# MATEMATIKAI KOMPETENCIATERÜLET

# KISLEXIKON A KÖZÉPSZINTŰ MATEMATIKA ÉRETTSÉGI VIZSGÁHOZ

Készítette: Urbán János

Szerkesztette: Oláh Judit és Vidra Gábor

Grafika: Dr. Fried Katalin

.

A kiadvány az Educatio Kht.
Kompetenciafejlesztő oktatási program kerettanterve alapján készült.

A kiadvány a Nemzeti Fejlesztési terv Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program 3.1.1. központi program (Pedagógusok és oktatási szakértők felkészítése a kompetencia alapú képzés és oktatás feladataira) keretében készült, a suliNova oktatási programcsomag részeként létrejött tanulói információhordozó. A kiadvány sikeres használatához szükséges a teljes oktatási programcsomag ismerete és használata. A teljes programcsomag elérhető: www.educatio.hu címen.

**Educatio Kht. 2008.**

.

# Tartalom[*]:



A kislexikon anyagát a könnyebb áttekinthetőség és a jobb tájékozódás kedvéért az érettségi követelmények témakörei szerint csoportosítottuk.

A fogalmakat, tételeket nem kell elmondani, vagy leírni, csak tudni kell alkalmazni egyszerűbb esetekben. Ezért nem írjuk le a tételek bizonyítását, hiszen nem kérdezik az érettségin, de a legtöbb helyen egy-egy példával megvilágítjuk a fogalmak, tételek alkalmazását.

[*] A fejezetek címeihez kapcsolódó lábjegyzetek a Sulinova-Educatio 2004-2008 között fejlesztett matematikai kompetenciát fejlesztő programcsomagjainak A típusú moduljaira hivatkoznak.

# Halmazok*

A **halmaz** a matematikában alapfogalom. Ez azt jelenti, hogy nem definiáljuk, csak a használatát írjuk körül. A halmaz bizonyos meghatározott elemek összessége. Például egy osztály tanulói: $A$, a fővárosban közlekedő villamosok: $V$, a magyar nyelv főnevei: $F$, a pozitív egész számok: $\mathbf{N}^+$ mind egy-egy halmaz. A halmazok jelölésére általában nagybetűket használunk. Azt a tényt, hogy valami eleme egy adott halmaznak, így jelöljük: $2\ \ \mathbf{N}^+$, általában $a\ \ H$ . Ugyanakkor például $-1\ \ \mathbf{N}^+$ azt jelöli, hogy a $-1$ nem eleme az $\mathbf{N}^+$ halmaznak.

Két halmaz egyenlő, ha ugyanazok az elemeik, jelölése $A$=$B$.

A $B$ halmaz az $A$ halmaz **részhalmaza**: $B\ \ A$, ha minden $x\ \ B$-re igaz az is, hogy $x\ \ A$.
Például a pozitív egészek $\mathbf{N}^+$ halmaza részhalmaza a pozitív racionális számok $\mathbf{Q}^+$ halmazának, $\mathbf{N}^+\ \ \mathbf{Q}^+$.
Ha $A\ \ B$ és $B\ \ A$, akkor $A$=$B$.

Az **üres halmaz**nak nincs eleme, jele: , bármely $x$-re $x$ .

Az ***A* véges halmaz**, ha van olyan $n$ természetes szám, hogy az $A$ halmaz összes eleme és csak azok megadhatók így: $a_1$, $a_2$, …, $a_n$, vagy $A$ üres. Az előbbi esetben $A$-t így is szokás írni: $A$= $a_{1,}\, a_2$, …, $a_n$ . Egy halmaz **végtelen halmaz**, ha nem véges.

Például a természetes számok $\mathbf{N}$ halmaza, a racionális számok $\mathbf{Q}$ halmaza, egy egyenes pontjainak halmaza, egy szakasz pontjainak halmaza – mind végtelen halmazok.

Az ***A* és *B* halmazok egyesítése,** vagy uniója: $A\ \ B$ az a halmaz, amelynek elemei az $A$ halmaz, vagy a $B$ halmaz elemei: $x\ \ A\ \ B$ akkor és csak akkor, ha $x\ \ A$ vagy $x\ \ B$.

Az ***A* és *B* halmazok közös része,** vagy metszete: $A\ \ B$ az a halmaz, amelynek elemei az $A$-nak is és a $B$-nek is elemei: $x\ \ A\ \ B$ akkor és csak akkor, ha $x\ \ A$ és $x\ \ B$.

* 9. évfolyam 1. modulja (0901)

Az ***A* és *B* halmazok különbsége:** $A \setminus B$ az a halmaz, amelynek elemei azok az $A$ halmazbeli elemek, amelyek nem elemei $B$-nek: $x \quad A \setminus B$ akkor és csak akkor, ha $x \quad A$ és $x \quad B$.

A ***H* halmaz alaphalmaz**, amelyet a feladat szövege ad meg és a szóban forgó problémában csak a $H$ részhalmazai kapnak szerepet.
Például a valós számok **R** halmazát célszerű alaphalmaznak választani, ha egyenleteket oldunk meg a valós számok halmazán.

Az ***A* halmaz komplementer halmaza** a $H \setminus A$ halmaz, ha $A \quad H$ és $H$ az alaphalmaz. Gyakori, hogy az $A$ komplementerét így jelölik: $\overline{A}$, ekkor az alaphalmaz szerepét játszó $H$ halmaz egyértelműen meghatározott.

# Matematikai logika*

**Állításnak, kijelentésnek** nevezünk minden olyan mondatot, amely vagy igaz, vagy hamis. Az **igazat** és **hamisat logikai értékeknek** nevezzük.
Például „A 4 páros szám” állítás logikai értéke igaz (röviden: i), „A 6 prímszám” állítás logikai értéke hamis (röviden: h).

Az ***A*** **állítás tagadása vagy negációja** a „nem *A*” állítás, ami *A* logikai értékét az ellenkezőjére változtatja.

Az ***A*** **és** ***B*** **állítás konjunkciója** az „***A*** **ÉS** ***B***” állítás, amely akkor és csak akkor igaz, ha *A* is és *B* is igaz, egyébként hamis.

Az ***A*** **és** ***B*** **állítás diszjunkciója** az „***A*** **VAGY** ***B***” állítás, amely akkor és csak akkor hamis, ha ***A*** is és ***B*** is hamis, egyébként igaz.

Az ***A*** **és** ***B*** **állítás implikációja** a „**HA** ***A*****, AKKOR** ***B***” állítás, amely akkor és csak akkor hamis, ha *A* igaz és *B* hamis, egyébként igaz.

Az ***A*** **és** ***B*** **állítás ekvivalenciája** az „**AKKOR ÉS CSAK AKKOR** ***A*****, HA** ***B***” állítás, amely akkor és csak akkor igaz, ha *A* és *B* logikai értéke azonos, egyébként hamis.

Ha $A(x)$ egy $x$ változótól függő állítás, akkor a **„minden *x*-re igaz, hogy *A*(*x*)”** állítás akkor és csak akkor igaz, ha $A(x)$ az alaphalmaz **minden** elemére igaz.
Például a „minden 2-nél nagyobb prímszám páratlan” állítás igaz, mert ha $x$  2 és $x$ prímszám, akkor $x$ páratlan szám.

Ha $A(x)$ egy $x$ változótól függő állítás, akkor a **„van olyan *x*, hogy *A*(*x*)”** állítás akkor és csak akkor igaz, ha $A(x)$ az alaphalmaz **valamelyik** elemére igaz. Például a „van páros prímszám” állítás igaz, mert az „$x$ páros prímszám” állítás a 2-re igaz.

---

* 9. évfolyam 2. modulja, 10. évfolyam 1. modulja (0902, 1001)

Az ***A* állítás szükséges feltétele a *B* állítás**, ha minden olyan esetben, amikor *A* igaz, *B* is igaz.
Például az „*n* pozitív egész szám 4-gyel osztható” állításnak szükséges feltétele az „*n* pozitív egész szám 2-vel osztható” állítás, hiszen „ha *n* 4-gyel osztható, akkor *n* 2-vel is osztható” igaz.

Az ***A* állítás elégséges feltétele a *B* állítás,** ha minden olyan esetben, amikor *B* igaz, *A* is igaz.
Például az „*n* pozitív egész szám 9-cel osztható” állítás elégséges feltétele az „*n* pozitív egész szám 3-mal osztható” állításnak, hiszen „ha *n* 9-cel osztható, akkor *n* 3-mal is osztható” igaz.

Az ***A* állítás a *B* állításnak szükséges és elégséges feltétele**, ha bármelyik igazságából következik a másik állítás igaz volta is.
Például „az *n* pozitív egész osztató 5-tel” állítás szükséges és elégséges feltétele „az $n^2$ pozitív egész osztható 25-tel” állításnak. A két állítás nyilván egyszerre igaz.

# Kombinatorika, gráfok[*]

Ha adott $n$ különböző elem, ezek bármely sorrendjét az ***n*** **elem egy permutációjának** nevezzük. Bizonyítható, hogy n elemnek $n$  = $n$ ($n$-1)  … 2 1 különböző permutációja van.

Például 3 elem  $a$, $b$, $c$ különböző permutációinak száma 3  = 6, ezek: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*.

Ha az adott $n$ elem nem mind különböző, akkor **ismétléses permutációról** beszélünk.

Például, ha $n$ elem között $k$, illetve $l$ darab egyforma, de a többi különböző ($n$  $k$+$l$) , akkor az ismétléses permutációk száma: $\frac{n!}{k!\cdot l!}$.

Ha adott $n$ különböző elem és ezek közül $k$-t ($n$  $k$) kiválasztunk, és sorbarendezünk, akkor ***n*** **elem *k*-adosztályú variációját** kapjuk.

Bizonyítható, hogy $n$ elem  $k$-adosztályú variációinak száma $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$.

Például az $a$, $b$, $c$, $d$ elemek másodosztályú variációinak száma 4 3=12, ezek: *ab*, *ac*, *ad*, *ba*, *bc*, *bd*, *ca*, *cb*, *cd*, *da*, *db*, *dc*.

Ha ugyanazokat az elemeket többször is választhatjuk, akkor **ismétléses variációról** beszélünk. $n$ elem $k$-ad osztályú ismétléses variációinak ($n$  $k$) száma $n^k$.

Egy ***n*** **elemű halmaz *k* elemű részhalmazainak** ($n$  $k$) **száma**

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\binom{n}{k}.$$

Ezeket a részhalmazokat az ***n*** **elem *k*-adosztályú kombinációinak** is nevezzük.

Az $\binom{n}{k}$ szimbólum az un. **binomiális együttható.** Így olvassuk: „$n$ alatt a $k$” .

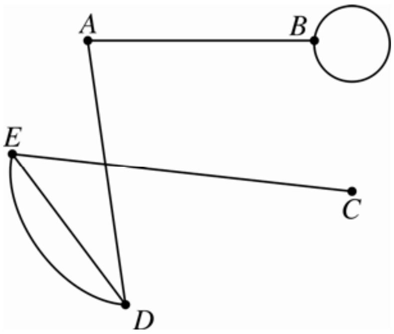
Például  „4 alatt a 3”: $\binom{4}{3}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}=4$.

[*] 9. évfolyam 3. modulja, 10. évfolyam 10. modulja, 11. évfolyam 1. modulja (0903, 1010, 1101)

Bizonyítható, hogy az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatók a **Pascal háromszög** $n$-edik sorának $k$-adik elemei. A Pascal-háromszög első 6 sora:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

A **gráf pontok**ból és a pontpárokat összekötő **élek**ből áll. Az ábrán például egy öt pontból és 6 élből álló gráf látható:




Az $E$ és $D$ pontok között 2 él is vezet, ekkor **többszörös élről** beszélünk. A $B$ pontot önmagával köti össze él, ez **hurokél**. A **gráf egyszerű,** ha nincs benne többszörös él és hurokél.

# Számelmélet*

A leggyakrabban alkalmazott számhalmazok jelölésére a következő jeleket használják:

**természetes számok: N,**

**egész számok: Z,**

**racionális számok: Q,**

**irracionális számok: Q*,**

**valós számok: R.**

További megállapodások is szokásosak, például a pozitív egész számok halmazát így is jelölik: $\mathbf{Z}^+$, vagy a nemnegatív valós számok halmazának jele: $\mathbf{R}_0^+$.

A számok körében értelmezett **összeadás** és **szorzás** műveletére a következő alapazonosságok érvényesek:

az **összeadás kommutatív,** azaz bármely *a* és *b* esetén $a+b=b+a$,

az **összeadás asszociatív,** azaz bármely *a*, *b* és *c* esetén $(a+b)+c=a+(b+c)$,

a **szorzás kommutatív,** azaz bármely *a* és *b* esetén $a\cdot b=b\cdot a$,

a **szorzás asszociatív,** azaz bármely *a*, *b* és *c* esetén $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$,

a **szorzás az összeadásra nézve disztributív,** azaz összeget tagonként szorozhatunk, vagyis bármely *a*, *b* és *c* esetén $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

Az egész számok körében elvégezhető a **kivonás,** ez azt jelenti, hogy minden *a*, *b*  **Z**-hez van olyan *x*  **Z**, hogy $a+x=b$. Ezt az *x*-et így jelöljük: $b-a$.

A racionális számok körében a 0-val való osztás kivételével az **osztás** is elvégezhető, ez azt jelenti, hogy minden *a*, *b*  **Q**-hoz ha *a*  0, van olyan *x*  **Q**, hogy $a\cdot x=b$. Ezt az *x*-et így jelöljük: $\frac{b}{a}$.

Az egész számok körében célszerű értelmezni az oszthatóságot. Ha *a*, *b*  **Z**, azt mondjuk, hogy ***a* osztója *b*-nek**, ha van olyan *c*  **Z**, hogy $a\cdot c=b$. Azt, hogy *a* osztója *b*-nek, így jelöljük: *a*  *b*. Ha *a*  *b*, akkor azt is mondjuk, hogy ***b* többszöröse *a*-nak.**

Például 3 osztója 18-nak, mert 3 6 = 18. És természetesen 18 többszöröse a 3-nak.

---

* 9. évfolyam 4. modulja (0904)

Egy pozitív egész szám **prímszám** (vagy törzsszám), ha pontosan két pozitív osztója van. Igazolható, hogy **végtelen sok prímszám van**.
Például 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 prímszámok.

Egy pozitív egész szám **összetett szám**, ha kettőnél több pozitív osztója van.
Például 4, 6, 8, 10, 15 összetett számok. Az 1 nem prímszám és nem is összetett szám, mert csak egy pozitív osztója van (önmaga).

A **számelmélet alaptétele** azt mondja ki, hogy minden 1-nél nagyobb pozitív egész (a sorrendtől eltekintve) egyértelműen bontható fel prímszámok szorzatára.
A következő **oszthatósági szabályok** igazolhatók:

$2\ a$ akkor és csak akkor, ha $a$ páros szám, vagyis az utolsó számjegye páros,

$4\ a$ akkor és csak akkor, ha az $a$ szám utolsó két számjegyéből alkotott kétjegyű szám osztható 4-gyel,

$8\ a$ akkor és csak akkor, ha az $a$ szám utolsó három számjegyéből alkotott háromjegyű szám osztható 8-cal,

$5\ a$ akkor és csak akkor, ha az $a$ szám utolsó számjegye 0 vagy 5,

$3\ a$, illetve $9\ a$ akkor és csak akkor, ha az $a$ szám számjegyeinek összege osztható 3-mal, illetve osztható 9-cel,

$6 \mid a$ akkor és csak akkor, ha $2 \mid a$ és $3 \mid a$,

$10^k \mid a$ akkor és csak akkor, ha az $a$ utolsó $k$ jegye 0.

Az ***a* és *b* egész számok legnagyobb közös osztója** $d$, ha $d$ osztója $a$-nak is, $b$-nek is, továbbá $a$ és $b$ minden közös osztója osztója $d$-nek. Jelölése: $d = (a, b)$.
Például (18,60) = 6.

Az ***a* és *b* egész számok legkisebb közös többszöröse** $k$, ha $k$ többszöröse $a$-nak és $b$-nek is, valamint $a$ és $b$ minden közös többszöröse többszöröse $k$-nak is. Jelölése: $[a, b] = k$.
Például 12,18 = 36.

Az $a$ és $b$ egész számokról azt mondjuk, hogy **relatív prímek,** ha $(a,b) = 1$.

Az ***a* pozitív egész szám tízes számrendszerbeli alakja** a következő:

$$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... a_k \cdot 10^k ,$$

ahol $a_0$, $a_1$, …,$a_k$ a 0,1,2,…, 9 számjegyek valamelyike, és $a_k$ 0.

Például $523 = 3 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 10^2$ .

Szokták a számok fenti felírását **helyiértékes** írásmódnak is nevezni.

Például az 523 számban az 5 számjegy helyiértéke 100, ugyanakkor az alaki értéke 5, a 2 számjegy helyiértéke 20, az alaki értéke 2.

Az *a* pozitív egész szám **kettes számrendszerbeli** alakja a következő:

$$a = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + ... a_k \cdot 2^k ,$$

ahol $a_0$, $a_1$, $a_2$,…,$a_k$ a 0 és 1 számjegyek valamelyike, és $a_k = 1$. Például a 10-es számrendszerbeli 13 a kettes számrendszerben: $13 = 1+0\ 2+1\ 2^2+1\ 2^3 = 1101_2$ .

# A valós számkör; műveletek*

A **racionális számok Q** halmaza azokból a számokból áll, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként: $\mathbf{Q} = \left\{ r \mid r = \frac{p}{q};\ p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0 \right\}$. Igazolható, hogy a racionális számok felírhatók véges, vagy periodikus (szakaszos) végtelen tizedestörtben.

Például $\frac{4}{25} = 0{,}16$, $\frac{1}{7} = 0{,}\dot{1}4285\dot{7}...$, $\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}...$ .

Az **irracionális számok** végtelen nem szakaszos tizedestörtek. Az irracionális számok halmazát szokás $\mathbf{Q}^*$-gal jelölni.

Például: 0,12112111211112… vagy $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$.

A **valós számok R** halmaza a racionális és az irracionális számok halmazának egyesítése:
$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\ \ \mathbf{Q}^*$.

Ha egy adott egyenesen kijelölünk két, a 0-nak és 1-nek megfelelő pontot, akkor egy **számegyenest** adtunk meg. A 0-tól az 1 felé mutató irány a pozitív, az ezzel ellentétes irány a negatív.


A számegyenes minden pontjának megfelel egy valós szám, és fordítva, minden valós számnak megfelel egy pont a számegyenesen. Gyakran a valós számot és a neki megfelelő pontot egymással azonosítják.

Az $a$ **R** valós szám $a$ **abszolút értéke** (szemléletesen az $a$-nak megfelelő pont 0-tól való távolsága) :

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ ha } a \geq 0 \\ -a, \text{ ha } a < 0. \end{cases}$$

Az $a$ **R** szám **normálalakja** az $a = b \cdot 10^k$ alakú felírás, ahol 1 $b$ 10 és $k$ **Z**.

Például 0,00003 normálalakja $3 \cdot 10^{-5}$, 200 normálalakja $2 \cdot 10^2$, és 0,000123 normálalakja $1{,}23 \cdot 10^{-4}$.

* 9. évfolyam 4. modulja, 10. évfolyam 2. modulja (0904, 1002)

# Hatvány, gyök, logaritmus*

### A hatvány definíciója

A definíció a kitevő szerinti esetszétválasztással adható meg:

ha $a$ **R** és $n$ 1 egész, akkor $a^n = a\ a\ \ldots\ a$ ($n$ tényezős szorzat),

$n=1$ esetén $a^1 = a$;

ha $a$ **R** és $a$ 0, akkor $a^0 = 1$;

ha $a$ **R** és $a$ 0, valamint $n$ 0 egész, akkor $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;

ha $n$ 1 egész és $a$ 0 valós szám, akkor $a^{\frac{1}{n}}$ az a nemnegatív valós szám, amelynek $n$-edik hatványa $a$;

ha $p$, $q$ **Z**, $q$ 0, $(p,q) = 1$ és $a$ 0, akkor $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

Az irracionális kitevő esetére is lehet definiálni pozitív alap hatványát. Így $a$ 0 esetén minden $x$ valós kitevőre értelmezhető az $a^x$ hatvány értéke.

### A hatványozás azonosságai

Tetszőleges $a,b \in \mathbf{R}^+$ alapok és $x,y \in \mathbf{R}$ kitevők esetén érvényesek a következő azonosságok:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},\qquad \left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y},\qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},\qquad (a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x,\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

### Az *n*-edik gyök definíciója

Ha $a$ 0, és $n$ 0 egész szám, akkor $\sqrt[n]{a}$ jelöli azt a pozitív valós számot, amelynek $n$-edik hatványa $a$. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Például $\sqrt[4]{16} = 2$, mert $2^4 = 16$.

Speciális esetként ha $n = 2$, $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ jelöli azt a nemnegatív számot, amelynek négyzete $a$.

Például: $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$, $\sqrt{169} = 13$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

---

* 10. évfolyam 2. modulja, 11. évfolyam 2. modulja, 11. évfolyam 4. modulja (1002, 1102, 1104)

**A négyzetgyökvonás azonosságai**

Ha $a, b$ 0, akkor $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$,

ha $a$ 0, $b$ 0, akkor $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,

ha $a$ 0 és $n$ valós szám, akkor $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$.

**A logaritmus definíciója**

Ha $a > 0$, $a \neq 1$, és $b > 0$ valós számok, akkor $\log_a b$ az a valós kitevő, amire teljesül, hogy $a^{\log_a b} = b$. A 10 alapú logaritmus jelölése lg.

Például $\log_2 64 = 6$, $\log_3 \frac{1}{27} = -3$, $\lg 1000 = \log_{10} 1000 = 3$.

**A logaritmus azonosságai**

Ha $a$ 0, $a$ 1 valós szám, akkor tetszőleges $x, y$ 0 valós számok esetén

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$, ahol $k$ tetszőleges valós szám.

Például: $\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 4 \cdot 9 = \log_6 36 = 2$.

Ha $a, b, c$ 0 valós számok és $a$ 1, $c$ 1, akkor $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Például: $\log_3 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 3} = \frac{1}{\log_7 3}$, vagy $\log_3 7 = \frac{\lg 7}{\lg 3}$.

# Algebrai azonosságok*

A valós számok körében érvényesek a következő azonosságok, azaz tetszőleges $a$, $b$ valós számokra igaz, hogy:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$$

Az egyváltozós **polinom** olyan algebrai kifejezés**,** amelyben a változón csak véges számú összeadást, szorzást, számmal való szorzást és egész kitevőjű hatványozást végzünk. Egy egyváltozós polinom rendezéssel (a kijelölt műveletek elvégzésével, és az algebrai azonosságok alkalmazásával) ilyen, ún. **rendezett alak**ra hozható:

$$a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n,$$

ahol az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ számok a polinom együtthatói, és $n$ 0, egész.

Ha a polinom rendezett alakjában $a_0$ 0, akkor a **polinom fokszáma** $n$.

Például az $x^2 - 3x + 2$ másodfokú polinom, a $2x - 5$ elsőfokú polinom, a „–1” 0-adfokú polinom, a $(2x^2 - 3)^3 = 8x^6 - 36x^4 + 54x^2 - 27$ hatodfokú polinom. Érdekesség, hogy abban szoktak megállapodni, hogy a 0 is polinom, de ennek nincs fokszáma.

Ha a polinom együtthatói az egész számok közül kerülnek ki, akkor szokás az **egész számok feletti polinomról** beszélni (egész együtthatós polinomok). Hasonlóan használjuk a **racionális**, vagy **valós számok feletti polinom** kifejezést is (racionális vagy valós együtthatós polinomok).

* 9. évfolyam 16. modulja, 10. évfolyam 3. modulja (0916, 1003)

# Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek*

**Egyenlet**et kapunk, ha két kifejezést az „=” jellel összekapcsolunk.

Például: $\log_2 x = 5$ egyenlet.

**Algebrai egyenletet** kapunk, ha az egyenlőségjellel összekapcsolt kifejezések algebrai kifejezések. Az **algebrai kifejezésben** a változókkal algebrai műveleteket (összeadást, kivonást, szorzást, osztást, gyökvonást) végzünk.

Az egyenletben szereplő ismeretlenek száma szerint beszélünk **egyismeretlenes, kétismeretlenes stb.** egyenletekről.

Például: $x^5 - 3x^2 + 2 = 6x$ egyismeretlenes, az $x^2 + 2x = y^2$ kétismeretlenes egyenlet .

Az egyenlethez rendszerint hozzákapcsolunk egy számhalmazt, amelynek elemei között keressük az **egyenlet megoldása**it, más szóval **gyöke**it, azokat a számokat, amelyeket az ismeretlenek helyére írva az egyenlőség teljesül.

Például az $x^2 = 4$ egyenlet gyökei az egész számok halmazán a 2 és a –2, az $x^2 = 5$ egyenletnek az egész számok halmazán nincs gyöke, de a valós számok halmazán két gyöke is van, a $\sqrt{5}$ és a $-\sqrt{5}$ .

Az **elsőfokú egyismeretlenes egyenlet** olyan algebrai egyenlet, amely $ax + b = 0$ alakra hozható, ahol $a \neq 0$ és $b$ valós számok. Ennek az egyenletnek a gyöke $x = -\dfrac{b}{a}$.

Az $|ax + b| = c$ alakú egyenletet **abszolútértékes egyenletnek** nevezzük $(a, b, c \in \mathbf{R})$.

A **másodfokú egyismeretlenes egyenlet** olyan algebrai egyenlet, amely $ax^2 + bx + c = 0$ alakra hozható, ahol $a$ 0, és $a$, $b$, $c$ valós számok.

A **másodfokú egyenlet megoldóképlete:** $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

---

* 9. évfolyam 16. és 17. modulja, 10. évfolyam 3. modulja, 10. évfolyam 6. és 7. modulja, 11. évfolyam 3. modulja (0916, 0917, 1003, 1006, 1007, 1103)

A valós számok körében megoldás akkor van, ha a $D = b^2 - 4ac \ge 0$. A $D$ számot a másodfokú egyenlet **diszkrimináns**ának nevezzük.
Ha $D > 0$, akkor két valós gyök van, ha $D = 0$, akkor egy valós (úgynevezett kétszeres) gyök van, és ha $D < 0$, akkor nincs valós gyöke az egyenletnek.

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \ne 0)$ másodfokú egyenlet két valós gyöke $x_1$ és $x_2$, akkor igazolható, hogy az egyenlet $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ alakba írható. Ez az egyenlet **gyöktényezős alakja.**
A gyökök és együtthatók között fennállnak a következő összefüggések (**Viète-formulák**):

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

**Nem algebrai egyenletek**

**Négyzetgyökös egyenletről** beszélünk, ha a változó (ismeretlen) négyzetgyökjel alatt szerepel. Ha egy egyenletben az ismeretlen a hatványkitevőben áll, **exponenciális egyenletnek** nevezzük. Ha egy egyenletben az ismeretlen logaritmusa szerepel, **logaritmikus egyenletnek** mondjuk. Ha egy egyenletben az ismeretlennek valamely trigonometrikus függvénye ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$), áll, akkor az egyenletet **trigonometrikus egyenletnek** hívjuk.

**Egyenlőtlenségek**

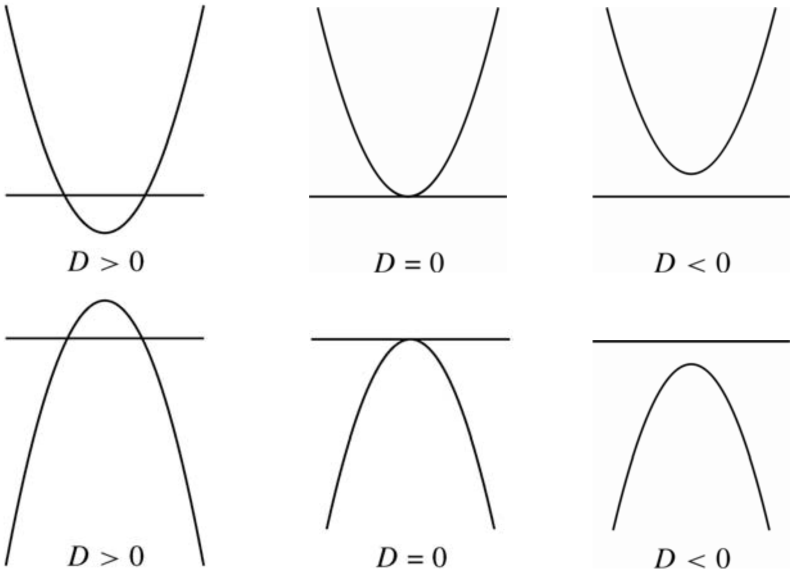
**Egyenlőtlenséget** kapunk, ha két kifejezést <, >, $\le$ vagy $\ge$ jellel összekapcsolunk.
Az **elsőfokú egyismeretlenes egyenlőtlenség** $ax + b \ge 0$ vagy $ax + b < 0$ alakra hozható, ahol $a \ne 0$, $a$ és $b$ valós számok.
Például a $3x - 4 > 2x + 1$ egyenlőtlenség ilyen alakra hozható: $x - 5 > 0$, ennek a megoldásai az $x > 5$ valós számok.

A **másodfokú egyismeretlenes egyenlőtlenség** a következő alakú lehet:

$ax^2 + bx + c \ge 0$, vagy $ax^2 + bx + c > 0$, vagy

$ax^2 + bx + c \le 0$, vagy $ax^2 + bx + c < 0$, ahol $a$, $b$, $c$ valós számok, és $a \ne 0$.

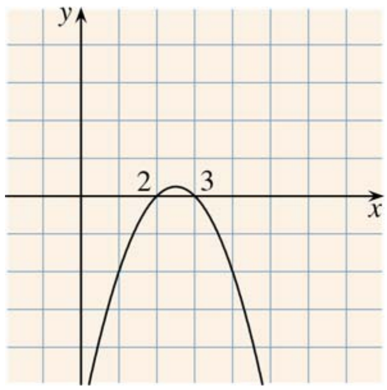
Ha a másodfokú kifejezést függvényként ábrázoljuk, akkor a $D$ diszkrimináns és az $a$ előjelétől függően a következő esetek lehetségesek:




Itt felhasználtuk, hogy a másodfokú függvény képe „felfelé nyíló” parabola, ha $a$ 0, és „lefelé nyíló” ha $a$ 0.

Az ábráról könnyen leolvasható az egyenlőtlenség megoldása.

Például: $-x^2 + 5x - 6$ 0 esetében $a = -1$, azaz $a$ 0, és $D = 1$, így $D$ 0, a parabola képe:




Tehát az egyenlőtlenség megoldása: 2 $x$ 3.

**Az elsőfokú kétismeretlenes két egyenletből álló egyenletrendszer** általában az

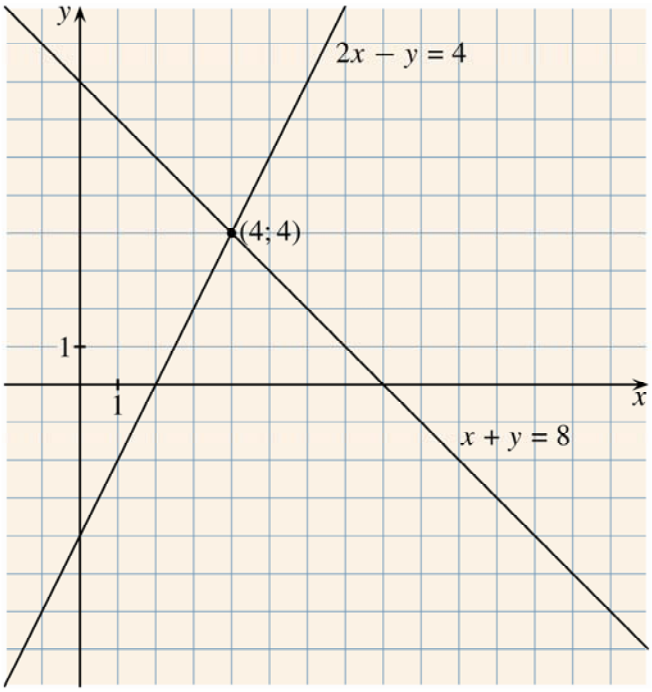
$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c \\ Ax+Bx&=C \end{aligned}\right\}$$

alakba írható, ahol $a$, $b$, $c$, $A$, $B$, $C$ valós számok. Az egyenletrendszer megoldásai azok az ($x$ $y$) valós számpárok, amelyek mindkét egyenletet kielégítik. Szemléltetni mindkét egyenletet a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben lehet. Mindkét egyenlet „képe” egy egyenes. A szemlélet alapján is könnyen leolvasható a megoldás.

Például a

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása az $x = 4$, $y = 4$ számpár. A két egyenes, ami az egyenleteket szemlélteti:



# Középértékek*

Két valós szám, ***a* és *b* számtani közepe** $A = \dfrac{a+b}{2}$. Ezt **aritmetikai középp**nek is szokták nevezni, ezért jelölik $A$-val.

Két nemnegatív szám, $a$ és $b$ ($a, b \geq 0$) **mértani vagy geometriai közepe** $G = \sqrt{ab}$.

Ha $a, b \geq 0$ valós számok, akkor igazolható, hogy $G = \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} = A$.

Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a = b$.

Például 2 és 8 számtani közepe: $\dfrac{2+8}{2} = 5$, mértani közepe $\sqrt{2 \cdot 8} = 4$.

* 10. évfolyam 14. modulja (1014)

# Függvények*

Ha adottak az $A$ és $B$ nem üres halmazok, és egy $f$-fel jelölt hozzárendelés, amely az $A$ minden eleméhez hozzárendeli a $B$ halmaz valamelyik elemét, akkor adott egy **függvény**. A függvény tehát ezt a három dolgot együtt jelenti: $A$, $B$ és $f$.

Az $A$ halmaz a függvény **értelmezési tartománya,** a $B$ egy **képhalmaza,** és ha $a \quad A$, akkor $f(a) \quad B$ jelöli az $a$-hoz hozzárendelt elemet. Ez a **függvény értéke,** vagy a **függvény helyettesítési értéke** az $a$ helyen. Szokásos jelölés még: $f$: $A \qquad B$, az $f$ egy olyan hozzárendelés, amely $A$-ból $B$-be képez.

Az $f$ függvény **zérushelyének** nevezzük az értelmezési tartományában az olyan $a$ helyet, amelyre $f(a)=0$ teljesül.

A függvény értelmezési tartományát szokás még így is jelölni: $D_f$ vagy É.T.
A függvény **értékkészlete** a függvényértékek halmaza: $R_f$ vagy É.K.= $f(a) \quad a \quad A$ , azaz az $A$ elemeihez rendelt $B$-beli értékek halmaza.

Például legyen $A = B = \mathbf{N}$, a természetes számok halmaza, és minden természetes számhoz rendeljük a kétszeresét. Ezt a hozzárendelési utasítást így is szokták jelölni: $x \mapsto 2x$. Ha a hozzárendelés jelölésére az $f$ jelet is használjuk, akkor $f(x) = 2x$ a szokásos írásmód.
Az $f$ függvény értelmezési tartománya **N**, értékkészlete a páros természetes számok halmaza.
Másik példánk: $A = B$ a sík pontjainak halmaza, a hozzárendelést pedig úgy értelmezzük, hogy ha $P \quad A$, azaz $P$ a sík egy pontja, akkor $P$ képe legyen a $P$-nek a sík egy kijelölt $t$ egyenesére vonatkozó tükörképe: $P$ . Ebben az esetben a függvény értékkészlete is a sík pontjainak halmaza.

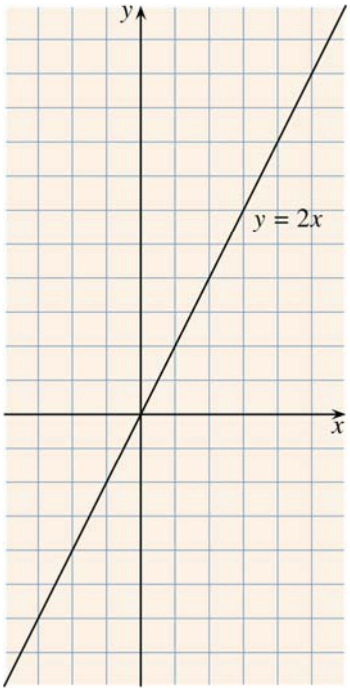
Gyakran vizsgálunk olyan függvényeket, amelyeknek értelmezési tartománya és képhalmaza is számhalmaz, például a valós számok **R** halmazának valamely részhalmaza. Az ilyen függ-

* 9. évfolyam 9.-13. moduljai, 10. évfolyam 5. modulja, 11. évfolyam 3. modulja (0909, 0910, 0911, 0912, 0913, 1005, 1103)

vényeket szokás röviden szám–szám függvényeknek is nevezni. Az első példánk ilyen szám–szám függvény volt, a második nem.

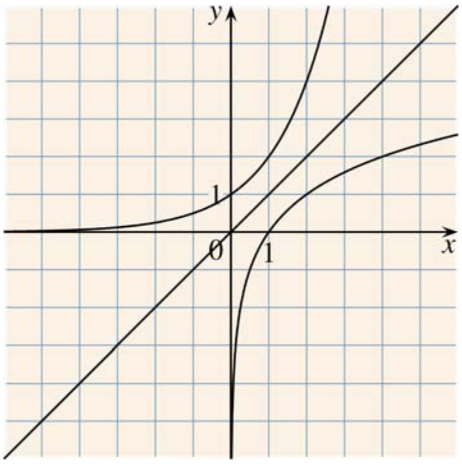
A szám–szám függvények **grafikonjá**nak (képének) nevezzük a derékszögű koordináta-rendszer $G = \{(x; f(x) \quad x \quad \text{É.T.}\}$ ponthalmazát.

Például az $f$: **R**   **R,** $f(x) = 2x$ függvény grafikonja az origón áthaladó $y = 2x$ egyenletű egyenes.

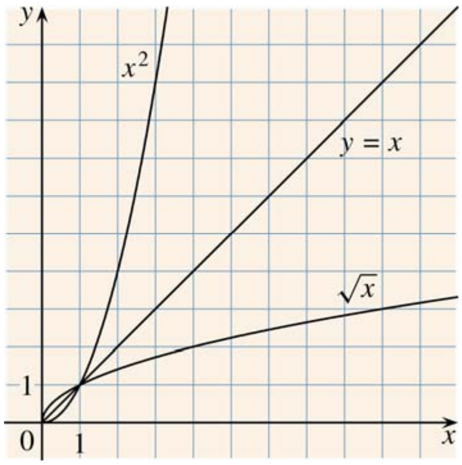



Ha az $f$: $A$   $B$ függvényre teljesül, hogy különböző $A$-beli elemekhez különböző $B$-beli elemeket rendel, akkor $f$-ről azt mondjuk, hogy **kölcsönösen egyértelmű** hozzárendelést jelöl, és $f$-nek van **inverze.** Az $f^{-1}$ függvény, amely $R_f \quad D_f = A$ típusú, és $f^{-1}(b) = a$ akkor és csak akkor, ha $f(a) = b$.

Például az $f$: **R**   **R⁺,** $f(x) = 2^x$ függvény kölcsönösen egyértelmű, van inverze: $f^{-1}(x) = \log_2 x$. A függvények grafikonja:

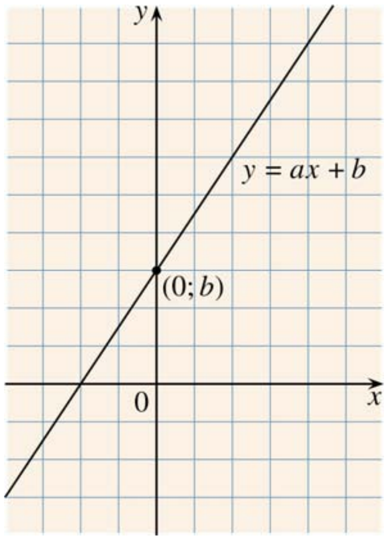



Másik példa: az $f$: $\mathbf{R_0}^+$ $\mathbf{R_0}^+$, $f(x) = x^2$ függvény inverze az $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ függvény. A függvények grafikonja:

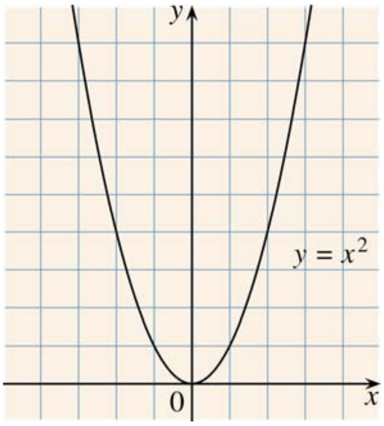



Igazolható, hogy egy függvény és inverz függvényének grafikonja egymás tükörképe az $y = x$ egyenletű egyenesre mint tengelyre.

Az $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$ elsőfokú, vagy lineáris függvény képe egyenes. Az $a$ az egyenes meredeksége, $b$ pedig az $y$ tengelyből lemetszett szakasz előjeles hossza.

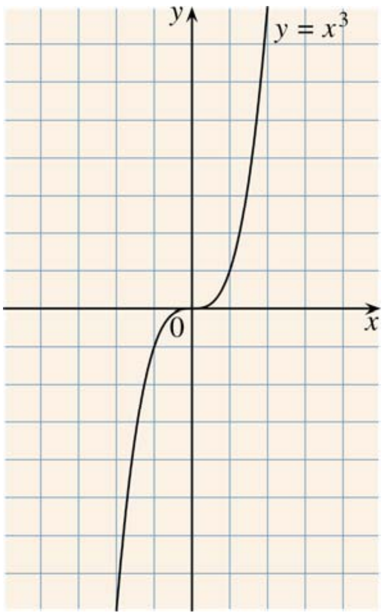


Az *f*: **R** **R**, $f(x)=x^2$ másodfokú függvény képe az ún. normál parabola.



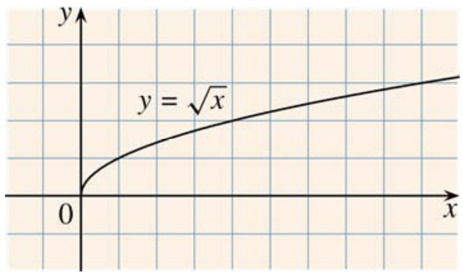

A függvény értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza, a függvény a $\left]-\infty;0\right]$ intervallumon csökken, a $\left[0;+\infty\right[$ intervallumon nő.

Az *f*: **R** **R**, $f(x)=x^3$ harmadfokú függvény képe az ún. harmadfokú „parabola”.



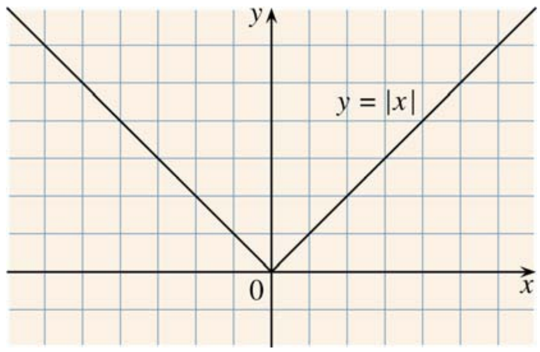

A függvény értékkészlete a valós számok halmaza, és a függvény az egész számegyenesen szigorúan nő.

Az $f$: $\mathbf{R}_0^+$   $\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ függvény képe egy félparabola.



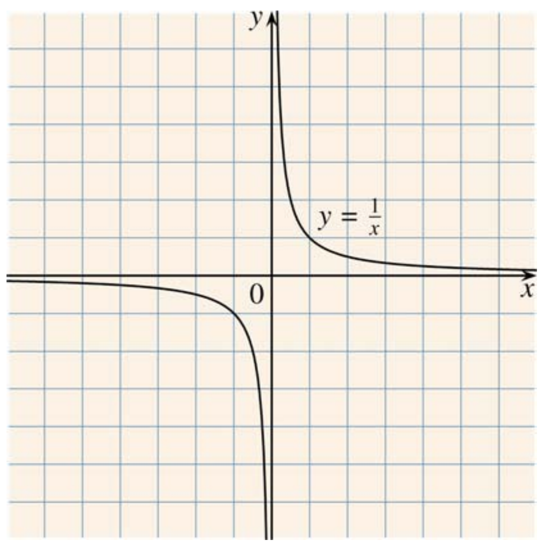

Értékkészlete a $[0;+\infty[$ intervallum, az értelmezési tartományában a függvény szigorúan nő.

Az $f$: $\mathbf{R}$   $\mathbf{R}$, $f(x)=|x|$ függvény képe két egymáshoz csatlakozó félegyenes,



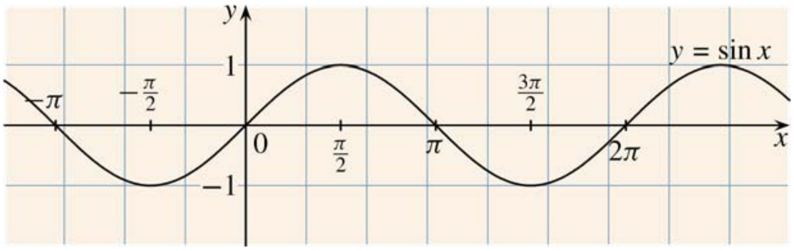

értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza, a $]-\infty;0]$ intervallumban csökken, a $[0;+\infty[$ intervallumban nő.

Az $f$: $\mathbf{R}\setminus\{0\}$   $\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ függvény grafikonja egyenlő oldalú hiperbola.



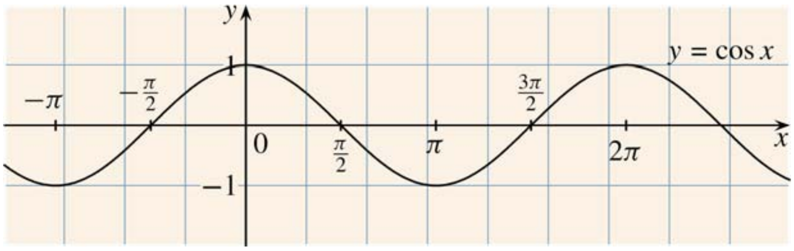
A függvény értékkészlete a 0-tól különböző valós számok halmaza, és $]-\infty;0[$-ban is és $]0;+\infty[$-ben is külön-külön csökken. Érdekessége a függvény grafikonjának, hogy a görbe „két darabból” áll.

Az f: **R** → **R**, $f(x)=\sin x$ függvény grafikonja egy „hullámvonal”.



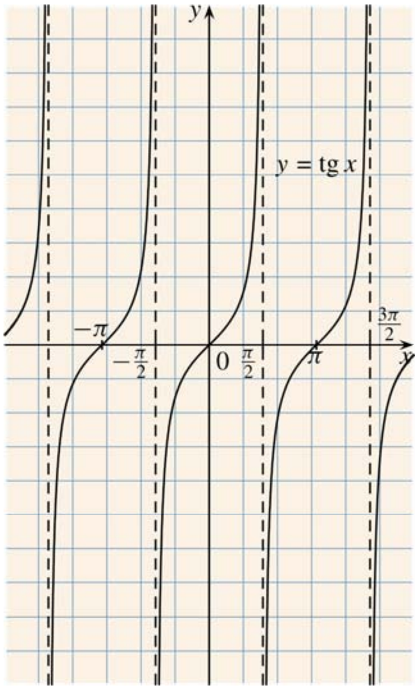

A függvény értékkészlete a [–1; 1] intervallum, periodikus, legkisebb pozitív periódusa 2π, azaz sin ($x$ + 2π) = sin $x$ minden $x$-re. A függvény zérushelyei a $k\pi$ alakú számok ($k \in$ **Z**), páratlan függvény, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ben és $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$-ben nő, $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$-ben csökken.

Az $f$: **R** → **R**, $f(x)=\cos x$ függvény grafikonja is „hullámvonal”.



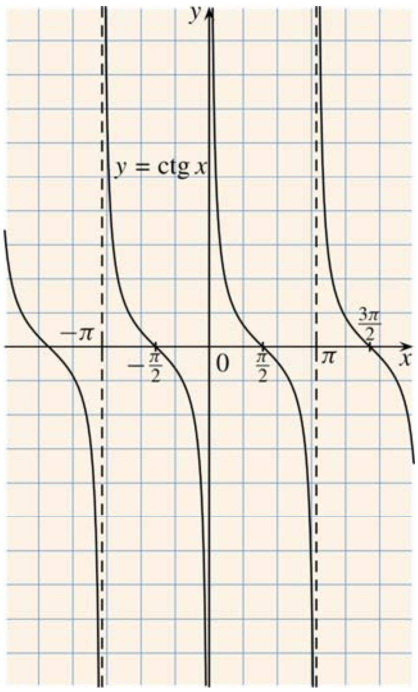

A függvény értékkészlete a [–1,1] intervallum, periodikus, legkisebb pozitív periódusa 2π, azaz $\cos(x+2\pi)=\cos x$ minden $x$-re. A függvény zérushelyei a $\frac{\pi}{2}+k\pi$ alakú számok ($k \in$ **Z**), páros függvény, $[0;\pi]$-ben csökken, $[\pi;2\pi]$-ben nő.

Az $f$: $\mathbf{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k \quad k \quad \mathbf{Z}\}$ $\quad$ $\mathbf{R}$, $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ függvény grafikonja:



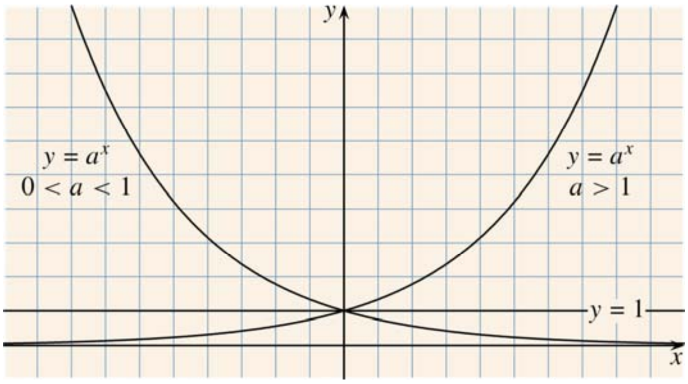

A függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa , azaz tg ($x$ + ) = tg $x$ minden olyan $x$-re, ami az értelmezési tartományába tartozik, zérushelyei a $k$ , $k$ $\mathbf{Z}$ alakú számok, páratlan függvény, $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ -ben nő.

Az $f$: $\mathbf{R}\setminus\{k \quad k \quad \mathbf{Z}\}$ $\quad$ $\mathbf{R}$, $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$ függvény grafikonja:

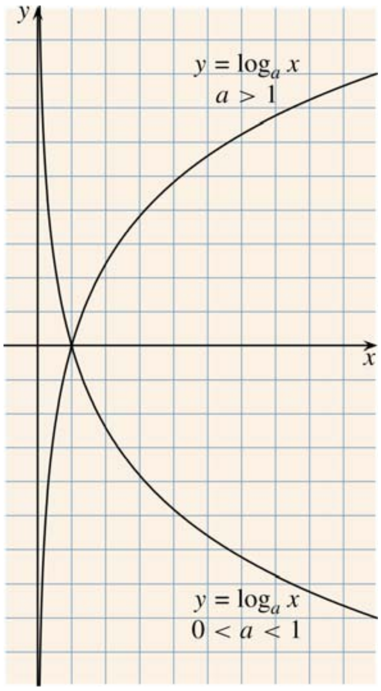


A függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa , azaz ctg($x$ + ) = ctg $x$ minden olyan $x$-re, ami az értelmezési tartományba tartozik, zérushelyei a $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k$ **Z** alakú számok, páratlan függvény, $]0;\pi[$-ben csökken.

Az $a$ 0, $f$: **R** **R,** $f(x)=a^x$ **exponenciális függvény** grafikonja:



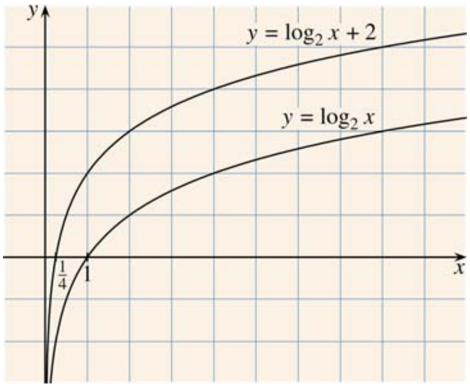

Az $a$ 1 alapú exponenciális függvény szigorúan nő, a 0 $a$ 1 alapú pedig szigorúan csökken, mindkét típusú függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza.
Az 1 alapú exponenciális függvény konstans, értéke minden $x$-re 1.
Az 1-től különböző pozitív alapú exponenciális függvényeknek van inverze, ezek a **logaritmusfüggvény**ek. Ha $a$ 0, $a$ 1, akkor az $f$: $\mathbf{R}^+$ **R,** $f(x)=\log_a x$ függvény (az „$a$ alapú logaritmusfüggvény”) grafikonja:

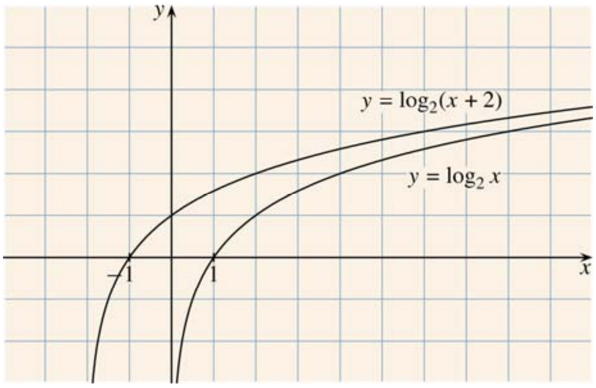


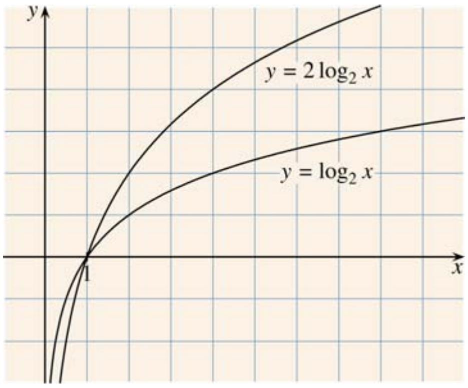
Az $a > 1$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan nő, a $0 < a < 1$ alapú pedig szigorúan csökken. Értékkészlete az összes valós szám, zérushelye az $x = 1$.

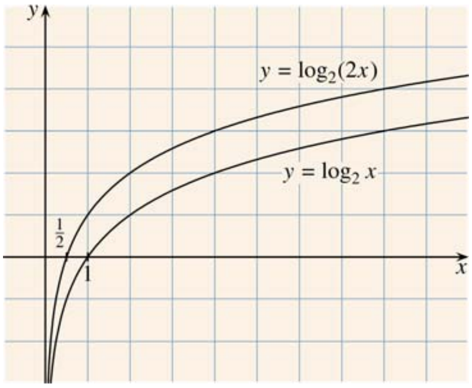
A **függvénytranszformáció**kat a következő példán mutatjuk be.

Ábrázoljuk az $f$: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_2 x$ függvény következő transzformációival kapott függvények grafikonját: $f(x)+2$, $f(x+2)$, $2f(x)$, $f(2x)$.




Az $f(x)+2$ grafikonja az $f(x)$ grafikonjából úgy adódik, hogy 2-vel eltoljuk a képet az $y$ tengely irányában. Az $f(x+2)$ grafikonját úgy kapjuk az $f(x)$ grafikonjából, hogy –2-vel toljuk el az $x$ tengely irányában. A $2f(x)$ grafikonja úgy adódik, hogy az $f(x)$ képét kétszeresére nyújtjuk az $y$ tengely irányában. Az $f(2x)$ grafikonját pedig úgy kapjuk, hogy $f(x)$ grafikonját az $x$ tengely irányában felére zsugorítjuk.

Általában 2 helyett tetszőleges $c > 0$ valós számra is hasonló módon lehet elvégezni a transzformációt.

Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény az értelmezési tartomány $I$ intervallumában **nő (csökken)**, ha bármely $x_1$ $x_2$, $x_1,x_2$ $I$ esetén $f(x_1) \le f(x_2)$, illetve $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

Az $f$ függvénynek az értelmezési tartomány egy $a$ helyén **helyi szélsőértéke** (maximuma, ill. minimuma) van, ha az $a$ egy, az értelmezési tartománybeli környezetében $f(a)$-nál nagyobb (illetve kisebb) függvényérték nincs.

Például az $f$: **R** **R**, $f(x) = \sin x$ függvénynek a $\frac{\pi}{2}$ helyen maximuma van, a maximum értéke 1, a $\frac{3\pi}{2}$ helyen pedig minimuma van, a minimum értéke $-1$.

Az $f$ függvényről azt mondjuk, hogy **periodikus** és periódusa $T$, ha az értelmezési tartományhoz tartozó bármely $x$ értékre $x + T$ is az értelmezési tartományhoz tartozik, és $f(x + T) = f(x)$.

Például a tg $x$ függvény szerint periodikus.

Az $f$ függvényről azt mondjuk, hogy **páros függvény**, ha az értelmezési tartományába tartozó tetszőleges $x$ számra $-x$ is az értelmezési tartományhoz tartozik, és $f(-x) = f(x)$. Egy páros függvény grafikonja szimmetrikus az $y$ tengelyre.

Például a cos $x$, vagy az $x^2$ függvény páros.

Az $f$ függvényről azt mondjuk, hogy **páratlan**, ha az értelmezési tartományhoz tartozó tetszőleges $x$-re $-x$ is az értelmezési tartományhoz tartozik, és $f(-x) = -f(x)$ . Egy páratlan függvény grafikonja szimmetrikus az origóra.

Például a sin $x$, vagy az $\frac{1}{x}$ függvény páratlan.

# Sorozatok*

**Számsorozat**nak nevezzük az olyan függvényt, amelynek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza, képhalmaza pedig a valós számok halmaza. Előfordulhat, hogy a természetes számok halmazából elhagyjuk az első néhány elemet, és a megmaradó halmaz alkotja a függvény értelmezési tartományát.

Például $f$: **N**   **R**: $f(n)=\frac{1}{2^n}$, vagy $g$: **N**$\setminus\{0\}$   **R**: $g(n)=\frac{1}{n}$ számsorozatok.

A számsorozatokat gyakran a következőképpen jelöljük: $(a_n)_{n\ \mathbf{N}}$, vagy $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n, \ldots$

**Számtani sorozat**nak nevezzük az olyan számsorozatot, amelyben a második tagtól kezdve bármely két szomszédos tag különbsége egy $d$ állandó, azaz $a_{n+1} - a_n = d$, $n = 1, 2, \ldots$.
A $d$ számot a számtani sorozat **differenciájá**nak, vagy **különbségé**nek nevezzük.
Igazolható, hogy **a számtani sorozat *n*-edik tagja** így adható meg**:** $a_n = a_1+(n-1)d$, és a **számtani sorozat első *n* tagjának összege:** $s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n$.

**Mértani sorozatnak** nevezzük az olyan számsorozatot, amelyben a második tagtól kezdve bármely két szomszédos tag hányadosa egy $q$ állandó: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $n = 1, 2, \ldots$ .

A $q$ számot a mértani sorozat **hányadosá**nak vagy **kvóciensé**nek nevezzük.
Igazolható, hogy a **mértani sorozat *n*-edik tagja** így írható: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ és a **mértani sorozat első *n* tagjának összege:** $s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$, ha $q$   1, és $s_n = n\cdot a_1$, ha $q = 1$.

A mértani sorozat definícióját úgy is meg szokták adni, hogy $a_{n+1} = a_n \cdot q$, ekkor a $q = 0$ is lehetséges. Nyilvánvaló, hogy ha $q = 0$, akkor a sorozat a második tagtól kezdve csupa 0-ból áll, ha pedig $a_1 = 0$, akkor a sorozat minden tagja 0. A 0, 0, 0,…,0,… vagy $a_1$   0, 0, 0, …,0,… sorozatot tehát szintén a mértani sorozatok közé lehet sorolni.

* 12. évfolyam 1. modulja (1201)

# Arányosság, százalékszámítás[*]

Azt mondjuk, hogy két változó mennyiség – $x$ és $y$ – egymással **egyenesen arányos**, ha az $x$ valahányszoros változása az $y$ ugyanannyiszoros változását vonja maga után. Az egyenes arányosságot az $y = ax$ ( $a$ 0) egyenlőség jellemzi, $a$ az arányossági tényező.

Például egyenesvonalú egyenletes mozgás esetén az idő és a megtett út egyenesen arányos. Ha a sebesség $a$, akkor az út–idő kapcsolat: $s = at$.

Azt mondjuk, hogy két változó mennyiség – $x$ és $y$ – **fordítottan arányos,** ha $x$ valahányszoros növekedése $y$ ugyanannyiszoros csökkenését vonja maga után, és fordítva, $x$ valahányszoros csökkenése $y$ ugyanannyiszoros növekedését eredményezi. A fordított arányosságot az $y = \frac{a}{x}$, ( $a$ 0) egyenlőség jellemzi, $a$ itt is az arányossági tényező.

Például, ha a téglalap területe egy $t$ állandó érték, akkor a két szomszédos oldal hosszának kapcsolatát fordított arányosság írja le. Ha a két oldal hossza $x$ és $y$, akkor nyilván $y = \frac{t}{x}$.

Az $x$ mennyiség (szám) 1 **százalékán** – jelölése: 1% – az $x$ század részét, azaz $\frac{x}{100}$-at értjük.

Az $x$ mennyiség $p$ százaléka $y = p \cdot \frac{x}{100}$. Szokásos elnevezések még: $x$ az **alap,** $p$ a **százalékláb,** és $y$ a **százalékérték.** A három mennyiség közül bármelyik kettő ismeretében a harmadik kiszámítható.

Például 240-nek a 15 százaléka: $15 \frac{240}{100} = 15\ 2{,}4 = 36$.

A **kamat** a pénz használata után fizetendő díj, rendszerint évente számolják. A kamatot a százalékban megadott **kamatláb** határozza meg.

Például, ha a kamatláb 8%, akkor a kamat évente a pénzösszeg 8%-a.

[*] 9. évfolyam 5. modulja (0905)

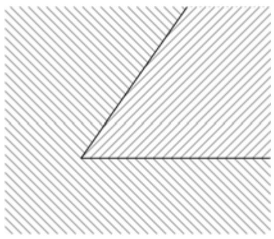
**Kamatos kamat**ról beszélünk, ha a pénzt több évig használja a kölcsönvevő (bank), és a kamatot a hitelező nem veszi fel. Ekkor a kamatot minden év végén hozzáadják az akkori összeghez, és ezután már az így megnövelt összeg kamatozik.

Ha $x$ összeget $p$ %-os kamatra vesznek kölcsön, akkor az $n$-edik év végére a kamatokkal felnövekedett összeg: $x\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$. Ez egy $1+\frac{p}{100}$ hányadosú mértani sorozat.

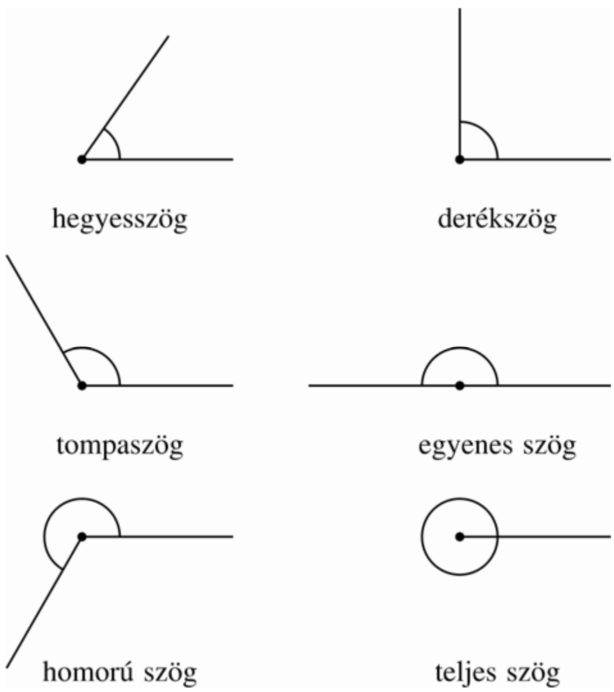
# Térelemek, ponthalmazok*

A **pont**, az **egyenes** és a **sík** a geometriában **alapfogalmak**, közös néven térelemeknek is szokták nevezni őket. Ezeket nem **definiáljuk**. A **tér** a térelemekből épül fel. Más fogalmakat az alapfogalmak segítségével definiálunk. **Axiómának** nevezünk olyan, szemléletesen nyilvánvaló állításokat, amelyeket felhasználunk más állítások – tételek – bizonyításához.

A síkot egy pontból kiinduló két félegyenes két részre, két **szögtartományra** vagy röviden **szög**re bontja.



A két szögtartomány közös határoló vonala a **szögvonal**, röviden ezt is szögnek szokták nevezni. A két félegyenes a **szög két szára**, a közös pont a **szög csúcsa.** A szögek „fajtái” a következők:



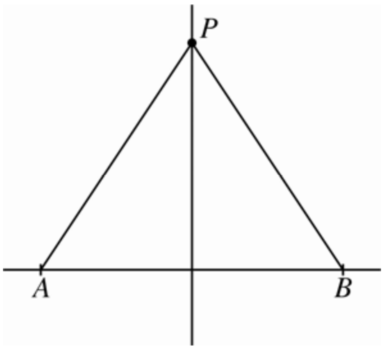

* 9. évfolyam 6. modulja (0906)

**Két pont távolsága** az őket összekötő szakasz hossza. **Pont és egyenes (sík) távolsága** a pontból az egyenesre (síkra) bocsátott merőleges szakasz hossza. **Párhuzamos egyenesek (síkok) távolsága** az egyik egyenes (sík) tetszőleges pontjának a másik egyenestől (síktól) való távolsága.

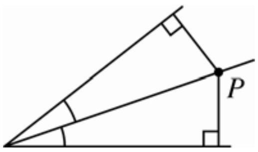
**Egyenes és vele párhuzamos sík távolsága** az egyenes tetszőleges pontjának a síktól mért távolsága. **Két kitérő egyenes távolsága** annak a szakasznak a hossza, amely mindkét egyenesre merőleges, és a szakasz két végpontja a két egyenesen van.

A **kör** azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek egy adott ponttól adott távolságra vannak. Az adott pont a kör **középpontja**, az adott távolság a kör **sugara**.
A **gömb** azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyek egy adott ponttól adott távolságra vannak. Az adott pont a gömb középpontja, az adott távolság a gömb sugara.

Egy **szakaszfelező merőleges** egyenese a síkban azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak.




Egy konvex szög **szögfelezője** azoknak a pontoknak a halmaza a szögtartományban, amelyek a szög két szárától egyenlő távolságra vannak.

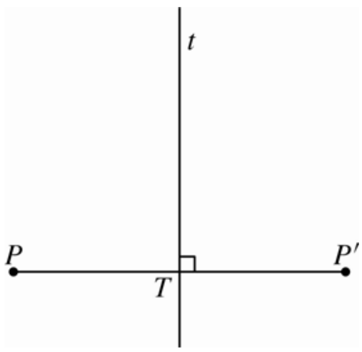


# Egybevágósági transzformációk*

Két síkbeli alakzat **egybevágó**, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi át. A síkbeli egybevágósági transzformációk a következők: **párhuzamos eltolás, tengelyes tükrözés, pontra vonatkozó tükrözés, pont körüli elforgatás, csúsztatva (eltolva) tükrözés** (ez utóbbi jelenleg nem tananyag).
Az egybevágóság távolságtartó és szögtartó.

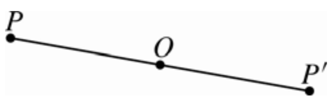
A **párhuzamos eltolás** a síkban olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés, amelynél minden *P* pont és *P´* képe esetén a $\overrightarrow{PP'}$ vektor, az **eltolás vektora** ugyanaz. A párhuzamos eltolás minden egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz át. Az eltolás vektorával párhuzamos egyeneseket önmagába viszi, a **0**-tól különböző vektorral való eltolásnak nincs fixpontja.

A síkban a **tengelyes tükrözés** megadásához meg kell adni egy *t* egyenest, a tükörtengelyt. A sík bármely *P* pontjának képét úgy kapjuk, hogy *P*-ből merőlegest állítunk *t*-re, és ha ennek talppontja *T*, akkor a *PT* egyenes másik oldalára a *P´T* = *PT* távolságot mérjük fel.




A tengelyes tükrözés esetében a *t* pontjai fixpontok, és a *t*-re merőleges egyenes képe önmaga.

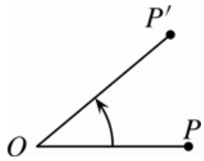
A síkban a **pontra vonatkozó tükrözés**hez meg kell adni egy *O* pontot, a tükrözés középpontját. A sík bármely *P* pontjának *P´* képét úgy kapjuk, hogy a *PO* egyenes *O*-n túli meghosszabbítására rámérjük a *P´O* = *PO* távolságot.




Az *O* képe önmaga, és az *O*-n áthaladó egyenesek önmagukba mennek át.

* 9. évfolyam 15 modulja (0915)

A síkban a **pont körüli elforgatás**hoz meg kell adni egy *O* pontot, a forgatás középpontját, és egy irányított szöget. A sík egy tetszőleges *P* pontjának képe az a *P*´ pont, amelyre teljesül, hogy *P*´*O* = *PO*, és *POP*´ szög a megadott szög.




Ha a megadott szög nem azonos 360° (illetve 2 ) egész számú többszörösével, akkor az *O* pont az egyetlen fixpont. Ha a megadott szög 180° (illetve ) vagy ettől 360° egész számú többszörösében tér el, akkor a *P* pont körüli elforgatás azonos az *O*-ra vonatkozó tükrözéssel.

A **háromszögek egybevágóságának alapesetei** a következők:

két háromszög egybevágó, ha

a) oldalaik páronként egyenlők,

b) két-két oldaluk, és az ezek által bezárt szög egyenlő,

c) két-két oldal, és a nagyobbikkal szemközti szög egyenlő,

d) egy-egy oldal és a rajta lévő megfelelő szögek egyenlők.

**Szimmetrikus alakzat**nak nevezünk egy síkidomot, ha vagy van olyan *t* tengely (az alakzat szimmetriatengelye), amire tükrözve önmagába megy át, vagy van olyan *O* pont és olyan 360°-nál kisebb szög, hogy az alakzatot *O* körül a megadott szöggel elforgatva, önmagába megy át.

Például egy rombusz szimmetrikus bármelyik átlójára, egy szabályos háromszögnek a középpontja szimmetriaközéppont is, e körül 120°-kal elforgatva a háromszög önmagába megy át.

# Hasonlósági transzformációk*

A **középpontos hasonlóság** az a geometriai transzformáció, amelynél adott egy $O$ pont és egy $c$ pozitív valós szám. A sík (vagy tér) egy tetszőleges $P$ pontjának a képe ekkor az $OP$ félegyenesnek az a $P'$ pontja, amelyre igaz, hogy $OP' = c\,OP$. Az $O$ pont a **hasonlóság centruma**, a $c$ a **hasonlóság aránya**. Ha $c > 1$, akkor nagyításról van szó, ha $0 < c < 1$, akkor kicsinyítésről, a $c = 1$ eset egybevágóság. Ekkor a megfelelő szakaszok aránya a $c$ állandó értékkel egyenlő.

Két alakzatot **hasonló**nak mondunk, ha van olyan középpontos hasonlóság, amellyel az egyik alakzatot a másikkal egybevágó alakzattá transzformálhatjuk. Hasonlóság esetén bármely szakasz hosszát elosztva a képének hosszával, ugyanazt a $c > 0$ állandót kapjuk, ez a **hasonlóság aránya.**

**Két háromszög hasonló,** ha megfelelő oldalaik aránya és megfelelő szögeik egyenlők. Két háromszög hasonlóságának elégséges feltétele a következő négy alapeset:

a) megfelelő oldalaik aránya egyenlő,

b) két-két oldaluk aránya és az ezek által bezárt szög egyenlő,

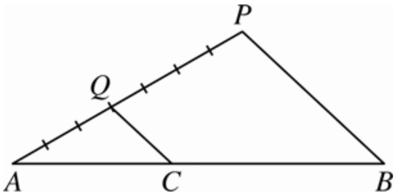
c) két-két oldaluk aránya és a nagyobbik oldallal szemközti szögük egyenlő,

d) két-két megfelelő szögük egyenlő.

Igazolható, hogy **hasonló alakzatok területének aránya** a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő. **Hasonló testek felszínének aránya** is a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő. **Hasonló testek térfogatának aránya** a hasonlóság arányának köbével egyenlő.

* 10. évfolyam 8. modulja (1008)

A középpontos hasonlóság felhasználásával adott szakaszt adott arányban fel tudunk osztani. Például az adott $AB$ szakaszt 3:4 arányban osztó $C$ pontot a következő ábrán látható módon, egy $AP$ segédegyenes segítségével szerkeszthetjük meg:



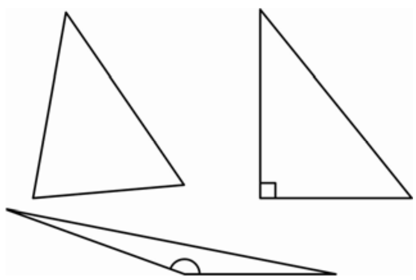

Az $AP$ félegyenesre $A$-tól 7 (=3+4) egyenlő hosszúságú szakaszt mérünk fel, majd a $PB$-vel párhuzamosan a $Q$ harmadik osztópontból húzott egyenes metszi ki $AB$-ből $C$-t.

# Háromszögek*

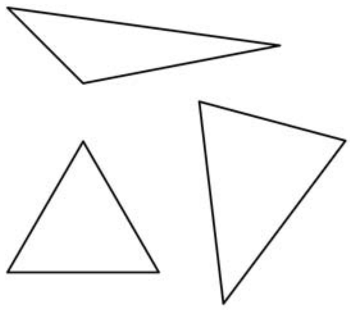
A háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög, kisebb oldallal szemben kisebb szög van. A **háromszög belső szögeinek összege 180°**, és teljesül benne a háromszög-egyenlőtlenség, azaz bármely két oldal hosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hossza.

A háromszög egy **külső szöge** a megfelelő belső szöget 180°-ra kiegészítő szög. A háromszög külső szögeinek összege 360°.

A háromszög szögei szerint lehet **hegyesszögű**, akkor minden szöge hegyesszög, **derékszögű**, akkor egy derékszöge, két hegyesszöge van, és **tompaszögű**, akkor egy tompaszöge és két hegyesszöge van.



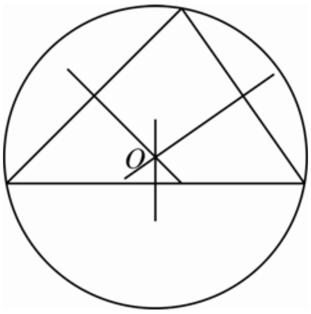
A háromszög oldalai szerint lehet **általános**, **egyenlő oldalú** (szabályos) vagy **egyenlőszárú.**



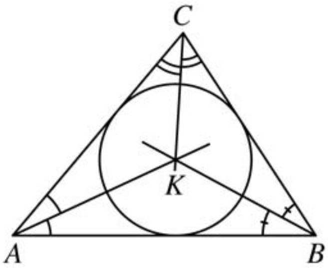
---

* 9. évfolyam 7. modulja (0907)

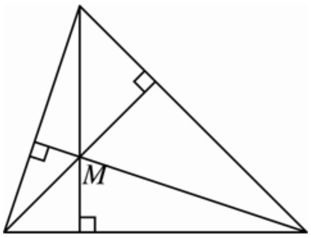
A háromszög **oldalfelező merőlegesei** egy pontban metszik egymást, ez a **háromszög köré írható kör** középpontja.



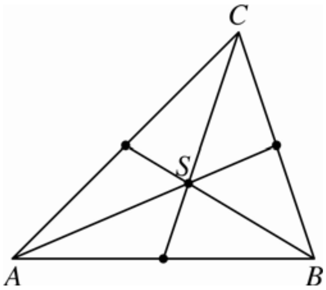

A **háromszög szögfelezői** egy pontban metszik egymást, ez a **háromszögbe írható kör** középpontja.



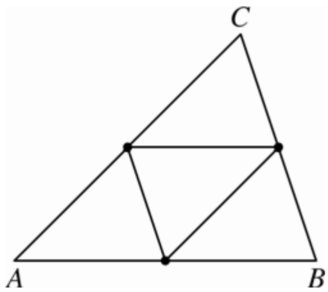

**A** háromszög **magasságvonala** a csúcsból a szemközti oldalegyenesre állított merőleges szakasz. Igazolható, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást, ez a háromszög **magasságpontja**.




A háromszög **súlyvonala** a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával köti össze. Igazolható, hogy a háromszög három súlyvonala egy pontban metszi egymást, ez a pont a háromszög **súlypontja**, és a súlypont a súlyvonalakat a csúcstól számítva 2:1 arányban osztja fel.

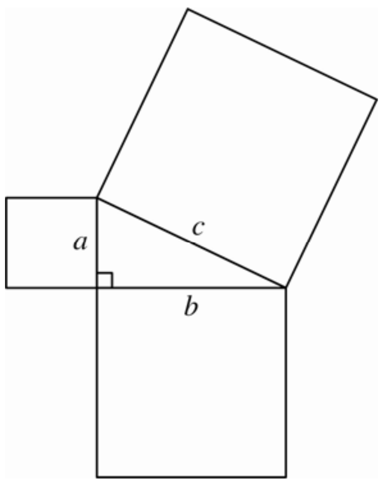


A háromszög **középvonal**ai az oldalak felezőpontjait összekötő egyenesek.



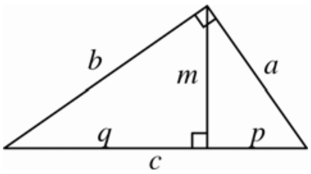

A középvonal párhuzamos azzal az oldallal, amelyiket nem metszi, és hossza éppen fele akkora, mint a vele párhuzamos oldal hossza.

A **Pitagorasz-tétel** azt mondja ki, hogy a derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével, azaz $a^2 + b^2 = c^2$.




A **Pitagorasz-tétel megfordítása** is igaz: ha egy háromszögben két oldal négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

A derékszögű háromszögre érvényes a **befogótétel:** a derékszögű háromszög befogója mértani középarányos az átfogó és az átfogójára eső merőleges vetülete között.

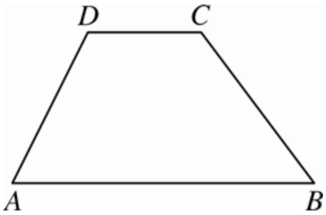



Az ábra jelöléseivel: $a^2 = p \cdot c$, illetve $b^2 = q \cdot c$.

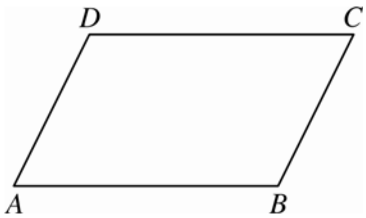
A derékszögű háromszögben érvényes a **magasságtétel** is, amely szerint az átfogóhoz tartozó magasság mértani középarányos az átfogó két szelete között: $m^2 = p \cdot q$.

# Négyszögek, sokszögek*

A négyszögek osztályozását a következő módon célszerű végezni. Ha egy négyszögnek van két párhuzamos oldala, akkor azt **trapéz**nak nevezzük.

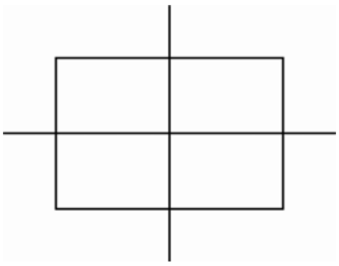



Ha egy négyszögnek van két pár párhuzamos oldala, akkor az **paralelogramma**.

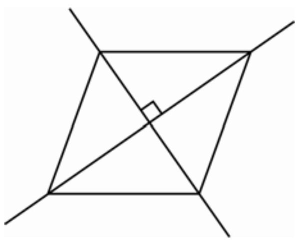



A derékszögű paralelogrammák a **téglalap**ok, az egyenlő oldalú paralelogrammák a **rombu-szok**. Az olyan paralelogramma, amely téglalap is, meg rombusz is, **négyzet.**

A téglalapnak két szimmetriatengelye van, ezek a szemközti oldalak felezőpontjait kötik ösz-sze.

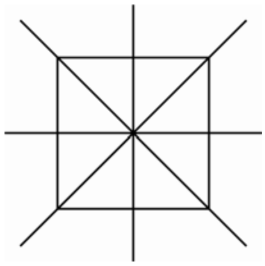


A rombusz két átlója szimmetriatengely.

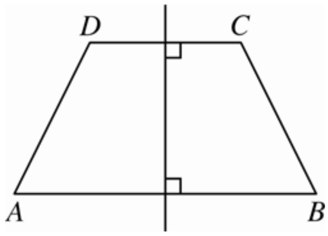


* 9. évfolyam 8. modulja

A négyzetnek négy szimmetriatengelye van.

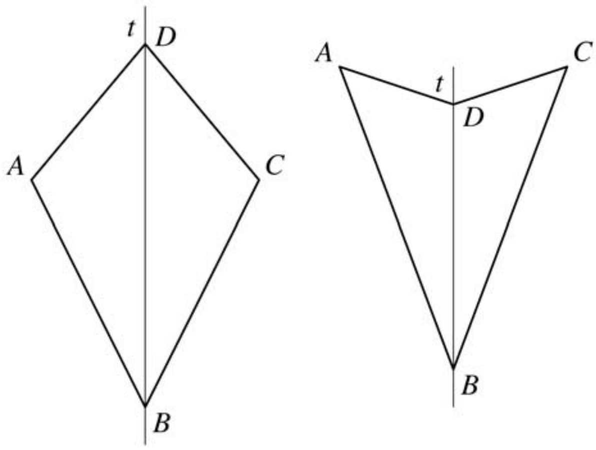


**Szimmetrikus trapéz**nak (húrtrapéznak) nevezzük az olyan trapézt, amelynek van szimmetriatengelye.




A szimmetrikus trapéz két szára egyenlő hosszú: $AD = BC$.

A **deltoid** olyan négyszög**,** amelynek két-két szomszédos oldala egyenlő. A deltoidnak is van szimmetriatengelye.

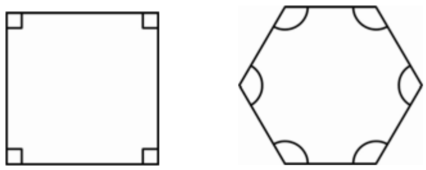


Egy **konvex négyszög belső szögeinek összege** 360°, **külső szögeinek összege** is 360°.

A **konvex *n*-szög (*n*  3) belső szögei**nek összege $(n-2)\ 180°$, **külső szögei**nek összege 360°.

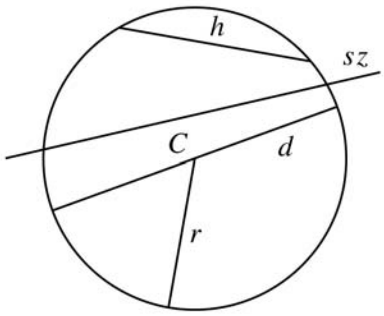
Egy **konvex *n*-szög (*n*  3) átlóinak száma** $\frac{n(n-3)}{2}$.

Egy konvex **sokszög szabályos**, ha oldalai és szögei is egyenlők. Az ábrán egy szabályos négyszög (négyzet) és egy szabályos hatszög látható:

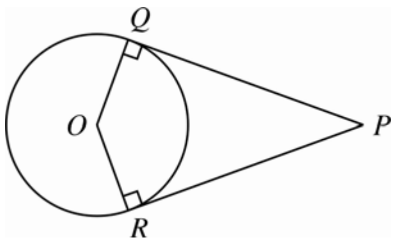


# Kör*

A **kör sugara** a kerület egy pontjának a középponttól mért távolsága, **átmérője** a sugár kétszerese. A **kör húrja** két kerületi pontot összekötő szakasz hossza. Az olyan egyenest, amelynek két közös pontja van a körrel, a **kör szelő**jének nevezzük.

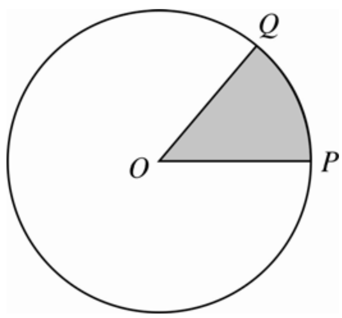


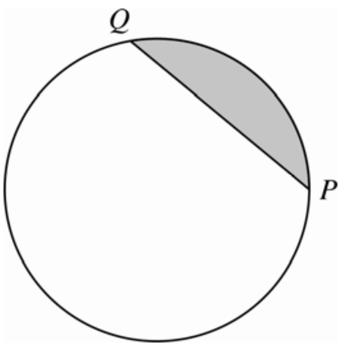

A **kör érintője** olyan egyenes, amelynek egy közös pontja van a körrel. A közös pont az érintési pont. Az érintési ponthoz húzott sugár merőleges az érintő egyenesére.




A külső $P$ pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak: $PQ = PR$.

A körből két sugár egy **körcikk**et metsz ki.

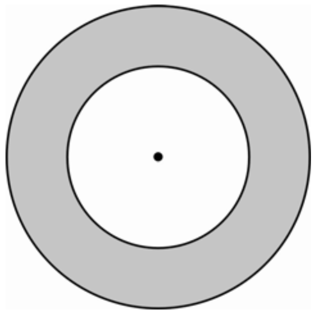


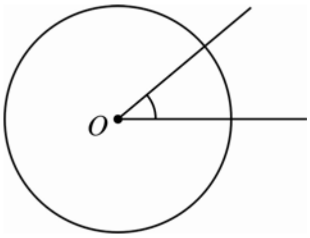

A **körszelet**et egy húr és a hozzá tartozó körív határolja.

* 9. évfolyam 19. modulja, 10. évfolyam 4. modulja (0919, 1004)

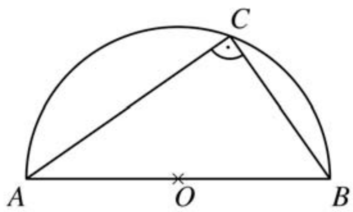
**Körgyűrű**t alkot két koncentrikus kör.



Egy körben **középponti szög**nek nevezzük a két sugár egyenese által alkotott szöget. A középponti szög azon az íven nyugszik, amely a szögtartomány belsejébe esik.




A **Thalész-tétel** azt mondja ki, hogy a félkörívhez tartozó kerületi szög derékszög. Másképpen fogalmazva, a kör átmérője a kör tetszőleges (az átmérő két végpontjától különböző) pontjából derékszögben látszik.
Megfordítva is igaz: egy derékszögű háromszög köréírt körének középpontja az átfogó felezőpontja.



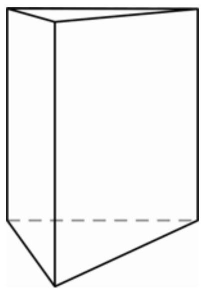

Bármely körben a **középponti szög** arányos a hozzá tartozó körívvel, és a középponti szöghöz tartozó körcikk területével.
A **szög mérése** is ezen a tényen alapul. A teljes szög 360°, és a megfelelő arányosság alapján adhatjuk meg a középponti szögek fokban kifejezett mértékét. Például az egyenes szög 180°, a derékszög 90°.

A **szög ívmértéke** az egységsugarú körben a megfelelő középponti szöghöz tartozó körív hossza. Így például a teljes szög ívmértéke 2 , az egyenes szögé , a derékszögé $\frac{\pi}{2}$.

# Térbeli alakzatok, felszín, térfogat[*]

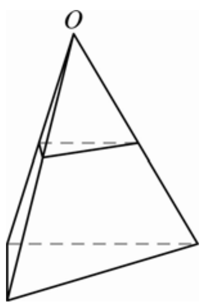
Ha adott egy sokszög és a síkjával nem párhuzamos egyenes, akkor a sokszög minden pontján az adott egyenessel párhuzamos egyeneseket fektetve egy (végtelen) **hasábfelület**et kapunk. Az egyenesek a hasáb **alkotói**. Ha a végtelen hasábfelületet két párhuzamos síkkal elmetsszük, egy korlátos testet, **hasáb**ot kapunk. A két párhuzamos síkból kimetszett (egybevágó) sokszög a hasáb **alap-** és **fedőlap**ja. Ha az alkotók merőlegesek az alaplapra, akkor **egyenes hasáb**ról, egyébként **ferde hasáb**ról beszélünk.

Az alaplap és a fedőlap síkjának távolsága a **hasáb magassága**. A hasáb **palástjá**nak nevezik az oldallapok együttesét. A **hasáb felszíne** az alap- és fedőlapok területének**,** valamint a palástot alkotó lapok területének összege. A **hasáb térfogata** az alapterület és a magasság szorzata.



Ha adott a síkban egy sokszög és egy *O* pont, amely nem illeszkedik a sokszög síkjára, akkor az *O*-ra és a sokszög kerületi pontjaira illeszkedő, *O*-ból induló félegyenesek egy (végtelen) **gúlafelület**et határolnak. Ha ezt a gúla felületet egy síkkal elmetsszük, akkor egy korlátos testet, **gúlá**t kapunk. Az *O* pont a gúla csúcsa, a metsző síkból a gúlafelület által kimetszett sokszög a gúla alaplapja. A gúlát **szabályos**nak mondjuk, ha alaplapja szabályos sokszög, és a csúcsból az alaplapra állított merőleges talppontja az alaplap középpontja.

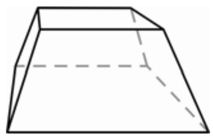
A sokszög szomszédos csúcspárjai és az *O* által alkotott háromszögek alkotják a **gúla palástját**. **A gúla felszíne** az alaplap területének, és a palástot alkotó lapok területének összege.




[*] 9. évfolyam 6. modulja, 12. évfolyam 4.-5. moduljai (0906, 1204, 1205)

A **gúla magassága** az $O$ csúcs és az alaplap síkjának távolsága. A **gúla térfogata** az alaplap területe szorozva a magasság harmadrészével.

**Csonkagúlát** kapunk, ha egy végtelen gúlafelületet két párhuzamos síkkal metszünk. A két metsző sík közötti korlátos térrész a csonkagúla. A két párhuzamos síkból kimetszett két sokszög a csonkagúla **alap-** és **fedőlap**ja, a gúlafelületnek a két párhuzamos sík közti darabja a **csonkagúla palást**ja. A **csonkagúla magassága** a két párhuzamos sík távolsága.

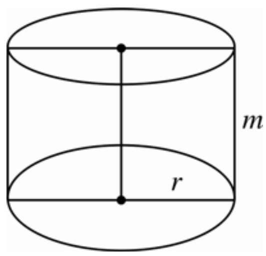


A **csonkagúla felszíne** a határoló lapok területének összege, **térfogata** a következőképpen számolható:

$$V=\frac{m}{3}\left(A_t+a_t+\sqrt{A_t a_t}\right),$$

ahol $m$ a csonkagúla magassága, $A_t$ az alapterület, $a_t$ a fedőlap területe.

Ha adott egy egyszerű (önmagát nem metsző) zárt síkgörbe, és egy, a görbe síkjára nem illeszkedő egyenes, valamint a görbe minden pontján át az adott egyenessel párhuzamos egyenest fektetünk, akkor egy (végtelen) **hengerfelületet** kapunk. Az egyenesek a henger **alkotói.**
Ha a hengerfelületet két párhuzamos síkkal elmetsszük, egy korlátos testet, **hengert** kapunk. A két síkból a hengerfelület által kimetszett (egybevágó) síkidomok az **alaplap** és **fedőlap**. A hengerfelület két sík közti darabja a henger **palást**ja.

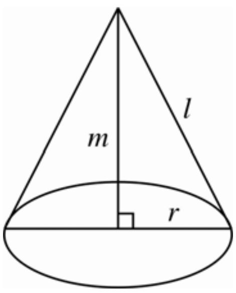



Ha az alkotók merőlegesek az alaplapra, **egyenes henger**ről, egyébként **ferde henger**ről beszélünk. A **henger magassága** az alaplap és fedőlap síkjának távolsága**.**
Ha az alaplap (és így a fedőlap is) körlap, **körhenger**ről beszélünk. Az egyenes körhengert szokták **forgáshenger**nek is nevezni. Ha a forgáshenger alaplapjának sugara $r$ és a henger magassága $m$, akkor a henger felszíne: $A=2r\pi(r+m)$,

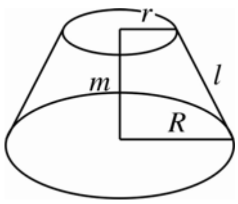
és a henger térfogata: $V = r^2\pi m$.

Ha adott egy egyszerű (önmagát nem metsző) zárt síkgörbe, és egy, a síkjára nem illeszkedő *O* pont, akkor az *O*-ra és a görbe pontjaira illeszkedő egyenesek egy végtelen (kettős) **kúpfelület**et alkotnak, az egyenesek az **alkotó**k. A görbe a kúpfelület **vezérvonal**a, az *O* pont a kúp **csúcsa.** Rendszerint csak az *O*-ból a görbe pontjai felé induló félegyenesek által alkotott (fél) kúpfelületet szokták **kúp**nak nevezni.
Ha a végtelen kúpfelületet egy síkkal elmetsszük, akkor az *O* és a sík közti korlátos testet is **kúp**nak nevezzük. A síkból kimetszett síkidom a kúp **alaplap**ja, a sík és az *O* pont távolsága a kúp **magasság**a.
Ha az alaplap körlap, és az *O*-t az alaplap középpontjával összekötő szakasz merőleges az alaplapra, **forgáskúp**ról, vagy **egyenes körkúp**ról beszélünk. Ha a forgáskúp magassága *m*, alkotója *l* és az alapkör sugara *r*, akkor a kúp felszíne: $A = r\pi(r + l)$,

a kúp térfogata: $V = \dfrac{r^2\pi m}{3}$.




**Csonkakúp**ot kapunk, ha egy végtelen kúpfelületet két párhuzamos síkkal metszünk. A két metsző sík közti korlátos térrész a **csonkakúp.**
A két párhuzamos síkból kimetszett két síkidom a csonkakúp **alap-** és **fedőlap**ja. A kúpfelület két sík közti része a csonkakúp **palást**ja.
A két sík távolsága a csonkakúp **magasság**a.
Ha forgáskúpból származtatjuk a csonkakúpot, akkor



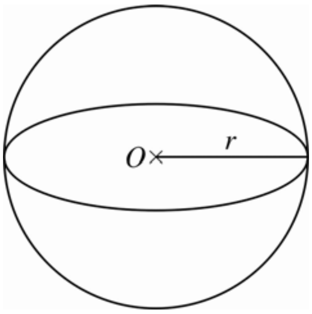

a csonkakúp felszíne: $A = \pi\left(rl + Rl + r^2 + R^2\right)$,

a csonkakúp térfogata: $V = \dfrac{\pi m}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$,

ahol *m* a testmagasságot, *R* és *r* az alaplap ill. a fedőlap sugarát, *l* az alkotó hosszát jelöli.

Ha adott egy *O* pont a térben, és egy *r*  0 valós szám, akkor a térben azoknak a *P* pontoknak a halmazát, amelyekre *OP* = *r*, **gömbfelület**nek, röviden gömbnek nevezzük. Az *O* pont a gömb

**középpontja**, $r$ a gömb **sugara**. A gömbfelület által határolt térrész a **gömbtest,** röviden ezt is **gömbnek** nevezzük**.**



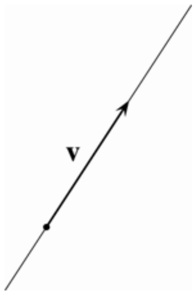

A gömb felszíne: $A = 4r^2\pi$,

A gömb térfogata: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$.

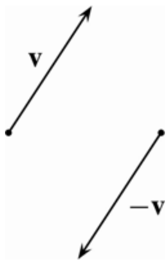
| Alakzat | Felszín | A | Térfogat | V |
|---|---|---|---|---|
| **Hasáb** | 2·alapterület+palást területe | $2T+P$ | alapterület·magasság | $T \cdot m$ |
| **Gúla** | alapterület+palást területe | $T+P$ | alapterület·$\frac{\text{magasság}}{3}$ | $\frac{T \cdot m}{3}$ |
| **Forgáshenger** | (sugár+magasság) szorozva a kör kerületével | $(r+m)\cdot 2r\pi$ | körterület·magasság | $r^2\pi m$ |
| **Forgáskúp** | (sugár+alkotó) szorozva a kör kerületének felével | $(r+a)\cdot r\pi$ | körterület·$\frac{\text{magasság}}{3}$ | $\frac{r^2\pi m}{3}$ |
| **Gömb** | 4 főkör területe | $4r^2\pi$ | 4 főkörterület·$\frac{\text{sugár}}{3}$ | $\frac{4r^3\pi}{3}$ |
| **Csonkagúla** | határoló lapok területeinek összege | $T+t+P$ | $V = \frac{m}{3}\left(T+t+\sqrt{Tt}\right)$ | |
| **Csonkakúp** | $A = \pi[R^2 + r^2 + (R+r)a]$ | | $V = \frac{m\pi}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$ | |

# Vektorok*

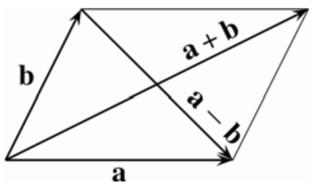
A **vektor irányított szakasz.** A vektornak tehát hossza, állása és iránya van. Két vektor egyenlő, ha hosszuk, irányuk és állásuk megegyezik.



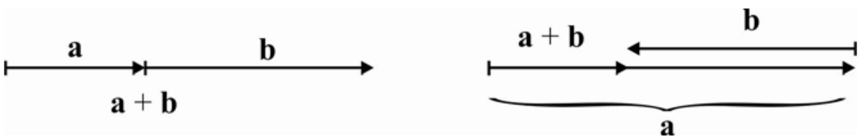

Ha egy vektor kezdő- és végpontja azonos, **nullvektor**nak nevezzük, jelölése: **0**. A nullvektor hossza 0, állása, iránya megállapodás szerint tetszőleges. A vektor abszolútértéke a **vektor hossza.** Két vektor közül az egyik **ellentett**je a másiknak, ha hosszuk és állásuk megegyezik, de irányuk ellentétes.




**Két vektor összege és különbsége** a paralelogramma-szabály szerint adható meg:




Egyállású vektorok esetében:




* 9. évfolyam 14. modulja, 11. évfolyam 5. modulja (0914, 1105)

Igazolható, hogy vektorok összeadása kommutatív és asszociatív, azaz:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

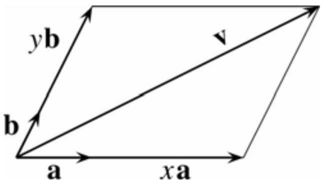
Egy **a** vektor számszorosa ($c$-szerese) az a vektor, amelynek hossza $c \cdot \mathbf{a}$ , és állása megegyezik az **a** állásával, $c$ 0 esetén iránya ugyanaz, mint **a** iránya, $c$ 0 esetén iránya **a**-val ellentétes, $c = 0$ esetén $c{\cdot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Két vektor, **a** és **b** **skaláris szorzata** (**a** **b**) az a szám, amelyre

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})\angle .$$

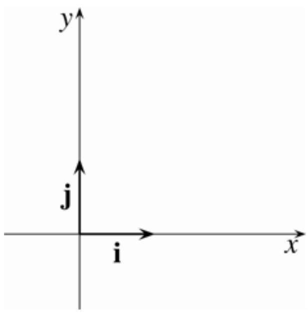
Ha adott két vektor **a** **0**, és **b** **0**, valamint a két vektor által meghatározott síkban egy **v** vektor, akkor igazolható, hogy egyértelműen léteznek olyan $x$ és $y$ valós számok hogy

$$\mathbf{v} = x{\cdot}\mathbf{a} + y{\cdot}\mathbf{b}.$$




Más szavakkal, a **v** vektor egyértelműen felbontható **a**-val és **b**-vel párhuzamos összetevőkre.

Ha **i** és **j** két egymásra merőleges egységvektor (azaz **i** = 1, **j** = 1) úgy, hogy **i**-t a **j**-be pozitív irányú 90°-os elforgatás viszi át, akkor **i** és **j** egy derékszögű koordináta-rendszer két alapvektora (**bázisvektora**).

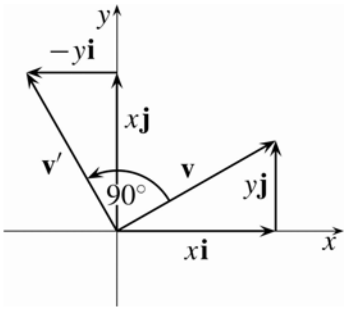



A sík tetszőleges **v** vektora ekkor egyértelműen állítható elő a következő alakban:

$$\mathbf{v} = x{\cdot}\mathbf{i} + y{\cdot}\mathbf{j},$$

ahol $x$ és $y$ valós számok. Az $x$ és $y$ számokat a **v** vektor derékszögű koordináta-rendszerbeli koordinátáinak nevezzük. Gyakran a **v** vektort azonosítjuk is az ($x$; $y$) rendezett számpárral.

Igazolható, hogy ha a **v** vektor koordinátái ($x$; $y$), akkor a **v** pozitív irányú 90°-os elforgatottjának koordinátái ($-y$; $x$).




A vektorok koordinátás alakjával a következő módon végezhetünk műveleteket:

ha $\mathbf{v} = (x; y)$, $\mathbf{w} = (u; v)$, akkor

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x + u; y + v),$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (x - u; y - v),$$

$$\cdot\mathbf{v} = (\ \cdot x;\ \ \cdot y), \qquad (\ \ \text{valós szám})$$

$$\mathbf{vw} = x \cdot u + y \cdot v,$$

végül

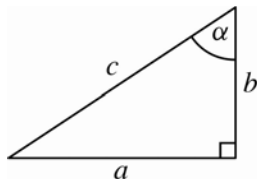
$$\mathbf{v} \ = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

A térbeli vektoroknak három koordinátája van a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben, ezekkel a műveletek teljesen hasonló módon végezhetők.

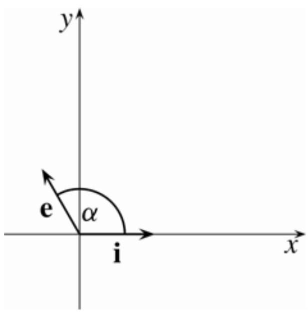
# Trigonometria*

**Hegyesszögek szögfüggvényei**t a következő módon értelmezzük. Ha adott az *a*, *b* befogójú és *c* átfogójú derékszögű háromszög, amelyben az *a* befogóval szemközti szög (0 90°), akkor

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}.$$




Általánosan, **tetszőleges forgásszög** esetén ha a megadott forgásszög, akkor jelölje **e** az **i** egységvektor -val történő elforgatottját. Az szög ívmértékét is jelölje , ekkor **e** koordinátái: **e** (cos ; sin ).




Ha cos 0, azaz 90° + *k*·180° (*k* **Z**), akkor $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ha pedig sin 0, azaz *n*·180°, (*n* **Z**), akkor $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Néhány alapazonosság a szögfüggvények körében:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha, \qquad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha,$$

* 10. évfolyam 9. modulja, 10. évfolyam 12. modulja, 11. évfolyam 8. modulja, 11. évfolyam 9. modulja (1009, 1012, 1108, 1109)

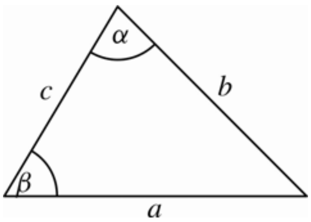
$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$, $\qquad$ $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$,

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$, ha mindkét oldalnak van értelme.

A **nevezetes szögek szögfüggvényértékei** a következők:

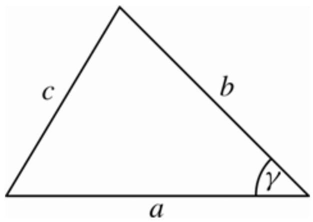
| | sin | cos | tg | ctg |
|---|---|---|---|---|
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

A **szinusztétel** azt mondja ki, hogy egy háromszögben két oldal aránya megegyezik az oldalakkal szemközti szögek szinuszának arányával: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.




A **koszinusztétel** a következő: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$,

ahol a jelölések az ábráról leolvashatók.

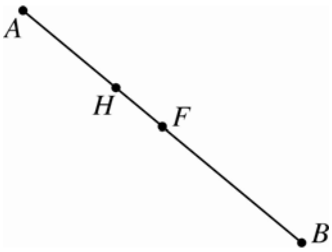


# Koordinátageometria*

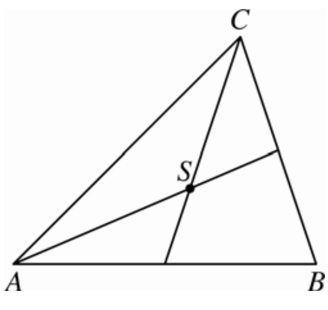
Ha a derékszögű koordináta-rendszerben adott két pont: $A(a_1;\ a_2)$ és $B(b_1;\ b_2)$, akkor a két pontot összekötő $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái: $(b_1 - a_1;\ b_2 - a_2)$. Az $\overrightarrow{AB}$ vektor abszolútértéke, vagyis **a két pont távolsága**: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Az $AB$ szakasz f**elezőpont**jának koordinátái: $F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

Az $AB$ szakasz $A$-hoz közelebbi **harmadolópont**ja: $H\left(\frac{2a_1 + b_1}{3}; \frac{2a_2 + b_2}{3}\right)$.




Ha $A(a_1;\ a_2)$, $B(b_1;\ b_2)$, $C(c_1;\ c_2)$ egy háromszög három csúcspontja, akkor a háromszög **súlypont**jának koordinátái: $S\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$



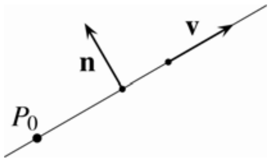

Ha adott egy egyenes egy tetszőleges $P_0(x_0;\ y_0)$ pontja, és az egyenessel párhuzamos $\mathbf{v}(v_1;\ v_2)$ nem nullvektor (vagyis az egyenes egy **irányvektor**a), akkor az **egyenes egyenlete:**

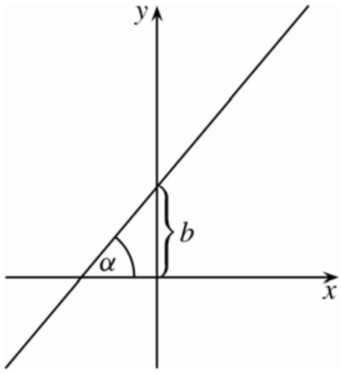
$$v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0.$$

* 11. évfolyam 6. modulja, 11. évfolyam 7. modulja (1106, 1107)

Ha adott az egyenes egy tetszőleges $P_0(x_0; y_0)$ pontja, és az egyenesre merőleges $\mathbf{n}(A; B)$ nem nullvektor (az utóbbit az egyenes egy **normálvektor**ának nevezzük), akkor az **egyenes egyenlete**:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$



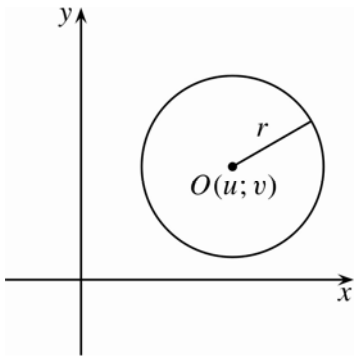




Az egyenes egyenletének következő alakja is ismert: $y = mx + b$, ahol $m$ az egyenes **meredekség**e, vagy másképp **iránytangens**e, tg  $= m$, ahol α az egyenesnek az $y$ tengely pozitív felével bezárt szöge $(\alpha \neq 90°)$.

Két egyenes **párhuzamos**, ha egyenletükben az iránytangens megegyezik, illetve irányvektoraik (normálvektoraik) párhuzamosak. Két egyenes **merőleges** egymásra, ha egyik iránytangense sem 0, és ha a két iránytangens $m_1$ és $m_2$, akkor $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, illetve irányvektoraik (normálvektoraik) merőlegesek.

Ha egy kör középpontja $O(u; v)$, sugara $r$  0, akkor a **kör egyenlete** így írható:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2.$$

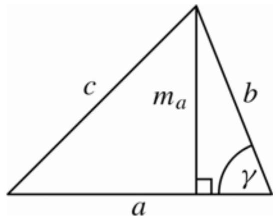



Ha a kör középpontja az origó, sugara $r$  0, akkor egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$, és a kör egy tetszőleges $(x_0; y_0)$ pontjához húzott **érintő egyenlete**: $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = r^2$.

Ha a kör középpontja az $O(u;v)$ pont, akkor a kör egy tetszőleges $(x_0; y_0)$ pontjához húzott érintők egyenlete: $(x-u)\cdot(x_0-u)+(y-v)\cdot(y_0-v)=r^2$.

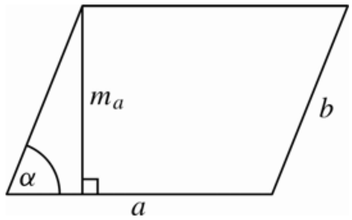
# Területszámítás*

Háromszög területe: $t = \frac{am_a}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2}$.

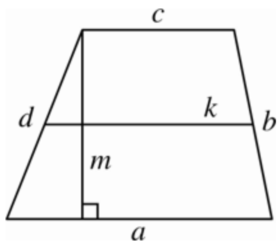



Négyszögek területe:

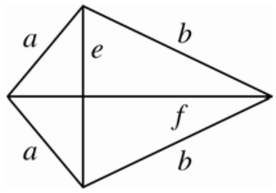
paralelogramma $t = am_a = ab\sin\alpha$




trapéz $t = \frac{a+c}{2}m$



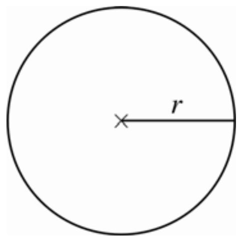

deltoid $t = \frac{ef}{2}$



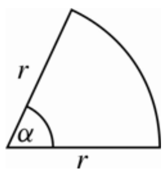

Kör és részei:

kör kerülete: $k = 2r\pi$

kör területe: $t = r^2\pi$

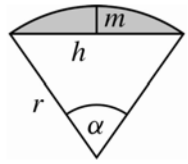



körcikk területe: $t = \frac{1}{2}r^2\alpha$ (α radián)




* 12. évfolyam 3. modulja (1203)

körszelet területe: $t = \frac{1}{2}\left[r^2\alpha - h(r-m)\right]$,




ahol $h$ a körszeletet határoló húr hossza, $m$ a körszelet magassága, és a körszelethez tartozó középponti szög (radiánban mérve).

# Statisztika, valószínűségszámítás*

A statisztikában **alapsokaság**nak vagy **adatsokaság**nak nevezik a vizsgálat tárgyát képező adatok (egyedek) összességét. Ezek tulajdonságára egy részük, az úgynevezett **minta** alapján következtetünk. A mintát a sokaságból általában véletlenszerűen választjuk ki.
Ha egy olyan kísérletet, amelyben azt vizsgáljuk, hogy egy ***A* esemény** bekövetkezik vagy nem, $n$-szer megismételünk, és az $A$ esemény az $n$ közül $k$ esetben bekövetkezik, akkor $k$-t az $A$ esemény **gyakoriság**ának, $\frac{k}{n}$-et az $A$ esemény **relatív gyakoriság**ának nevezzük ($k$ $n$).

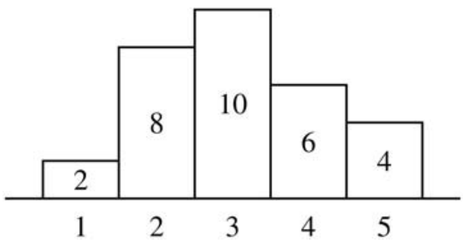
Ha $a_1$, $a_2$, …, $a_k$ valós számok, akkor az $a_i$ számoknak az $m_i$ súlyokra vonatkozó **súlyozott számtani közepe** (vagyis az $a_1$ szám $m_1$-szer, az $a_2$ szám $m_2$-ször stb. fordul elő a mintában):

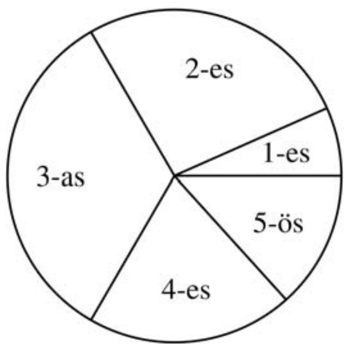
$$\frac{m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_ka_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}.$$

Például egy 30 fős osztály év végi matematika osztályzatai 4 darab 5, 6 darab 4, 10 darab 3, 8 darab 2 és 2 darab 1, akkor az osztályátlag matematikából az 5, 4, 3, 2, 1 számoknak a rendre 4, 6, 10, 8, 2 súlyokkal vett súlyozott számtani közepe:

$$\frac{4\cdot 5 + 6\cdot 4 + 10\cdot 3 + 8\cdot 2 + 2\cdot 1}{4 + 6 + 10 + 8 + 2} \approx 3{,}07.$$

Ezt az adathalmazt szemléltethetjük oszlopdiagramon vagy kördiagramon is:




Egy adatsokaság **medián**ja a nagyság szerint rendezett adatok közül a középső, vagy ha páros számú adat van, akkor a két középső adat számtani közepe.
Például az előző példában a medián 3.

* 9. évfolyam 18. modulja, 10. évfolyam 11. modulja, 10. évfolyam 13. modulja, 11. évfolyam 1. modulja, 12. évfolyam 6. modulja (0918, 1011, 1013, 1101, 1206)

Egy adatsokaság **módusz**a a leggyakrabban előforduló adat, ha több ilyen van, akkor azokat is módusznak (vagy a móduszok halmazának) nevezzük.
Például a 30 fős osztály matematika jegyeiről szóló példában a módusz 3.

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mintának egy ***a* számtól való átlagos abszolút eltérése** a következő szám:

$$\frac{|x_1-a|+|x_2-a|+\ldots+|x_n-a|}{n}.$$

A minta **szórásnégyzete**: $s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\bar{x}\right)^2\right]$,

ahol $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$ az átlag, $s$ pedig a minta szórása.

A valószínűségszámításban egy kísérlet kimeneteleinek halmazát **eseménytérnek** nevezzük. **Elemi eseményről** beszélünk, ha az esemény tovább már nem bontható (az eseménytér egyelemű részhalmaza).
Például ha egy kockát feldobunk, az elemi események halmaza: {1; 2; 3, 4; 5; 6}, és esemény lehet az, hogy párosat dobunk, vagyis {2, 4, 6}. Az eseménytér bármely részhalmaza lehet esemény.

**Biztos esemény**, amely az eseménytér összes eleméből épül fel, mindig bekövetkezik. A **lehetetlen esemény** az üres halmaz, soha nem következik be.

A kísérlet összes lehetséges kimenetele **teljes eseményrendszert** alkot, ha egymást kizárják, azaz semelyik kettő nem következhet be egyszerre, de valamelyik biztosan bekövetkezik (összegük a biztos esemény).

**Egy esemény valószínűségét** axiómákkal lehet pontosan definiálni. Megmutatható, hogy az $A$ esemény valószínűsége, jelölése $\mathbf{P}(A)$, az esemény relatív gyakorisága körül ingadozik.
Ha az elemi események száma véges és valószínűségük egyenlő, továbbá teljes eseményrendszert alkotnak, akkor

$$\mathbf{P}(A)=\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$$

(ez a kiszámítási mód Laplace képlete).
**A biztos esemény valószínűsége 1, a lehetetlen esemény valószínűsége 0.**

A **valószínűség értéke** egyszerűen meghatározható olyan esetekben, amikor szimmetria megfontolásokkal is következtethetünk.

Például egy szabályos dobókockát feldobva feltételezzük, hogy a dobás eredményeként ugyanolyan valószínűséggel kapjuk a kocka bármelyik lapját, azaz az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyikét ugyanolyan valószínűséggel dobhatjuk, tehát mindegyik dobás valószínűsége $\frac{1}{6}$.

A kockadobással mindegyik elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{6}$. Egy **összetett esemény,** például hogy prímszámot dobunk, felbontható elemi események összegére: 2-t, 3-at, 5-öt dobunk, ennek alapján ezen összetett esemény valószínűsége a kapott elemi események valószínűségének összege: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Másik példánk annak a valószínűségnek a meghatározása, hogy egy szabályos dobókockát ismételten feldobva, először a harmadik dobásra dobunk 6-ost. Ezt úgy számolhatjuk ki, hogy összeszorozzuk annak a valószínűségét, hogy az első dobás eredménye nem 6-os: $\frac{5}{6}$, a második dobás eredménye sem 6-os: $\frac{5}{6}$, és a harmadik dobás eredménye 6-os: $\frac{1}{6}$, tehát a keresett valószínűség: $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$.

Az a tény, hogy a szabályos dobókockát feldobva $\frac{1}{6}$ a valószínűsége, hogy 6-ost dobunk, azt fejezi ki, hogy a kockát sokszor, például 300-szor feldobva a dobások közt körülbelül $\frac{1}{6}$ rész, azaz 50 lesz a 6-osok száma. A kísérlet elvégzésekor a 6-os dobások gyakorisága közel lesz 50-hez, a relatív gyakoriság jó közelítéssel $\frac{1}{6}$ lesz.

Például tegyük fel, hogy egy dobozban 30 golyó van, ebből 10 piros, és 20 fehér. Mennyi a valószínűsége, hogy egy golyót véletlenszerűen kihúzva, piros golyót kapunk? Feltehetjük, hogy minden golyó húzásának ugyanannyi a valószínűsége, ezért a keresett valószínűség $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

**Visszatevéses mintavétel esetével** akkor találkozunk, amikor valamely kiválasztás valószínűségét úgy akarjuk meghatározni, hogy a kiválasztás után a mintadarabot visszatesszük a többi közé.

Tekintsük azokat a kísérleteket, amelyeknek csak két kimenetele lehet („*A*” vagy „nem *A*”), és az *A* esemény bekövetkezésének valószínűsége *p* (ekkor „nem *A*” bekövetkezésének valószínűsége 1 – *p*). Az ilyen kísérletekben annak a valószínűsége, hogy *n* független kísérletből az *A* esemény pontosan *k*-szor következik be:

$$\mathbf{P}\ (A \text{ esemény } k\text{-szor következik be}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Visszatevéses mintavétel esetén egy esemény bekövetkezése a fenti összefüggéssel, az ún. **binomiális eloszlással** határozható meg.

Az előző példához visszatérve, ha a kihúzott golyót visszatesszük, és a golyókat elkeverve újra megismételjük a kísérletet (a visszatevéses mintavétel esete áll fenn), nyilván újra $\frac{1}{3}$ valószínűséggel húzunk piros golyót és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel nem pirosat. Ha azt kérdezzük, hogy 12-szer megismételve a kísérletet mennyi a valószínűsége annak, hogy 7-szer pirosat húzunk, akkor a válasz:

$$\mathbf{P} = \binom{12}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{12! \cdot 2^5}{7! \cdot 5! \cdot 3^{12}} \approx 0{,}048.$$