MATEMATIKA „C”
12. évfolyam

6. modul
Próbaérettségi

Készítette: Kovács Károlyné

A modul célja	Az írásbeli érettségi vizsga helyzetének kipróbálása, az érettségi vizsgakövetelményekben szereplő ismeretek felmérése. A modul kiegészítő,a tanárok a lehetőségekhez képest használják fel.
Időkeret	4×45 perc összevonva
Ajánlott korosztály	12. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Szociológia, gazdaságtan Szűkebb környezetben: A matematika érettségi vizsgakövetelményeiben szereplő ismeretanyag. Ajánlott megelőző tevékenységek: Tanévvégi ismétlés Ajánlott követő tevékenységek: Érettségi vizsga
A képességfejlesztés fókuszai	Rendszerezés, kombinativitás, deduktív következtetés, valószínűségi következtetés, számolási képesség, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés, térlátás, ábrázolás, összefüggések felismerése

AJÁNLÁS

A próbaérettségi a tanulók komoly megmérettetése az „éles” vizsga előtt. Egy, a korábbi évek érettségijéhez hasonló feladatsor megíratása, és a javítás utáni megbeszélés nagyban hozzájárulhat ahhoz, hogy a tanulók középszintű érettségi vizsgája sikeres legyen.

Az itt javasolt feladatsor a szokásosnál kissé nehezebb, így szükség esetén a tanár változtasson a feladatokon!

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
Próbaérettségi **Összevont foglalkozások**			
1.	12 db, egyszerű feladat különböző témakörökből. Munkaidő: 45 perc	Rendszerezés, kombinativitás, deduktív következtetés, valószínűségi következtetés, számolási képesség, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés, térlátás, ábrázolás, összefüggések felismerése	Feladatlap: 1–12. feladat
1/A	Vagy: 7 feladat, 30 perc		Kis próbaérettségi, 1–7. feladat
2.	További 6 db összetett feladat. Munkaidő: 135 perc	Rendszerezés, kombinativitás, deduktív következtetés, valószínűségi következtetés, számolási képesség, problémamegoldás, szövegértés, szövegértelmezés, térlátás, ábrázolás, összefüggések felismerése	Feladatlap: 13–18. feladat
2/A	Vagy: 4 feladat, 90 perc		Kis próbaérettségi, 8–11. feladat

Megoldások, tanulságok		
A feladatok megoldásának megbeszélése, a szükséges tanulságok levonása.		Tanári melléklet

PRÓBAÉRETTSÉGI

Tanári tapasztalat, hogy a próbaérettségi megíratása többféle szempontból is nagyon hasznos. Jó előkészítés esetén a tanulók a próbán átélhetik az érettségi vizsgahelyzetét, továbbá kiderülhet számukra, hogy be tudják-e jól osztani a 3 órás munkaidőt, hogy mikor jutnak „holtpontra”, hogy hogyan tudnak azon túljutni, milyen „taktikát” érdemes követniük a feladatok megoldási sorrendjének megválasztásakor.

Annak kipróbálására is lehetőséget nyújt a próbaérettségi, hogy a választásra felkínált 3 feladat közül minek alapján érdemes eldönteni, hogy melyik feladatot hagyják ki. Vajon csak az legyen az egyetlen szempont, hogy „ezt a témakört nem szeretem (nem ismerem eléggé)? Vagy érdemes megvizsgálni mindegyik feladatot aszerint, hogy az alkérdések közül hányat tudna megoldani, és azokkal várhatólag hány pontot tudna szerezni? Vagy igyekezzen mind a hármat megoldani, és azután dönteni?

Az is kérdés lehet, hogy előbb a könnyebb II/A feladatait érdemes megoldani, és utána a nehezebb két feladatot, vagy fordítva, mert amíg „frissebb”, nagyobb esélye van a nagyobb koncentrálást igénylő feladatok megoldására. Vagy csak az legyen a sorrend meghatározója, hogy melyik témakört szereti, ismeri a legjobban, azaz melyiktől várható a nagyobb sikerélmény?

A tanulók arról is meggyőződhetnek egy ilyen próbadolgozat megírásával, hogy ha nem egy témakörből, hanem a teljes eddigi tudásanyagból kell a szükséges ismereteket „előhívniuk”, akkor milyen teljesítményre képesek.

Ezekről a kérdésekről érdemes – a megírás előtt – beszélgetni a tanulókkal. Adjunk komoly hangsúlyt a próbának! Ezzel elérhetjük, hogy a tanulók is komolyan veszik, és így át tudják élni már a próbán az „igazi” vizsgahelyzetet.

A teremben, ahol a próbaérettségit íratjuk, célszerű olyan körülményeket biztosítani, amilyen majd az igazi érettségin lesz, tehát pl. egy padban csak egy tanuló üljön. (Ha többen vannak, bontsuk a csoportot két csoportra, és kérjük meg egy kollegánkat, vagy régi tanítványunkat a felügyeletre.) Az első rész megírására 45 perc munkaidőt hagyjunk. Ne tartsunk szünetet ennek megírása után (az érettségin sincs ekkor szünet), hanem az első rész összeszedése után azonnal adjuk ki a második részt. Ennek megírására 135 perc fordítható. A felügyelet alatt tartsuk be az érettségin érvényes szabályokat. (Egyszerre egy tanuló mehet ki, és előtte a dolgozatát ki kell vinni a felügyelő tanárnak, aki beleírja a dolgozatba, hogy mikor ment ki, és jött be a tanuló. A dolgozat beadásának időpontját is vezessük rá a dolgozatra, hiszen majd a javítás után a munkák értékelésekor az is lehet egy szempont, hogy kihasználták-e a tanulók a rendelkezésükre álló teljes időt.)

A dolgozat megírására 45 perc + 135 percre van szükség. Ennyi idő várhatóan csak tanítási szünetben vagy délután „szorítható ki”. A csoport teljesítményének értékelésére, a tanulságok megbeszélésére mindenképpen fordítsunk egy tanórát! Ha az iskola anyagi forrásai lehetővé teszik, érdemes a megoldókulcsot sokszorosítani, és a tanulóknak páronként 1 példányt a kezükbe adni. Nagyon tanulságos számukra, ha a dolgozatukat a megoldási kulccsal összevetve vizsgálják meg.

A feladatsorok formátuma olyan, mint amit az érettségi vizsgán kapnak a tanulók. A formában benne hagytuk a „szürke téglalapokat”, mert tapasztalat szerint mindig van a próbán olyan tanuló, aki a végeredményt (néha a megoldást is) abba írja bele.

Az itt közölt próbaérettségi szintje összességében egy kissé meghaladja az eddigi középszintű érettségi dolgozatokét.

Arra az esetre, ha nincs idő a teljes próbaérettségire, egy rövidített és könnyített dolgozatot is megírathatunk. Ehhez ugyanazokból a feladatokból válogattunk, az első részbe 7, a másodikba 4 feladatot szánva, 30 percet, illetve 60 percet hagyva a feladatok megoldására. Ekkor az időpontot is könnyebben egyeztethetjük a diákokkal vagy kollégánkkal.

Ha a csoportban átlagos vagy annál kevesebb tudású tanulók vannak többségben, inkább ezt a kis próbaérettségi dolgozatot ajánljuk.

Matematika középszintű írásbeli érettségi próbavizsga

I. rész

Fontos tudnivalók

- A feladatok megoldására 45 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
- A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
- A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
- **A feladatok végeredményét az erre a célra szolgáló keretbe írja**, a megoldást csak akkor kell részleteznie, ha erre a feladat szövege utasítást ad!
- A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető!
- Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető.
- Kérjük, hogy a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!

Név:……….……………………………………osztály:…………

1. Egyszerűsítse a-val az alábbi törtet!

$\frac{a}{a^2 - a}$, ahol $a \neq 1$ és $a \neq 0$.

	2 pont	

2. Egy számtani sorozat első tagja $\lg 1$, második tagja $\lg 100$. Írja fel a sorozat harmadik tagját tízes számrendszerbeli alakban! Döntését indokolja!

A harmadik tag:	3 pont	

3. Adja meg az $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ egyenletű kör középpontját és sugarát!

	1 pont	
A kör középpontja: $(\quad ; \quad)$	1 pont	
sugara:	1 pont	

Név:……….……………………………………osztály:…………

4. Derékszögű háromszög befogóinak hossza 6 cm és 8 cm. Hány centiméter hosszú a háromszög köré írható körének sugara?

A kör sugarának hossza:	2 pont	

5. Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

„Ha egy háromszög belső szögei α, β és γ, továbbá $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, akkor

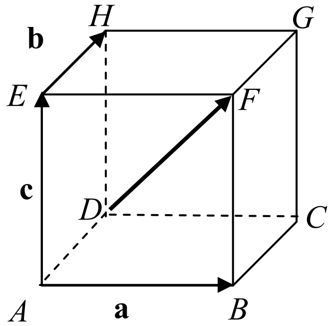
A: lehetséges, hogy α a háromszög legnagyobb szöge.”

B: biztosan α a háromszög legkisebb szöge.”

C: $\beta + \gamma = 30^\circ$, vagy a háromszög legnagyobb szöge legalább 75°-os.”

A:	1 pont	
B:	1 pont	
C:	1 pont	

6. Írja fel az ábrán látható kocka $\overrightarrow{DF}$ átlóvektorát a kocka három élvektorának (**a**, **b** és **c**), továbbá a vektorműveleteknek a felhasználásával!



$\overrightarrow{DF} =$	2 pont	

Név:……….……………………………………osztály:………….

7. Legyen $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ x\mapsto \dfrac{1}{0{,}3+|x|}$. Mekkora az *f* függvény legnagyobb értéke?

A függvény legnagyobb értéke:	2 pont	

8. Jelölje *A* és *B* rendre azokat az eseményeket, hogy Annának illetve Bélának öt találata volt a múlt heti totó játékon. Valójában az $A+B$ esemény komplementere (az $\overline{A+B}$ esemény) következett be. Melyiküknek volt öt találata? Válaszát indokolja!

	2 pont	

9. Rajzoljon egy olyan 7 csúcspontú gráfot, amelyben a csúcsokból rendre 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4 él indul!

2 pont	

Név:………..…………………………………….osztály:………….

10. Ábrázolja függvénytranszformációval a valós számok halmazán értelmezett

$f(x) = \frac{3^x}{3} - 2$ függvényt!

4 pont	

11. Igazolja, hogy az alábbi állítások mindegyike hamis!

A: Bármely x valós szám esetén $\sqrt{x^2} = x$.

B: Ha $\mathbf{ab} = 0$, akkor az **a**, **b** vektorok közül legalább az egyik nullvektor.

A:	1 pont	
B:	1 pont	

Név:………..…………………………………….osztály:………….

12. Az 1, 4, 6 és a **J** számkártyák felhasználásával hány 9-cel osztható négyjegyű szám képezhető, ahol a **J** (Joker) lap értéke tetszőleges számjegy lehet?

	3 pont	

Matematika középszintű írásbeli érettségi próbavizsga

II. rész

Fontos tudnivalók

- A feladatok megoldására 135 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
- A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
- A **B**. részben kitűzött három feladat közül csak kettőt kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a 18. feladatra nem kap pontot!

- A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
- A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!
- Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!
- A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, *de alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell*.
- A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
- A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető!
- Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető.
- Kérjük, hogy a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!

Név:……………………………………………………osztály:…………

II/A

13.

a) Adja meg a valós számok halmazának lehető legbővebb D részhalmazát, amelyen az

$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+7x-18)-\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$ képlettel függvény értelmezhető!

b) Oldja meg a $]2;+\infty[$ halmazon a $\log_{\frac{1}{3}}(x+9)=2-64^{\frac{1}{3}}$ egyenletet!

a)	8 pont	
b)	3 pont	
Ö.:	**11 pont**	

14. Egy felmérés során a kérdésekre 976 férfi és 1024 nő válaszolt. Többek között megkérdezték őket arról is, hogy az elmúlt félévben voltak-e színházban, moziban, hangversenyen. A válaszokból az derült ki, hogy közülük: 280-an voltak színházban, 496-an moziban, 110-en hangversenyen, mindhárom fajta intézményben 26-an, pontosan kétfajtában pedig összesen 121-en voltak. Az alábbi kérdések mindegyike a felmérésben résztvevőkre vonatkozik.

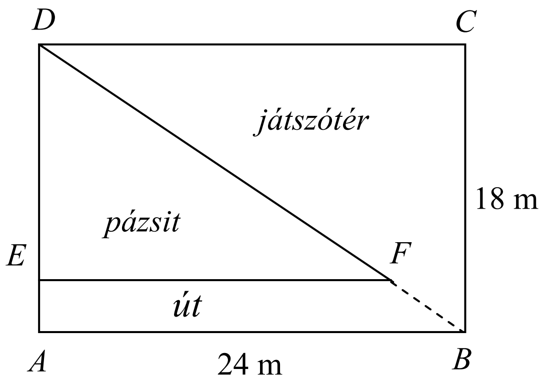
a) Hányan nem voltak egyik fajta intézményben sem?

b) A felmérésben résztvevők közül véletlenszerűen kiválasztva egyet, mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott legalább kétfajta intézményben volt?

a)	8 pont	
b)	4 pont	
Ö.:	**12 pont**	

Név:………..…………………………………….osztály:………….

15. A mellékelt ábrán egy parknak olyan *ABCD* téglalap alakú részlete látható, amelynek oldalai 18 m és 24 m hosszúak. A játszótér melletti *DEF* háromszög alakú pázsitos rész mellett 3 méter széles út vezet.



a) Mekkora ennek a pázsitos résznek a területe?

b) Erre a befüvesített részre egy lehető legnagyobb területű, kör alakú virágágyást terveznek. Ez a virágágyás a téglalap alakú parkrészletnek hány százalékát fedi le?

c) A játszótér derékszögű sarkába egy 12 m^2 területű, a parkrészlethez hasonló, téglalap alakú homokozót is terveztek. Hány méter lesz a homokozó oldalainak hossza?

a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	**13 pont**	

Név:………..…………………………………….osztály:………….

II/B

A 16–18. feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a 9. oldalon lévő üres négyzetbe!

16. Egy strand 800 m^3 térfogatú üres medencéjét egyedül vezetékes vízzel 10 óra alatt, egy gyógyforrás meleg vizével pedig 20 óra alatt töltenék fel. (Mindkét csapból egyenletesen folyik ki a víz.) Az üres medencét mindkét csap megnyitásával kezdik feltölteni, majd 4 óra múlva elzárják a vezetékes víz csapját, és csak a gyógyforrás vizével töltik tovább a medencét.

a) Összesen mennyi idő alatt telik meg a medence?

b) A csapok ilyen kinyitása esetén, a kinyitásától számított x óra múlva a medencében lévő víz m^3-ben mért mennyiségét jelölje $V(x)$.

Adja meg a V függvényt képletével és grafikonjával is, ha x tetszőleges, a csapok kinyitásától a medence megtöltéséig eltelt időt jelöli órában mérve!

a)	5 pont	
b)	12 pont	
Ö.:	**17 pont**	

Név:…………………………………………………osztály:………….

17. Egy műanyag játékokat készítő cég többek között egy „Kelj fel Jancsi" nevű játékot is gyárt. Két testet ragasztanak össze: egy 4 cm sugarú, nehéz anyagból készült tömör félgömböt és egy olyan belül üreges forgáskúpot, amelynek az alapköre egybeesik a félgömb határoló körével.

a) Hány centiméter hosszú a kúp magassága, ha a játék térfogata 239 cm^3? A választ egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!

A cég a játékot alul nyitható papírdobozba helyezve kívánja forgalmazni. Kétféle dobozt terveztetnek: az egyik forgáshenger alakú, amelybe a játék úgy helyezhető el, hogy annak félgömbje érintse a henger egyik körlapját, a kúp csúcsa pedig a másik körlapot. A másik doboz egy négyzet alapú, 4 cm magas egyenes hasábból (annak fedőlapja nélkül) és egy fölé helyezett négyoldalú szabályos gúla palástjából áll.

b) Számítsa ki, hogy melyik doboz készítéséhez szükséges kevesebb anyag, ha a dobozok anyagigénye a henger alakú doboz esetében a doboz felszínénél 8 %-kal, a másik doboz esetében pedig a felszínénél 5 %-kal több!

a)	5 pont	
b)	12 pont	
Ö.:	**17 pont**	

Név:………..……………………………………osztály:…………

18. András minden hétvégén vagy csak kenuzik, vagy csak kajakozik és azt, hogy egy adott hétvégén éppen melyiket űzze, egy szabályos pénzérme feldobásával dönti el.(Fej esetén kenuzik, írásnál kajakozik)

Mennyi a valószínűsége, hogy

a) a következő két hétvégén először kenuzik, azután kajakozik?

b) négy egymás utáni hétvégén felváltva űzi a két sportot?

András a döntéshozatalhoz áttér a kockadobásra. Ha legalább hármast dob, akkor kajakozik, egyébként kenuzik.

Mennyi a valószínűsége, hogy a következő öt hétvége közül

c) pontosan kétszer kenuzik

d) legalább egyszer kajakozik?

a)	2 pont	
b)	3 pont	
c)	6 pont	
d)	6 pont	
Ö.:	**17 pont**	

JAVÍTÁSI–ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ
Az I. rész megoldása:

1.		
$\dfrac{a}{a(a-1)}$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha az egyszerűsítés során a nevező mindkét tagját osztja a-val.*
$\dfrac{1}{a-1}$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
$\lg 1 = 0$ és $\lg 100 = 2$	1 pont	
A számtani sorozat differenciája 2.	1 pont	
A sorozat harmadik tagja 4.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
$x^2 + (y-3)^2 = 4$	1 pont	
A kör középpontja: $K(0;3)$,	1 pont	
sugara 2 (egység).	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

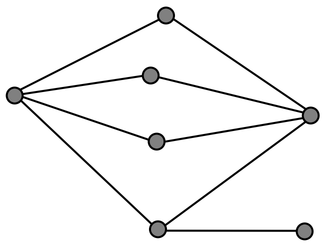
4.		
A háromszög átfogójának hossza 10 cm.	1 pont	
A körülírt körének sugara 5 cm hosszú.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
Igaz	1 pont	
Hamis	1 pont	
Igaz	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6.		
$\overrightarrow{DF} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$	2 pont	*Ha csak az ábrán jelöli helyesen az összetevő vektorokat, 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	

7.		
$\lvert x \rvert \geq 0$	1 pont	*Ha ezt nem írja le, de helyes a végeredménye, akkor is jár ez az 1 pont.*
A függvény legnagyobb értéke: $\frac{1}{0{,}3}\left(=\frac{10}{3}\right)$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

8.		
Az $A+B$ azt az eseményt jelöli, hogy legalább az egyiknek ö találata volt,	1 pont	*Természetesen indokolhat az $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$ azonosság felhasználásával is.*
és ez akkor nem következik be, ha egyiknek sem volt ötöse. Válasz: egyiknek sem.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	
Indoklásul elfogadhatjuk a Venn-diagrammal való helyes szemléltetést is.		

9.		
	2 pont	*A pontszám nem bontható.*
Összesen:	**2 pont**	

10.		
$f(x)=\frac{3^x}{3}-2=3^{x-1}-2$	1 pont	
$f_1(x)=3^x$ függvény ábrázolása.	1 pont	*Ha értéktáblázattal ábrázolja, legfeljebb 1 pontot kaphat.*
$f_2(x)=3^{x-1}$ függvény ábrázolása.	1 pont	
$f(x)=3^{x-1}-2$ ábrázolása.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
Megjegyzés: *Ha nem végzi el az algebrai átalakítást, akkor a* $g(x)=\frac{3^x}{3}$ *ábrázolása 2 pont.*		

11.		
A: Pl. $x = -3$, akkor $\sqrt{(-3)^2} = 3 \neq -3$	1 pont	
B: Pl. Az **a** és **b** nullvektortól különböző, és a hajlásszögük 90°-os.	1 pont	*Helyes ábra (jelölte a derékszöget) esetén is jár a pont.*
Összesen:	**2 pont**	

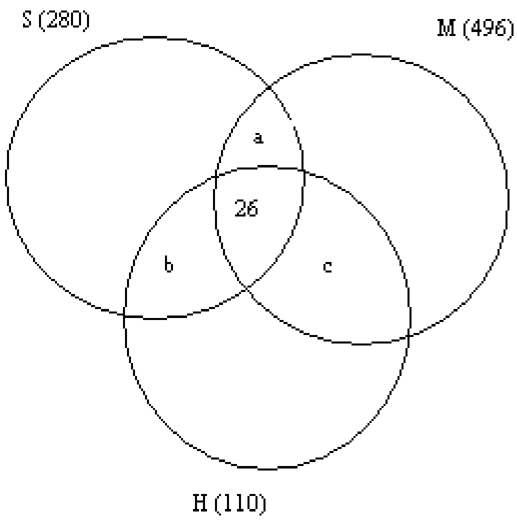
12.		
Ha egy szám osztható 9-cel, a számjegyeinek összege is: $1+4+6+J$ osztható 9-cel,	1 pont	
így a Joker csak 7 lehet.	1 pont	
Az 1, 4, 6, 7 számjegyek tetszőleges sorrendben írhatók, a lehetőségek száma 4!, azaz 24.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

A II. rész megoldása:

II/A

13. a)		
A logaritmus definíciója szerint: $x^2+7x-18>0$ és $x-2>0$.	2 pont	
Az $x^2+7x-18=0$ egyenlet megoldásai: -9 és 2.	2 pont	
A főegyüttható pozitív, így $x<-9$ vagy $2<x$.	2 pont	
Másik egyenlőtlenség megoldása $x>2$.	1 pont	
Így $D=\left]2;+\infty\right[$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

13. b)		
$64^{\frac{1}{3}}=4$	1 pont	
$\log_{\frac{1}{3}}(x+9)=-2$ egyenletből $x=0$.	1 pont	
A $\left]2;+\infty\right[$ halmaznak nem eleme a 0, így az egyenletnek nincs megoldása ezen a halmazon.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

14. a)		
		

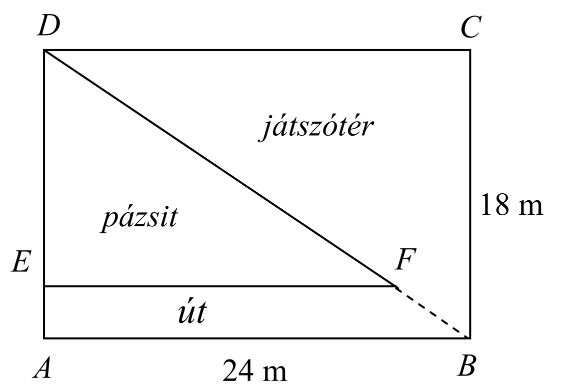
Ha a Venn-diagramon helyesen vannak bejelölve a következő számosságok: 26	1 pont	
280, 496 és 110	1 pont	
a, b és c, és $a+b+c=121$	2 pont	
$\lvert S\cup M\cup H\rvert = 280+496+110-121-2\cdot 26$,	3 pont*	
azaz 713 válaszadó volt legalább egy intézményben, így $2000-713=1287$ nem volt egyik fajtában sem.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

Megjegyzés:
1.) Ha a vizsgázó olyan módon jut a helyes végeredményhez, hogy a megoldásban a, b és c-vel jelölt számosságoknak konkrét értéket ad, maximum 5 pontot kaphat.
*2.) A *-gal jelölt részlet a következőképpen is felírható: Páronként a halmazok metszetének elemszáma: $a+26$, $b+26$ és $c+26$. (1 pont) A logikai szitát alkalmazva:*
$\lvert S\cup M\cup H\rvert = 280+496+110-(a+26)-(b+26)-(c+26)+26$ *(1 pont). A zárójelek felbontása után adódik:* $\lvert S\cup M\cup H\rvert = 280+496+110-121-2\cdot 26$ *(1 pont).*

14. b)

Legalább két intézményben 147 válaszadó volt.	1 pont	
Összesen 2000 válaszadó volt.	1 pont	
$p=\dfrac{147}{2000}\ (=0{,}0735)$	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

15. a)

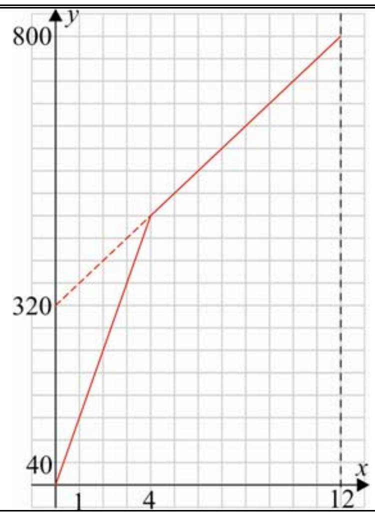


A DEF háromszög hasonló az ABD háromszöghöz (szögeik páromként egyenlők).	1 pont	
Így, mivel $DE=15$, $\dfrac{EF}{15}=\dfrac{24}{18}$,	1 pont	
ebből $EF=20\ (\text{m})$.	1 pont	

$t_{DEF} = 150\ m^2$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
15. b)		
A virágágyást a *DEF* háromszög beírt köre határolja.	1 pont	
A *DEF* háromszög kerülete 60 m, területe 150 m^2,	1 pont*	
így $t_{DEF} = rs$, ahol $s = 30\ (\text{m})$ alapján, $r = 5\ (\text{m})$. A virágágyás 5 m sugarú körlap.	2 pont*	
Mivel $\frac{25\pi}{24\cdot 18} \approx 0{,}1818$, ezért kb. 18,2%-a.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	
*Megjegyzés: Másik megoldás esetén a *-gal jelölt 3 pont a következőképpen osztható meg:* *A beírt kör a derékszög szárait a derékszög csúcsától r távolságra érinti.* *Így a befogók másik szakaszainak hossza* $15 - r$ *illetve* $20 - r$ *(1 pont).* *Külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt:* $(15 - r) + (20 - r) = 25$ *(1 pont).* *Ebből* $r = 5$ *(1 pont)*		
15. c)		
Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő. Tehát $\frac{12}{24\cdot 18} = \lambda^2$	2 pont	
$\lambda = \frac{1}{6}$	1 pont	
A homokozó oldalainak hossza: $18\cdot\frac{1}{6} = 3\ (\text{m})$ és $24\cdot\frac{1}{6} = 4\ (\text{m})$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
Megjegyzés: A 4 pont akkor is megadható, ha a vizsgázó megállapítja, hogy 18:24 = 3:4 oldal arányú téglalapnak kell lennie a homokozónak, és ez 3 és 4 méteres oldalak esetén épp 12 m^2 *területű lesz.*		

II/B

16. a)		
A vezetékes vízcsapból óránként 80 m^3,	1 pont	
a másik csapból 40 m^3 víz folyik ki.	1 pont	
4 óra alatt együttesen 480 m^3 vizet engednek a medencébe,	1 pont	
a maradék 320 m^3 a gyógyvizes csapból további 8 óra alatt folyik ki.	1 pont	
Így összesen 12 óra alatt telik meg a medence.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16. b)		
Ha $0 \le x \le 4$,	1 pont	
akkor x óra alatt $120x$ m^3 víz folyik a medencébe.	1 pont	
A feltöltés kezdete után 4 órával 480 m^3 víz lesz a medencében.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha csak a grafikonon jelenik meg ez az információ.*
Ha $4 < x \le 12$, akkor óránként 40 m^3 víz folyik a medencébe,	1 pont	
így ekkor a feltöltés kezdete után x órával $480 + 40(x-4)$, azaz $320 + 40x$ (m3) víz lesz a medencében.	2 pont	
Tehát $V(x) = \begin{cases} 120x, \; ha \quad 0 \le x \le 4 \\ 320 + 40x, \; ha \quad 4 < x \le 12 \end{cases}$	1 pont	
		
Az első szakasz megrajzolása.	2 pont	
A második szakasz megrajzolása.	2 pont	
A grafikonnal megadott függvény értelmezési tartománya, a $[0\,;12]$ helyesen jelenik meg.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

Megjegyzés: Ha a függvényt a $V(x)=120x$ képlettel adja meg, akkor ezért 1 pont adható. Ha e függvényt a $[0\,;12]$ intervallumon helyesen ábrázolja maximum 2 pont kaphat, így ebben az esetben erre a részre összesen maximum 3 pont adható.

17. a)		
A pont a játék helyes elképzeléséért jár (pl. lerajzolja a szöveg alapján a helyes ábrát)	1 pont	
A kúp magasságát *m*-mel jelölve a test térfogata: $\frac{2\cdot 4^3\pi}{3}+\frac{4^2\pi\, m}{3}$	1 pont	
A feladat szerint $\frac{2\cdot 4^3\pi}{3}+\frac{4^2\pi\, m}{3}=239$,	1 pont	
azaz $128\pi+16\pi\, m=717$.	1 pont	
Ebből $m\approx 6{,}3\ (cm)$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	
17. b)		
A forgáshenger alakú doboz célszerű méretei: sugara 4 cm, magassága 10,3 cm hosszú. (Mivel a kúp magasságának hossza felfele kerekítéssel adódott.)	1 pont	
A henger felszíne: $A_h=2\cdot 4^2\pi+2\cdot 4\pi\cdot 10{,}3$	1 pont	
azaz $359{,}4\ \text{cm}^2$.	1 pont	
A henger alakú doboz szükséges anyagmennyisége: $359{,}4\cdot 1{,}08\approx 388{,}2\ (\text{cm}^2)$	1 pont	
A másik doboz esetében, a négyzet alapú hasáb alapéle 8 cm. (A 4 cm sugarú kör köré írt négyzet oldalhossza 8 cm.)	1 pont	
A fedőlap nélküli hasáb felszíne: $64+4\cdot 8\cdot 4=192\ (\text{cm}^2)$.	1 pont	
A gúla testmagassága és az oldallap alaphoz tartozó *M* magassága által meghatározott derékszögű háromszögben a befogók hossza: 4 cm és 6,3 cm. (*M* a kúp alkotójának hosszával egyenlő.)	1 pont	

Pitagorasz tételét alkalmazva e háromszögre: $4^2+6{,}3^2=M^2$.	1 pont	
$M\approx 7{,}46$ cm	1 pont	
A gúla palástjának területe: $4\cdot\frac{8M}{2}$, azaz $16M$. Így a palást területe kb. 119,4 cm^2.	1 pont	
Ennek a doboznak a felszíne kb. $192+119{,}4=311{,}4\ (\text{cm}^2)$	1 pont	
A másik doboz szükséges anyagmennyisége: $311{,}4\cdot 1{,}05\approx 327\ (\text{cm}^2)$ Tehát ennek a doboznak az anyagszükséglete a kevesebb.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

18. a)		
$\frac{1}{2}$ a valószínűsége annak, hogy először kenuzik, és $\frac{1}{2}$ annak is, hogy a másodikon kajakozik.	1 pont	*Másik lehetőség: Kedvező esetek száma 1, összes lehetőségek száma pedig* $2\cdot 2$.
(A két esemény független egymástól, így) mindkettő bekövetkezésének valószínűsége: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	1 pont	*Így* $P=\frac{1}{2\cdot 2}$.
Összesen:	**2 pont**	
18. b)		
Kétféleképpen következhet be ez az esemény: kajak, kenu, kajak, kenu vagy kenu, kajak, kenu kajak.	1 pont	
Az első és a második esemény bekövetkezésének valószínűsége is $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.	1 pont	
A kérdezett valószínűség: $2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. c)		
Annak a valószínűsége, hogy egy hétvégén kajakozik: $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,	1 pont	
annak pedig, hogy kenuzik: $\frac{1}{3}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy az első két hétvégén kenuzik, a többi hármon pedig kajakozik: $\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$.	2 pont*	
Mivel bármelyik két hétvégére eshet a kenuzás, így a kérdezett esemény annyiféleképpen következhet be, ahányféleképpen kiválaszthatunk az 5 hétvégéből 2-t, azaz $\binom{5}{2}$-féleképpen.	1 pont*	
Mindegyik eset bekövetkezésének valószínűsége $\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$, így a kérdezett valószínűség: $\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\approx 0{,}329$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
*Megjegyzés. A *-gal jelzett pontok akkor is járnak, ha nem részletezi a gondolatmenetet, hanem alkalmazza a binomiális eloszlás képletét.*		

18. d)		
Ha p annak a valószínűsége, hogy az öt alkalom egyikén sem kajakozik (tehát végig kenuzik), akkor annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer kajakozik: $1-p$.	3 pont	
$p=\left(\frac{1}{3}\right)^5$	2 pont	

Annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer kajakozik: $1-\left(\frac{1}{3}\right)^5 \approx 0{,}996$.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
Megjegyzés: Ha a vizsgázó a pontosan egyszer kajakozik, pontosan kétszer, stb. események valószínűségének összegével jut helyes eredményre, akkor az öt valószínűség helyes kiszámítási módjának felírása 1-1 pont, a jó végeredmény kiszámítása 1 pont.		

Matematika középszintű kis próbaérettségi

I. rész

Fontos tudnivalók

- A feladatok megoldására 30 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
- A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
- A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
- A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető!
- Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető.

I.

1. Egyszerűsítse a-val az alábbi törtet!

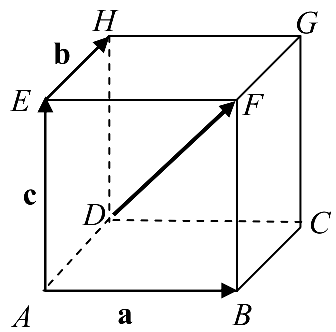
$\frac{a}{a^2 - a}$, ahol $a \neq 1$ és $a \neq 0$. -- **2 pont**

2. Egy számtani sorozat első tagja $\lg 1$, második tagja $\lg 100$. Írja fel a sorozat harmadik tagját tízes számrendszerbeli alakban! -- **3 pont**

3. Adja meg az $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ egyenletű kör középpontját és sugarát! ----------- **3 pont**

4. Derékszögű háromszög befogóinak hossza 6 cm és 8 cm. Hány centiméter hosszú a háromszög köré írható körének sugara? --- **2 pont**

5. Írja fel az ábrán látható kocka $\overrightarrow{DF}$ átlóvektorát a kocka három élvektorának (**a**, **b** és **c**), továbbá a vektorműveleteknek a felhasználásával! --------------------------------------- **2 pont**



6. Rajzoljon egy olyan 7 csucspontú gráfot, amelyben a csúcsokból rendre 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4 él indul! --- **2 pont**

7. Ábrázolja függvénytranszformációval a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \frac{3^x}{3} - 2$ függvényt! --- **4 pont**

II. rész

Fontos tudnivalók

- A feladatok megoldására 60 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
- A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
- A **B**. részben kitűzött két feladat közül csak egyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a 11. feladatra nem kap pontot!

- A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
- A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!
- Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!
- A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, *de alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell*.
- A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
- A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető!
- Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető.
- Kérjük, hogy a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!

II/A

8. a) Adja meg a valós számok halmazának lehető legbővebb D részhalmazát, amelyen az $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+7x-18)-\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$ képlettel függvény értelmezhető!

b) Oldja meg a $]2;+\infty[$ halmazon a $\log_{\frac{1}{3}}(x+9)=2-64^{\frac{1}{3}}$ egyenletet!

a)	8 pont	
b)	3 pont	
Ö.:	**11 pont**	

9. Egy felmérés során a kérdésekre 976 férfi és 1024 nő válaszolt. Többek között megkérdezték őket arról is, hogy az elmúlt félévben voltak-e színházban, moziban, hangversenyen. A válaszokból az derült ki, hogy közülük: 280-an voltak színházban, 496-an moziban, 110-en hangversenyen, mindhárom fajta intézményben 26-an, pontosan kétfajtában pedig összesen 121-en voltak. Az alábbi kérdések mindegyike a felmérésben résztvevőkre vonatkozik.

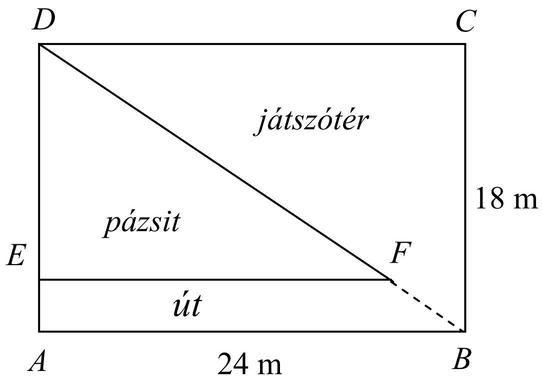
a) Hányan nem voltak egyik fajta intézményben sem?

b) A felmérésben résztvevők közül véletlenszerűen kiválasztva egyet, mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott legalább kétfajta intézményben volt?

a)	8 pont	
b)	4 pont	
Ö.:	**12 pont**	

II/B

10. A mellékelt ábrán egy parknak olyan *ABCD* téglalap alakú részlete látható, amelynek oldalai 18 m és 24 m hosszúak. A játszótér melletti *DEF* háromszög alakú pázsitos rész mellett 3 méter széles út vezet.



a) Mekkora ennek a pázsitos résznek a területe?

b) Erre a befüvesített részre egy lehető legnagyobb területű, kör alakú virágágyást terveznek. Ez a virágágyás a téglalap alakú parkrészletnek hány százalékát fedi le?

c) A játszótér derékszögű sarkába egy 12 m^2 területű, a parkrészlethez hasonló, téglalap alakú homokozót is terveztek. Hány méter lesz a homokozó oldalainak hossza?

a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	**13 pont**	

11. Egy műanyag játékokat készítő cég többek között egy „Kelj fel Jancsi” nevű játékot is gyárt. Két testet ragasztanak össze: egy 4 cm sugarú, nehéz anyagból készült tömör félgömböt és egy olyan belül üreges forgáskúpot, amelynek az alapköre egybeesik a félgömb határoló körével.

a) Hány centiméter hosszú a kúp magassága, ha a játék térfogata 239 cm^3? A választ egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!

A cég a játékot alul nyitható papírdobozba helyezve kívánja forgalmazni. Kétféle dobozt terveztetnek: az egyik forgáshenger alakú, amelybe a játék úgy helyezhető el, hogy annak félgömbje érintse a henger egyik körlapját, a kúp csúcsa pedig a másik körlapot. A másik doboz egy négyzet alapú, 4 cm magas egyenes hasábból (annak fedőlapja nélkül) és egy fölé helyezett négyoldalú szabályos gúla palástjából áll.

b) Számítsa ki, hogy melyik doboz készítéséhez szükséges kevesebb anyag, ha a dobozok anyagigénye a henger alakú doboz esetében a doboz felszínénél 8 %-kal, a másik doboz esetében pedig a felszínénél 5 %-kal több!

a)	5 pont	
b)	12 pont	
Ö.:	**17 pont**	