Juhász István ▪ Orosz Gyula ▪ Paróczay József ▪
Számszné Dr. Simon Judit

MATEMATIKA 10.

Az érthető matematika

tankönyv feladatainak megoldásai

A feladatokat nehézségük szerint szinteztük:
K1 = középszint, könnyebb; **K2** = középszint, nehezebb; **E1** = emelt szint, könnyebb; **E2** = emelt szint, nehezebb feladat.

Lektorok: dr. Jelitai Árpád, Pálmay Lóránt, Tamás Beáta
Szakábra: Szalóki Dezső
Tipográfia: Bajtai Zoltán
Felelős szerkesztő: Tóthné Szalontay Anna, Szelindiné Galántai Melinda

Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó Zrt.
www.ntk.hu
Vevőszolgálat: info@ntk.hu
Telefon: 06 80 200 788

A kiadásért felel: Kiss János Tamás vezérigazgató
Raktári szám: RE 17212
Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Műszaki szerkesztő: Orlai Márton
Grafikai szerkesztő: Mikes Vivien
Terjedelem: 20,6 (A/5) ív
1. kiadás, 2014

TARTALOM

FONTOSABB JELÖLÉSEK

Az A pont és az e egyenes távolsága: $d(A; e)$ vagy Ae vagy $\overline{Ae}$

Az A és B pont távolsága: AB vagy $\overline{AB}$ vagy $d(A; B)$

Az A és B pont összekötő egyenese: $e(A; B)$

Az f_1 és f_2 egyenesek szöge: $\sphericalangle(f_1; f_2)$ vagy $(f_1; f_2)\sphericalangle$

A B csúcspontú szög, melynek egyik szárán az A, másik szárán a C pont található: $ABC\sphericalangle$

A C csúcspontú szög: $C\sphericalangle$

Szög jelölése: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Az A, B és C csúcsokkal rendelkező háromszög: $ABC\triangle$

Az $ABC\triangle$ területe: $T(ABC)$ vagy T_{ABC}

Az a, b és c oldalú háromszög fél kerülete: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

A derékszög jele: ⊾

Az e egyenes merőleges az f egyenesre: $e \perp f$

Az e egyenes párhuzamos az f egyenessel: $e \parallel f$

Egybevágóság: $\cong$; $ABC_\triangle \cong A'B'C'_\triangle$

A hasonlóság aránya: λ

Az A pontból a B pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB}$

A v vektor: $\underline{v}$ vagy $\mathbf{v}$ vagy $\vec{v}$

Egyenlő, nem egyenlő: $=, \neq$; $a = 2$, $b \neq 5$

Azonosan egyenlő: $\equiv$; $a + b \equiv 5$

Közelítőleg egyenlő: $\approx$; $a \approx 2{,}3$; $8{,}54 \approx 8{,}5$

Kisebb, kisebb vagy egyenlő: $<, \leq$; $2 < 3$, $5 \leq x$

Nagyobb, nagyobb vagy egyenlő: $>, \geq$; $6 > 4$, $a \geq 2$

A természetes számok halmaza: $\mathbf{N}$; $\{0; 1; 2; \ldots\}$

Az egész számok halmaza: $\mathbf{Z}$
$\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

A pozitív, a negatív egész számok halmaza:
$\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$ $\{1; 2; 3; \ldots\}$, $\{-1; -2; -3; \ldots\}$

A racionális, az irracionális számok halmaza: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^*$

A pozitív, a negatív racionális számok halmaza: $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$

A valós számok halmaza: $\mathbf{R}$

A pozitív, a negatív valós számok halmaza: $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$

Eleme, nem eleme a halmaznak: $\in, \notin$; $5 \in \mathbf{N}$, $-2 \notin \mathbf{Z}^+$

Részhalmaz, valódi részhalmaz: $\subseteq, \subset$; $A \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$

Nem részhalmaza a halmaznak: $\not\subset$; $\mathbf{Z} \not\subset \mathbf{Q}^+$

Halmazok uniója, metszete: $\cup, \cap$; $A \cup B$, $A \cap B$

Halmazok különbsége: $\setminus$; $A \setminus B$

Üres halmaz: $\emptyset$, $\{\}$

Az A halmaz komplementere: $\overline{A}$

Az A halmaz elemszáma: $|A|$; $|\{0; 1; 2\}| = 3$

Zárt intervallum: $[a; b]$

Balról zárt, jobbról nyílt intervallum: $[a; b[$

Balról nyílt, jobbról zárt intervallum: $]a; b]$

Nyílt intervallum: $]a; b[$

Az x szám abszolút értéke: $|x|$; $|-3{,}1| = 3{,}1$

Az x szám egész része, tört része: $[x]$, $\{x\}$; $[2{,}3] = 2$, $\{2{,}3\} = 0{,}3$

Az a osztója b-nek, b többszöröse a-nak: $a \mid b$; $2 \mid 8$

Az a és b legnagyobb közös osztója: (a, b); $(4, 6) = 2$

Az a és b legkisebb közös többszöröse: $[a, b]$; $[4, 6] = 12$

Az f függvény hozzárendelési szabálya:
$f\colon x \mapsto f(x)$; $f\colon x \mapsto 2x + 3$
$f(x) = y$; $f(x) = 2x + 3$

Az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen:
$f(x_0)$; $f(5)$, ha $x_0 = 5$

I. HALMAZOK, KOMBINATORIKA

1. VEGYES KOMBINATORIKAI FELADATOK

1. Adott 9 külsőre egyforma érme. Az érmék közül az egyik hamis, tömege könnyebb a többinél. Rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg, mellyel összehasonlításokat tudunk végezni.

K2 *a)* Legkevesebb hány mérésből lehet biztosan megtalálni a hamis érmét?

E1 *b)* Legkevesebb hány mérésre van szükség akkor, ha a hamis érme tömegéről csak azt tudjuk, hogy eltér a többiétől? (Tehát nem ismert, hogy könnyebb vagy nehezebb, mint a többi.)

Megoldás

Sorszámozzuk az érméket 1, 2, 3, …, 9-cel.

a) Bármelyik érme könnyebb lehet a többinél, így a hamis érmére kezdetben 9 lehetőség adódik. Egy mérésnek háromféle kimenetele lehet (a mérleg balra vagy jobbra billen ki, illetve egyensúlyban marad), így 1 méréssel legfeljebb 3, 2 méréssel legfeljebb $3 \cdot 3 = 9$ lehetőséget tudunk megkülönböztetni. Vagyis 2 mérésre biztosan szükség van.

Ha 3 érme között egy könnyebb van, akkor ezt egyetlen méréssel meg tudjuk határozni. Ugyanis felteszünk egy-egy érmét a mérlegre. Ha ez kibillen, megtudjuk, melyik érme a könnyebb; míg ha egyensúlyban marad, a mérlegre fel nem tett harmadik érme a hamis.

Így célszerű három darab hármas csoportra osztani az érméket (ez az ún. *harmadolásos technika*), s az első mérésként két csoportot összehasonlítani. Ha az {1; 2; 3} és {4; 5; 6} érmék összehasonlításakor a mérleg kibillen jobbra (ezt a továbbiakban így jelöljük: {1; 2; 3} < {4; 5; 6}), akkor a könnyebb érme az {1, 2, 3} között található. Ha balra billen, akkor a {4, 5, 6} között van; míg ha egyensúlyban marad, akkor a {7; 8; 9} között. Most már csak három érme közül kell kiválasztani az egy könnyebbet, s ehhez elég egy további mérés, mint fentebb láttuk.

b) Kezdetben 18 eset lehetséges (minden érme kétféle lehet, könnyebb vagy nehezebb, mint a többi), 3 méréssel $3^3 = 27$ lehetőséget tudunk megkülönböztetni. Elvileg 3 mérés elegendő. Az első mérést úgy kell megtervezni, hogy a következő két méréssel legfeljebb 9 eset szétválasztását végezzük el.

Ha az első méréskor 2-2 érmét hasonlítunk össze, akkor egyensúly esetén a maradék 5 érme lehet könnyebb vagy nehezebb, mint a többi. Ez 10 eset, 2 mérés a befejezéshez általában nem elegendő.

Ha az első méréskor 3-3 érmét hasonlítunk össze, akkor egyensúly esetén a maradék 3 érme lehet könnyebb vagy nehezebb, mint a többi. Ez 6 eset, 2 további mérés elegendő lehet. Ha pedig a mérleg kibillen, akkor szintén 6 esetet kell tovább vizsgálni (a 3 érme mindegyike lehet könnyebb vagy nehezebb, mint a többi).

Ha az első méréskor 4-4 érmét hasonlítunk össze, akkor egyensúly esetén 2 eset marad, ha a mérleg kibillen, akkor pedig 8. Elvileg 2 méréssel befejezhetjük az eljárást, de kényelmesebb a 3–3 kezdőmérés, mert ekkor kevesebb eset megkülönböztetésére van szükség.

Legyen az (1) kezdőmérés {1; 2; 3} és {4; 5; 6} összehasonlítása.

Ha (1): {1; 2; 3 } < {4; 5; 6}, akkor a 6 lehetséges eset: 1, 2, 3 könnyebb vagy 4, 5, 6 nehezebb. Alkalmazzuk az ún. *átpakolási technikát,* legyen (2): {1; 5} és {2; 4} összehasonlítása. (1, 4 helyben maradt; 2, 5 átkerült; 3, 6 lekerült a mérlegről.) Ha most

(2a): {1; 5} < {2; 4}, akkor 1 könnyebb, vagy 4 nehezebb;

(2b): {1; 5} > {2; 4}, akkor 2 könnyebb, vagy 5 nehezebb;

(2c): {1; 5} = {2; 4}, akkor 3 könnyebb, vagy 6 nehezebb.
Mindhárom esetben elég egyetlen további mérés.

Ha (1): {1; 2; 3 } > {4; 5; 6}, akkor a szimmetrikus helyzet az előzőhöz hasonlóan tárgyalható.
Ha pedig (1): {1; 2; 3} = {4; 5; 6}, akkor 7, 8, 9 valamelyike lehet könnyebb vagy nehezebb, mint a többi érme. Egy lehetséges folytatás például (2): 7 és 8 összehasonlítása. Ez a mérés harmadolja az eseteket; egy további mérés elegendő.

Megjegyzés: Elég nagy szabadsági fokkal dolgoztunk. Az „igazi” kérdés 9 helyett 13 érme vizsgálata. Ekkor a 26 lehetőség elvileg 3 méréssel szétválasztható; kérdés, hogy ez technikailag megoldható-e.

2. E1 Anna és Béla barkochba játékukat kissé módosítják. Anna gondol egy 16-nál nem nagyobb pozitív egész számra, Béla pedig a lehető legkevesebb eldöntendő kérdéssel megpróbálja a számot kitalálni. („Rákérdeznie” már nem kell.) Most azonban Béla csak előre rögzített kérdéseket tehet fel, az egyes válaszok eredményétől függetlenül. Azaz például leír egy papírra néhány kérdést, majd Anna ezekre sorban válaszol, s a válaszok meghallgatása után kell Bélának kitalálnia a gondolt számot. Legkevesebb hány kérdésre van szüksége ehhez?

Megoldás

Ha Béla a klasszikus feladatban „A gondolt szám nagyobb, mint 8?” első kérdésre „nem” választ kapott, akkor az 5, 6, 7, 8 számokkal folytatta a kérdezést; míg ha az első kérdésre a válasz „igen” volt, akkor a 13, 14, 15, 16 számokkal. De a *két kérdés akár össze is kombinálható,* vagyis egyszerre feltehető az 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16 kérdéssel. Az alábbi táblázat mutatja, hogy ezt az ötletet a további kérdésekre alkalmazva 4 kérdés most is elegendő.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(1)									x	x	x	x	x	x	x	x
(2)					x	x	x	x					x	x	x	x
(3)			x	x			x	x			x	x			x	x
(4)		x		x		x		x		x		x		x		x

A kérdéseket (1)–(4) jelöli. Minden kérdéssel az 1–16 számok egy részhalmazára kérdezünk rá; az egyes kérdéseknél x jelet írtunk annak a számnak az oszlopába, amelyik az éppen kérdezett halmazba tartozik.
Például ha egy konkrét játékban Béla a négy kérdésére rendre az „igen, nem, igen, nem” válaszokat kapta, akkor a gondolt szám az (1) és (3) részhalmazokban található; ez a szám pedig a 11.

3. K2 Tekintsük a következő 5×5-ös méretű számtáblázatot!
Válasszunk ki minden sorból és minden oszlopból egy-egy számot (összesen ötöt) úgy, hogy a számok összege a lehető
a) legkisebb;
b) legnagyobb
legyen!

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

Megoldás

A kiválasztott számok összege mindig ugyanannyi.

	A			*A′*
	B′			*B*

Első bizonyítás: Az egyes sorokban, illetve oszlopokban lévő szomszédos számok különbsége megegyezik. Ezért ha az ábra szerinti *A* és *B* mezők szerepelnek egy kiválasztásban, akkor helyettük az *A′* és *B′* mezőket is választhatjuk.
$A + B = A' + B'$, az öt szám összege nem változott. Hasonló mozgatásokkal pedig bármelyik számötösből bármelyikbe eljuthatunk.

Második bizonyítás: Szorozzunk meg minden számot 2-vel!
A kiválasztott számötösök nagyságrendi viszonyai nem változtak. Most bármelyik öt lehetséges számot választjuk, a tízesek helyiértékén 1, 2, 3, 4; az egyesek helyiértékén pedig 0, 2, 4, 6, 8 fog szerepelni. A számok összege tehát állandó.

0	2	4	6	8
10	12	14	16	18
20	22	24	26	28
30	32	34	36	38
40	42	44	46	48

Harmadik bizonyítás: A számokat írjuk fel 5-ös számrendszerbeli alakjukban! Most is igaz, hogy az öt szám kiválasztásakor mind a két helyiértéken mind az öt számjegy szerepelni fog.

0	1	2	3	4
10	11	12	13	14
20	21	22	23	24
30	31	32	33	34
40	41	42	43	44

4. K2 Mivel egyenlő az 1, 2, ..., 1000 számok számjegyeinek összege?

Megoldás

A párbaállítás módszerét alkalmazzuk. $1 + 998 = 999$; $2 + 997 = 999, \ldots, 499 + 500 = 999$. A számok összeadásakor nincs átvitel, így a számpárok számjegyeinek összege mindig 27. A teljes összeg $499 \cdot 27 + 27 + 1 = 13\,501$.

5. E1 A bergengóciai Sárkánynak 77 feje van, a Királyfinak pedig olyan Varázskardja, amellyel egy csapásra 7, 9 vagy 13 fejét tudja levágni a Sárkánynak. Igen ám, de az első esetben a Sárkánynak 13 új feje nő ki, a másodikban 18, a harmadik esetben pedig 10. Ha a Sárkány összes feje lehullott, nem nő ki több. Le tudja-e győzni a Királyfi a Sárkányt?

Megoldás

A fejek számának változása vágásonként $+6$, $+9$, -3. Látható, hogy a Sárkány fejei számának 3-as maradéka állandó. Kezdetben 2 volt a maradék, s ez az egész küzdelem alatt megmarad. A Királyfi akkor tudná legyőzni a Sárkányt, ha annak az utolsó vágás előtt 7, 9 vagy 13 feje lenne; ezek a számok azonban 3-mal osztva rendre 1, 0, 1 maradékot adnak. A Királyfi nem győzhet.

6. K2 Két kupacban érmék vannak, az egyikben 6, a másikban 7 darab. Anna és Béla felváltva vehet el valamelyik (de csak az egyik) kupacból tetszőleges számú, de legalább 1 érmét. Az a játékos nyer, aki az utolsó érmét elveszi.

a) Hogyan játsszon Anna?

b) Hogyan játsszon Anna, ha kezdéskor három kupacban rendre 1, 2, 3 érme van?

Megoldás

a) Annának szimmetrikus állásokra kell törekednie. A szimmetriát Béla saját lépésével elrontja, Anna pedig ismét előállítja. A végállapot szimmetrikus (0, 0), így Anna nyer.

b) Béla állíthatja elő a szimmetriát, neki van nyerő stratégiája.

Ha Anna valamelyik kupacot megszünteti, Béla a másik kettőt szimmetrikusra állítja. Bármilyen más lépésével Anna két szimmetrikus kupacot hoz létre, ezért Bélának elég elvennie a harmadik kupacot.

7. K2 A 8×8-as sakktábla bal alsó sarkában egy bástya áll. Bejárható-e a sakktábla (bástyalépésekkel) úgy, hogy a bástya minden mezőt pontosan egyszer érint, s a jobb felső sarokban ér véget az útja?

Megoldás

Lépései során a bástya felváltva érint fekete és fehér mezőket. Tegyük fel, hogy a bal alsó mező fekete. Mivel fekete mezőről indul a bástya, és 63 mezőn kell áthaladnia, ezért útja csak fehér mezőn végződhet. A jobb felső sarok fekete, így a bejárás nem lehetséges.

8. E1 Egy $3\times3\times3$-as kockát az oldallapokkal párhuzamos síkokkal 27 darab egybevágó kis kockára vágtunk. Elvehetjük-e ezeket a kis kockákat sorban egymás után úgy, hogy mindegyik elvett kocka az előzővel lapszomszédos, s a „hámozás” végén a középső kis kocka megmarad?

Megoldás

A hámozás nem valósítható meg. A kis kockákat „sakktáblaszerűen” feketére és fehérre színezzük úgy, hogy például a sarokkockák feketék legyenek. Ekkor 14 darab fekete és 12 darab fehér kockából áll a burok; a hámozás során pedig felváltva veszünk el fekete és fehér kis kockákat.

9. E1 Az $x = 123\,456\,789\,876\,544$ szám 15 jegyű, és 56 pozitív osztója van. Szorozzuk össze ezeket az osztókat; mit kapunk eredményül?

Megoldás

Ha d egy osztója x-nek, akkor $\overline{d} = \frac{x}{d}$ egy társosztó, és $d \cdot \overline{d} = x$. Így az 56 pozitív osztót 28 olyan osztópárra bonthatjuk fel, melyek szorzata páronként x-et ad. Ezért az eredmény: x^{28}.

2. A SKATULYA-ELV

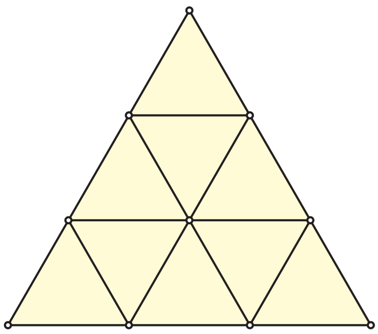
1. K2 35 ember együttes életkora 525 év. Igaz-e, hogy kiválasztható közülük 20 ember úgy, hogy életkoruk összege legalább 300 év legyen?

Megoldás

Az emberek átlagéletkora $\frac{525}{35} = 15$ év. Ha az összes ember 15 éves, akkor bármelyik 20 kiválasztása megfelelő. Ha pedig az emberek között van 15 évnél fiatalabb, akkor van idősebb is, így a 20 legidősebb ember életkorának összege több, mint 300 év.

2. K2 Egy szabályos háromszög alakú céltábla oldala 1 méter. A céltáblát 10 lövés érte. Igazoljuk, hogy van két olyan találat, amelyek 34 cm-nél közelebb vannak egymáshoz!

Megoldás



A szabályos háromszöget az ábrán látható módon 9 egybevágó, szabályos részháromszögre bontjuk fel.

A skatulya-elv miatt van olyan részháromszög, amelyben van 2 lövés. Mivel egy kis háromszög oldala 34 cm-nél kisebb, ezen két lövés távolsága is kisebb, mint 34 cm.

3. K2 Adott 9 általános helyzetű pont a síkon. (A pontok közül semelyik három nincs egy egyenesen.) Két egyenest húzunk úgy, hogy ezek a 9 pont egyikén sem mennek át. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyek csúcsait az adott pontok közül választjuk ki. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is húztuk a két egyenest, mindig lesz olyan háromszög, amelynek oldalait egyik egyenes sem metszi!

Megoldás

A két egyenes a síkot legfeljebb négy tartományra osztja. A skatulya-elv miatt lesz olyan tartomány, amelybe (legalább) 3 pont kerül, s ennek a háromszögnek az egyenesek nem metszik az oldalait.

4. K2 Az 1, 2, ..., 7 számok egy sorrendje $a_1, a_2, \dots, a_7$. Igazoljuk, hogy az $S = (a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_7 - 7)$ szorzat páros!

Megoldás

Tegyük fel, hogy a szorzat – és így minden tényező – páratlan. Az 1., 3., 5. és 7. tényezőben a_1, a_3, a_5 és a_7-nek párosnak kellene lennie, de csak három páros szám van.

5. K2 A tovább már nem egyszerűsíthető $\frac{a}{b}$ alakú racionális szám tizedestört-alakjában legfeljebb milyen hosszú lehet a periódus? (a, b pozitív egész számok)

Megoldás

Az $\frac{a}{b}$ osztás elvégzésekor vagy valamikor fellép a 0 maradék (ekkor a tizedestört véges lesz), vagy az osztási maradékok rendre az 1, 2, 3, … , (b – 1) számok közül kerülnek ki. Ekkor a tizedesvessző leírása után legkésőbb a b. lépésben az osztási maradék ismétlődni fog (skatulya-elv), és innentől kezdve a hányados számjegyei periodikusan ismétlődnek. Vagyis a periódus hossza legfeljebb (b – 1) lehet.

6. E1 Adott a síkon végtelen sok pont. Igazoljuk, hogy végtelen sok különböző távolság lép fel közöttük!

Megoldás

Tegyük fel, hogy az egyik ponttól, A-tól, véges sok különböző távolságra helyezkedik el a többi pont. Ez azt jelenti, hogy a pontok az A középpontú, koncentrikus körökön vannak, s ezen körök száma véges. Ekkor a skatulya-elv miatt valamelyik körön lesz végtelen sok pont; ezek között pedig már végtelen sok különböző távolság lép fel.

7. K2 Hét teherautóval – melyek teherbírása egyenként 3 tonna – 50 darab követ szeretnénk elszállítani. A kövek rendre 370, 372, 374, …, 468 kg súlyúak. El lehet-e egy fordulóval szállítani a köveket?

Megoldás

Legalább egy teherautóra legalább 8 követ kell tenni. A 8 legkönnyebb kő tömege 3016 kg; a köveket nem lehet egy fordulóval elszállítani.

8. E1 33 különböző pozitív egész szám összege 1087. Legalább hány páros szám van az összeadandók között?

Megoldás

A 33 legkisebb páratlan szám összege $1 + 3 + 5 + \ldots + 65 = 1089$, tehát a számok között van legalább egy páros. Mivel 32 páratlan és 1 páros szám összege páros, ezért az is igaz, hogy a számok között legalább két páros szám van. Ennyi elég is: az összegben két páratlan számot kicserélünk náluk eggyel kisebb párosra.

9. E1 Bergengóciában négy híres klub működik, jelöljük ezeket A, B, C és D-vel. Egy 9 fős baráti társaság tagjairól kiderül, hogy mind a négy klubnak éppen 7-7 közülük a tagja. Amikor ezt egyikük meghallja, így szól: „Milyen érdekes! Akkor biztosan van közöttünk olyan, aki tagja mind a négy klubnak!"

Vajon igaza van?

Megoldás

Jelöljük az embereket a_1, a_2, a_3, … , a_9 módon, s hogy ki melyik klubnak a tagja, azt például egy táblázattal adhatjuk meg.

Az A, B, C, D sorokban az egyes a_i személyeknél x-et írunk, ha a_i tagja a klubnak, 0-t pedig, ha nem tag. Például a_1 tagja az A klubnak, de a_1 nem tagja C-nek.

	a_1	a_2	a_3	…	a_9
A	x	x	0		0
B	x	0	0		0
C	0	x	0		x
D	0	x	0		0

A feladat feltétele alapján a táblázatban 28 darab x szerepel, s kérdés, hogy van-e olyan oszlop, amelyben 4 darab x van. Ez pedig a skatulya-elv miatt nyilvánvaló: ha minden oszlopban csak 3 darab x lenne, akkor összesen csak $9 \cdot 3 = 27$ darab x lenne táblázatban.

A klubtagnak igaza van.

10. E1 Bizonyítsuk be, hogy ha az 1, 2, …, $2n$ számokból kiválasztunk ($n + 1$) darabot, akkor ezek között lesz kettő, melyek relatív prímek!

Megoldás

A szomszédos számokból alkotott (1, 2), (3, 4), (5, 6), … , ($2n$ – 1, $2n$) n darab számpárból a skatulya-elv miatt van olyan, amelynek mindkét elemét kiválasztottuk. Ez a két szám relatív prím. (A közös osztójuk a két szám különbségét is osztja.)

11. E1 Egy kör alakú asztalon 2400 darab 1 cm sugarú golyó helyezkedik el. Igazoljuk, hogy legalább még egy ugyanekkora golyó lerakható az asztalra a többi elmozdítása nélkül, ha az asztal sugara legalább 1 méter!

Megoldás

Felülnézetből vizsgáljuk az állást, ekkor a golyók 1 cm sugarú körlapokkal helyettesíthetők. Akkor rakható le a 2401. golyó, ha van olyan P pont az asztalon, amely minden golyó középpontjától legalább 2 cm-re van, és P-nek az asztal szélétől való távolsága nagyobb, mint 1 cm. (Az asztal széle zárt, a golyó nem lóghat le.) Ekkor P lesz a 2401. golyó középpontja.

P számára a 100 cm sugarú asztalból egy 99 cm sugarú kör területe jöhet számításba: $T = 99^2\pi$. Minden golyó, ami már az asztalon van, egy 2 cm sugarú környi területet zár ki ebből, ezek területösszege legrosszabb esetben (ha nincs köztük átfedés) $t = 2^2 \cdot \pi \cdot 2400$. Mivel $t = 2^2 \cdot \pi \cdot 2400 < 99^2\pi = T$, biztosan van olyan P pont az asztalon, amire elhelyezhetjük a 2401. golyót.

Ha a golyók részben lelóghatnak az asztalról, akkor természetesen könyebben elhelyezhető a 2401.

3. SORBARENDEZÉSI ÉS KIVÁLASZTÁSI PROBLÉMÁK I.

1. Hányféleképpen rendezhetünk sorba egyforma méretű golyókat, ha az egyes színekből a darabszámuk

K2 *a)* 1 fehér, 1 piros, 1 zöld, 1 kék és 1 fekete;

K2 *b)* 1 fehér, 2 piros, 3 zöld, 4 kék és 5 fekete;

E1 *c)* 1 fehér, 1 piros, 1 zöld, 2 kék és 3 fekete; valamint további feltétel, hogy piros és fehér golyó ne legyen egymás mellett?

(Az azonos színű golyók nem különböztethetők meg.)

Megoldás

a) 5 különböző elem összes sorrendjéről van szó: $5! = 120$.

b) Ismétléses permutációkat számolunk össze: $\dfrac{15!}{2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!} = 37\,837\,800$.

c) A komplementer leszámolás módszerét alkalmazzuk. Összes eset: $\dfrac{8!}{2!\cdot 3!}$. Ha a piros és fehér golyó szomszédos, egyetlen objektumnak tekinthető, és felcserélhető: $\dfrac{7!}{2!\cdot 3!}\cdot 2$. A piros és fehér golyó nincs egymás mellett: $\dfrac{8!}{2!\cdot 3!} - \dfrac{2\cdot 7!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{7!}{2} = 2520$ esetben.

2. K2 Az 1. lecke 4. példájában egy papírlapot kezdetben 3 részre vágunk, majd az így kapott darabok bármelyikét további 3 vagy 5 részre vághattuk szét, és így tovább. Az eljárást folytatva hányféleképpen érhetjük el, hogy 21 papírlapunk legyen? (Különbözőnek tekintünk két vágássorozatot, ha a 3-as vagy az 5-ös vágások sorrendje különbözik.)

Megoldás

Ha egy papírlapot 3 részre vágunk, akkor a papírdarabok száma 2-vel nő; ha pedig 5 részre, akkor 4-gyel. A papírlapok száma az első vágás után 3. Innen a 21 darabszám úgy érhető el, ha 18-cal növeljük a darabszámot.

1. eset: Négy darab 5-ös és egy 3-as vágást végzünk, ezt 5-féleképpen tehetjük meg. ($4 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 18$.)

2. eset: Három 5-ös és három 3-as vágás kell: $\dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ lehetőség. (Ismétléses permutáció: a 4, 4, 4, 2, 2, 2 elemeknek ennyi sorrendje van.)

3. eset: Két 5-ös és öt 3-as vágás: $\dfrac{7!}{2!\cdot 5!} = 21$ lehetőség.

4. eset: Egy 5-ös és hét 3-as vágás: 8 lehetőség.

5. eset: Kilenc 3-as vágás: 1 lehetőség.

Összesen $5 + 20 + 21 + 8 + 1 = 55$ megfelelő vágássorozat van.

3. K2 A 32 lapos magyar kártyacsomagból visszatevés nélkül húzunk lapokat. Hányféleképpen húzhatunk

a) 3 ászt;
b) 3 pirosat;
c) 4 különböző figurát (figura az ász, király, felső, alsó);
d) 4 egyforma színt?

Oldjuk meg a feladatokat abban az esetben is, ha a lapokat visszatevéssel húzzuk ki, azaz a húzás után lejegyezzük, hogy mit húztunk, és a lapot visszatesszük a csomagba! (Mindkét esetben számít a kihúzott lapok sorrendje.)

Megoldás

a) Egy pakliban 4 ász van, ezért $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ a lehetőségek száma.
b) Egy pakliban 8 piros van, így a lehetőségek száma $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.
c) 16 figura van a csomagban. Az első húzás 16-féle lehet; a második már csak 12 (az előző figurát nem húzhatjuk), a harmadik 8, a negyedik 4-féle. A szorzási szabály miatt $16 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 4 = 6144$ eset van.
d) Az első lap bármi lehet, a következő három pedig ugyanolyan színű kell, hogy legyen. A lehetőségek száma $32 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 6720$.

Ha visszatevéssel húzunk, az esetek száma:
a) $4^3 = 64$;
b) $8^3 = 512$;
c) $16 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 4 = 6144$ (nem számít, hogy visszatettük a kihúzott figurát, mert még egyszer nem húzhatjuk ki);
d) $32 \cdot 8^3 = 16\,384$.

4. Adott a síkon az *A* halmazban 3, a *B* halmazban 4 és a *C* halmazban 5 darab pont oly módon, hogy semelyik három pont nincs egy egyenesen.

K1 *a)* Hány olyan háromszög van, amelynek három csúcsa rendre az *A*, *B*, *C* halmazok pontjai közül kerül ki?
K2 *b)* És olyan hány van, amelynek két csúcsa az *A* halmazban, a harmadik pedig a *B* vagy *C* halmazban van?

Megoldás

a) Az *A* halmazban lévő pontok (3 lehetőség) bármelyikét összeköthetjük a *B* halmazban lévő 4 pont és a *C* halmazban lévő 5 pont bármelyikével. A szorzási szabály miatt a háromszögek száma $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.
b) Az *A* halmazból a két csúcsot 3-féleképpen választhatjuk ki (mindig az egyik pont marad ki). Ehhez a két ponthoz a többi $4 + 5 = 9$ pont bármelyikét választhatjuk. Eredmény: $3 \cdot 9 = 27$.

5. K2 A 3-as számrendszerben hány
a) legfeljebb 5 jegyű;
b) pontosan 5 jegyű
természetes szám van?

Megoldás

a) Az $100\,000_3 = 243$ számnál kisebb természetes számok száma 243.
b) A legnagyobb helyiértéken 1 vagy 2 áll, a többi 4 számjegy 3-féle lehet, 0, 1 vagy 2. Eredmény: $2 \cdot 3^4 = 162$.

6. A számegyenes 0 pontjában áll egy bolha, amely minden másodpercben jobbra vagy balra ugrik egy egységnyit. Hányféleképpen érkezhet meg a 6 koordinátájú pontba

K1 *a)* 6 másodperc alatt;
K2 *b)* 10 másodperc alatt;
K2 *c)* 20 másodperc alatt;
K2 *d)* 2009 másodperc alatt?

Megoldás

a) Minden lépést „jobbra” kell tennie; 1 lehetőség.
b) 8 lépést tesz jobbra és 2 lépést balra. Minden megfelelő ugrássorozatot modellezhetünk egy 8 darab *j* és 2 darab *b* betűből álló szóval. A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, így annyi

ugrássorozat van, ahány sorrend készíthető a *j, j, j, j, j, j, j, j, b, b* betűkből. Eredmény: $\frac{10!}{8!\cdot 2!} = 45$.

c) 7-et ugrik balra és 13-at jobbra, tetszőleges sorrendben: $\frac{20!}{7!\cdot 13!} = 77\,520$ lehetőség.

d) Ilyen ugrássorozat nincs. Páros koordinátájú pontba csak páros számú ugrás után érkezhet a bolha.

7. E1 Hány szám készíthető az alábbi számjegyekből? (0-val nem kezdődhet szám.) Ahol külön nem jelezzük, minden megadott számjegyet fel kell használni.
a) 0, 1, 1, 2, 3;
b) 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, és a szám 5-tel osztható;
c) 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, és a 3-as és a 4-es nem szomszédos számjegyek;
d) 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, és hétjegyű számot készítünk;
e) 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, és olyan hétjegyű számot készítünk, amelyben van 4-es.

Megoldás

a) Ha minden szám különböző lenne, $4\cdot 4!$ sorrendet kapnánk. (A 0 nem lehet az első helyiértéken.) Mivel van két egyforma elem, a sorrendek száma $\frac{4\cdot 4!}{2!} = 48$.

b) Ha az utolsó helyiértéken 0 áll, akkor a sorrendek száma $\frac{7!}{3!}$; ha 5-ös áll, akkor $\frac{6\cdot 6!}{3!}$. Összesen $\frac{7\cdot 6!}{3!} + \frac{6\cdot 6!}{3!} = 13\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 1560$ lehetőség.

c) Összesen $\frac{8\cdot 8!}{3!\cdot 2!}$-féle szám készíthető. A rossz esetek azok, amikor a 3 és 4 szomszédos számjegyek. Tekintsük a két jegyet egyetlen objektumnak, és jelöljük *x*-szel. Ekkor a 0, 1, 1, 1, 2, 2, *x*, 5 elemekből kell számokat készítenünk, ezt $\frac{7\cdot 7!}{3!\cdot 2!}$-féleképpen tehetjük meg. Arra kell még figyelni, hogy *x* kétféle lehet ($\overline{34}$ és $\overline{43}$ különbözik), ezért a rossz esetek száma $\frac{7\cdot 7!}{3!\cdot 2!}\cdot 2$. Az összes lehetőségből kivonva a rossz eseteket, megkapjuk az eredményt: $\frac{8\cdot 8!}{3!\cdot 2!} - \frac{7\cdot 7!}{3!\cdot 2!}\cdot 2 = \frac{64\cdot 7!}{3!\cdot 2!} - \frac{14\cdot 7!}{3!\cdot 2!} = \frac{50\cdot 7!}{3!\cdot 2!} = \frac{25\cdot 7!}{6} = 21\,000$.

d) Ha 0 marad ki, $\frac{7!}{3!\cdot 2!}$; ha 1-es marad ki, $\frac{6\cdot 6!}{2!\cdot 2!}$; ha 2-es, akkor $\frac{6\cdot 6!}{3!}$; végül ha 3-as vagy 4-es, $\frac{6\cdot 6!}{3!\cdot 2!}$ a lehetőségek száma. Összesen $\frac{7!}{3!\cdot 2!} + \frac{6\cdot 6!}{2!\cdot 2!} + \frac{6\cdot 6!}{3!} + 2\cdot\frac{6\cdot 6!}{3!\cdot 2!} = \frac{6!}{3!\cdot 2!}\cdot(7+18+12+12) = 2940$ szám készíthető.

e) Az előző feladat alapján összesen 2940 darab hétjegyű szám készíthető, s ezek közül $\frac{6\cdot 6!}{3!\cdot 2!} = 360$ olyan van, amelyben nincs 4-es. Ezek szerint $2940 - 360 = 2580$ esetben lesz a számjegyek között 4-es.

8. E1 Hányféleképpen lehet hat embert (*A, B, C, D, E, F*) egy kör alakú asztal köré leültetni? És ha további megkötés, hogy *A* és *B* egymás mellé kerüljön? (Két ültetés nem különbözik, ha mindenkinek ugyanaz a jobb és a bal szomszédja.)

Első megoldás

A hat embernek 6! permutációja van. Mivel körben ülnek, ugyanazt a kört 6 sorozat is előállítja, ezért a különböző körök száma $\frac{6!}{6} = 5! = 120$.

Második megoldás

Válasszuk ki például *A*-t, így a kört megszakítottuk. A többi embert – *A*-hoz képest – 5!-féle sorrendben ülhet le.

Ha *A* és *B* egymás mellett ül, akkor őket egy „objektumnak" tekintve $\frac{5!}{5} = 4!$-féle ültetési sorrend lehetséges. Mivel a szomszédságok szempontjából *AB* és *BA* különbözik, az eredmény $2\cdot 4! = 48$.

9. K2 Hányféleképpen olvasható ki a *DEBRECEN* szó az alábbi két táblázatból, ha minden lépésben jobbra vagy lefelé lehet haladni?

D	*E*	*B*	*R*	*E*	*C*	*E*	*N*
E	*B*	*R*	*E*	*C*	*E*	*N*	
B	*R*	*E*	*C*	*E*	*N*		
R	*E*	*C*	*E*	*N*			
E	*C*	*E*	*N*				
C	*E*	*N*					
E	*N*						
N							

D	*E*	*B*	*R*	*E*
E	*B*	*R*	*E*	*C*
B	*R*	*E*	*C*	*E*
R	*E*	*C*	*E*	*N*

Megoldás

Az első táblázatban a 7 lépés egymástól függetlenül 2-értékű lehet (jobbra vagy lefelé), így a kiolvasások száma $2^7 = 128$.

A második táblázatban a 7 lépésből 4-et teszünk jobbra és 3-at le, tetszőleges sorrendben. Jelöljük a jobbra lépéseket *J*, a lefelé történő lépéseket *L* betűkkel, ekkor 4 darab *J* és 3 darab *L* betű lehetséges sorrendjeinek számát kell meghatároznunk. Összesen: $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ kiolvasás van.

10. Feldobunk egyszerre egy sárga, egy kék és egy zöld dobókockát.

K2 *a)* Hányféle eredménye lehet a dobásnak?
K2 *b)* Hány esetben kaphatunk legalább egy hatost?
K2 *c)* Hány esetben lesz a dobott számok összege legalább 17?
K2 *d)* Hány esetben lesz a dobott számok összege páratlan?
K2 *e)* Hány esetben lesz a dobott számok szorzata páros?
K2 *f)* Hány esetben lesz a dobott számok szorzata 3-mal osztható?
E1 *g)* Hány esetben lesz a dobott számok között 5-ös és 6-os is?

Megoldás

a) Mindhárom dobókocka 6-féle értéket mutathat. Ezek egymástól függetlenek, ezért a szorzási szabály alapján a dobásnak $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$-féle eredménye lehet.

b) A komplementer leszámolás módszerét alkalmazzuk. Az összes lehetőség száma 216. A 6-os nélküli dobások száma $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. „Összes – rossz = jó": $216 - 125 = 91$ esetben van a dobott számok között 6-os.

c) Vagy minden dobás 6-os (1 eset), vagy két darab 6-ost és egy 5-öst dobunk (3 eset). Összesen $1 + 3 = 4$ lehetőség.

d) A piros és fehér dobás tetszőleges lehet: $6 \cdot 6 = 36$ eset. A zöld kockán – az első két dobás eredményétől függően – mindig 3-féle szám esetén lesz az összeg páratlan. Így $36 \cdot 3 = 108$ a megfelelő esetek száma.

e) A komplementer leszámolás módszerét alkalmazzuk. Az összes lehetőség száma 216. Mindhárom kockán páratlan számot $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$-féleképpen dobhatunk. A számok szorzata $216 - 27 = 189$ esetben lesz páros.

f) A komplementer leszámolás módszerét alkalmazzuk. A szorzat nem lesz 3-mal osztható, ha egyik kockán sem dobunk 3-ast vagy 6-ost. A rossz esetek száma tehát $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. $216 - 64 = 152$ esetben osztható 3-mal a szorzat.

g) A szita-formulát alkalmazzuk. Nincs 5-ös: $5^3 = 125$ lehetőség. Nincs 6-os: szintén 125 lehetőség. Az összes esetből kivonjuk azt, amikor nincs 5-ös, majd kivonjuk, amikor nincs 6-os: $216 - 125 - 125$. De ekkor kétszer vontuk ki azokat az eseteket, amikor sem 5-öst, sem 6-ost nem dobtunk; ezek számát tehát egyszer hozzá kell adni az összeghez. Nincs sem 5-ös, sem 6-os: $4^3 = 64$ eset. Eredmény: $216 - 125 - 125 + 64 = 30$.

11. 20 diák között szeretnénk 6 jutalomtárgyat kiosztani. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha a tárgyak különbözők, és

K2 *a)* egy diák legfeljebb egy tárgyat kaphat;
K2 *b)* egy diák több tárgyat is kaphat;
K2 *c)* egy diák legfeljebb egy tárgyat kaphat, de egy előre kijelölt diáknak ajándékot kell kapnia;
K2 *d)* egy diák legfeljebb egy tárgyat kaphat, de három előre kijelölt diáknak ajándékot kell kapnia;
E1 *e)* egy diák több tárgyat is kaphat, de nem kell minden ajándékot kiosztani?

Megoldás

a) Az első tárgy 20, a második 19, … , a hatodik 15 tanulónak osztható ki.
Összesen $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 27\,907\,200$ a lehetséges kiosztások száma.
b) Mindegyik tárgy 20-féleképpen osztható ki, így $20^6 = 64\,000\,000$ a lehetőségek száma.
c) A kijelölt diák 6-féle ajándékot kaphat. A maradék 5 tárgyat 19 ember között kell szétosztani. A szorzási szabály miatt az eredmény $6 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 8\,372\,160$.
d) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 489\,600$.
e) Most minden ajándékkal 21 „dolgot” tehetünk: vagy kiosztjuk a 20 diák valamelyikének, vagy egyáltalán nem osztjuk ki. A lehetőségek száma $21^6 = 85\,766\,121$. (Azt is egy esetnek számítottuk, amikor senki semmit nem kapott.)

4. SORBARENDEZÉSI ÉS KIVÁLASZTÁSI PROBLÉMÁK II.

1. K1 Hány mérkőzést játszik 12 csapat összesen, ha mindegyik mindegyikkel játszik?

Megoldás

Bármely két csapat egy mérkőzést játszik, tehát a mérkőzések száma annyi, ahányféleképpen a 12 csapatból 2-t kiválaszthatunk. A kiválasztás sorrendje nem számít, így az eredmény $\binom{12}{2} = 66$.

2. K2 Egy sakkegyesület játékosaiból négyfős csapatot 210-féleképpen lehet kiállítani. Hány tagú az egyesület?

Megoldás

Ha n tagú az egyesület, akkor $\binom{n}{4} = 210$; innen $n = 10$.

3. K2 Hányféleképpen lehet egyforma méretű golyókat sorba rendezni, ha
a) 3 piros és 4 kék golyó adott;
b) 3 piros, 4 kék és 5 zöld golyó adott?

Megoldás

a) Úgy képzeljük, hogy a golyók számára adott hét rögzített hely. Ha ezek közül kiválasztunk a piros golyók számára 3-at, akkor a 4 kék golyó helye egyértelműen adódik. A 7 helyből 3-at $\binom{7}{3} = 35$-féleképpen választhatunk ki. (A kiválasztás sorrendje nem számít.)
b) Hasonló okoskodással a piros golyók számára $\binom{12}{3}$-féle, a kék golyók számára a maradék 9 helyből $\binom{9}{4}$-féle elhelyezés lehetséges, s ekkor az 5 zöld golyó helye egyértelmű. Eredmény: $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} = 27\,720$. (Ezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a golyókat más színsorrendben – például kék, piros, zöld – helyezzük el.

4. K2 Az 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2 számjegyekből hány 7 jegyű számot készíthetünk?

Megoldás

$\binom{7}{3} = 35$ szám készíthető. A számjegyeket modellezhetjük az előző *a)* feladat piros és kék golyóival.

Megjegyzés: Mint korábban már láttuk, a feladatot ismétléses permutáció alkalmazásával is megoldhatjuk: $\frac{7!}{3!\cdot 4!} = \binom{7}{3}$.

5. K2 Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $\frac{13!}{7\cdot 6!\cdot 8}$; *b)* $\frac{(n+3)!}{(n-1)!}$; *c)* $\frac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)}$; *d)* $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$; *e)* $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

Megoldás

a) $\frac{13!}{8!} = 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9$.

b) $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = (n+3)(n+2)(n+1)n$.

c) $\frac{(n+2)(n+1)n!}{(n+2)(n+1)} = n!$.

d) A közös nevező $n!$. $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{n-1}{n!}$ (vagy $\frac{1}{n(n-2)!}$).

e) Egyszerűsíthetünk az $(n+2)!$ és $(n-1)!$ tényezőkkel:

$$\frac{(n+3)!}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{n+3}{1}\cdot\frac{(n+1)n}{1} = (n+3)(n+1)n.$$

6. K2 Adott a síkon az *A* halmazban 6, a *B* halmazban 7 darab pont úgy, hogy semelyik három pont nincs egy egyenesen. Hány olyan háromszög van, melynek legalább egyik csúcsa az *A* halmaz pontjai közül kerül ki?

Első megoldás

Olyan háromszög, melynek az *A* halmazban 1, a *B* halmazban 2 csúcsa van, $\binom{6}{1}\cdot\binom{7}{2} = 126$ darab van. Az *A* halmazban 2 csúcsa $\binom{6}{2}\cdot\binom{7}{1} = 105$, az *A* halmazban 3 csúcsa pedig $\binom{6}{3}\cdot\binom{7}{0} = 20$ háromszögnek van. Összesen $126 + 105 + 20 = 251$ megfelelő háromszög van.

Második megoldás

A $6 + 7 = 13$ pontból összesen $\binom{13}{3} = 286$ háromszög készíthető. Ezek közül kihagyjuk azokat, amelyek mindhárom csúcsa a *B* halmazból kerül ki. Összesen tehát $\binom{13}{3} - \binom{7}{3} = 286 - 35 = 251$ megfelelő háromszög van.

7. K2 Hányféleképpen jöhetett létre egy 6 : 4 végeredményű teniszjátszma?

Megoldás

Ez a végeredmény csak 5:4-es állás után alakulhatott ki. Ha meghatározzuk, hogy az első 9 játékból melyik 4-et nyerte meg a későbbi vesztes fél, akkor egyértelműen megadtuk a játszmasorozatot. Ez $\binom{9}{4} = 126$-féleképpen történhetett.

8. K2 Egy kamionban 60 termék között 5% a selejtes. Az ellenőr 5 terméket választ ki. Hány esetben lesz a kivett termékek között

a) 0 selejtes; *b)* 1 selejtes; *c)* 3 selejtes?

Megoldás

A termékek között összesen 3 selejtes van.

a) Az 57 hibátlan termék közül választ ki 5-öt: $\binom{57}{5} = 4\,187\,106$.

b) A 3 selejtes termék közül választ ki egyet, és az 57 hibátlan közül 4-et: $\binom{3}{1}\cdot\binom{57}{4} = 1\,185\,030$.

c) A 3 selejtes termék közül választ ki 3-at, és az 57 hibátlan közül 2-t: $\binom{3}{3}\cdot\binom{57}{2} = 1596$.

9. E1 Hány ötjegyű szám van, amelynek számjegyei

a) növekvő; *b)* csökkenő

sorrendben következnek egymás után? (Egyenlőség nem lehet a számjegyek között.)

Megoldás

a) Az 1, 2, … , 9 számjegyek közül válasszunk ki ötöt! Minden kiválasztás egyúttal egyetlen növekvő sorrendet is ad; ez $\binom{9}{5} = 126$ lehetőség. (A 0-t nem választhattuk ki, mert 0-val nem kezdődhet a szám.)

b) Most a 9, 8, … , 0 számjegyek közül választunk ki ötöt. Minden kiválasztás egyúttal egyetlen csökkenő sorrendet is meghatároz, ezért $\binom{10}{5} = 252$ a lehetőségek száma.

10. E2 Hányféleképpen olvasható ki a BALATONBOGLÁR szó az alábbi három táblázatból, ha minden lépésben lefelé, jobbra vagy balra lehet haladni?

A *b)* feladatban egy, a *c)* feladatban két mező „tiltott”, ezeken nem haladhatunk át.

a)

```
      B
     A A
    L L L
   A A A A
  T T T T T
 O O O O O O
N N N N N N N
 B B B B B B
  O O O O O
   G G G G
    L L L
     Á Á
      R
```

b)

```
      B
     A A
    L L L
   A A A A
  T T T T T
 O O O[O]O O
N N N N N N N
 B B B B B B
  O O O O O
   G G G G
    L L L
     Á Á
      R
```

c)

```
      B
     A A
    L L L
   A A A A
  T T T T T
 O O O[O]O O
N N N N N N N
 B B B B B B
  O O O O O
   G G[G]G
    L L L
     Á Á
      R
```

Megoldás

a) Bármely kiolvasásnál 6 lépést kell jobbra és 6 lépést balra tenni. Ha a 12 lépésből kiválasztjuk a jobbra történőket, akkor a teljes kiolvasást megadtuk. 12 lépésből 6-ot kiválasztani – az elemek sorrendjére való tekintet nélkül – $\binom{12}{6} = 924$-féleképpen lehet.

Egy lehetséges modell: a 6 darab *J* és 6 darab *B* betűből álló szavak számát határozzuk meg.

b) Az összes kiolvasásból ki kell hagynunk azokat, amelyek érintik *O*-t. A $\overline{BO}$ útvonalon 5 lépést teszünk, 3-at jobbra és 2-t balra; az útvonalat ezért $\binom{5}{2}$-féleképpen tehetjük meg. Az $\overline{OR}$ útvonal 3 + 4 lépésből áll, ez $\binom{7}{3}$-féleképpen járható be. A $\overline{BR}$ teljes útvonal, a tiltott *O* mezőn áthaladva, $\overline{BO}\cdot\overline{OR} = \binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3}$-féleképp tehető meg. A tiltott mezőt elkerülő kiolvasások száma így $\overline{BR} - \overline{BO}\cdot\overline{OR} = \binom{12}{6} - \binom{5}{2}\cdot\binom{7}{3} =$ $= 574$.

c) Az összes kiolvasásból kivonjuk a tiltott *O*-n áthaladókat és a tiltott *G* mezőn áthaladókat. Ez utóbbiak száma $\overline{BG} \cdot \overline{GR} = \binom{9}{5} \cdot \binom{3}{1}$. Ekkor azonban kétszer vontuk ki azokat az utakat, amelyek *O*-t és *G*-t is érintik. Ezek száma $\overline{BO} \cdot \overline{OG} \cdot \overline{GR} = \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1}$.

Eredmény: $\binom{12}{6} - \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} - \binom{9}{5} \cdot \binom{3}{1} + \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} = 924 - 350 - 378 + 180 = 376.$

II. ALGEBRA

5. IRRACIONÁLIS SZÁMOK

1. K2 Becsüljük meg, hogy az alábbi racionális számok közül

a) melyik véges, és melyik végtelen, szakaszos tizedestört-alakú;

b) valamint hogy milyen hosszú lehet az ismétlődő szakasz a tizedestört-alakjukban!

c) A becslés után határozzuk meg a számok tizedestört-alakját! (Vigyázat: a zsebszámológép nem mindig ír ki pontos értéket!)

$A = \frac{293}{5}$; $B = \frac{3817}{8}$; $C = \frac{617}{3}$; $D = \frac{721}{12}$; $E = \frac{327}{13}$; $F = \frac{329}{13}$; $G = \frac{2499}{119}$; $H = \frac{2}{17}$.

Megoldás

a) A és B tizedestört-alakja véges, mert 10-nek osztója 5, és 1000 osztható 8-cal. (Ha például a B törtet 125-tel bővítjük, akkor a $\frac{3817 \cdot 125}{1000}$ törtet kapjuk, s ennek tizedestört-alakja nyilván véges.) A többi törtről „kapásból" nem látni, hogy milyen típusú a tizedestört-alakja.

b) Az $\frac{a}{b}$ osztás elvégzésekor vagy valamikor fellép a 0 maradék (ekkor a tizedestört véges lesz), vagy az osztási maradékok rendre az 1, 2, 3, … , $(b - 1)$ számok közül kerülnek ki. Ekkor a tizedesvessző leírása után legkésőbb a b. lépésben az osztási maradék ismétlődni fog (skatulyaelv), és innentől kezdve a hányados számjegyei periodikusan ismétlődnek. Vagyis a periódus hossza legfeljebb $(b - 1)$ lehet.

c) $A = 58{,}6$; $B = 477{,}125$; $C = 205{,}\dot{6}$; $D = 60{,}08\dot{3}$; $E = 25{,}\overline{153846}$ (a számológép a 25,15384615 hányadost írta ki); $F = 25{,}\overline{307692}$ (a számológép által kiírt szám 25,30769231 (!)); $G = 21$; $H = 0{,}\overline{1176470588235294}$. (Ugyanaz a számológép most 0,117647058-at írt ki, azaz nem kerekített (!). A forgalomban lévő zsebszámológépek többsége szerencsére kerekít, és 0,117647059-et ír ki.).

2. E1 Adjuk meg a következő számokat közönséges tört alakban!

a) $A = 0{,}\dot{1}$; *b)* $B = 0{,}\overline{12}$; *c)* $C = 0{,}1\overline{23}$; *d)* $D = 1{,}23\overline{456}$; *e)* $E = 1{,}\dot{9}$.

Megoldás

a) $10A = 1{,}\dot{1}$. A két egyenlet kivonásából $9A = 1$, $A = \frac{1}{9}$.

b) $100B = 12{,}\overline{12}$. A két egyenlet kivonásából $99B = 12$, $B = \frac{12}{99}\left(= \frac{4}{33}\right)$.

c) $100C = 12{,}3\overline{23}$; $99C = 12{,}2$; $C = \frac{12{,}2}{99} = \frac{122}{990}\left(= \frac{61}{495}\right)$.

d) $1000D = 1234{,}56\overline{456}$; $999D = 1233{,}33$, $D = \frac{1233{,}33}{999} = \frac{123\,333}{99\,900}\left(= \frac{41\,111}{33\,300}\right)$.

e) $10E = 19{,}\dot{9}$; $9E = 18$, $E = 2$ (!). (A véges racionális számok tizedestört-alakja nem egyértelmű.)

3. K2 Az ókori Mezopotámia tudósai szerint $3 < \pi < 3\frac{1}{8}$. Négy tizedesjeggyel számolva, mennyire voltak pontosak a tudósok?

Megoldás

$3 < \pi < \frac{25}{8}$ esetén ha π-t a $\frac{25}{8} - 3 = \frac{1}{8}$ hosszú intervallum „közepére" helyezzük, akkor legfeljebb $\frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$ lehet a becslés hibája. (Ekkor a π-nek tulajdonított érték 3 és $\frac{25}{8}$ átlaga, $\frac{49}{16} = 3{,}0625$. (A pontosabb érték $\pi \approx 3{,}14159$; az eltérés $\pi - 3{,}0625 \approx 0{,}0791$.)

4. E1 Az alábbi számok racionálisak vagy irracionálisak?

a) $\frac{1}{\sqrt{6}-1}$; *b)* $\sqrt{\frac{3}{8}}$; *c)* $\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{2}}$; *d)* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; *e)* $\sqrt{2}-3\sqrt{5}$; *f)* $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Megoldás

a) Mivel $\sqrt{6}$ irracionális, így $\sqrt{6}-1$, s ezért $\frac{1}{\sqrt{6}-1}$ is irracionális.

b) Tegyük fel indirekt módon, hogy $\sqrt{\frac{3}{8}}$ racionális. Ekkor $\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{a}{b}$, ahol *a*, *b* pozitív egész számok. Innen $\frac{3}{8} = \frac{a^2}{b^2}$, azaz $3b^2 = 8a^2$. Ellentmondást kaptunk: a bal oldal prímfelbontásában a 3 kitevője páratlan, a jobb oldalon páros.

c) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, így $\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$ racionális szám.

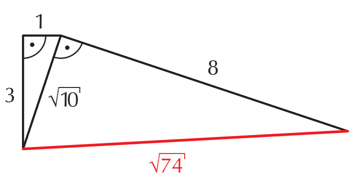
d) Tegyük fel indirekt módon, hogy $\sqrt{2}+\sqrt{3} = r \in \mathbf{Q}$. Négyzetre emelés és rendezés után $\sqrt{24} = r^2 - 5$, s ez ellentmondás: a bal oldal irracionális.

e) A *d)* feladathoz hasonlóan járunk el. A $\sqrt{2}-3\sqrt{5} = r$ egyenletből $47 - 6\sqrt{10} = r^2$, s innen a $\sqrt{360} = 47 - r^2$ ellentmondást kapjuk.

f) Az indirekt feltevést átalakítva $\sqrt{2}+\sqrt{3} = r - \sqrt{5}$, s négyzetre emelés után $2\sqrt{6} = r^2 - 2r\sqrt{5}$. Ismét négyzetre emelünk: $24 = r^4 - 4r^3\sqrt{5} + 20r^2$. Ellentmondás: a jobb oldal irracionális.

5. K2 Láttuk a leckében, hogy $\sqrt{74}$ megszerkeszthető úgy, hogy sorban megszerkesztjük a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, …, $\sqrt{73}$ értékeket, majd az 1 és $\sqrt{73}$ befogójú derékszögű háromszög átfogója $\sqrt{74}$ lesz. Ez elég hosszadalmas munka. Nem járhatunk el ügyesebben?

Megoldás



Van gyorsabb eljárás. Például $74 = 8^2 + 10 = 8^2 + 1^2 + 3^2$. Megszerkesztjük az 1 és 3 befogójú derékszögű háromszög átfogóját (ennek hossza $\sqrt{10}$), ezután a $\sqrt{10}$ és 8 befogójú derékszögű háromszög átfogója $\sqrt{74}$ lesz (*ábra*).

Még gyorsabban célhoz érünk, ha észrevesszük, hogy $74 = 7^2 + 5^2$; a keresett szakasz tehát az 5 és 7 befogójú derékszögű háromszög átfogója.

6. K2 Van-e *x*, *y* racionális megoldása a $(3\sqrt{3} - 4)x + (2\sqrt{3} - 3)y = 7\sqrt{3} - 10$ egyenletnek?

Megoldás

Tegyük fel, hogy van megoldás. Az egyenlet átalakítva $\sqrt{3}(3x + 2y - 7) = 4x + 3y - 10$ alakú. A jobb oldalon racionális szám áll, a bal oldalon pedig $\sqrt{3}$ racionális többese. A bal oldalon csak akkor állhat racionális szám, ha $3x + 2y - 7 = 0$, s ekkor a jobb oldalon teljesülnie kell, hogy $4x + 3y - 10 = 0$.

Az egyenletrendszer megoldása $x = 1$, $y = 2$, s ezek racionális számok.

7. Van-e két olyan irracionális szám, α és β,

K2 *a)* amelyek összege és szorzata is egész szám;

E1 *b)* amelyekre $\alpha + \beta$ és $3\alpha + 5\beta$ is egész szám?

Megoldás

a) Például $\alpha = \sqrt{2}$ és $\beta = -\sqrt{2}$ megfelel. Egy másik lehetőség $\alpha = n + \sqrt{2}$ és $\beta = n - \sqrt{2}$ választás, ahol $n \in \mathbf{Z}$. Ekkor $\alpha + \beta = 2n$ és $\alpha \cdot \beta = n^2 - 2$.

b) Ilyen irracionális számok nincsenek. Ha $x = \alpha + \beta$ és $y = 3\alpha + 5\beta$ is egész számok, akkor $y - 3x = 3\alpha + 5\beta - (3\alpha + 3\beta) = 2\beta$ is egész szám lenne. (Márpedig nem az; sőt, még csak nem is racionális szám.)

8. Keressünk olyan n természetes számokat, amelyekre az alábbi kifejezések értéke racionális szám lesz!

K2 *a)* $A = \sqrt{n^2 + 9}$; **K2** *b)* $B = \sqrt{n^2 + 3n}$; **E1** *c)* $C = \sqrt{n^2 + 3n + 4}$.

Megoldás

A gyökjel alatt négyzetszámnak kell állnia.

a) $n^2 + 9 = k^2$. A szomszédos négyzetszámok távolsága rendre 1, 3, 5, 7, 9, 11, … Lehetséges megoldások: $n^2 = 16$, $k^2 = 25$ vagy $n^2 = 0$, $k^2 = 9$.

b) $n^2 + 3n = n(n + 3)$. Az n és $(n + 3)$ tényezők közös osztója csak 1 vagy 3 lehet. Ha relatív prímek, akkor mindkét tényező négyzetszám: $n = 1$, $n + 3 = 4$. Ha mindkét tényező osztható 3-mal, akkor szorzatuk csak az $n = 0$, $n + 3 = 3$ esetben lesz négyzetszám.

c) $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 < n^2 + 3n + 4 \le n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$, vagyis a C^2 kifejezés két szomszédos négyzetszám közé esik. Csak akkor lehet C^2 négyzetszám, ha $n^2 + 3n + 4 = n^2 + 4n + 4$, azaz $n = 0$.

9. Adjunk meg olyan pozitív egész számot, amelyik

K2 *a)* előáll két racionális szám négyzetének az összegeként;

E1 *b)* nem írható fel két racionális szám négyzetének az összegeként!

Megoldás

a) A pitagoraszi számhármasokból végtelen sok megoldást kapunk. Például $3^2 + 4^2 = 25$, ezen kívül 5^2-tel osztva $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$.

b) $2 = 1^2 + 1^2$. Azt állítjuk, hogy a 3 viszont már nem áll elő két racionális szám négyzetösszegeként.

Az előző megoldással fordított irányban okoskodunk. Tegyük fel, hogy $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 3$, innen $a^2 + b^2 = 3c^2$. A négyzetszámok 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot adnak. Ha a^2 vagy b^2 valamelyike 1 maradékot ad, akkor a bal oldal nem lehet 3-mal osztható. Ha pedig a^2 és b^2 egyaránt 0 maradékot ad, akkor a^2 és b^2 osztható 9-cel is, így a bal oldal osztható 9-cel. Vagyis a bal oldal prímtényezős felbontásában a 3 páros kitevőn szerepel, míg a jobb oldalon páratlan kitevőn van. Ellentmondást kaptunk: a 3 nem írható fel két racionális szám négyzetének összegeként.

10. E2 A 2. lecke 6. példájában megállapítottuk, hogy a π tizedestört-alakjában van olyan számjegy, amelyik végtelen sokszor előfordul. Igaz-e, hogy biztosan van két olyan számjegy is, amelyik végtelen sokszor fordul elő?

Megoldás

Tegyük fel indirekt módon, hogy csak egyetlen x számjegy fordul elő végtelen sokszor. Mivel a többi számjegyből véges sok van, a tizedes tört valamely helyiértéktől kezdve csupa x-ből fog állni. Ekkor viszont a szám racionális lenne – vegyes szakaszos tizedes tört, 1 hosszú periódussal. Ellentmondást kaptunk: legalább két számjegy fordul elő végtelen sokszor.

Egy érdekesség: megoldatlan probléma, hogy π tizedestört-alakjában van-e olyan számjegy, amelyik véges sokszor fordul elő.

6. SZÁMOK N-EDIK GYÖKE

1. K1

Határozzuk meg a következő gyökök értékét!

$\sqrt{121}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[7]{(-3)^7}$; $\sqrt[7]{5^7}$.

Megoldás

$\sqrt{121}=11$; $\sqrt[3]{8}=2$; $\sqrt[3]{-8}=-2$; $\sqrt[7]{(-3)^7}=-3$; $\sqrt[7]{5^7}=5$.

2. K1

Határozzuk meg a következő gyökök értékét!

$\sqrt{\frac{9}{4}}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{100\,000}}$; $\sqrt[99]{-1}$.

Megoldás

$\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$; $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}}=-\frac{3}{5}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{100\,000}}=0{,}1$; $\sqrt[99]{-1}=-1$.

3. K1

Keressük meg a műveletsorok eredményét!

a) $\sqrt{16}-\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{8}-\sqrt[4]{16}$;

b) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}-\sqrt[4]{\frac{81}{16}}-\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}+\sqrt{\frac{1}{4}}$;

c) $\sqrt[3]{0{,}001}-\sqrt[4]{\frac{1}{10\,000}}+\sqrt{0{,}01}$.

Megoldás

a) $\sqrt{16}-\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{8}-\sqrt[4]{16}=4-(-1)+2-2=5$;

b) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}-\sqrt[4]{\frac{81}{16}}-\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}+\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=2$;

c) $\sqrt[3]{0{,}001}-\sqrt[4]{\frac{1}{10\,000}}+\sqrt{0{,}01}=0{,}1-0{,}1+0{,}1=0{,}1$.

4. E1

Adjuk meg a kifejezések értelmezési tartományát!

$\sqrt[7]{a}$; $\sqrt[4]{b}$; $\sqrt[3]{c-3}$; $\sqrt{d-3}$; $\sqrt[6]{2e-10}$.

Megoldás

$\sqrt[7]{a}$ értelmezett, ha $a\in\mathbf{R}$;

$\sqrt[4]{b}$ értelmezett, ha $b\geq 0$;

$\sqrt[3]{c-3}$ értelmezett, ha $c\in\mathbf{R}$;

$\sqrt{d-3}$ értelmezett, ha $d\geq 3$;

$\sqrt[6]{2e-10}$ értelmezett, ha $e\geq 5$.

5. E1

Adjuk meg a kifejezések értelmezési tartományát, majd határozzuk meg a következő gyökök értékét!

$\sqrt[4]{x^4}$; $\sqrt[3]{y^3}$; $\sqrt{z^4}$; $\sqrt[3]{w^6}$.

Megoldás

$\sqrt[4]{x^4}=x$, ha $x\geq 0$;

$\sqrt[3]{y^3}=y$, ha $y\in\mathbf{R}$;

$\sqrt{z^4}=z^2$, ha $z\in\mathbf{R}$;

$\sqrt[3]{w^6}=w^2$, ha $w\in\mathbf{R}$.

7–8. A NÉGYZETGYÖKVONÁS AZONOSSÁGAI

1. K1

Keressünk egyenlőket a kifejezések között!

$\sqrt{2^2}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$; $\sqrt{(-2)^2}$; $\sqrt{\frac{32}{8}}$; $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}}$; $(\sqrt{2})^2$.

Megoldás

A kifejezések mindegyike 2, tehát egyenlők.

2. K1

Számológép használata nélkül válasszuk ki azokat a kifejezéseket, amelyek pontos értékét megállapíthatjuk! Írjuk fel a pontos értékeket!

$\sqrt{10^6}$; $\sqrt{40}$; $\sqrt{\frac{9}{4}}$; $\sqrt{1000}$; $\sqrt{625}$; $\sqrt{6{,}25}$; $\sqrt{\frac{3}{12}}$.

Megoldás

$\sqrt{10^6} = 10^3 = 1000$;

$\sqrt{40}$ a 40 nem racionális szám négyzete, pontos értékét gyökvonás használata nélkül nem tudjuk megállapítani;

$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$;

$\sqrt{1000}$ az 1000 nem racionális szám négyzete, pontos értékét gyökvonás használata nélkül nem tudjuk megállapítani;

$\sqrt{625} = 25$;

$\sqrt{6{,}25} = \sqrt{\frac{625}{100}} = 2{,}5$;

$\sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

3. K1

Állapítsuk meg, hogy a két szám közül melyik a nagyobb!

a) $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{3}}$ vagy $\sqrt{20}$.

Megoldás

Egyenlők, mert $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{60}{3}} = \sqrt{20}$.

b) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{4}$ vagy $\sqrt{3}\cdot\sqrt{20}$.

Megoldás

Egyenlők, mert $\sqrt{15}\cdot\sqrt{4} = \sqrt{15\cdot 4} = \sqrt{60} = \sqrt{3\cdot 20} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{20}$.

c) $(\sqrt{13})^2$ vagy $\sqrt{11^2}$.

Megoldás

$(\sqrt{13})^2 = \sqrt{13^2} = 13 > \left(x + \frac{25}{4}\right)^2$:

d) $\sqrt{25\cdot 49}$ vagy 35.

Megoldás

Egyenlők, mert $\sqrt{25\cdot 49} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{49} = 5\cdot 7 = 35$.

4. K1 Végezzük el a műveleteket!

a) $\sqrt{2}(\sqrt{8}-\sqrt{32})$.

Megoldás

$\sqrt{2}(\sqrt{8}-\sqrt{32})=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{64}=4\cdot 8=32.$

b) $\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{3})$.

Megoldás

$\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{3})=\sqrt{3\cdot 12}+\sqrt{3\cdot 75}-\sqrt{3\cdot 3}=6+15-3=18.$

c) $(\sqrt{14}+\sqrt{7})(\sqrt{14}-\sqrt{7})$.

Megoldás

Nevezetes azonosságot felhasználva:
$(\sqrt{14}+\sqrt{7})(\sqrt{14}-\sqrt{7})=(\sqrt{14})^2-(\sqrt{7})^2=14-7=7.$

d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$.

Megoldás

Nevezetes azonosságot felhasználva:
$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{15}+9=14+2\sqrt{15}.$

e) $(\sqrt{7}-\sqrt{11})^2$.

Megoldás

Nevezetes azonosságot felhasználva:
$(\sqrt{7}-\sqrt{11})^2=7-2\sqrt{77}+11=18-2\sqrt{77}.$

f) $(\sqrt{2}-1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

Megoldás

$(\sqrt{2}-1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}+\sqrt{2})=\sqrt{2}-\sqrt{6}+2-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-3+\sqrt{6}=-2+2\sqrt{3}.$

5. K1 Igaz-e bármely x és y valós szám esetén: $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$?

Megoldás

Nem igaz, csak ha $x\ge 0$, és $y>0$.

6. K1 Végezzük el a műveleteket!

a) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

Megoldás

Ha $a\ge 0$, és $b\ge 0$, akkor $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$.

b) $(\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$.

Megoldás

Ha $c\ge 0$, és $d\ge 0$, akkor $(\sqrt{c}-\sqrt{d})^2=c+d-2\sqrt{cd}$.

c) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2$.

Megoldás

Ha $x \geq 0$, $y \geq 0$, és $z \geq 0$ akkor $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 = x+y+z-2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}$.

7. K2 Mely egyenlőségek azonosságok?

a) $\sqrt{(x+5)^2} = x+5$.

Megoldás

Nem azonosság, csak ha $x+5 \geq 0$, azaz ha $x \geq -5$.

b) $\sqrt{a^2+2a+1} = a+1$.

Megoldás

Nem azonosság, csak ha $a+1 \geq 0$, azaz ha $a \geq -1$.

c) $\sqrt{(b-3)^2} = |b-3|$.

Megoldás

Azonosság.

d) $\sqrt{y^2-6y+9}+y-3 = 2(y-3)$.

Megoldás

Nem azonosság, csak ha $y \geq 3$.

e) $\sqrt{\dfrac{c^2-10c+25}{c-5}} = c+5$.

Megoldás

Nem azonosság, $\sqrt{\dfrac{c^2-10c+25}{c-5}} = \sqrt{\dfrac{(c-5)^2}{c-5}} = \sqrt{c-5}$, ha $c > 5$.

9. A NÉGYZETGYÖKVONÁS AZONOSSÁGAINAK ALKALMAZÁSA I.

1. K1 Végezzük el a műveleteket!

a) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

Megoldás

$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right] = \sqrt{2}\left(-2\sqrt{2}\right) = -4$.

b) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2$.

Megoldás

$\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2 = 7+5-2\sqrt{35}-7-5-2\sqrt{35} = -4\sqrt{35}$.

c) $(\sqrt{8}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2$.

Megoldás

$(\sqrt{8}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2 = 8+2-2\sqrt{16}+8+2+2\sqrt{16} = 20$.

d) $\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})+\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

Megoldás

$\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})+\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = \sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}-\sqrt{6} = \sqrt{15}-\sqrt{10} \approx 0{,}71$.

2. K2 Végezzük el a műveleteket!

a) $\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{5}}{13-5}$ (gyöktelenítsük a számlálót).

Megoldás

$$\frac{\sqrt{13}-\sqrt{5}}{13-5} = \frac{\sqrt{13}-\sqrt{5}}{(\sqrt{13}+\sqrt{5})(\sqrt{13}-\sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}.$$

b) $\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{8}}{20-8}$ (gyöktelenítsük a számlálót).

Megoldás

$$\frac{\sqrt{20}+\sqrt{8}}{20-8} = \frac{\sqrt{20}+\sqrt{8}}{(\sqrt{20}+\sqrt{8})(\sqrt{20}-\sqrt{8})} = \frac{1}{\sqrt{20}-\sqrt{8}}.$$

c) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{50}} : \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$.

Megoldás

$$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{50}} : \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{50}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{450}{250}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = 3\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

3. K2 Állapítsuk meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{5a-8}$.

Megoldás

Értelmezett, ha $5a-8 \ge 0$, $a \ge \frac{8}{5}$.

b) $\sqrt{9k^2+12k+4}$.

Megoldás

$9k^2+12k+4 = (3k+2)^2$, ezért minden $k \in \mathbf{R}$ esetén értelmezett.

c) $\sqrt{(b+1)(c+5)}$.

Megoldás

Értelmezett, ha $(b-1)(c+5) \ge 0$, vagyis ha $b \le 1$ és $c \le -5$, vagy $b \ge 1$ és $c \ge -5$.

d) $\sqrt{\dfrac{4}{2x+5}}$.

Megoldás

Értelmezett, ha $\dfrac{4}{2x+5} \ge 0$, azaz ha $x \ge -\dfrac{5}{2}$.

e) $\sqrt{\dfrac{y+1}{y-8}}$.

Megoldás

Értelmezett, ha $\dfrac{y+1}{y-8} \ge 0$, azaz, ha $y \le -1$, vagy $y > 8$.

4. Alakítsuk szorzattá a kifejezéseket! Ahol szükséges, a szorzat alakhoz adjuk meg az értelmezési tartományt is!

K2 a) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Megoldás

$\sqrt{6} + \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$.

K2 b) $\sqrt{21} - \sqrt{15} + \sqrt{6}$.

Megoldás

$\sqrt{21} - \sqrt{15} + \sqrt{6} = \sqrt{3}(\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{2})$.

K2 c) $\sqrt{50} + 3\sqrt{14} - 2\sqrt{46}$.

Megoldás

$\sqrt{50} + 3\sqrt{14} - 2\sqrt{46} = \sqrt{2}(5 + 3\sqrt{7} - 2\sqrt{23})$.

E1 d) $\sqrt{ab} - \sqrt{ac} + \sqrt{ad}$.

Megoldás

$\sqrt{ab} - \sqrt{ac} + \sqrt{ad} = \sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{d})$, ha $a, b, c, d \ge 0$.

E1 e) $\sqrt{x} - x + \sqrt{2xy}$.

Megoldás

$\sqrt{x} - x + \sqrt{2xy} = \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{x} + \sqrt{2y}\right)$, ha $x, y \ge 0$.

E1 f) $3\sqrt{a^2bc} - 2\sqrt{ab^2c} + \sqrt{abc^2}$.

Megoldás

$3\sqrt{a^2bc} - 2\sqrt{ab^2c} + \sqrt{abc^2} = \sqrt{abc}(3\sqrt{a} - 2\sqrt{b} + \sqrt{c})$, ha $a, b, c \ge 0$.

E1 g) $\sqrt{pq} - \sqrt{rs} + \sqrt{qr} - \sqrt{ps}$.

Megoldás

$\sqrt{pq} - \sqrt{rs} + \sqrt{qr} - \sqrt{ps} = \sqrt{p}\left(\sqrt{q} - \sqrt{s}\right) + \sqrt{r}\left(\sqrt{q} - \sqrt{s}\right) = \left(\sqrt{q} - \sqrt{s}\right)\left(\sqrt{p} + \sqrt{r}\right)$.

5. E1 A szorzatokat írjuk összeg alakban, ha lehet, végezzünk összevonásokat!

a) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.

Megoldás

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-b+a+b-2\sqrt{ab}=2a-2\sqrt{ab}$, ha $a,b\ge 0$.

b) $(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

Megoldás

Ha $a,b\ge 0$, akkor
$(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(a+b)-b-a-2\sqrt{ab}-b=-2\sqrt{ab}-b$.

c) $\sqrt{x-\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{y}}$.

Megoldás

Ha $x\ge\sqrt{y}$, $y\ge 0$
$\sqrt{x-\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{(x-\sqrt{y})(x+\sqrt{y})}=\sqrt{x^2-y}$.

10. A NÉGYZETGYÖKVONÁS AZONOSSÁGAINAK ALKALMAZÁSA II.

1. K1 Függvénytáblázat és számológép használata nélkül állapítsuk meg a kifejezések nagyságviszonyát! Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket, alkalmazzuk a „bevitel a gyökjel alá” módszert!

$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{54}$; $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{48}$; $\frac{1}{5}\cdot\sqrt{150}$.

Megoldás

$\sqrt{\frac{54}{9}}=\sqrt{6}$; $\sqrt{\frac{48}{16}}=\sqrt{3}$; $\sqrt{\frac{150}{25}}=\sqrt{6}$.

$\sqrt{3}<\sqrt{6}=\sqrt{6}$.

2. Írjuk egyszerűbb alakba a kifejezéseket! Alkalmazzuk a „bevitel a gyökjel alá” módszert! Adjuk meg az értelmezési tartományokat!

K1 *a)* $\frac{p}{q}\cdot\sqrt{\frac{q}{p}}$.

Megoldás

$$\frac{p}{q}\cdot\sqrt{\frac{q}{p}}=\sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2\cdot\frac{q}{p}}=\sqrt{\frac{p}{q}}\text{, ha }\frac{p}{q}>0.$$

K1 *b)* $mn\sqrt{\frac{m}{n}}$.

Megoldás

$$mn\sqrt{\frac{m}{n}}=\sqrt{(mn)^2\cdot\frac{m}{n}}=\sqrt{m^3n}=m\sqrt{mn}\text{, ha }mn\ge 0,\ n\ne 0.$$

K1 *c)* $xy\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.

Megoldás

Ha $x, y > 0$, akkor $xy\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \sqrt{\left((xy)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right)} = \sqrt{(xy)^2\frac{y+x}{xy}} = \sqrt{xy(x+y)}$.

K2 *d)* $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}}$.

Megoldás

Ha $x_1 = -1$, és $\frac{a+b}{a-b} \geq 0$, akkor

$x_2 = -\frac{24}{13}$

.

K2 *e)* $(a-b)\sqrt{\frac{2}{a^2-b^2}}$.

Megoldás

Ha $a > |b|$, akkor $(a-b)\sqrt{\frac{2}{a^2-b^2}} = \sqrt{\frac{2(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}} = \sqrt{\frac{2(a-b)}{a+b}}$.

3. K1 Írjuk egyszerűbb alakba a kifejezéseket! Alkalmazzuk a „kihozatal a gyökjel alól” módszert! Adjuk meg az értelmezési tartományokat!

a) $\sqrt{50}$; *b)* $\sqrt{8}$; *c)* $\sqrt{243}$; *d)* $\sqrt{a^3}$; *e)* $\sqrt{32b^5}$; *f)* $\sqrt{12c^3}$.

Megoldás

a) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{243} = 9\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$, ha $a \geq 0$;

e) $\sqrt{32b^5} = 4b^2\sqrt{2b}$, ha $b \geq 0$;

f) $= \frac{14(2\sqrt{7}+7\sqrt{}}{}$, ha $c \geq 0$.

4. Végezzük el a műveleteket!

K1 *a)* $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}$.

Megoldás

$2\sqrt{18}+3\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50} = 6\sqrt{2}+6\sqrt{2}+12\sqrt{2}-5\sqrt{2} = 19\sqrt{2}$.

K2 *b)* $5\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}$.

Megoldás

$5\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{5}+\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

K2 *c)* $6a\sqrt{63ab^3}-3\sqrt{112a^3b^3}+2ab\sqrt{343ab}-5b\sqrt{28a^3b}$.

Megoldás

Ha $a \geq 0$, $b \geq 0$, akkor

$6a\sqrt{63ab^3}-3\sqrt{112a^3b^3}+2ab\sqrt{343ab}-5b\sqrt{28a^3b} =$

$= 18ab\sqrt{7ab}-12ab\sqrt{7ab}+14ab\sqrt{7ab}-10ab\sqrt{7ab} = 10ab\sqrt{ab}$.

5. Gyöktelenítsük a törtek nevezőit, végezzük el a műveleteket!

K1 a) $\frac{7}{\sqrt{2}}$; **K1** b) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; **K1** c) $\frac{5}{\sqrt{x}}$; **K1** d) $\frac{a}{\sqrt{7}}$; **K1** e) $\frac{x}{\sqrt{y}}$;

Megoldás

a) $\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$; c) $\frac{5}{\sqrt{x}}=\frac{5\sqrt{x}}{x}$, ha $x>0$;

d) $\frac{a}{\sqrt{7}}=\frac{a\sqrt{7}}{7}$; e) $\frac{x}{\sqrt{y}}=\frac{x\sqrt{y}}{y}$, ha $y>0$;

K2 f) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; **K2** g) $\frac{4}{\sqrt{3}-2}$; **K2** h) $\frac{n}{\sqrt{m}-4}$; **K2** i) $\frac{k}{\sqrt{t}-s}$;

Megoldás

f) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}-1$; g) $\frac{4}{\sqrt{3}-2}\cdot\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2}=-4(\sqrt{3}+2)$;

h) Ha $m\geq 0$, és $m\neq 16$, akkor $\frac{n}{\sqrt{m}-4}\cdot\frac{\sqrt{m}+4}{\sqrt{m}+4}=\frac{n(\sqrt{m}+4)}{m-16}$;

i) Ha $t\geq 0$, és $t\neq s^2$, akkor $\frac{k}{\sqrt{t}-s}\cdot\frac{\sqrt{t}+s}{\sqrt{t}+s}=\frac{k(\sqrt{t}+s)}{t-s^2}$;

K2 j) $\frac{7\sqrt{3}-5\sqrt{11}}{8\sqrt{3}-7\sqrt{11}}$; **K2** k) $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}$; **K2** l) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$;

Megoldás

j) $\frac{7\sqrt{3}-5\sqrt{11}}{8\sqrt{3}-7\sqrt{11}}\cdot\frac{8\sqrt{3}+7\sqrt{11}}{8\sqrt{3}+7\sqrt{11}}=\frac{7\cdot 8\cdot 3+49\sqrt{33}-40\sqrt{33}-35\cdot 11}{192-539}=\frac{217-9\sqrt{33}}{347}$;

k) $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}\cdot\frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}=\frac{-2\sqrt{10}-1}{13}$;

l) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}\cdot\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}=\frac{(a+b)-2\sqrt{a^2-b^2}+(a-b)}{(a+b)-(a-b)}=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$;

E1 m) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; **E1** n) $\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$;

Megoldás

m) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$;

n) $\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{(2-\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{-4\sqrt{2}}{10-4\sqrt{6}-2}\cdot\frac{8+4\sqrt{6}}{8+4\sqrt{6}}=\frac{-32\sqrt{2}-16\sqrt{12}}{64-96}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

E1 o) $\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$; **E2** p) $\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{c}}}$;

Megoldás

o) $\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{3+\sqrt{2}}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3+\sqrt{2}}-\sqrt{6+2\sqrt{2}}}{7}$;

p) Ha $b^2>c\geq 0$, akkor

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{c}}}\cdot\frac{\sqrt{b+\sqrt{c}}}{\sqrt{b+\sqrt{c}}}=\frac{a\sqrt{b+\sqrt{c}}}{b+\sqrt{c}}\cdot\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}}=\frac{ab\sqrt{b+\sqrt{c}}-a\sqrt{bc+c\sqrt{c}}}{b^2-c}.$$

6. E1 Oldjuk meg az egyenletet!

$\sqrt{16x+16}-\sqrt{9x+9}+\sqrt{4x+4}=16-\sqrt{x+1}$.

Megoldás

Értelmezési tartomány: $x \geq -1$.
Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát:

$\sqrt{16x+16}-\sqrt{9x+9}+\sqrt{4x+4}=4\sqrt{x+1}-3\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+1}=3\sqrt{x+1}$, tehát

$3\sqrt{x+1}=16-\sqrt{x+1}$

$\sqrt{x+1}=4$

$x=15$

A kapott gyök megfelel a feltételeknek.

7. E1 Állapítsuk meg az $5x^2-6xy-2y^2$ kifejezés értékét, ha

$x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $\quad y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$!

Megoldás

$x^2=49+20\sqrt{6}$, $\quad y^2=49-20\sqrt{6}$, $\quad xy=1$, tehát

$5x^2-6xy-2y^2=5(49+20\sqrt{6})-6-2(49-20\sqrt{6})=141+140\sqrt{6}$.

8. E1 Hogyan tudnánk ügyesen kiszámolni az alábbi kifejezést:

$\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$?

Megoldás

Gyöktelenítünk: $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}-\sqrt{1}}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{1}$,

$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}$, ...,

$\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\cdot\dfrac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{100}-\sqrt{99}}=\dfrac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{1}$.

Összeadáskor a közbülső tagok kiesnek, az eredmény: $\dfrac{\sqrt{100}-\sqrt{1}}{1}=9$.

11. AZ *n*-EDIK GYÖKVONÁS AZONOSSÁGAI

Emelt szint

1. E1 Számítsuk ki a kifejezések értékét!

a) $\sqrt[3]{64}$; *b)* $\sqrt[3]{-64}$; *c)* $\sqrt[4]{16}$; *d)* $\sqrt[4]{5^8}$; *e)* $\sqrt[5]{2^{15}}$.

Megoldás

a) $\sqrt[3]{64}=4$; *b)* $\sqrt[3]{-64}=-4$; *c)* $\sqrt[4]{16}=2$; *d)* $\sqrt[4]{5^8}=5^2$; *e)* $\sqrt[5]{2^{15}}=2^3$.

2. E1 Adjuk meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt[3]{a}$;

Megoldás

$\sqrt[3]{a}$ értelmezhető, ha $a \in \mathbf{R}$;

b) $\sqrt[4]{b}$;

Megoldás

$\sqrt[4]{b}$ értelmezhető, ha $b \geq 0$;

c) $\sqrt[5]{3c-4}$;

Megoldás

$\sqrt[5]{3c-4}$ értelmezhető, ha $c \in \mathbf{R}$;

d) $\sqrt[6]{2d-8}$;

Megoldás

$\sqrt[6]{2d-8}$ értelmezhető, ha $d \geq 4$.

3. E1 Számítsuk ki a kifejezések értékét!

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{9}$;

Megoldás

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{216} = 6$;

b) $\sqrt[3]{56} \cdot \sqrt[3]{63} \cdot \sqrt[3]{21}$;

Megoldás

$\sqrt[3]{56} \cdot \sqrt[3]{63} \cdot \sqrt[3]{21} = \sqrt[3]{7 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 3} = 42$;

c) $\sqrt[3]{\frac{25}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{3}}$;

Megoldás

$\sqrt[3]{\frac{25}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{3^3}} = \frac{10}{3}$;

d) $\sqrt[6]{81} : \sqrt[3]{3}$;

Megoldás

$\sqrt[6]{81} : \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{81} : \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$.

4. E1 Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a kifejezéseket, majd számítsuk ki számológép nélkül az értéküket, ha lehet!

a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2^{24}}}$;

Megoldás

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{2^{24}}} = \sqrt[6]{2^{24}} = 2^4 = 16$;

b) $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{7^{120}}}}$;

Megoldás

$\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{7^{120}}}} = \sqrt[30]{7^{120}} = 7^4 = 2401$;

c) $\sqrt{\sqrt[12]{\sqrt[5]{1}}}$;

Megoldás

$\sqrt{\sqrt[12]{\sqrt[5]{1}}} = \sqrt[120]{1} = 1$;

d) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}$;

Megoldás

$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{3^7} = 3\sqrt[6]{3}$;

e) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}$;

Megoldás

$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{2^{13}} = 2\sqrt[12]{2}$.

5. E1 Adjuk meg a kifejezés értelmezési tartományát és legegyszerűbb alakját!

a) $5\sqrt[4]{2a}\cdot 2\sqrt[4]{8a^3}$;

Megoldás

$5\sqrt[4]{2a}\cdot 2\sqrt[4]{8a^3}$ értelmezhető, ha $a \geq 0$;

$5\sqrt[4]{2a}\cdot 2\sqrt[4]{8a^3} = 10\sqrt[4]{16a^4} = 20a$;

b) $\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[4]{b^3}\cdot\sqrt[6]{b^5}$;

Megoldás

$\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[4]{b^3}\cdot\sqrt[6]{b^5}$ értelmezhető, ha $b \geq 0$;

$\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[4]{b^3}\cdot\sqrt[6]{b^5} = \sqrt[12]{b^8\cdot b^9\cdot b^{10}} = \sqrt[12]{b^{27}} = b^2\cdot\sqrt[12]{b^3}$;

c) $\sqrt{c}\cdot\sqrt[3]{2c}\cdot\sqrt[4]{3c}$;

Megoldás

$\sqrt{c}\cdot\sqrt[3]{2c}\cdot\sqrt[4]{3c}$ értelmezhető, ha $c \geq 0$;

$\sqrt{c}\cdot\sqrt[3]{2c}\cdot\sqrt[4]{3c} = \sqrt[12]{c^6\cdot 2^4\cdot c^4\cdot 3^3c^3} = \sqrt[12]{432c^{13}} = c\sqrt[12]{432c}$;

d) $\left(\sqrt[12]{d^{11}} : \sqrt[4]{d^3}\right)^2$;

Megoldás

$\left(\sqrt[12]{d^{11}} : \sqrt[4]{d^3}\right)^2$ értelmezhető, ha $d \geq 0$;

$\left(\sqrt[12]{d^{11}} : \sqrt[4]{d^3}\right)^2 = \left(\sqrt[12]{\dfrac{d^{11}}{d^9}}\right)^2 = \left(\sqrt[12]{d^2}\right)^2 = \sqrt[12]{d^4} = \sqrt[3]{d}$;

e) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{30}b^{60}}}$;

Megoldás

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{30}b^{60}}}$ értelmezhető, ha $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$;

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{30}b^{60}}} = \sqrt[15]{a^{30}b^{60}} = a^2b^4$.

Emelt szint

12. AZ *n*-EDIK GYÖKVONÁS AZONOSSÁGAINAK ALKALMAZÁSA

1. E1 Vigyük be a gyökjel előtti szorzótényezőt a gyökjel alá!

a) $2\sqrt[4]{8}$; b) $3\sqrt[5]{2}$; c) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{5}$; d) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{27}{8}}$.

Megoldás

a) $\sqrt[4]{128}$; b) $\sqrt[5]{486}$; c) $\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$; d) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$.

2. E1 Vigyük be a gyökjel előtti szorzótényezőt a gyökjel alá!

a) $ab\sqrt[3]{a^2b}$; b) $\frac{c}{d}\sqrt[6]{\frac{d^3}{c^2}}$; c) $(e+f)\sqrt[4]{\frac{1}{e+f}}$; d) $(m+n)\sqrt[3]{\frac{mn}{(m+n)^5}}$.

Megoldás

a) $\sqrt[3]{a^5b^4}$; b) $\sqrt[6]{\frac{c^4}{d^3}}$; c) $\sqrt[4]{(e+f)^3}$; d) $\sqrt[3]{\frac{mn}{(m+n)^2}}$.

3. E1 Vigyük a gyökjel elé a lehetséges szorzótényezőket!

a) $\sqrt[3]{81}$; b) $\sqrt[4]{64}$; c) $\sqrt[5]{64}$; d) $\sqrt[11]{2^{13}\cdot 7^{12}}$; e) $\sqrt[3]{4^2\cdot\frac{1}{81}}$.

Megoldás

a) $3\cdot\sqrt[3]{3}$; b) $2\cdot\sqrt[4]{4}=2\cdot\sqrt{2}$; c) $2\cdot\sqrt[5]{2}$; d) $14\cdot\sqrt[11]{28}$; e) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

4. E2 Vigyük a gyökjel elé a lehetséges szorzótényezőt!

a) $\sqrt[5]{a^7\cdot b^{10}}$; b) $\sqrt[3]{c^4\cdot d^7\cdot e^{11}}$; c) $\sqrt[k]{p^{k+1}\cdot q^{k+3}}$; d) $\sqrt[n+1]{x^{2n+3}\cdot y^{3n+5}}$.

Megoldás

a) $ab^2\cdot\sqrt[5]{a^2}$; b) $cd^2e^3\cdot\sqrt[3]{cde^2}$; c) $pq\cdot\sqrt[k]{pq^3}$; d) $x^2y^3\cdot\sqrt[n+1]{xy^2}$.

5. E1 Végezzük el a műveleteket!

a) $\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{9}+\sqrt[4]{27}\right)\cdot\sqrt{3}$.

Megoldás

$3-3\cdot\sqrt[6]{3}+3\cdot\sqrt[4]{3}$.

b) $\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[4]{a^3}\right)^2$.

Megoldás

$a+a\cdot\sqrt[3]{a}+a\sqrt{a}-2a\cdot\sqrt[6]{a}+2a\cdot\sqrt[4]{a}-2a\cdot\sqrt[12]{a^5}$.

c) $\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[4]{b^9}\right)\cdot\left(\sqrt{b^3}+\sqrt[6]{b}\right)$.

Megoldás

$b^2\cdot\sqrt[6]{b}+\sqrt[6]{b^5}-b^3\cdot\sqrt[4]{b^3}-b^2\cdot\sqrt[12]{b^5}$.

d) $\left(\frac{a}{b}\cdot\sqrt{k}-\frac{3a}{b}\sqrt[4]{k^3}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}\cdot\sqrt{k}-\sqrt[3]{k^2}\right)$.

Megoldás

$k-\frac{a}{b}k\cdot\sqrt[6]{k}-3k\cdot\sqrt[4]{k}+3k\frac{a}{b}\cdot\sqrt[12]{k^5}$.

6. E1 Válasszuk ki az állítások közül az azonosságokat!

a) $\sqrt[2n]{a^4} = \sqrt[n]{a\sqrt{a^2}}$, $a \geq 0$;

Megoldás

Azonosság.

b) $\sqrt[6]{b^3 \cdot \sqrt[3]{b}} = \sqrt[9]{b^{10}}$.

Megoldás

Nem azonosság: $\sqrt[6]{b^3 \cdot \sqrt[3]{b}} = \sqrt[9]{b^5}$.

c) $\sqrt[5]{c^2 \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt[3]{c^2}} = \sqrt[30]{c^{17}}$.

Megoldás

Nem azonosság: $\sqrt[5]{c^2 \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt[3]{c^2}} = \sqrt[30]{c^{19}}$.

d) $\sqrt[4]{d} + \sqrt[5]{d} = \sqrt[9]{d^2}$.

Megoldás

Nem azonosság.

13. A NÉGYZETGYÖK FÜGGVÉNY

1. K2 Rajzoljuk meg a következő függvények képét értéktáblázat segítségével!

a) $x \mapsto \sqrt{x} - 4$;

b) $x \mapsto -2\sqrt{x} + 4$;

c) $x \mapsto 1 - \sqrt{x - 4}$;

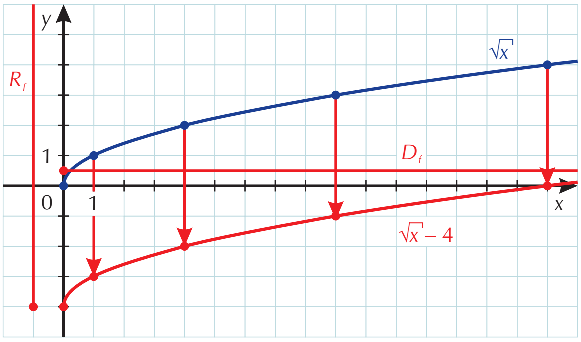
d) $x \mapsto \sqrt{4 - x}$.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen transzformációt kell végrehajtanunk az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény képén, hogy megkapjuk a végeredményt!

Megoldás

a) Készítsünk táblázatot! Mivel a függvény értékkészlete a nemnegatív számok halmaza, és a gyökvonást végezzük el először, ezért a négyzetszámokat fogjuk behelyettesíteni.

x	0	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$\sqrt{x} - 4$	–4	–3	–2	–1	0

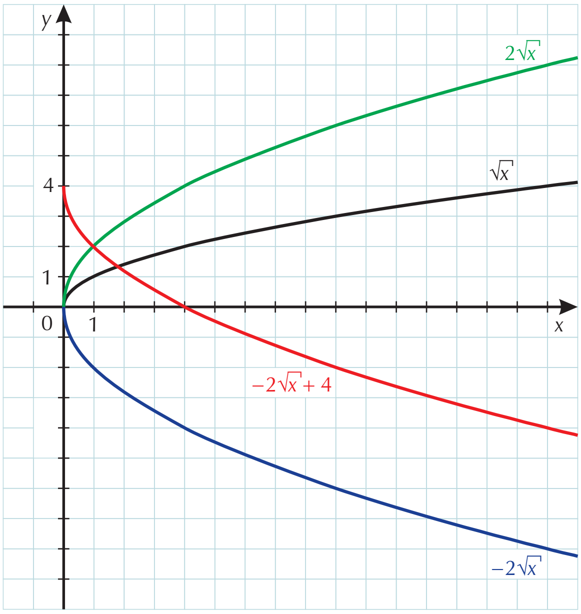


A négyzetgyök függvény képét 4 egységgel eltoltuk az y tengely mentén negatív irányba.

$ÉT = \mathbf{R}_0^+$, $ÉK = [-4; \infty[$

b) Készítsünk táblázatot! Mivel a függvény értékkészlete a nemnegatív számok halmaza,és a gyökvonást végezzük el először, ezért a négyzetszámokat fogjuk behelyettesíteni.

x	0	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$-2\sqrt{x}+4$	4	2	0	–2	–4

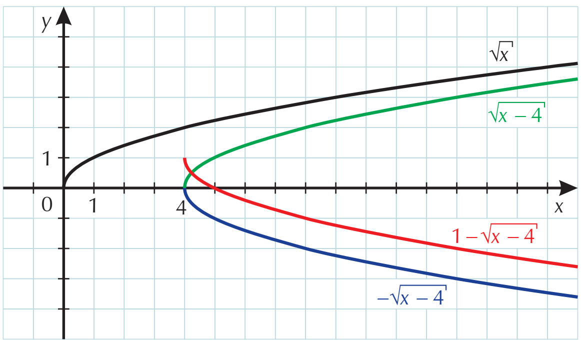


ÉT = $\mathbf{R}_0^+$, ÉK = $]-\infty; 4]$

A négyzetgyök függvényünket először megnyújtottuk kétszeresére, utána tükröztük az x tengelyre, majd feljebb toltuk (az y tengely mentén pozitív irányba) 4 egységgel.

c) Mivel csak 4-et, vagy annál nagyobb számot lehet behelyettesíteni a képletbe, ezért csak ezeket írjuk a táblázatba.

x	4	5	8	13	20
$\sqrt{x-4}$	0	1	2	3	4
$1-\sqrt{x-4}$	1	0	–1	–2	–3



ÉT = $[4; \infty[$, ÉK = $]-\infty; 1]$

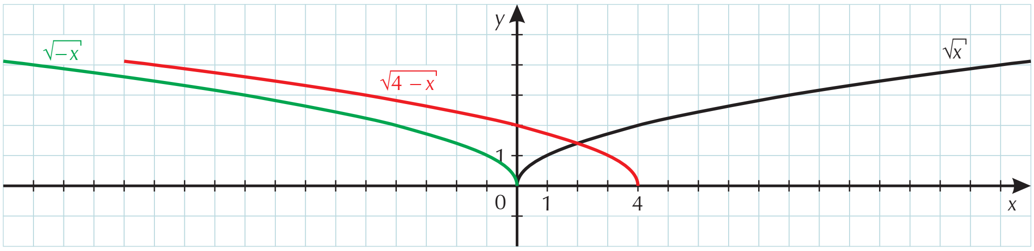
A négyzetgyök függvényünket először eltoltuk jobbra 4 egységgel (az *x* tengely mentén pozitív irányba), utána tükröztük az *x* tengelyre, majd feljebb toltuk (az *y* tengely mentén pozitív irányba) 1 egységgel.

d) A négyzetgyök jel alatt csak nemnegatív szám állhat, tehát

$4 - x \geq 0 \quad /+x$

$4 \geq x$, vagyis a képletbe csak négyet vagy annál kisebb számot lehet behelyettesíteni.

x	4	3	0	–5	–12
$\sqrt{4-x}$	0	1	2	3	4



ÉT =]–∞; 4], ÉK = [0; +∞[
A négyzetgyök függvényünket először tükröztük az y tengelyre, utána eltoltuk jobbra 4 egységgel (az x tengely mentén pozitív irányba).

2. K2 Oldjuk meg a következő egyenleteket grafikus módszerrel!

a) $\frac{x}{2}-\sqrt{x}=0$;

b) $\sqrt{x+1}+x=5$;

c) $\sqrt{2x-1}+2x=13$;

d) $\sqrt{x}=x^2$.

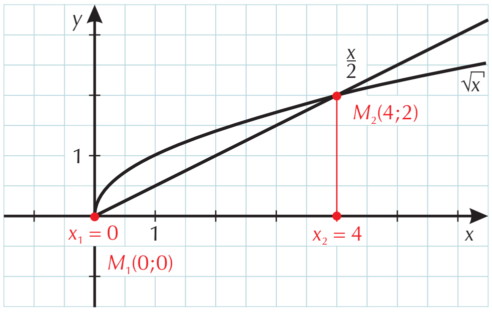
Megoldás

a) Először átalakítjuk az egyenletet.

$\frac{x}{2}-\sqrt{x}=0 \quad /+\sqrt{x}$;

$\frac{x}{2}=\sqrt{x}$.

Az egyenlet értelmezési tartománya a nemnegatív számok halmaza. Itt fogjuk ábrázolni a két függvényt. A metszéspontok $M_1(0;\ 0)$, $M_2(4;\ 2)$. Ez az jelenti, hogy a megoldások az $x_1=0$, $x_2=4$. Ezeket az eredeti egyenletbe történő behelyettesítéssel ellenőrizni kell.

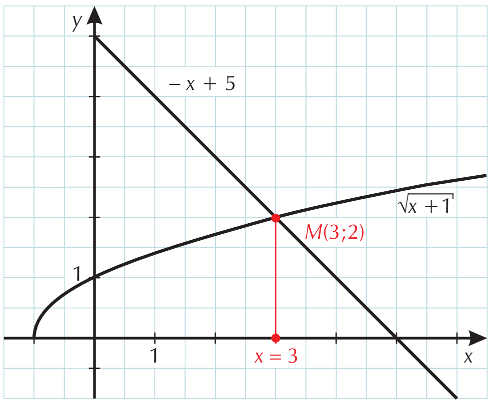


b) Először átalakítjuk az egyenletet.

$\sqrt{x+1}+x=5 \quad /-x$;

$\sqrt{x+1}=5-x$.

Az egyenlet értelmezési tartománya a [–1; ∞[intervallum. Itt fogjuk ábrázolni a két függvényt. A metszéspont $M(3;\ 2)$. Ez az jelenti, hogy a megoldás $x=3$ lesz. Ezt az eredeti egyenletbe történő behelyettesítéssel ellenőrizni kell.

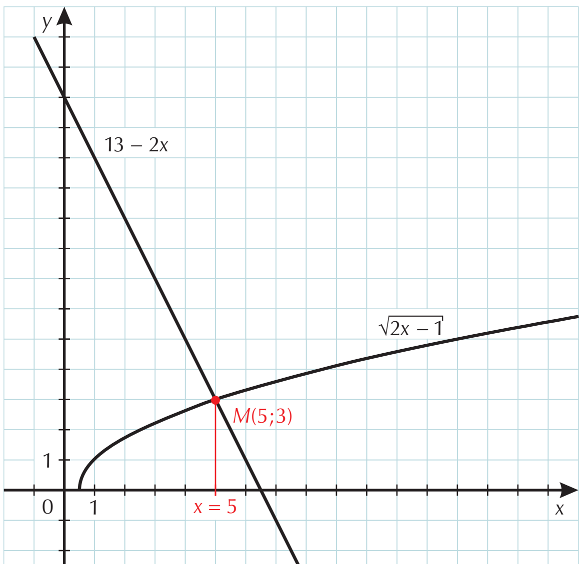


c) Először átalakítjuk az egyenletet.

$\sqrt{2x-1}+2x=13 \quad /-2x$;

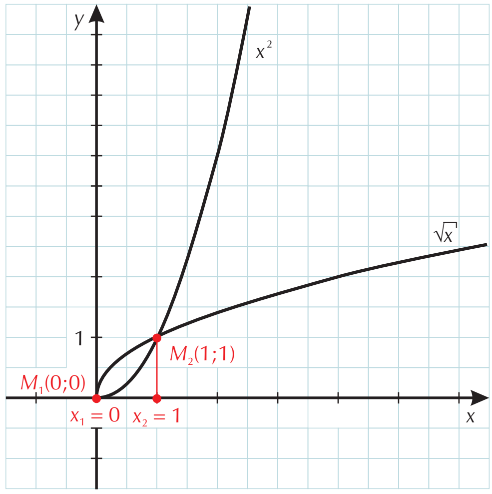
$\sqrt{2x-1}=13-2x$.

Az egyenlet értelmezési tartománya a [0,5; ∞[. Itt fogjuk ábrázolni a két függvényt.
A metszéspont $M(5;\ 3)$. Ez az jelenti, hogy a megoldás az $x=5$. Ezt az eredeti egyenletbe történő behelyettesítéssel ellenőrizni kell.



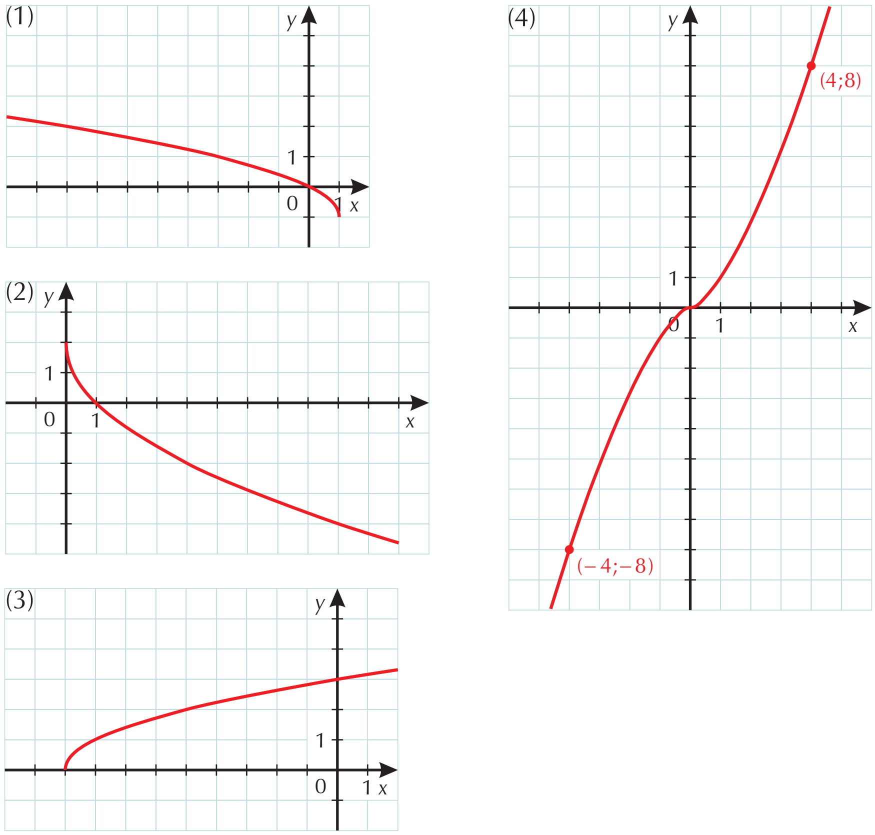
d) $\sqrt{x} = x^2$

Az egyenlet értelmezési tartománya a nemnegatív számok halmaza. Itt fogjuk ábrázolni a két függvényt.
A metszéspontok $M_1(0;\ 0)$, $M_2(1;\ 1)$. Ez az jelenti, hogy a megoldások az $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Ezeket az eredeti egyenletbe történő behelyettesítéssel ellenőrizni kell.



3. K2 Keressük meg az alábbi grafikonok közül a következő függvények megfelelőit!

$f(x) = \sqrt{x+9}$; $\quad g(x) = -2\sqrt{x} + 2$; $\quad h(x) = \sqrt{1-x} - 1$; $\quad i(x) = x \cdot \sqrt{|x|}$.



Az első grafikon olyan függvénynek a képe, aminek az ÉT-je]–∞; 1]. Ez csak a „h” függvény lehet.
A második függvény ÉT-je [0; ∞[. Ez csak a „g” függvény lehet.
A harmadik függvény ÉT-je [–9; ∞[. Ez csak az „f” függvény lehet.
Így a negyedik függvény csak az „i” lehet.

14. AZ INVERZ FÜGGVÉNY FOGALMA

1. Rajzoljuk meg a következő függvények képét! Keressük meg az inverz függvényt, és rajzoljuk meg annak képét is!

K1 *a)* f: $[-2; 3] \to [-2; 8]$, $x \mapsto 2x + 2$;

K1 *b)* g: $[-3; 0] \to [0; 9]$, $x \mapsto x^2$;

E1 *c)* h: $[0; 9] \to [-3; 0]$, $x \mapsto \sqrt{x} - 3$.

Megoldás

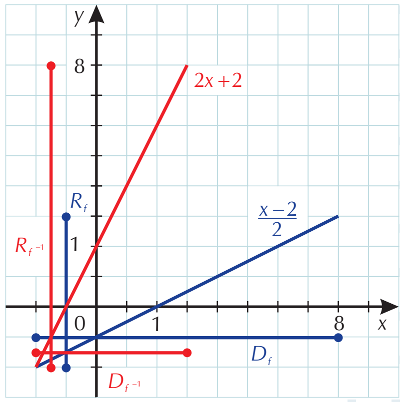
a) Az inverz függvény képlete

$y = 2x + 2 \quad /-2$

$y - 2 = 2x \quad /:2$

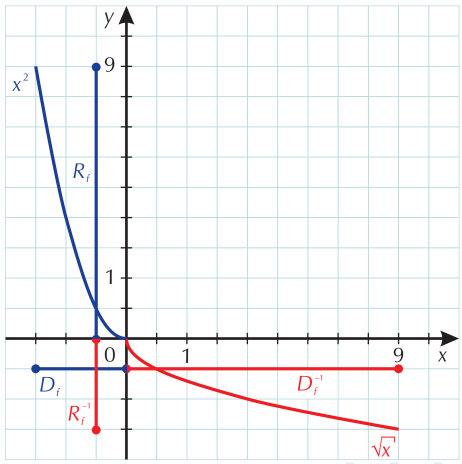
$$\frac{y-2}{2} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{2}$$

$f^{-1}: [-2; 8] \to [-2; 3]$, $x \to \dfrac{x-2}{2}$.



b) Mint tudjuk a négyzetre emelés inverz művelete a gyökvonás, ezért

$g^{-1}: [0; 9] \to [-3; 0]$, $x \mapsto -\sqrt{x}$



c) Az inverz függvény képlete?

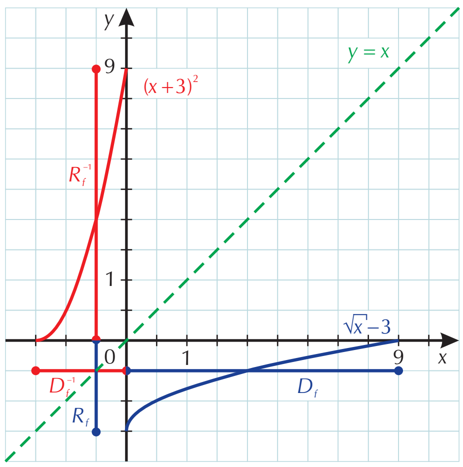
$y = \sqrt{x} - 3 \quad /+3$

$y + 3 = \sqrt{x} \quad /()^2$

$(y + 3)^2 = x \Rightarrow h^{-1}(x) = (x + 3)^2$

Tehát

$h^{-1}: [-3; 0] \to [0; 9]$, $x \mapsto (x + 3)^2$.



2. K1 Keressünk olyan függvényeket, amelyeknek inverze önmaga!

Megoldás

$f(x) = x$, $\qquad g(x) = -x + 5$, $\qquad h(x) = \dfrac{1}{x}$.

3. K2 *a)* Az f függvényről a következőket tudjuk: $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R_f = \{1, 2, 3, 4\}$. Invertálható-e f? Hány ilyen függvény van?

Megoldás

Biztosan nem invertálható, mert lesz olyan függvényérték amit kétszer is felvesz . A skatulya-elv miatt az állítás nyilvánvaló.
Nincs ilyen függvény.

b) Az f függvényről a következőket tudjuk: $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Invertálható-e f? Hány ilyen függvény van?

Megoldás

Biztosan invertálható, mert D-nek és az R-nek ugyanannyi eleme van, tehát minden D-beli elemhez pontosan egy R-beli tartozik.
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ párba állítás lehetséges.

c) Az f függvényről a következőket tudjuk: $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Invertálható-e f? Hány ilyen függvény van?

Megoldás

Nics ilyen függvény. Az R-nek nem lehet több eleme mint D-nek.
Nincs ilyen függvény.

4. E1 Keressünk olyan függvényeket, amelyeknek értelmezési tartománya a [0; 1], az értékkészlete pedig a [0; 4] intervallum! Vizsgáljuk a függvényeket az invertálhatóság szempontjából!

Megoldás

Pl: $f(x) = 4x$ függvény jó. Szigorúan monoton nő. $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x$. Hasonló okok miatt a $g(x) = 4x^2$ is megfelel.
Számtalan más megoldás is elképzelhető.

III. MÁSODFOKÚ EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

15. MÁSODFOKÚ EGYENLETEK MEGOLDÁSA SZORZATTÁ ALAKÍTÁSSAL

1. K1 Alakítsuk szorzattá az alábbi másodfokú kifejezéseket az elsőfokú tagok megfelelő széttagolásával!

a) $x^2 + 5x + 6$.

Megoldás

$x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$.

b) $x^2 + 6x + 8$.

Megoldás

Az *a)* esethez hasonlóan $(x + 2)(x + 4)$.

c) $x^2 - 10x + 21$.

Megoldás

$(x - 3)(x - 7)$.

d) $x^2 + 2x - 35$.

Megoldás

$(x - 5)(x + 7)$.

2. Szorzattá alakítás segítségével határozzuk meg az alábbi másodfokú egyenletek gyökeit!

K1 *a)* $x^2 + 7x + 10 = 0$.

Megoldás

$x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 \quad x_2 = -5$.

K1 *b)* $x^2 - x - 12 = 0$.

Megoldás

$x_1 = 4 \quad x_2 = -3$.

K1 *c)* $2x^2 + 8x + 6 = 0.$

Megoldás

$2(x+3)(x+1) = 0 \quad x_1 = -3 \quad x_2 = -1.$

K1 *d)* $-x^2 + 2x + 3 = 0.$

Megoldás

$x_1 = 3 \quad x_2 = -1.$

K2 *e)* $x^2 + \frac{11}{10}x + \frac{3}{10} = 0.$

Megoldás

$$x^2 + \frac{11}{10}x + \frac{3}{10} = x^2 + \frac{5}{10}x + \frac{6}{10}x + \frac{3}{10} = x\left(x + \frac{5}{10}\right) + \frac{6}{10}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{6}{10}\right);$$

$x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{6}{10}.$

K2 *f)* $x^2 + \frac{10}{21}x + \frac{1}{49} = 0.$

Megoldás

$x_1 = -\frac{1}{21} \quad x_2 = -\frac{3}{7}.$

K2 *g)* $-2x^2 + 4x + 30 = 0.$

Megoldás

$x_1 = 5 \quad x_2 = -3.$

3. K1 Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek megoldásai:

a) 3, 4;

Megoldás

Az $x - 3 = 0$ egyenletnek a 3, az $x - 4 = 0$ egyenletnek a 4 megoldása, a szorzatuknak, azaz az $(x-3)(x-4) = 0$ egyenletnek mindkét szám megoldása, és az egyenlet másodfokú.

Felbontva a zárójelet, az $x^2 - 7x + 12 = 0$ egyenletet kapjuk. Tetszőleges 0-tól különböző számmal beszorozva a gyökök megegyeznek a $x^2 - 7x + 12 = 0$ egyenlet gyökeivel.

b) 2, –5;

Megoldás

$(x-2)(x+5) = 0;$

c) $\frac{1}{2}$, 3;

Megoldás

$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3) = 0$ vagy $(2x-1)(x-3) = 0;$

d) $-\frac{3}{4}, \frac{5}{3}$!

Megoldás

$(4x+3)(3x-5)=0$ vagy más alakban $12x^2-11x-15=0$.

16. MÁSODFOKÚ EGYENLETEK MEGOLDÁSA TELJES NÉGYZETTÉ KIEGÉSZÍTÉSSEL

1. K1 Alakítsuk teljes négyzetté az alábbi másodfokú kifejezéseket!

a) $x^2-10x+25$.

Megoldás

$(x-5)^2$.

b) $x^2-10x+28$.

Megoldás

$(x-5)^2+3$.

c) $x^2+6x+12$.

Megoldás

$(x+3)^2+3$.

d) $x^2+32x+250$.

Megoldás

$(x+16)^2-6$.

e) $x^2+5x+10$.

Megoldás

$(x+2{,}5)^2+3{,}75$.

f) x^2-3x+1.

Megoldás

$(x-1{,}5)^2-1{,}25$.

g) $2x^2+8x+34$.

Megoldás

Először emeljünk ki 2-t, $2(x^2+4x+17)$ majd a zárójelben lévő kifejezést alakítsuk szorzattá.
$2(x+2)^2+26$.

h) $-x^2-12x-35$.

Megoldás

$-(x+6)^2+1$.

2. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket teljes négyzetté történő átalakítással.

a) $x^2 + 8x + 16 = 0$;

Megoldás

$(x+4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4.$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0.$

Megoldás

$(x-3)^2 - 4 = 0;$
$(x-3)^2 = 4;$
$|x-3| = 2 \quad \Rightarrow \quad x - 3 = 2$ vagy $x - 3 = -2;$
Így tehát $x_1 = 5$ és $x_2 = 1.$

c) $x^2 - 10x - 56 = 0;$

Megoldás

A *b)* részben leírtak alapján $(x-5)^2 - 81 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 14 \quad x_2 = -4.$

d) $x^2 + 2x + 6 = 9.$

Megoldás

$(x+1)^2 - 4 = 0;$ $x_1 = -3$ és $x_2 = 1.$

e) $x^2 + 40 = 184 - 10x.$

Megoldás

$(x+5)^2 - 169 = 0$, ebből $x_1 = 8$ és $x_2 = -18.$

f) $2x^2 - x - 3 = 0.$

Megoldás

$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = 0$, ebből $x_1 = \frac{3}{2}$ és $x_2 = -1.$

g) $-2x^2 - 10x + 28 = 0.$

Megoldás

$-2\left[(x+2{,}5)^2 - 20{,}25\right] = 0$ gyökei: $x_1 = 2$ és $x_2 = -7.$

3. K2 Lesz-e egész megoldása az alábbi másodfokú egyenleteknek?
$2x^2 + (a-2)x + b = 0$, ha

a) $a = -14, \quad b = 30.$

Megoldás

Helyettesítsük be az *a* és *b* értékét, majd alakítsunk szorzattá.
$2x^2 - 16x + 30 = 0;$
$2\left[x^2 - 8x + 15\right] = 0;$
$2\left[(x-4)^2 - 1\right] = 0;$
$(x-4)^2 = 1;$
$x_1 = 3, \ x_2 = 5.$
Ebben az esetben tehát az egyenlet gyökei egészek.

b) $a = -5, \quad b = 3.$

Megoldás

A megoldandó egyenlet:

$2x^2 - 7x + 3 = 0;$

A teljes négyzetté alakított egyenlet

$2\left[(x - 1{,}75)^2 - 1{,}5625\right] = 0;$

$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 3.$

Ebben az esetben nem egész szám mindkét gyöke az egyenletnek.

c) $a = 27, \quad b = 33.$

Megoldás

Behelyettesítés után kapjuk:

$2x^2 + 25x + 33 = 0;$

Átalakítva

$\left(x + \frac{25}{4}\right)^2 = \frac{361}{16}$ egyenletet kapjuk.

Az egyenlet gyökei:

$x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = -11.$

Ebben az esetben nem egész szám mindkét gyöke az egyenletnek.

17. A MÁSODFOKÚ EGYENLET MEGOLDÓKÉPLETE

1. K1 Oldjuk meg a következő egyenleteket a megoldóképlet alkalmazásával!

a) $x^2 - 5x + 4 = 0.$

Megoldás

Az $x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ megoldóképletet alkalmazva

$a = 1,\ b = -5,\ c = 4;$

$$x_{1;2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2};$$

$x_1 = 4,\ x_2 = 1.$

b) $5x^2 - 3x - 21 = 0.$

Megoldás

$a = 5,\ b = -3,\ c = -21;$

$D = b^2 - 4ac = 9 + 420 = 429 > 0;$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{429}}{10}, \quad x_1 = \frac{3 + \sqrt{429}}{10} \approx 2{,}37, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{429}}{10} \approx -1{,}77.$$

Ellenőrzés

Ellenőrzéskor a pontos értékkel számoljunk!

Ha $x_1 = \frac{3 + \sqrt{429}}{10}$, akkor

$$5\cdot\left(\frac{3+\sqrt{429}}{10}\right)^2-3\cdot\frac{3+\sqrt{429}}{10}-21=5\cdot\frac{438+6\sqrt{429}}{100}-\frac{9+3\sqrt{429}}{10}-21=$$
$$=\frac{2190+30\sqrt{429}-90-30\sqrt{429}}{100}-21=0.$$

Ha $x_2=\dfrac{3-\sqrt{429}}{10}$, akkor

$$5\cdot\left(\frac{3-\sqrt{429}}{10}\right)^2-3\cdot\frac{3-\sqrt{429}}{10}-21=5\cdot\frac{438-6\sqrt{429}}{100}-\frac{9-3\sqrt{429}}{10}-21=$$
$$=\frac{2190-30\sqrt{429}-90+30\sqrt{429}}{100}-21=0.$$

Tehát a kapott gyökök valóban kielégítik az egyenletet.

c) $\frac{BC}{BA}$.

Megoldás

$a=2,\ b=10,\ c=-12;$

$x_1=1,\ x_2=-6.$

d) $\frac{1}{2}x^2+11x-21=0;$

Megoldás

$a=\frac{1}{2},\ b=11,\ c=-21;$

$x_1=-11+\sqrt{163}\approx 1{,}767;$

$x_2=-11-\sqrt{163}\approx -23{,}767.$

Megjegyzés: Ha az egyenletet beszorozzuk 2-vel, a gyökei nem változnak, viszont egész számokkal dolgozhatunk.

e) $\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}x+\sqrt{12}=0.$

Megoldás

$a=\sqrt{3},\ b=-3\sqrt{3},\ c=\sqrt{12};$

$x_1=2,\ x_2=1.$

Megjegyzés: $\sqrt{3}$-mal végigosztva az egyenletet könyebben számolhatunk.

f) $2x^2-6x+10=0.$

Megoldás

A gyök alatti szám negatív, ezért nem végezhető el a gyökvonás a valós számhalmazon, így nincs megoldása az egyenletnek.

g) $2x^2-\frac{11}{6}x+\frac{1}{3}=0.$

Megoldás

$x_1=\frac{1}{4},\ x_2=\frac{2}{3}.$

2. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket megoldóképlet alkalmazása nélkül!

Megoldás

A hiányos másodfokú egyenleteknél először 0-ra rendezünk, majd szorzattá alakítással gyorsabban meghatározhatjuk a megoldásokat (ha létezik gyöke az egyenletnek).
A szorzattá alakításnál kiemelést, illetve az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ azonosságot alkalmazhatjuk.

a) $x^2 - 25 = 0$.

Megoldás

$(x-5)(x+5) = 0$;
$x_1 = 5,\ x_2 = -5$.

b) $2x^2 - 512 = 0$.

Megoldás

$x_1 = 16,\ x_2 = -16$.

c) $x^2 - 6x = 0$.

Megoldás

$x(x-6) = 0$
$x_1 = 0,\ x_2 = 6$.

d) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{5}x = 0$.

Megoldás

$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{6}{5}$.

e) $5x^2 = 10x$.

Megoldás

$x_1 = 0,\ x_2 = 2$.

f) $3x^2 + 8x = 5x - 4x^2$.

Megoldás

$7x^2 + 3x = 0$; $x(7x+3) = 0$.
$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{3}{7}$.

g) $x(x-7) = 2x^2 + 11x$.

Megoldás

$x_1 = 0,\ x_2 = -18$.

3. K1 Határozzuk meg az alábbi másodfokú egyenleteknek a gyöktényezős alakját a megoldóképlet felhasználásával!

a) $2x^2 - 4x - 30 = 0$.

Megoldás

Az egyenlet gyökei: $x_1 = -3$; $x_2 = 5$.
Használjuk fel a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakját $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$, ahol x_1; x_2 az egyenlet gyökei.
Ennek alapján $2(x-5)(x+3) = 0$.

b) $2x^2 + 17x + 21 = 0$.

Megoldás

Az egyenlet gyökei: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -7$

A gyöktényezős alak:
$2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+7)=0.$

c) $3x^2+5x-3=0.$

Megoldás

Az egyenlet gyökei $x_1=\frac{-5-\sqrt{61}}{6}$, $x_2=\frac{-5+\sqrt{61}}{6}$, a gyöktényezős alak

$3\left(x+\frac{5+\sqrt{61}}{6}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{61}}{6}\right)=0.$

d) $5x^2-3x-21=0.$

Megoldás

Az egyenlet gyökei:
$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{429}}{10}.$
A gyöktényezős alak
$5\left(x-\frac{3-\sqrt{429}}{10}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{429}}{10}\right)=0.$

e) $11x^2-8x+6=0.$

Megoldás

A másodfokú egyenletnek nincs gyöke, ezért nincs gyöktényezős alakja sem.

4. Alakítsuk szorzattá az alábbi másodfokú kifejezéseket a gyöktényezős alak segítségével!

K1 *a)* $x^2-6x+5.$

Megoldás

Oldjuk meg a $x^2-6x+5=0$ egyenletet. Gyökei: $x_1=1$, $x_2=5.$
Felhasználva a gyöktényezős alakot:
$x^2-6x+5=(x-5)(x-1)$ a keresett szorzat.

K2 *b)* $6x^2-37x-60.$

Megoldás

Oldjuk meg az egyenletet.
A gyökök: $x_1=\frac{15}{2}$, $x_2=-\frac{4}{3}.$
A gyöktényezős alak:
$6\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{15}{2}\right)=0$

Így a szorzattá alakítás $6x^2-37x-60=6\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{15}{2}\right)=(3x+4)(2x-15).$

K2 *c)* $-30x^2+19x+\frac{7}{5}.$

Megoldás

Az $-30x^2+19x+\frac{7}{5}=0$ egyenlet gyökei: $x_1=-\frac{1}{15}$, $x_2=\frac{7}{10}.$
A szorzattá alakítás:
$-30x^2+19x+\frac{7}{5}=-30\left(x+\frac{1}{15}\right)\left(x-\frac{7}{10}\right)=(15x+1)\left(\frac{7}{5}-2x\right).$

18. AZ EGYENLETMEGOLDÁS GYAKORLÁSA

1. Az egyenlet gyökeinek meghatározása nélkül állapítsuk meg, hogy a valós számok halmazán hány megoldása van az alábbi egyenleteknek!

K1 *a)* $x^2 + 8x - 33 = 0$.

Megoldás

A feladatban a diszkrimináns előjelének megvizsgálásával megadhatjuk a választ, ugyanis ha a diszkrimináns pozitív, akkor két valós megoldása van a másodfokú egyenletnek, ha a diszkrimináns negatív, akkor nincs valós megoldás, ha a diszkrimináns értéke 0, akkor egy valós megoldás van.
A diszkrimináns, ahol az a; b; c a másodfokú egyenlet megfelelő együtthatói.
$D = (8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-33) = 196 > 0$, tehát két valós megoldása van az egyenletnek.

K1 *b)* $2x^2 - 7x + 21 = 0$.

Megoldás

$D = -119 < 0$, nincs valós megoldás.

K1 *c)* $12x^2 - 7x - 2 = 4x + 5$.

Megoldás

Rendezzük 0-ra az egyenletet.
$12x^2 - 11x - 7 = 0$
$D = 457 > 0$, két valós megoldás van.

K1 *d)* $7x^2 - 40x + 55 = 2x - 8$.

Megoldás

$D = 0$, egy valós megoldás van.

K1 *e)* $\frac{5}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = \frac{3}{4}x - 7$.

Megoldás

0-ra rendezve, majd a közös nevezővel beszorozva
$30x^2 + 7x + 96 = 0$ egyenletet kapjuk.
$D < 0$, nincs valós megoldás.

K1 *f)* $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{29}x + 3\sqrt{8} = 0$.

Megoldás

$D = (\sqrt{29})^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{8} = 29 - 12\sqrt{16} = 29 - 48 < 0$, nincs valós megoldás.

K2 *g)* $x^2 - (7\sqrt{2} - 3)x + 3\sqrt{32} = 0$.

Megoldás

$D = \left[-(7\sqrt{2} - 3)\right]^2 - 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{32} = 49 \cdot 2 - 42 \cdot \sqrt{2} + 9 - 4 \cdot 3 \cdot 4\sqrt{2} = 107 - 90\sqrt{2} < 0$,
nincs valós megoldás.

2. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

Megoldás

A megoldás során kapott értékeket az eredeti egyenletbe történő behelyettesítéssel ellenőrizzük.

a) $(3x+8)(5x-1)=6$.

Megoldás

Bontsuk fel a zárójeleket, majd rendezzünk 0-ra.

$15x^2+37x-14=0$.

A megoldások $x_1=\frac{1}{3}$, $\quad x_2=-\frac{14}{5}=-2{,}8$.

b) $(5x+6)(2x+7)=-10x-5$.

Megoldás

Átalakítva

$10x^2+57x+47=0$, melynek gyökei $x_1=-1$, $\quad x_2=-4{,}7$.

c) $\frac{20}{x+2}=3x-1$.

Megoldás

Tegyünk kikötést: $x\neq-2$.

Beszorzás után a kapott egyenlet:

$3x^2+5x-22=0$, melynek gyökei $x_1=2$, $\quad x_2=-\frac{11}{3}$.

d) $x-4=\frac{3}{3-4x}$.

Megoldás

Kikötés $x\neq\frac{3}{4}$.

A gyökök: $x_1=1$, $\quad x_2=3{,}75$.

e) $\frac{5(x-1)}{4}-\frac{x}{6}=\frac{6}{x}$.

Megoldás

$x_1=3$, $\quad x_2=-\frac{24}{13}$.

f) $\frac{(x+3)(x+7)}{2}+\frac{(3+5x)^2}{2}=\frac{8-2x}{5}-6x$.

Megoldás

$x_1=-1$, $\quad x_2=-\frac{67}{65}$.

g) $\frac{3x-1}{5}+1=\frac{2}{x}+\frac{4x+1}{9}$.

Megoldás

Kikötés: $x\neq0$.

A 0-ra rendezett egyenlet:

$7x^2+31x-90=0$.

A gyökök:

$x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{45}{7}.$

h) $\frac{x(x-10)}{18} + \frac{(x-12)^2}{6} = \frac{(x-14)^2+10}{2}.$

Megoldás

Átalakítás után a 0-ra rendezett egyenlet:

$5x^2 - 170x + 1422 = 0$, melynek gyökei:

$x_1 = \frac{85+\sqrt{115}}{5}, \quad x_2 = \frac{85-\sqrt{115}}{5}.$

3. E1 Határozzuk meg az alábbi egyenletek megoldását a természetes számok halmazán!

Megoldás

Az egyenletek megoldásakor ne felejtkezzünk meg a kikötésről, és alkalmazzuk a megfelelő nevezetes azonosságot a nevező szorzattá alakításához.

a) $\frac{5}{x+1} + \frac{x+4}{2x-2} = \frac{6x^2-4x-72}{2(x^2-1)}.$

Megoldás

Kikötés: $x \neq \pm 1$.

Szorozzuk be az egyenletet a $2(x-1)(x+1)$ közös nevezővel.

$10(x-1) + (x+4)(x+1) = 6x^2 - 4x - 72.$

Elvégezve a beszorzásokat és 0-ra rendezve kapjuk:

$5x^2 - 19x - 66 = 0.$

A kapott gyökök $x_1 = 6,\ x_2 = -\frac{11}{5}$, megfelelnek a kikötésnek. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a gyökök helyességéről.

b) $\frac{17+2x}{x+3} - \frac{6}{x^2-9} = \frac{3x+7}{3+x} - \frac{2}{3-x}.$

Megoldás

Kikötés: $x \neq \pm 3$.

Beszorozva a közös nevezővel: $(x+3)(x-3)$

$(17+2x)(x-3) - 6 = (3x+7)(x-3) + 2(x+3).$

0-ra rendezve:

$x^2 - 11x + 30 = 0.$

Az egyenlet gyökei $x_1 = 6, \quad x_2 = 5.$

c) $\frac{17x+10}{x^2-x+1} = \frac{25}{x+1} + \frac{65}{x^3+1}.$

Megoldás

Kikötés: $x \neq -1$.

Használjuk fel a közös nevezőhöz az $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ azonosságot.

$(17x+10)(x+1) = 25(x^2-x+1) + 65.$

0-ra rendezve

$8x^2 - 52x + 80 = 0.$

$x_1 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = -4.$

19. NEM KELL MINDIG MEGOLDÓKÉPLET!

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket megoldóképlet alkalmazása nélkül!

Megoldás

Minden esetben alakítsunk szorzattá. Használjuk fel a megoldás során, hogy egy szorzat akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha valamelyik tényezője 0.

K1 *a)* $x^2 - 17x = 0$.

Megoldás

$x(x-17) = 0$, $\quad x_1 = 0$, $\; x_2 = 17$.

K1 *b)* $3x^2 - 5x(x-4) = 0$.

Megoldás

$-2x(x-10) = 0$, $\quad x_1 = 0$, $\; x_2 = 10$.

K1 *c)* $6x^2 + 4 = 2x^2 + 40$.

Megoldás

$4x^2 = 36$;
$x_{1,2} = \pm 3$.

K1 *d)* $10x^2 + 28 = 6x^2 + 25$.

Megoldás

$4x^2 = -3$ nincs megoldása a valós számok halmazán.

K2 *e)* $(3x-4)^2 + (2x+1)^2 = (x+7)^2 - (2x+3)(2x-3) - (34x-8)$.

Megoldás

Felbontva a zárójeleket, majd összevonva:
$13x^2 - 20x + 17 = -3x^2 - 20x + 66$;
$16x^2 = 49$;
$x_{1,2} = \pm\frac{7}{4}$.

2. E1 Adjuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy a másodfokú egyenletnek ne legyen konstans tagja! Oldjuk meg az egyenletet a kiszámított paraméter behelyettesítésével!

a) $x^2 - 5x + 3c - 2 = 0$.

Megoldás

$3c - 2 = 0$ kell, hogy teljesüljön.
$c = \frac{2}{3}$.

Ekkor az egyenlet $x^2 - 5x = 0$, melynek gyökei
$x_1 = 0$, $\; x_2 = 5$.

b) $2x^2 + 8x - 2c = 4x - 7c + 9$.

Megoldás

Rendezzük 0-ra az egyenletet:

$2x^2 + 4x + 5c - 9 = 0$.

Nincs konstans tagja, ha $5c - 9 = 0$ azaz $c = \frac{9}{5}$.

Ekkor az egyenlet gyökei:

$x_1 = 0, \quad x_2 = -2$.

c) $-x^2 - (2c - 11)x + c + 5 = 0$.

Megoldás

Rendezve

$-x^2 - 2cx + 11x + c + 5 = 0$.

Nincs konstans tagja, ha $c = -5$.

Ekkor a gyökök

$x_1 = 0, \quad x_2 = 21$.

d) $x^2 + c(x - 4) + 3c = 2cx - 5(x - 2)$.

Megoldás

Zárójelfelbontás és x csökkenő hatványai szerinti rendezés után kapjuk

$x^2 - cx + 5x - c - 10 = 0$.

Nincs konstans tagja, ha

$c = -10$.

Ekkor az egyenlet

$x^2 - 10(x - 4) - 30 = -20x - 5(x - 2)$;

$x^2 + 15x = 0$;

$x_1 = 0, \quad x_2 = -15$.

3. E1 Adjuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a másodfokú egyenletnek ne legyen elsőfokú tagja! Oldjuk meg az egyenletet a kiszámított paraméter behelyettesítésével!

Megoldás

A másodfokú egyenletnek nincs elsőfokú tagja, ha az x-es tag együtthatója 0.

a) $2x^2 + (p - 5)x - p = 0$.

Megoldás

$p - 5 = 0$;

$p = 5$.

Ekkor az egyenlet $2x^2 - 5 = 0$.

Gyökei: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

b) $-2x^2 + px + 3x - p - 1 = 0$.

Megoldás

$p = -3$ esetén nincs lineáris tag, ekkor az egyenlet $-2x^2 + 2 = 0$, amelyből $x_{1,2} = \pm 1$.

c) .

Megoldás

Felbontva a zárójeleket:

$x^2 + px - 2p + 5p = 3px - 3x + 3$

Rendezve

$x^2 - 2px + 3x + 3p - 3 = 0;$

$x^2 - x(2p - 3) + 3p - 3 = 0;$

$2p - 3 = 0; \quad p = 1{,}5.$

Ekkor az egyenlet

$x^2 + 1{,}5 = 0$; nincs megoldása a valós számok halmazán.

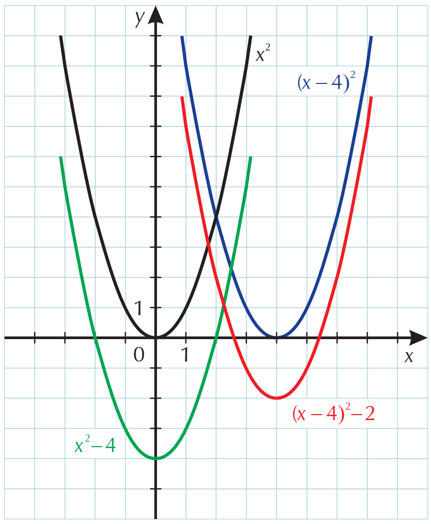
20. A MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNYEK ÉS MÁSODFOKÚ EGYENLETEK KAPCSOLATA

1. K1 Ábrázoljuk függvénytranszformációk segítségével az alábbi másodfokú függvényeket!

a) $f: x \mapsto x^2$; $\quad g: x \mapsto x^2 - 4$;

$h: x \mapsto (x - 4)^2$; $\quad l: x \mapsto (x - 4)^2 - 2$.

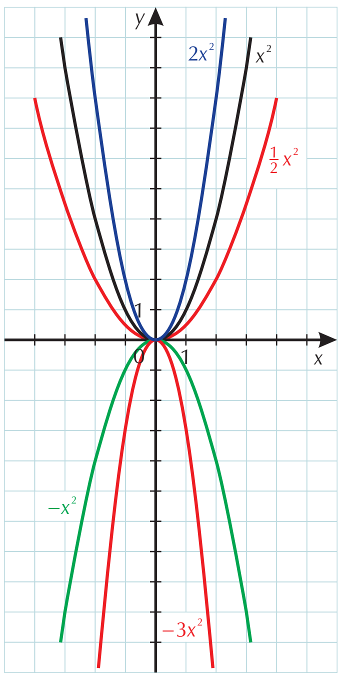
Megoldás (ábra)



b) $f: x \mapsto x^2$; $\quad g: x \mapsto -x^2$; $\quad h: x \mapsto 2x^2$;

$l: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$; $\quad n: x \mapsto -3x^2$.

Megoldás (ábra)

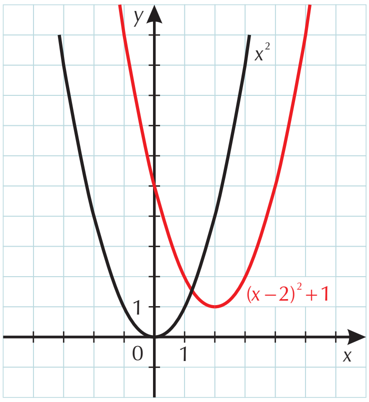


2. K1 Teljes négyzetté alakítás után ábrázoljuk az alábbi függvényeket!

a) $f: x \mapsto x^2 - 4x + 5.$

Megoldás

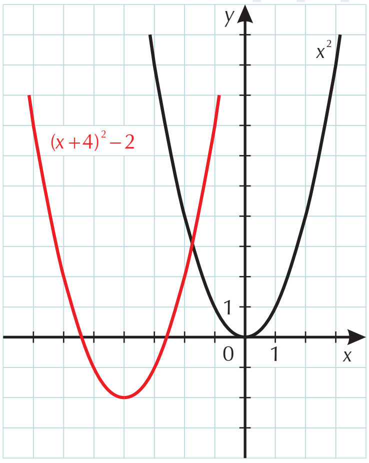
A teljes négyzetté alakított alak: $f: x \mapsto (x-2)^2 + 1.$



b) $g: x \mapsto x^2 + 8x + 14.$

Megoldás

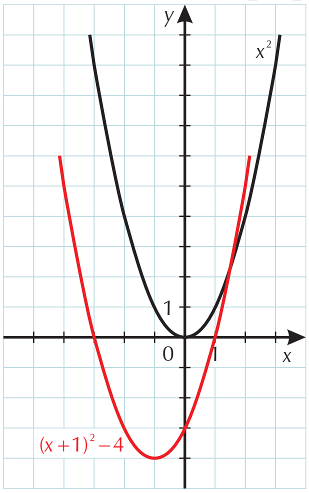
A teljes négyzetté alakított alak: $g: x \mapsto (x+4)^2 - 2.$



c) $h: x \mapsto x^2 + 2x - 3.$

Megoldás

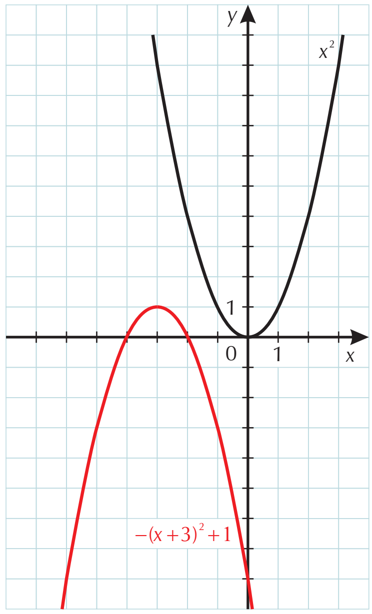
A teljes négyzetté alakított alak: $h: x \mapsto (x+1)^2 - 4.$



d) $l: x \mapsto -x^2 - 6x - 8$.

Megoldás

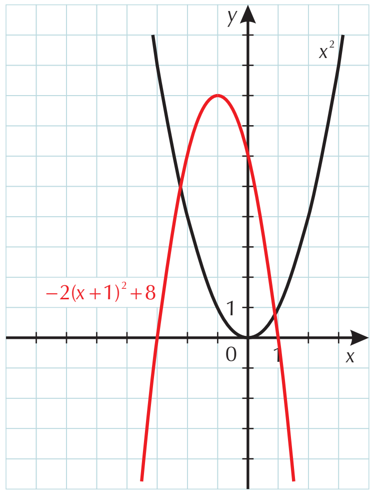
A teljes négyzetté alakított alak: $l: x \mapsto -(x+3)^2 + 1$.



e) $n: x \mapsto -2x^2 - 4x + 6$;

Megoldás

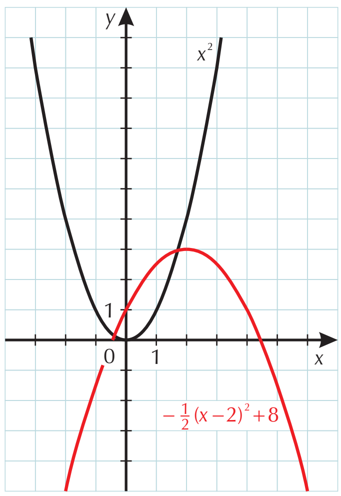
A teljes négyzetté alakított alak: $n: x \mapsto -2(x+1)^2 + 8$.



f) $m: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

Megoldás

A teljes négyzetté alakított alak: $m: x \mapsto -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$.



3. K1 Adjunk meg olyan másodfokú függvényeket, amelynek zérushelyei:

a) 2 és 5.

Megoldás

A gyöktényezős alakot felhasználva a másodfokú $a \neq 0$ másodfokú egyenletnek a gyökei 2; 5. Ekkor az $f: x \mapsto a(x-2)(x-5)$ függvény tetszőleges a esetén $a \neq 0$ a keresett függvényt adja. Például $a = 1$ esetén $f: x \mapsto x^2 - 7x + 10$ függvényt kapjuk.

b) –3 és 4.

Megoldás

Az *a)* eset alapján például: $f: x \mapsto (x+3)(x-4) = x^2 - x - 12$.

c) –1 és $\frac{5}{2}$.

Megoldás

$f: x \mapsto a(x+1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$ alakú függvények teljesítik a feltételt. Válasszuk most a = 2-nek. Ekkor a függvény $f: x \mapsto 2(x+1)\left(x - \frac{5}{2}\right) = 2x^2 - 3x - 5$ alakú.

d) 8 és 9.

Megoldás

$f: x \mapsto x^2 - 17x + 72$.

e) $-\sqrt{2}$ és 0.

Megoldás

$f: x \mapsto a(x+\sqrt{2})x$. Ha $a = 1$, akkor $f: x \mapsto x^2 + \sqrt{2}x$.

f) $\sqrt{6} - 1$ és $-1 - \sqrt{6}$.

Megoldás

Legyen $a = 1$ $f: x \mapsto \left[x - (\sqrt{6} - 1)\right]\left[x - (-1 - \sqrt{6})\right]$.
Elvégezve a beszorzást, $x^2 + 2x - 5$ alakot kapjuk.

g) 4.

Megoldás

Ha $a = 1$
$f: x \mapsto (x-4)^2$.

4. K2 Egy másodfokú függvény minimumértéke –6, zérushelyei 2 és 6. Írjuk fel a másodfokú függvény hozzárendelési szabályát!

Megoldás

Mivel ismerjük a függvény zérushelyeit, írjuk fel a függvény hozzárendelési szabályát a gyöktényezős alak felhasználásával.

$f: x \mapsto a(x-2)(x-6)$.

Mivel minimuma van, ezért $a > 0$.

A függvény a minimumát a zérushelyek számtani közepénél veszi fel, azaz a keresett függvény $\frac{2+6}{2} = 4$-hez –6-ot rendel.

Írjuk fel egyenlet alakjában:
$-6 = a(4-2)(4-6)$;
$a = \frac{3}{2}$.

A függvény hozzárendelési szabálya: $f: x \mapsto \frac{3}{2}(x-2)(x-6)$, azaz $f: x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - 12x + 18$.

5. K2 Egy másodfokú függvény maximumértéke 2, zérushelyei –1 és 4. Írjuk fel a másodfokú függvény hozzárendelési szabályát!

Megoldás

A 4. feladat megoldásához hasonlóan: A függvénynek maximuma van, ezért $a < 0$ kell hogy legyen. A függvény maximumhelye $x = \frac{-1+4}{2} = 1{,}5$.

Az a értékét az
$a(1{,}5+1)(1{,}5-4) = 2$ egyenletből határozhatjuk meg.
$a = -1{,}6$.
A függvény hozzárendelési szabálya
$f: x \mapsto -1{,}6(x+1)(x-4)$;
$f: x \mapsto -1{,}6x^2 + 4{,}8x + 6{,}4$.

6. K2 Az $f: x \mapsto x^2 - 4x + 3$ függvény mely x értékek esetén vesz fel
a) 0 értéket?

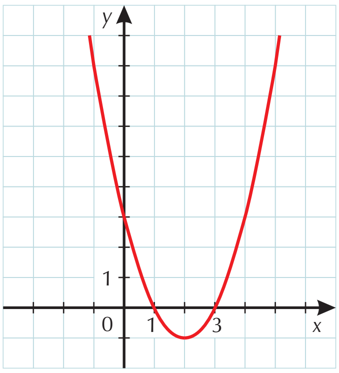
Megoldás

A függvény zérushelyeit az $x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenlet gyökei adják. $x_1 = 1 \quad x_2 = 3$.

b) pozitív értéket?

Megoldás

Ábrázolva a függvényt:
$x < 1$ vagy $x > 3$.



c) negatív értéket?

Megoldás

$1 < x < 3$.

7. K2 Az $f: x \mapsto -x^2 + 8x - 15$ függvény mely x értékek esetén vesz fel
a) 0; *b)* pozitív; *c)* negatív értéket?

Megoldás

A függvény $x_1 = 3$ $x_2 = 5$ értékek esetén vesz fel 0-t. Ha $3 < x < 5$, akkor a függvény értékei pozitívok, ha $x < 3$ vagy $x > 5$ akkor negatívok.

8. E1 Az a paraméter mely értékénél lesz az
$f: x \mapsto (a-1)x^2 - 8x + 10$ függvénynek
a) minimuma,
b) maximuma?
c) Van-e olyan a érték, ahol semmilyen szélsőértéke nincs a függvénynek?

Megoldás

A másodfokú függvénynek akkor van minimuma, ha a főegyütthatója (x^2 együtthatója) pozitív, akkor van maximuma, ha a főegyüttható negatív.

Ezek alapján

$a-1>0$; $a>1$ esetén minimuma van, $a<1$ esetén maximuma van.

Ha $a=1$ akkor lineáris függvényt kapunk, melynek a valós számok halmazán nincs se maximuma, se minimuma.

21. MÁSODFOKÚ EGYENLŐTLENSÉGEK I.

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $x^2+8x-33<0$.

Megoldás

Az $x \mapsto x^2+8x-33$ függvény zérushelyeit az $x^2+8x-33=0$ másodfokú egyenlet adja. $x_1=-11$ $x_2=3$. A másodfokú függvény grafikonja az x tengely alatt halad, ha $-11<x<3$. Az egyenlőtlenség megoldása $x \in]-11; 3[$.

b) $x^2+x-20>0$.

Megoldás

$x^2+x-20=0$ megoldásai $x_1=-5$ $x_2=4$. A vizsgált másodfokú függvény főegyütthatója pozitív, a függvény grafikonja az x tengely felett halad, ha $x<-5$ vagy $x>4$. Az egyenlőtlenség megoldása $x \in]-\infty; -5[\cup]4; \infty[$.

c) $-x^2+7x-12 \geq 0$.

Megoldás

A főegyüttható negatív ezért a parabolának maximuma van, ezért
$x \in [3; 4]$.

d) $-2x^2+4{,}5x-4{,}5 \leq 0$.

Megoldás

$x \in]-\infty; -3] \cup \left[\frac{3}{4}; \infty\right[$.

e) $x^2-6x+9<0$.

Megoldás

$x^2-6x+9 \geq 0$ minden x esetén, mert $x^2-6x+9=(x-3)^2$,ez azt jelenti, hogy nincs olyan x amelyre $x^2-6x+9<0$.

f) $2x^2-50 \geq 0$.

Megoldás

$x^2-25 \geq 0$, melyből $x \in]-\infty; -5] \cup [5; \infty[$.

2. K1 Oldjuk meg a pozitív számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 10x + 9 < 0$.

Megoldás

A valós számok halmazán az egyenlőtlenség megoldása $1 < x < 9$, ez részhalmaza a pozitív valós számoknak, így tehát a megoldás $x \in]1; 9[$.

b) $x^2 - 4x - 60 \geq 0$.

Megoldás

A pozitív számok halmazán a megoldás $x \in [10; \infty[$.

c) $9x - 3x^2 + 30 \leq 0$.

Megoldás

A valós számok halmazán a $9x - 3x^2 + 30 = 0$ egyenlet megoldásai $x_1 = -2$ $x_2 = 5$.

Az $x \mapsto 9x - 3x^2 + 30$ függvény főegyütthatója negatív, ezért a pozitív számok halmazán a megoldás $x \in [0; 5]$.

3. K1 Beletartozik-e az alábbi egyenlőtlenség megoldáshalmazába a $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ intervallum?

$x^2 - 4x + 2 \leq 0$.

Megoldás

Az egyenlőtlenség megoldása $x \in [2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}]$. Összevetve a $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ intervallummal, látható, hogy nem tartozik a megoldáshalmazba.

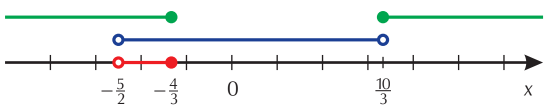
4. K2 Határozzuk meg, mely x értékek esetén teljesül egyszerre a $9x^2 - 18x - 40 \geq 0$ és a $6x^2 - 5x - 50 < 0$ egyenlőtlenség!

Megoldás

Az $9x^2 - 18x - 40 \geq 0$ egyenlőtlenség megoldása vagy $x \in \left]-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{10}{3}; \infty\right[$.

A $6x^2 - 5x - 50 < 0$ egyenlőtlenség megoldása $x \in \left]-\frac{5}{2}; \frac{10}{3}\right[$.

Ábrázoljuk a két megoldást számegyenesen.



Egyszerre teljesül a két egyenlőtlenség: $\left]-\frac{5}{2}; -\frac{4}{3}\right]$.

5. K2 **Játék**

Egy játékban Anna és Béla az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet ($a \neq 0$) egész együtthatóit felváltva adhatják meg. Anna kezd. Béla akkor nyer, ha a három együttható megadása után két különböző valós gyöke van az egyenletnek, Anna pedig akkor, ha ez nem teljesül. Melyiküknek van nyerő stratégiája?

Elemezzünk más játékverziókat is! Például: Anna kezdése után Béla két együtthatót is megadhat; vagy szerepcserével Anna nyer két különböző gyök létezése esetén; vagy vizsgálhatjuk az $a = 1$ főegyütthatóval is a játékot. (Ekkor b és c adható meg.)

Megoldás

Az egyenlet diszkriminánsa $D = b^2 - 4ac$. Béla akkor nyer, ha $D > 0$, s ezt Anna mindig meggátolhatja. Például $b = 0$ választással kezd; ezután pedig az ac szorzatot pozitívra állítja. Ezt megteheti, hiszen amikor Béla az egyik együtthatót megadja, akkor Anna a másik együtthatót ezzel azonos előjelűnek választhatja. Így a diszkrimináns negatív lesz, nincsen valós gyök. (Ha Béla a $c = 0$ értéket választja, akkor $D = 0$, az egyenletnek egyetlen (vagy két egyenlő) gyöke lesz.)

22. MÁSODFOKÚ EGYENLŐTLENSÉGEK II.

1. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\frac{(x-2)(x+5)}{x-3} > 0.$

Megoldás

A számláló szorzótényezőinek és a nevezőnek a zérushelyei 2; –5; 3.
Ezek a számegyenest négy intervallumra bontják. Vizsgáljuk a tényezők előjelét az egyes intervallumokon, az egyenlőséget nem vizsgáljuk, mivel sem a nevező, sem a számláló (az egyenlőtlenség miatt) értéke nem lehet 0.

	$x < -5$	$-5 < x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
$x-2$	–	–	+	+
$x+5$	–	+	+	+
$x-3$	–	–	–	+

A tört értéke akkor pozitív, ha a negatív tényezők száma páros. A táblázatból kiolvasható, hogy ez teljesül, ha $x \in \left]-5; 2\right[\cup \left]3; \infty\right[$.

b) $\frac{x^2-11x+30}{x-4} < 0.$

Megoldás

Az egyes tényezők zérushelyei 4; 5; 6
Az előjelek meghatározásához a táblázat:

	$x < 4$	$4 < x < 5$	$5 < x < 6$	$x > 6$
$x-5$	–	–	+	+
$x-6$	–	–	–	+
$x-4$	–	+	+	+

A tört értéke negatív, ha a negatív tényezők száma páratlan. Ez teljesül, ha $x < 4$ vagy $5 < x < 6$.

2. K2 Ábrázoljuk az alábbi egyenlőtlenségek megoldását számegyenesen!

a) $\frac{2+x-3x^2}{2-3x} < 0.$

Megoldás

Alakítsuk szorzattá a számlálót a gyöktényezős alak segítségével.

$-3x^2 + x + 2 = -3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x-1).$

Az előző feladathoz hasonlóan elkészített táblázat alapján felírható a megoldás: $x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}; 1\right[.$

b) $\frac{x^2-5x+4}{3x^2-5x-2} \geq 0.$

Megoldás

A számlálót és a nevezőt is alakítsuk szorzattá.

$$\frac{x^2-5x+4}{3x^2-5x-2}=\frac{(x-4)(x-1)}{3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}.$$

A számláló zérushelyei: 1; 4, a nevező zérushelyei $-\frac{1}{3}$, 2. Most öt intervallumot kell megvizsgálnunk. Figyeljünk arra, hogy a tört értéke lehet 0 is, ezért a számlálóban megengedhetjük a 0-t is.

	$x<-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}<x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$2<x<4$	$x=4$	$x>4$
$x-1$	–	–	0	+	+	+	+
$x-4$	–	–	–	–	–	0	+
$x-2$	–	–	–	–	+	+	+
$x+\frac{1}{3}$	–	+	+	+	+	+	+

A tört értéke akkor nemnegatív, ha a negatív tényezők száma páros, illetve a számláló 0. Így a megoldás:
$x\in\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup[1;2[\cup[4;\infty[$.

c) $\left(1-\frac{1}{x-2}\right)(x-5)\ge 0.$

Megoldás

Átalakítva kapjuk a következő egyenlőtlenséget:
$\frac{(x-3)(x-5)}{x-2}\ge 0.$
Megoldása: $x\in\,]2;3]\cup[5;\infty[$.

d) $4-\frac{2x-17}{x-5}\le\frac{x-5}{x+2}+1.$

Megoldás

Kikötés: $x\ne -2;5$.
Hozzunk mindkét oldalon közös nevezőre.
$\frac{2x-3}{x-5}\le\frac{2x-3}{x+2}.$
Rendezzünk 0-ra, és emeljünk ki $(2x-3)$-t.

$(2x-3)\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+2}\right)\le 0;$

$(2x-3)\frac{7}{(x+2)(x-5)}\le 0.$

A táblázat segítségével meghatározva az előjeleket, kapjuk a megoldást:
$x\in\,]-\infty;-2[\cup\left[\frac{3}{2};5\right[$.

3. E1 Az a paraméter milyen értéke esetén teljesül minden x esetén $2x^2-6x+a>0$?

Megoldás

A $x\mapsto 2x^2-6x+a$ függvényt tekintve a főegyüttható pozitív ezért minimuma van.
Minden x valós szám esetén a $2x^2-6x+a$ akkor lesz pozitív, ha a másodfokú egyenletnek nincs megoldása, azaz az egyenlet diszkriminánsa negatív.
$D=36-8a<0$.

Ebből $a>\frac{9}{2}$.

4. E1 Határozzuk meg a b paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 - 2bx + 8 > 0$ minden valós szám esetén teljesüljön!

Megoldás

A $x^2 - 2bx + 8$ kifejezésben a főegyüttható pozitív, ezért minimuma van.
Ezért
$D = 4b^2 - 32 < 0$ kell, hogy teljesüljön.
$b^2 < 8$-ból adódik a megoldás.
$-2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$.

5. E1 Van-e olyan a érték, mely esetén az $ax^2 - 6x + 8 < 0$ minden valós számra igaz?

Megoldás

A kifejezés akkor lesz minden x esetén negatív, ha
I. a főegyüttható negatív, és
II. Nincs az $ax^2 - 6x + 8 = 0$ egyenletnek gyöke, azaz a diszkriminánsa negatív.
I.-ből $a < 0$.
II.-ből $D = 36 - 32a < 0$, így $a > \frac{9}{8}$.
I.-nek és II.-nek nincs közös része, így nincs olyan a érték mely esetén az $ax^2 - 6x + 8 < 0$ minden valós számra igaz.

23. MÁSODFOKÚRA VISSZAVEZETHETŐ EGYENLETEK

1. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Megoldás

Vezessük be $x^2 = a$ ismeretlent. Ekkor az egyenlet
$a^2 - 10a + 9 = 0$ alakú lesz, melynek gyökei
$a_1 = 1$; $a_2 = 9$.
Visszahelyettesítve kapjuk, hogy
$x^2 = 1$, melyből $x_{1,2} = \pm 1$, illetve $x^2 = 9$, melyből $x_{3,4} = \pm 3$.

b) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Megoldás

Új ismeretlen bevezetése után kapjuk, hogy $a_1 = 1$ $\overline{C}$, így az egyenlet gyökei $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}$.

c) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$.

Megoldás

$x_{1,2} = \pm \sqrt{2}$; $x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

Megoldás

Két megoldása van: $x_{1,2} = \pm 2$.

2. Megfelelően választott új ismeretlen bevezetésével oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

E1 *a)* $(x^2 + 2x)^2 + 3(x^2 + 2x) - 4 = 0$.

Megoldás

Legyen $x^2 + 2x = a$, ekkor az egyenlet
$a^2 + 3a - 4 = 0$ alakú lesz. Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei $a_1 = 1$; $a_2 = -4$.
Most visszahelyettesítve újabb két másodfokú egyenletet kapunk:
$x^2 + 2x = 1$, illetve $x^2 + 2x = -4$.
Az egyenletek gyökei: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, illetve $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{5}$.

E1 *b)* $(x^2 - 3x)^2 - 13(x^2 - 3x) + 36 = 0$.

Megoldás

Hasonlóan az *a)* részhez $x^2 - 3x = a$ ismeretlen bevezetésével a redukált egyenlet $a^2 - 13a + 36 = 0$.
Ennek gyökei $a_1 = 9$; $a_2 = 4$.
Visszahelyettesítve *a* értékeit az
$x^2 - 3x = 9$, illetve $x^2 - 3x = 4$ egyenletekhez jutunk. Ezen egyenletek megoldásai $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2}$
és $x_3 = -1$; $x_2 = 4$.

K2 *c)* $2(x^2 - 8x)^2 - 19(x^2 - 8x + 2) + 47 = 0$.

Megoldás

Vezessük be az $x^2 - 8x = a$ ismeretlent.
Ekkor $2a^2 - 19(a + 2) + 47 = 0$ egyenletet kapjuk.
Ennek megoldásai $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = 9$.
Visszahelyettesítve az a értékét, majd megoldva az újonnan kapott másodfokú egyenleteket $x_1 = -1$,
$x_2 = 9$ és $x_{3,4} = \frac{8 \pm \sqrt{66}}{2}$-t kapjuk.

24. MÁSODFOKÚRA VISSZAVEZETHETŐ EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK (NEM ÉRETTSÉGI TANANYAG)

1. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az egész számok halmazán!

a) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$.

Megoldás

Használjuk fel azt az ismeretet, hogyha egy *n*-edfokú egész együtthatós egyenletnek a főegyütthatója 1, akkor és csak akkor van egész megoldása, ha a megoldás osztója a konstans tagnak.

Így a megoldások 6 osztói közül kerülhetnek ki. 6 osztóit megvizsgálva kaphatjuk, hogy az $x = 1$ megoldása az egyenletnek.

Polinomok osztásának felhasználásával kapjuk, hogy
$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x-1)(x^3 - 7x - 6)$.

A következőkben már az $x^3 - 7x - 6 = 0$ harmadfokú egyenlet egész megoldásait keressük. Hasonlóan az előzőhöz belátható, hogy $x = 3$ megoldása az egyenletnek.

Ekkor $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x^2 + 3x + 2)$ szorzatalakot kapjuk. A kapott másodokú egyenlet gyökei a megoldóképlet segítségével meghatározhatók.

Így a megadott negyedfokú egyenlet egész megoldásai $x_1 = -1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$; $x_4 = 3$.

b) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$.

Megoldás

Az *a)* résznél felhasznált módszerrel az egyenlet gyökei
$x_1 = -1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$.

2. E2 Oldjuk meg az alábbi negyedfokú szimmetrikus egyenleteket!

a) $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$.

Megoldás

Az $x = 0$ nem megoldása az egyenletnek, ezért x^2-tel végigoszthatjuk az egyenletet.

$3x^2 - 4x - 14 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = 0$.

Rendezzük át az egyenletet:

$3x^2 + \frac{3}{x^2} - 4x - \frac{4}{x} - 14 = 0$;

$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$.

Jelöljük $x + \frac{1}{x} = a$-val.

Ekkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$.

Így az egyenletünk
$3(a^2 - 2) - 4a - 14 = 0$ lesz.

Ebből $a_1 = -2$; $a_2 = \frac{10}{3}$.

Visszahelyettesítve az
$x + \frac{1}{x} = -2$ és $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ egyenleteket kapjuk, melynek megoldásai:

$x_{1,2} = 1$; $x_3 = \frac{1}{3}$; $x_4 = 3$.

b) $8x^4 - 14x^3 - 69x^2 - 14x + 8 = 0$.

Megoldás

Az *a)* részben leírt módszerrel a kapott gyökök
$x_1 = -2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = 4$; $x_4 = \frac{1}{4}$.

3. E2 Mely való számok alkotják az alábbi egyenletek megoldáshalmazát?

a) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$.

Megoldás

Szimmetrikus harmadfokú egyenleteknél az $(x+1)$ kiemelhető.
Csoportosítsuk a tagokat:

$2(x^3+1)+3x(x+1)=0.$

Használjuk fel, hogy $x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1)$.

Alakítsuk szorzattá a bal oldalt.

$(x+1)(2x^2+x+2)=0.$

Ebből

$x_1=-1$. A $2x^2+x+2=0$-nek nincs megoldása a valós számok halmazán.

b) $x^3-2x^2-2x+1=0.$

Megoldás

Szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$(x+1)(x^2-3x+1)=0$, melyből a megoldások

$x_1=-1;\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\ x_3=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$

c) $5x^3-6x^2-6x+5=0.$

Megoldás

A szorzattá alakított alak:

$(x+1)(5x^2-11x+5)=0$, amelyből a megoldások

$x_1=-1;\ x_2=\dfrac{11+\sqrt{21}}{10};\ x_3=\dfrac{11-\sqrt{21}}{10}.$

4. E2 Oldjuk meg az $x^4-15x^2-10x+24\le 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

Keressük az $x^4-15x^2-10x+24=0$ egyenlet megoldásait az egész számok körében. Mivel egész együtthatós negyedfokú egyenletről van szó, ha van egész megoldás, az csak 24 osztói közül kerülhet ki. Az osztókat vizsgálva megállapítható, hogy az $x=1$ megoldása az egyenletnek. Polinom osztást végezve, szorzattá alakítható a $x^4-15x^2-10x+24$ kifejezés.

$x^4-15x^2-10x+24=(x-1)(x^3+x^2-14x-24).$

Tovább vizsgálva a harmadfokú kifejezést szorzattá alakítható, és a negyedfokú polinom felbontható elsőfokúak szorzatára.

$(x-1)(x+3)(x+2)(x-4)\le 0.$

Táblázattal megvizsgálva a zérushelyek által meghatározott intervallumokat:

	$x<-3$	$-3\le x\le -2$	$-2<x<1$	$1\le x\le 4$	$x>4$
$x-1$	–	–	–	+; 0	+
$x+2$	–	–; 0	+	+	+
$x+3$	–	+; 0	+	+	+
$x-4$	–	–	–	–; 0	+

A négytényezős szorzat akkor lesz negatív, ha a negatív tényezők száma páratlan, és ott lesz 0, ahol valamelyik tényező 0.

A megoldás $[-3;-2]\cup[1;4]$.

25. GYÖKÖK ÉS EGYÜTTHATÓK KÖZÖTTI ÖSSZEFÜGGÉSEK

1. K1 Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei

a) 1, 2.

Megoldás

Használjuk fel a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$;

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Legyen $a = 1$, ekkor

$x_1 + x_2 = -b$, azaz $b = -3$;

$x_1 \cdot x_2 = c$, azaz $c = 2$.

Ekkor a másodfokú egyenlet $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Megjegyzés: Az *a* tetszőleges 0-tól különböző szám lehet.

b) 3, 5.

Megoldás

Az előzőhöz hasonlóan kapjuk $b = -8$; $c = 15$.

Az egyenlet: $x^2 - 8x + 15 = 0$.

c) –4, 6.

Megoldás

$x^2 - 2x - 24 = 0$.

d) 8, 22.

Megoldás

$x^2 - 30x + 176 = 0$.

e) $2 - \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$.

Megoldás

$x^2 - 4x + 1 = 0$.

2. K1 Alakítsuk szorzattá a Viète-formulák segítségével a következő kifejezéseket!

Megoldás

Használjuk fel a megoldás során, hogy ha a főegyüttható 1, akkor a gyökök szorzata a konstans tag, a gyökök összege a lineáris tag együtthatójnak (–1)-szerese.

a) $x^2 - 6x - 7$.

Megoldás

$(x - 7)(x + 1)$.

b) $x^2 + 5x + 6$.

Megoldás

$(x+2)(x+3)$.

c) $2x^2 - 6x + 4$.

Megoldás

$2(x-2)(x-1)$.

d) $2x^2 - 5x - 7$.

Megoldás

$2\left(x - \frac{7}{2}\right)(x+1) = (2x-7)(x+1)$.

e) $-2x^2 + x - 15$.

Megoldás

Nem bontható, mert nincs zérushelye.

3. K1 Az alábbi egyenlet gyökeinek kiszámítása nélkül határozzuk meg a gyökök előjelét!

Megoldás

Először minden esetben meg kell vizsgálni, vannak-e gyökei az egyenletnek. Ehhez a diszkrimináns előjelét kell megnézni.

Az előjel vizsgálatához használjuk fel a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket.

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Megoldás

$D = 16 > 0$, léteznek gyökök.
A gyökök szorzata $x_1 \cdot x_2 = 5 > 0$, ezért a két gyök azonos előjelű. A gyökök összege $x_1 + x_2 = 6 > 0$, és azonos előjelűek ezért mindkét gyök pozitív.

b) $x^2 + 7x + 9 = 0$.

Megoldás

$D = 13 > 0$, léteznek gyökök.
$x_1 \cdot x_2 = 9 > 0$, tehát azonos előjelűek, és
$x_1 + x_2 = -7 < 0$, tehát mindkét gyök negatív.

c) $x^2 + 4x - 7 = 0$.

Megoldás

$D > 0$, vannak gyökök.
$x_1 \cdot x_2 = -7 < 0$ különböző előjelűek.

d) $x^2 - 17x - 180 = 0$.

Megoldás

Különböző előjelűek a gyökök.

e) $3x^2 + 2 = 5x$.

Megoldás

Mindkét gyök pozitív.

f) $2x^2 - 7x = 3x + 6$.

Megoldás

Különböző előjelűek a gyökök.

4. K2 Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

Megoldás

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések felhasználásával alakítsuk szorzattá a nevezőt és a számlálót, majd egyszerűsítsünk.

a) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$.

Megoldás

$$\frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x-3}{x+2}.$$

b) $\dfrac{x^2 + 9x + 20}{x^2 - x - 20}$.

Megoldás

$$\frac{(x+5)(x+4)}{(x-5)(x+4)} = \frac{x+5}{x-5}.$$

c) $\dfrac{2x^2 - x - 3}{x^2 + 5x + 4}$.

Megoldás

$$\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)}{(x+4)(x+1)} = \frac{2x-3}{x+4}.$$

d) $\dfrac{-x^2 + x + 12}{3 - 5x - 2x^2}$.

Megoldás

$$\frac{-(x-4)(x+3)}{-2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4-x}{1-2x}.$$

26. VIÉTE-FORMULÁK HASZNÁLATA FELADATMEGOLDÁSOKBAN

1. Határozzuk meg a $2x^2 - 8x + 5 = 0$ egyenletben a

K1 *a)* gyökök összegét!

Megoldás

Először azt kell megvizsgálni, hogy léteznek-e gyökök. Mivel $D = 24$, ezért két különböző gyöke van az egyenletnek.

$$x_1 + x_2 = -\frac{-8}{2} = 4.$$

K1 *b)* gyökök szorzatát!

Megoldás

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{2}.$$

K1 *c)* gyökök összegének négyzetét!

Megoldás

$$(x_1 + x_2)^2 = 16.$$

K2 *d)* gyökök négyzetének összegét!

Megoldás

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = 16 - 2\cdot\frac{5}{2} = 11.$$

2. K2 Határozzuk meg a $-3x^2 + 5x + 1 = 0$ egyenletben a

a) gyökök négyzetösszegét!

Megoldás

Először azt kell megvizsgálni, hogy léteznek-e gyökök. Mivel $D = 37$, ezért két különböző valós gyöke van az egyenletnek.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{19}{9}.$$

b) gyökök reciprokainak összegét!

Megoldás

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = -5.$$

c) gyökök köbeinek az összegét!

Megoldás

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a}\right] = \frac{5}{3}\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{80}{27}.$$

d) gyökök különbségét!

Megoldás

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{9}$;

$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

A gyökök különbségének előjele kétféle lehet attól függően, hogy a kisebb abszolút értékűből vonjuk ki a nagyobb abszolút értékűt, vagy fordítva.

$x_1 - x_2 = \pm\frac{\sqrt{13}}{3}$.

3. K2 Határozzuk meg az $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5 = 0$ egyenletben a gyökök négyzetének különbségét!

Megoldás

Mivel $D = -1 < 0$, az egyenletnek nincsenek gyökei, ezért nem lehet gyökök négyzetének különbségét számolni.

4. E1 Határozzuk meg az $x^2 - 3x + c = 0$ egyenletben a c értékét úgy, hogy

a) az egyenletnek 1 megoldása legyen!

Megoldás

1 megoldás van, ha a $D = 0$.

$(-3)^2 - 4c = 0$;

$c = \frac{9}{4}$.

Ekkor az egyenlet gyöke $x = \frac{3}{2}$.

b) az egyenletnek 2 pozitív gyöke legyen!

Megoldás

Ahhoz, hogy két gyöke legyen kell, hogy $D > 0$ teljesüljön.

$(-3)^2 - 4c > 0$, amiből

$c < \frac{9}{4}$.

Ahhoz, hogy két azonos előjelű gyöke legyen, kell hogy a gyökök szorzata pozitív legyen.

$x_1x_2 = c > 0$.

Továbbá, ahhoz, hogy mindkét gyök pozitív legyen, kell, hogy a gyökök összege pozitív legyen.

$x_1 + x_2 = 3$, ez mindig teljesül.

Összevetve a feltételeket, két pozitív gyöke akkor van az egyenletnek, ha

$0 < c < \frac{9}{4}$.

c) az egyenletnek különböző előjelű gyökei legyenek!

Megoldás

Ahhoz, hogy két különböző előjelű gyöke legyen, kell hogy a gyökök szorzata negatív legyen.

$x_1x_2 = c < 0$.

$c < 0$ esetben teljesül.

5. E2 Hogyan kell megválasztani a c paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + (3c - 3)x + 6c + 3 = 0$ egyenletben a gyökök négyzetösszege 78 legyen?

Megoldás

A gyökök létezésének feltétele, hogy $D > 0$ teljesüljön.

$D = (3c - 3)^2 - 4(6c + 3) > 0.$

$3c^2 - 14c - 1 > 0$ egyenlőtlenség megoldása $c < \frac{7 - 2\sqrt{13}}{3}$ vagy $c > \frac{7 + 2\sqrt{13}}{3}$.

A gyökök négyzetösszege

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a};$

$[-(3c - 3)]^2 - 2(6c + 3) = 78;$

$9c^2 - 18c + 9 - 12c - 6 - 78 = 0;$

$9c^2 - 30c - 75 = 0;$

$c_1 = 5;\ c_2 = -\frac{5}{3}.$

Ellenőrizve mindkét c érték esetén teljesül, hogy a gyökök négyzetösszege 78.

Emelt szint

27. PARAMÉTERES EGYENLETEK

1. E1 Határozzuk meg a b milyen értékénél lesz az $x^2 + bx + 15 = 0$ egyenletnek az egyik gyöke 5? Számítsuk ki a másik gyök értékét!

Megoldás

Helyettesítsük be az x helyére 5-öt.

$5^2 + b \cdot 5 + 15 = 0;$

$b = -8.$

Ekkor a másodfokú egyenlet

$x^2 - 8x + 15 = 0.$

Gyökei $x_1 = 3;\ x_2 = 5.$

2. E1 Adjuk meg az a értékét úgy, hogy az $(a - 1)x^2 + 12x - 3 = 0$ egyenletnek az egyik gyöke –1 legyen! Számítsuk ki a másik gyök értékét!

Megoldás

Ha behelyettesítjük az $x = -1$-et, akkor az

$a - 1 - 12 - 3 = 0$ egyenletet kapjuk.

$a = 16.$

Így az egyenlet $15x^2 + 12x - 3 = 0.$

A gyökök ekkor $x_1 = -1;\ x_2 = \frac{1}{5}.$

3. E1 A p milyen értékénél van két egyenlő gyöke az alábbi egyenleteknek?

a) $x^2 - 8x + p = 0.$

Megoldás

Két egyenlő gyöke van az egyenletnek, ha $D = 0.$

$D = (-8)^2 - 4p = 0;$

$p = 16.$

A gyökök $x_1 = x_2 = 4.$

b) $2x^2 + 10x - p - 3 = 0.$

Megoldás

$D = 100 - 8 \cdot (-p - 3) = 0;$
$p = -15{,}5.$

A gyökök $x_1 = x_2 = -\frac{5}{2}.$

c) $(p + 2)x^2 + 6px + 4p + 1 = 0.$

Megoldás

$D = (6p)^2 - 4(p + 2)(4p + 1) = 0;$

$p_1 = 2;\ p_2 = -\frac{1}{5}.$

Ha $p = 2$, akkor az egyenlet

$4x^2 + 12x + 9 = 0$, melynek gyökei $x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}.$

Ha $p = -\frac{1}{5}$, akkor az egyenlet

$\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{5} = 0$, ennek gyökei $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}.$

4. E1 Oldjuk meg az alábbi paraméteres egyenleteket, ahol c paraméter valós szám!

a) $cx^2 + (c - 2)x = 0.$

Megoldás

Ha $c = 0$, akkor $x = 0$.
Ha $c \neq 0$, akkor emeljünk ki x-et.
$x(cx + c - 2) = 0;$
$x_1 = 0$ vagy
$cx + c - 2 = 0.$
$cx = 2 - c$, és $c \neq 0$;
$x_2 = \frac{2 - c}{c}.$

b) $2x^2 + (c - 3)x - \frac{3c}{2} = 0.$

Megoldás

Van megoldás, ha $D \geq 0$.

$D = (c - 3)^2 + 8 \cdot \frac{3c}{2} \geq 0$, ebből adódik, hogy

$c^2 + 6c + 9 \geq 0.$
Mivel a bal oldal teljes négyzet, ezért minden c esetén teljesül az egyenlőtlenség.
Az egyenlet megoldásai:

Ha $c = -3$, akkor két egyenlő gyöke van $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}.$

Ha $c \neq -3$, akkor

$$x_{1,2} = \frac{-(c - 3) \pm \sqrt{c^2 + 6c + 9}}{4} = \frac{-c + 3 \pm (c + 3)}{4}.$$

$x_1 = -\frac{c}{2};\ x_2 = \frac{3}{2}.$

5. E2 A p paraméter értékétől függően adjuk meg az alábbi egyenletek megoldásainak számát és megoldásait!

a) $x^2+(1-2p)x=6+p-p^2$.

Megoldás

Nullára rendezve $x^2+(1-2p)x+p^2-p-6=0$.
Van megoldása az egyenletnek, ha
$D=(1-2p)^2-4(p^2-p-6)\geq 0$.
$D=25\geq 0$ minden p esetén teljesül.
Az egyenlet gyökei

$$x_{1,2}=\frac{-(1-2p)\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{2p-1\pm 5}{2};$$

$x_1=p-3$; $x_2=p+2$.

b) $2px^2-8px-24p^2=0$.

Megoldás

Ha $p=0$, akkor minden szám megoldás.
Ha $p\neq 0$, akkor oszthatunk p-vel.
$2x^2-8x-24p=0$ egyenletnek akkor van megoldása, ha
$D=64-192p\geq 0$, azaz $p\leq\frac{1}{3}$, ekkor a gyökök

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-192p}}{4}=2\pm\sqrt{4-12p}.$$

Ha $p>\frac{1}{3}$, akkor nincs megoldás.

Emelt szint

28. PARAMÉTERES EGYENLŐTLENSÉGEK

1. E1 Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi egyenlőtlenségnek milyen megoldása van a megadott p értéknél!
$x^2+6x+p-6\geq 0$.

Megoldás

Az adott paraméter értékét behelyettesítve másodfokú egyenlőtlenségeket kapunk, amelyeket a zérushelyek meghatározásával megoldhatunk.

a) $p=20$.

Megoldás

$x^2+6x+14\geq 0$ egyenlőtlenség megoldását keressük.
Az $x^2+6x+14=0$ egyenletnek a diszkriminánsa negatív, a másodfokú függvénynek minimuma van, és nincs zérushelye, ezért minden x esetén teljesül az egyenlőtlenség.

b) $p=15$.

Megoldás

$x^2+6x+9=(p+3)^2\geq 0$, minden x valós szám esetén teljesül.

c) $p = 14$.

Megoldás

$x^2 + 6x + 8 \geq 0$ egyenlőtlenséget kell vizsgálni.
Az $x^2 + 6x + 8 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = -2$ $x_2 = -4$, ezért az egyenlőtlenség megoldása $]-\infty; -4] \cup [-2; \infty[$.

d) $p = 7$.

Megoldás

$x^2 + 6x + 1 \geq 0$ egyenlőtlenség esetén az $x^2 + 6x + 1 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = -3 - 2\sqrt{2}$; $x_2 = -3 + 2\sqrt{2}$, az egyenlőtlenség megoldása $]-\infty; -3 - 2\sqrt{2}] \cup [-3 + 2\sqrt{2}; \infty[$.

2. E1 Határozzuk meg, hogy p értéktől függően mely x értékekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség!
$2x^2 - 10x + 2p - 7 < 0$.

Megoldás

Vizsgáljuk meg a $2x^2 - 10x + 2p - 7 = 0$ egyenlet diszkriminánsát.
$D = 100 - 8(2p - 7) = 156 - 16p$.

Ha $D < 0$, azaz $\frac{39}{4} < p$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, azaz az $x \mapsto 2x^2 - 10x + 2p - 7$ függvénynek nincs zérushelye, és minimuma van, ezért nincs olyan valós szám, amelyre teljesül az egyenlőtlenség.

Ha $D = 0$, azaz $p = \frac{39}{4}$, akkor a minimummal rendelkező parabola érinti az x tengelyt, de nincs olyan x érték, melyre negatív lenne, ezért ebben az esetben nincs megoldás.

Ha $D > 0$, azaz $p < \frac{39}{4}$, akkor két zérushelye van a parabolának $x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{156 - 16p}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{39 - 4p}}{2}$. A két zérushely közötti értékeknél teljesül a $2x^2 - 10x + 2p - 7 < 0$. Így tehát a megoldás: ha $p < \frac{39}{4}$, akkor $\frac{5 - \sqrt{39 - 4p}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{39 - 4p}}{2}$.

3. E1 Határozzuk meg a paraméter értékét úgy, hogy tetszőleges valós szám esetén igaz legyen az egyenlőtlenség! (p a paraméter)

a) $x^2 + 4 - p \geq 0$.

Megoldás

$x^2 \geq p - 4$ alakra átírva, akkor teljesül tetszőleges x valós szám esetén, ha $p - 4 \leq 0$, azaz $p \leq 4$.

b) $(p + 2)x^2 - 8 \leq 0$.

Megoldás

Ha $p = -2$, akkor $-8 \leq 0$ minden valós x esetén teljesül.

Ha $p > -2$, akkor $x^2 \leq \frac{8}{p + 2}$, és $\frac{8}{p + 2}$ pozitív szám.

Az $x^2 = \frac{8}{p + 2}$ egyenletnek két megoldása van, így ha $x \in \left]-\infty; -\sqrt{\frac{8}{p + 2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{8}{p + 2}}; \infty\right[$, akkor az egyenlőtlenség nem teljesül.

Így ha $p > -2$, akkor nincs olyan p érték melynél minden x-re $x^2 \leq \frac{8}{p + 2}$.

Ha $p < -2$, akkor $(p+2)x^2 - 8 \leq 0$ bal oldala negatív, tehát tetszőleges x érték esetén igaz az egyenlőtlenség.

c) $(7p-4)x^2 + 2 \geq 0$.

Megoldás

Hasonlóan az előzőhöz

$p \geq \frac{4}{7}$ esetén tehát tetszőleges x érték esetén igaz a $(7p-4)x^2 + 2 \geq 0$ egyenlőtlenség.

4. E1 Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket, ahol p valós paraméter!

a) $-2x^2 + 9 - 5p < 0$.

Megoldás

Rendezzük az egyenlőtlenséget.

$x^2 \geq \frac{9-5p}{2}$.

Ha $\frac{9-5p}{2} \leq 0$, akkor minden valós x esetén teljesül az egyenlőtlenség.

Ha $\frac{9-5p}{2} > 0$, akkor az $x^2 = \frac{9-5p}{2}$ egyenlet gyökei $x_1 = -\sqrt{\frac{9-5p}{2}}$; $x_2 = \sqrt{\frac{9-5p}{2}}$, így a megoldás $x \in \left]-\infty; -\sqrt{\frac{9-5p}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{9-5p}{2}}; \infty\right[$.

b) $3x^2 + 12 - 4p \leq 0$.

Megoldás

Rendezve az egyenlőtlenséget

$x^2 \leq \frac{4p-12}{3}$.

Ha $\frac{4p-12}{3} < 0$, azaz $p < 3$, akkor nincs megoldása az egyenlőtlenségnek.

Ha $\frac{4p-12}{3} = 0$, azaz $p = 3$, akkor az egyenlőtlenség $x = 0$ esetén teljesül.

Ha $\frac{4p-12}{3} > 0$, azaz $p > 3$, akkor az $x^2 = \frac{4p-12}{3}$ egyenlet gyökei $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4p-12}{3}}$, így az egyenlőtlenség megoldása $x \in \left[-\sqrt{\frac{4p-12}{3}}; \sqrt{\frac{4p-12}{3}}\right]$.

c) $(2p-3)x^2 - 1 \geq 0$.

Megoldás

Ha $2p - 3 = 0$, azaz $p = \frac{3}{2}$, akkor $-1 \geq 0$ adódik, így nincs megoldása az egyenlőtlenségnek.

Ha $2p - 3 < 0$, azaz $p < \frac{3}{2}$, akkor az egyenlőtlenség bal oldala negatív, ezért nincs megoldás.

Ha $2p - 3 > 0$, azaz $p > \frac{3}{2}$, akkor $x \in \left]-\infty; -\sqrt{\frac{1}{2p-3}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{1}{2p-3}}; \infty\right[$.

29. SZÖVEGES, GYAKORLATI FELADATOK I.

1. K1 Egy szám és a nála néggyel nagyobb szám szorzata 357. Melyik ez a két szám?

Megoldás

Jelöljük a kisebb számot x-szel. Ekkor

$x(x+4)=357$.

$x^2+4x-357=0$ egyenlet megoldása $x_1=17;\ x_2=-21$.

Két ilyen számpár van: 17 és 21, illetve –21 és –17.

2. K1 Három egymást követő természetes szám négyzetösszege 1325. Melyik ez a három szám?

Megoldás

Jelöljük a középső számot x-szel. Ekkor

$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=1325;$

$3x^2+2=1325;$

$x^2=441;$

$x_{1,2}=\pm 21.$

A természetes számok halmazán csak egy megoldás van, a három szám : 20; 21; 22.
A szövegbe történő behelyettesítéssel ellenőrizhetjük a kapott megoldást.

3. K2 Egy baráti társaság szállást foglalt egy hegyi panzióban. Együttesen 240 euróba került a szállás. Ketten nem tudtak elmenni, így az ő részüket is ki kellett fizetni. Ezért minden résztvevőnek az eredetileg meghatározott összegnél 4 euróval drágább volt a szállásköltség. Hányan vettek részt az összejövetelen, és mennyit kellett a szállásért fizetni?

Megoldás

Jelöljük x-szel az eredetileg jelentkezettek létszámát. Ekkor egy fő részére $\frac{240}{x}$ euróba került volna a szállás. Ha két fővel kevesebben mennek el, akkor $\frac{240}{x-2}$ lesz a szállásköltség egy résztvevőnek. Ezek alapján

$\frac{240}{x}+4=\frac{240}{x-2};\qquad x\neq 0;-2.$

Közös nevezőre hozva és rendezve

$x^2-2x-120=0$ egyenletet kapjuk.

Megoldásai $x_1=12;\ x_2=-10$. Eredetileg tehát 12-en jelentkeztek, valójában 10-en vettek részt a kiránduláson, és 1 főnek 24 eurót kellett fizetni.

4. K2 Kétfajta mandarinból vásároltunk a piacon. Az egyik fajtából 3200 Ft értékben, a másik fajtából 2400 Ft értékben. A második fajtájú 80 Ft-tal olcsóbb kg-onként, így ebből 4 kg-mal többet vettünk. Hány kg-ot vásároltunk az egyes fajtákból?

Megoldás

Legyen a drágább fajtából vásárolt mennyiség x kg, így a drágább fajtából $\frac{3200}{x}$ Ft-ba kerül egy kg, az olcsóbból $\frac{2400}{x+4}$ Ft a kg-onkénti ár.

Ekkor a felírható összefüggés

$\frac{2400}{x+4}+80=\frac{3200}{x};\qquad x\neq 0;-4.$

A közös nevezővel beszorozva és rendezve

$x^2-6x-160=0$ egyenletet kapjuk.

Megoldásai: $x_1=16;\ x_2=-10$.

Válasz: 16 kg-ot vásároltunk a drágább, 20 kg-ot az olcsóbb fajtájú mandarinból.

5. K2 Egy telefontársaság tarifacsomagja 4050 Ft. Egy akció keretében 3 Ft-tal csökkentették a hívás percdíját, így ezért az összegért 15 perccel többet lehet beszélni. Mennyi ideig lehet az akciós időszakban a tarifacsomagdíjért beszélni, és mennyi a beszélgetés percdíja?

Megoldás

Jelöljük az akció előtti percdíjat x-szel.
A szövegnek megfelelő összefüggés

$\frac{4050}{x} + 15 = \frac{4050}{x-3}$; $\quad x \neq 0; 3.$

$15x^2 - 45x - 12\,150 = 0$;

$x_1 = 30$; $x_2 = -27$.

Az akció előtt 30 Ft volt a percdíj, az akció időszakban 27 Ft/perc, és 4050 Ft-ért 150 percig lehet telefonálni.

30. SZÖVEGES, GYAKORLATI FELADATOK II.

1. K1 Hány oldalú az a konvex sokszög, amelyben 119 átló húzható?

Megoldás

Egy n oldalú sokszögbe $\frac{n(n-3)}{2}$ átló húzható.

$\frac{n(n-3)}{2} = 119$ egyenlet megoldásai: $n_1 = 17$; $n_2 = -14$.

A sokszög 17 oldalú.

2. K2 Egy nyelvvizsgára készülő diáknak 200 szót kellett megtanulnia a következő számonkérésig. Tudta, hogy két napig nem lesz ideje tanulni, ezért naponta öt szóval többet tanult meg a tervezettnél. Hány nap múlva lesz a számonkérés?

Megoldás

Ha x-szel jelöljük a naponta megtanulandó szavak számát a tervek szerint, akkor

$\frac{200}{x} = \frac{200}{x+5} + 2$; $\quad x \neq 0; -5$;

$x^2 + 5x - 500 = 0$;

$x_1 = 20$; $x_2 = -25$.

Válasz: 10 nap múlva lesz a számonkérés.

3. K1 Egy ruha árát két egymás utáni alkalommal emelték ugyanakkora %-kal, így a ruha ára 10 000 Ft-ról 14 000 Ft-ra emelkedett. Hány %-os volt az áremelés?

Megoldás

Jelöljük az áremelés mértékét p%-kal. Ekkor az első áremelés után $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$-szoros lesz az új ár, az újbóli áremelés $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$-szerese lesz az eredeti árnak.

$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 14\,000$;

$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{7}{5}$;

$1 + \frac{p}{100} = \pm\sqrt{\frac{7}{5}} \approx \pm 1{,}18$; $\quad p = 18$.

A feladat értelmezése alapján csak a pozitív szám lehet megoldás. Ez azt jelenti, hogy kb. 18%-os volt az áremelés mértéke.

4. K2 Egy kikötőbe két hajó érkezik, egyik északi irányból kétszer akkora sebességgel, mint a másik keleti irányból. Egy adott időpontban az északról érkező hajó 2700 m-re, a keletről érkező hajó 1250 m-re van a kikötőtől. $1\frac{2}{3}$ perc múlva a hajók 1300 m-nyire vannak egymástól. Mekkora a hajók sebessége?

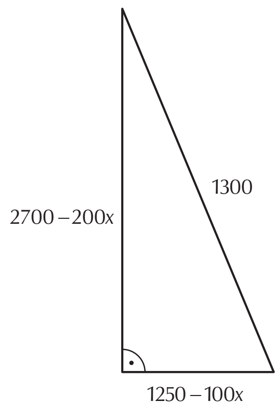
Megoldás

Legyen a lassúbb hajó sebessége $x\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, akkor a gyorsabbé $2x\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$1\frac{2}{3}$ perc = 100 s. A hajók által megtett út $(1250 - 100x)$ m; illetve $(2700 - 200x)$ m.

Rajzoljuk fel a hajók elhelyezkedését.
Írjuk fel Pitagorasz tételét a derékszögű háromszög oldalaira.
$(1250-100x)^2+(2700-200x)^2=1300^2$.
Átalakítva, rendezve kapjuk:
$20x^2 - 532x + 2865 = 0$;
$x_1 = 19{,}1$; $x_2 = 7{,}5$.

$19{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nem lehet a lassúbb hajó sebessége, mert akkor már 1350 m-nél többet tett volna meg 100 s alatt. Így a feladat megoldása: $7{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a lassabban közlekedő hajó, $15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a gyorsabban közlekedő hajó sebessége.

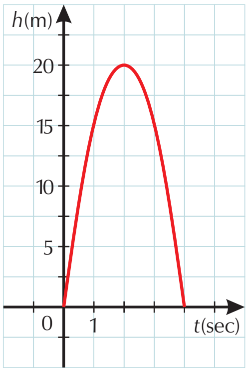


5. K2 *a)* Egy kavicsot 20 m/s kezdősebességgel függőleges irányban felfelé elhajítunk. Állapítsuk meg, hogyan függ a kavics föld felszínétől mért távolsága, s ábrázoljuk a távolságot az idő függvényében! (A közegellenállást elhanyagolhatjuk, $g \approx 10$ m/s².)

b) Oldjuk meg az előző feladatot, ha a kavicsot egy 10 méter magas ház tetejéről hajítjuk el, függőleges irányban felfelé!

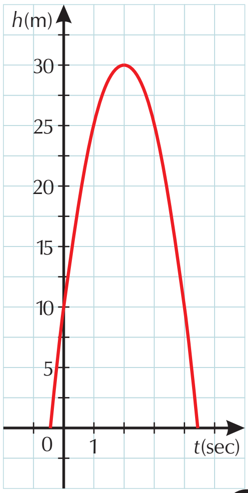
Megoldás

a) A távolság időfüggése $h = v_0 t - \frac{g}{2}t^2 = 20t - 5t^2$, ennek képe lefelé nyitott parabola.



b) A magasság időfüggése most $h = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2 = 10 + 20t - 5t^2$.

Teljes négyzetté alakítva:
$10 + 20t - 5t^2 = -5(t^2 - 4t - 2) = -5(t-2)^2 + 30$.



31. MÁSODFOKÚ EGYENLETRENDSZEREK

1. K2 Oldjuk meg az egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

a) $\left.\begin{array}{ll}(1) & xy = 28 \\ (2) & x + y = 11\end{array}\right\}.$

Megoldás

Fejezzük ki a (2) egyenletből y-t:
(3) $y = 11 - x$.
Behelyettesítve az első egyenletbe:
(1) $x(11 - x) = 28$, rendezéssel:
$0 = x^2 - 11x + 28$.
$x_1 = 4$, visszahelyettesítve (3)-ba: $y_1 = 7$.
$x_2 = 7$, visszahelyettesítve (3)-ba: $y_2 = 4$.
Tehát az egyenletrendszernek két megoldása van.

b) $\left.\begin{array}{ll}(1) & x^2 - xy - y^2 = 19 \\ (2) & x - y = 7\end{array}\right\}.$

Megoldás

(2) $x = y + 7$, behelyettesítve:
(1) $(y + 7)^2 - (y + 7)y - y^2 = 19$.
(1) $-y^2 + 7y + 30 = 0$.
$y_1 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 17$;
$y_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4$.
Tehát az egyenletrendszernek két megoldása van.

c) $\left.\begin{array}{ll}(1) & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8} \\ (2) & x + y = 12\end{array}\right\}.$

Megoldás

Kikötés: $x \neq 0,\ y \neq 0$.
(2) $y = 12 - x$, behelyettesítve:
(1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{12 - x} = 12$, rendezéssel
(1) $3x^2 - 36x + 96 = 0$.
$x_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 4$;
$x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 8$.
Tehát az egyenletrendszernek két megoldása van.

d) $\left.\begin{array}{ll}(1) & x + y = 6 \\ (2) & \frac{1 + x + x^2}{1 + y + y^2} = 3\end{array}\right\}.$

Megoldás

Kikötés: $1 + y + y^2 \neq 0$.
(1) $y = 6 - x$.
(2) $1 + x + x^2 = 3\left(1 + 6 - x + (6 - x)^2\right)$, rendezve
(2) $2x^2 - 40x + 128 = 0$.

$x_1 = 16 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -10;$

$x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 2.$

A kapott megoldások nem mondanak ellent a kikötésnek:

$1 - 10 + 100 \neq 0$, és $1 + 2 + 4 \neq 0$.

Tehát az egyenletrendszernek két megoldása van.

2. K2 Milyen valós számpárokra teljesülnek az alábbi egyenletrendszerek?

a) $\left.\begin{array}{ll}(1) & x^2 + y^2 = 25 \\ (2) & xy = 12\end{array}\right\}.$

Megoldás

Nyilván egyik szám sem lehet 0, mert szorzatuk 12, így $y = \dfrac{12}{x}$.

$(1) x^2 + \left(\dfrac{12}{x}\right)^2 = 25$, rendezéssel

$(1)\ x^4 - 25x^2 + 144 = 0.$

x^2-re másodfokú egyenletet kaptunk. Legyen $a = x^2$, ahol $a \geq 0$.

$a^2 - 25a + 144 = 0;$

$a_1 = 16$ és $a_2 = 9$.

Ha $a_1 = 16$, akkor $x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 4;\ y_1 = 3$, és $x_2 = -4;\ y_2 = -3$.

Ha $a_2 = 9$, akkor $x^2 = 9 \Rightarrow x_3 = 3;\ y_3 = 4$, és $x_4 = -3;\ y_4 = -4$.

Tehát az egyenletrendszernek négy megoldása van.

b) $\left.\begin{array}{ll}(1) & x + 2xy + y = 10 \\ (2) & x - 2xy + y = -2\end{array}\right\}.$

Megoldás

Összeadva az egyenletek megfelelő oldalait:

$2x + 2y = 8 \quad \Rightarrow \quad x + y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 4 - x$, behelyettesítve (1)-be:

$x + 2x(4 - x) + 4 - x = 10$, rendezéssel

$x^2 - 4x - 3 = 0;$

$x_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1;$

$x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 3.$

Tehát az egyenletrendszernek két megoldása van.

c) $\left.\begin{array}{ll}(1) & (x + y)(5 - y) = -4 \\ (2) & (x + y)(8 - x) = 40\end{array}\right\}.$

Megoldás

Mivel a bal oldali tényezők értéke biztosan nem 0, így osszuk el a (2) egyenletet az (1) egyenlettel.

(3) $\dfrac{8 - x}{5 - y} = -10$ (Itt $y \neq 5$, ez nem lehetne megoldás az első egyenlet miatt.)

$x = 58 - 10y$. Behelyettesítve (1)-be:

$(59 - 9y)(5 - y) = -4;$

$9y^2 - 103y + 294 = 0$, gyökei: $y_1 = 6$, $y_2 = \dfrac{49}{9}$. (3) visszahelyettesítve:

Ha $y_1 = 6$, akkor $x_1 = -2$.

Ha $y_2 = \dfrac{49}{9}$, akkor $x_2 = \dfrac{32}{9}$.

Ellenőrzéssel megállapíthatjuk, hogy a két megoldás kielégíti az egyenleteket.

3. K2 Egy kétjegyű szám négyszerese a számjegyei összegének, és kétszer akkora, mint a számjegyeinek szorzata. Melyik kétjegyű számról van szó?

Megoldás

Legyen a szám $\overline{xy}$ alakú.
Ekkor a szám felírható $\overline{xy} = 10x + y$ alakban.
A szövegből felírható összefüggések:
(1) $10x + y = 4(x + y)$, illetve
(2) $10x + y = 2xy$.
Fejezzük ki a (2)-ből y-t, majd helyettesítsük be az (1)-be. Ekkor
$10x(2x - 1) + 10x = 4x(2x - 1) + 40x$ egyenletet kapjuk.
Rendezve
$x(2x - 6) = 0$;
$x_1 = 0$ nem kapunk kétjegyű számot.
$x_2 = 3$ esetén a kétjegyű szám 36.
Ellenőrzés a szöveg alapján.

4. K2 Egy osztályból két színházi előadásra vásároltak jegyeket. Az első előadásra 30 000 Ft-ot, a második előadásra 26 400 Ft-ot fizettek a jegyekért. A második előadásra három diákkal kevesebb jelentkezett, és a második előadás jegyára 200 Ft-tal több volt, mint az első előadásra szóló jegy ára. Hányan jelentkeztek az egyes előadásokra, és mennyi volt a jegy ára?

Megoldás

Vezessük be a következő jelöléseket:

	Jelentkező tanulók száma	1 db jegy ára (Ft)
Első előadás	x	y
Második előadás	$x - 3$	$y - 2$

A szöveg alapján felírható összefüggések:
(1) $xy = 30\,000$;
(2) $(x - 3)(y + 200) = 26\,400$.
Fejezzük ki az első egyenletből y-t, majd helyettesítsük be a második egyenletbe.
$$(x - 3)\left(\frac{30\,000}{x} + 200\right) = 26\,400.$$
Rendezve:
$2x^2 + 30x - 900 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei $x_1 = -30$; $x_2 = 15$.

A szöveg értelmezése szerint csak a második megoldás lehet jó. Ekkor $y = \frac{30\,000}{15} = 2000$.

Így tehát az első előadásra 15-en jelentkeztek, a jegy ára 2000 Ft-ba került, a második előadásra 12-en fizettek, és a jegy ára 2200 Ft volt.

5. K2 Egy derékszögű háromszög területe 6750 cm^2, átfogója 195 cm. Mekkorák a befogói?

Megoldás

Jelöljük a derékszögű háromszög befogóit a, illetve b-vel.
Írjuk fel a Pitagorasz tételt, és a derékszögű háromszög területére vonatkozó összefüggést.
(1) $a^2 + b^2 = 195^2$;
(2) $\frac{ab}{2} = 6750$.
Megoldva az egyenletrendszert négy számpárt kapunk.
$a_1 = 75$; $b_1 = 180$.
$a_2 = 180$; $b_2 = 75$.
$a_3 = -75$; $b_3 = -180$.
$a_4 = -180$; $b_4 = -75$.

A háromszög oldalai pozitív számok, ezért az utolsó két számpár nem lehet a szöveges feladat megoldása.

Az első két számpár a háromszög befogóinak felcserélésével kapható meg, ez nem ad különböző megoldásokat.

Tehát egy ilyen derékszögű háromszög van, melynek befogói 75 cm, és 180 cm.

6. E1 Egy háromszög kerülete 24 cm, egyik oldalának hossza 8 cm, területe $12\sqrt{5}$ cm². Mekkora a háromszög másik két oldala?

Megoldás

Használjuk a háromszög területét, kerületét és oldalait tartalmazó összefüggést, a Heron képletet: $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol s a kerület fele.

Legyen a $c = 8$ cm.

Ekkor a kerület

(1) $24 = a + b + 8$.

A terület

(2) $12\sqrt{5} = \sqrt{12 \cdot 4(12-a)(12-b)}$.

Az (1) és (2) megoldásából kapjuk, hogy $a_1 = 7$, $b_1 = 9$, illetve $a_2 = 9$, $b_2 = 7$.

A háromszög másik két oldala 7 cm és 9 cm.

DIOFANTOSZI EGYENLETEK (OLVASMÁNY)

1. K2 Hány olyan négyjegyű természetes szám van, amely 4-gyel osztva 1, 5-tel osztva pedig 2 maradékot ad? Adjuk meg képlettel is a számokat!

Megoldás

A 4-gyel osztva 1 maradékot adó számok sorozata 1001, 1005, 1009, …; az 5-tel osztva 2 maradékot adó számok sorozata 1002, 1007, 1012, …. A legkisebb olyan négyjegyű szám, amely mindkét tulajdonsággal rendelkezik, 1017. 4 és 5 legkisebb közös többszöröse 20, a keresett számok $1017 + 20k$ alakúak, ahol $k = 0, 1, 2, \dots, 449$. 450 darab megfelelő szám van.

2. E1 Egy tepsi sült tésztát a tepsiben daraboltunk fel, annak két szélével párhuzamos vágásokkal. A szélek mentén keletkező darabok a „rosszak”, a többi süti a „jó”. Hány vágás esetén lesz ugyanannyi jó és rossz sütemény?

Megoldás

Tegyük fel, hogy a tepsi szélén x, illetve y darab sütemény keletkezett (x, y 1-nél nagyobb egész számok). Ekkor a sütemények darabszáma $x \cdot y$, a jó sütemények száma $(x-2)(y-2)$, a rosszaké $2(x-1) + 2(y-1)$. Innen

$(x-2)(y-2) = 2(x-1) + 2(y-1)$,

$xy - 4x - 4y + 8 = 0$,

$(x-4)(y-4) = 8$.

A tényezők a 8 pozitív társosztói, így $x - 4 \in \{1; 2; 4; 8\}$, azaz $x \in \{5; 6; 8; 12\}$. A lehetséges méretek – a sorrendtől eltekintve – 5×12 és 6×8; ehhez pedig $4 + 11 = 15$, illetve $5 + 7 = 12$ vágás kell.

Ne felejtsük el az ellenőrzést!

3. K2 Melyek azok a kétjegyű számok, amelyeknél maga a szám 17-tel nagyobb, mint a szám számjegyeinek szorzata?

Megoldás

Az $\overline{ab}$ számra felírható a $10a + b = ab + 17$ egyenlet. Ebből

$a(b-10) = b - 17$,

$a = \frac{b-17}{b-10} = 1 - \frac{7}{b-10} = 1 + \frac{7}{10-b}$.

Mivel a, b számjegyek, $10 - b = 1$ vagy $10 - b = 7$ lehetséges; innen $b = 9$ ($a = 8$), vagy $b = 3$ ($a = 2$).
A keresett szám a 89 vagy 23.
Ne felejtsük el az ellenőrzést!

4. E1 Oldjuk meg az alábbi másodfokú diofantoszi egyenleteket! (x, y egész számok)

a) $x^2 - 3y = 17$;

Megoldás

$x^2 = 3y + 17$ nem lehetséges. A jobb oldal 3-mal osztva 2-t ad maradékul, míg a négyzetszámok 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot adnak.

b) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 95$;

Megoldás

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$, innen

$x + 1$	0	±6	±8	±10
$y - 2$	±10	±8	±6	0
x	–1	–7 vagy 5	–9 vagy 7	–11 vagy 9
y	–8 vagy 12	–6 vagy 10	–4 vagy 8	2

A megoldást adó $(x; y)$ számpárok száma 12.

c) $xy + 2x - 3y = 6$;

Megoldás

$(x - 3)(y + 2) = 0$, $(x; y) = (3; -2)$.

d) $xy + 2x - 3y = 8$;

Megoldás

$(x - 3)(y + 2) = 2$.

$x - 3$	2	1	–2	–1
$y + 2$	1	2	–1	–2
x	5	4	1	2
y	–1	0	–3	–4

A megoldást adó $(x; y)$ számpárok száma 4.

e) $3xy - 2x + 4y = 5$;

Megoldás

$(3x + 4)(3y - 2) = 7$.

$3x + 4$	1	7	–1	–7
$3y - 2$	7	1	–7	–1
x	–1	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{11}{3}$
y	3	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$

Egész gyököket keresünk, két megoldás van.
Ellenőrzés: $3 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 5$ és $3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 5$ valóban.

f) $x^2 + xy - x - 2y = 7.$

Megoldás

$$y = \frac{7 + x - x^2}{x - 2} = \frac{(x-2)(-x-1)+5}{x-2} = -x - 1 + \frac{5}{x-2}.$$

$x-2$	1	5	–1	–5
x	3	7	1	–3
y	1	–7	–7	1

Az ellenőrzés mutatja, hogy mind a négy számpár megoldás.

5. E1 Bizonyos számú veréb röpköd egy fa körül. Ha a fa minden ágán egy veréb ül, akkor *n* verébnek nincs helye. Ha minden ágra *n* veréb ül, akkor *n* ágra nem jut veréb. Hány ága van a fának és hány veréb van?

Megoldás

Jelölje *v* a verebek, *g* pedig az ágak számát! Ekkor a

$$\left.\begin{array}{l} v = g + n \\ v = n(g-n) \end{array}\right\}$$

egyenletrendszer három ismeretlent tartalmaz, de a pozitív egész számok halmazán kell megoldanunk.

$$g + n = n(g-n) \;\Rightarrow\; g = \frac{n^2+n}{n-1} = n + 2 + \frac{2}{n-1}.$$

$n-1$	1	2
n	2	3
g	6	6
v	8	9

6 ág van és 8 vagy 9 veréb röpköd.

6. A derékszögű koordináta-rendszer hány rácspontján mennek át az alábbi függvények grafikonjai? ($P(x; y)$ rácspont, ha koordinátái egész számok.)

K2 $a(x) = \frac{2x+2}{x-1}$; **K2** $b(x) = \frac{x^2+4}{x+1}$; **E1** $c(x) = \frac{5x-1}{2x+3}$.

Megoldás

K2 $a(x) = \frac{2(x-1)+4}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1}$; **K2** $b(x) = \frac{(x+1)(x-1)+5}{x+1} = x - 1 + \frac{5}{x+1}$.

A görbék annyi rácsponton mennek át, ahány egész osztója van a törtek konstans számlálóinak. Az $a(x)$ függvénygörbe 6, a $b(x)$ függvénygörbe 4 rácsponton megy át.

Megoldás

E1 $y = \frac{5x-1}{2x+3} = \frac{\frac{5}{2}(2x+3) - \frac{17}{2}}{2x+3} = \frac{5}{2} - \frac{\frac{17}{2}}{2x+3}$, innen $2y = 5 - \frac{17}{2x+3}$.

$2x+3$	1	17	–1	–17
$2y$	–12	4	22	6
x	–1	7	–2	–10
y	–6	2	11	3

A $c(x)$ görbe 4 rácsponton megy át.

32. SZÉLSŐÉRTÉK-PROBLÉMÁK, NEVEZETES KÖZEPEK

1. K1 Határozzuk meg a következő két-két szám számtani, illetve mértani közepét!

a) 4, 10.

Megoldás

Számtani közepe: $\frac{a+b}{2} = 7$, mértani közepe $\sqrt{ab} = \sqrt{40}$; $a; b > 0$.

b) –2, 8.

Megoldás

Számtani közepe 3, mértani közepe nem számolható, mert az egyik negatív szám.

c) $\sqrt{6}$, $\sqrt{15}$.

Megoldás

Számtani közepe $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{2} \approx 3{,}16$, mértani közepe $\sqrt{\sqrt{6}\sqrt{15}} = \sqrt{\sqrt{90}} = \sqrt[4]{90} \approx 3{,}08$.

2. E1 Határozzuk meg az alábbi számok harmonikus és négyzetes közepét, ha a számok

a) 3, 18.

Megoldás

Harmonikus közép $H_{a,b} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{36}{7}$,

a négyzetes közép $N_{a,b} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{3^2+18^2}{2}} = \sqrt{\frac{333}{2}} \approx 12{,}9$.

b) –5, 30.

Megoldás

Harmonikus közepe $\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{-300}{25} = -12$,

négyzetes közép $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{(-5)^2+30^2}{2}} = \sqrt{\frac{925}{2}} \approx 21{,}5$.

c) $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$.

Megoldás

Harmonikus közepe $\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}} = \frac{8}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$,

a négyzetes közép $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}^2+\sqrt{8}^2}{2}} = \sqrt{5} \approx 2{,}236$.

3. K1 Két pozitív szám számtani közepe 42, az egyik szám 7. Mekkora a másik szám?

Megoldás

$\frac{7+b}{2} = 42; \qquad b = 77.$

4. K1 Két pozitív szám mértani közepe $\sqrt{80}$, az egyik szám 12. Mekkora a másik szám?

Megoldás

$\sqrt{12 \cdot a} = \sqrt{80};$

$a = \frac{20}{3}.$

5. E1 Két pozitív szám négyzetes közepe 28, az egyik szám 24. Mekkora a másik szám?

Megoldás

$\sqrt{\frac{a^2+24^2}{2}} = 28;$

$a^2 = 992;$

$a = \sqrt{992} \approx 31{,}49.$

6. K2 Két szám összege 10. Mekkora a számok négyzetösszegének minimuma?

Megoldás

Jelöljük a számokat x és $(10-x)$-szel.
Négyzetösszegük:
$N(x) = x^2 + (10-x)^2 = 2x^2 - 20x + 100.$
Teljes négyzetté alakítás után kapjuk, hogy
$N(x) = 2(x-5)^2 + 50.$
A kifejezés akkor minimális, ha a négyzetes tag 0, azaz $x = 5$, ekkor a minimumérték 50.

7. K2 Egy 120 cm kerületű egyenlő szárú háromszög oldalai fölé négyzeteket rajzolunk. Hogyan válasszuk meg a háromszög oldalait, hogy a négyzetek területének összege minimális legyen?

Megoldás

Legyen a háromszög alapja a, szárai b hosszúságúak. Ekkor a kerülete
$K = a + 2b = 120;$
$a = 120 - 2b.$
Az oldalak fölé rajzolt négyzetek területének összegét jelölje $N(x)$.
$N = b^2 + b^2 + (120-2b)^2.$
Átalakítva
$N = 6b^2 - 480b + 14\,400;$
$N = 6(b-40)^2 + 4800$, akkor minimális, ha a négyzetes tag 0, azaz $b = 40$. Ekkor $a = 40$.
Az egyenlő szárú háromszögek fölé rajzolt négyzetek területösszege szabályos háromszög esetén lesz a legkisebb, és ekkor a területösszeg 4800 cm^2.

8. K2 A 250 m kerületű téglalapok közül milyen oldalhosszúságúnak lesz a területe maximális?

Megoldás

A téglalap kerülete
$K = 2(a+b) = 250$, és területe $T = ab$,
$a + b = 125.$
Használjuk fel két pozitív szám számtani és mértani közepe közötti összefüggést.
$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}.$

Emeljünk négyzetre. Mivel mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab.$

$\left(\frac{125}{2}\right)^2 \geq ab = T.$

Azt kaptuk, hogy a terület $\left(\frac{125}{2}\right)^2 = 3906{,}25$-nál nem nagyobb, legnagyobb értéke $\left(\frac{125}{2}\right)^2$. Ez akkor teljesül, ha $a = b$, azaz a téglalap négyzet, oldalhosszúsága $\frac{125}{4} = 31{,}25$ m.

9. E1 Téglalap alakú telket vásárolunk. A telek nagysága 800 m². Hogyan válasszuk meg a telek méreteit, ha elsődleges szempont, hogy a bekerítésnél a lehető legkevesebb kerítést kelljen építeni?

Megoldás

A téglalap területe $T = ab = 800$.
Használjuk fel két pozitív szám számtani és mértani közepe közötti összefüggést.

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab};$

$a + b = 2\sqrt{ab};$

$a + b \geq 2\sqrt{800};$

$a + b \geq 40\sqrt{2};$

$2(a + b) \geq 80\sqrt{2}.$

A kerület értéke $80\sqrt{2}$-nél nem kisebb. Legkisebb értéke $80\sqrt{2}$, ez akkor teljesül, ha $2a = 2b = = 40\sqrt{2}$, azaz a kerület akkor minimális, ha a téglalap négyzet, oldalai $20\sqrt{2} \approx 28{,}28$ m hosszúak.

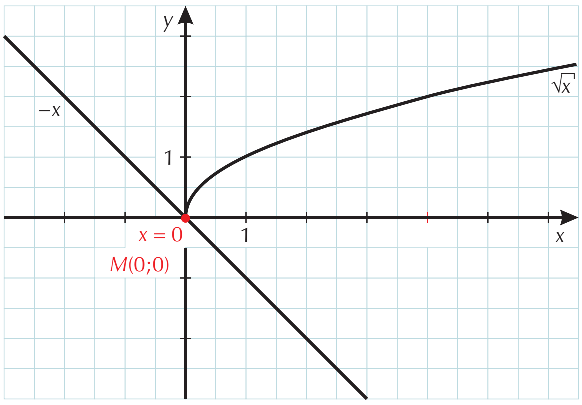
33. NÉGYZETGYÖKÖS EGYENLETEK I.

1. Oldjuk meg grafikusan és algebrai úton is az egyenleteket!

K1 *a)* $\sqrt{x} = -x.$

Megoldás

Algebrai úton:
Kikötések: $x \geq 0$, a gyök alatt nem állhat negatív szám, $-x \geq 0$, azaz $x \leq 0$, mert egy szám négyzetgyöke nemnegatív.
Az értelmezési tartomány egyetlen eleme a 0, ez kielégíti az egyenletet.

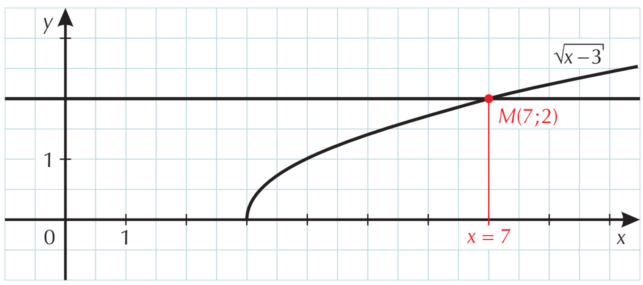


K1 *b)* $\sqrt{x-3} = 2.$

Megoldás

Algebrai úton:
Kikötés: $x - 3 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 3$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

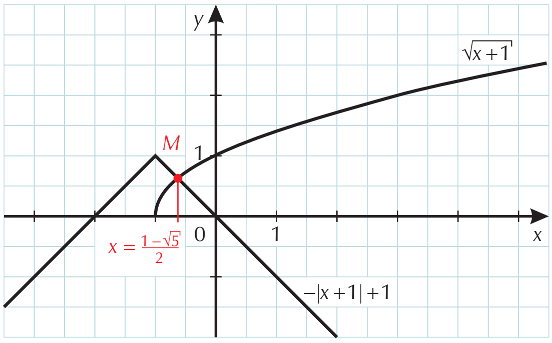
$\sqrt{x-3} = 2;$



$x - 3 = 4;$
$x = 7.$
Ellenőrzés: $\sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2.$

E1 *c)* $\sqrt{x+1} = -|x+1| + 1.$

Megoldás



A grafikus megoldásból annyi derül ki, hogy a feladatnak egy megoldása van. A pontos értéket nem lehet megállapítani.
Algebrai úton:
Kikötés: $x \geq -1$, illetve $1 - |x+1| \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 0$, összegezve: $-1 \leq x \leq 0$.
Ezen az alaphalmazon $-|x+1| + 1 = -(x+1) + 1 = -x$.
Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:
$\sqrt{x+1} = -|x+1| + 1;$
$x + 1 = (-x)^2;$
$0 = x^2 - x - 1.$
$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, a feltételeket csak az $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ elégíti ki.

2. K1 Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{3x-1} = 8.$

Megoldás

Kikötés: $x \geq \frac{1}{3}$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$\sqrt{3x-1} = 8;$
$3x - 1 = 64;$
$x = \frac{65}{3}$, megfelel meg a kikötéseknek.

b) $\sqrt{5-2x} = 1.$

Megoldás

Kikötés: $x \leq \frac{5}{2}$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$\sqrt{5-2x} = 1;$
$5 - 2x = 1;$
$2 = x$, eleme az alaphalmaznak.

c) $\sqrt{\sqrt{x+6}}=-4.$

Megoldás

Nincs megoldás a valós számok halmazán, mert valós szám négyzetgyöke nem lehet negatív.

d) $\sqrt{\dfrac{2x+7}{3}}=10.$

Megoldás

Kikötés: $\dfrac{2x+7}{3}\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq -\dfrac{7}{2}$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$\sqrt{\dfrac{2x+7}{3}}=10;$

$\dfrac{2x+7}{3}=100;$

$x = 146{,}5$, megfelel a kikötéseknek.

e) $\sqrt{(x-4)(2x-3)}=0.$

Megoldás

Kikötés: $(x-4)(2x-3)\geq 0$ teljesül, ha a tényezők azonos előjelűek: $x\leq \dfrac{3}{2}$ vagy $x\geq 4$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$\sqrt{(x-4)(2x-3)}=0;$

$(x-4)(2x-3)=0$, ha $x=4$, vagy $x=\dfrac{3}{2}$.

(Rövidebb megoldás: egy szám négyzetgyöke 0, ha maga a szám is 0, ebből rögtön következik: $(x-4)(2x-3)=0$.)

f) $\sqrt{x^2-10x+25}=x-5.$

Megoldás

Kikötések:

$x^2-10x+25\geq 0$, minden valós x esetén igaz, mivel $x^2-10x+25=(x-5)^2$.

A jobb oldal miatt: $x-5\geq 0$, azaz $x\geq 5$.

Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$\sqrt{x^2-10x+25}=x-5;$

$|x-5|=(x-5).$

Ez csak akkor teljesülhet, ha $x\geq 5$.

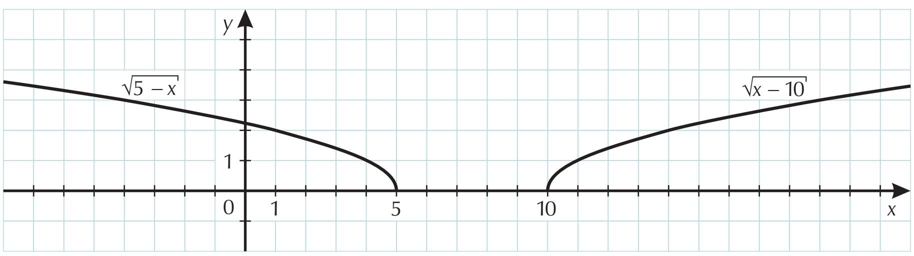
3. K2 Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

Megjegyzés: grafikus megoldással is vizsgálhatjuk az egyenleteket.

a) $\sqrt{5-x}=\sqrt{x-10}.$

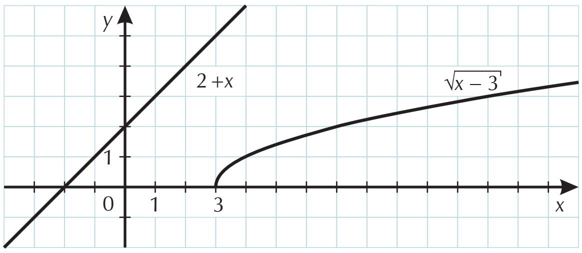
Megoldás

Kikötések: $x\leq 5$, és $x\geq 10$. Nincs olyan valós szám, mely megfelel a kikötéseknek, tehát az egyenletnek nincs megoldása.



b) $\sqrt{x-3} = 2 + x$.

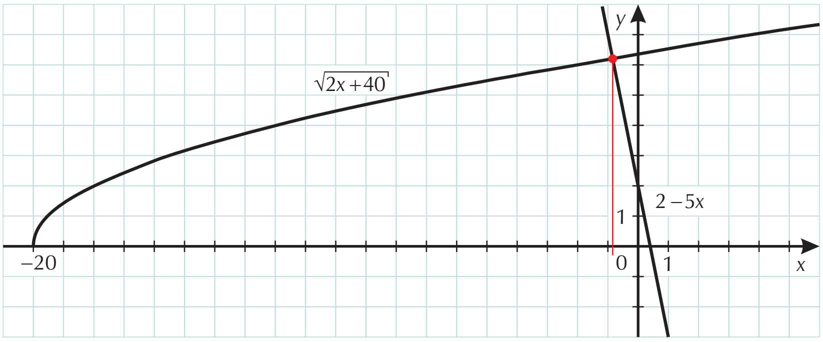
Megoldás



Kikötések: $x \geq 3$, és $x \geq -2$, összegezve: $x \geq 3$.
Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:
$\sqrt{x-3} = 2 + x$;
$x - 3 = 4 + 4x + x^2$;
$0 = x^2 + 3x + 7$.
Mivel a diszkrimináns negatív, ezért az egyenletnek nincs valós megoldása.

c) $2 - 5x = \sqrt{2x+40}$.

Megoldás

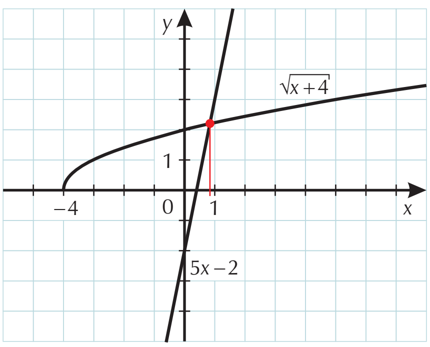


Kikötések: $x \leq \frac{2}{5}$ és $x \geq -20$, összevetve: $-20 \leq x \leq \frac{2}{5}$.
Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:
$2 - 5x = \sqrt{2x+40}$;
$4 - 20x + 25x^2 = 2x + 40$;
$25x^2 - 22x - 36 = 0$;
$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{4084}}{50}$, csak az $x = \frac{22 + \sqrt{4084}}{50}$ felel meg a kikötéseknek.

d) $5x - 2 = \sqrt{x+4}$.

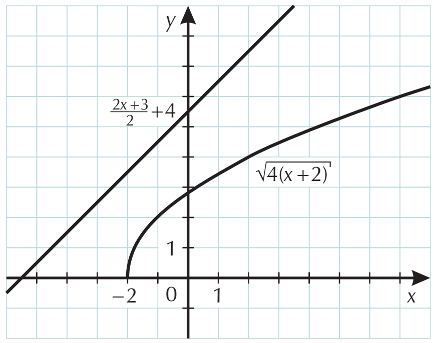
Megoldás

Kikötések: $x \geq \frac{2}{5}$ és $x \geq -4$, összevetve: $x \geq \frac{2}{5}$.
Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:
$5x - 2 = \sqrt{x+4}$;
$25x^2 - 20x + 4 = x + 4$;
$25x^2 - 21x = 0$;
$x(25x - 21) = 0$.
$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{21}{25}$, csak az $x_2 = \frac{21}{25}$ felel meg a kikötéseknek.



e) $\dfrac{2x+3}{2}+4=\sqrt{4(x-2)}$.

Megoldás



Kikötések: $x \geq -\dfrac{11}{2}$ és $x \geq 2$, összevetve: $x \geq 2$.

$\dfrac{2x+11}{2}=\sqrt{4(x-2)}$;

$\dfrac{4x^2+44x+121}{4}=4x-8$;

$4x^2+28x+153=0$.

Mivel a diszkrimináns negatív, ezért az egyenletnek nincs valós megoldása.

4. K2 Létezik-e racionális szám megoldása az egyenleteknek?

a) $\sqrt{x^2-16}=x-4$.

Megoldás

Kikötés: $x \geq 4$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$\sqrt{x^2-16}=x-4$;

$x^2-16=x^2-8x+16$;

$x=4$, racionális szám, megfelel meg a kikötéseknek.

b) $\sqrt{x^2+2x-15}=x+5$.

Megoldás

Kikötések.

$x^2+2x-15 \geq 0$, ha $x \leq -5$, vagy $x \geq 3$, illetve $x \geq -5$.

Összevetve: $x=-5$, vagy $x \geq 3$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$\sqrt{x^2+2x-15}=x+5$;

$x^2+2x-15=x^2+10x+25$;

$x=-5$ racionális szám, megfelel meg a kikötéseknek.

c) $\sqrt{x+\dfrac{x-1}{2}}=\sqrt{2x}$.

Megoldás

Kikötések:

$x+\dfrac{x-1}{2} \geq 0$, azaz $x \geq \dfrac{1}{3}$ és $x \geq 0$, összevetve: $x \geq \dfrac{1}{3}$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$\sqrt{x+\dfrac{x-1}{2}}=\sqrt{2x}$;

$\dfrac{3x-1}{2}=2x$;

$x=-1$. Mivel nem felel meg a kikötéseknek, ezért nincs megoldás a valós számok halmazán.

d) $\sqrt{x(2x-5)+2} = \sqrt{x^2+2x+3}$.

Megoldás

Kikötések:

$x(2x-5)+2 \geq 0$, azaz $x \leq \frac{1}{2}$, vagy $x \geq 2$.

$x^2+2x+3 \geq 0$, minden valós számra igaz.

Összevetve: $x \leq \frac{1}{2}$, vagy $x \geq 2$.Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$\sqrt{x(2x-5)+2} = \sqrt{x^2+2x+3}$;

$2x^2-5x+2 = x^2+2x+3$;

$x^2-7x-1=0$;

$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$ nem racionális számok, tehát nincs megoldás az alaphalmazon.

34. NÉGYZETGYÖKÖS EGYENLETEK II.

Emelt szint

1. E1 Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x-3} + \sqrt{4x} = 5$.

Megoldás

Kikötés: $x \geq 3$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$\sqrt{x-3} + \sqrt{4x} = 5$;

$x-3+4x+2\sqrt{4x(x-3)} = 25$;

$2\sqrt{4x(x-3)} = -5x+28$.

Újabb kikötés a négyzetre emelés előtt: $-5x+28 \geq 0$, azaz $x \leq \frac{28}{5}$.

Összevetve a már meglevő kikötéssel: $3 \leq x \leq \frac{28}{5} = 5{,}6$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$16x(x-3) = 25x^2 - 280x + 784$;

$x_1 = \frac{200}{9}$; $x_2 = \frac{32}{9}$.

A kapott gyökök közül csak $x_2 = \frac{32}{9}$ felel meg a kikötéseknek.

b) $\sqrt{2x+9} + \sqrt{4-x} = 5$.

Megoldás

Kikötések: $x \geq -\frac{9}{2}$ és $x \leq 4$, összevetve: $-\frac{9}{2} \leq x \leq 4$.Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$2x+9+4-x+2\sqrt{(2x+9)(4-x)} = 25$;

$2\sqrt{(2x+9)(4-x)} = 12-x$.

Újabb kikötés a négyzetre emelés előtt: $x \leq 12$, nem befolyásolja az eddigi alaphalmazt.

$4(2x+9)(4-x) = 144-24x+x^2$;

$x_1 = 0$; $x_2 = \frac{20}{9}$, mindkét gyök megfelel meg a kikötéseknek.

c) $\sqrt{4x+9}-\sqrt{x-1}=4.$

Megoldás

Rendezéssel kezdjük, hogy ne különbség legyen az egyik oldalon:
$\sqrt{4x+9}=\sqrt{x-1}+4.$

Kikötés: $x \geq -\frac{9}{4}$ és $x \geq 1$, összevetve: $x \geq 1$.

$4x+9=x-1+16+8\sqrt{x-1};$

$3x-6=8\sqrt{x-1}.$

Újabb kikötés a négyzetre emelés előtt: $x \geq 2$.
Összevetve az eredeti kikötéssel: $x \geq 2$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$9x^2-36x+36=64(x-1);$

$x_1=\frac{10}{9};\ x_2=10.$

Csak az $x_2=10$ felel meg a kikötéseknek.

d) $\sqrt{x+7}-\sqrt{5x+6}=-1.$

Megoldás

Rendezéssel kezdjük, hogy ne különbség legyen az egyik oldalon:
$\sqrt{x+7}=\sqrt{5x+6}-1.$

Kikötések: $x \geq -7$ és $x \geq -\frac{6}{5}$, összevetve: $x \geq -\frac{6}{5}$.

$x+7=5x+6+1-2\sqrt{5x+6};$

$4x=2\sqrt{5x+6}.$

Újabb kikötés a négyzetre emelés előtt: $x \geq 0$, összevetve az előzővel: $x \geq 0$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$4x^2-5x-6=0.$

A gyökök közül, csak az $x=\frac{1}{2}$ felel meg a kikötéseknek.

2. E1 Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x+\sqrt{3x+1}}=3.$

Megoldás

Kikötés: $x \geq -\frac{1}{3}$, illetve $x+\sqrt{3x+1} \geq 0.$

$x+\sqrt{3x+1}=9;$

$\sqrt{3x+1}=9-x.$

Újabb kikötés a négyzetre emelés előtt: $x \leq 9$.

$3x+1=81-18x+x^2;$

$x_1=16;\ x_2=5.$

Az $x_1=16$ nem felel meg az összevont kikötésnek, még ellenőriznünk kell, hogy $x_2=5$ esetén teljesül-e:
$x+\sqrt{3x+1} \geq 0.$ $5+\sqrt{3\cdot 5+1}=9 \geq 0$, tehát az egyenlet egyetlen megoldása: $x=5$.

b) $\sqrt{2x-\sqrt{x+1}}=1.$

Megoldás

Az előző feladat megoldásmenetét alkalmazva ($x_1=0$ hamis gyök) az egyetlen megoldás: $x=\frac{5}{4}$.

3. E1 Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{10x+6}$.

Megoldás

Kikötések: $x\geq\frac{1}{5}$, $x\geq-3$, $x\geq-\frac{3}{5}$, összegezve: $x\geq\frac{1}{5}$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$5x-1+x+3+2\sqrt{(5x-1)(x+3)}=10x+6;$

$2\sqrt{(5x-1)(x+3)}=4x+4.$

Újabb kikötés a négyzetre emelés előtt: $x\geq-1$, nem befolyásolja az eddigi alaphalmazt.

$x^2+6x-7=0.$

Csak az $x=1$ felel meg a kikötéseknek.

b) $\sqrt{4x-1}-\sqrt{2x+4}=\sqrt{2x-5}$.

Megoldás

Rendezéssel kezdjük, hogy ne különbség legyen az egyik oldalon:

$\sqrt{4x-1}=\sqrt{2x+4}+\sqrt{2x-5}$.

Kikötések: $x\geq\frac{1}{4}$, $x\geq-2$, $x\geq\frac{5}{2}$, összevetve: $x\geq\frac{5}{2}$.

Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$4x-1=2x+4+2x-5+2\sqrt{(2x+4)(2x-5)};$

$0=2\sqrt{(2x+4)(2x-5)}.$

$x_1=-2$ (hamis gyök), $x_2=\frac{5}{2}$ megfelel meg a kikötéseknek.

4. E1 Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^2+x-3+\sqrt{x^2+x}=0.$

Megoldás

Kikötés: $x^2+x\geq 0$, azaz $x\leq-1$, vagy $x\geq 0$.

Vezessünk be új ismeretlent: $\sqrt{x^2+x}=y$, ahol $y\geq 0$. Ekkor:

$y^2+y-3=0;$

$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, $y\geq 0$ miatt csak az $y_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ felel meg.

Visszahelyettesítve:

$\sqrt{x^2+x}=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, négyzetre emelve, majd rendezve:

$2x^2+2x-7+\sqrt{13}=0;$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{15-2\sqrt{13}}}{2}$, mindkét gyök megfelel a feltételeknek.

b) $x^2+x+\sqrt{x^2+x+7}=5.$

Megoldás

Kikötés: $x^2+x+7\geq 0.$

$x^2+x+7=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{4}$, tehát minden valós szám esetén teljesül a feltétel.

Vezessünk be új ismeretlent: $\sqrt{x^2+x+7}=y$, ahol $y\geq 0$. Ekkor

$y^2-7+y=5.$

A feltételnek az $y=\frac{-1+\sqrt{145}}{2}$ felel meg. Visszahelyettesítve:

$\sqrt{x^2+x+7}=\frac{-1+\sqrt{145}}{2};$

$x^2+x-66+\sqrt{145}=0;$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{241-4\sqrt{165}}}{2}$ az egyenlet két megoldása, mivel ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre.

5. K2 Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{(x-4)^2}+x-4=4-x.$

Megoldás

$|x-4|+x-4=4-x.$

$|x-4|=8-2x$, ahol teljesül a $8-2x\geq 0$, $x\leq 4$ feltétel. Ekkor $|x-4|=4-x$, tehát

$4-x=8-2x \quad\Rightarrow\quad x=4.$

Ez valóban kielégíti az egyenletet.

b) $\sqrt{(2x+3)(2x-3)}-4x^2+9=0.$

Megoldás

$\sqrt{(2x+3)(2x-3)}=4x^2-9.$

Kikötés: $4x^2\geq 9$ miatt $x\leq -\frac{3}{2}$, vagy $x\geq\frac{3}{2}$.

Legyen $\sqrt{(2x+3)(2x-3)}=y$, ekkor

$y=y^2 \quad\Rightarrow\quad y=0$, vagy $y=1$.

Ha $y=0$: $\sqrt{(2x+3)(2x-3)}=0$, akkor $x_{1,2}=\pm\frac{3}{2}$, megfelelnek a feltételeknek.

Ha $y=1$: $\sqrt{(2x+3)(2x-3)}=1$, akkor $x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$, megfelelnek a feltételeknek.

c) $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}=4.$

Megoldás

Kikötés: $x\geq 2.$

Vegyük észre a gyök alatti teljes négyzetet: $(\sqrt{x-2}+1)^2=x-1+2\sqrt{x-2}$.

$|\sqrt{x-2}+1|=4.$

1. eset $\sqrt{x-2}+1=4$, ha $x=11$, ez megfelel a feltételnek.

2. eset $\sqrt{x-2}+1=-4 \Rightarrow \sqrt{x-2}=-5$, ami ellentmondás.

35. NÉGYZETGYÖKÖS EGYENLŐTLENSÉGEK

Emelt szint

1. E1 Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket grafikusan, majd algebrai úton is a valós számok halmazán!

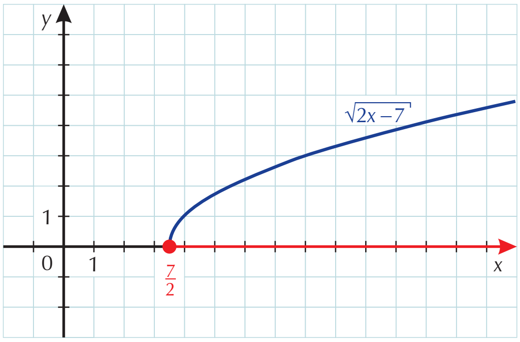
a) $\sqrt{2x-7} \geq 0$.

Megoldás

Grafikus megoldással:

Kikötés: $2x-7 \geq 0$, azaz $x \geq \frac{7}{2}$.

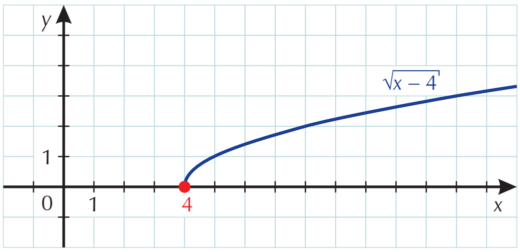
Ezen az alaphalmazon azonos egyenlőtlenség, tehát a megoldás: $x \geq \frac{7}{2}$.



b) $\sqrt{x-4} \leq 0$.

Megoldás

Grafikus megoldással:
Kikötés: $x \geq 4$.
Egy megoldás van: $x = 4$, mert egy szám négyzetgyöke nemnegatív.



c) $\sqrt{5-2x} \geq 1$.

Megoldás

Kikötés: $x \leq \frac{5}{2}$.

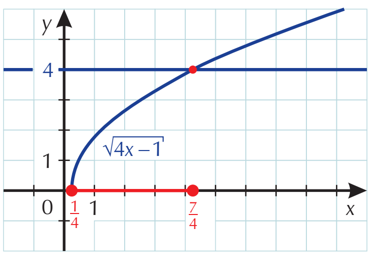
Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:
$5-2x \geq 1$;
$x \leq 2$.
Összevetve a kikötéssel, megoldásunk $x \leq 2$.

d) $4 \geq \sqrt{4x-1}$.

Megoldás

Grafikus megoldással:

Kikötés: $x \geq \frac{1}{4}$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:
$16 \geq 4x-1$;
$x \leq \frac{17}{4}$.



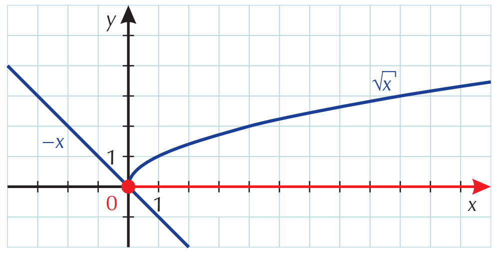
Összevetve a kikötéssel, megoldásunk $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{17}{4}$.

2. E1 Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán! Választhatunk grafikus megoldást is.

a) $\sqrt{x} > -x$.

Megoldás

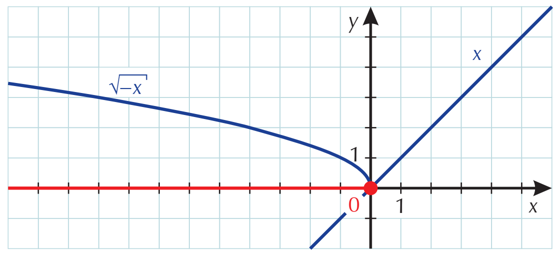
Kikötés: $x \geq 0$. Megoldás: $x > 0$.
Grafikus megoldással:



b) $\sqrt{-x} \leq x$.

Megoldás

Kikötés: $x \leq 0$. Megoldás: $x = 0$.
Grafikus megoldással:



c) $\sqrt{x-9} \geq x-5$.

Megoldás

Kikötés: $x \geq 9$, ekkor a jobb oldal pozitív. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$x - 9 \geq x^2 - 10x + 25$;

$0 \geq x^2 - 11x + 34$.

Mivel a jobb oldal diszkriminánsa negatív, így minden x-re $x^2 - 11x + 34$ pozitív. Tehát nincs megoldás a valós számok halmazán.

d) $\sqrt{2(x-3)} \leq 6 - 4x$.

Megoldás

Kikötés: $x \geq 3$. Mivel a bal oldal értéke nemnegatív, a jobb oldal értéke nem kisebb ennél, ezért $6 - 4x \geq 0$, azaz $x \leq \frac{3}{2}$. Nincs megoldás a valós számok halmazán.

3. E1 Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{3x-2} \leq \sqrt{x+1}$.

Megoldás

Kikötés: $x \geq \frac{2}{3}$, $x \geq -1$, összevetve: $x \geq \frac{2}{3}$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$3x - 2 \leq x + 1$;

$x \le \frac{3}{2}$.

Összevetve a kikötéssel, a megoldás $\frac{2}{3} \le x \le \frac{3}{2}$.

b) $\sqrt{8-x} \ge \sqrt{2x+8}$.

Megoldás

Kikötés: $x \le 8$, $x \ge -4$, összevetve: $-4 \le x \le 8$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$8 - x \ge 2x + 8$;

$x \le 0$.

Összevetve a kikötéssel, a megoldás: $-4 \le x \le 0$.

c) $\sqrt{x^2+5x+6} > x+3$.

Megoldás

Kikötés: $x \le -3$, vagy $x \ge -2$, illetve a jobb oldalon levő kifejezés miatt: $x \ge -3$.
Összevetve a kikötéseket: $x \ge -2$. Ezen az alaphalmazon a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezért:

$x^2 + 5x + 6 > x^2 + 6x + 9$;

$x < -3$.

Összevetve a kikötéssel, nincs megoldás a valós számok halmazán.

4. E1 Oldjuk meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$\frac{\sqrt{5-x}}{2-\sqrt{x}} \ge 0$.

Megoldás

Kikötés: $0 \le x \le 5$, $x \ne 4$.
Mivel a számláló nemnegatív, ezért a nevezőnek pozitívnak kell lennie:

$2 - \sqrt{x} > 0$;

$x < 4$.

Összevetve a kikötéssel, a megoldás: $0 \le x \le 4$.

5. E2 Oldjuk meg x-re az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán, ahol a p valós paraméter!

a) $(p+3)\sqrt{4-x} < 1$.

Megoldás

Kikötés: $x \le 4$. Vizsgáljuk $(p+3)$ előjele szerint az egyenlőtlenséget.

1. Ha $p = -3$, akkor $x \le 4$ esetén teljesül az egyenlőtlenség.
2. Ha $p < -3$, akkor szintén $x \le 4$ esetén teljesül az egyenlőtlenség.
3. Ha $p > -3$, akkor a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$(p+3)^2(4-x) < 1$;

$4 - \frac{1}{(p+3)^2} < x \le 4$.

b) $x < \sqrt{p-5x}$.

Megoldás

Kikötés: $x \le \frac{p}{5}$. Vizsgáljuk p előjele szerint az egyenlőtlenséget.

Ha $p = 0$, akkor $x < \sqrt{-5x}$-ből $-x \geq 0$, és $x \neq 0$ miatt $x < 0$.

Ha $p < 0$, akkor $x \leq \frac{p}{5} < 0$.

Ha $p > 0$ és $x \leq 0$, akkor minden $x \leq \frac{p}{5}$ esetén igaz az egyenlőtlenség.

Ha $p > 0$ és $\frac{p}{5} \geq x > 0$, akkor a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$x^2 + 5x - p < 0$;

$\frac{-5 - \sqrt{25 + 4p}}{2} < x < \frac{-5 + \sqrt{25 + 4p}}{2}$, összevetve a kezdeti feltétellel:

$x < \frac{-5 + \sqrt{25 + 4p}}{2}$.

Emelt szint

MAGASABBFOKÚ EGYENLETEK MEGOLDÁSA (OLVASMÁNY)

1. E2 A Cardano-formula olyan harmadfokú egyenletek esetén alkalmazható, amelyekben hiányzik a másodfokú tag. Ha tehát egy harmadfokú egyenlet nem hiányos, akkor – megfelelő átalakításokkal – a formula használata előtt ki kell küszöbölni a másodfokú tagot. Ez alapján oldjuk meg a $2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$ egyenletet!

Megoldás

A főegyütthatót eltüntethetjük, ha 2-vel osztunk: $x^3 + 1{,}5x^2 + x - 1 = 0$.

Ezután megpróbálunk teljes köbbé alakítani az $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ azonosság alapján: $x^3 + 1{,}5x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}x - \frac{9}{8} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{4}$. Alkalmazzuk a $z = x + \frac{1}{2}$ helyettesítést, ekkor a megoldandó egyenlet $z^3 + \frac{1}{4}z - \frac{5}{4} = 0$ alakú.

A Cardano-képletből $p = \frac{1}{4}$ és $q = -\frac{5}{4}$ értékekkel a gyökre

$$z = \sqrt[3]{\frac{5}{8} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{5}{8} - \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^3}} \approx 1{,}077350269 - 0{,}077350269 = 1.$$

Visszahelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy $z = 1$ valóban megoldás: $1^3 + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = 0$. Ezután szorzattá alakítunk: $z^3 + \frac{1}{4}z - \frac{5}{4} = (z - 1)\left(z^2 + z + \frac{5}{4}\right)$. A második tényező diszkriminánsa negatív, így egyetlen megoldás van: $z = 1$, azaz $x = \frac{1}{2}$.

2. E2 Oldjuk meg az alábbi magasabb fokú egyenleteket!

a) $\frac{x^6}{8} + \frac{3x^4}{2} + x^2 - 36 = 0$;

b) $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 7x + 7 = 0$;

c) $x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{13}{16} = 0$;

d) $x^3 + 3x^2 + 3x + 5 = 0$;

e) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1 = 0$;

f) $5x^3 - 15x^2 + 30x - 48 = 0$.

Megoldások

a) Szorozzunk 8-cal és alakítsuk át az egyenletet: $x^6 + 12x^4 + 8x^2 = 288$. Észrevehetjük, hogy $x_1 = 2$ megoldás, s ekkor $x_2 = -2$ is az. Több gyök pedig nem lehet, mert az egyenlet bal oldala $x > 0$ esetén szigorúan monoton nő, míg a jobb oldal konstans.
Egy másik lehetséges eljárás az $y = x^2$ helyettesítés. Az így kapott harmadfokú egyenletnek y-ban egy gyöke van, alkalmazhatjuk a Cardano-képletet.

b) $x = -1$ megoldás. Szorzattá alakítunk: $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 7x + 7 = (x + 1)(x^4 + 2x^2 + 7)$. Nincs több megoldás, mert $x^4 + 2x^2 + 7 = (x^2 + 1)^2 + 6 > 0$. (Az utóbbi lépés helyett $y = x^2$ helyettesítéssel könnyen megoldható másodfokú egyenletet kapunk.)

c) Észrevehetjük, hogy $x_1 = -\frac{1}{2}$ megoldás, ezért kiemeljük az $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ gyöktényezőt:

$x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{13}{16} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^3 + 3x - \frac{13}{8}\right)$. A második tényező zérushelyét megkereshetjük például a Cardano-képlettel, eredmény: $x_2 = \frac{1}{2}$.

d) Teljes köbbé alakítással próbálkozunk: $x^3 + 3x^2 + 3x + 5 = (x + 1)^3 + 4$, s innen $(x + 1)^3 = -4$. A megoldás $x = \sqrt[3]{-4} - 1$.

e) A teljes negyedik hatványból indulunk ki: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1 = (x + 1)^4 - 2$.
Így $(x + 1)^4 = 2$, $x + 1 = \pm\sqrt[4]{2}$, $x = -1 \pm \sqrt[4]{2}$.

f) Az egyenletet átalakítjuk: $5x^3 - 15x^2 + 30x - 48 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 6x - \frac{48}{5} = 0$. A bal oldal $(x-1)^3 + 3(x-1) - \frac{13}{8}$ alakba írható, ahonnan az $y = x - 1$ helyettesítés után $y^3 + 3y - \frac{13}{8} = 0$. Cardano képletét alkalmazva $y = 0,5$ adódik, ahonnan $x = 1,5$.

36–37. ÚJ STATISZTIKAI JELLEMZŐK

1. K1 Határozzuk meg a következő számsokaságra vonatkozó középértékeket és szórási mérőszámokat!
a) 90, 85, 60, 27, 38, 15, 83, 63, 65, 1, 91;
b) 71, 69, 71, 15, 86, 60, 56, 63, 65, 94, 47;
c) 21, 46, 6, 92, 84, 68, 58, 93, 18, 56, 65.

Megoldás

	a)	*b)*	*c)*
átlag	56,18	63,36	55,18
medián	63	65	58
módus		71	
szórásnégyzet	996,76	427,45	893,96
szórás	31,57	20,67	29,90
átlagos eltérés	26,13	13,79	23,59
darab	11	11	11

2. E1 Határozzuk meg a mediántól való átlagos abszolút eltérést, a szórásnégyzetet és a szórást a következő gyakorisági eloszlások esetén!

a)

Adat	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Gyakoriság	1	0	2	6	9	23	19	19	21	14	8

Megoldás

átlag 9,51
medián 10
módus 8
szórásnégyzet 4,152
szórás 2,038

b)

Adat	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gyakoriság	8	14	21	19	19	23	9	6	2	0	1

Megoldás

átlag 3,49
medián 9
módus 5
szórásnégyzet 4,152
szórás 2,038

c)

Adat	–15	–9	–6	–3	0	3	6	9	12	15
Gyakoriság	1	2	6	9	23	19	19	21	14	8

Megoldás

átlag 5,31
medián 6
módus 0
szórásnégyzet 37,364
szórás 6,113

3. K2 Készítsünk listát osztályunk tanulóinak cipőméretéről! A lista alapján számítsuk ki a megismert középértékeket és szóródási mérőszámokat!

Megoldás

Az olvasóra bízzuk.

IV. HASONLÓSÁG

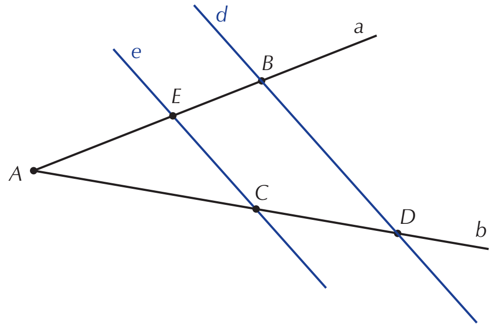
38–39. KÖZÉPPONTOS NAGYÍTÁS ÉS KICSINYÍTÉS, KÖZÉPPONTOS HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓ

1. K1 Rajzoljunk egy háromszöget és egy akkora szakaszt, amekkorára a háromszöget nagyítani akarjuk! Legyen a hasonlóság középpontja
a) az egyik csúcs; *b)* az egyik oldal belső pontja; *c)* a háromszög belső pontja!

Megoldás

Az olvasóra bízzuk.

2. K1 Az ábrán megadtuk bizonyos szakaszok hosszát. Az *e* és *d* egyenesek párhuzamosak. Töltsük ki a táblázat üres mezőit!



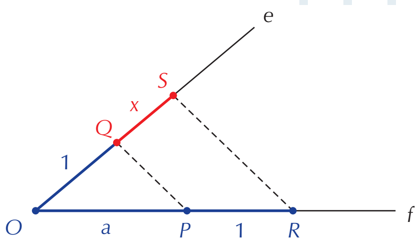
Megoldás

AE	5	8	4,5	11,2
EB	3	9,6	3	7
AC	6	5	6	14,4
CD	3,6	6	4	9
EC	2	$\frac{50}{11}$	5	8
BD	3,2	10	$\frac{25}{3}$	13

3. K2 Adott egy *a*, egy *b* és egy egységnyi hosszúságú szakasz. Szerkesszük meg az $\frac{1}{a}$, az *ab*, az a^2 és az $\frac{a}{b}$ hosszúságú szakaszokat!

Megoldás

Vegyünk fel egy hegyesszöget, melynek csúcsa *O*, szárai e és *f* félegyenesek. Legyen $x = \frac{1}{a}$, azaz $\frac{x}{1} = \frac{1}{a}$. *O*-tól mérjünk az e szárra egységnyi, az *f* szárra egy *a* hosszúságú szakaszt, majd folytatásában újra egy egységnyi szakaszt. Végpontja *R* . Kössük össze az *a* hosszúságú szakasz *O*-tól különböző végpontját (P) a másik szárra mért egységszakasz *O*-tól különböző végpontjával (*Q*). Húzzunk párhuzamost *PQ*-val az *R* ponton keresztül, ennek e-vel való metszéspontja legyen *S*. A keresett szakasz a *QS* szakasz.



Hasonlóan átírható aránnyá a többi szerkesztendő szakasz is : ($y = ab$; $z = a^2$; $u = \frac{a}{b}$)

$\frac{y}{a} = \frac{b}{1}$; $\frac{z}{a} = \frac{a}{1}$; $\frac{u}{1} = \frac{a}{b}$. Az arány jobb oldalán a nevezőben álló szakaszt mérjük az *f* szárra, folytatásában a számlálóban álló szakaszt, míg a bal oldal nevezőben álló szakasza az e szárra kerül, és annak végpontjától az előzőekben leírtak szerint szerkesztett párhuzamos e-vel való metszéspontjáig tart a keresett szakasz.

4. K1 Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha az alapja 6 cm és az alap és a szár aránya
a) 3 : 4.

Megoldás

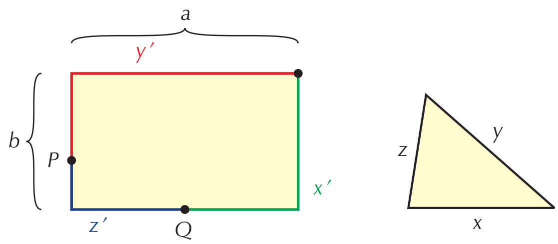
Itt a szár 8 cm, tehát három oldal ismeretében a háromszög megszerkeszthető.

b) 2 : 1.

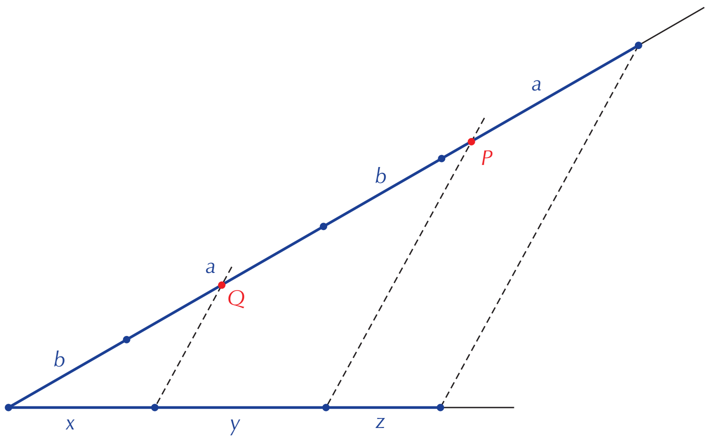
Megoldás

Itt a szár 3 cm, tehát a háromszög-egyenlőtlenség miatt a háromszög nem szerkeszthető.

5. K1 Adott egy téglalap és egy háromszög. Jelöljük ki a téglalap egyik csúcspontját, a kerületén pedig tűzzünk ki még két pontot úgy, hogy a kerület három darabjának aránya megegyezzék a háromszög oldalainak arányával!



$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} \qquad \text{és} \qquad x' + y' + z' = 2\cdot(a + b)$$



Megoldás

Mérjük egymás mögé egy szög egyik szárára a háromszög oldalait, majd a másik szárra a téglalap kerületét. Kössük össze a háromszög kerületének végpontját a téglalap kerületének végpontjával. Ezzel párhuzamosokat húzva a háromszög másik két oldalának végpontján át a téglalap kerületét a kívánt arányban osztottuk fel. Ezeket a szakaszokat kell a téglalap egyik csúcsából az oldalakra visszamásolni.

40–41. SZERKESZTÉSEK KÖZÉPPONTOS HASONLÓSÁG ALKALMAZÁSÁVAL

1. K1 Kicsinyítsünk egy kört egy tetszőleges belső pontjából a $\frac{2}{3}$-ára!

Megoldás

Az olvasóra bízzuk.

2. K2 Adott két kör úgy, hogy az egyik tartalmazza a másikat. Szerkesszük meg a hasonlósági pontjaikat!

Megoldás

Rajzoljunk az egyik körbe egy (a centrálisra nem illeszkedő) sugarat, a másik körbe egy vele párhuzamos átmérőt. Húzzuk meg a centrálist (a két kör középpontját összekötő egyenest). Kössük össze a sugár köri pontját az átmérő végpontjaival, és ahol ezek az egyenesek metszik a centrális egyenesét, ott vannak a keresett pontok.

3. K3 Adott két kör, melyek középpontjainak távolsága 10 cm.
a) Az egyik kör sugara 3 cm, a másiké 4 cm.
b) Az egyik kör sugara 3 cm, a másiké 7 cm.
c) Az egyik kör sugara 5 cm, a másiké 7 cm.
Szerkesszük meg a hasonlósági pontjaikat! Számítsuk is ki, milyen messze vannak a kisebb sugarú kör középpontjától!

Megoldás

A szerkesztés megegyezik az előző feladatban leírtakkal.
A belső hasonlósági pont meghatározása: Jelölje x a keresett távolságot.
A hasonló háromszögek miatt $\frac{x}{10-x}=\frac{3}{4}$, rendezve $x=\frac{30}{7}$.
A külső hasonlósági pont meghatározása: Jelölje y a keresett távolságot.
$\frac{y}{y+10}=\frac{3}{4}$, rendezve $y=30$.
A második feladatnál a belső hasonlósági pont az érintési pont. ($x=3$); $y=7{,}5$.
A harmadik esetben $x=\frac{25}{6}$ *és* $y=25$.

4. K2 Szerkesszünk háromszöget, ha adott két szöge és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal hossza!

Megoldás

Szerkesszünk háromszöget, melynek két szöge a keresett háromszög két megadott szögével egyenlő. Ez a háromszög a keresett háromszöghöz hasonló lesz, és a hasonlóság arány a megadott súlyvonal és a szerkesztett háromszög megfelelő súlyvonalának aránya. Nagyítsuk (kicsinyítsük) az adott arányban a háromszöget.

5. K2 Szerkesszünk négyzetet, ha adott az egyik csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz hossza!

Megoldás

Szerkesszünk egy tetszőleges négyzetet, és rajzoljuk bele ebben a négyzetben az egyik csúcsot a szemközti oldal felező pontjával összekötő szakaszt. Mivel minden négyzet hasonló, ezért a csúcstól felmérve a megadott szakaszt, megkapjuk a hasonlóság arányát, amellyel a mi négyzetünket nagyítani (kicsinyíteni) kell.

6. K2 Adott egy konvex körcikk. Szerkesszünk
a) kört, amely érinti a körcikket határoló sugarakat és az ívet is;
b) négyzetet, amelynek két csúcsa az íven van, másik kettő pedig egy-egy határoló sugáron!

Megoldás

Szerkesszünk meg először a körcikk szimmetriatengelyét.
a) A körcikk és a tengely metszéspontjába érintőt húzva olyan egyenlő szárú háromszöget kapunk a sugár félegyenesekkel, amelynek beírt köre az első feladatnak megfelel.
b) Most szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek oldalai a szimmetriatengelyre merőlegesek, illetve párhuzamosak, a középponthoz közelebbi két csúcsa pedig a sugarakra illeszkedik. Ez középpontosan hasonló a keresett négyzethez, a hasonlóság középpontja a körcikk középpontja. A középpontot a négyzet másik két csúcsával összekötő félegyenesek ezért kimetszi a keresett négyzet két csúcsát, ahonnan a másik két csúcs szerkeszthető.

42–43. A HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓ FOGALMA

1. K1 Egy háromszög oldalai 13; 17 és 20 cm hosszúak. Egy hozzá hasonló háromszög kerülete 80 cm. Mekkorák az oldalai?

Megoldás

A mi háromszögünk kerülete 50 cm. Ez azt jelenti, hogy a hasonló háromszög.

A megadottnak $\frac{8}{5}$-szörös nagyítása. A hasonló háromszög oldalai ezért 20,8 cm, 27,2 cm és 32 cm.

2. K1 Adott téglalapból vágjunk le egy egyenessel olyan téglalapot, amely hasonló az eredetihez!

Megoldás

A feladat szerint – ha a téglalap hosszabb oldala a, a rövidebb pedig b – azt az x hosszú szakaszt kell megszerkeszteni, amire $\frac{b}{a} = \frac{x}{b}$. Az A csúcsból induló a oldalra A-tól indulva mérjük rá b-t. Húzzunk végpontján át párhuzamost az A-val szemközti átlóval, ez kimetszi a b oldalból azt az x szakaszt, ami a téglalap rövidebb oldala lesz. Ezt az x szakaszt mérjük fel A-ból az a oldalra, ezen a ponton kell a-ra merőlegest húzni. A lemetszett téglalap hasonló az eredetihez.

Megjegyzés: Ha a téglalap négyzet, akkor nincs megoldás.

3. E1 Bizonyítsuk be, hogy a trapéz átlói az alapok arányában osztják egymást!

Megoldás

Az $ABCD$ trapéz alapjai AB és CD, átlói AC és BD, az átlók metszéspontja M. Az ABM háromszög hasonló a CDM háromszöghöz (csúcsszögek és $MAB\sphericalangle = MCD\sphericalangle$, mert egyállásúak), ezért az alapok aránya megegyezik a hasonlóság arányával, tehát az átlók osztásarányával is.

4. K2 Egy trapéz alapjai 3 cm és 5 cm hosszúak. Osszuk a két szárat 7-7 egyenlő részre, és kössük össze a hosszabb alaptól számított harmadik osztópontokat! Milyen hosszú az összekötő szakasz?

Megoldás

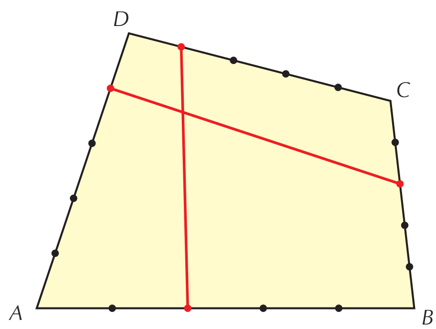
$ABCD$ trapéz alapjai $AB = 5$ cm és $CD = 3$ cm, egyik átlója AC. A hosszabb alaptól számított harmadik osztópontokat összekötő, az alapokkal párhuzamos szakasz szárakon levő pontjai E és F, az AC átlóval való metszéspontja P. Az AEP háromszög hasonló az ADC háromszöghöz, ezért $EP = \frac{3}{7} \cdot 3 = \frac{9}{7}$. Hasonlóan CPF háromszög hasonló CAB háromszöghöz, így $PF = \frac{4}{7} \cdot 5 = \frac{20}{7}$. Tehát $EF = \frac{29}{7}$ cm.

5. K2 Egy téglalap egyik csúcsát kössük össze a szemközti oldal felezőpontjával, és húzzuk meg a csúccsal szemközti átlót! Milyen arányban osztják ezek egymást?

Megoldás

Legyen az CD oldal felező pontja E, és ezt kössük össze az A ponttal. Húzzuk meg a BD átlót. Nézzük az $ACED$ trapézt. Itt az alapok aránya $\frac{AB}{DE} = \frac{2}{1}$, ezért a 3. példa alapján harmadolják egymást a szakaszok.

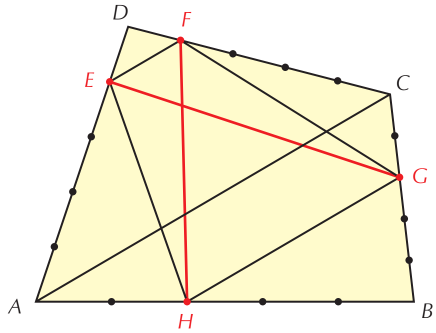
6. K2 Az $ABCD$ négyszög oldalait 5-5 egyenlő részre osztottuk. A D-hez legközelebbi osztópontokat kössük össze a szemközti oldalak B-től számított harmadik osztópontjával! Milyen arányban osztják egymást a szakaszok?



Megoldás

A D-hez közeli osztópontok az AD oldalon legyen E és a DC oldalon F; a B-től számított harmadik osztópont a BC oldalon legyen pedig G és a másik legyen H. Húzzuk be az AC átlót. mivel $DEF_\triangle \sim DAC_\triangle$, $\left(\lambda = \frac{1}{5}\right)$ és $BHG_\triangle \sim BAC_\triangle$, $\left(\lambda = \frac{3}{5}\right)$. Ebből következik, hogy $EFGH$ trapéz, mert $EF \parallel HG$, és az alapok aránya $\frac{EF}{GH} = \frac{1}{3}$.

A trapéz átlói az alapok arányában osztják egymást, ezért $\frac{EG}{FH} = \frac{1}{3}$.

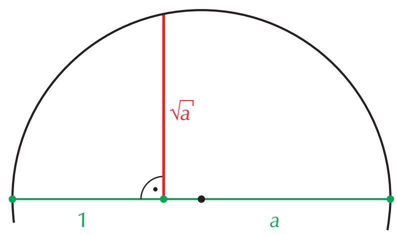


44–45. DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEKRE VONATKOZÓ TÉTELEK

1. K1 Adott egy a szakasz és az egységszakasz. Szerkesszünk $\sqrt{a}$ hosszú szakaszt!

Megoldás

Húzzunk Thalész kört az $(1+a)$ hosszúságú szakasz mint átmérő fölé. Állítsunk merőlegest az $1 : a$ arányú osztópontban az átmérőre. Az átmérő és a Thalész kör metszéspontja közti szakasz a magasságtétel szerint $\sqrt{a}$ hosszúságú.



2. K2 Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 méter, ennek merőleges vetülete az átfogón 3 méter. Mekkora az átfogó és a másik befogó?

Megoldás

A befogó, merőleges vetület és a derékszögű háromszög magassága által alkotott derékszögű háromszögből az átfogóhoz tartozó magasság hossza 4 cm. Innen a magasságtétel szerint az átfogó másik szelete kiszámítható: $3x = 4^2 \Rightarrow x = \frac{16}{3}$. Ebből következik, hogy az átfogó $c = 3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3}$; és a másik befogó a befogótételből $b^2 = x(x+3) = \frac{16}{3} \cdot \frac{25}{3} = \frac{16 \cdot 25}{9}$, ahonnan $b = \frac{20}{3}$.

3. K2 Mekkorák a derékszögű háromszög oldalai, ha az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót egy 5 cm-es és egy 12 cm-es darabra osztja?

Megoldás

Alkalmazzuk mindkét befogóra a befogótételt (az átfogó 17 cm). Ebből az egyik befogó $a = \sqrt{17 \cdot 5} = 85$, a másik pedig $b = \sqrt{17 \cdot 12} = \sqrt{204}$.

4. E1 Adott területű téglalapok között melyiknek a kerülete a legkisebb?

Megoldás

A téglalap területe $T = ab$, ahol a és b a téglalap két oldalának hosszát jelöli. A kerülete $K = 2(a+b)$, így a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget felírva: $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, amiből $\sqrt{T} \le \frac{K}{4}$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b$, vagyis ha a téglalap négyzet.

5. E1 Egy kör h hosszúságú húrja a rá merőleges átmérőt egy p és egy q hosszúságú részre bontja. Bizonyítsuk be, hogy $h = \sqrt{pq}$!

Megoldás

Az átmérő felezi a rá merőleges húrt. A húr végpontjait az átmérő végpontjaival összekötve derékszögű háromszögek keletkeznek. (Thalész kör) A magasságtétel szerint $\frac{h}{2} = \sqrt{pq}$.

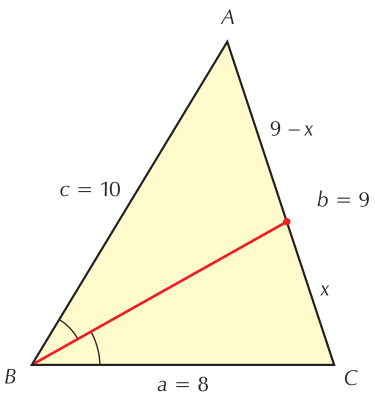
6. E2 Derékszögű háromszögbe az átfogóra állított négyzetet írunk. Bizonyítsuk be, hogy az átfogón keletkezett három szelet közül a középső a két szélső mértani közepe!

Megoldás

Toljuk az átfogóval párhuzamosan az egyik kis háromszöget a másik mellé. (Ez a középső szakasszal való eltolást jelent.) Az állítás éppen megfelel a magasságtételnek, mivel a négyzet oldalai egyenlők.

46. SZÖGFELEZŐTÉTEL

1. K1 Egy háromszög oldalainak hossza $a = 8$ cm, $b = 9$ cm, $c = 10$ cm. Mekkora részekre osztja a B csúcsból induló szögfelező a b oldalt?

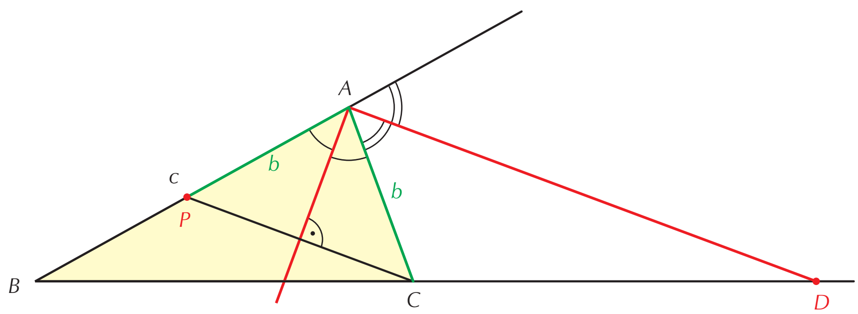


Megoldás

A szögfelező a szemközti oldalt a közrefogó oldalak arányában osztja. Ezért $\frac{9-x}{x} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$, ahonnan $x = 4$, és $9 - x = 5$.

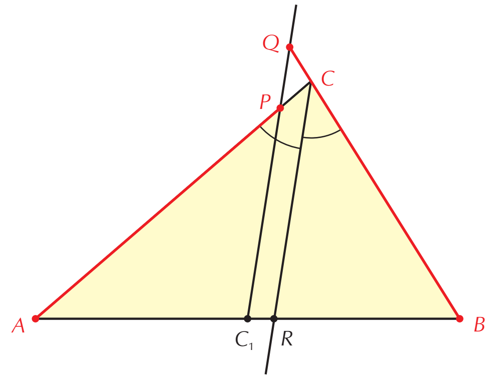
2. K2 Bizonyítsuk be, hogy ha az A-ból induló külső szögfelező D-ben metszi a BC oldalt, akkor $\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b}$!

Megoldás



Ahhoz, hogy az A-ból szögfelező messe a szemközti BC oldalt az kell, hogy a háromszög ne legyen egyenlő szárú , azaz $b \neq c$. Feltehetjük, hogy a háromszögben $c > b$. Legyen a külső szögfelező metszéspontja D a BC egyenesen. Mérjük fel A-ból B felé a c oldalra a b oldalt. A végpontot jelölje P. A PCA háromszög egyenlő szárú, tehát az A-ból induló szögfelező merőleges a PC oldalra. Tanultuk, hogy a belső és a külső szögfelező is merőleges egymásra, tehát $PC \parallel AD$, ezért $BCP_\triangle \sim BDA_\triangle$. Felírhatjuk tehát, hogy $\frac{BC}{BD} = \frac{c-b}{c} = \frac{BD-CD}{BD}$. Innen $1 - \frac{b}{c} = 1 - \frac{CD}{BD} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \frac{CD}{BD}$.

3. E1 Az ABC háromszög AB oldalának C_1 felezőpontján át húzzunk a C-beli szögfelezővel párhuzamost! Az ábra jelöléseit használva bizonyítsuk be, hogy $AP = BQ$!

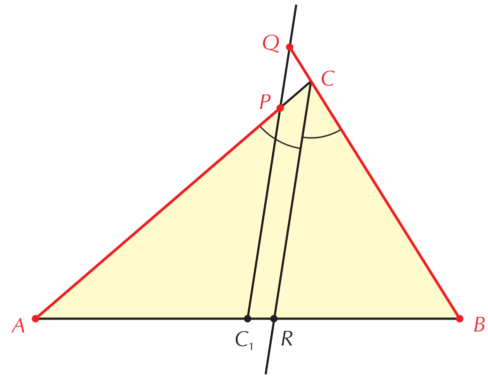


Megoldás

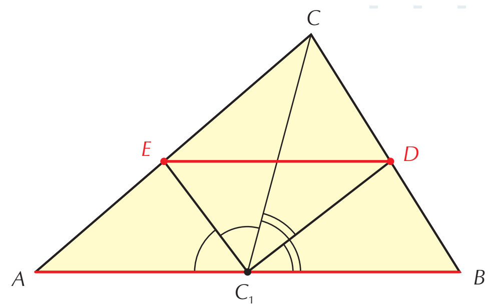
Jelölje a szögfelező metszéspontját az AB oldalon R. Mivel $AC_1P_\triangle \sim ARC_\triangle$ (A középpontú hasonlóság) és $BC_1Q_\triangle \sim BRC_\triangle$ (B középpontú hasonlóság), ezért felírható az oldalak arányára, hogy

$$\frac{BC_1}{BR} = \frac{BQ}{BC} \Rightarrow BQ = \frac{BC}{BR}BC_1 \text{ és } \frac{AC_1}{AR} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow AP = \frac{AC}{AR}AC_1.$$

A szögfelező tétel miatt $\frac{BC}{BR} = \frac{AC}{AR}$ és $BC_1 = AC_1$, mert C_1 felező pont, tehát $AP = BQ$.



4. E2 Az ABC háromszög AB oldalának C_1 felezőpontját összekötjük a szemközti csúccsal. A kapott két háromszögben a C_1-ből induló szögfelezők a háromszög AC oldalát E-ben, BC oldalát D-ben metszik. Bizonyítsuk be, hogy DE párhuzamos AB-vel! (Lásd az ábrát!)



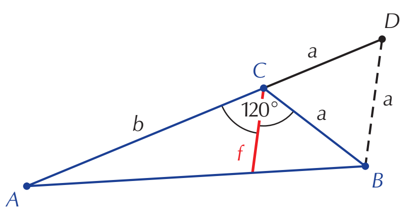
Megoldás

Mivel $AC_1 = C_1B$, ezért a háromszög mindkét oldalát a C_1-ből induló szögfelezők $\frac{s_c}{0{,}5c}$ a szögfelező tétel miatt. Így tehát a $CED_\triangle \sim CAB_\triangle$, mivel két oldal aránya és a közbe zárt szög megegyezik (C középpontú középpontos hasonlóság). Ebből viszont következik, hogy $AB \parallel ED$.

5. E2 Egy háromszög két oldala a és b, a közbezárt γ szög szögfelezője f. Tudjuk, hogy $\gamma = 120°$. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$!

Megoldás

Mérjük fel a b oldal C-n túli meghosszabbítására az a oldalt, végpontja legyen D. BCD háromszög egyenlő oldalú, mert $CD = CB = a$, és a szárszöge $180° - 120° = 60°$. Jelöljük E-vel a C-ből induló szögfelező és az AB oldal metszéspontját. Az AEC háromszög hasonló az ABD háromszöghöz, mert α közös szög és mindkettőben van 60°-os szög. Felírhatjuk a megfelelő oldalak arányát: $\frac{f}{a} = \frac{b}{a+b}$, ahonnan átrendezéssel adódik az állítás.



47. HASONLÓ SÍKIDOMOK TERÜLETÉNEK ARÁNYA; HASONLÓ TESTEK TÉRFOGATÁNAK ARÁNYA

1. K1 Hogyan változtatja meg a síkidomok területét a

a) $\lambda = 3$; *b)* $\lambda = \frac{1}{2}$; *c)* $\lambda = \frac{3}{4}$

arányú hasonlósági transzformáció?

Megoldás

A síkidomok területe
a) kilencszeresére növekszik;
b) negyedére csökken;
c) $\frac{9}{16}$-szorosára csökken.

2. K2 Hogyan változtatja meg a testek térfogatát a

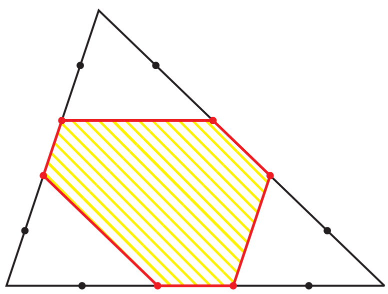
a) $\lambda = -2$; *b)* $\lambda = 3$; *c)* $\lambda = \frac{1}{2}$; *d)* $\lambda = \frac{3}{5}$

arányú hasonlósági transzformáció?

Megoldás

A testek térfogata
a) 8-szorosára nő
b) 27-szeresére növekszik;
c) nyolcadára csökken;
d) $\frac{27}{125}$-szorosára csökken.

3. K2 Egy háromszög minden oldalát osszuk 5 részre! Az ábrának megfelelő vonalkázott háromszög területe mekkora része az eredetinek?



Megoldás

A három levágott háromszög mind egybevágó és az eredetihez hasonló. A hasonlóság aránya $\frac{2}{5}$, ezért egy kis háromszögnek a területe az eredeti háromszög területének $\frac{4}{25}$-szerese. A vonalkázott rész területe tehát az eredetinek az $1 - 3 \cdot \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$ része.

4. K2 Osszuk fel egy kör területét vele koncentrikus körrel két egyenlő részre!

Megoldás

Ahhoz, hogy a vele koncentrikus kör területe az eredetinek a fele legyen, a sugara az eredetinek a $\sqrt{2}$-ed része, azaz a $\frac{\sqrt{2}}{2}$-szerese kell legyen. Ekkora például az *r* sugarú négyzet köré írt kör sugara.

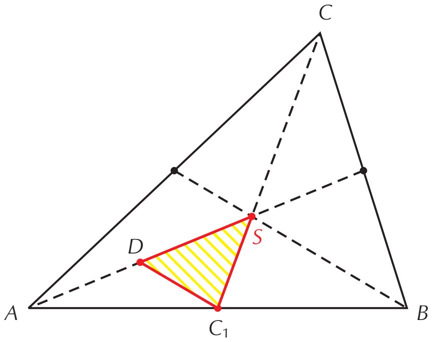
5. K2 Egy trapéz alapjai 15 cm és 21 cm. Hányszorosa a kiegészítő háromszög területe a trapéz területének?

Megoldás

A kiegészítő háromszög hasonló a trapéz és a kiegészítő háromszög által együtt alkotott háromszöghöz. Ezért felírhatjuk, hogy $\frac{t_{kieg.hsz}}{t_{kieg.hsz} + t_{trapéz}} = \left(\frac{15}{21}\right)^2 = \frac{25}{49}$. Innen egyenletrendezéssel a kiegészítő háromszög területe a trapéz területének a $\frac{25}{24}$-e.

6. K2 Rajzoljuk meg egy háromszög súlyvonalait! Az oldalak felezőpontjaiból húzzunk párhuzamost az egyik súlyvonallal a másik súlyvonaláig *(ábra)*!

a) Mekkora része a vonalkázott háromszög területe az eredetinek?
b) Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalaiból szerkeszthető háromszög!
c) Mekkora része a súlyvonalakból szerkesztett háromszög területe az eredetinek?



Megoldás

a) Tanultuk, hogy a súlyvonalat a csúcsokkal összekötve három egyenlő területű részre bontjuk a háromszöget. Ebből következik, hogy – mivel az ABS háromszögben SC_1 súlyvonal – az AC_1S háromszög területe hatoda az ABC háromszög területének. Legyen D az AS szakasz felező pontja. A C_1D súlyvonal az AC_1D háromszögben, ezért az SDC_1 háromszög területe fele az AC_1S háromszög területének. Ebből következik, hogy az SDC_1 háromszög területe tizenkettede az ABC háromszög területének.

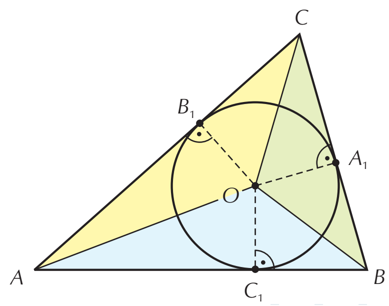
b) Az ábrán látható háromszöget a súlyvonalak harmadaiból szerkesztettük. (A súlypont mellett AS és AB felezőpontja a másik két csúcs.)

c) Mivel az SDC_1 háromszög oldalainak hossza harmada a súlyvonalakból szerkesztett háromszög oldalainak, ezért hasonló hozzá, és a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{1}{3}$. Tehát az SDC_1 háromszög területe $\lambda^2 = \frac{1}{9}$-e az ABC háromszög területének. Mivel mindkétszer az SDC_1 háromszög területét fejeztük ki, ezért a súlyvonalakból alkotott háromszög területének kilencede egyenlő az eredeti háromszög területének tizenkettedével. Így a súlyvonalakból szerkesztett háromszög területe az eredetinek $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ része.

A HÁROMSZÖG TERÜLETE ÉS A HÁROMSZÖG OLDALAIT ÉRINTŐ KÖRÖK (OLVASMÁNY)

1. E1

Jelölje r az ABC háromszög beírt körének sugarát. (Az ábrán $r = OA_1 = OB_1 = QC_1$.) Igazoljuk, hogy bármely háromszögben teljesül az $r = \frac{t}{s}$ összefüggés!

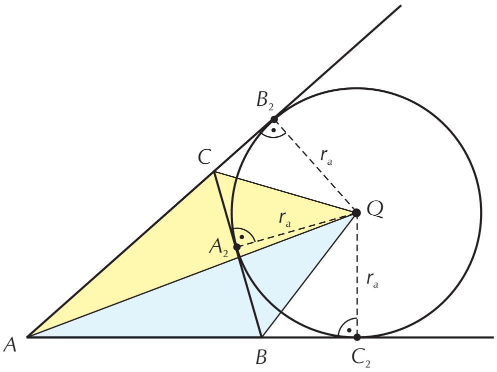


Megoldás

Az AO, BO, CO szakaszok behúzásával az ABC háromszöget három részháromszögre bontjuk fel. (O a beírt kör középpontja.) A részháromszögek területösszege az eredeti háromszög területével egyenlő:
$t_{ABC} = t_{ABO} + t_{BCO} + t_{ACO}$.
Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért $OC_1 = r$ az ABO háromszög AB oldalához tartozó magasság. Az ABO háromszög területe $t_{ABO} = \frac{AB \cdot OC_1}{2} = \frac{c \cdot r}{2}$. A másik két részháromszögre is felírhatjuk a szimmetrikus kifejezéseket, ezért $t_{ABC} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = r \cdot \left(\frac{a+b+c}{2}\right) = r \cdot s$. Ha az ABC háromszög területét t-vel jelöljük, akkor a keresett összefüggés: $r = \frac{t}{s}$.

Vagyis ha a háromszög területét kifejezzük az oldalak segítségével, akkor a beírt kör sugara is megadható az oldalakkal.

2. E1 Jelölje r_a az ABC háromszög $a = BC$ oldalához írt körének sugarát. (Az ábrán $r_a = QA_2 = QB_2 = QC_2$.) Igazoljuk, hogy bármely háromszögben teljesül az $r_a = \frac{t}{s-a}$ összefüggés!



Megoldás

Az előző feladat megoldási módszerét követjük.

Az AQ, BQ, CQ szakaszok behúzásával az ABQ, BCQ és ACQ háromszögeket kapjuk. (Q a BC oldalhoz írt kör középpontja, melynek sugara r_a.) Az ABC háromszög területe $t_{ABC} = t_{ABQ} + t_{ACQ} - t_{BCQ}$. A megfelelő háromszögekben QC_2, QB_2 és QA_2 magasságok, hosszuk egyenlő: r_a. (Mindegyik a hozzáírt kör sugara.) Ez alapján

$$t_{ABC} = \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2} = r_a \cdot \left(\frac{b+c-a}{2}\right) = r_a \cdot \left(\frac{2s-2a}{2}\right) = r_a \cdot (s-a).$$

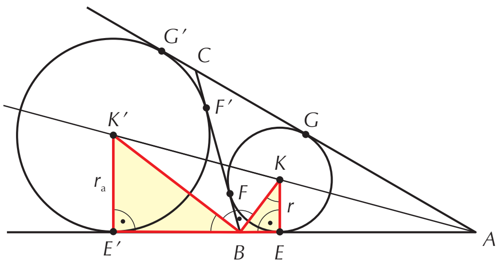
Ha az ABC háromszög területét t-vel jelöljük, akkor a keresett összefüggés: $r_a = \frac{t}{s-a}$.

A betűzési szimmetria miatt természetesen a háromszög b és c oldalaihoz írt körök sugara $r_b = \frac{t}{s-b}$, illetve $r_c = \frac{t}{s-c}$.

Vagyis ha a háromszög területét kifejezzük az oldalak segítségével, akkor a hozzáírt kör sugara is megadható az oldalakkal.

3. E2 A háromszög területét megadhatjuk az oldalai segítségével. Próbáljuk igazolni a nevezetes Héron-képletet, mely szerint bármely háromszög területe felírható $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ alakban!

(Útmutatás: Először mutassuk meg, hogy az AC_1O és AC_2Q, valamint a BC_1O és QC_2B háromszögek hasonlóak. Ezután írjuk fel a megfelelő oldalak megegyező arányait a nevezetes körök sugaraival; végül használjuk fel az 1. feladat eredményét.)



Megoldás

Az ABC háromszög K középpontú beírt köre az AB, BC, AC oldalakat rendre az E, F, G pontokban érinti; hasonlóan a K' középpontú, BC oldalhoz hozzáírt kör megfelelő oldalakkal vett érintési pontjait jelöljük E', F', G'-vel. (Emlékeztető: K és K' középpontok a megfelelő belső vagy külső szögfelezők metszéspontjai.)

Az AKE és $AK'E'$ háromszögek hasonlóak, mert szögeik egyenlőek. A megfelelő oldalak aránya megegyezik: $\frac{K'E'}{E'A} = \frac{KE}{EA}$. Vezessük be a $K'E' = r_a$, $KE = r$ jelöléseket; a két további szakaszt pedig már kifejeztük a háromszög oldalainak a segítségével: $E'A = s$, és $EA = s - a$.

Így az (1) $\frac{r_a}{s} = \frac{r}{s-a}$ egyenlethez jutottunk.

Egy másik összefüggést nyerünk, ha a $K'E'B$ és BEK háromszögek hasonlóságát igazoljuk.

$BKE\sphericalangle$ és $K'BE'\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek, így egyenlők. A $K'E'B$ és BEK háromszögek valóban hasonlók, mert szögeik egyenlők. A megfelelő oldalak arányát felírva $\frac{E'B}{E'K'} = \frac{EK}{EB}$, innen (2) $\frac{s-c}{r_a} = \frac{r}{s-b}$.

(1) és (2) megfelelő oldalait összeszorozva $\frac{s-c}{s} = \frac{r^2}{(s-a)(s-b)}$; a kifejezést átalakítva $r^2s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Az 1. feladatban kapott $t = rs$ összefüggést felhasználva kapjuk a nevezetes területképletet: $t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. A tétel ismertebb alakja a következő:

Tétel

Bármely háromszög területe felírható $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ alakban, ahol a, b, c a háromszög oldalai, s pedig a félkerülete.

Megjegyzés

Mit is kaptunk?

A háromszög három oldalából kiszámíthatjuk a területét; a terület ismeretében pedig már meghatározhatók a beírt és az oldalakhoz hozzáírt körök sugarai. A teljesség kedvéért, bizonyítás nélkül közöljük a háromszög köré írt körére vonatkozó formulát, amellyel a körülírt kör R sugara is kiszámítható: $R = \dfrac{abc}{4t}$.

4. E1 Egy konkrét feladat: Legyen a háromszög három oldala $a = 10$ cm, $b = 24$ cm és $c = 26$ cm. Számoljuk ki a háromszög nevezetes köreinek a sugarát!

Megoldás

A háromszög félkerülete $s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{10+24+26}{2} = 30$ (cm);

területe $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{30 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 4} = \sqrt{14\,400} = 120$ (cm^2). A nevezetes körök sugarai:

$r = \dfrac{t}{s} = \dfrac{120}{30} = 4$ (cm) a beírt kör sugara;

$r_a = \dfrac{t}{s-a} = \dfrac{120}{20} = 6$ (cm) az a oldalhoz írt kör sugara;

$r_b = \dfrac{t}{s-b} = \dfrac{120}{6} = 20$ (cm) a b oldalhoz írt kör sugara;

$r_c = \dfrac{t}{s-c} = \dfrac{120}{4} = 30$ (cm) a c oldalhoz írt kör sugara; végül

$R = \dfrac{abc}{4t} = \dfrac{10 \cdot 24 \cdot 26}{4 \cdot 120} = 13$ (cm) a háromszög köré írt kör sugara.

Megjegyzés

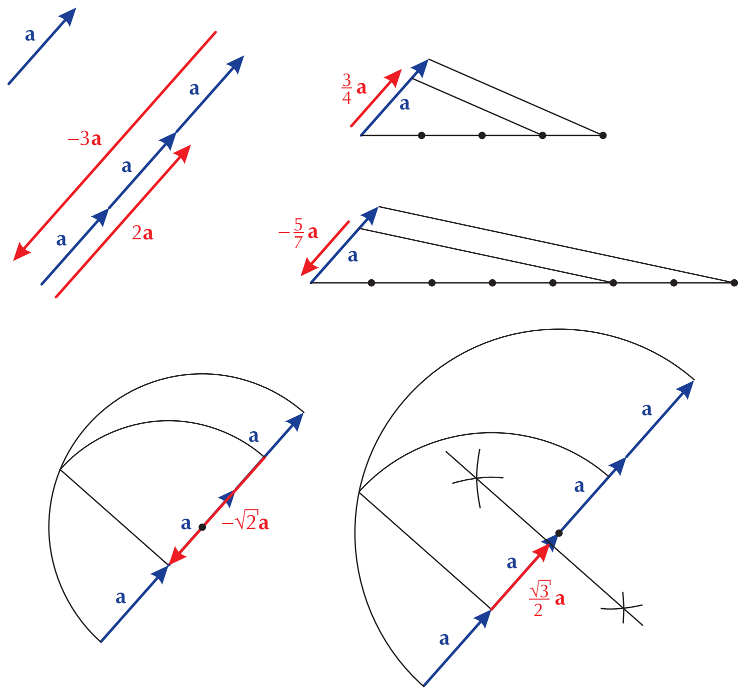
A körülírt kör sugara fele a c oldalnak, így a háromszög derékszögű (Thalész-tétel). Ezért kaptunk „szép” egész számokat eredményül. Ha a számadatokból hamarabb észrevesszük, hogy $a^2 + b^2 = c^2$, akkor gyorsabban célhoz érünk.

V. A VEKTOROKRÓL

49. VEKTOR SZORZÁSA SZÁMMAL

1. K1 Adott **a** vektorhoz szerkesszük meg a $2\mathbf{a}$, $-3\mathbf{a}$, $\frac{3}{4}\mathbf{a}$, $-\frac{5}{7}\mathbf{a}$, $-\sqrt{2}\,\mathbf{a}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{a}$ vektorokat!

Megoldás



2. K1 Adott **a** és **b** vektorokhoz szerkesszük meg a

a) $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$;

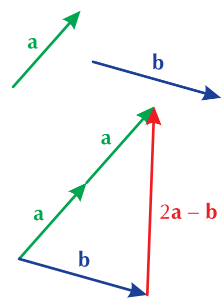
b) $\sqrt{2}\,\mathbf{a} + \sqrt{2}\,\mathbf{b}$;

c) $\frac{1}{2}(\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$;

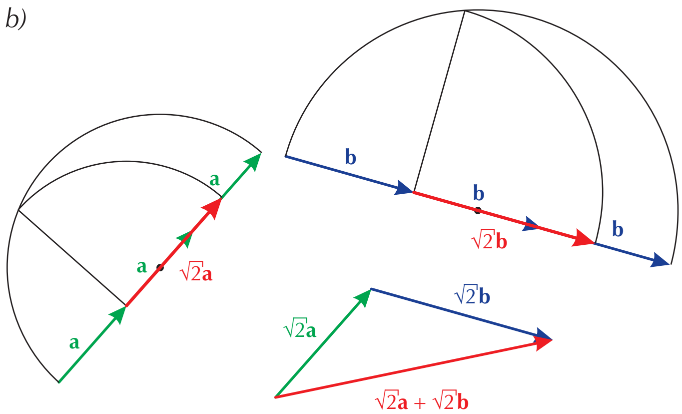
d) $-\frac{2}{3}\mathbf{a} + \sqrt{2}\,(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ vektorokat!

Megoldás (ábra)

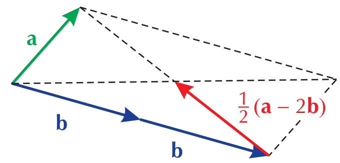
a)



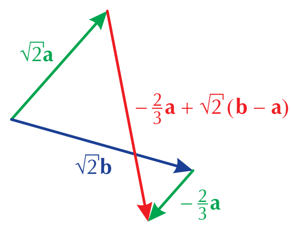
b)



c)



d)



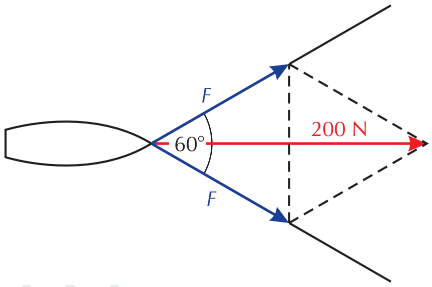
3. K2 Legyenek A; B; C; D és E tetszőleges pontok. Milyen λ-ra igaz, hogy
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \lambda(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA})$?

Megoldás

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = (-1)\cdot\overrightarrow{DA}$;
$\lambda(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}) = \lambda\overrightarrow{DA}$;
Tehát $\lambda = -1$.

50. EGYÉRTELMŰ VEKTORFELBONTÁSI TÉTEL

1. K1 Egy csónakot két kötéllel, egyenlő erővel húzunk. A kötelek egymással 60°-os szöget zárnak be. Mekkora a kötelekben ható erő, ha az eredő erő 200 N?



Megoldás

A kötelekben ébredő erő a szabályos háromszög tulajdonságai miatt

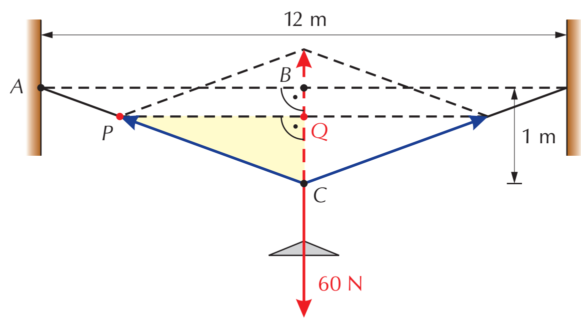
$$|\vec{F}|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 100 \quad\Rightarrow\quad |\vec{F}| = \frac{200}{\sqrt{3}}.$$

2. K2 Egy 6 kg tömegű lámpa függ az egymástól 12 m távolságra lévő póznák között kifeszített kötél felező pontjában. A lámpa belógása 13 cm. Mekkora erők keletkeznek a kötelekben?

Megoldás

A 6 kg tömegű lámpa 60 N erővel húzza a köteleket. A két kötélerő tart egyensúlyt lámpa súlyával. Az ABC háromszög hasonló a PQC háromszöghöz, és AC a Pitagorasz tételből kiszámítva 6,08 m, tehát

$$\frac{|\overrightarrow{CP}|}{6{,}08} = \frac{30}{1} \quad\Rightarrow\quad |\overrightarrow{CP}| \approx 182{,}5\,\text{N}.$$



3. E1 Az **a** és **b** vektorok nem párhuzamosak. Határozzuk meg α és β értékét!
a) $7\mathbf{a} + 9\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a} + (2\beta + 1)\mathbf{b}$;
b) $(2\beta + \alpha - 3)\mathbf{a} - (\beta - \alpha)\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Megoldás

Az egyértelmű vektorfelbontási tétel szerint, ha két vektor egyenlő, akkor egyértelműen írható fel adott **a**-nak és **b**-nek számszorosaiként. Ezért
a) $\alpha = 7$ és $2\beta + 1 = 9$, $\beta = 4$, illetve
b) $(2\beta + \alpha - 3) = 0$ és $-(\beta - \alpha) = 0$; $\alpha = 1$ és $\beta = 1$.

4. E1 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör középpontjának egy oldaltól mért távolsága feleakkora, mint a magasságpontnak a szemközti csúcstól mért távolsága!

Megoldás

A háromszög köré írt kör K középpontjából a háromszög csúcsaiba egyenlő hosszú vektorok mutatnak. A következő feladat megoldása szerint $\overrightarrow{KP} - \mathbf{c} = \overrightarrow{CP} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, és a rombusz átlói merőleges felezik egymást, így az AB szakasz felező pontjába mutató vektor $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, ami fele a C csúcsból a magasságpontba mutató vektornak, hiszen P azonos az M ponttal.

5. E2 A háromszög köré írt kör középpontjából a csúcsokba vezető vektorok **a, b, c.** Bizonyítsuk be, hogy ugyaninnen a magasságpontba mutató vektor $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$!

Megoldás

A háromszög köré írt kör K középpontjából a háromszög csúcsaiba egyenlő hosszú vektorok mutatnak. Jelölje P azt a pontot, ahova az $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ vektor mutat, tehát $\overrightarrow{KP}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$. Ebből következik, hogy $\overrightarrow{KP}-\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Mivel $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ rombuszt feszít ki, így az AB oldalra merőleges. $\overrightarrow{KP}-\mathbf{c}=\overrightarrow{CP}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, és ezért P pont rajt van a C-ből induló magasság vonalon. Hasonlóan igazolható, hogy a másik két magasság vonalra is illeszkedik, tehát P a magasságpont.

51. VEKTOROK A KOORDINÁTASÍKON. HELYVEKTOROK

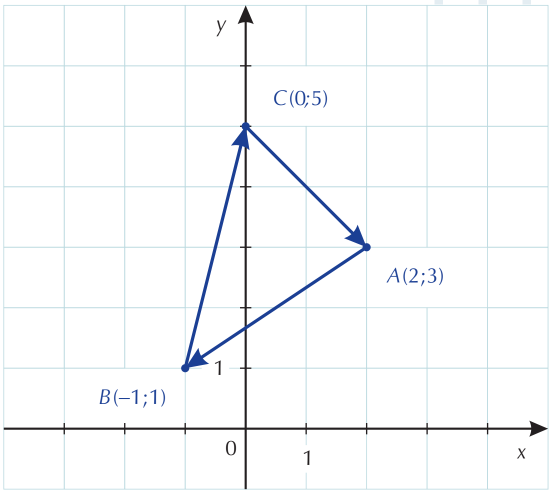
1. K1 Határozzuk meg az ABC háromszög oldalvektorait, ha $A(2;\ 3)$, $B(-1;\ 1)$ és $C(0;\ 5)$!

Megoldás

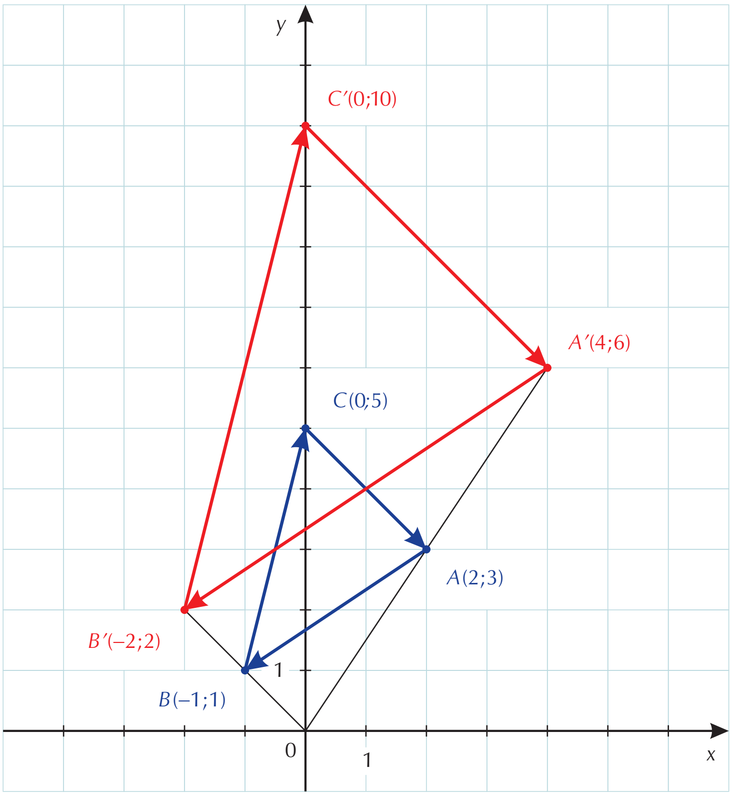
$\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}(-3;\ 2)$;

$\overrightarrow{BC}=\vec{C}-\vec{B}(1;\ 4)$;

$\overrightarrow{CA}=\vec{A}-\vec{C}(2;\ -2)$.



2. K1 Nagyítsuk az előző feladat háromszögét kétszeresére az origóból! Mik lesznek a keletkező háromszög csúcsai, oldalvektorai?



Megoldás

A csúcsok: $A'(4;\,6)$; $B'(-2;\,2)$ és $C'(0;\,10)$.

Az oldalvektorok:

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{B'} - \overrightarrow{A'}(-6;-4);$

$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{C'} - \overrightarrow{B'}(2;8);$

$\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{A'} - \overrightarrow{C'}(4;-4).$

3. K2 Az *ABC* háromszöget (lásd 1. feladat)
a) tükrözzük az *x* tengelyre;
b) tükrözzük az origóra;
c) tükrözzük a (4; 2) pontra;
d) toljuk el a **v**(–5; 1) vektorral!
Rajzoljuk le és adjuk meg a képpontok koordinátáit!
Írjuk fel a képháromszögek csúcsainak koordinátáit!

Megoldás

a) $A'(2;\,-3)$; $B'(-1;\,-1)$; $C(0\,;\,-5)$.
b) $A''(-2;\,-3)$; $B''(1;\,-1)$; $C''(0;\,-5)$.

c) A tükrözés után *P* pont felező pontja lesz a AA^* szakasznak. Ezért $\vec{P} = \dfrac{\vec{A} + \vec{A^*}}{2}$, ahonnan $\vec{A^*} = 2\vec{P} - \vec{A}$.

A keresett pontok koordinátái: $A^*(6;\,1)$, $B^*(9;\,3)$ és $C^*(8;\,-1)$.
d) $A_1(-3;\,4)$; $B_1(-6;\,2)$; $C_1(-5;\,6)$.

52. FELEZŐPONT, OSZTÓPONT

1. K2 Bizonyítsuk be, hogy ha $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$, akkor az *AB* és *CD* szakaszok valamely *O* pontra szimmetrikusak!

Megoldás

Osszuk végig 2-vel az egyenletet. $\dfrac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}}{2}$. Ez éppen azt jelenti, hogy az *AC* és *BD* szakaszok felező pontja ugyanaz a pont, tehát erre szimmetrikusak.

2. K2 Írjuk fel az AB szakasz B-hez közelebbi
a) negyedelőpontjába;
b) 2 : 7 arányú osztópontjába
mutató vektort az A és B pontokba mutató vektorok segítségével!

Megoldás

a) Legyen ez a pont P. $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Bontsuk fel a két pont közötti vektorokat helyvektorokra.

$\vec{B} - \vec{P} = \frac{1}{4}(\vec{B} - \vec{A})$. Átrendezve és P helyvektorát kifejezve:

$\vec{P} = \vec{B} - \frac{1}{4}(\vec{B} - \vec{A}) = \frac{3}{4}\vec{B} + \frac{1}{4}\vec{A}$.

b) Itt a kiinduló egyenlőség :

$\frac{1}{2}\overrightarrow{PB} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AP}$, ahonnan az előbbihez hasonló lépések után az adódik, hogy

$\vec{P} = \frac{7}{9}\vec{B} + \frac{2}{9}\vec{A}$.

3. K2 Hosszabbítsuk meg az AB szakaszt A-n túl
a) a felével;
b) a $\frac{2}{3}$-ával;
c) az $\frac{5}{13}$-ával!
Írjuk fel az ide mutató vektort az A és B pontokba mutató vektorok segítségével!

Megoldás

a) Jelölje a keresett pontot P. Most a kiinduló összefüggés: $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Ebből a felbontás és az átrendezés után $\vec{P} = \frac{3}{2}\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{A}$.

b) A kiinduló összefüggés: $\overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, ahonnan $\vec{P} = \frac{5}{3}\vec{B} - \frac{2}{3}\vec{A}$.

c) A kiinduló összefüggés: $\overrightarrow{AP} = -\frac{5}{13}\overrightarrow{AB}$, ahonnan $\vec{P} = \frac{18}{13}\vec{B} - \frac{5}{13}\vec{A}$.

4. E1 Írjuk fel az ABC háromszög A csúcsából induló szögfelezőjének a BC oldallal való metszéspontjába mutató vektort az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok segítségével!

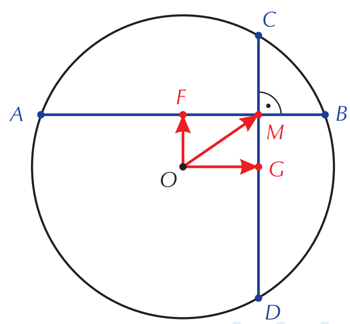
Megoldás

A szögfelező tétel szerint a szög a szemközti oldalt a közrefogó oldalak arányában osztja. Az eljárás megegyezik az előzőekben bemutatottakkal. A szemközti oldallal való metszéspontot P-vel jelölve és a szokásos jelöléseket használva $\overrightarrow{AP} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b + c}$ adódik.

5. E2 Az O középpontú körben vegyünk fel két egymásra merőleges húrt, ezek végpontjai A, B, illetve C, D, metszéspontjuk M. Bizonyítsuk be, hogy
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}$!

Megoldás

Az AB húr F felező pontjába mutató vektor $\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$, a CD húr G felező pontjába mutató vektor $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$. E két vektor egymásra merőleges, mert a húrok is azok voltak. A két vektort összeadva a két húr metszéspontjába jutunk. Tehát $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$. Innen 2-vel átszorozva adódik az állítás.



53. HÁROMSZÖG SÚLYPONTJÁBA MUTATÓ VEKTOR

1. K2 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlypontjából a háromszög csúcsaiba mutató vektorok összege **0**!

Megoldás

$\mathbf{s} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$.

Válasszuk a közös O kezdőpontot a súlypontnak, így a bal oldalon nullvektor áll.

2. K2 Az *ABC* háromszög súlypontja *S*, a tőle különböző tetszőleges *XYZ* háromszögé pedig *Q*. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = 3\overrightarrow{SQ}$!

Megoldás

Bontsuk fel a két pont közötti vektorokat helyvektorok különbségére.

$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \vec{X} - \vec{A} + \vec{Y} - \vec{B} + \vec{Z} - \vec{C}$. Felhasználva a súlypontba mutató vektorról tanultakat:

$3\overrightarrow{SQ} = 3\left(\vec{Q} - \vec{S}\right) = 3\left(\dfrac{\vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z}}{3} - \dfrac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}\right) = \vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z} - \left(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}\right)$, és ezt kellett bizonyítani.

3. E1 Az *ABC* háromszög *AB*, *BC*, *CA* oldalán jelöljük ki rendre a *P*, *Q*, *R* pontokat úgy, hogy

a) $AP = 2PB$, $BQ = 2QC$ és $CR = 2RA$;

b) $AP = \alpha PB$, $BQ = \alpha QC$ és $CR = \alpha RA$ fennálljon!

Bizonyítsuk be, hogy az *ABC* és *PQR* háromszögeknek közös a súlypontja!

Megoldás

a) Az osztópontba mutató vektort kell először meghatározni a „kancsal szorzási szabály” alkalmazásával. $\vec{P} = \dfrac{\vec{A}+2\vec{B}}{3}$; $\vec{Q} = \dfrac{\vec{B}+2\vec{C}}{3}$ és $\vec{R} = \dfrac{\vec{C}+2\vec{A}}{3}$. A három egyenlet összeadásából az adódik, hogy $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$. Hárommal osztva az egyenletet kapjuk az állítást.

b) Az osztópontba mutató vektort kell először meghatározni a „kancsal szorzási szabály” alkalmazásával. $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{PB}$. Szétbontva és rendezve azt kapjuk, hogy $\vec{P} = \dfrac{\vec{A}+\alpha\vec{B}}{1+\alpha}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\vec{Q} = \dfrac{\vec{B}+\alpha\vec{C}}{1+\alpha}$ és $\vec{R} = \dfrac{\vec{C}+\alpha\vec{A}}{1+\alpha}$. A három egyenlet összeadásából az adódik, hogy $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$. Hárommal osztva az egyenletet kapjuk az állítást.

4. E1 Az *ABC* háromszög *AB*, *BC*, *CA* oldalegyenesén jelöljük ki rendre a *P*, *Q*, *R* pontokat úgy, hogy

a) $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = 3\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CR} = 3\overrightarrow{CA}$;

b) $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = \alpha\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CR} = \alpha\overrightarrow{CA}$ fennálljon!

Bizonyítsuk be, hogy az *ABC* és *PQR* háromszögeknek közös a súlypontja!

Megoldás

a) $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$-ből $\vec{P} - \vec{A} = 3\left(\vec{B} - \vec{A}\right) \Rightarrow \vec{P} = 3\vec{B} - 2\vec{A}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\vec{Q} = 3\vec{C} - 2\vec{B}$ és $\vec{R} = 3\vec{A} - 2\vec{C}$. A három egyenlet összeadásából az adódik, hogy $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$. Hárommal osztva az egyenletet kapjuk az állítást.

b) $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{P} = \alpha\vec{B} + (1-\alpha)\vec{A}$. Hasonlóan $\vec{Q} = \alpha\vec{C} + (1-\alpha)\vec{B}$ és $\vec{R} = \alpha\vec{A} + (1-\alpha)\vec{C}$. A három egyenlet összeadásából az adódik, hogy $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$. Hárommal osztva az egyenletet kapjuk az állítást.

5. E2 Az ABC háromszög súlypontja legyen S, az XYZ háromszögé pedig Q. Az AX, BY, CZ szakaszok felezőpontjai legyenek rendre U, V és W. Bizonyítsuk be, hogy ha R az UVW háromszög súlypontja, akkor R felezi az SQ szakaszt!

Megoldás

Ehhez a feladathoz igazából még ábrát sem lehet készíteni. Nem mondtuk, hogy a két háromszög egysíkú-e vagy sem, mégis vektorok segítségével ki tudjuk számítani, hogy az állítás igaz. Tudjuk, hogy a súlypontokba az $\vec{S} = \frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}$, illetve a $\vec{Q} = \frac{\vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z}}{3}$ vektorok mutatnak.

A felező pontokba mutató vektorok: $\vec{U} = \frac{\vec{A}+\vec{X}}{2}$; $\vec{V} = \frac{\vec{B}+\vec{Y}}{2}$ és $\vec{W} = \frac{\vec{C}+\vec{Z}}{2}$. Az UVW háromszög súlypontjába mutató vektor $\vec{R} = \frac{\vec{U}+\vec{V}+\vec{W}}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{A}+\vec{X}}{2} + \frac{\vec{B}+\vec{Y}}{2} + \frac{\vec{C}+\vec{Z}}{2}\right) =$
$= \frac{1}{6}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z})$, ez pedig azonos az SQ szakasz felező pontjába mutató vektorral, mert

$$\vec{F}_{SQ} = \frac{1}{2}(\vec{S}+\vec{Q}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3} + \frac{\vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z}}{3}\right) = \frac{1}{6}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z}) = \vec{R}.$$

A bizonyítás azt is megengedi, hogy a háromszögek közül egy vagy több elfajuló háromszög legyen (vagyis egy egyenes három pontja).

A TETRAÉDER SÚLYPONTJA (OLVASMÁNY)

1. K2 Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlypontjából a csúcsokba mutató vektorok összege **0**!

Megoldás

$\mathbf{s} = \frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$. Válasszuk a közös O kezdőpontot a súlypontnak, így a bal oldalon nullvektor áll.

2. E1 Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder lapjainak súlypontjai által meghatározott tetraéder súlypontja egybeesik a tetraéder súlypontjával!

Megoldás

A tér tetszőleges pontjából a lapsúlypontokba vezető vektorok $\vec{S}_D = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$; $\vec{S}_C = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d}}{3}$; $\vec{S}_B = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}+\mathbf{c}}{3}$ és $\vec{S}_A = \frac{\mathbf{d}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$. E négy pont által meghatározott tetraéder súlypontja

$$\mathbf{s} = \frac{1}{4}(\vec{S}_A+\vec{S}_B+\vec{S}_C+\vec{S}_D) = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3} + \frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3} + \frac{\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{d}}{3} + \frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{b}}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3\mathbf{a}+3\mathbf{b}+3\mathbf{c}+3\mathbf{d}}{3}\right) = \frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}).$$

3. E2 Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlypontja felezi a szemközti élpárok felezőpontjait összekötő szakaszokat!

Megoldás

A szimmetria miatt elég megmutatni például az AB és CD élek felező pontjait összekötő szakasz felező pontjáról, hogy a súlyponttal azonos. A szemközti élpárok felezőpontjaiba mutató vektorok (ha a tér tetszőleges pontjából a tetraéder csúcsaiba mutató vektorok $\vec{A}$; $\vec{B}$; $\vec{C}$ és $\vec{D}$): $\vec{F}_{AB} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$ és $\vec{F}_{CD} = \frac{\vec{C}+\vec{D}}{2}$. Ezek felező pontja: $\vec{F} = \frac{\vec{F}_{AB}+\vec{F}_{CD}}{2} = \frac{\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2} + \frac{\vec{C}+\vec{D}}{2}}{2} =$
$= \frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}}{4} = \vec{S}$, és ezt kellett bizonyítani.

54. A VEKTOR ELFORGATÁSA ±90°-KAL

1. K1 Egy négyzet két szomszédos csúcsa $A(1;\ 4)$, $B(5;\ 2)$. Számítsuk ki a CD oldal felezőpontjának koordinátáit!

Megoldás

Felező pont (AB) $F(3;\ 3)$

$\overrightarrow{AB}(4;\ -2)$

$\swarrow \qquad \searrow$ (±90°-os forgatás)

$(2;\ 4) \qquad (-2;\ -4)$

Felező pont (CD) $P_1(5;\ 7) \qquad P_2(1;\ -1) \qquad (+\vec{F})$

2. K1 Egy négyzet egyik csúcspontjának koordinátái $A(8;\ -2)$, átlóinak metszéspontja $G\left(\frac{27}{4};\ 3\right)$. Számítsuk ki a többi csúcspont koordinátáit!

Megoldás

A C csúcsot megkapjuk, ha A-t tükrözzük G-re. $C(5{,}5;\ 8)$.

$\overrightarrow{AB}(-1{,}25;\ 5)$

$\swarrow \qquad \searrow$ (±90°-os forgatás)

$(5;\ 1{,}25) \qquad (-5;\ -1{,}25)$

$B(11{,}75;\ 4{,}25) \qquad D(1{,}75;\ 1{,}75) \qquad (+\vec{G})$

3. K2 Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának végpontjai $A(-3;\ -1)$ és $B(5;\ 3)$. Számítsuk ki a súlypontjának koordinátáit!

Megoldás

Felező pont $F(1;\ 1)$

$\overrightarrow{FB}(4;\ 2)$

$\swarrow \qquad \searrow$ (±90°-os forgatás)

$(2;\ -4) \qquad (-2;\ 4)$

$\left(\frac{2}{3};\ -\frac{4}{3}\right) \qquad \left(-\frac{2}{3};\ \frac{4}{3}\right) \qquad \left(=\frac{1}{3}\overrightarrow{FB}^{\pm 90^\circ}\right)$

$S_1\left(\frac{5}{3};\ -\frac{1}{3}\right) \qquad S_2\left(\frac{1}{3};\ \frac{7}{3}\right) \qquad (+\vec{F})$

4. E1 Az $ABCD$ téglalap hosszabb AB oldala háromszorosa a rövidebbnek. A rövidebb oldal végpontjainak koordinátái $B(-3;\ -2)$ és $C(4;\ 1)$ Számítsuk ki a többi csúcspont koordinátáit!

Megoldás

$\overrightarrow{BC}(7;\ 3)$

$\swarrow \qquad \searrow$ (±90°-os forgatás)

$(3;\ -7) \qquad (-3;\ 7)$

$(9;\ -21) \qquad (-9;\ 21) \qquad \left(=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{BC}^{\pm 90^\circ}\right)$

$A_1(6;\ -23) \qquad A_2(-12;\ 19) \qquad (+\vec{B})$

$D_1(13;\ -20) \qquad D_2(-5;\ 22) \qquad (+\vec{C})$

5. E1 Egy szabályos háromszög két csúcsa $A(5;\ 3\sqrt{3})$, $B(2;\ 0)$. Határozzuk meg a háromszög harmadik csúcspontjának koordinátáit!

Megoldás

Felezőpont $\vec{F} = \left(\frac{7}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB}(-3;\ -3\sqrt{3})$

(±90°-os forgatás)

$(3\sqrt{3};\ -3)$ | $(-3\sqrt{3};\ 3)$

$\left(\frac{9}{2};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ | $\left(-\frac{9}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ | $\left(= \overrightarrow{FC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}^{\pm 90^\circ}\right)$

$C_1(8;\ 0)$ | $C_2(1;\ 3\sqrt{3})$ | $(+\vec{F})$

VI. TRIGONOMETRIA

55. HEGYESSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI

1. K1 Határozzuk meg α szögfüggvényértékeit a függvénytáblázat segítségével, ha
a) $\alpha = 80°$; *b)* $\alpha = 71°$; *c)* $\alpha = 62{,}3°$; *d)* $\alpha = 50°\,14'$; *e)* $\alpha = 0{,}37$ radián!

Megoldás

a) $\sin\alpha = 0{,}9848$, $\cos\alpha = 0{,}1736$, $\operatorname{tg}\alpha = 5{,}671$, $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}1763$.
b) $\sin\alpha = 0{,}9455$, $\cos\alpha = 0{,}3256$, $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}904$, $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}3443$.
c) $0{,}3° = 18'$.
$\sin\alpha = 0{,}8854$, $\cos\alpha = 0{,}4648$, $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}905$, $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}5250$.
d) $\sin\alpha = 0{,}7687$, $\cos\alpha = 0{,}6397$, $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}202$, $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}8322$.
e) $0{,}37 \text{ radián} = \dfrac{0{,}37\cdot 180°}{\pi} = 21°\,12'$.
$\sin\alpha = 0{,}3616$, $\cos\alpha = 0{,}9323$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}3879$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}578$.

2. K1 Határozzuk meg α szögfüggvényértékeit zsebszámológép segítségével, ha
a) $\alpha = 11°\,9'$; *b)* $\alpha = \frac{\pi}{7}$ radián!

Megoldás

a) $11°\,9' = 11{,}15°$.
$\sin\alpha = 0{,}193378232$, $\cos\alpha = 0{,}981124283$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}19709861$, $\operatorname{ctg}\alpha = 5{,}073602497$.
b) $\frac{\pi}{7}$ radián $= \dfrac{180°}{7}$.
$\sin\alpha = 0{,}433883739$, $\cos\alpha = 0{,}900968867$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}481574618$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}076521397$.
Megjegyzés: A számológépek többsége az utolsó jegyet kerekítve írja ki (de nem mindegyik).

3. K1 Melyik az az α hegyesszög, amelyre
a) $\sin\alpha = 0{,}2$; *b)* $\cos\alpha = 0{,}33$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha = 4{,}78$; *d)* $\operatorname{ctg}\alpha = 5{,}210$?

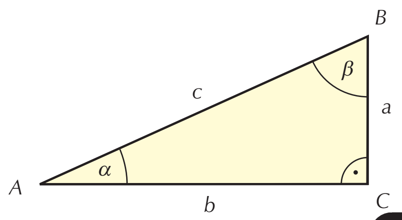
Megoldás

A szög visszakeresését függvénytáblázat vagy zsebszámológép segítségével végezhetjük. Két tizedesjegy pontossággal:
a) $\alpha = 11{,}54°$, *b)* $\alpha = 70{,}73°$, *c)* $\alpha = 78{,}18°$, *d)* $\alpha = 10{,}87°$.

4. K1 A definíciók segítségével igazoljuk a szögfüggvények alábbi egyszerű tulajdonságait!
Ha α hegyesszög, akkor
a) $0 < \sin\alpha < 1$, $0 < \cos\alpha < 1$;
b) $0 < \operatorname{tg}\alpha$, $0 < \operatorname{ctg}\alpha$, és mindkét szögfüggvény tetszőlegesen nagy értéket felvehet;
c) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
d) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Megoldás

Az *ABC* derékszögű háromszögben alkalmazzuk a hagyományos jelöléseket.



a) A $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ összefüggés miatt az $\frac{a}{c} < 1$ és $\frac{b}{c} < 1$ egyenlőtlenségeket kell igazolnunk. Ezek pedig azért igazak, mert a derékszögű háromszög átfogója nagyobb, mint a befogója.

b) A $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ pozitív érték tetszőlegesen nagy lehet, mert ha b-t rögzítjük, akkor a bármilyen naggyá növelhető. Hasonlóan a $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$ arány értéke minden határon túl nő, ha a-t rögzítjük, és b-t növeljük.

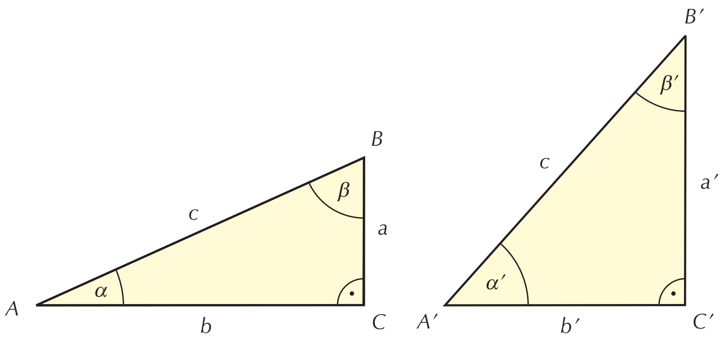
c) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$ valóban, és $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a}$ is teljesül.

d) A két azonosság a definíciók közvetlen következménye.

5. K2 A definíciók segítségével igazoljuk a szögfüggvények alábbi tulajdonságait!
Ha α és α' hegyesszögek és $\alpha < \alpha'$, akkor
a) $\sin\alpha < \sin\alpha'$;
b) $\cos\alpha > \cos\alpha'$;
c) $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\alpha'$;
d) $\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{ctg}\alpha'$.

Megoldás

Az *a)* és *b)* esetben tekintsünk egy további $A'B'C'$ derékszögű háromszöget, melyben $\alpha' > \alpha$ és $c' = c$ (tehát a két derékszögű háromszög átfogója ugyanakkora). $A'B'C'$ szerkesztéséből adódik, hogy $a' > a$ és $b' < b$. Így $\sin\alpha = \frac{a}{c} < \frac{a'}{c} = \sin\alpha'$ és $\cos\alpha = \frac{b}{c} > \frac{b'}{c} = \cos\alpha'$.



A *c)* esetben az $A'B'C'$ derékszögű háromszög AC befogója legyen rögzített b hosszúságú. Ha most $\alpha < \alpha'$, akkor $a < a'$, és $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} < \frac{a'}{b} = \operatorname{tg}\alpha'$.

A *d)* esetben felhasználjuk c) eredményét, valamint a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ összefüggést. Ha $\alpha < \alpha'$, akkor tehát $0 < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\alpha'$. Mindkét oldal reciprokát véve az egyenlőtlenség megfordul, $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} > \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha'}$, azaz $\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{ctg}\alpha'$.

6. K1 Egy templomtorony 50 méter távolságból 24°-os szögben látszik. Milyen magas a torony?

Megoldás

Ha a torony magassága m, akkor $\operatorname{tg} 24° = \frac{m}{50}$, s innen $m = 50 \cdot \operatorname{tg} 24° \approx 22{,}3$. A torony magassága tehát kb. 22 méter.

7. K1 Egy kilencemeletes lakóház emeleti szintjei átlagosan 3 méter magasak. Mekkora látószög alatt látszik 100 méter távolságból az épület?

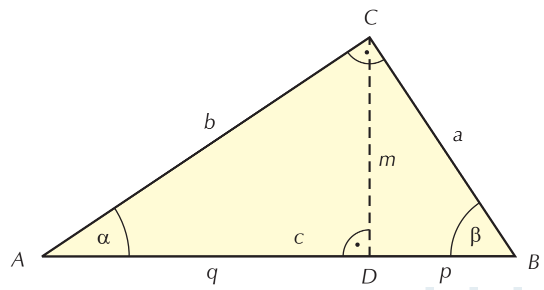
Megoldás

Ha a földszintet is számítjuk, akkor a ház magassága $10 \cdot 3 = 30$ méter. Az α látószögre $\operatorname{tg}\alpha = \frac{30}{100}$, innen $\alpha \approx 16{,}7°$.

56. DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK ADATAINAK MEGHATÁROZÁSA

1. Az ABC derékszögű háromszögben ($\gamma = 90°$) a hagyományos jelölésrendszert alkalmazzuk.
Határozzuk meg a háromszög szögeit és oldalait, ha

K1 *a)* $a = 8$ cm, $b = 15$ cm;
K1 *b)* $\alpha = 25°$, $a = 10$ cm;
K1 *c)* $\beta = 55°$, $q = 7$ cm;
K1 *d)* $a = 13$ cm, $p = 5$ cm;
K2 *e)* $c = 10$ cm, $m = 4$ cm!



Megoldás

a) Pitagorasz tételéből $c = \sqrt{a^2+b^2} = 17$ (cm). $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{8}{17}$, innen $\alpha \approx 28{,}1°$ és $\beta = 90° - \alpha \approx$ $\approx 61{,}9°$.

b) $\beta = 90° - \alpha = 65°$; $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, ebből $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{10}{\sin 25°} \approx 23{,}66$ (cm). $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$, innen $b = \frac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{10}{\mathrm{tg}\,25°} \approx 21{,}45$ (cm).

c) $\alpha = 90° - \beta = 35°$; $\cos\alpha = \frac{q}{b}$, innen $b = \frac{q}{\cos\alpha} = \frac{7}{\cos 35°} \approx 8{,}55$ (cm). $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{m}{q}$, innen $m = q \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = 7 \cdot \mathrm{tg}\,35° \approx 4{,}90$ (cm). $\sin\beta = \frac{m}{a}$, ebből $a = \frac{m}{\sin\beta} \approx \frac{4{,}90}{\sin 55°} \approx 5{,}98$ (cm). Pitagorasz tételéből $c = \sqrt{a^2+b^2} \approx 10{,}43$ (cm).

d) $\cos\beta = \frac{p}{a} = \frac{5}{13}$, innen $\beta \approx 67{,}4°$. $\alpha = 90° - \beta \approx 22{,}6°$. $\sin\beta = \frac{m}{a}$, ebből $m = a \cdot \sin\beta =$ $= 13 \cdot \sin 67{,}4° \approx 12{,}00$ (cm). $\sin\alpha = \frac{m}{b}$, innen $b = \frac{m}{\sin\alpha} \approx \frac{12}{\sin 22{,}6°} \approx 31{,}23$ (cm). Végül $c = \sqrt{a^2+b^2} \approx 33{,}83$ (cm).

e) $c = 10$ cm, $m = 4$ cm. A magasságtételt alkalmazva $m^2 = pq = p(c-p)$, így $p^2 - pc + m^2 =$ $= 0$. Ebből a $p^2 - 10p + 16 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, melynek két gyöke $p_1 = 2$ és $p_2 = 8$. Szimmetriaokok miatt feltehetjük, hogy $p = 2$ és $q = 8$ (p és q szerepe felcserélhető). $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{m}{q} = \frac{4}{8}$, innen $\alpha \approx 26{,}6°$, és $\beta = 90° - \alpha \approx 63{,}4°$. Mivel $\sin\alpha = \frac{m}{b}$, így $b = \frac{m}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin 26{,}6°} \approx 8{,}93$ (cm), és hasonlóan $a = \frac{m}{\sin\beta} \approx \frac{4}{\sin 63{,}4°} \approx 4{,}47$ (cm).

Megjegyzés: A számításokban, ahol csak lehetséges, az eredeti alakokkal dolgoztunk.

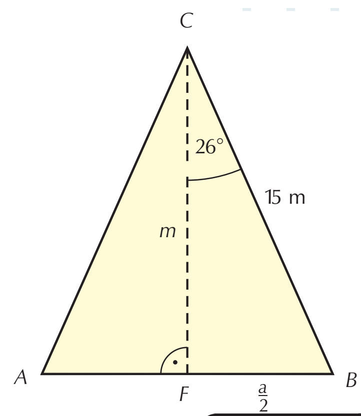
2. K1 Egy kertrész egyenlő szárú háromszög alakú, melynek szárai 15 m hosszúak, a szárak által bezárt szög 52°. Mekkora a kert alapja és területe?

Megoldás

Az ABC egyenlő szárú háromszögben legyen $AC = BC = 15$ m, az AB alap hosszát jelölje a. A szárak által bezárt szög CF felezője egyúttal az alap felezőmerőlegese, így $\sin 26° = \frac{\frac{a}{2}}{15}$, s innen $a = 30 \cdot \sin 26° \approx 13{,}15$ (m).

$\cos 26° = \frac{m}{15}$, így $m = 15 \cdot \cos 26° \approx 13{,}48$ (m).

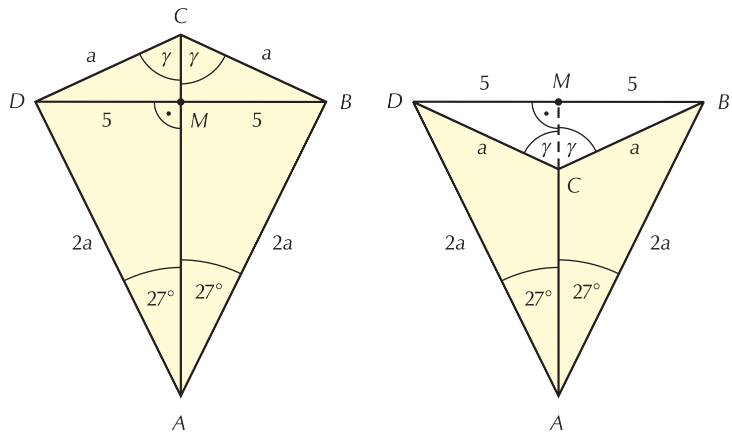
A háromszög területe $\frac{a \cdot m}{2} \approx 88{,}6$ (m²).



3. K2 Az *ABCD* deltoidban *AC* szimmetriatengely, az *AD* oldal kétszer olyan hosszú, mint a *DC* oldal, és $DAB\sphericalangle = 54°$. Mekkorák a deltoid oldalai és szögei, ha $BD = 10$ egység?

Megoldás

Két megoldás van, attól függően, hogy a négyszög konvex vagy konkáv deltoid.
A konvex deltoid ábrája szerinti jelöléseket alkalmazzuk: $AB = AD = 2a$, $CD = CB = a$, az átlók metszéspontja *M*. A tengelyes szimmetria miatt $DM = MB = 5$ egység, $DAC\sphericalangle = CAB\sphericalangle = 27°$, és legyen $DCA\sphericalangle = BCA\sphericalangle = \gamma$.



Az *AMD* derékszögű háromszögben $\sin 27° = \frac{5}{2a}$, innen $2a = \frac{5}{\sin 27°} \approx 11{,}01$ (egység), $a \approx 5{,}51$ (egység). $\sin\gamma = \frac{5}{a} = \frac{5}{5{,}51}$, innen $\gamma \approx 65{,}2°$. A konvex deltoid oldalai $AB = AD = 11{,}01$ egység, $CD = CB = 5{,}51$ (egység); szögei $A\sphericalangle = 54°$, $C\sphericalangle = 2\gamma = 130{,}4°$, $B\sphericalangle = D\sphericalangle = \frac{360° - A\sphericalangle - C\sphericalangle}{2} = 87{,}8°$.

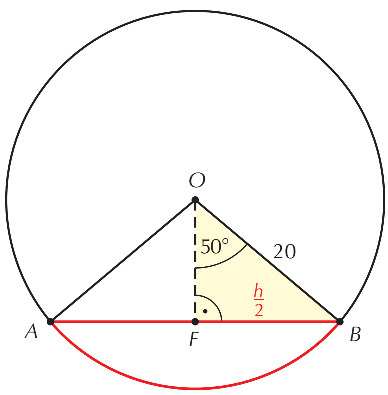
A konkáv deltoidban csak a szögek mások. $C\sphericalangle = 360° - 2\gamma = 229{,}6°$, s így $B\sphericalangle = D\sphericalangle = 38{,}2°$.

4. K2 Adott az *O* középpontú, $r = 20$ egység sugarú kör. Mennyivel hosszabb a kör 100°-os középponti szögéhez tartozó rövidebbik íve, mint a húrja?

Megoldás

A 100°-os középponti szöghöz tartozó *AB* húr felezőpontját jelölje *F*, a húr hosszát *h*. Az *OFB* derékszögű háromszögben $FOB\sphericalangle = 50°$, így $\sin 50° = \frac{\frac{h}{2}}{20}$ összefüggésből $h = 40 \cdot \sin 50° \approx 30{,}64$ (egység). A rövidebbik *AB* ív hossza $\frac{100}{360} \cdot 2r\pi \approx 34{,}91$ (egység).

Vagyis az ív $\approx 4{,}27$ egységgel hosszabb.



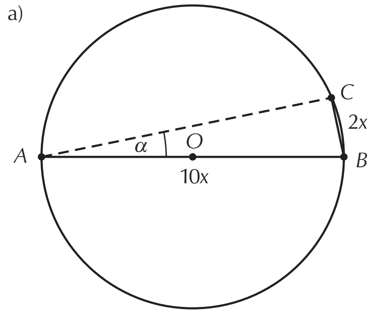
5. K1 Szerkesszük meg azt a hegyesszöget, melynek

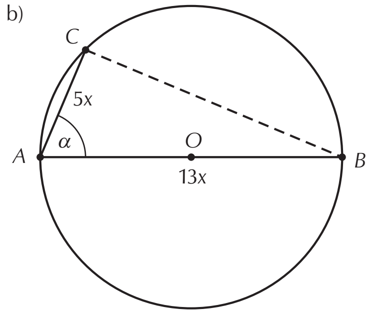
a) szinusza 0,2; *b)* koszinusza $\frac{5}{13}$; *c)* tangense 2; *d)* kotangense $\sqrt{5}$!

Megoldás

Jelöljük α-val a szerkesztendő hegyesszöget. A megoldás során azt használjuk ki, hogy α egy szögfüggvénye hasonló derékszögű háromszögeket határoz meg.

Az *a)* és *b)* esetben olyan derékszögű háromszögeket szerkesztünk, amelyekben a megfelelő befogó és átfogó aránya 0,2, illetve $\frac{5}{13}$.





a) Az $AB = 10x$ hosszúságú szakasz Thalesz köre , valamint a B középpontú, $2x$ sugarú kör metszéspontja kijelöli C-t, amelyre $BAC\sphericalangle = \alpha$.
b) Az $AB = 13x$ hosszúságú szakasz Thalesz köre, valamint az A középpontú, $5x$ sugarú kör metszéspontja jelöli ki C-t. Ekkor $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$.

Az utolsó két esetben pedig olyan C csúcsú derékszögű háromszögeket szerkesztünk, melyek befogói
c) $AC = x$, $CB = 2x$;
d) $AC = \sqrt{5}x$, $CB = x$.
($\sqrt{5}x$ szerkeszthető: Pitagorasz tétele értelmében az x és $2x$ befogójú derékszögű háromszög átfogója.)

6. K1 Az alábbiakban pitagoraszi számhármasok két tagját adjuk meg. Határozzuk meg a harmadik tagot és a számhármasok által meghatározott derékszögű háromszögek legkisebb szögét! (Az $a < b < c$ pozitív egész számokat pitagoraszi számhármasnak nevezzük, ha van olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai a, b, c hosszúak.)
a) $a = 3$, $b = 4$; *b)* $a = 5$, $c = 13$; *c)* $b = 24$, $c = 25$; *d)* $a = 6$, $c = 10$.

Megoldás

A Pitagorasz-tételt alkalmazzuk, az $a^2 + b^2 = c^2$ egyenletből:

a) $c = 5$; $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, innen $\alpha \approx 36{,}9°$.

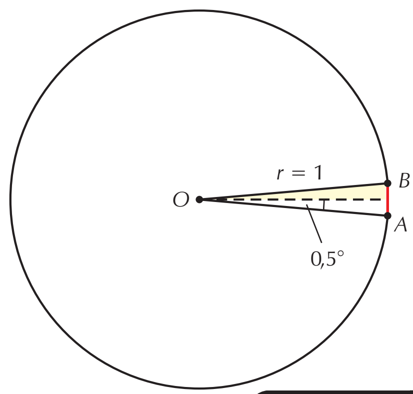
b) $b = 12$; $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, innen $\alpha \approx 22{,}6°$.

c) $a = 7$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$, innen $\alpha \approx 16{,}3°$.

d) $b = 8$; ez a háromszög hasonló az *a)* háromszöghöz, így $\alpha \approx 36{,}9°$.

7. K2 Ptolemaiosz Kr. u. 150 körül úgy találta, hogy az egységsugarú kör 1°-os középponti szögéhez tartozó húrja $\frac{1}{60} + \frac{2}{60^2} + \frac{50}{60^3}$ hosszúságú. (A kissé furcsa számalaknak az az oka, hogy a tudós eredetileg 60-as számrendszerben adta meg a számot.) Mennyire volt pontos a közelítés? Nem lett volna helyesebb az utolsó tag esetében a $\frac{49}{60^3}$, vagy $\frac{51}{60^3}$ törttel számolniuk a görögöknek?

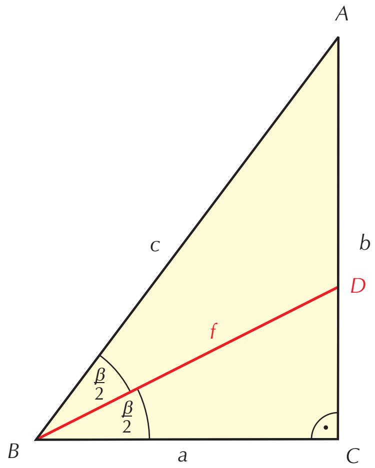
Megoldás



Ptolemaiosz eredményének közelítő értéke $H = 0{,}017453703$. Az 1°-os középponti szög olyan OAB egyenlő szárú háromszöget határoz meg, melyet az O csúcshoz tartozó szögfelező két egybevágó, 0,5°-os derékszögű háromszögre bont. Így az AB húr fele $r \cdot \sin 0{,}5° = \sin 0{,}5°$ hosszú, AB hossza pedig $h = 2 \cdot \sin 0{,}5° \approx 0{,}017453071$.

A két érték eltérése kicsi: $H - h \approx 6{,}32 \cdot 10^{-7}$. Vizsgáljuk a változást: $\frac{1}{60^3} \approx 4{,}63 \cdot 10^{-6} = 46{,}3 \cdot 10^{-7}$, s ez jóval nagyobb, mint $H - h$. Így azt mondhatjuk, hogy – ebben az alakban – Ptolemaiosz eredménye pontos volt.

8. K2 Az ABC derékszögű háromszögben ($\gamma = 90°$) $AC = 12$, $BC = 16$ egység. Milyen hosszú a B csúcsból húzható szögfelező?



Első megoldás

A hagyományos jelölésekkel dolgozunk: $AC = b$, $BC = a$, $ABC\sphericalangle = \beta$, és jelölje f a BD szögfelező hosszát.

Az ABC háromszögben $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{12}{16}$, innen $\beta \approx 36{,}87°$, $\frac{\beta}{2} \approx 18{,}43°$. A DBC háromszögben $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{a}{f}$, innen pedig $f = \frac{a}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{16}{\cos 18{,}43°} \approx 16{,}86$ (egység).

Második megoldás

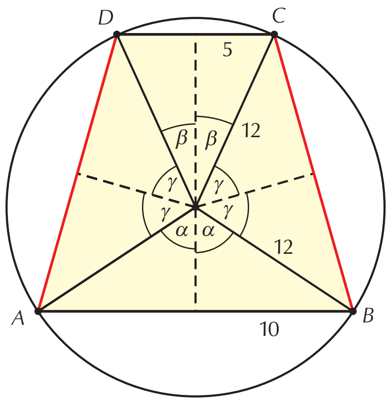
Nem szükséges a szögfüggvények használata.

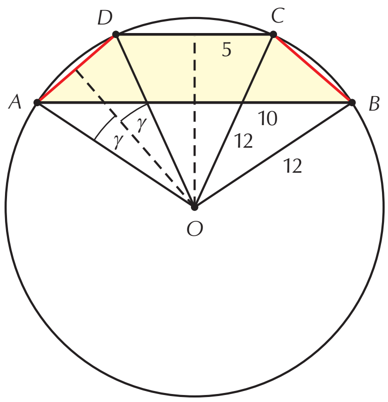
$c = \sqrt{a^2+b^2} = 20$. A szögfelező-tétel szerint a belső szögfelező a szemköztes oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. Ez alapján $\frac{CD}{DA} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$, így $CD = 4\cdot\frac{12}{9} = \frac{16}{3}$. Végül Pitagorasz tételét alkalmazzuk a BCD háromszögben: $f = \sqrt{a^2+CD^2} =$
$= \sqrt{16^2+\left(\frac{16}{3}\right)^2} \approx 16{,}87$ (egység).

9. E1 Az $r = 12$ cm sugarú körbe írt húrtrapéz párhuzamos oldalainak hossza $AB = 20$ cm és $CD = 10$ cm. Mekkorák a trapéz szárai és szögei?

Megoldás

A húrtrapéz egyenlő szárú, tengelyesen szimmetrikus négyszög. Az ábra szerint jelölje a csúcsokat A, B, C, D, a körülírt kör középpontját O, az egyes oldalakhoz mint húrokhoz tartozó középponti szögeket 2α, 2β, 2γ. A párhuzamos oldalak és O helyzete alapján két esetet különböztetünk meg.





Az első esetben a párhuzamos oldalak közrefogják az O középpontot. Ekkor $\sin\alpha = \frac{10}{12}$, innen $\alpha \approx 56{,}4°$; és $\sin\beta = \frac{5}{12}$, így $\beta \approx 24{,}6°$. $\gamma = \frac{180° - \alpha - \beta}{2} \approx 49{,}5°$.

A trapéz szögei: $A\sphericalangle = 180° - \alpha - \gamma \approx 74{,}1°$; $B\sphericalangle = A\sphericalangle$; $C\sphericalangle = D\sphericalangle = 180° - A\sphericalangle \approx 105{,}9°$.

A trapéz AD és BC szára $2\cdot 12\cdot\sin\gamma \approx 18{,}25$ egység hosszú.

A második esetben O a trapézon kívül esik. Ekkor α és β értéke változatlan, $\gamma = \frac{\alpha-\beta}{2} \approx 15{,}9°$.
$A\sphericalangle = 90° - \gamma - (90° - \alpha) = \alpha - \gamma \approx 40{,}5°$; $B\sphericalangle = A\sphericalangle$; $C\sphericalangle = D\sphericalangle = 180° - A\sphericalangle \approx 139{,}5°$.

A trapéz AD és BC szára $2\cdot 12\cdot\sin\gamma \approx 6{,}58$ egység hosszú.

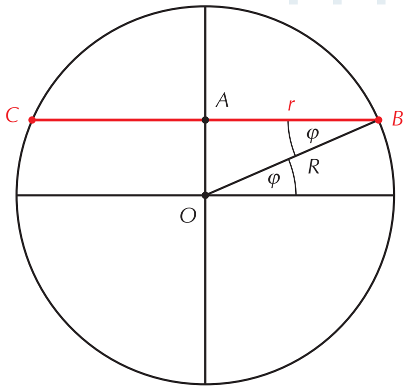
10. K2 Milyen hosszú a Ráktérítő? (A Földet tekintsük $R = 6370$ km sugarú gömbnek.)

Megoldás

A Ráktérítő a $\varphi \approx 23{,}5°$-os északi szélességi kör. A Föld függőleges tengelyén átmenő sík által kimetszett főkörből (ez egy hosszúsági kör) az erre merőleges Ráktérítő síkja az ábra szerinti BC húrt metszi ki. A Ráktérítő középpontját jelölje A, ekkor $OBA\sphericalangle = \varphi$ szintén (váltószögek).

Ha r jelöli a Ráktérítő sugarát, akkor $\cos\varphi = \frac{r}{R}$, s innen $r \approx R \cdot \cos\varphi$.

A Ráktérítő hossza $2 \cdot R \cdot \cos\varphi \cdot \pi = 36\,704{,}3 \approx 36\,700$ (km).



57. ÖSSZEFÜGGÉSEK A HEGYESSZÖGEK SZÖGFÜGGVÉNYEI KÖZÖTT

1. K1 A trigonometria alapegyenletének felhasználásával határozzuk meg az α hegyesszög többi szögfüggvényének a pontos értékét, ha

a) $\sin\alpha = 0{,}6$; *b)* $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha = 5$; *d)* $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}5$!

Megoldás

A $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ egyenletből kifejezhetjük $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ értékét is. Mivel a hegyesszögek szögfüggvényei pozitívak, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ és $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Kifejezhető $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{ctg}\alpha$ is a szinusz- vagy koszinusz függvényekkel: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, és $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

a) $\cos\alpha = \sqrt{1-0{,}6^2} = 0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{3}$.

b) $\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{8}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

c) $\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = 5$. Négyzetre emelhetünk: $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 25$, azaz $\cos^2\alpha = \frac{1}{26}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

(Ismét kihasználtuk, hogy $\cos\alpha > 0$.) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{5}$; $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

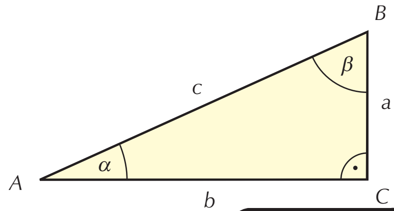
d) $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Az előző gondolatmenetet alkalmazva $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. K1 Oldjuk meg az előző *a)–d)* feladatokat, de most a trigonometria alapegyenletének felhasználása nélkül!

Megoldás

Alkalmazzuk a háromszög oldalaira és szögeire a hagyományos jelöléseket!

a) Mivel $\sin\alpha = 0{,}6$, legyen $a = 6x$, $c = 10x$ hosszú. (Vagy a derékszögű háromszögek hasonlósága folytán választható $a = 6$, $c = 10$; vagy $a = 3$, $c = 5$.) Ekkor Pitagorasz tételéből $b = \sqrt{(10x)^2-(6x)^2} = 8x$.
$\cos\alpha = \frac{b}{c} = 0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6x}{8x} = 0{,}75$ és $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{3}$.



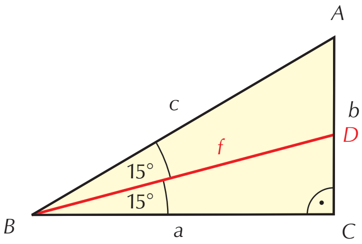
b) Legyen $b = 1$, $c = 3$. Ekkor $a = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{8}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

c) Legyen $a = 5$, $b = 1$. Ekkor $c = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$; $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{5}$.

d) Legyen $a = 2$, $b = 1$. Ekkor $c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$; $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

3. E1 Az ABC háromszögben $\gamma = 90°$, $\beta = 30°$, $AC = 10$ egység. Milyen hosszú a B csúcsból húzható szögfelező? (Pontos értéket adjunk meg!)

Megoldás



Az ABC fél szabályos háromszög tulajdonsága miatt $AB = 20$ egység és $BC = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10 \cdot \sqrt{3}$. Jelölje a BD szögfelező hosszát f. A szögfelező-tételt alkalmazva $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{20}{10 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, így $CD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} \cdot 10$. Végül alkalmazzuk Pitagorasz tételét a BCD háromszögben: $f^2 = a^2 + CD^2 = 100 \cdot 3 + \frac{100 \cdot 3}{7 + 4\sqrt{3}}$, így $f = \sqrt{300 + \frac{300}{7 + 4\sqrt{3}}}$.

Ha szögfüggvényeket alkalmazunk, csak közelítő értékeket kapunk. A BCD háromszögben $\cos 15° = \frac{a}{f}$, innen $f = \frac{a}{\cos 15°} = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{\cos 15°} = 17{,}93150944$ számológéppel. A pontosság ez esetben csak elvi jelentőségű, mert $f = \sqrt{300 + \frac{300}{7 + 4\sqrt{3}}}$ számológéppel kiszámolt értéke 8 tizedesjegy pontosságig ugyanennyi.

4. E1 Az előző feladat alapján határozzuk meg 15° pontos szögfüggvényértékeit!

Megoldás

Felhasználjuk az előző megoldás eredményeit. A $BC = a$ befogóval mint paraméterrel számolva $c = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ és $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$. A szögfelező-tételből $CD = \frac{a}{a + c} \cdot b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3} + 2}$. Az ACD háromszögben felírjuk a Pitagorasz-tételt: $f^2 = a^2 + CD^2 = a^2 + \frac{a^2}{7 + 4\sqrt{3}}$, és innen $f = a\sqrt{\frac{8 + 4\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}}$.

A keresett szögfüggvények pontos értékeit az ACD háromszög oldalaival adhatjuk meg. (A hányadosok nem függnek a-tól.)

$$\sin 15° = \frac{CD}{f} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3} + 2}}{a \cdot \sqrt{\frac{8 + 4\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}}} = \frac{1}{\sqrt{3} + 2} \cdot \sqrt{\frac{7 + 4\sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\frac{7 + 4\sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{8 + 4\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3} + 2}};$$

$$\cos 15° = \frac{a}{f} = \sqrt{\frac{7 + 4\sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}}};$$

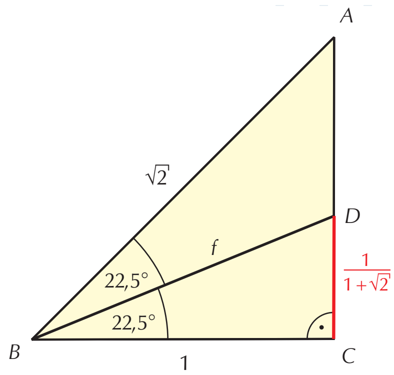
$$\operatorname{tg} 15° = \frac{CD}{a} = \frac{1}{\sqrt{3} + 2} \text{ és } \operatorname{ctg} 15° = \frac{a}{CD} = \sqrt{3} + 2.$$

5. E1 Határozzuk meg 22,5° pontos szögfüggvényértékeit!

Megoldás

Az előző feladat megoldási módszerét követjük.

Az egységnyi befogójú *ABC* egyenlő szárú derékszögű háromszögben ($\gamma = 90°$, $\beta = 45°$) a $BD = f$ szögfelező az *AC* oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. Mivel $AB = \sqrt{2}$, így $CD = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. A szögfelező hossza $f = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$.



$$\sin 22{,}5° = \frac{CD}{f} = \frac{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3+2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{4+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}};$$

$$\cos 22{,}5° = \frac{a}{f} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}};$$

$$\operatorname{tg} 22{,}5° = \frac{CD}{a} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \text{ és } \operatorname{ctg} 22{,}5° = \frac{a}{CD} = \sqrt{2}+1.$$

6. K2 Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges α hegyesszög esetén érvényesek az alábbi azonosságok!

a) $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$;

b) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$; *d)* $\cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$.

Megoldás

a) $$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha = \sin\alpha$$

valóban.

b) A nevező átalakítva ismét $\frac{1}{\cos\alpha}$, így $\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}} = \cos\alpha$.

c) Az azonosság közvetlenül adódik a $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ összefüggésből.

d) $$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\frac{1}{\sin\alpha}} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha = \cos\alpha.$$

7. K2 Melyik α hegyesszögre igaz, hogy

a) $\sin(\alpha + 12°) = \cos(\alpha + 26°)$; *b)* $\operatorname{tg}(\alpha - 15°) = \operatorname{ctg}(\alpha + 57°)$?

Megoldás

A pótszögek segítségével egynemű szögfüggvényekre térünk át.

a) $\cos(\alpha + 26°) = \sin(90° - (\alpha + 26°)) = \sin(64° - \alpha)$. A $\sin(\alpha + 12°) = \sin(64° - \alpha)$ egyenlőség – hegyesszögek esetén – csak akkor teljesülhet, ha $\alpha + 12° = 64° - \alpha$, azaz $2\alpha = 52°$, $\alpha = 26°$.

b) $\operatorname{ctg}(\alpha + 57°) = \operatorname{tg}(90° - (\alpha + 57°)) = \operatorname{tg}(33° - \alpha)$. Innen $\operatorname{tg}(\alpha - 15°) = \operatorname{tg}(33° - \alpha)$, azaz $\alpha - 15° = 33° - \alpha$, s ennek megoldása $\alpha = 24°$.

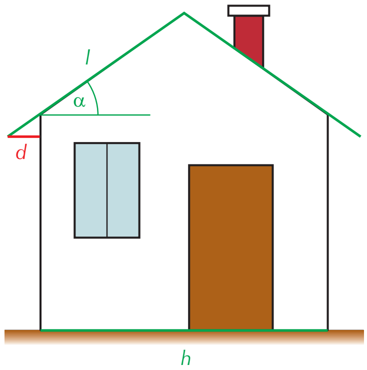
58. HÁROMSZÖGEK ADATAINAK MEGHATÁROZÁSA

1. K2 Az ábra szerinti épület homlokzata $h = 8$ méter széles. A tetőszerkezetet $l = 6$ méter hosszú gerendákból építik. Mekkora lesz az eresz d szélessége, ha a tetőgerenda vízszintessel bezárt α szöge

a) 40°;

b) 46°?

c) Mekkorának válasszák az α szöget az építők, ha a tervekben $d = 30$ cm széles eresz szerepel, és nem akarnak levágni a gerendákból?



Megoldás

A gerenda vízszintes vetülete $l \cdot \cos\alpha$, az eresz hossza $d = l \cdot \cos\alpha - \frac{h}{2}$.

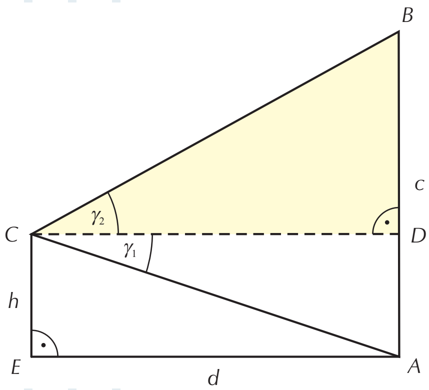
a) $d = 6 \cdot \cos 40^\circ - 4 \approx 0{,}596$ (m), azaz kb. 60 cm.

b) $d = 6 \cdot \cos 46^\circ - 4 \approx 0{,}168$ (m), azaz kb. 17 cm.

c) A $0{,}3 = 6 \cdot \cos\alpha - 4$ egyenletből $\alpha \approx 44{,}2°$.

2. K2 Egy 6 méter magas épület tetejéről a 140 méter távolságra lévő templomtornyot 12°-os szögben látjuk. Milyen magas a torony? Mekkora szögben látszik az épület tövéből?

Megoldás



Az 1. példa gondolatmenetét követjük.

Jelölje a torony alapját A, csúcsát B, az épület tetejét C, alját E. Az ABC háromszögben a torony magassága $AB = c$ a keresett mennyiség. Ismertek még az ábra szerinti $CE = h = 6$ m és $EA = d = 140$ m távolságok, valamint $ACB\sphericalangle = \gamma = 12°$.

A C pontból merőlegest bocsátunk AB-re, ennek talppontját jelölje D. Így az ABC háromszöget két derékszögű részháromszögre bontottuk. Jelölje az ACD lehajlási szöget γ_1, a DCB emelkedési szöget γ_2. $\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{DA}{DC} = \frac{h}{d} = \frac{6}{140}$, innen $\gamma_1 \approx 2{,}5°$ és $\gamma_2 = \gamma - \gamma_1 \approx 9{,}5°$. $\operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{DB}{DC} = \frac{c-h}{d}$, innen $c - h = d \cdot \operatorname{tg}\gamma_2$, azaz $c = h + d \cdot \operatorname{tg}\gamma_2 = 6 + 140 \cdot \operatorname{tg} 9{,}5° \approx 29{,}4$.

A templomtorony magassága kb. 30 méter.

3. K2 Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma alakú szántóföld területét, ha

a) két szomszédos oldala 220 méter és 240 méter hosszú, és az oldalak bezárt szöge 72°;

b) két átlója 220 méter és 240 méter hosszú, és az átlók bezárt szöge 72°!

Megoldás

a) Az $AB = 220$ m és $AD = 240$ m oldalú paralelogrammát BD átlója két egybevágó részháromszögre bontja. A háromszög területe a trigonometrikus területképletből $\frac{AB \cdot AD \cdot \sin 72^\circ}{2}$, a paralelogramma területe ennek kétszerese, azaz $AB \cdot AD \cdot \sin 72° \approx 50\,216$ (m²).

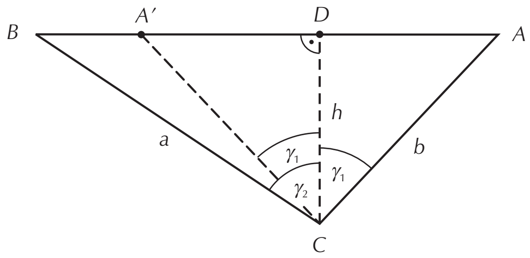
b) A két átló egymást kölcsönösen felezve, a paralelogrammát négy azonos területű részháromszögre osztja. Egy ilyen részháromszög területe $\frac{110 \cdot 120 \cdot \sin 72^\circ}{2}$, a paralelogramma területe ennek négyszerese, azaz $2 \cdot 110 \cdot 120 \cdot \sin 72° \approx 25\,108$ (m²).

Ez az érték az *a)* terület fele.

4. K1 Az egyenes országúttól $h = 40$ méterre elhelyezkedő megfigyelőtől az országúton lévő *A* és *B* útjelző táblák 55 méter, illetve 72 méter távolságban vannak. Mekkora lehet a táblák *AB* távolsága?

Megoldás

Jelölje a megfigyelő helyzetét *C*, s vezessük be a „hagyományos" $CA = b = 55$ m, $CB = a = 72$ m, $CD = h = 40$ m, $ACD\sphericalangle = \gamma_1$, $BCD\sphericalangle = \gamma_2$ jelöléseket. (*CD* merőleges *AB*-re.)



$\cos\gamma_2 = \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{h}{a}$, innen $\gamma_2 \approx 56{,}3°$; hasonlóan

$\cos\gamma_1 = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{h}{b}$, innen $\gamma_1 \approx 43{,}3°$.

$\sin\gamma_2 = \dfrac{BD}{BC}$, így $BD = a \cdot \sin\gamma_2$; hasonlóan $AD = b \cdot \sin\gamma_1$. Két megoldás van, attól függően, hogy a *BCA* háromszögben az *A* csúcsnál hegyesszög van, vagy tompaszög.

Az első esetben $AB = BD + DA = a \cdot \sin\gamma_2 + b \cdot \sin\gamma_1 \approx 97{,}6$ (m); a második esetben $AB = BD - DA = a \cdot \sin\gamma_2 - b \cdot \sin\gamma_1 \approx 22{,}2$ (m).

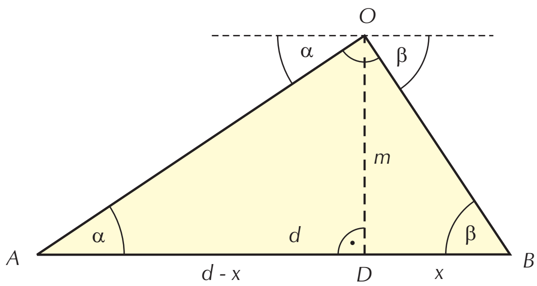
Az ábrán *A′* jelöli az *A* pont második lehetséges helyzetét.

5. K2 Egy dombon egyenes országút halad át. Az út *A* pontjából 4°-os emelkedőn érjük el a domb *O* tetejét, majd 7°-os lejtő vezet az út *B* pontjába. Az *A* és *B* pontok azonos tengerszint feletti magasságban vannak. Milyen magas hozzájuk képest a domb, ha *A* és *B* távolsága légvonalban – felülnézetből – 420 méter? (Felülnézetből *A*, *O* és *B* egy egyenesbe esik.)

Megoldás

A feladatot modellezhetjük az *AOB* háromszöggel, melyben ismert $BAO\sphericalangle = \alpha = 4°$, $OBA\sphericalangle = \beta = 7°$, és $AB = d = 420$ méter; s meghatározandó a háromszög $OD = m$ magassága. (Az *O* csúcsnál lévő lejtő szöge megegyezik a *B* csúcsnál lévő emelkedő szögével, mert váltószögek.)

Jelöljük a *BD* távolságot *x*-szel, ekkor $AD = d - x$. Az *ODA* és *ODB* derékszögű háromszögekben felírt Pitagorasz-tételek segítségével *x* és *m* is meghatározható.



Egy másik megoldási út a szögfüggvények alkalmazása. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{m}{d-x}$, illetve $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{m}{x}$. A két egyenletből *m*-et kiküszöbölve $(d-x)\cdot\operatorname{tg}\alpha = x \cdot \operatorname{tg}\beta$, s innen $x = \dfrac{d\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$.

Ezt visszahelyettesítve $m = \dfrac{d\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{420\cdot\operatorname{tg}4°\cdot\operatorname{tg}7°}{\operatorname{tg}4° + \operatorname{tg}7°} \approx 18{,}7$.

A „dombocska" tehát ≈ 19 méter magas.

6. K2 Az *ABC* háromszög három oldala $a = 28$ cm, $b = 26$ cm és $c = 30$ cm. Milyen hosszú az *A* csúcsból kiinduló magasság, szögfelező és súlyvonal? Mekkorák a háromszög szögei?

Megoldás

Az *A* csúcsból húzható magasság, szögfelező és súlyvonal hosszát jelöljük $AD = m$, $AE = f$ és $AF = s$ módon.

Az *ABD* és *ADC* háromszögekben felírjuk Pitagorasz-tételét:

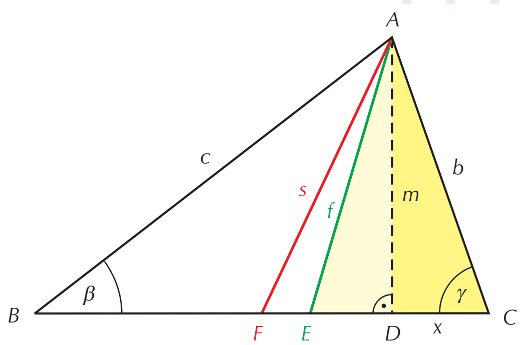
(1) $(a - x)^2 + m^2 = c^2$,

(2) $x^2 + m^2 = b^2$.

m^2 kifejezéséből $c^2 - (a - x)^2 = b^2 - x^2$.

Az egyenletet átalakítva $c^2 - a^2 - x^2 + 2ax = b^2 - x^2$,

s innen $x = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$.



A számadatokat behelyettesítve $x = 10$. Ekkor $BD = a - x = 18$, és $m = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$ (cm). (D a BC oldal belső pontja, mert az ABC háromszög hegyesszögű.)

A szögeket többféleképpen meghatározhatjuk a megfelelő derékszögű háromszögekből. Például $\sin\beta = \frac{m}{c} = \frac{24}{30}$, innen $\beta \approx 53{,}1°$; $\operatorname{tg}\gamma = \frac{m}{x} = \frac{24}{10}$, innen $\gamma \approx 67{,}4°$; és $\alpha = 180° - \beta - \gamma \approx 59{,}5°$.

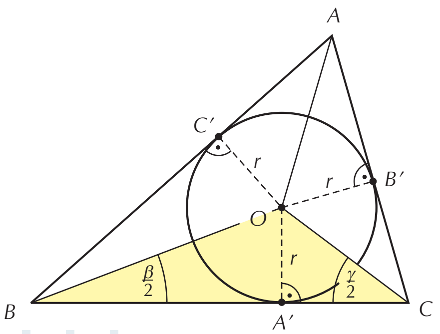
Az $AE = f$ szögfelező hosszát az ADE derékszögű háromszögből határozzuk meg.

$EAD\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} - (90° - \gamma) \approx 7{,}2°$, így $\cos EAD\sphericalangle = \frac{m}{f}$, s innen $f = \frac{m}{\cos EAD\sphericalangle} \approx \frac{24}{\cos 7{,}2°} \approx 24{,}19$ (cm).

Az $AF = s$ súlyvonal hossza az ADF derékszögű háromszögben felírt Pitagorasz-tételből számítható. Mivel F a BC oldal felezőpontja, $DF = \frac{a}{2} - x$, és így $s^2 = m^2 + DF^2 = 24^2 + 4^2$. A súlyvonal hossza $s \approx 24{,}33$ (cm).

7. E1 Határozzuk meg az előző feladatban szereplő ABC háromszög körülírt és beírt körének a sugarát!

Megoldás



A körülírt kör hosszára alkalmazhatjuk az $R = \frac{a}{2 \cdot \sin\alpha}$ összefüggést. Innen $R \approx 16{,}2$ (cm).

Jelölje a beírt kör középpontját O, sugarát r, a beírt kör és a háromszög oldalainak érintési pontjait rendre A', B', C'.

A beírt kör sugarát többféleképpen is meghatározhatjuk.

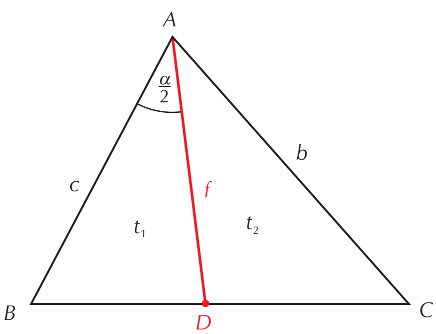
Az egyik lehetőség az 5. feladat eredményének a felhasználása, az ottani „országút-domb modell” ABO háromszöge megfelel az itteni BOC háromszögnek. Most $OBA'\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$ és $OCA'\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, mert a beírt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja. Ez alapján $r = \frac{a \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \approx 8{,}0$ (cm).

Egy másik lehetőség BA' kiszámolása után $\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)$ felírása. Tavaly megmutattuk, hogy $BA' = s - b$, ahol s a háromszög félkerülete. (A bizonyítás alapja az az észrevétel volt, hogy a beírt körhöz a külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak. Így $BA' = BC'$, $CA' = CB'$ és $AC' = AB'$, és a hat szakasz összege a háromszög kerülete.) Ez alapján $\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{r}{s-b}$, innen $r = (s-b) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) = (42 - 26) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{53{,}1°}{2}\right) \approx 8{,}0$ (cm).

Végül alkalmazhatjuk a megfelelő területképletet is: $r = \frac{t}{s} = \frac{a \cdot m}{2 \cdot s} = \frac{a \cdot m}{a + b + c} = \frac{28 \cdot 24}{28 + 26 + 30} = 8$ (cm). (A korábbikkal ellentétben ez már pontos érték.)

8. K2 Az ABC háromszögben $AB = 12$ dm, $AC = 14$ dm, $BAC\sphericalangle = 36°$. Milyen hosszú az A csúcsból húzható szögfelező?

Megoldás



Az ABC háromszöget az $AD = f$ szögfelező két részháromszögre bontja. A részháromszögek területösszege megegyezik az ABC háromszög területével: $t_1 + t_2 = t$, azaz

$$\frac{c \cdot f \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} + \frac{b \cdot f \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2},\ \text{innen}$$

$$f = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{(b+c) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \approx 12{,}29 \text{ (dm).}$$

9. K2 Az *ABC* háromszög *A* csúcsnál lévő szöge 80°, területe 60 cm². Mekkorák a háromszög oldalai, ha a háromszög
a) derékszögű;
b) egyenlő szárú?

Megoldás

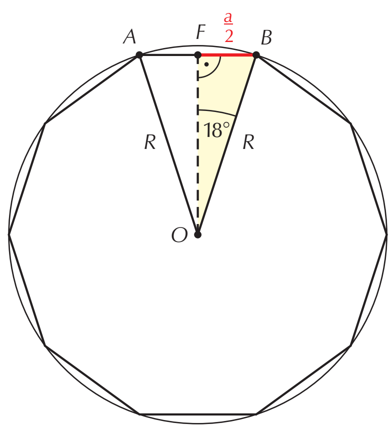
a) Ha c az átfogó hossza, akkor $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, innen $a = c \cdot \sin\alpha$. Hasonlóan $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $b = c \cdot \cos\alpha$, s a háromszög területe $t = \frac{ab}{2} = \frac{c^2 \sin\alpha\cos\alpha}{2}$. Az összefüggésből c kifejezhető: $c = \sqrt{\frac{2t}{\sin\alpha\cos\alpha}} \approx 26{,}49$ (cm). $b = c \cdot \cos 80° \approx 4{,}60$ (cm), és $a = c \cdot \sin 80° \approx 26{,}09$ (cm).

b) Ha α a szárak által bezárt szög, akkor a szárakat b-vel, az alapot a-val jelölve $t = \frac{b^2 \sin\alpha}{2}$, és innen $b = \sqrt{\frac{2t}{\sin\alpha}} \approx 11{,}04$ (cm). Mivel $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{b}$, így a háromszög alapja $a = 2b\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx$ $\approx 14{,}19$ (cm).
Ha α az alapon fekvő szög, akkor a szárak által bezárt szög $\beta = 180° - 2\alpha = 20°$. Jelöljük a szárak hosszát a-val, az alapot b-vel; ekkor $a = \sqrt{\frac{2t}{\sin\beta}} \approx 18{,}73$ (cm), $b = 2a\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \approx 6{,}51$ (cm).

10. K2 $R = 20$ cm sugarú, kör alakú kartonpapírból kivágjuk a lehető legnagyobb oldalú, szabályos tízszöget. Milyen hosszúak a tízszög oldalai, és hány százalék lesz a papírhulladék?

Megoldás

A szabályos tízszög egy oldalát jelölje $AB = a$, az AB húr felezőpontját F, a körülírt kör középpontját O. Az AB húrhoz tartozó középponti szög $\frac{360°}{10} = 36°$, így az AOF derékszögű háromszögben $\sin 18° = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, és innen $a = 2R\sin 18° \approx 12{,}36$ (cm).



Az ABO háromszög területe $t = \frac{R^2\sin 36°}{2}$, a tízszög területe ennek tízszerese: $T = 10t =$ $= 5R^2\sin 36°$. Mivel a kör területe $T_k = R^2\pi$, a hulladék $T_k - T = R^2\pi - 5R^2\sin 36° =$ $= R^2(\pi - 5\sin 36°) \approx 81{,}07$ (cm²).

59. SÍKBELI ÉS TÉRBELI SZÁMÍTÁSOK SZÖGFÜGGVÉNYEK SEGÍTSÉGÉVEL

1. K1 Egy csavar menetének középátmérője 5,1 mm, menetemelkedése 1 mm. Mekkora a menetemelkedés szöge?

Megoldás

Az α menetemelkedési szögre teljesül, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5{,}1}$. Innen $\alpha \approx 11{,}1°$.

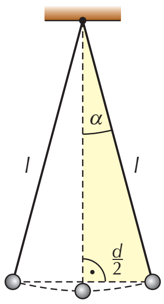
2. K1 1 parszek az a távolság, ahonnan a Föld–Nap távolság 1 másodperc nagyságú szögben látszik. Hány kilométer 1 parszek?
(A Föld–Nap középtávolság kb. 149,6 millió km.)

Megoldás

Az 1 parszek távolságot d-vel jelölve, a $\varphi = 0°\ 0'\ 1''$ szögre $\operatorname{tg}\varphi = \frac{149{,}6}{d}$. Innen $d = \frac{149{,}6}{\operatorname{tg}\varphi} \approx 30\,857\,215$ (millió km), azaz 30,857 billió km. (A pontos érték 30,856 78 billió km.)

3. K1 Egy 90 cm-es fonálon lengő pontszerű test két szélső helyzete közötti távolság 20 cm. Mekkora szöget zár be a fonálinga a két szélső helyzet között?

Megoldás



Jelölje a fonal hosszát l, a fél nyílásszöget α, a két szélső helyzet közötti távolságot d. Ekkor $\sin\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{l} = \frac{d}{2l}$, az adatokkal $\alpha \approx 6{,}38°$. A keresett nyílásszög $2\alpha \approx 12{,}8°$.

4. K1 Milyen magas hegy tetején áll az a 28 m magas kilátótorony, amelynek alját 13,2°-os, tetejét 13,6°-os emelkedési szög alatt látni?

Megoldás

Jelölje m a hegy, t a torony magasságát, d a megfigyelőtől való távolságát, és legyen $\alpha = 13{,}2°$ és $\beta = 13{,}6°$. Ekkor

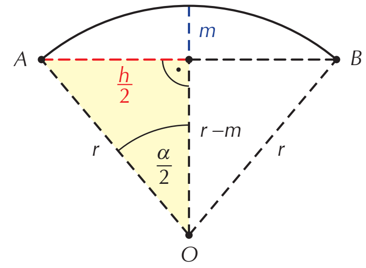
(1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{d}$,

(2) $\operatorname{tg}\beta = \frac{m+t}{d}$.

A két egyenletből $\frac{m}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{m+t}{\operatorname{tg}\beta}$, és innen $m = \frac{t\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$. Behelyettesítés után $m \approx 890{,}2$, azaz a hegy kb. 890 méter magas.

5. K1 Egy körív alakú híd görbületi sugara 200 méter, nyílásmagassága 20 méter. Mekkora a két hídpillér távolsága, és milyen hosszú a körív?

Megoldás

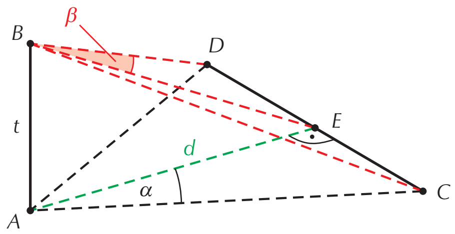


Jelölje a két hídpillért A és B, távolságukat $AB = h$, a híd nyílásmagasságát m, a körív középpontját O, sugarát r. Ha a híd íve α középponti szögben látszik, akkor $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r-m}{r}$, s innen $\frac{\alpha}{2} \approx 25{,}84°$, azaz $\alpha \approx 51{,}7°$. Mivel $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2r}$, innen $h = 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx 174{,}4$ (m) a két hídpillér távolsága.

A körív hossza $\frac{51{,}7°}{360°} \cdot 2r\pi \approx 180{,}5$ (m).

6. K2 Egy kilátó aljáról a vele éppen szemközt álló, széles és lapos épület homlokzata 38°-os (vízszintes) látószögben látszik. Felmegyünk a kilátó 25 méter magas tetejére. Innen mekkora szögben látjuk az épület homlokzatát? A kilátó és az épület távolsága 60 méter.

Megoldás



Vezessük be a következő jelöléseket:
- legyen a kilátó alja A, teteje B, AB távolsága t (ekkor $AB = t = 25$ méter);
- az épület két végpontja C és D, felezőpontja E, az AE távolság d (a DAC egyenlő szárú háromszögben $AE = d = 60$ méter);
- a DAC látószög 2α, a DBC látószög 2β (ismert $2\alpha = 38°$; keressük 2β-t).

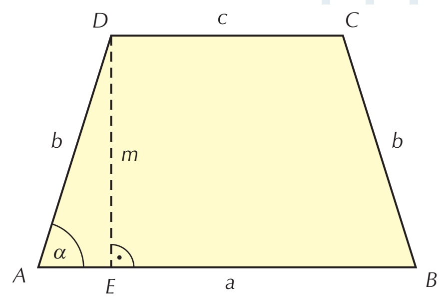
$AC = \frac{AE}{\cos\alpha} = \frac{d}{\cos\alpha}$, $EC = d \cdot \operatorname{tg}\alpha$. $BC^2 = AB^2 + AC^2$, így

$BC = \sqrt{t^2 + \frac{d^2}{\cos^2\alpha}}$. A BEC derékszögű háromszögből $\sin\beta = \frac{EC}{BC} = \frac{d \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{t^2 + \frac{d^2}{\cos^2\alpha}}}$. Innen

$\beta \approx 17{,}63°$, a keresett látószög tehát $2\beta \approx 35{,}3°$.

7. K1 Egyenlő szárú trapéz alakú földterület alapja 320 m, szárai 210 m hosszúak. Az alap és a szárak bezárt szöge 75°. Hány hektár a terület nagysága?

Megoldás



Jelölje az $ABCD$ trapéz alapját $AB = a$, szárainak hosszát b, az alappal párhuzamos oldal hosszát $CD = c$, az alapon fekvő szögeket $DAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = \alpha$. Bocsássunk a D csúcsból az AB alapra merőlegest, az így kapott DE magasság hosszát pedig jelöljük m-mel.

Az AED derékszögű háromszögben $\sin\alpha = \frac{m}{b}$, innen $m = b\sin\alpha$.

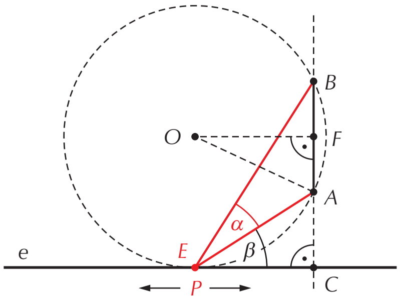
Hasonlóan az AE vetület hossza $b\cos\alpha$, s így c meghatározható: $c = a - 2b\cos\alpha$.

A trapéz területe $t = \frac{a+c}{2}m = \frac{a + a - 2b\cos\alpha}{2}b\sin\alpha = (a - b\cos\alpha)b\sin\alpha \approx 53\,885{,}2$ (m²), azaz kb. 5,4 hektár.

Megjegyzés: Érdemes c értékét kiszámolni: $c = a - 2b\cos\alpha \approx 211{,}3 > 0$, azaz a trapéz létezik.

8. E1 Egy futballedzésen a játékosok a pályán olyan e egyenes mentén állnak föl, mely az alapvonalra merőlegesen áll, de nem metszi az AB gólvonalat. A játékosoknak a kapuhoz közeledve egy kedvező P pontot kell megtalálniuk, ahonnan az üres kapura kell rárúgniuk a labdát. Melyik P ponthoz tartozó α „lövőszög” a lehető legnagyobb? Jelölje C az e egyenes és az AB alapvonal metszéspontját. Mekkora α, ha $AC = d = 5{,}00$ m, és a kapu $AB = h = 7{,}32$ m széles?

Megoldás



Vegyük fel azt a k kört, amelyik áthalad az A és B pontokon, és érinti az e egyenest az E pontban. Az AB szakasz a k körív minden pontjából ugyanakkora szögben látszik, körön belüli pontokból a látószög ennél nagyobb, a körön kívüli pontokból pedig a látószög kisebb. (Végig a pályán maradunk, azaz az AB alapvonal azonos félsíkjában mozgunk.) Az E pont kivételével az e egyenes minden pontja körön kívüli pont, ezért az E érintési pontból látszik AB maximális szög alatt, azaz $E = P$.

Az érintési ponthoz tartozó OP sugár merőleges e-re. Jelölje F az AB szakasz felezőpontját, OF az AB szakasz felezőmerőlegese. Ekkor $r = OP = CF = 8{,}66$ a kör sugara, $AF = 3{,}66$, $OF = PC$. Az AFO derékszögű háromszögben felírjuk Pitagorasz tételét:

$OF^2 = r^2 - AF^2 = 61{,}6$, innen $OF = PC \approx 7{,}85$.

Legyen $BEA\sphericalangle = \alpha$ és $AEC\sphericalangle = \beta$. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{BC}{PC} \approx \dfrac{12{,}32}{7{,}85}$, így $\alpha + \beta \approx 57{,}5°$.

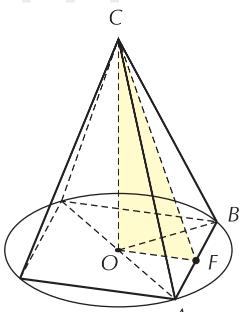
$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{AC}{PC} \approx \dfrac{5}{7{,}85}$, innen $\beta \approx 32{,}5°$.

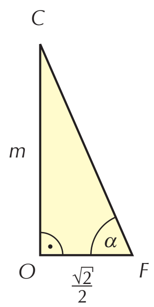
A legkedvezőbb lövőszög meghatározása: $\alpha \approx 57{,}5° - 32{,}5° \approx 25°$.

Más elindulási lehetőség: Az érintő- és szelőszakaszokra vonatkozó tételt alkalmazva $PC^2 = CA \cdot CB$, innen $OF = PC = \sqrt{5 \cdot 12{,}32}$ közvetlenül adódik.

9. K2 Két egyenes gúla testmagassága egyaránt 10 cm. Az egyik gúla alapja egységsugarú körbe írt négyzet, a másiké egységsugarú körbe írt szabályos hatszög. Melyik gúla oldaléle zár be nagyobb szöget az alaplappal? Melyik gúla oldallapja zár be nagyobb szöget az alaplappal? Mekkorák a különbségek?

Megoldás

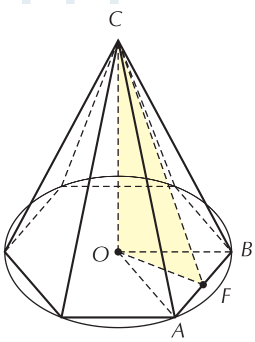


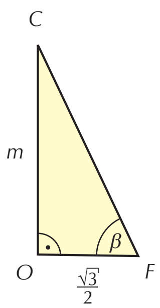


Az oldalél és alaplap hajlásszöge a test magasságától és a kör sugarától függ. Ezek az adatok a két test esetében megegyeznek, így az oldalélek és az alaplap hajlásszögei egyenlők.

Az oldallap – alaplap hajlásszög meghatározásához jelöljük a testek egy alapélét AB-vel, az él felezőpontját F-fel, a testmagasságot $m = OC$-vel. (A test csúcsa C, az O pont az alapkör középpontja.)

A négyzet alapú gúla esetében AOB egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $AB = \sqrt{2}$, $BF = FO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Az oldallap – alaplap hajlásszöge az FOC derékszögű háromszögben áll elő, az F csúcsnál lévő α szög. Erre felírható: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{m}{OF} = \dfrac{m}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.





A szabályos hatszög alapú gúla esetében AOB szabályos háromszög, $AB = 1$, így $OF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Az oldallap – alaplap hajlásszöge $CFO\sphericalangle = \beta$, erre

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{m}{OF} = \dfrac{m}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Látható, hogy $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$, azaz $\alpha > \beta$ ($\operatorname{tg}\alpha$ esetében a testmagasságot kisebb számmal osztjuk). A különbséget meghatározzuk: $\alpha \approx 86{,}0°$, $\beta \approx 85{,}1°$, így $\alpha - \beta \approx 0{,}9°$.

VII. FÜGGVÉNYEK

60–61. SZÖGFÜGGVÉNYEK ÁLTALÁNOSÍTÁSA

1. K1 Csupán a hegyesszögek szögfüggvényeinek ismeretében határozzuk meg a következő szögek összes szögfüggvényét!
$\alpha = 150°, 210°, 270°, 315°, 2015°, -480°$.

Megoldás

$\sin 150° = \sin(180° - 150°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$;

$\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\mathrm{tg}\, 150° = -\mathrm{tg}\,(180° - 150°) = -\mathrm{tg}\, 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\mathrm{ctg}\, 150° = -\mathrm{ctg}\,(180°-150°) = -\mathrm{ctg}\, 30° = -\sqrt{3}$.

$\sin 210° = -\sin(210° - 180°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$;

$\cos 210° = -\cos(210° - 180°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\mathrm{tg}\, 210° = \mathrm{tg}\,(210° - 180°) = \mathrm{tg}\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\mathrm{ctg}\, 210° = \mathrm{ctg}\,(210° - 180°) = \mathrm{ctg}\, 30° = \sqrt{3}$.

$\sin 270° = -1$;
$\cos 270° = 0$;
$\mathrm{tg}\, 270° = \frac{\sin 270°}{\cos 270°} = \frac{1}{0}$ = ami nincs értelmezve;

$\mathrm{ctg}\, 270° = \frac{\cos 270°}{\sin 270°} = \frac{0}{1} = 0$.

$\sin 315° = -\sin(360° - 315°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 315° = \cos(360° - 315°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\mathrm{tg}\, 315° = \mathrm{tg}\,(315° - 180°) = -\mathrm{tg}\, 135° = -\mathrm{tg}\,(180° - 135°) = -\mathrm{tg}\, 45° = -1$;
$\mathrm{ctg}\, 315° = \mathrm{ctg}\,(315° - 180°) = -\mathrm{ctg}\, 135° = -\mathrm{ctg}\,(180° - 135°) = -\mathrm{ctg}\, 45° = -1$.

$\sin 2015° = \sin(2015° - 10 \cdot 180°) = \sin(215°) = -\sin(215° - 180°) = -\sin 35° \approx -0{,}5736$;
$\cos 2015° = \cos(2015° - 10 \cdot 180°) = \cos(215°) = -\cos(215° - 180°) = -\cos 35° \approx -0{,}8192$;
$\mathrm{tg}\, 2015° = \mathrm{tg}\,(2015° - 11 \cdot 180°) = \mathrm{tg}\, 35° \approx 0{,}7002$;
$\mathrm{ctg}\, 2015° = \mathrm{ctg}\,(2015° - 11 \cdot 180°) = \mathrm{ctg}\, 35° \approx 1{,}428$.

$\sin(-480°) = \sin(-480° + 2 \cdot 360°) = \sin 240° = -\sin(240° - 180°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos(-480°) = \cos(-480° + 2 \cdot 360°) = -\cos 240° = -\cos(240° - 180°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$;

$\mathrm{tg}\,(-480°) = \mathrm{tg}\,(-480° + 3 \cdot 180°) = \mathrm{tg}\, 60° = \sqrt{3}$;

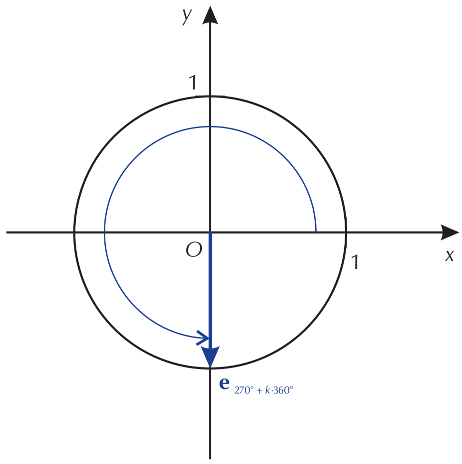
$\operatorname{ctg}(-480^\circ) = \operatorname{ctg}(-480^\circ + 3 \cdot 180^\circ) = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. K1 Keressük meg az összes olyan szöget, amelyekre

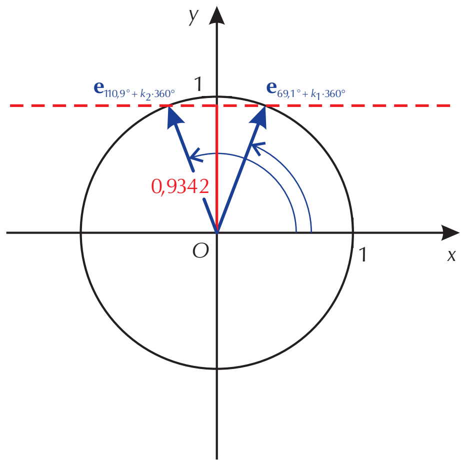
a) $\sin\alpha = -1$; *b)* $\sin\alpha = 0{,}9342$; *c)* $\cos\alpha = 0{,}5$; *d)* $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
e) $\operatorname{tg}\alpha = -1$; *f)* $\operatorname{tg}\alpha = 5$; *g)* $\operatorname{ctg}\alpha = -3$!

Megoldás

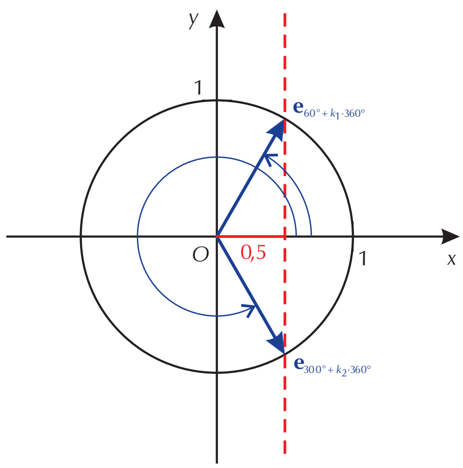
a) $\sin\alpha = -1$; $\alpha = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$. $k \in \mathbf{Z}$.



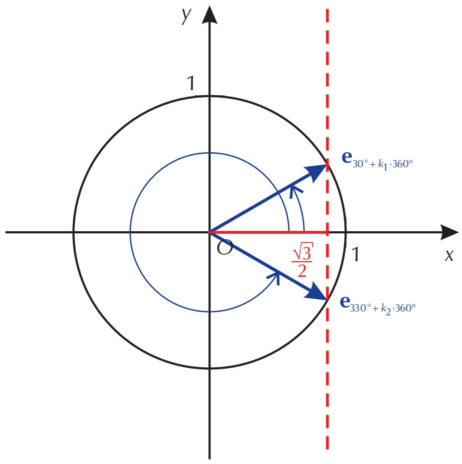
b) $\sin\alpha = 0{,}9342$; $\alpha_1 = 69{,}1^\circ + k_1 \cdot 360^\circ$,
$\alpha_2 = 180^\circ - 69{,}1^\circ + k_2 \cdot 360^\circ = 110{,}9^\circ + k_2 \cdot 360^\circ$.
$k_1; k_2 \in \mathbf{Z}$.



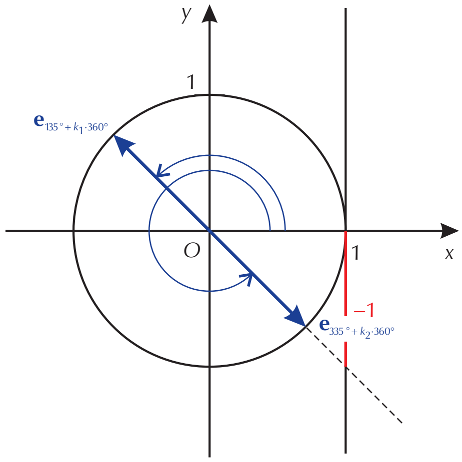
c) $\cos\alpha = 0{,}5$; $\alpha_1 = 60^\circ + k_1 \cdot 360^\circ$, $\alpha_2 = 360^\circ - 60^\circ + k_2 \cdot 360^\circ = 300^\circ + k_2 \cdot 360^\circ$, $k_1; k_2 \in \mathbf{Z}$.
teljesen tökéletes megoldás az $\alpha = \pm 60^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$.



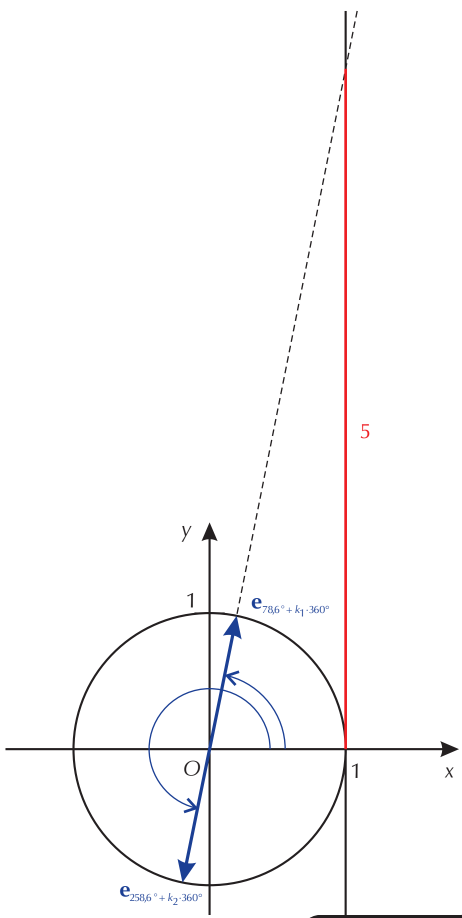
d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\alpha = \pm 30° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbf{Z}$.



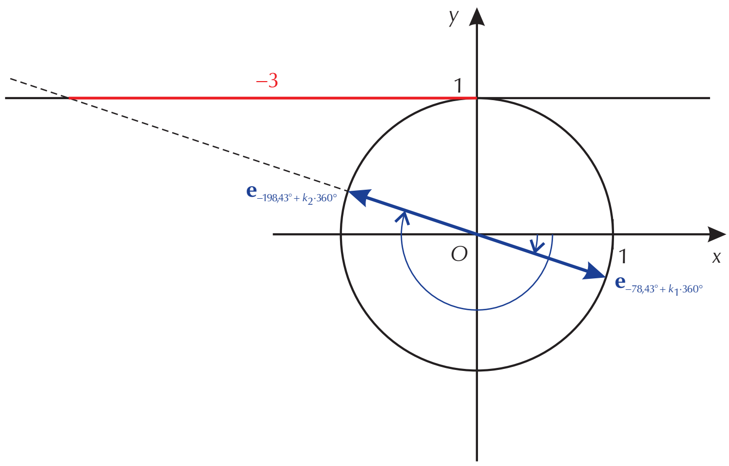
e) $\operatorname{tg}\alpha = -1$; $\alpha = 45° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbf{Z}$.



f) $\operatorname{tg}\alpha = 5$; $\alpha = 78{,}7° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbf{Z}$.



g) $\operatorname{ctg} \alpha = -3$; $\alpha = -18{,}43^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$.



3. K2 Melyek azok a 0° és 360° közé eső szögek, amelyekre igaz, hogy

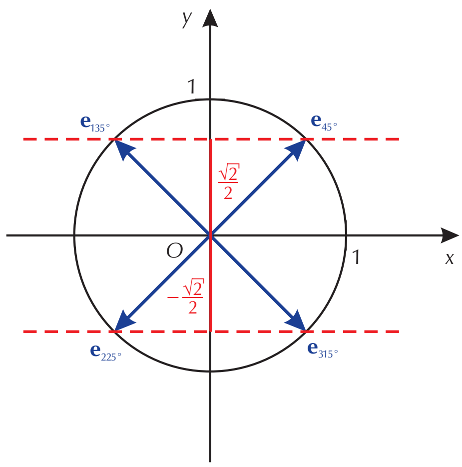
a) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$; *b)* $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$?

Megoldás

a) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$;

$\sin \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\alpha = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$.



b) A számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség értelmében

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Jelen esetben feltételezhetjük, hogy a sin α és cos α értékei pozitívak,hiszen csak így lehet az összeg egynél nagyobb.

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2} \le \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$ ami azt jelenti, hogy

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \quad /2$$

$\sin \alpha + \cos \alpha \le \sqrt{2}$, egyenlőség csak akkor van, ha a két érték megegyezik, ez pedig a 0° és 360° közzé eső szögek között csak 45°-nál és 225°-nál van, de mivel mindkét értéknek pozitívnak kell lennie, ezért csak az $\alpha = 45^\circ$ a megoldás.

62–63. SZÖGFÜGGVÉNYEK ÁBRÁZOLÁSA

1. K1 Írjuk át radiánba a következő szögeket!
$\alpha = 75°, 120°, 135°, 150°, 210°, 300°, 1080°, 32°$.

Megoldás

$75° = \frac{75}{180}\pi = \frac{5}{12}\pi$; $120° = \frac{120}{180}\pi = \frac{2}{3}\pi$; $135° = \frac{135}{180}\pi = \frac{3}{4}\pi$; $150° = \frac{150}{180}\pi = \frac{5}{6}\pi$;
$210° = \frac{210}{180}\pi = \frac{7}{6}\pi$; $300° = \frac{300}{180}\pi = \frac{5}{3}\pi$; $1080° = \frac{1080}{180}\pi = 6\pi$; $32° = \frac{32}{180}\pi = \frac{8}{45}\pi$.

2. K1 Írjuk át fokba a következő szögeket!
$\beta = \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, 0{,}3\pi, 0{,}324\pi, 1{,}5$.

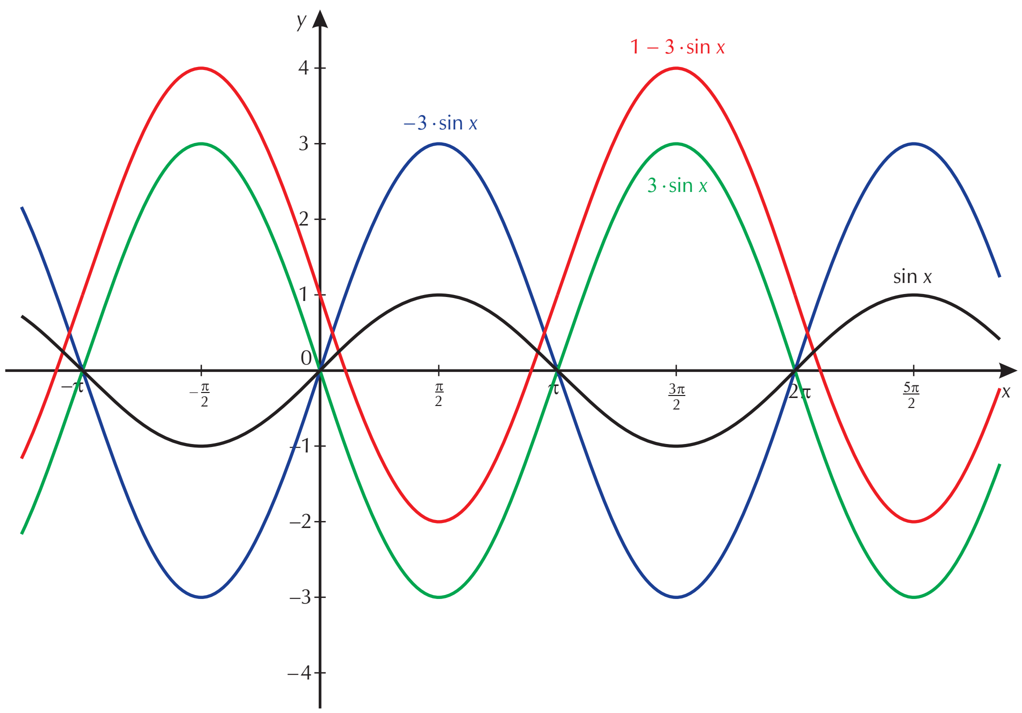
Megoldás

$\frac{3\pi}{4} = \frac{3}{4}180° = 135°$; $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3} \cdot 180° = 120°$; $\frac{3\pi}{2} = \frac{3}{2}180° = 270°$; $0{,}3\pi = 0{,}3 \cdot 180° = 54°$;
$0{,}324\pi = 0{,}324 \cdot 180° = 58{,}32°$; $1{,}5 = \frac{1{,}5}{\pi}180° = 85{,}94°$.

3. K2 Ábrázoljuk a következő függvényeket, majd határozzuk meg, hogy milyen transzformációval juthatunk el az alapfüggvényből a végeredményhez! Jellemezzük a függvényeket! Jellemezzük a $h(x)$ és a $k(x)$ feladatban kapott függvényt szélsőérték és monotonitás szempontjából! Keressük meg a függvény zérushelyeit!
a) $f(x) = 3\sin x$, $g(x) = -3\sin x$, $h(x) = 1 - 3\sin x$;
b) $l(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $j(x) = \cos 2x$, $i(x) = 2\cos 2x$, $k(x) = 2 - 2\cos 2x$.

Megoldás

a) Az $f(x)$ függvény képét úgy kapjuk meg, ha az $x \mapsto \sin x$ függvény képét háromszorosára nyújtjuk az y tengely mentén.
A $g(x)$ függvény képét úgy kapjuk meg, ha az $x \mapsto 3\sin x$ függvény képét tükrözzük az x tengelyre.
A $h(x)$ függvény képét úgy kapjuk meg, ha az $x \mapsto -3\sin x$ függvény képét eggyel feljebb toljuk(az y tengely mentén pozitív irányba).



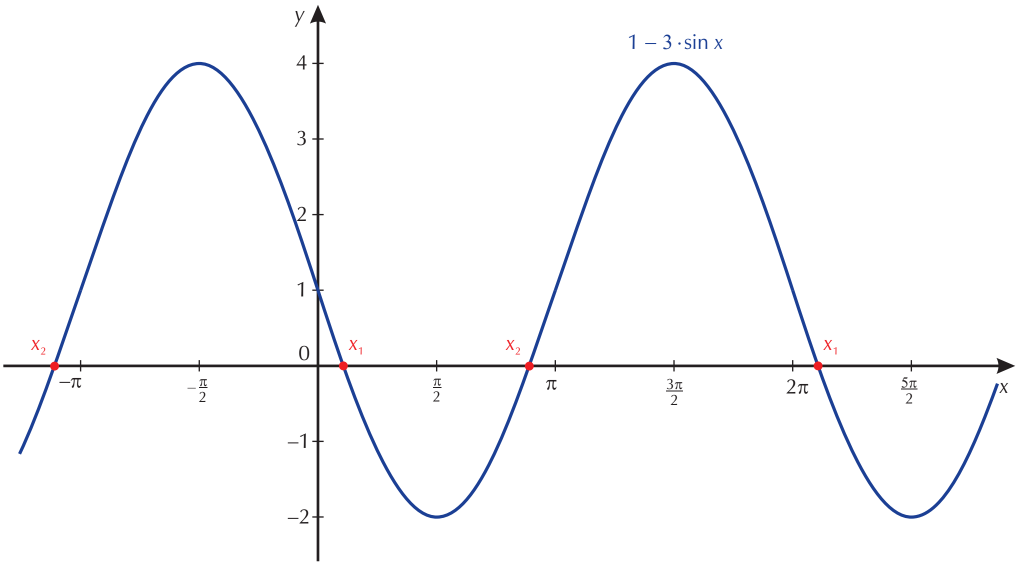
A $h(x)$ függvény jellemzése. $D_h = R$, $R_h = [-2; 4]$. A függvény periódusa 2π.

A függvény maximumának értéke 4, a maximum helye $x_i = \frac{3\pi}{2} + i2\pi$, $i \in \mathbf{Z}$.

A függvény minimumának értéke –2, a maximum helye $x_k = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

A függvény szigorúan monoton nő minden $I_l = \left[\frac{\pi}{2} + l2\pi; \frac{3\pi}{2} + l2\pi\right]$, $l \in \mathbf{Z}$.

A függvény szigorúan monoton csökkenő minden $I_m = \left[-\frac{\pi}{2} + m2\pi; \frac{\pi}{2} + m2\pi\right]$, $m \in \mathbf{Z}$.



Zérushelyek azok az x értékek, ahol a függvény nulla értéket vesz fel. Tehát meg kell oldanunk az $1 - 3\sin x = 0$ egyenletet.

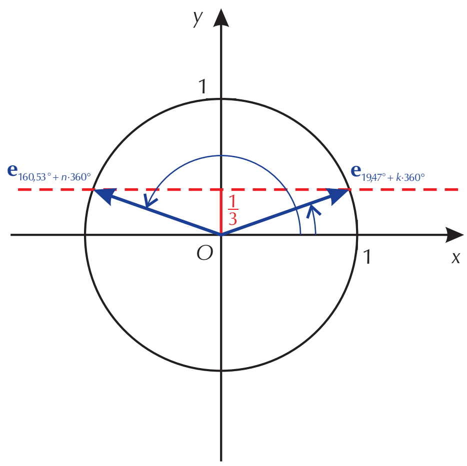
$1 - 3\sin x = 0 / +3\sin x$

$1 = 3\sin x \qquad /:3$

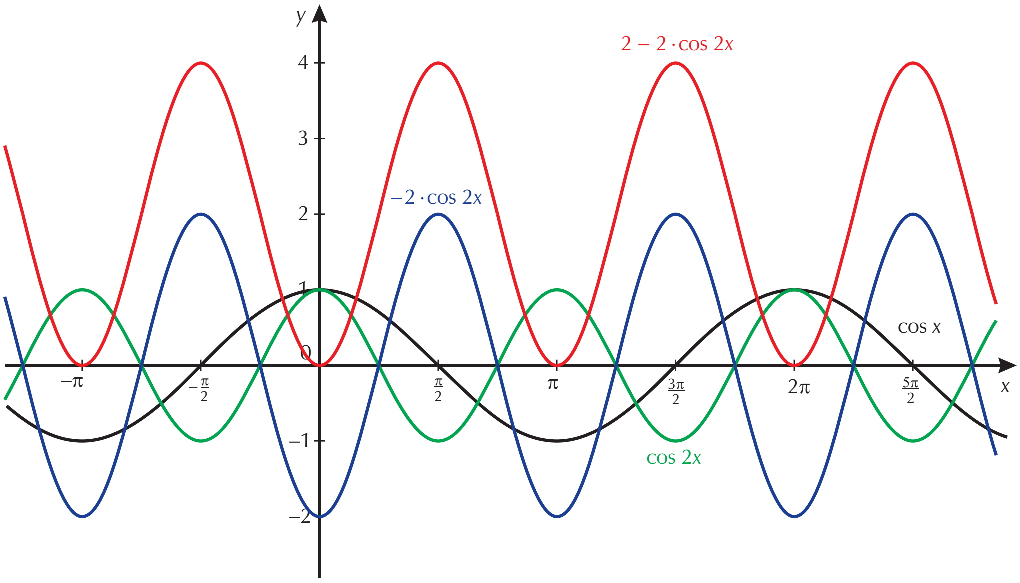
$\frac{1}{3} = \sin x;$

$x_1 = 19{,}47° + k360° = 0{,}108\pi + k2\pi, \quad k \in \mathbf{Z};$

$x_2 = 180° - 19{,}47° + n360° = 160{,}53° + n360° =$
$= 0{,}892\pi + n2\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$



b) Az $l(x)$ függvény képét úgy kapjuk meg, ha az $x \mapsto \cos x$ függvény képét $\frac{\pi}{2}$-vel jobbra toljuk (az x tengely mentén pozitív irányba), így éppen a $\sin x$ képét kapjuk.
A $j(x)$ függvény képét úgy kapjuk meg, ha az $x \mapsto \cos x$ függvény képét zsugorítjuk az x tengely irányába felére. Így a függvényünk periódusa $180° = \pi$ lesz.
A $k(x)$ függvény képét úgy kapjuk meg, ha az $x \mapsto 2\cos 2x$ függvény képét tükrözzük az x tengelyre, majd eltoljuk 2-vel felfelé (az y tengely mentén pozitív irányba).

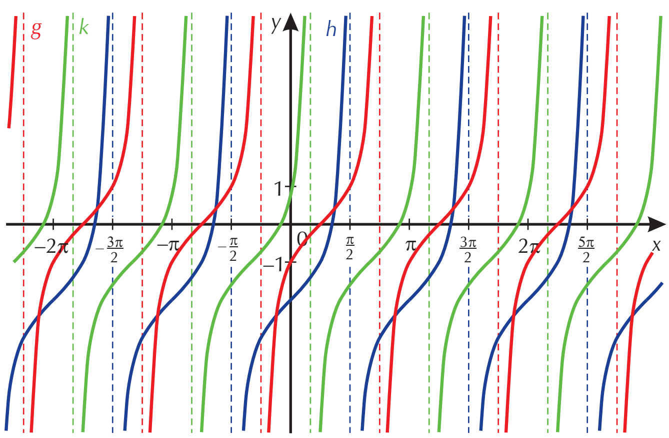


A $k(x)$ függvény jellemzése.
$D_k = R$, $R_k = [0; 4]$ A függvényünk periódusa $180° = \pi$ lesz.
A függvény maximumának értéke 4, a maximum helye $x_i = \frac{\pi}{2} + i\pi$, $i \in \mathbf{Z}$.
A függvény minimumának értéke 0, a minimum helye $x_k = 0 + 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
A függvény szigorúan monoton nő minden $I_l = \left[0 + l\pi; \frac{\pi}{2} + l\pi\right]$, $l \in \mathbf{Z}$.
A függvény szigorúan monoton csökkenő minden $I_m = \left[\frac{\pi}{2} + m\pi; \pi + m\pi\right]$, $m \in \mathbf{Z}$.
A függvény zérushelyei megegyeznek a minimumhelyekkel.

4. K2 Ábrázoljuk a valós számok legbővebb részhalmazán az $f: x \mapsto \operatorname{tg} x$ függvény grafikonjából kiindulva az alábbi függvényeket!

$g: x \mapsto \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $\quad h: x \mapsto \operatorname{tg} x - 2$; $\quad k: x \mapsto \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

Megoldás

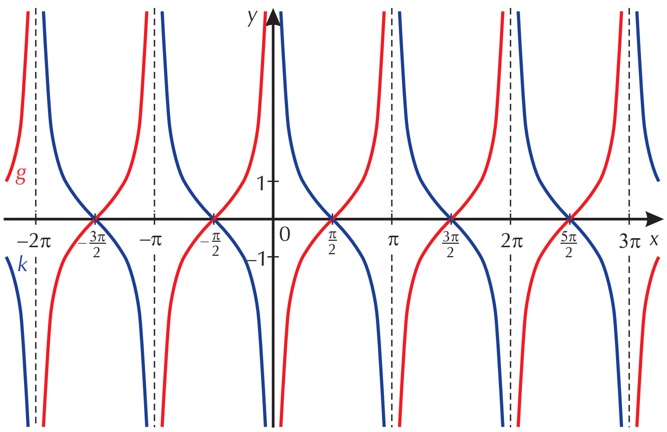


5. K2 Ábrázoljuk a valós számok legbővebb részhalmazán $f: x \mapsto \operatorname{ctg} x$ függvény grafikonjából kiindulva az alábbi függvényeket!

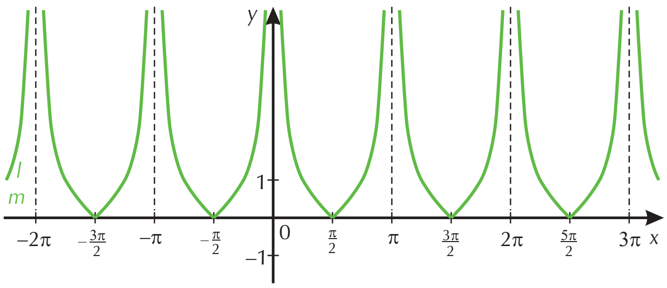
K2 $g: x \mapsto -\operatorname{ctg} x$; **K2** $k: x \mapsto -\operatorname{ctg}(-x)$; **E1** $m: x \mapsto |\operatorname{ctg}|x||$.

K2 $h: x \mapsto \operatorname{ctg}(-x)$; **K2** $l: x \mapsto |\operatorname{ctg}(x)|$;

Megoldás



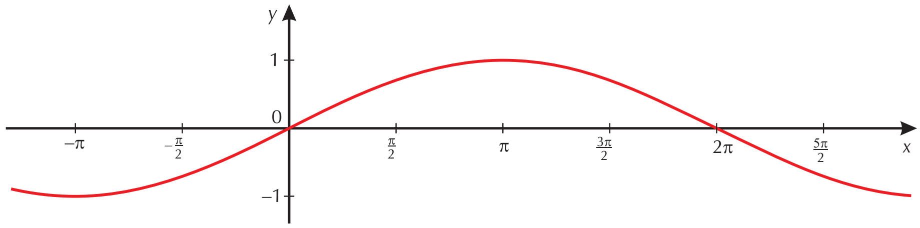
A $g(x)$ és $h(x)$ függvények egybeesnek, mert $-\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(-x)$ az értelmezési tartomány minden elemére teljesül. (A ctg páratlan függvény.) Az ábrán látható, hogy $k(x) = -g(x)$.



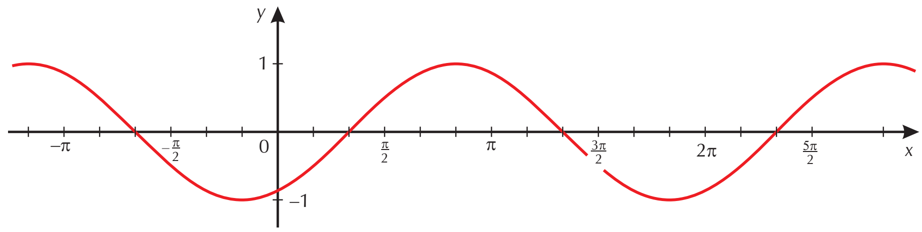
$l(x) = m(x)$ is teljesül.

6. K2 Adjuk meg a következő függvények hozzárendelési szabályát!

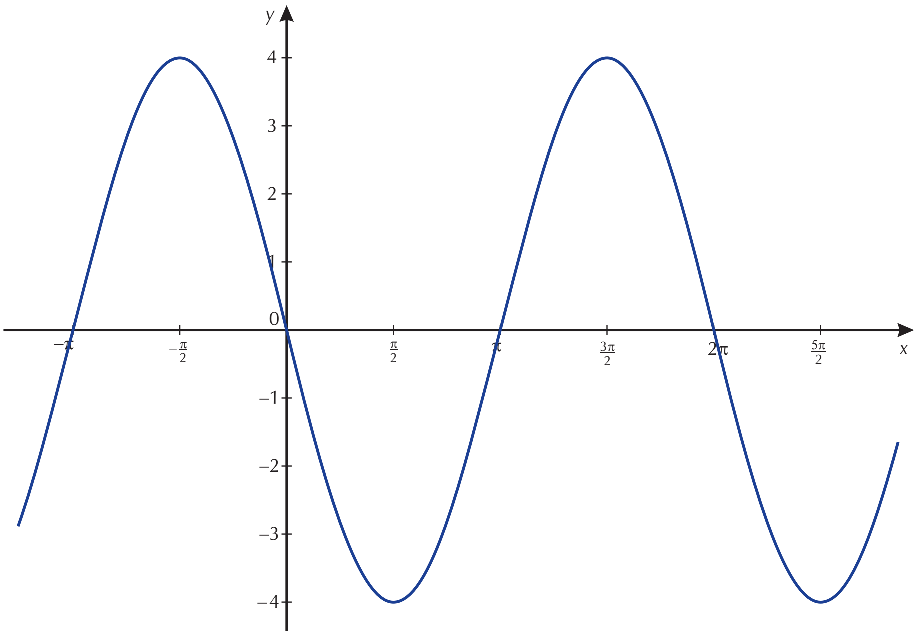
a)



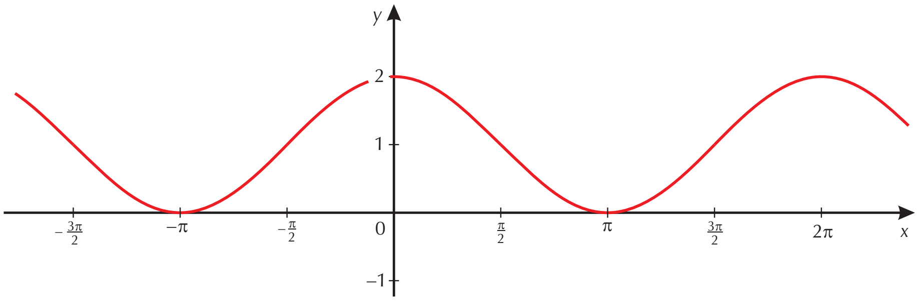
b)



c)



d)



Megoldás

a) Az első függvény periódus 4π, ez azt jelenti, hogy a „fele olyan lassan” járja be az eredeti sin x függvény a 2π periódusát. Tehát a függvényünk az $x \mapsto \sin \frac{x}{2}$ lesz. Amit néhány érték behelyettesítésével könnyen ellenőrizhetünk.

b) A második függvény a koszinusz függvény $\frac{\pi}{3}$-mal jobbra tolásával (x tengely mentén pozitív irányba) keletezett. Ezek szerint hozzárendelési szabálya $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Amit néhány érték behelyettesítésével könnyen ellenőrizhetünk.

c) A harmadik függvényünk a szinusz x függvény képének az x tengelyre tükrözése, majd négyszeresre nyújtásával (az y tengely mentén) keletkezett. Tehát hozzárendelési szabálya: $x \mapsto -4\sin x$. Amit néhány érték behelyettesítésével könnyen ellenőrizhetünk.

d) A negyedik függvény képe úgy keletkezett, hogy a koszinusz x függvény képét eggyel feljebb (az y tengely mentén pozitív irányba) eltoltuk. Tehát hozzárendelési szabálya: $x \mapsto 1 + \cos x$. Amit néhány érték behelyettesítésével könnyen ellenőrizhetünk

VIII. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

65. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁSI ALAPFOGALMAK

1. K1 Egy jól megkevert pakli franciakártyából kiveszünk egy lapot. (Tegyük fel, hogy a pakliban nincs jolly joker, így $4 \cdot 13 = 52$ lap van a pakliban.)
a) Hány elemi esemény van?
b) Legyen az A = {a kihúzott lap vagy treff, vagy ász.} Hány elemi eseményből áll az A esemény?
c) B = {a kihúzott lapon egy prímszám szerepel}. Hány elemi eseményből áll a B esemény?

Megoldás

a) 52 elemi esemény lesz.
b) 13 (treff) + 4 (ász) – treff ász = 16.
c) A prímek: 2, 3, 5, 7 ez összesen 4. $4 \cdot 4 = 16$.

2. K2 Egy szabályos ötszög csúcsai (A, B, C, D, E) közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat. Ezeket összekötve egy háromszöget kapunk.
a) Hány elemi esemény van?
b) A = {a kapott háromszög tompaszögű}. Hány elemi eseményből áll az A esemény?

Megoldás

a) Az öt csúcsból hármat kell választani a sorrendtől függetlenül. Tehát $\binom{5}{3} = 10$ eset van.
b) A háromszögek mindegyike egyenlőszárú, fele hegyes, fele pedig tompaszögű. Tehát 5 tompaszögű van.

3. K2 A 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával előállítjuk az összes háromjegyű számot. Ezek közül választunk egyet.
a) Hány elemi esemény lehetséges?
a) A = {a kiválasztott számban mindhárom számjegy szerepel}. Hány elemi eseményből áll az A esemény?

Megoldás

a) Az összes esetet egy ismétléses variáció adja meg. $V = 3^3 = 27$ eset van.
b) Itt ismétlés nélküli variációról van szó. $V = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eset van.

4. E1 Otthoni dominókészletünkkel négyen kezdenek játszani: Aladár, Béla, Cecília és Dóra. A készletben nullától nyolcig minden párosítás egyetlenegyszer szerepel. Kezdetben mindenki ugyanannyi dominót kap, és a fennmaradó egy dominó lesz a kezdő.
Kísérletünkben a játék elején megnézzük a kiosztást.
Két kiosztást különbözőnek tekintünk, ha van legalább egy olyan játékos, aki nem ugyanazokat a dominókat kapta.
a) Hány dominóból áll a készlet?
b) Hány elemi esemény lehetséges?
c) A = {Aladár megkapta az összes ötöst tartalmazó dominót.} Hány elemi eseményből áll az A esemény?

Megoldás

a) Kilenc különböző szám van. Ebből választunk két különböző, vagy két egyforma számot, a sorrend nem számít. Így $\binom{9}{2}+\binom{9}{1}=36+9=45$ db dominó van.

b) Mindenki 11 dominót kap. A kezdő lehet 45-féle, Aladár kaphat $\binom{44}{11}$, Béla $\binom{33}{11}$, Cecília $\binom{22}{11}$, Dóra $\binom{11}{11}$ darabot kaphat.

Így összesen $45\cdot\binom{44}{11}\cdot\binom{33}{11}\cdot\binom{22}{11}\cdot\binom{11}{11}\approx 4{,}7118\cdot 10^{25}$. Ez egy hatalmas szám, ez biztosítja, hogy a játék igen sok, variációs lehetőséget adjon.

c) Aladár biztosan megkapta a 9 ötöst tartalmazó dominót és kap még kettőt.

Összesen $\binom{36}{2}\cdot\binom{34}{11}\cdot\binom{23}{11}\cdot\binom{12}{11}\cdot 1=2{,}924\cdot 10^{18}$ lehetőség van.

66. MŰVELETEK ESEMÉNYEKKEL

1. K1

Két különböző pénzérmét feldobva nézzük a következő eseményeket!
A = {pontosan egy fejet dobunk}, B = {maximum egy írást dobunk}, C = {kevesebb mint két fejet dobunk}, D = {pontosan két fejet dobunk}. Végezzük el a következő műveleteket!
$A+B$, AB, $A+C$, BC, $A+D$, AD, $C+D$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Megoldás

Az eseményeket írjuk le egyszerűbben: A = {if, fi}, B = {if, fi, ff}, C = {ii, if, fi}, D = {ff}. Ez után könnyebb a megoldás.

$A+B=B$, $AB=A$, $A+C=C$, $BC=A$, $A+D=B$, $AD=0$, $C+D=H$, $\overline{A}$ = {ii, ff}, $\overline{B}$ = {ii}.

2. K2

Egy jól megkevert magyarkártyacsomagból ($4\cdot 8=32$ db lapból áll) kiválasztunk négyet.
A = {a kihúzott lapok között van piros}, B = {kevesebb mint három pirosat húzunk},
C = {legalább két pirosat húzunk}, D = {az összes kihúzott lap piros}.
Végezzük el a következő műveleteket!
$A+B$, AB, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $A+C$, $B+C$, BC, $C+D$.

Megoldás

$A+B=H$, AB = {egy vagy két pirosat húzunk}, $\overline{A}$ = {nincs piros}, $\overline{B}$ = {legalább három pirosat húzunk}, $\overline{C}$ = {maximum egy pirosat húzunk} = {nulla vagy egy pirosat húzunk}, $\overline{D}$ = {a kihúzott lapok között van legalább egy, ami nem piros.}, $A+C=A$, $B+C=H$, BC = {két pirosat húzunk}, $C+D=C$.

3. E1

Legyen a véletlen kísérletünk, hogy a tévében megnézünk egy ötöslottó-sorsolást. (90 számból véletlenszerűen kihúznak 5-öt.)
Jegyezzük fel a kihúzott öt számot sorban! Nézzük a következő eseményeket!
A = {mind az öt szám páratlan}, B = {a legnagyobb szám nagyobb mint nyolcvan),
C = {a kihúzott számok között van prím}, D = {az öt számot emelkedő sorrendben húzták ki}.
a) Adjunk meg egy-egy elemi eseményt, ami hozzátartozik az egyes eseményekhez!
b) Hány elemi eseményből áll az A, B, illetve a C esemény?

Megoldás

A = { (1, 3, 5, 7), (1, 3, 5, 9), … (81, 83, 85, 87, 89)}összesen $\binom{45}{5}$ = 1 221 759 elemi esemény van.

B = {(1, 2, 3, 4, 81), (1, 2, 3, 5, 81), … (85, 86, 87, 88, 89), (86, 87, 88, 89, 90)}összesen $\binom{90}{5}-\binom{80}{5}=$ = 19 909 252 elemi eseményből áll a B esemény. Az összes elemi eseményből kihagytuk azokat, ahol mind az öt szám az első nyolcvanból kerül ki.

A „C” elemi eseményeinek a számát ha meg akarjuk kapni, akkor ismernünk kell a prímeket egytől 90-ig. Ezek az 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89. Összesen 24 prímet találtunk. Tehát 90 – 24 = 66 olyan szám van ami nem prím.

$C = \{(1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 6), \dots (85, 86, 87, 88, 89), (86, 87, 88, 89, 90)\}$ összesen $\binom{90}{5} - \binom{66}{5} = 35\,012\,340$ elemi esemény van.

$D = \{(1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 4, 6), \dots (85, 86, 87, 88, 89), (86, 87, 88, 89, 90)\}$ összesen mivel minden szám ötöst csak egyféle módon húzhatjuk ki emelkedő számsorrendben ezért $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$ elemi esemény van.

4. E1

33 fős osztályban 11 lány van. A matematikatanár véletlenszerűen választ három felelőt. Az A = {mindhárom felelő fiú}, B = {a felelők között van fiú}, C = {a felelők között van lány}. Határozzuk meg a következő eseményeket!

$A + B$, AB, AC, BC, $A + C$, $B + C$.

Megoldás

$A + B = B$, $AB = A$, $AC = 0$, BC = {egy lány és két fiú vagy két lány vagy két lány és egy fiú felel}, $A + C = H$, $B + C = H$

67–68. ESEMÉNYEK VALÓSZÍNŰSÉGE

1. K2

Végezzünk kísérletet annak megállapítására, hogy az olvasmányban szereplő események relatív gyakorisága hogyan alakul nagyobb kísérletszám esetén! Ha mindenki 50 kísérletet végez és feljegyzi a kilences, a tízes és az újra dobás gyakoriságát, majd ezeket a következő órán egyesítjük, akkor több mint ezer kísérletből tudunk relatív gyakoriságot számolni.

Megoldás

Remélhetőleg az ezres kísérletszám esetén a két esemény relatív gyakorisága elég jól közelíti az elméletileg megadott értékeket.

2. K2

Három egyforma pénzérmét feldobva figyeljük a felül lévő jeleket. Hányféle elemi eseményt tudunk megkülönböztetni? Melyik modell alapján számoltunk? Mekkora a három fej dobásának a valószínűsége?

Megoldás

A leckében mondottak alapján szerencsésebb azt a modellt alkalmaznunk, ahol a látszólag egyforma dolgokat mégis megkülönböztetjük. Ezért a három érme esetén úgy adom meg az elemi eseményeket, hogy először az egyes, majd a kettes, végül a hármas számú érmén dobott eredményt sorolom fel.

Az elemi események:iii, iif, ifi, fii, iff, fif, ffi,fff, vagyis összesen nyolc elemi esemény van. Ezt a számot úgy is megkaphattuk volna, hogy mivel tudjuk, hogy mindhárom érmével kétfélét dobhatunk egymástól függetlenül így $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ eset lehetséges. Feltételezzük, hogy a dobások egyenletesen oszlanak el a nyolc elemi esemény között. $P = \frac{1}{8}$.

3. E1

Egy sakktáblára véletlenszerűen elhelyezünk két különböző színű bástyát. (64 mezőből választunk kettőt). Mennyi a valószínűsége, hogy ütik egymást? Mi a helyzet más bábok esetén?

Megoldás

Összesen $\binom{64}{2} = 2016$ féle módon helyezhetjük el a két bástyát. Ebből, ha egy sorban, vagy egy oszlopban vannak akkor a két bástya, akkor ütik egymást. Mivel nyolc sor és nyolc oszlop van, így $16 \cdot \binom{8}{2} = 448$ ilyen eset van. Tehát az összes lehetséges eset $\frac{448}{2016}$ részében ütik egymást.

$P = \frac{448}{2016} = \frac{2}{9}$.

Nézzünk egy másik gondolatmenetet. Tegyük fel, hogy az első bástyát már leraktuk. Ha az ő sorába, vagy oszlopába tesszük a másik bástyát, akkor azok ütik egymást. 14 ilyen hely van akárhol is van az első bástya. A második bástyát 63 helyre tehetjük le. Ez azt jelenti, hogy az esetek $\frac{14}{63} = \frac{2}{9}$ részében üti egymást a két bástya.

4. E2 Mennyi a valószínűsége, hogy egy dobókockát kétszer egymás után feldobva ugyanazt a számot dobjuk?

Megoldás

A két kockát megkülönböztetve $6 \cdot 6 = 36$-féle lehet a két dobás eredménye. Tehát 36-féle elemi esemény van. Ezek közül 6 olyan elemi esemény van, amikor a két dobott szám megegyezik. Ebből arra következtetünk, hogy az összes dobásnak $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$-od részében lesz a két kockán dobott szám egyforma.

Második megoldás. Teljesen mindegy milyen az első kockán dobott szám, a másodikkal $\frac{1}{6}$ valószínűséggel dobunk ugyan olyan számot.

69. A VALÓSZÍNŰSÉG KISZÁMÍTÁSÁNAK KOMBINATORIKUS MODELLJE

1. K2 Mennyi az esélye, hogy három pénzérmét feldobva három fejet vagy három írást dobunk?

Megoldás

Mivel három különböző érmével dobva $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ egyformán valószínű elemi eseményt tudunk megkülönböztetni és nekünk csak az III vagy az FFF a kedvező

$P = \frac{\textit{kedvező esetek}}{\textit{összes eset}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

2. K2 Egy dobozban 4 piros és 6 kék golyó van. Előbb Jancsi húz véletlenszerűen egy golyót, majd a maradék 9 golyóból Juliska húz egyet, szintén véletlenszerűen. Legyen az A és B esemény a következő:
$A = \{$Jancsi kék golyót húz.$\}$, $B = \{$Egyforma golyókat húznak.$\}$
Határozzuk meg *a)* $A \cdot B$; *b)* $A + B$; *c)* $A - B$; *d)* $B - A$; *e)* $\overline{B}$ valószínűségét! *f)* Hogyan változnak az egyes valószínűségek, ha az első kihúzott golyót Jancsi visszateszi? (Tehát ekkor Juliska is 10 golyóból húz.)

Megoldás

Az események átfogalmazhatók: $A = \{$1. húzás kék.$\}$, $B = \{$2 kék vagy 2 piros húzás történik.$\}$.

a) $P(A \cdot B) = P(\text{2 kék húzás történik}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$.

b) $P(A + B) = P(\text{1. húzás kék (és a második bármi) vagy mindkét húzás piros}) = \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{11}{15}$.

c) $P(A - B) = P(\text{1. húzás kék, 2. húzás piros}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$.

d) $P(B - A) = P(\text{mindkét húzás piros}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$.

e) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \left(\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}\right) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$.

Másképpen:

$P(\overline{B}) = P(\text{különböző golyókat húznak}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$.

f) Ha visszatevéssel húznak, akkor a kék, illetve piros golyók húzási esélye állandó. Ekkor:

a) $P(\text{2 kék húzás történik}) = \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{9}{25}$;

b) $P(\text{1. húzás kék (és a második bármi) vagy mindkét húzás piros}) = \frac{6}{10} + \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{19}{25}$;

c) $P(\text{1. húzás kék, 2. húzás piros}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{6}{25}$;

d) $P(\text{mindkét húzás piros}) = \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{4}{25}$;

e) $P(\text{különböző golyókat húznak}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{12}{25}$.

3. E1 Egy kisregény lapjai 7-től 100-ig vannak megszámozva. Véletlenszerűen kinyitjuk a könyvet valahol, és ott rábökünk az egyik oldalra. Mennyi az esélye, hogy az oldalon látható sorszám prím?

Megoldás

Mivel 7-től 100-ig 94 szám van és ezek között pontosan 22 prím, ezért

$P = \frac{22}{94} = \frac{11}{47} \approx 23{,}4\%$.

70. NÉHÁNY ÉRDEKES PROBLÉMA

1. K2 Egy kosárban 12 alma van, közülük 3 belülről kicsit férges. Kettőt véletlenszerűen kiválasztottam, hogy elvigyem uzsonnára. Mennyi az esélye, hogy kellemes uzsonnában lesz részem, ami azt jelenti, hogy mindkét alma teljesen ép?

Megoldás

$$P(\text{mindkét alma teljesen ép}) = \frac{\textit{kedvező esetek}}{\textit{összes eset}} = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{36}{66} = \frac{6}{11}.$$

2. K2 Igaz-e, hogy a hatos lottón több mint ötször akkora a telitalálat valószínűsége, mint az ötös lottón?

Megoldás

$$\frac{p(\textit{telitalálat a hatos lottón})}{p(\textit{telitalálat az ötös lottón})} = \frac{\frac{1}{\binom{45}{6}}}{\frac{1}{\binom{90}{5}}} = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{45}{6}} \approx 5{,}4, \text{ tehát a válasz igen.}$$

3. K2 Egy osztályba 15 fiú és néhány lány jár. A két hetest véletlenszerűen kiválasztva, annak a valószínűsége, hogy mindkettő fiú lesz, $\frac{7}{20}$. Hány lány jár az osztályba?

Megoldás

Tegyük fel. Hogy k lány jár az osztályba.

$$P = \frac{7}{20} = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{15+k}{2}} = \frac{105}{\frac{(15+k)(15+k-1)}{2}} = \frac{105}{\frac{(15+k)(14+k)}{2}} = \frac{210}{(15+k)(14+k)}.$$

Vagyis: $\frac{7}{20} = \frac{210}{(15+k)(14+k)}$ $/ \cdot \frac{20}{7} \cdot (15+k) \cdot (14+k)$

$(15 + k)(14 + k) = 600$

$k^2 + 29k - 390 = 0$

$k_1 = 10$, $k_2 = -39$. A feladat feltételeinek csak a $k = 10$ felel meg. Ez azt jelenti, hogy 10 lány jár az osztályba.

Valóban $\frac{7}{20} = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{105}{300} = \frac{7}{20}$.

4. E1

A matematikaérettségire előzetesen öt feladatsort készítettek, amelyek közül kiválasztják az eredeti és a pótérettségi feladatsorát. Az egyes sorszámú tartalmaz egy nehéz valószínűség-számítási feladatot. Mennyi az esélye, hogy ez a feladatsor is közte lesz a két kitűzött feladatsornak?

Megoldás

$P = \frac{\textit{kedvező esetek}}{\textit{összes eset}} = \frac{1 \cdot \binom{4}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10} = 40\%$. Tehát 60% az esélye annak, hogy a kiválasztott feladatsorok között lesz az egyes sorszámú.

5. K2

Játék

Egy híres középkori problémában két játékos szabályos érmével játszik. Az egyikük akkor győz, ha – nem szükségképpen egymás után – öt fej jön ki eredményül, a másik pedig akkor, ha öt írás. A játszma négy fej, két írás állásnál véglegesen félbeszakad. Hogyan osztozzanak a játékosok az 1600 egységnyi téten? (A nevezetes eredmény az ún. „osztozkodás-paradoxon”.)

Megoldás

A feladat elemzésekor egy lehetséges kiindulási alap, ha azt vizsgáljuk meg, hogy a játékot tovább folytatva, a játék befejezéséig mekkora valószínűséggel nyerne az első, illetve második játékos. Ekkor észrevehetjük, hogy az öt írással nyerő játékos most csak akkor nyerhetne, ha a következő három dobás mindegyike írás lenne; ennek valószínűsége pedig $\frac{1}{8}$. Minden más esetben az öt fejjel nyerő játékos győz, így a helyes osztozkodási arány 7 : 1. Az első játékos kapjon tehát $7 \cdot \frac{1600}{8} = 1400$, a második pedig $1 \cdot \frac{1600}{8} = 200$ egységnyi összeget.

IX. KÖZÉPPONTI ÉS KERÜLETI SZÖGEK

71. KÖZÉPPONTI ÉS KERÜLETI SZÖGEK

1. E1 Mekkora középponti szögek tartoznak a 27°; 89,4°; 56°48′ kerületi szögekhez? Adjuk meg ezeket a szögeket radiánban is!

Megoldás

Egy körben a kerületi szög fele az ugyanazon íven nyugvó középponti szögnek, így a középponti szögek értéke $2 \cdot 27° = 54°$, $2 \cdot 89{,}4° = 178{,}8°$ és $2 \cdot 56°48' = 113°36'$ $(= 113{,}6°)$.

180°-nak π radián felel meg, α szögnek $\frac{\alpha\pi}{180°}$ radián. A középponti szögek értékei radiánban mérve rendre $\frac{54° \cdot \pi}{180°} \approx 0{,}942$ rad, $\frac{178{,}8° \cdot \pi}{180°} \approx 3{,}121$ rad és $\frac{113{,}6° \cdot \pi}{180°} \approx 1{,}983$ rad.

2. E1 Mekkora kerületi szögek tartoznak a 64°; 128,5°; 245°26′ középponti szögekhez? Adjuk meg ezeket a szögeket radiánban is!

Megoldás

A kerületi szögek $\frac{64°}{2} = 32°$, $\frac{128{,}5°}{2} = 64{,}25°$, $\frac{245°26'}{2} = 122°43'$ $(\approx 122{,}72°)$. A radiánban mért értékek rendre $\frac{32° \cdot \pi}{180°} \approx 0{,}559$ rad, $\frac{64{,}25° \cdot \pi}{180°} \approx 1{,}121$ rad és $\frac{122{,}72° \cdot \pi}{180°} \approx 2{,}142$ rad.

3. E1 Egy körben két ív hossza 8 cm és 15 cm. Az elsőhöz tartozó középponti szög 42°. Mekkora a második ívhez tartozó kerületi szög?

Megoldás

Az ívek hossza egyenesen arányos a hozzájuk tartozó középponti szögek nagyságával. A második ívhez tartozó kerületi szöget jelölje α, ekkor $\frac{\alpha}{15} = \frac{42°}{8}$, s innen $\alpha = \frac{15 \cdot 42°}{8} = 78{,}75°$.

4. E1 Egy körben a 37°-os kerületi szöghöz 5 cm hosszú körív tartozik. Mekkora ív tartozik a 112°-os középponti szöghöz?

Megoldás

A keresett ívet jelölje i. A 37°-os kerületi szöghöz tartozó középponti szög $2 \cdot 37° = 74°$. Az előző feladat megoldásához hasonlóan felírhatjuk az $\frac{i}{112°} = \frac{5}{74°}$ arányt, és innen $i = \frac{5 \cdot 112°}{74°} \approx$ $\approx 7{,}57$ (cm).

5. E1 Egy húr a körvonalat két olyan ívre osztja, amelyek aránya 5 : 7. Mekkorák az ívekhez tartozó középponti és kerületi szögek?

Megoldás

Egyrészt a középponti szögek nagysága arányos a hozzájuk tartozó ívek hosszával, másrészt a két szög öszszege 360°. Így a két középponti szög $\frac{5}{12}\cdot 360° = 150°$ és $\frac{7}{12}\cdot 360° = 210°$-os, a hozzájuk tartozó kerületi szögek értéke pedig $\frac{150°}{2} = 75°$ és $\frac{210°}{2} = 105°$.

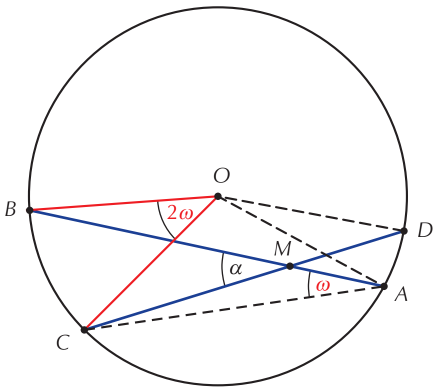
6. E2 Mekkora kerületi szög tartozik a kör $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{11}{180}$ részéhez?

Megoldás

A kör $\frac{1}{5}$ részéhez tartozó középponti szög nagysága $\frac{1}{5}\cdot 360°$, a kerületi szög pedig ennek a fele: $\frac{1}{5}\cdot 180° = 36°$. Hasonlóan: az $\frac{1}{8}$ részhez tartozó kerületi szög $\frac{1}{8}\cdot 180° = 22{,}5°$, a $\frac{3}{4}$ részhez tartozó kerületi szög $\frac{3}{4}\cdot 180° = 135°$, a $\frac{11}{180}$ részhez tartozó kerületi szög pedig $\frac{11}{180}\cdot 180° = 11°$.

7. E2 Két húr 38° 15′-es szögben metszi egymást. E szög egyik ívéhez tartozó középponti szög 63° 44′. Mekkora a másik ívhez tartozó középponti szög?

Megoldás



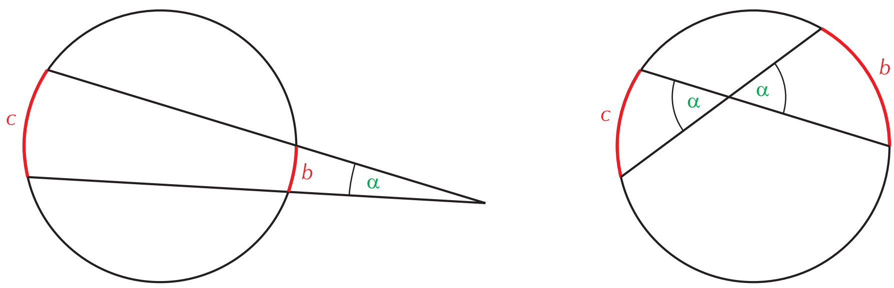
Jelölje a kör középpontját O, az AB és CD húrok metszéspontját M. A feltételek szerint ismert $CMB\sphericalangle = AMD\sphericalangle = \alpha$, valamint a BC ívhez tartozó BOC középponti szög, aminek nagysága legyen 2ω.

Vegyük fel az AC segédszakaszt! Ekkor $CAB\sphericalangle = \omega$, mert feleakkora nagyságú, mint a CB ívhez tartozó középponti szög. Az $ACM\sphericalangle = \alpha - \omega$, mert az ACM háromszögben α az M csúcsnál lévő külső szög. Mivel az $ACM\sphericalangle = ACD\sphericalangle$ egyúttal az AD ívhez tartozó kerületi szög, ezért az AD ívhez tartozó középponti szög ennek a kétszerese: $AOD\sphericalangle = 2(\alpha - \omega)$.

(Az eredmény független O és M viszonylagos helyzetétől.)

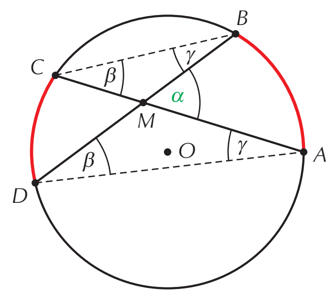
A konkrét adatokkal $\alpha = 38°15'$, $2\omega = 63°44'$, $\omega = 31°52'$, s így a keresett középponti szög $AOD\sphericalangle = = 2(38°15' - 31°52') = 6°23'$.

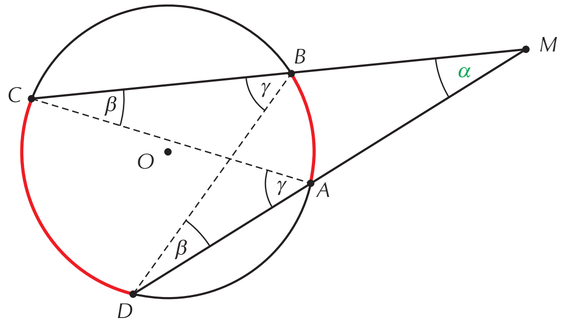
8. E2 Az ábrán a b és c ívekhez tartozó kerületi szögek β, illetve γ. Mekkora az α szög a β és a γ ismeretében?



Megoldás

Ha az AB ívhez tartozó kerületi szög β, akkor $ADB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \beta$ (ábra). Hasonlóan ha a CD ívhez tartozó kerületi szög γ, akkor $DAC\sphericalangle = DBC\sphericalangle = \gamma$. Az ADM háromszög M-nél lévő külső szöge α, így $\alpha = \beta + \gamma$.

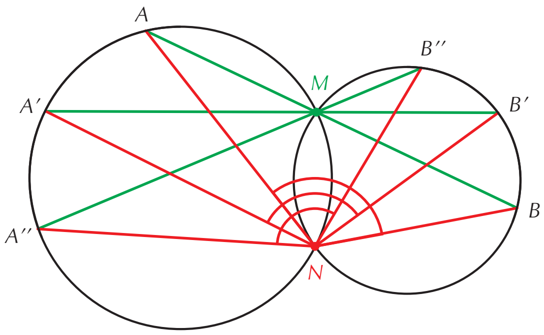




Hasonlóan járunk el ebben az esetben is. $ADB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \beta$ és $DAC\sphericalangle = DBC\sphericalangle = \gamma$. Most a DBM háromszög B-nél lévő külső szöge γ, így $\gamma = \alpha + \beta$, azaz $\alpha = \gamma - \beta$.

9. E2

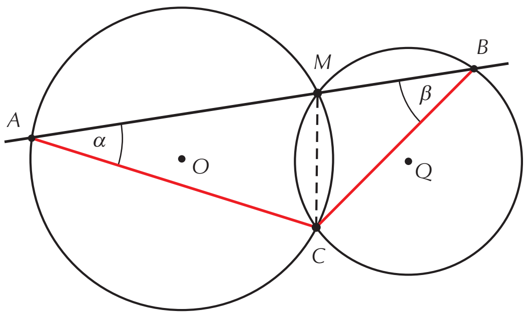
Rajzoljunk két egymást metsző kört, és húzzunk egyeneseket az egyik metszéspontjukon át! Igazoljuk, hogy ezeknek a két kör kivágta szakaszai mind ugyanakkora szögben láthatók a másik metszéspontból! (Az M metszéspont elválasztja az A és B második metszéspontokat.)

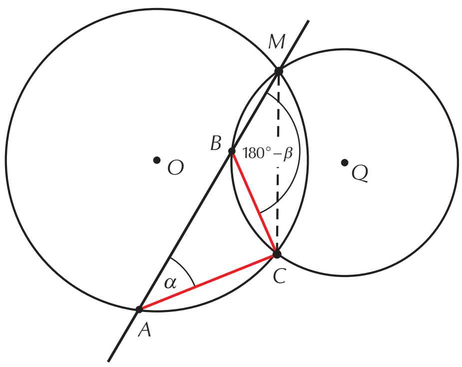


Megoldás

Jelöljük az M metszésponton át húzott egyenesek, valamint a két kör metszéspontjait A-val és B-vel, a két kör másik metszéspontját C-vel (ábra). Ekkor azt kell bizonyítanunk, hogy az ACB szög állandó (azaz nem függ az AB egyenes helyzetétől).

MC rögzített, így $MAC\sphericalangle = \alpha$ az O középpontú kör kerületi szöge, tehát állandó. Hasonlóan $MBC\sphericalangle = \beta$ a Q középpontú körben kerületi szög, ezért β nagysága is állandó. Végül $ACB\sphericalangle = 180° - (\alpha + \beta)$, ami szintén állandó érték; s ezzel az állítást igazoltuk.

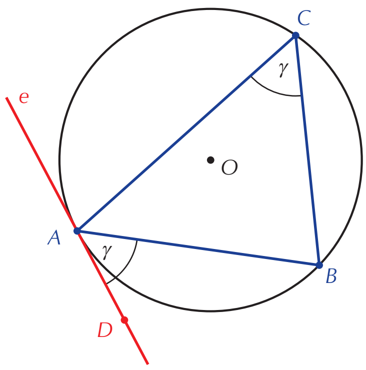




72. ÉRINTŐSZÁRÚ KERÜLETI SZÖG

1. E1 Szerkesszük meg egy *ABC* háromszög köré írt kör *A* pontbeli érintőjét a kör középpontjának megszerkesztése nélkül!

Megoldás

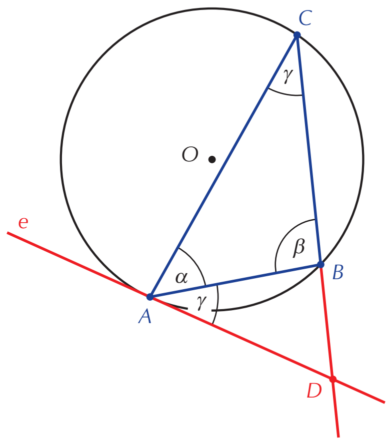


Az $ACB\sphericalangle = \gamma$ az *AB* íven nyugvó kerületi szög. Ugyanilyen nagyságú az *A* pontbeli e érintő és az *AB* húr által bezárt hegyesszög is (érintőszárú kerületi szög), ezért elegendő egy olyan *D* pont megszerkesztése, amelyre $DAB\sphericalangle = \gamma$. Ekkor $e = AD$ a keresett érintő.

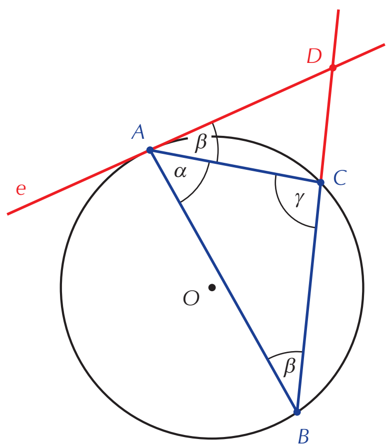
2. E1 Számítsuk ki az *ABC* háromszög köré írt kör *A* pontbeli érintőjének és a *BC* oldal egyenesének szögét, ha a háromszög *B*-nél és *C*-nél levő szögei β és γ!

Megoldás

Az e érintő és a *BC* oldalegyenes metszéspontját jelöljük *D*-vel (ábra). Ekkor $DAB\sphericalangle = \gamma$ (érintő szárú kerületi szög), s mivel az *ADB* háromszög *B*-nél lévő külső szöge β, így a keresett szög $ADB\sphericalangle = \beta - \gamma$.



Ezt az eredményt abban az esetben kapjuk, ha $\beta > \gamma$. Ha $\beta = \gamma$, azaz a háromszög egyenlő szárú, akkor a két egyenesnek nincs metszéspontja; ha pedig $\beta < \gamma$, akkor a *BC* szakasz *C*-n túli meghosszabbítása metszi az e érintőt, s a bezárt szög $\gamma - \beta$.

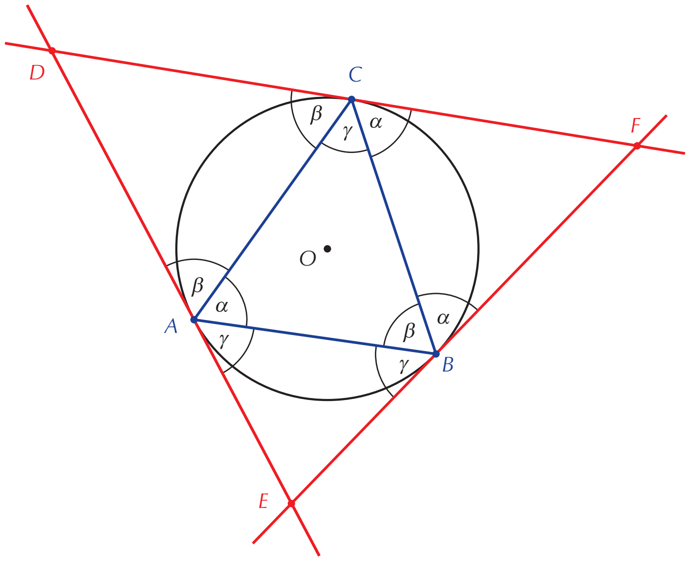


3. E1 Rajzoljunk egy háromszög csúcspontjaiban a háromszög köré írt körhöz érintőket! Mekkorák az érintők által meghatározott háromszög szögei, ha az eredeti háromszög szögei α, β, γ?

Megoldás

Az AB húrhoz tartozó érintőszárú kerületi szögek nagysága γ, a BC húrhoz tartozóké α, és az AC húrhoz tartozóké β (ábra). Jelölje az érintők metszéspontját D, E, F; ekkor a keresett szögek nagysága $FDE\sphericalangle = 180° - 2\beta$, $DEF\sphericalangle = 180° - 2\gamma$, $EFD\sphericalangle = 180° - 2\alpha$.

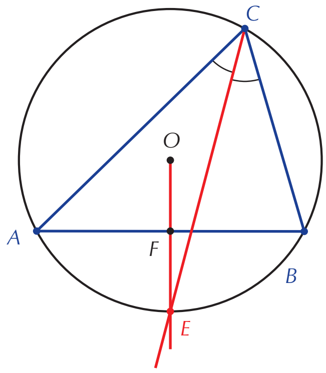
Megjegyzés: A három szög összege $3 \cdot 180° - 2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 180°$ természetesen.



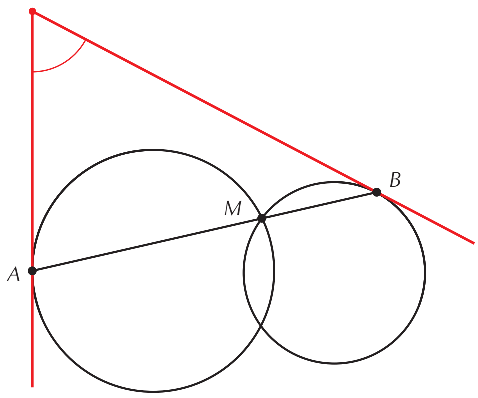
4. E1 Igazoljuk, hogy egy háromszög egyik szögfelezője és a szemközti oldal felezőmerőlegese a köré írt körön metszik egymást!

Megoldás

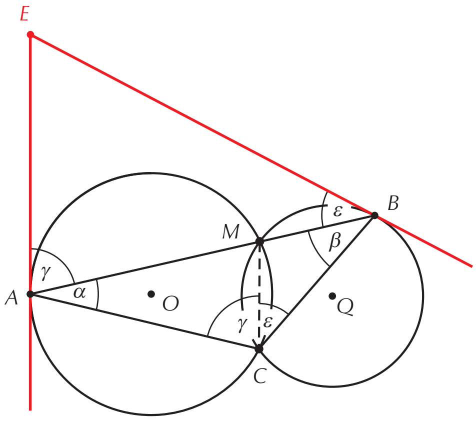
Jelöljük a C csúcsból húzott szögfelező és a körülírt kör metszéspontját E-vel (ábra)! Mivel $ACE\sphericalangle = BCE\sphericalangle$, és ugyanakkora kerületi szögekhez azonos hosszúságú ívek tartoznak, ezért az AE és EB ívek egyenlők. Ebből következik, hogy E az AB ív felezőpontja, s ezen ponton az AB szakasz felező merőlegese valóban átmegy.

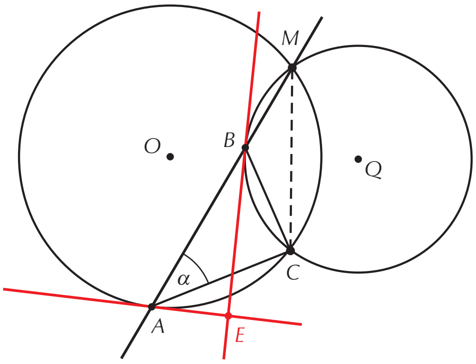


5. E1 Húzzunk két kör egyik metszéspontján át egyeneseket! A két körrel való újabb metszéspontjaikban húzzunk érintőket a körökhöz! Mutassuk meg, hogy mindezek az érintőpárok ugyanakkora szöget zárnak be egymással! (Az M metszéspont elválasztja az A és B második metszéspontokat.)



Megoldás





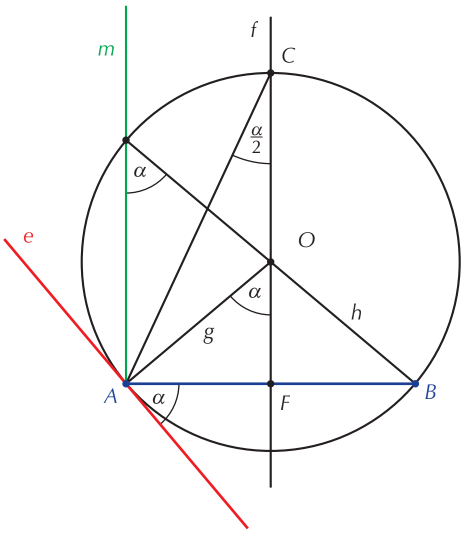
A két kör M metszéspontján át húzott egyenes az A és B pontban metszi a köröket, az ezen pontokba húzott érintők metszéspontját pedig jelölje E. Bizonyítanunk kell, hogy az $AEB\sphericalangle$ állandó.

Egy lehetséges megoldás a következő.

Jelölje a két kör M-től különböző metszéspontját C. Az előző leckében igazoltuk, hogy az $ACB\sphericalangle$ állandó. (Emlékeztetőül: az ábra szerinti α és β kerületi szögek nagysága állandó, és $ACB\sphericalangle = 180° - (\alpha + \beta)$.) Észrevehetjük, hogy $EAM\sphericalangle = ACM\sphericalangle = \gamma$ és $EBM\sphericalangle = BCM\sphericalangle = \varepsilon$ (érintő szárú, illetve „normál” kerülti szögek). Mivel $ACB\sphericalangle = \gamma + \varepsilon =$ állandó, így $AEB\sphericalangle = 180° - (\gamma + \varepsilon)$ szintén állandó érték.

(Azt is megkaptuk, hogy $AEB\sphericalangle = \alpha + \beta$.)

73. LÁTÓSZÖGGEL KAPCSOLATOS MÉRTANI HELY



A következő feladatok megoldása során általában adott szakasz látókörét kell megszerkesztenünk. A szerkesztésre több lehetőségünk van.

Tegyük fel, hogy a sík azon pontjait keressük, amelyekből egy AB szakasz α nagyságú szögben látszik. A ponthalmaz két, az AB-re szimmetrikus helyzetű körív, s az egyik körközéppontot például a leckében leírt módon, az ábra szerinti f és g egyenesek metszéspontjaként kaphatjuk meg. (g merőleges az A pontbeli érintőre, míg f az AB szakasz felezőmerőlegese.)

$OAF\sphericalangle = OBF\sphericalangle = 90° - \alpha$ szerkeszthető, így egy másik lehetőség például a g és h egyenesek szerkesztése (mindkét esetben $90° - \alpha$ nagyságú szöget kell felmérnünk az AB szakaszra).

Elvileg úgy is eljárhatunk, hogy megszerkesztjük a körív valamely további pontját. Az ábrán a C és D pontok szerkeszthetők könnyen: $BAD\sphericalangle = 90°$, $ABD\sphericalangle = 90° - \alpha$, így a D pont a h és m egyenesek metszete. (m az AB szakaszra A-ban állított merőleges.) A C pont szerkesztésében pedig az az észrevétel segít, hogy $FAC\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Mindkét esetben ismerjük a körvonal három pontját, így visszavezethetjük a feladatot három pont köré írt kör szerkesztésére.

A továbbiakban tehát ismert szerkesztési lépésként hivatkozunk a látókör-szerkesztésre. A leckében kitűzött szerkesztési feladatok teljes és részletes megoldására nincs lehetőségünk; megelégszünk a szerkesztés vázlatos menetének a leírásával, s minimális – elsősorban a megoldásszámra vonatkozó – diszkusszióval (elemzéssel).

1. E1 Rajzoljunk egy egyenest, és tűzzünk ki rajta kívül két pontot! Szerkesszünk az egyenesen olyan pontot, amelyből a kitűzött pontokat összekötő szakasz adott szögben látható!

Megoldás

Jelölje a szakaszt AB, az adott szöget α! Ekkor a keresett pont az AB szakasz α szögű látókörének, valamint az adott egyenesnek a metszéspontja. Mivel a látókör két körív, a megoldások száma 0, 1, 2, 3 vagy 4 lehet.

2. E1 Vegyünk fel egy kört és a kör belsejében két pontot! Szerkesszünk a körön olyan pontot, amelyből a két adott pontot összekötő szakasz adott szögben látható!

Megoldás

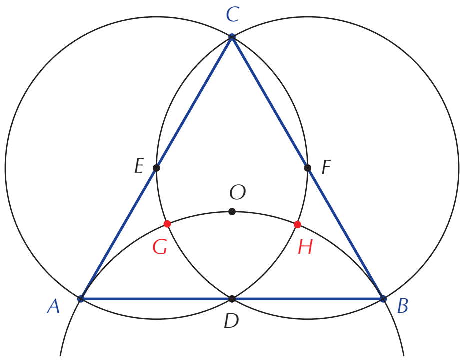
Hasonlóan járunk el, mint az előző feladatban. Ha a szakaszt AB, az adott szöget α jelöli, akkor az AB szakasz α szögű látókörének, valamint az adott körnek a metszéspontja megfelelő lesz. Most is legfeljebb 4 megoldás lehet.

3. E2 Szerkesszünk egy szabályos háromszög belsejében olyan pontot, amelyből az egyik oldal 90°-os, a másik 120°-os szögben látható!

Megoldás

A keresett pontok az egyik oldal 90°-os, és a másik oldal 120°-os látókör-íveinek a metszéspontjai.

Az ábrán megrajzoltuk az AB oldal 120°-os, valamint a BC és AC oldalak 90°-os látóköreit (ez utóbbiak Thalesz-körök). Keresett tulajdonságú pontok a G és H. Az ábra alapján azt is megállapíthatjuk, hogy a feladatnak 6 megoldása van.



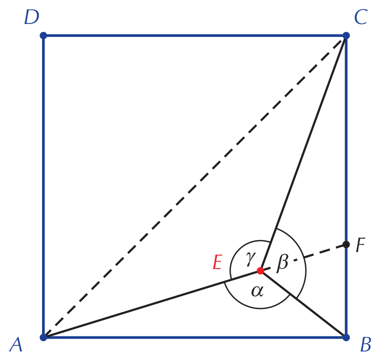
4. E1 Szerkesszünk egy négyzet belsejében olyan pontot, amelyikből két szomszédos oldal egyike 120°-os, a másik 150°-os szögben látható!

Megoldás

Tekintsük a feladatot megoldottnak, azaz tegyük fel, hogy az $ABCD$ négyzet belsejében az E pont olyan tulajdonságú, hogy $AEB\sphericalangle = \alpha = 120°$ és $BEC\sphericalangle = \beta = 150°$ (ábra). Ekkor $AEC\sphericalangle =$ $= \gamma = 90°$ adódik. Ez azonban nem lehetséges: könnyen igazolható, hogy mindig teljesülnie kell az $AEC\sphericalangle < ABC\sphericalangle = 90°$ egyenlőtlenségnek.

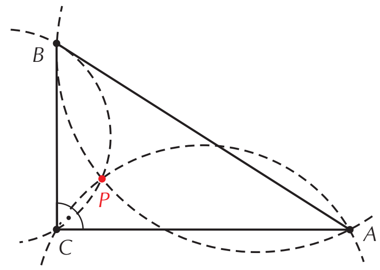
(Bizonyítás: A külsőszög-tételt kétszer alkalmazzuk, ez alapján $AEC\sphericalangle < AFC\sphericalangle < ABC\sphericalangle = 90°$.)

A feladatnak tehát nincs megoldása.



5. E1 Keressünk egy derékszögű háromszög belsejében olyan pontot, amelyből mind a három oldal ugyanakkora szögben látható! Mindig van a feladatnak megoldása?

Megoldás



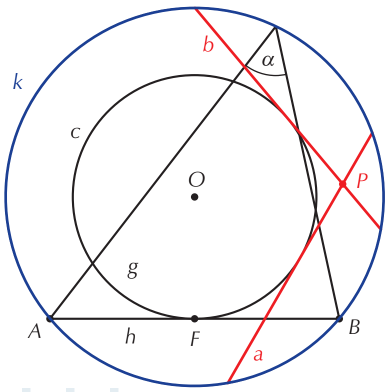
A keresett P pontra $APB\sphericalangle = BPC\sphericalangle = CPA\sphericalangle = 120°$, így P az AB, BC és AC oldalakra emelt, 120°-os látókörívek metszéspontjaként állhat elő.

Az ábráról leolvasható, hogy ha az AB szakasz 120°-os látókörívéhez a B pontban érintőt húzunk, akkor az e érintő az AB szakasszal 60°-os szöget zár be. Ezért az AB és BC oldalakra emelt 120°-os látókörívek minden olyan esetben metszik egymást, amikor $ABC\sphericalangle < 120°$. A derékszögű háromszögre ez a feltétel teljesül, tehát az AB és BC oldalakra emelt 120°-os látókörívek mindig metszik egymást egy P pontban. Mivel $APB\sphericalangle = BPC\sphericalangle = 120°$, szükségképpen $CPA\sphericalangle = 120°$, tehát a P ponton át kell haladnia az AC oldalra emelt 120°-os látókörívnek. tehát a feladatnak mindig van – pontosan egy – megoldása.

Megjegyzés: A három látókörívet tetszőleges háromszög esetén is megszerkeszthetjük. Ha a háromszög minden szöge kisebb, mint 120°, akkor a pont egyértelműen létezik, ezt nevezik a háromszög izogonális pontjának.

6. E2 Egy kör belsejében vegyünk fel egy pontot! Szerkesszünk a ponton át olyan húrt, amelyhez adott nagyságú kerületi szög tartozik!

Megoldás



Többféle megoldás adható. Adott α nagyságú kerületi szögekhez ugyanakkora húrok tartoznak (és fordítva), így α ismeretében a keresett húr h hossza meghatározható. A h hosszúságú húrok felezőpontjai az eredeti körrel koncentrikus c kört határozzák meg (egyúttal c-t érintik), tehát elegendő az adott P ponton át a c körhöz érintőt szerkesztenünk.

A konkrét eljárás a következő (ábra):

Az adott O középpontú k körbe tetszőleges α nagyságú kerületi szöget szerkesztünk, az ehhez tartozó AB húr hossza tehát h. Megszerkesztjük az AB szakasz F felezőpontján átmenő, O középpontú c kört (a c-t érintő húrok hossza h). Végül P-ből érintőt szerkesztünk a c körhöz, az érintő k körbe eső szakasza a keresett húr.

Az érintő szerkesztésétől függően 0, 1 vagy 2 megoldás lehet. (Az ábrán két megoldás látható, az a és a b húr.)

7. E1 Rajzoljunk egy kört és egy háromszöget! Szerkesszünk a körbe háromszöget, melynek szögei egyenlők az adott háromszög szögeivel!

Első megoldás

Jelölje a háromszög szögeit α, β és γ! Ezekhez a kerületi szögekhez az adott k körben állandó a, b, c hosszúságú húrok tartoznak. A szerkesztés tehát egyszerűen annyiból áll, hogy az a, b és c hosszúságú húrok megszerkesztése után, ezeket egymáshoz csatlakozva felmérjük a körben. (Elég $a = BC$ és $b = CA$ felmérése; $AB = c$ szükségképpen teljesül.)

Második megoldás

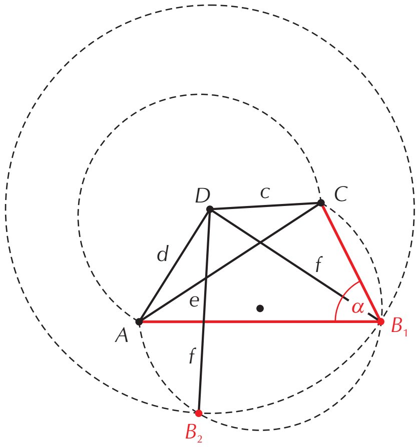
Megszerkesztjük az adott ABC háromszög köré írható c kört, majd a c-t hasonlósági transzformációval átvisszük k-ba. A k körben keletkezett $A'B'C'$ háromszög megfelelő lesz.

8. E2 Szerkesszünk négyszöget, ha adott két átlója, két szomszédos oldala és a másik két oldal szöge!

Megoldás

Legyen az $ABCD$ négyszögben az átlók hossza $AC = e$, $BD = f$, valamint ismert mennyiségek még $AD = d$, $DC = c$ és $ABC\sphericalangle = \alpha$. Észrevehetjük, hogy az ACD háromszög könnyen szerkeszthető, hiszen három oldala ismert. (Ha az oldalak más sorrendben adottak, akkor is szerkeszthető háromszöget kapunk két szomszédos oldal és a megfelelő átló segítségével.) A hiányzó B pont két ponthalmaz metszeteként áll elő: egyrészt rajta van a D középpontú, f sugarú körön, másrészt pedig az AC átló α szögű látókörén fekszik.

Több megoldást is kaphatunk, s ezek között konkáv négyszög is lehet. (A látókörívet az AC átló mindkét oldalára megszerkeszthetjük.) Természetesen a megoldhatóság egyik szükséges feltétele, hogy az e, d, c hosszúságú szakaszokból háromszöget szerkeszthessünk.)



74–75. HÚRNÉGYSZÖG

1. E1 A paralelogrammák közül melyek a húrnégyszögek?

Megoldás

A paralelogrammák szemközti szögei egyenlők. Ha ezek összege 180°, akkor a szögek szükségképpen 90°-osak. Tehát ha egy paralelogramma húrnégyszög, akkor téglalap.

2. E1 Lehet-e a trapéz vagy a deltoid húrnégyszög?

Megoldás

A húrtrapéz húrnégyszög (és ha egy húrnégyszög trapéz, akkor az húrtrapéz).

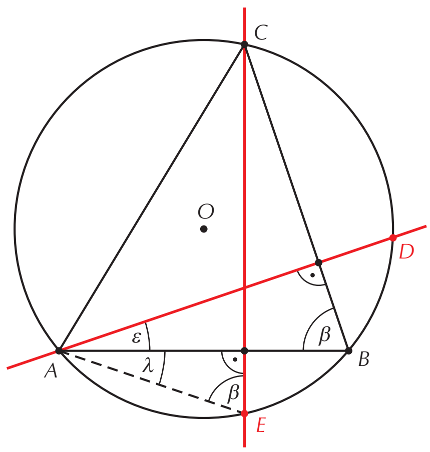
Ha az $ABCD$ deltoidban $B\sphericalangle = D\sphericalangle$, és a húrnégyszög-tulajdonság miatt $B\sphericalangle + D\sphericalangle = 180°$, akkor $B\sphericalangle = D\sphericalangle = 90°$. A feltétel elégséges, mert ekkor a másik két szög összege is 180°. Tehát az ún. derékszögű deltoid húrnégyszög; ekkor konvex, és a körülírt kör középpontja az AC átló felezőpontja.

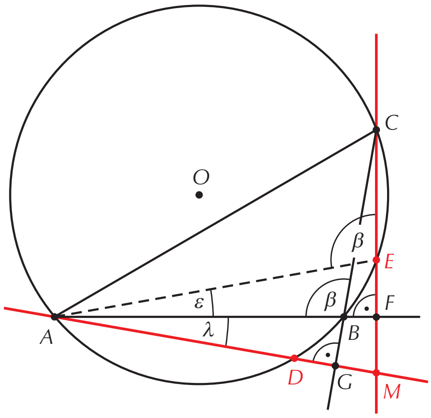
3. E1 Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög két magasságvonalának meghosszabbításai a harmadik csúcstól egyenlő távolságban levő pontokban metszik a háromszög köré írt kört!

Megoldás

Metsszék az ABC háromszögben az A és C csúcsból húzott magasságok a D, illetve E pontban a körülírt kört. Ekkor igazolnunk kell, hogy $EB = BD$ (ábra).

Legyen $ABC\sphericalangle = \beta$, ekkor $AEC\sphericalangle = \beta$ szintén, mert mindkét szög az AC íven nyugvó kerületi szög. Az ábrán ε-nal, illetve λ-val jelölt szögek egyenlők, mert a megfelelő derékszögű háromszögekben β pótszögeik. Készen vagyunk: $EAB\sphericalangle = DAB\sphericalangle$, s mivel ezen kerületi szögek egyenlők, a hozzájuk tartozó EB, illetve DB ívek hossza is megegyezik.





A megfontolásaink tompaszögű háromszög esetén is érvényesek maradnak.

(Például az ábrán a B csúcsnál lévő tompaszög miatt AG és CF a háromszögön kívül haladó magasságvonalak. $AEC\sphericalangle = \beta$, mert AC kerületi szöge. Az AGB és AFE derékszögű háromszögekben $\lambda = \beta - 90°$ és $\varepsilon = \beta - 90°$, tehát $\lambda = \varepsilon$.)

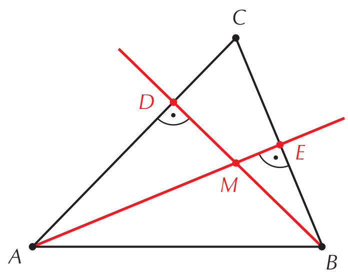
4. E2 Tükrözzük egy tompaszögű háromszög magasságpontját a háromszög egyik oldalegyenesére! Igazoljuk, hogy a magasságpont tükörképe a háromszög köré írt körön van!

Megoldás

Az előző ábra jelöléseit használva az AG és CF magasságok M metszéspontja a háromszög magasságpontja. Az AFE és AFM derékszögű háromszögek egybevágósága miatt, ha az M pontot tükrözzük az AB oldalegyenesre, akkor az E pontba jutunk, ami valóban rajta van a körülírt körön. (M-et G-re tükrözve a D pontot kapjuk.)

5. E1 Igazoljuk, hogy bármely nem derékszögű háromszög két csúcsa és a szemközti oldalukhoz tartozó magasságtalppontok húrnégyszöget határoznak meg!

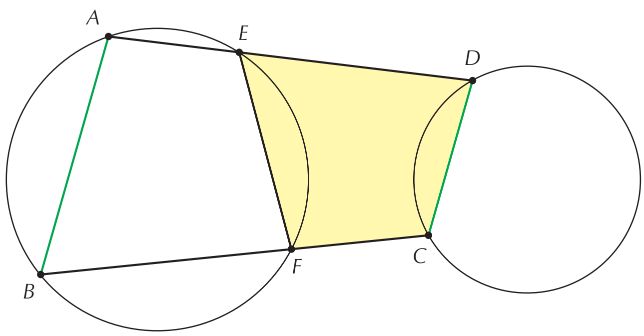
Megoldás



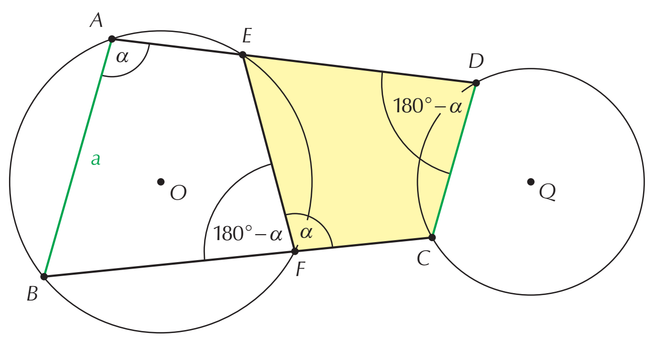
Mivel $ADB\sphericalangle = AEB\sphericalangle = 90°$, így az AB szakaszra emelt Thalesz-kör átmegy a D és E pontokon. Az A, B, C, D pontok tehát valóban egy körön vannak.

Tompaszögű háromszögre is igaz marad az állítás. (A tompaszögű háromszöget úgy képzelhetjük el, hogy a C és M pont szerepet (és helyet) cserél.)

6. E1 Az ábrán AB és CD egy-egy kör párhuzamos húrjai. Igazoljuk, hogy az $ECDF$ négyszög húrnégyszög!



Megoldás



Legyen $EAB\sphericalangle = \alpha$, ekkor $BFE\sphericalangle = 180° - \alpha$, mert $AEFB$ húrnégyszög.

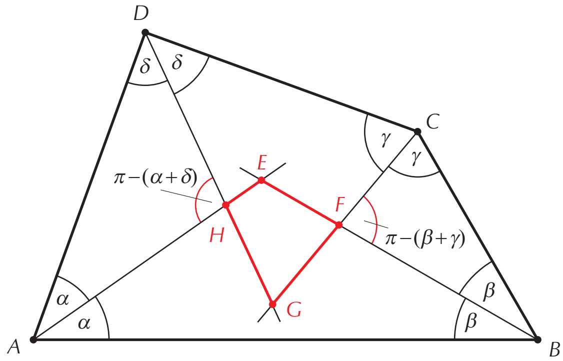
$EFC\sphericalangle$ a $BFE\sphericalangle$ kiegészítő szöge, így $EFC\sphericalangle = \alpha$. Az AB és CD húrok párhuzamossága miatt $CDA\sphericalangle = 180° - BAD\sphericalangle = 180° - \alpha$. Kaptuk, hogy az $ECDF$ négyszögben
$D\sphericalangle + F\sphericalangle = 180°$,
így $ECDF$ valóban húrnégyszög.

7. E2 Igazoljuk, hogy ha egy konvex négyszög szögfelezői négyszöget alkotnak, akkor ez a négyszög húrnégyszög!

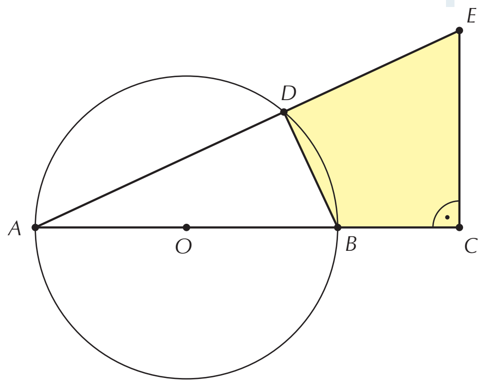
Megoldás

Az *ABCD* négyszög szögeit jelölje 2α, 2β, 2γ, 2δ, a szögfelezők által kapott négyszög csúcsait pedig *E*, *F*, *G*, *H*!

Az *EFGH* négyszög *H*-nál levő belső szöge az ábra szerint $H\sphericalangle = \pi - (\alpha + \delta)$, az *F*-nél lévő belső szöge pedig $F\sphericalangle = \pi - (\beta + \gamma)$. A két szög összege $H\sphericalangle + F\sphericalangle =$ $= 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$. Mivel bármely négyszög belső szögeinek összege 2π, ezért $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 2\pi$, azaz $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$. Az *EFGH* négyszög szemköztes szögeinek összege így π, vagyis beláttuk, hogy (ha létezik) *EFGH* húrnégyszög.

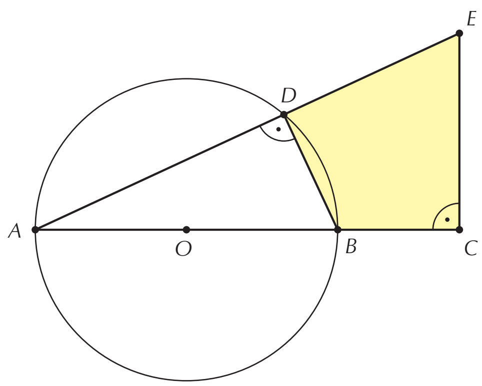


8. E1 Igazoljuk, hogy az ábrán szereplő *BCED* négyszög húrnégyszög!

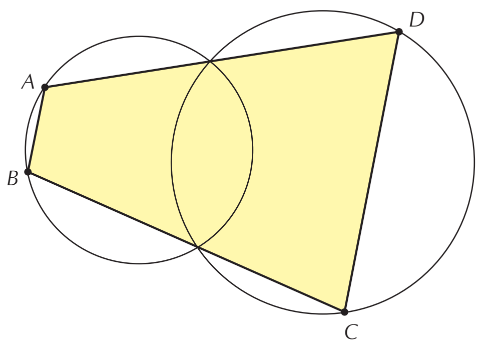


Megoldás

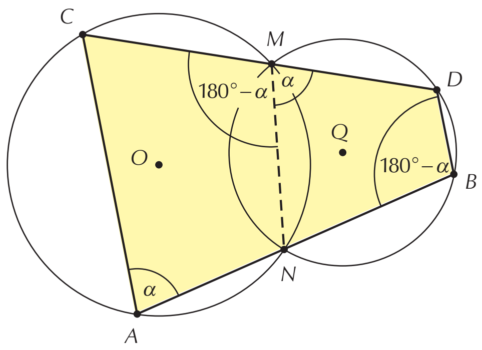
Thalesz tétele miatt $ADB\sphericalangle = 90°$, így a *BCED* négyszögben $C\sphericalangle + D\sphericalangle = 180°$, vagyis *BCED* valóban húrnégyszög.



9. E1 Két kör metszéspontjain át egy-egy szelőt húztunk. Igazoljuk, hogy az *ABCD* négyszög trapéz! (Ne feledkezzünk meg a diszkusszióról!)



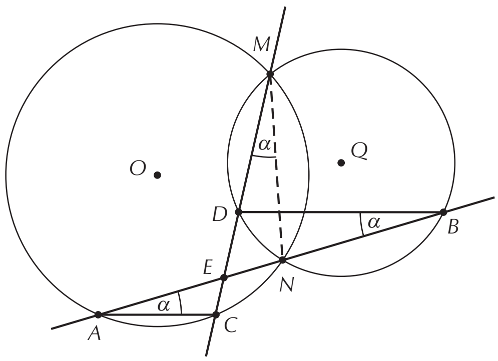
Megoldás



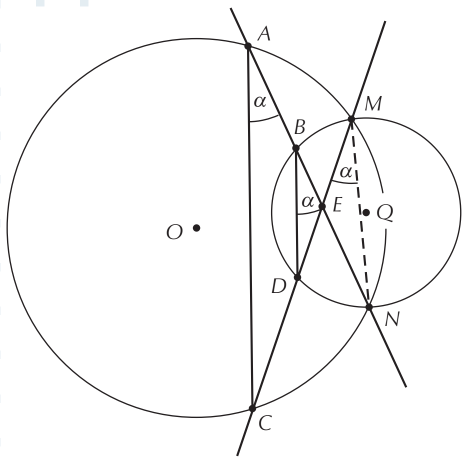
Az O és Q középpontú körök metszéspontjait jelöljük M-mel és N-nel, s legyen $NAC\sphericalangle = \alpha$ (ábra)!

$ANMC$ húrnégyszög, ezért $CMN\sphericalangle = 180° - \alpha$. Ennek $NMD\sphericalangle$ kiegészítő szöge, így $NMD\sphericalangle = \alpha$; továbbá $NBD\sphericalangle = 180° - \alpha$, mert $NBDM$ húrnégyszög. $ABDC$ valóban trapéz, mert $A\sphericalangle + B\sphericalangle = 180°$.

Meg kell vizsgálnunk azt az esetet, ha az egyik szelő, pl. CD, a másik (az ábrán: rövidebbik) MN ívén metszi a Q középpontú kört.



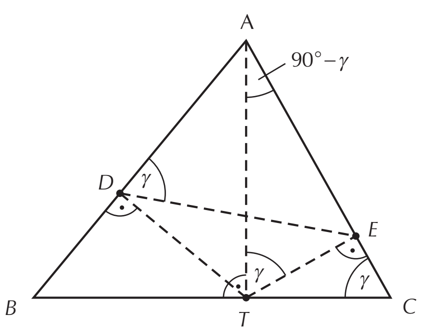
Jelöljük az ábra szerinti AB és CD szelők metszéspontját E-vel, s legyen $CAN\sphericalangle = \alpha$. Ekkor $CMN\sphericalangle = \alpha$ szintén (azonos CN íven nyugvó kerületi szögek). De – hasonló okok miatt – $DMN\sphericalangle = DBN\sphericalangle = \alpha$ szintén. Mivel $CAE\sphericalangle = EBD\sphericalangle$ váltószögek, így AC és BD párhuzamos, tehát $ACBD$ trapéz.



Végül hasonlóan igazolható a harmadik eset is, amikor mindkét szelő a rövidebbik MN ívén metszi a Q középpontú kört. (A bizonyítás leolvasható az ábráról.)

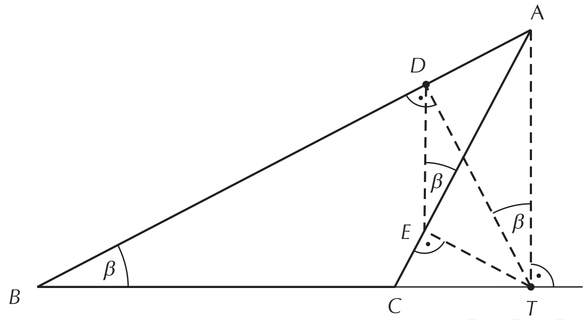
10. E1 Egy háromszög egyik oldalán levő magasságtalppontból bocsássunk merőlegest a másik két oldalra! Igazoljuk, hogy ezeknek a talppontjai és a kiindulásul vett oldal végpontjai egy körön helyezkednek el!

Megoldás

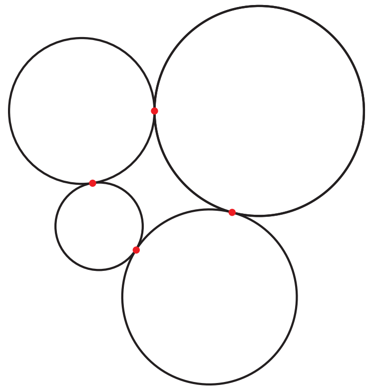


Az A csúcsból a BC oldalra bocsátott merőleges talppontját jelölje T, a T pontból az AB és AC oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjait pedig jelölje D és E (ábra). Ha $BCA\sphericalangle = \gamma$, akkor $ETA\sphericalangle = \gamma$ (merőleges szárú hegyesszögek), valamint $EDA\sphericalangle = \gamma$ is teljesül. Ugyanis $ADTE$ húrnégyszög ($D\sphericalangle + E\sphericalangle = 180°$), és $ETA\sphericalangle$ és $EDA\sphericalangle$ az AE húrhoz tartozó kerületi szögek. Ekkor azonban $BDE\sphericalangle = 180° - \gamma$, s így a $BCED$ négyszögben $C\sphericalangle + D\sphericalangle = 180°$. Az állítást beláttuk: $BCED$ húrnégyszög.

Hasonlóan igazolható tompaszögű háromszögekre is az állítás. Segítségül egy ábrát mellékelünk.

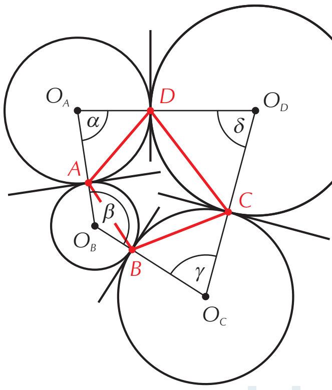


11. E2 Igazoljuk, hogy ha négy kör bármelyike két másikkal kívülről érintkezik, akkor a négy érintési pont egy körön van!



Első megoldás

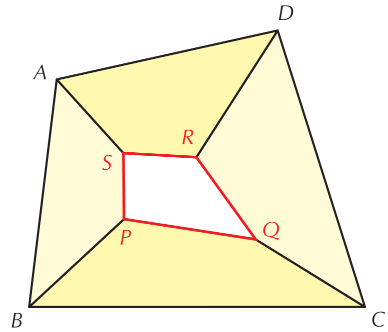
Jelölje a körök középpontját O_A, O_B, O_C, O_D, a körök érintési pontjait A, B, C, D, a körközéppontoknál keletkezett szögeket pedig α, β, γ, δ (ábra)! Mivel AO_AD egyenlő szárú háromszög, így $O_ADA\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, s hasonlóan $O_DDC\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\delta}{2}$. Az $ADC\sphericalangle = 180^\circ - O_ADA\sphericalangle - O_DDC\sphericalangle =$ $= \frac{\alpha + \delta}{2}$. Szimmetriaokok miatt $ABC\sphericalangle = \frac{\beta + \gamma}{2}$. Az $ABCD$ négyszögben $D\sphericalangle + B\sphericalangle = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 180^\circ$, mert $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ (négyszög belső szögeinek összege). Az állítást beláttuk, $ABCD$ húrnégyszög.



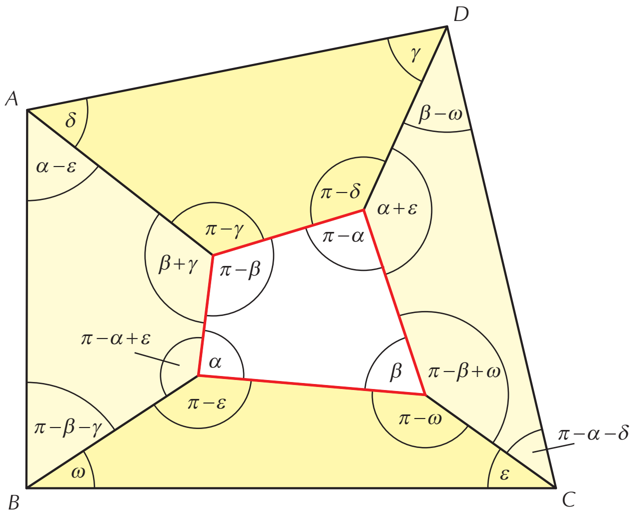
Második megoldás

Húzzuk meg a közös érintőket az A, B, C, D pontokba. A négyszög belsejében lévő AD ívhez tartozó kerületi szög $\frac{\alpha}{2}$ az A és a D pontoknál is. Hasonlóan $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\delta}{2}$ szögek adódnak az AB, BC, CD ívnél keletkező érintő szárú kerületi szögekre. Mivel $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ (négyszög belső szögeinek összege), ezt 2-vel osztva $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 180^\circ$, és ez éppen az A és C, valamint a B és D csúcsoknál keletkező kerületi szögek összege.

12. E2 Igazoljuk, hogy az öt húrnégyszögből összetett *ABCD* négyszög szintén húrnégyszög!



Megoldás



Az öt húrnégyszögre tíz összefüggést írhatunk fel (a szemközti szögek összege 180°), továbbá van még négy összefüggésünk: a „belső” csúcsok körüli szögek összege 360°. Ez 14 egyenlet; tehát a négyszögek 20 belső szögei közül 6-ot szabadon választhatunk. Legyenek ezek α, β, γ, δ, ε, ω, és a többi szög értékét ezek segítségével kifejezhetjük (ábra).

A „külső” négyszög két szemköztes szögének összege $(\alpha-\varepsilon+\delta)+(\varepsilon+\pi-\alpha-\delta)=\pi$ (= 180°), tehát a „külső” négyszög valóban húrnégyszög (ha a „belsők” is azok).

A KÖRHÖZ HÚZOTT SZELŐSZEKASZOK TÉTELE (OLVASMÁNY)

1. E1 Egy körhöz a *P* pontból húzott szelő a kört *A*-ban és *B*-ben metszi. *PA* szakasz 5 cm-rel rövidebb, *AB* pedig 5 cm-rel hosszabb, mint a *P*-ből a körhöz húzott érintő. Mekkora az érintőszakasz?

Megoldás

Jelöljük az érintőszakasz hosszát e-vel. A feladat szövege szerint $AP = e - 5$, és $AB = e + 5$. Ezért $PB = PA + AB = (e-5)+(e+5) = 2e$.

Mivel az érintőszakasz hossza mértani közepe a szelőszakaszokénak, így

$e^2 = 2e(e-5)$. Innen $e \neq 0$ miatt oszthatunk e-vel. Átrendezve $e = 10$ adódik.

2. E1 Egy külső *P* pont a kör középpontjától 17 cm távolságra van, a szelőszakaszok 10 cm és 12 cm. Mekkora a kör sugara?

Megoldás

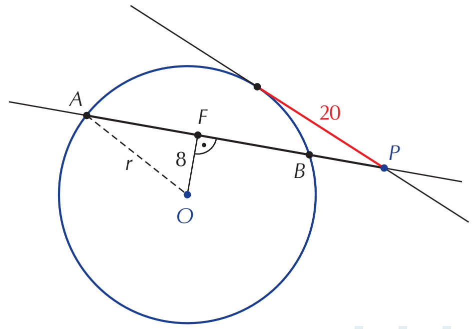
Jelöljük az érintőszakasz hosszát e-vel. Mivel az érintőszakasz hossza mértani közepe a szelőszakaszokénak, így

$$e^2 = d^2 - r^2 = d^2 - PA \cdot PB;$$
$$r^2 = d^2 - e^2 = 17^2 - 12 \cdot 10 = 289 - 120;$$
$$r^2 = 169;$$
$$r = 13.$$

3. E1

Egy körhöz a P pontból húzott érintőszakasz 20 cm, egy P pontból húzott szelő a kör középpontjától 8 cm-re van. E szelőnek a hosszabb szelete 40 cm. Mekkora a kör sugara?

Megoldás



Jelöljük a rövidebb BP szelőszakaszt x-szel. (ábra) Mivel az érintőszakasz hossza mértani közepe a szelőszakaszokénak, így $20^2 = 40x$, ahonnan $x = 10$ cm. Tehát az AB húr hossza 30 cm, a szakasz F felező pontja A-tól 15 cm-re van. Ha O-val jelöljük a kör középpontját, akkor felírhatjuk a Pitagorasz tételt az AFO háromszögre.

$r^2 = 8^2 + 15^2 = 289;$

$r = 17$ cm.

4. E2

Adott egy f egyenes és két rá nem illeszkedő pont az egyik félsíkban. Szerkesszünk olyan kört, amelyik érinti az egyenest és átmegy a két ponton!

Megoldás

Legyen a két pont A és B. Mivel a két pont illeszkedik a körre, ezért a keresett kör középpontja rajta van a AB felező merőlegesén.

Most két esetre bontjuk a megoldást.

a) AB egyenes metszi az f egyenest. Jelölje a metszéspontot P.

Ekkor a szelőszakaszok tétele miatt $PA \cdot PB = f^2$. Meg tudjuk szerkeszteni a szelőszakaszok mértani közepének hosszát, ami az érintőszakasz hossza. Ezt a P pontból mindkét irányba felmérhetjük az f egyenesre. Két lehetséges érintési ponthoz (E_1, E_2) jutunk. Mindkét pontban merőlegest állítunk az f egyenesre. Ezeknek az AB felező merőlegesével alkotott metszéspontjai (O_1, O_2) adják a két keresett kör középpontját. A körök sugarai O_1E_1 és O_2E_2 szakaszok.

b) AB egyenes párhuzamos az f egyenessel. Ekkor a felező merőleges szimmetria tengely. Az érintési pont ezért a felező merőleges és az f egyenes metszéspontja. (E) a keresett kör pedig az ABE háromszög köré írt köre.

5. E2

Bizonyítsuk be, hogy belső pontra nézve igaz, hogy $PA \cdot PB = r^2 - d^2$, ahol d a P pont távolsága a kör középpontjától!

Megoldás

Húzzuk meg a P-t a kör O középpontjával összekötő húrt (az átmérőt). Ha P az AO szakaszra esik, akkor $PB = r + d$, és $PA = r - d$. A kettő összeszorzásából adódik az állítás.