	S. Zsanett	2
D. Ferenc	1	K. Csilla	5	N. László	1	S. Balázs	5
D. András	5	K. Samu	2	N. Krisztina	1	T. Gergely	2
G. Csilla	2	K. Balázs	5	N. Vera	2	V. Dóra	1

a) Számítsd ki a kapott jegyek átlagát, móduszát, mediánját, szórását!

b) A lányok vagy a fiúk voltak eredményesebbek?

c) A szaktanár az a) feladatban kért adatok közül melyiket emelje ki, ha

- az iskola igazgatójának akar beszámolni a dolgozat eredményéről, és a csoport eredményes munkáját szeretné hangsúlyozni?
- az osztályfőnöknek számol be az eredményekről, és azt szeretné jelezni, hogy a csoportba tartozó gyerekek zöme lusta, nem dolgozik eleget a matematika órán?
- a szülői értekezleten a szülőket szeretné meggyőzni arról, hogy milyen nehéz a csoportot matematikára tanítani, mert annyira eltérő a tanulók motiváltsága, szorgalma, felkészültsége?

Megoldás: a) Gyakoriságtáblázat:

Érdemjegy	5	4	3	2	1
Összesen	**8**	**3**	**1**	**7**	**5**
Ebből a lányoké	5	1	0	5	2
Ebből a fiúké	3	2	1	3	2

Az átlag: 3,08, a medián: 2,5, a módusz: 5, a szórás: 1,61.

b) A lányok jegyének átlaga: 3,15; módusza: 5 és 2; mediánja: 2; szórása: 1,61.

A fiúk jegyének átlaga: 3,09; módusza: 5 és 2; mediánja: 3; szórása: 1,51.

Közel azonos a két csoport teljesítménye. Bár a fiúk esetében a jegyek átlaga kb. 0,06-dal rosszabb, viszont a lányoknál a nagyon gyönge eredmények száma több, mint a jobb eredmények száma, míg a fiúknál e kettőnek a száma azonos.

c) A tanár a kitűzött célját akkor éri el, ha

– az iskola igazgatójának a móduszt hangsúlyozza.

– az osztályfőnöknek a mediánt és az átlagot, hiszen ezek az adatok jelzik azt, hogy valamivel több a 2-es és 1-es jegyek száma a legalább 3-as jegyűek számánál.

– a szülőknek pedig a szórást emeli ki, ezzel jelezve, hogy a csoport tagjai között szerepelnek nagyon gyengén teljesítők és jó eredménnyel dolgozók is.

3. Az alábbi táblázatban a feltüntetett hét évben az egy főre jutó élelmiszerfogyasztás adatai olvashatók.

Termék, tápanyag	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Húsfélék összesen, kg	73,1	71,5	73,0	67,5	65,9	62,5	59,4
Hal, kg	2,7	2,6	2,9	3,0	3,1	2,7	2,5
Tej és tejtermékek, vaj nélkül, kg	169,7	167,4	159,1	144,2	140,0	132,1	136,4
Tojás, db	389	357	338	365	337	297	267
Zsíradékok összesen, kg	38,6	37,0	37,5	36,8	38,1	36,7	35,7
Ebből:							
vaj, vajkrém, kg	1,7	1,8	1,7	1,5	1,4	1,5	1,6
étolaj, margarin, kg	11,8	11,7	12,6	13,7	14,6	15,0	14,7
Liszt, kg	106,1	97,4	100,0	91,8	86,5	83,3	79,8
Rizs, kg	4,2	5,2	5,6	5,6	4,8	5,0	4,8
Burgonya, kg	61,0	55,3	56,0	59,3	58,2	60,3	66,2
Cukor, kg	38,2	35,0	39,5	35,8	34,2	37,3	39,8

a) Számítsd ki az előző feladat adatának felhasználásával, hogy 1990-ben összesen hány tonna halat fogyasztott el a lakosság!

b) Számítsd ki, hogy egyik évről a rákövetkező évre hány százalékkal változott a tejtermékek (vaj nélkül) egy főre jutó fogyasztása!

c) Hasonlítsd össze évenként az egy főre jutó összes zsirfogyasztást az étolaj- és margarinfogyasztással, és jellemezd az összehasonlítást évenként egy-egy számadattal! A két adatsort (zsír-, illetve étolaj- és margarinfogyasztást) ábrázold oszlopdiagram segítségével!

d) Állapítsd meg az egy főre jutó rizsfogyasztás adatainak móduszát, mediánját és átlagát!

e) Számítsd ki, hogy 1990-hez képest hány százalékkal változott az egyes élelmiszerfajták egy főre jutó fogyasztása 1996-ra!

Megoldás:

a) 1990-ben a népesség száma 10 374 823 volt. A lakosság ebben az évben összesen $10\,374\,823 \cdot 2{,}7 = 28\,012\,022 \text{ kg} \approx 28\,012 \text{ t}$ halat fogyasztott el.

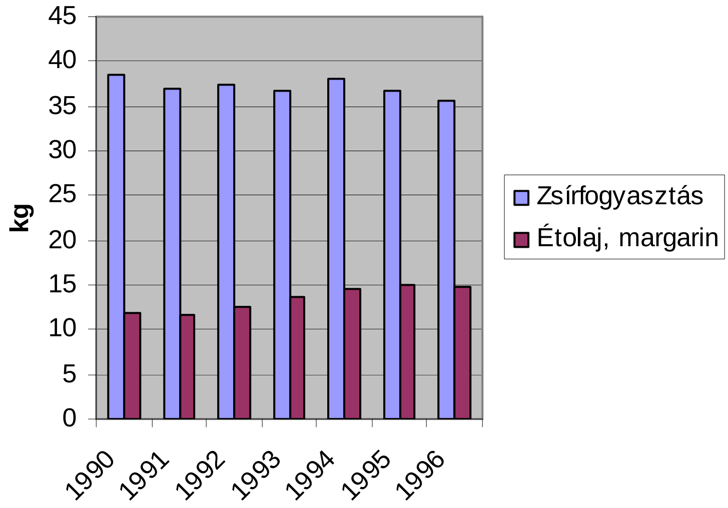
b)

Termék, tápanyag	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Tej és tejtermékek, vaj nélkül, kg	169,7	167,4	159,1	144,2	140,0	132,1	136,4
Változás		$-1{,}36\%$	$-4{,}96\%$	$-9{,}37\%$	$-2{,}91\%$	$-5{,}64\%$	$+3{,}26\%$

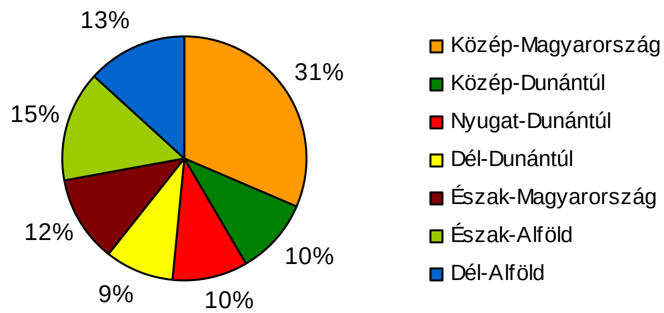
Kiszámítás módja: Ha egy adott évben x kg, a rákövetkező évben y kg volt az egy főre jutó fogyasztás, akkor a változás %-ban: $100 \cdot \left(\frac{y}{x} - 1\right)$.

c) Az összehasonlítás jellemezhető egy adattal, ha megadjuk minden évben, hogy az összes egy főre jutó zsiradékfogyasztásnak hány százaléka volt étolaj és margarin.

Termék, tápanyag	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Zsíradékok összesen, kg	38,6	37,0	37,5	36,8	38,1	36,7	35,7
étolaj, margarin, kg	11,8	11,7	12,6	13,7	14,6	15,0	14,7
	$\approx 31\%$	$\approx 32\%$	$\approx 34\%$	$\approx 37\%$	$\approx 38\%$	$\approx 41\%$	$\approx 41\%$



4. Magyarországon a 2003/2004 tanévben a középiskolai osztályok száma összesen 15 910 volt. Számítsd ki az alábbi kördiagram alapján, hogy ebben a tanévben, az egyes régiókban hány középiskolai osztály volt!



Megoldás:

Módszertani megjegyzés: Figyeljünk arra, hogy a tanulók egész számokat adjanak meg, és a kerekítés szabályainak helyes alkalmazása mellett az összeg valóban 15 910 legyen!

Régiók	Középiskolai osztályok száma
Közép-Magyarország	4932
Közép-Dunántúl	1591
Nyugat-Dunántúl	1591
Dél-Dunántúl	1432
Észak-Magyarország	1909
Észak-Alföld	2387
Dél-Alföld	2068

5. A Matematika Határok Nélkül versenyre középiskolák kilencedik osztályai jelentkezhetnek. A verseny időtartama másfél óra, és ezalatt az idő alatt minden részt vevő osztály ugyanazt a 13 feladatot oldja meg. Az alábbi gyakorisági táblázat a 2007. évi verseny legeredményesebb 28 osztályának eredményét tartalmazza:

Elért pontszám:	83	80	75	73	71	69	67	66	65	64	61	60	59	58	57	56	55
Gyakoriság:	1	1	2	1	1	2	2	3	1	2	1	2	1	3	2	2	1

a) Eltér-e egymástól legalább 1 ponttal a pontszámok átlaga a mediántól?

b)* A verseny előtt a szervezők az induló osztályokat két kategóriába sorolták attól függően, hogy mennyi az osztály heti matematika óráinak a száma. A táblázatban szereplő 28 osztály között 6 osztály II. kategóriába tartozó. Közülük a legeredményesebb 66 pontot ért el, a leggyengébb teljesítményt nyújtó osztály pedig 55 pontot. Hány pontot ért el a II. kategóriába tartozó többi négy osztály, ha tudjuk, hogy e 6 osztály átlagpontszáma pontosan 61 pont, pontszámaik módusza 66, és mediánja 61 pont?

Megoldás:

a) A pontszámok átlaga: 64,75. A medián: 64,5. Az eltérés kisebb, mint 1 pont.

b) Rendezzük a hat osztály pontszámait csökkenő sorrendbe, és jelöljük a hiányzó 4 pontszámot a következőképpen: 66, x, y, z, q, 55 !

Mivel a pontszámok módusza 66, így legalább még egy osztály pontszáma 66.

1. Tegyük fel, hogy csak még egy osztály ért el 66 pontot, ekkor x = 66. Mivel a medián 61, így $\frac{y+z}{2}=61$. Az átlagpontszám 61, azaz $\frac{2\cdot 66+y+z+q+55}{6}=61$.

   Mivel $y+z=122$, így $\frac{2\cdot 66+122+q+55}{6}=61$. Ebből $q=57$. Igaz, hogy 2 dolgozat is 57 pontos, de a módusz 66 (és a kezdeti feltételünk) miatt, nem lehet a hat dolgozat között 2 db 57 pontos. Másrészt, mivel csak egy 61 pontos dolgozat van, így $66>y>z>57$. A hiányzó két pontszámot a 65, 64, 61, 60, 59 és 58 pontos dolgozatok között kell keresnünk.

   Ezek között csak az 58 és 64 összege 122. Ebben az esetben egy megoldást kaptunk. A hat osztály pontszámai: 66, 66, 64, 58, 57, 55.

2. Nézzük meg, hogy a II. kategóriába tartozó osztályok elérhették-e mindhárom 66 pontos eredményt!

Ekkor $x = y = 66$, és $\frac{66+z}{2} = 61$, azaz $z = 56$. Mivel $z \geq q > 55$, ezért q már csak 56 pontot jelölhet. A pontszámok: 66, 66, 66, 56, 56, 55. Ekkor viszont az átlagpontszám nem pontosan 61 pont, így ezek a pontszámok nem megoldásai a feladatnak.

Összefoglalva: A II. kategóriába tartozó osztályok a következő pontszámokat érték el: 66, 66, 64, 58, 57, 55.

6. a) A táblázat adatainak felhasználásával döntsd el, hogy a megadott években bemutatott új filmek hány százaléka nem szerepel a felsoroltak között! (Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve add meg!)

b) Az összes új bemutatott filmekhez képest melyik évben volt a legrosszabb, illetve a legjobb a magyar filmek aránya? A kapott két évben bemutatott összes film eloszlásáról készíts egy-egy kördiagramot! Mindegyik esetben számítsd ki, hogy az adatokhoz mekkora középponti szög tartozik! Az eredményt fokokban, egész számra kerekítve add meg!

Bemutatott új filmek száma

Év	2001	2002	2003	2004	2005
Összesen	**164**	**182**	**212**	**226**	**220**
Ebből					
magyar	23	19	21	28	17
amerikai	93	108	109	112	103
angol	5	2	18	8	14
francia	21	20	30	23	22
német	5	5	5	6	6
olasz	1	-	4	5	4

Megoldás:

a)

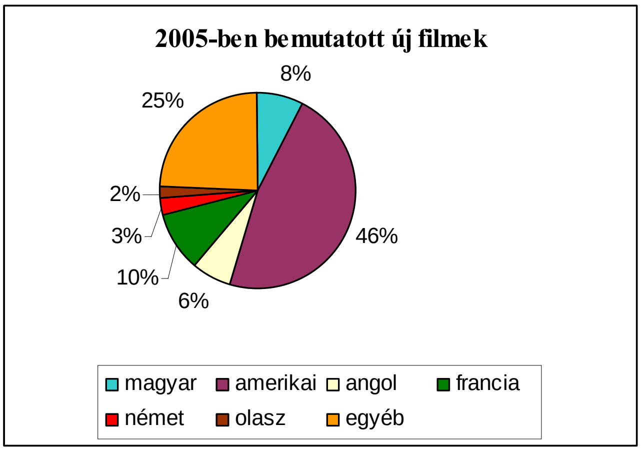
Év	2001	2002	2003	2004	2005
Összesen	**164**	**182**	**212**	**226**	**220**
Ebből					
magyar	23	19	21	28	17
amerikai	93	108	109	112	103
angol	5	2	18	8	14
francia	21	20	30	23	22
német	5	5	5	6	6
olasz	1	-	4	5	4
egyéb	**16**	**28**	**25**	**44**	**54**
Arány	**9,8%**	**15,4%**	**11,8%**	**19,5%**	**24,6%**

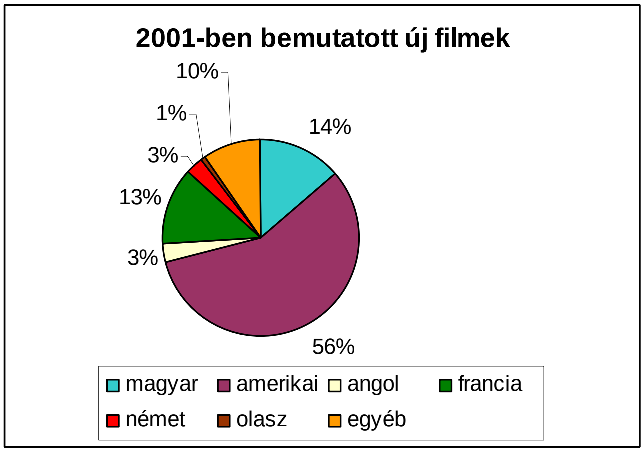
b)

Év	2001	2002	2003	2004	2005
Összesen	**164**	**182**	**212**	**226**	**220**
Ebből					
magyar	23	19	21	28	17
Arány	0,14	0,10	0,10	0,12	0,08

2005-ben volt a legrosszabb az arány, a bemutatott új filmeknek kb. 8%-a volt magyar film. A magyar filmek aránya 2001-ben volt a legjobb, ekkor kb. 14%.

Év	2001	Középponti szög (fokban)	2005	Középponti szög (fokban)
Összesen	**164**	**360**	**220**	**360**
Ebből				
magyar	23	**50**	17	**28**
amerikai	93	**204**	103	**169**
angol	5	**11**	14	**23**
francia	21	**46**	22	**36**
német	5	**11**	6	**10**
olasz	1	**2**	4	**7**
egyéb	16	**35**	54	**88**





XIV. KOMBINATORIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

Módszertani megjegyzés: A kombinatorikai gondolkodásmód elsajátítása hosszú folyamat. Ezért is érdemes minél többször vissza-visszatérni olyan feladatokra, amelyek ennek alkalmazását igénylik, illetve más témakör feladatai közé „becsempészni” egy-egy kérdés erejéig kombinatorikai, illetve valószínűségszámítási problémát. Ha egy kicsit hosszabb idő marad az ismétlésre, javasoljuk, hogy a 11-edikes Mennyire lehetséges? című C modul Feladatvásár névvel ellátott foglalkozásának feladatanyagából válogasson a szaktanár a csoport számára megfelelő feladatokat. Esetleg érdemes a játékot 12. osztályban is lejátszani a tanár ízlésének megfelelő feladatokkal.

1. A 0, 1, 1, 1, 2, 2, 5, 6 számkártyák mindegyikének felhasználásával hány olyan nyolcjegyű szám állítható elő, amelyik osztható

a) 9-cel; b) 5-tel; c) 6-tal; d) 25-tel; e) 125-tel?

Megoldás:

a) A számkártyák mindegyikének felhasználásával létrehozott nyolcjegyű szám számjegyeinek összege 18, így osztható 9-cel. A kérdés tehát az, hogy e számjegyek hányféle sorrendje hoz létre nyolcjegyű számot.

Az első számjegy nem lehet nulla, így négy esetet különböztethetünk meg:

1. Ha az első számjegy 1, ekkor a maradék 7 számjegy (1, 1, 2, 2, 0, 5, 6) ismétléses permutációinak száma adja a kérdéses számok számát. $P_1 = \frac{7!}{2!\cdot 2!} = 1260$.

2. Ha az első számjegy 2, ekkor a maradék 7 számjegy (1, 1, 1, 2, 0, 5, 6) ismétléses permutációinak száma: $P_2 = \frac{7!}{3!} = 840$.

3. Ha az első számjegy 5 vagy 6, ekkor a maradék 7 számjegy (1, 1, 1, 2, 2, 0, 6 vagy 1, 1, 1, 2, 2, 0, 5) ismétléses permutációinak száma: $P_3 = P_4 = \frac{7!}{3!\cdot 2!} = 420$.

Mivel az első számjegy vagy 1, vagy 2, vagy 5 vagy 6, így összesen $1260 + 840 + 420 + 420 = 2940$ nyolcjegyű szám képezhető.

(*Másképpen*: Ha különbözőnek tekintenénk a nyolc számjegyet, akkor az első helyre 7-féle, a második helyre 7-féle, a harmadik helyre 6-féle, és így tovább, a nyolcadik helyre már 1-féle számjegy kerülhet. Ekkor $7\cdot 7!$ számot kapnánk. Ha a megkülönböztető jelzéseket letöröljük, akkor a számok 12-es csoportjában a számok azonosak lennének, hiszen az 1-esek 3 adott helyen 3!-féleképpen, a 2-esek 2 adott helyen 2!-féleképpen helyezkedhetnek el. Így a keresett számok száma: $\frac{7\cdot 7!}{3!\cdot 2!}=2940$.

b) Az utolsó számjegy 0 vagy 5 lehet csak. Ha 0, akkor a többi 7 számjegy (1, 1, 1, 2, 2, 5, 6) sorrendjének száma: $\frac{7!}{3!\cdot 2!}=420$. Ha pedig 5, akkor a 0, 1, 1, 1, 2, 2, 6 számjegyek összes olyan ismétléses permutációinak a számát kell meghatároznunk, amelyekben az első helyen nem 0 áll. Az előzőek szerint ezek száma: $\frac{6\cdot 6!}{3!\cdot 2!}=360$.

Így összesen: 780 darab 5-tel osztható szám képezhető.

c) Az utolsó számjegy csak páros szám lehet, tehát 0, 2 vagy 6. Ha 0, akkor a maradék 7 számjegyből (1, 1, 1, 2, 2, 5, 6) képezhető számok száma: $\frac{7!}{3!\cdot 2!}=420$. Ha az utolsó számjegy 2, akkor a 0, 1,1,1, 2, 5, 6 számjegyekből létrehozott 7-jegyű számok száma: $\frac{6\cdot 6!}{3!}=720$, ha pedig 6 az utolsó számjegy, akkor $\frac{6\cdot 6!}{3!\cdot 2!}=360$.

Összesen 1500 olyan nyolcjegyű szám képezhető, amelyek oszthatók 6-tal.

d) Azok a számok oszthatók 25-tel amelyek utolsó két számjegye az adott sorrendben 00, 25, 50 vagy 75. Ebben az esetben a nyolcjegyű szám utolsó két számjegye 25 vagy 50 lehet. Ha 25, akkor az 1, 1, 1, 2, 6, 0 számjegyekből $\frac{5\cdot 5!}{3!}=200$ hatjegyű szám alkotható, ha viszont 50 a nyolcjegyű szám végződése, akkor az 1, 1, 1, 2, 2, 6 számjegyekből $\frac{6!}{3!\cdot 2!}=60$.

260 darab 25-tel osztható nyolcjegyű szám állítható elő.

e) A megadott számjegyekből képezhető számok közül csak azok oszthatók 125-tel, amelyek utolsó három számjegye a megadott sorrendben 125, 250 vagy 625 (hiszen mivel 1000 már osztható 125-tel, a szám utolsó három számjegyéből álló háromjegyű szám a 125 többszöröse lehet csak).

Ha az utolsó három számjegyből álló háromjegyű szám 125, akkor az 1, 1, 2, 6, 0 számjegyekből létrehozott 5-jegyű számok száma: $\frac{4 \cdot 4!}{2!} = 48$; ha 250, akkor az 1, 1, 1, 2, 6 számjegyekből $\frac{5!}{3!} = 20$; ha 625, akkor a számjegyek: 1, 1, 1, 2, 0, és ezekből $\frac{4 \cdot 4!}{3!} = 16$ ötjegyű szám képezhető. Összesen 84 szám osztható 125-tel.

2. Hat fiúból és négy lányból álló társaság egy betelefonálós játékban 5 db, állóhelyre szóló koncertjegyet nyert. Úgy határoztak, hogy sorsolással döntik el, ki legyen közülük az 5 szerencsés jegytulajdonos. Mindannyian felírták a nevüket egy-egy cédulára, és a tíz cédulából kihúztak ötöt. Hányféleképpen alakulhat úgy a sorsolás eredménye, hogy a kisorsoltak között

a) pontosan egy lány van; b) legalább egy lány van; c) több lány van, mint fiú?

Megoldás:

a) Az 5 jegy nem helyre szóló, tehát a kisorsolt 5 nevet nem különböztetjük meg a kihúzás sorrendje szempontjából. Mivel az 5 kisorsolt közé a lány 4-féleképpen választható ki, és bármelyik lány is került a szerencsések közé, a további négy fiú $\binom{6}{4} = 15$-féleképpen választható ki a 6 fiú közül, így az, hogy a kisorsoltak között pontosan egy lány lesz $4 \cdot 15 = 60$-féleképpen valósulhat meg.

b) A „legalább egy lány (azaz 1,vagy 2, vagy 3, vagy 4) van a kisorsoltak között” esetek számát úgy könnyebb meghatározni, ha a sorsolás összes lehetséges eredményeinek számából kivonjuk azoknak a számát, amelyekben csak fiúk a szerencsések. Az összes kimenetel száma: $\binom{10}{5}$, a „kisorsoltak között nincs lány” esetek száma: $\binom{6}{5}$. Így a kérdéses sorsolások eredménye $\binom{10}{5} - \binom{6}{5} = 252 - 6 = 246$-féle lehet.

c) Ebben az esetben azoknak a kimeneteleknek a számát kell meghatároznunk, amelyekben az 5 kiválasztott között vagy 3 lány és 2 fiú, vagy 4 lány és 1 fiú van. Az első eset $\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{2} = 60$, a második pedig $\binom{4}{4} \cdot \binom{6}{1} = 6$-féleképpen következhet be, így a kérdéses sorsolási eredmények száma 66.

3. Kati éjszaka azt álmodta, hogy a héten az ötös lottó sorsolásán a kihúzott számok növekvő sorrendjében az első, a harmadik és az ötödik szám a 8, a 17 és a 75 lesz. Hány szelvényt vegyen másnap Kati, hogy biztosan telitalálata legyen, feltéve, hogy az álma beteljesül? (Az ötös lottó játékban az 1, 2,…, 89, 90 számok közül húznak ki ötöt.)

Megoldás: Ha Kati álma tejesül, akkor a héten kihúzott lottószámok növekvő sorrendben: 8, x, 17, y, 75 lesz, ahol x és y olyan pozitív egész számokat jelölnek, amelyekre $8 < x < 17$ és $75 < y \le 90$ teljesül. Az x szám 8-féle, az y pedig 15-féle lehet. A sorsolás eredménye tehát $8 \cdot 15 = 120$-féle lehet, ezért, hogy Katinak biztosan legyen ötös találata, ennyi szelvényt kell a megfelelő módon kitöltenie (feltéve, hogy „bejött” az álma).

4. Egy 32 fős osztályban 15 fiú van, és 7 szemüveges tanuló. A fiúk 80%-a nem szemüveges. Az osztály tanulói közül véletlenszerűen kiválasztunk két tanulót. Mekkora a valószínűsége, hogy mindkét kiválasztott tanuló

a) szemüveges, és az egyik fiú, a másik pedig lány; b) nem szemüveges lány?

Megoldás: A 15 fiú 20%-a, azaz 3 fiú szemüveges. A 17 lány közül tehát 4 szemüveges. Mivel a feladat szerint bármelyik tanuló kiválasztásának a valószínűsége ugyanakkora, így alkalmazhatjuk a klasszikus modellt:$P = \dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$.

a) A szemüveges fiú kiválasztása 3-féle lehet, és bármelyik választás esetén 4-féle a szemüveges lány, így a kedvező esetek száma: $3 \cdot 4 = 12$. A 32 tanuló közül a két tanuló $\binom{32}{2} = 496$-féleképpen választható ki. Tehát $P = \dfrac{12}{496} \approx 0{,}024$.

(Másképpen**:** Ha először szemüveges fiút választunk, annak a valószínűsége $\dfrac{3}{32}$, és másodszorra lányt, ennek a valószínűsége $\dfrac{4}{31}$. A két választás független egymástól, tehát ennek az eseménynek a valószínűsége $\dfrac{3}{32} \cdot \dfrac{4}{31}$. Bekövetkezhet a kérdezett esemény úgy is, hogy először választunk szemüveges lányt, azután fiút, és ennek a valószínűsége $\dfrac{4}{32} \cdot \dfrac{3}{31}$. Mivel a kérdéses esemény vagy az első vagy a második módon következhet be, a kérdezett esemény bekövetkezésének valószínűsége:
$\dfrac{3}{32} \cdot \dfrac{4}{31} + \dfrac{4}{32} \cdot \dfrac{3}{31} = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4}{32 \cdot 31} \approx 0{,}024$.

b) A nem szemüveges lányok száma 13. Mindkettőt közülük választjuk, így az esemény valószínűsége: $\dfrac{\binom{13}{2}}{\binom{32}{2}} \approx 0{,}157$.

5. Az ötös lottó sorsolásakor jelölje A azt az eseményt, hogy a kihúzott számok között van az 5, 12 és 27, a B esemény pedig azt, hogy a kihúzott számok között van a 12, 36 és 50. Mekkora a valószínűsége az

a) AB esemény bekövetkezésének; b) $A+B$ esemény bekövetkezésének?

Megoldás:

a) Mindkét esemény akkor következik be, ha a kihúzott 5 szám a következő: 5, 12, 27, 36 és 50. Ez tehát egyféleképpen következhet be. Így

$$\mathbf{P}(AB) = \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43\,949\,268} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-8}.$$

b) Az A esemény esetében a hiányzó két szám $\dfrac{87 \cdot 86}{2}$-féleképpen választható meg. A B esemény szintén $\dfrac{87 \cdot 86}{2}$-féleképpen következhet be. Mivel 1 esetben mindkét esemény kimenetele ugyanaz, így az $A+B$ esemény $\dfrac{87 \cdot 86}{2} + \dfrac{87 \cdot 86}{2} - 1 = 7481$-féleképpen következhet be. Tehát $\mathbf{P}(A+B) = \dfrac{7481}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}00017$.

6. Janika általános iskolába jár, első osztályos tanuló. A 24 lapos írásfüzete betelt. A tanító néni minden oldalra egy-egy jelet rajzolt.

♥ Azt jelentette, hogy nagyon elégedett a munkájával.

☺ Ez a jel pedig azt mutatta, hogy elégedett, de igyekezzen még szebben írni.

Édesanyja átnézte a füzetet, és 30 oldalon talált ♥ jelet. Az első 10 oldalon összesen 6-szor fordult elő, a második 10 oldalon már 8-szor, a harmadik 10 oldalon 5-ször, a többi a hátralévő oldalakon volt. Hányféle módon lehetne kitölteni a két jellel egy ilyen 24 lapos füzetet a megadott feltételek teljesülése esetén?

Megoldás: A 24 lapos füzetben összesen 48 oldal van. Mivel minden oldalon van jel, elegendő összeszámlálnunk, hogy hányféleképpen helyezhető el a ♥ jel, hiszen a többi oldalt a másik jellel tölthetjük ki. Az első 30 oldalon (a megadott számokban) összesen 19 piros szív van elhelyezve, így az utolsó 18 oldalon összesen 11. Mivel az egyes szakaszokon a jel elhelyezésének sorrendje nem számít, az első 10 oldalon a 6 jel $\binom{10}{6}$, és ezek bármilyen elhelyezése esetén a második 10 oldalon a 8 jel $\binom{10}{8}$, tehát az első 20 oldalon $\binom{10}{6}\cdot\binom{10}{8}$-féleképpen helyezhető el a piros szív. Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy a 30 piros szív (a megadott feltételek melletti) összes elhelyezésének száma: $\binom{10}{6}\cdot\binom{10}{8}\cdot\binom{10}{5}\cdot\binom{18}{11}=210\cdot 45\cdot 252\cdot 31824=75\,785\,673\,600$.

7. A kedvenc CD lemezemen 12 szám van, közülük is van kettő, amit nagyon szeretek. Véletlen sorrendben lejátszatva a számokat, mekkora a valószínűsége, hogy ha minden számra pontosan egyszer kerül sor, akkor a két legkedvesebb számom közül az egyiket elsőre, a másikat utolsóként hallgathatom meg?

Megoldás: A 12 szám összesen 12!-féle sorrendben hallgatható meg. A két legkedvesebb szám 2-féle sorrendben lehet az első és utolsó helyen. A közbülső 10 szám sorrendje 10!-féle lehet. A kedvező esetek száma tehát $2\cdot 10!$. Mivel mindegyik sorrend egyenlően valószínű, így a kérdezett esemény bekövetkezésének valószínűsége: $\frac{2\cdot 10!}{12!}=\frac{1}{66}\ (\approx 0{,}015)$.

8. Egy dobozban 10 darab azonos méretű golyó van, mégpedig 6 piros és 4 fekete.

a) Ha bármelyik golyó kihúzásának valószínűsége ugyanakkora, mekkora a valószínűsége, hogy egy golyót kihúzva, a kihúzott golyó fekete lesz?

b) Hány zöld színű golyót tegyünk még a dobozba, hogy egy golyót kihúzva éppen 0,25 legyen annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyó színe zöld?

Megoldás:

a) $P = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

b) Ha z-vel jelöljük a zöld golyók számát, akkor a dobozban összesen $10 + z$ golyó lesz. Annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyó zöld, kiszámítható $\frac{z}{10+z}$ módon. A feladat szerint $\frac{z}{10+z} = 0{,}25$. Az egyenletnek nincs természetes szám megoldása, így hiába teszünk bármennyi zöld golyót a dobozba, a zöld színű golyó kihúzásának a valószínűsége soha nem lesz éppen 0,25.

9. A 15 és 74 év közötti lakosság körében 2007 első negyedévében Közép-Magyarországon a munkanélküliségi ráta (azaz a régió megadott korú lakosságán belül a munkanélküliek aránya) 4,9%, Észak-Alföldön pedig 11,3% volt. Ha ebben az időszakban véletlenszerűen kiválasztottunk volna 10, a megadott korosztályba tartozó, Közép-Magyarországon lakó és 20, Észak-Alföldön lakó embert, akkor melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy a 10 kiválasztott közül pontosan 1 munkanélküli, vagy annak, hogy a 20 kiválasztott közül pontosan 3 munkanélküli?

Megoldás: Közép-Magyarország adott korosztályba tartozó népességének száma ebben az időszakban kb. $1\,245\,300$, a másik régióé pedig kb. $518\,300$. Ekkora számok esetén a 10, illetve 20 ember kiválasztása során lényegesen nem változik meg a munkanélküliségi ráta, ezért alkalmazhatjuk a binomiális eloszlás modelljét.

Közép-Magyarországon a munkanélküliségi ráta 4,9%, így annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott munkanélküli 0, 049, annak pedig, hogy nem munkanélküli 0,951.

Észak-Alföldön pedig ugyanezek az adatok rendre 0,113, illetve 0,887.

Annak a valószínűsége, hogy a Közép-Magyarországon kiválasztott 10 ember közül pontosan egy munkanélküli: $\mathbf{P}_1 = \binom{10}{1} \cdot 0{,}049 \cdot 0{,}951^9 \approx 0{,}3$.

Annak pedig, hogy az Észak-Alföldön kiválasztott 20 megadott korú ember közül pontosan 3 munkanélküli: $\mathbf{P}_2 = \binom{20}{3} \cdot 0{,}113^3 \cdot 0{,}887^{17} \approx 0{,}2$.