Juhász István ▪ Orosz Gyula ▪ Paróczay József ▪
Szászné dr. Simon Judit

MATEMATIKA 9.

Az érthető matematika

tankönyv feladatainak megoldásai

A feladatokat nehézségük szerint szinteztük:
K1 = középszint, könnyebb; **K2** = középszint, nehezebb; **E1** = emelt szint, könnyebb; **E2** = emelt szint, nehezebb feladat.

Lektorok: dr. Jelitai Árpád, Pálmay Lóránt
Szakábra: Szalóki Dezső
Illusztráció: Urmai László
Tipográfia: Bajtai Zoltán
Felelős szerkesztő: Tóthné Szalontay Anna, Szelindiné Galántai Melinda

Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó Zrt.
www.ntk.hu
Vevőszolgálat: info@ntk.hu
Telefon: 06 80 200 788

A kiadásért felel: Kiss János Tamás vezérigazgató
Raktári szám: RE 17112
Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Műszaki szerkesztő: Orlai Márton
Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 23,69 (A/5) ív
1. kiadás, 2014

TARTALOM

FONTOSABB JELÖLÉSEK

Az A pont és az e egyenes távolsága: $d(A; e)$ vagy Ae vagy $\overline{Ae}$

Az A és B pont távolsága: AB vagy $\overline{AB}$ vagy $d(A; B)$

Az A és B pont összekötő egyenese: $e(A; B)$ vagy AB

Az f_1 és f_2 egyenesek szöge: $\sphericalangle(f_1; f_2)$ vagy $(f_1; f_2)\sphericalangle$

A B csúcspontú szög, melynek egyik szárán az A, másik szárán a C pont található: $ABC\sphericalangle$

A C csúcspontú szög: $C\sphericalangle$

Szög jelölése: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Az A, B és C csúcsokkal rendelkező háromszög: $ABC\triangle$

Az $ABC\triangle$ területe: $T(ABC)$ vagy T_{ABC}

Az a, b és c oldalú háromszög fél kerülete: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

A derékszög jele: ⊾

Az e egyenes merőleges az f egyenesre: $e \perp f$

Az e egyenes párhuzamos az f egyenessel: $e \parallel f$

Egybevágóság: $\cong$; $ABC_\triangle \cong A'B'C'_\triangle$

Az A pontból a B pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB}$

A v vektor: $\underline{v}$ vagy $\mathbf{v}$ vagy $\vec{v}$

Egyenlő, nem egyenlő: $=, \neq$; $a = 2$, $b \neq 5$

Azonosan egyenlő: $\equiv$; $a + b \equiv 5$

Közelítőleg egyenlő: $\approx$; $a \approx 2{,}3$; $8{,}54 \approx 8{,}5$

Kisebb, kisebb vagy egyenlő: $<, \leq$; $2 < 3$, $5 \leq x$

Nagyobb, nagyobb vagy egyenlő: $>, \geq$; $6 > 4$, $a \geq 2$

A természetes számok halmaza: $\mathbf{N}$; $\{0; 1; 2; \ldots\}$

Az egész számok halmaza: $\mathbf{Z}$ $\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

A pozitív, a negatív egész számok halmaza: $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$ $\{1; 2; 3; \ldots\}$, $\{-1; -2; -3; \ldots\}$

A racionális, az irracionális számok halmaza: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^*$

A pozitív, a negatív racionális számok halmaza: $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$

A valós számok halmaza: $\mathbf{R}$

A pozitív, a negatív valós számok halmaza: $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$

Eleme, nem eleme a halmaznak: $\in, \notin$; $5 \in \mathbf{N}$, $-2 \notin \mathbf{Z}^+$

Részhalmaz, valódi részhalmaz: $\subseteq, \subset$; $A \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$

Nem részhalmaza a halmaznak: $\not\subset$; $\mathbf{Z} \not\subset \mathbf{Q}^+$

Halmazok uniója, metszete: $\cup, \cap$; $A \cup B$, $A \cap B$

Halmazok különbsége: $\setminus$; $A \setminus B$

Üres halmaz: $\emptyset$, $\{\}$

Az A halmaz komplementere: $\overline{A}$

Az A halmaz elemszáma: $|A|$; $|\{0; 1; 2\}| = 3$

Zárt intervallum: $[a; b]$

Balról zárt, jobbról nyílt intervallum: $[a; b[$

Balról nyílt, jobbról zárt intervallum: $]a; b]$

Nyílt intervallum: $]a; b[$

Az x szám abszolút értéke: $|x|$; $|-3{,}1| = 3{,}1$

Az x szám egész része, tört része: $[x]$, $\{x\}$; $[2{,}3] = 2$, $\{2{,}3\} = 0{,}3$

Az a osztója b-nek, b többszöröse a-nak: $a \mid b$; $2 \mid 8$

Az a és b legnagyobb közös osztója: (a, b); $(4, 6) = 2$

Az a és b legkisebb közös többszöröse: $[a, b]$; $[4, 6] = 12$

Az f függvény hozzárendelési szabálya: $f\colon x \mapsto$; $f\colon x \mapsto 2x + 3$

Az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen: $f(x_0)$; $f(5)$, ha $x_0 = 5$

I. HALMAZOK, KOMBINATORIKA

1. A SZÁMOK ÁTTEKINTÉSE – BEVEZETÉS

1. K1 Az alábbi kifejezések értékét próbáljuk „fejben” (azaz íróeszköz és számológép nélkül) meghatározni!

a) $A = 32 + 87 - 26 + 68 - 97 + 36$;

b) $B = 439 + 243 - 437 - 1057 - 244 + 2999$;

c) $C = \frac{1}{6} + \frac{5}{9} - \frac{5}{12} + \frac{2}{12} - \frac{19}{12} + \frac{4}{9} + \frac{2}{3}$;

d) $D = \frac{2}{9} + \frac{6}{11} - \frac{5}{9} + \frac{6}{16} - \frac{3}{22} - \frac{3}{8} + \frac{1}{3}$;

e) $E = 2 \cdot 97 \cdot 2 \cdot 25$;

f) $F = 67 \cdot 518 + 518 \cdot 33$.

Megoldás

a) $-26 + 36 = 10$; $87 - 97 = -10$; tehát ezen számok összege 0. $A = 32 + 68 = 100$.

b) $439 - 437 + 243 - 244 = 2 - 1 = 1$; $1 + 2999 = 3000$. $B = 3000 - 1057 = 1943$.

c) $\frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$; $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$; $-\frac{5}{12} + \frac{2}{12} - \frac{19}{12} + \frac{10}{12} = -\frac{12}{12} = -1$; $C = 1 - 1 = 0$.

d) $\frac{2}{9} - \frac{5}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9} - \frac{5}{9} + \frac{3}{9} = 0$; $+\frac{6}{16} - \frac{3}{8} = 0$; $\frac{6}{11} - \frac{3}{22} = \frac{12}{22} - \frac{3}{22} = \frac{9}{22}$; $D = \frac{9}{22}$.

e) $E = 2 \cdot 97 \cdot 2 \cdot 25 = 2 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 97 = 100 \cdot 97 = 9700$.

f) $F = (67 + 33) \cdot 518 = 51\,800$.

2. K1 A 2. példa *a)–c)* feladataiban háromféleképpen zárójeleztük a kifejezést, s három különböző eredményt kaptunk. Számítsuk ki az alábbi *d)–g)* kifejezések értékét, s a kapott értékeket hasonlítsuk össze a korábbi *a)–c)* eredményekkel!

d) $-\frac{2}{3} - \frac{5}{6} - \frac{3}{2} : \frac{3}{5}$; *e)* $\left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) - \frac{3}{2} : \frac{3}{5}$; *f)* $-\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) - \frac{3}{2} : \frac{3}{5}$; *g)* $\left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{6} - \frac{3}{2}\right) : \frac{3}{5}$.

Megoldás

d) E feladatban a legmagasabbrendű művelet az osztás, először ezt végezzük el: $\frac{3}{2} : \frac{3}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{2}$.

Így: $-\frac{2}{3} - \frac{5}{6} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{6} - \frac{5}{6} - \frac{15}{6} = -\frac{24}{6} = -4$;

e) $-\frac{2}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{4}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{8}{2} = -4$;

f) $\frac{2}{3} - \frac{5}{6} = \frac{4}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$; $-\left(-\frac{1}{6}\right) - \frac{5}{2} = \frac{1}{6} - \frac{15}{6} = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$;

g) $-\frac{2}{3} - \frac{5}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{6} - \frac{5}{6} - \frac{9}{6} = -\frac{18}{6} = -3$; $-3 : \frac{3}{5} = -3 \cdot \frac{5}{3} = -5$.

A különféle módon zárójelezett kifejezések értékei: *a)* 1; *b)* –4; *c)* $\frac{4}{9}$; *d)* –4; *e)* –4; *f)* $-\frac{7}{3}$; *g)* –5.

A *b)* $-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}-\left(\frac{3}{2}:\frac{3}{5}\right)$, a *d)* $-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}-\frac{3}{2}:\frac{3}{5}$ és az *e)* $\left(-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)-\frac{3}{2}:\frac{3}{5}$ kifejezések egyenlőségének az az oka, hogy a zárójelek használatával előírt műveleti sorrend lényegében nem befolyásolja a végeredményt.

3. K1 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $-\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)$; *b)* $\left(\frac{-14}{4}-\frac{-3}{8}\right):\left(\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{25}\right)\right)$; *c)* $-\frac{2}{5}+2\cdot\left(\frac{5}{12}:\frac{10}{3}\right)$.

Megoldás

Törtek összeadása és kivonása a közös nevezőre hozás segítségével történhet; szorzás esetén a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel szorozzuk; végül törttel úgy osztunk, hogy az osztó reciprokával szorzunk.

a) $-\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)=-\frac{2}{3}-\left(\frac{3}{6}-\frac{5}{6}\right)=-\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{6}\right)=-\frac{2}{3}+\frac{2}{6}=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$;

b) $\left(\frac{-14}{4}-\frac{-3}{8}\right):\left(\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{25}\right)\right)=\left(\frac{-28}{8}+\frac{3}{8}\right):\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{25}\right)=-\frac{25}{8}:\left(\frac{15}{25}-\frac{4}{25}\right)=-\frac{25}{8}:\frac{11}{25}=$

$=-\frac{25}{8}\cdot\frac{25}{11}=-\frac{625}{88}$;

c) $-\frac{2}{5}+2\cdot\left(\frac{5}{12}:\frac{10}{3}\right)=-\frac{2}{5}+2\cdot\left(\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{10}\right)=-\frac{2}{5}+\frac{30}{120}=-\frac{8}{20}+\frac{5}{20}=-\frac{3}{20}$.

4. K1 Az alábbi állítások között hány igaz van? (Indokoljunk!)

a) Bármely szám kétszerese kisebb, mint a háromszorosa.
b) Bármely szám fele kisebb, mint maga a szám.
c) Bármely szám négyzete nagyobb, mint maga a szám.
d) Bármely szám reciproka kisebb, mint maga a szám.
e) Nagyobb számnak kisebb a reciproka.
f) Minden számhoz található olyan szám, hogy a két szám összege 0.
g) Minden számhoz található olyan tőle különböző szám, hogy összegük éppen 1.
h) Van olyan egész szám, amelynek a reciproka is egész szám.

Megoldás

a) Hamis; ellenpélda a 0 vagy bármely negatív szám.
b) Hamis; ellenpélda a 0 vagy bármely negatív szám.
c) Hamis; ellenpélda bármely 0 és 1 közötti szám (a határokat is beleértve).
d) Hamis; ellenpélda x, ha $x \le -1$ vagy $0 < x \le 1$.
e) Hamis. Például $-2 < 3$, de $-\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ nem igaz.
f) Igaz; megfelel a szám ellentettje.
g) Hamis; egyetlen ellenpélda az $\frac{1}{2}$.
h) Igaz; ilyen szám az 1 vagy a –1.

Az állítások közül 2 igaz.

5. K1 Rendezzük növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

$A=-2{,}8$; $B=-\frac{59}{21}$; $C=\frac{7}{3}$; $D=2{,}33$; $E=-\frac{17}{6}$; $F=\frac{25{,}4}{11}$; $G=\sqrt{5{,}44}$.

Megoldás

Ha szükséges, az egyes kifejezések közelítő értékét olyan pontossággal adjuk meg, amellyel a nagyságviszonyi kapcsolat már eldönthető.

$B=-\frac{59}{21}=-\frac{118}{42}\approx-2{,}81$, $E=-\frac{17}{6}=-\frac{119}{42}=-2{,}8\dot{3}$, $C=\frac{7}{3}=2{,}\dot{3}$, $F=\frac{25{,}4}{11}\approx 2{,}31$,

$G=\sqrt{5{,}44}\approx 2{,}332$.

A sorrend: $E < B < A < F < D < G < C$.

6. K2 Figyeljük meg az alábbi sorozatok tagjait! Mit állíthatunk az egymást követő tagok nagyságrendi viszonyairól?

a) $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \ldots$ *b)* $\frac{4}{6}; \frac{5}{7}; \frac{6}{8}; \frac{7}{9}; \ldots$ *c)* $\frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{7}{4}; \frac{9}{5}; \ldots$

Megoldás

a) $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$; $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$; $\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$; … A tagok egyre nagyobbak (hiszen egyre közelebb vannak az 1-hez).

b) Hasonlóan: $\frac{4}{6} = 1 - \frac{2}{6}$; $\frac{5}{7} = 1 - \frac{2}{7}$; $\frac{6}{8} = 1 - \frac{2}{8}$; … A tagok egyre nagyobbak, mert egyre kisebb számot vonunk ki az 1-ből.

c) A sorozat általános k-adik tagja $\frac{2k+1}{k+1}$ alakú ($k = 1, 2, 3, \ldots$).

$\frac{2k+1}{k+1} = \frac{2(k+1)-1}{k+1} = 2 - \frac{1}{k+1}$. Egyre kisebb számot vonunk ki 2-ből, tehát a tagok egyre nagyobbak.

7. K1 Adjuk meg az alábbi racionális számokat tizedes tört alakban (számológépet ne használjunk)!

$A = -\frac{7}{4}$; $B = \frac{17}{20}$; $C = \frac{17}{7}$; $D = \frac{17}{9}$; $E = \frac{37}{30}$; $F = \frac{433}{330}$.

Megjegyzés: A számológépes megoldás nem adhat minden esetben pontos értéket, hiszen általában csak 10 számjegyet ír ki a gép[1].

Megoldás

Az osztás hagyományos algoritmusával:

$A = -1{,}75$; $B = 0{,}85$; $C = 2{,}\overline{428571}$; $D = 1{,}\dot{8}$; $E = 1{,}2\dot{3}$; $F = 1{,}3\overline{12}$.

Megjegyzés: Például a hagyományos, 10 jegyet kiíró zsebszámológépeken $\frac{17}{7} = 2{,}428571429$, ami nem a helyes eredmény.

8. K2 Adjunk meg olyan közönséges törtet, amelynek egész számú többszöröse

a) 3 és 7; *b)* 2 és $\frac{3}{4}$; *c)* $\frac{2}{3}$ és $\frac{4}{5}$!

Megoldás

Többféle megoldás lehetséges.

a) A 3 és 7 egész számú többszöröse az 1-nek, így megfelelő szám például $\frac{1}{1}$, vagy minden $\frac{1}{k}$ alakú tört, ahol $k \neq 0$ egész szám.

b) $2 = \frac{8}{4}$, így megfelelő szám például $\frac{1}{4}$, vagy minden $\frac{1}{4k}$ alakú tört, ahol $k \neq 0$ egész szám.

c) 3-nak és 5-nek a legkisebb közös többszöröse 15. Megfelelő szám például $\frac{1}{15}$, vagy minden $\frac{1}{15k}$ alakú tört, ahol $k \neq 0$ egész szám.

9. E1 A racionális számoknak sok érdekes tulajdonsága van. Néhány ezek közül:

a) alakjuk nem egyértelmű;
b) a pozitív racionális számok között nincs legkisebb;
c) bármely két különböző racionális szám között található további racionális szám;
d) bármely két különböző racionális szám között végtelen sok további racionális szám található.

Bizonyítsuk be a fenti állításokat!

[1] Hasonló problémákról részletes anyag található *A számológépek számábrázolása* c. olvasmányban.

Megoldás

a) Az $\frac{a}{b}$ alakú racionális szám (a, b egész számok, $b \neq 0$) felírható $\frac{2a}{2b}$, $\frac{-3a}{-3b}$ stb. alakokban is.

b) Bármely $\frac{a}{b}$ alakú racionális számnál (a, b pozitív egész számok) könnyű kisebb számot megadni: például

$\frac{a}{b+1}$, $\frac{a}{2b}$ stb.

c) $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ közé esik például a két szám átlaga $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$. Ha ugyanis $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, akkor egyszerűen adódik, hogy

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}}{2} < \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} < \frac{\frac{c}{d}+\frac{c}{d}}{2}.$$

Más megoldási lehetőségek:
Elegendő a pozitív racionális számokat vizsgálni. (Két negatív szám esetén a bizonyítás ehhez az esethez hasonlóan történhet; ha a két szám különböző előjelű, közrefogják a 0-t; ha pedig az egyik szám 0, akkor például a másik szám fele megfelelő.)

Legyen $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, ahol a, b, c, d pozitív egész számok; közös nevezőre hozás után $\frac{ad}{bd} < \frac{cb}{bd}$.

Ha $cb - ad > 1$, akkor $\frac{ad+1}{bd}$ megfelelő. Ha $cb - ad = 1$, akkor bővítsük a törtet $k > 1$ egész számmal; az $\frac{adk}{bdh} < \frac{cbk}{bdk}$ számok közé esik $\frac{adk+1}{bdk}$.

Végül általában megmutatható, hogy $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ közé esik $\frac{a+c}{b+d}$ is.

d) Az állítás a *c)* feladat megoldásából következik.

2. HALMAZOK, RÉSZHALMAZOK

1. K1 Az alábbi meghatározások egy adott osztály tanulóira vonatkoznak. A definíciók közül melyek határoznak meg egyértelműen egy halmazt?

a) az osztályba járó fiúk;
b) a magas tanulók;
c) a barna hajú lányok;
d) a budapesti lakosok;
e) akiknek tavaly év végén 5-ös matematikaosztályzatuk volt;
f) akik szeretnek iskolába járni.

Megoldás

Bármilyen elemről egyértelműen el kell tudnunk dönteni, hogy beletartozik a halmazba, vagy sem. Ezért nem határoznak meg halmazt a *b), c), f)* körülírások.

Például a *b)* esetben egy szőkésbarna hajú lányról nem dönthető el egyértelműen, hogy a halmazba tartozik, vagy sem.

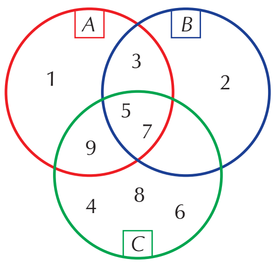
2. K1 Az alábbi *A*, *B* és *C* halmazokat megadhatjuk felsorolással, körülírással és képlettel is. Pótoljuk a hiányzó megadásokat, és ábrázoljuk a halmazokat a Venn-diagramon!

halmaz	felsorolás	körülírás	képlet
A	{1; 3; 5; 7; 9}		
B		egyjegyű, pozitív prímszámok	
C			$C = \{x \mid 4 \le x \le 9 \text{ és } x \in \mathbf{N}\}$

Megoldás

A prímszámokra vonatkozóan még nem találtak egyszerű képletet. Egy lehetséges megoldás:

halmaz	felsorolás	körülírás	képlet
A	{1; 3; 5; 7; 9}	egyjegyű, pozitív páratlan számok	$A = \{x \mid x = 2k - 1,\ 1 \le k \le 5 \text{ és } k \in \mathbf{N}\}$
B	{2; 3; 5; 7}	egyjegyű, pozitív prím-számok	$B = \{x \mid 2 \le x \le 7 \text{ és } x \text{ prím}\}$
C	{4; 5; 6; 7; 8; 9}	a 4 és 9 közötti természetes számok (a határokat is beleértve)	$C = \{x \in \mathbf{N} \mid 4 \le x \le 9\}$



3. K2 Az alábbi táblázatban egy osztály tanulóit két-két csoportra osztottuk a nemük szerint, valamint attól függően, hogy év végi matematikaeredményük „jó” (4-es vagy 5-ös), illetve „gyenge” (2-es vagy 3-as) volt. A táblázat mezőibe írt számok a megfelelő tulajdonságú tanulók számát jelentik.

	jók (4-es, 5-ös érdemjegy)	gyengék (2-es, 3-as érdemjegy)
F (fiúk)	8	7
L (lányok)	10	7

Értelmezzük a táblázat adatait!

a) Mennyi az osztálylétszám?
b) Az összes tanuló hány százaléka „jó” matematikából?
c) Az összes fiú hányad része „gyenge” matematikából?
d) Ábrázoljuk az adatokat az F (fiúk) és J („jók”) halmazok Venn-diagramján! (Az alaphalmaz az osztály tanulóinak a halmaza; az egyes tartományokba a megfelelő elemszámot írjuk.)

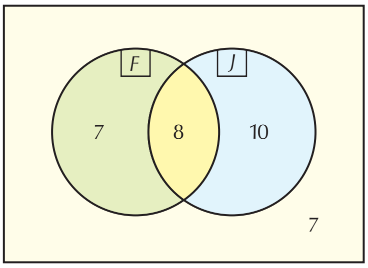
Megoldás

a) Az osztálylétszám $8 + 7 + 10 + 7 = 32$ fő.

b) $8 + 10 = 18$ tanuló „jó” matematikából. Ez az összes tanuló $\frac{18}{32} = 0{,}5625$-öd része, azaz 56,25%-a.

c) Az összes fiú $\frac{7}{7+8} = \frac{7}{15}$ része „gyenge” matematikából.

d)



4. K1 Legyen A = {egyjegyű páros természetes számok}, B = {egyjegyű négyzetszámok}. Adjuk meg az A halmaz egy lehetséges X és a B halmaz egy lehetséges Y részhalmazát úgy, hogy

a) $Y \subset X$; *b)* $Y \subseteq X$; *c)* $X \subset A$ és $Y \subset X$; *d)* $X \subset A$ és $Y \subseteq X$; *e)* $Y = X$!

Megoldás

$A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$, $B = \{0; 1; 4; 9\}$. Például az $Y = \{4\}$, $X = \{2, 4\}$ részhalmazok az *a)*–*d)* feladatoknak egyaránt megoldásai, s *e)*-nek $Y = X = \{4\}$ a megoldása.

5. K1 Fogalmazzuk meg, mit jelent, hogy

a) az A halmaz *nem* üres halmaz;
b) az A halmaz *nem* részhalmaza B-nek (jelölés: $A \not\subset B$);
c) az A halmaz *nem* egyenlő B-vel!

Megoldás

a) Az A halmaznak van eleme.
b) Az A halmaznak van olyan eleme, amelyik nem eleme B-nek. (Képlettel: van olyan $x \in A$, amelyre $x \notin B$.)
c) Van olyan eleme az A halmaznak, amelyik nem eleme B-nek; vagy van olyan eleme a B halmaznak, amelyik nem eleme A-nak. Másképpen: $A \not\subset B$ vagy $B \not\subset A$.

6. K1 Fogalmazzunk meg a következő számhalmazok között néhány tartalmazáskapcsolatot (melyik halmaz melyiknek részhalmaza, valódi részhalmaza, vagy nem része)!
Például igaz-e, hogy:
a) $\mathbf{N}^+ \subseteq \mathbf{Z}^+$; *b)* $\mathbf{N}^+ \subset \mathbf{Z}^+$; *c)* $\mathbf{Q}_0^+ \subseteq \mathbf{R}^+$; *d)* $\mathbf{R}^- \not\subset \mathbf{Q}$ stb.?

Megoldás

a) Igaz; $\mathbf{N}^+ = \mathbf{Z}^+$.
b) Hamis; az előző pont megoldása alapján.
c) Hamis; $0 \notin \mathbf{R}^+$.
d) Igaz. Bizonyítható, hogy például $-\pi$ irracionális szám; vagyis $-\pi \in \mathbf{R}^-$, de $-\pi \notin \mathbf{Q}$.

7. K2 Tekintsük az A = {3-mal osztható egész számok}, $B = \{x \mid x = 10k - 3, k \in \mathbf{Z}^+\}$, C = {négyzetszámok} halmazokat. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?
a) Az A halmaznak négy olyan eleme van, amelyik egyjegyű szám.
b) Van olyan egyjegyű szám, amelyik mindhárom halmaznak eleme.
c) Van olyan kétjegyű szám, amelyik két halmaznak is eleme.
d) Van olyan kétjegyű szám, amelyik mindhárom halmaznak eleme.
e) Van olyan 2-esre végződő szám, amelyik két halmaznak is eleme.
f) Van olyan 4-esre végződő szám, amelyik két halmaznak is eleme.
g) $0 \in A$. *h)* $0 \notin C$. *i)* $\{0; 576; 1296\} \subseteq C$. *j)* $\{0; 576; 1296\} \subset A$.
k) $\{0; 576; 1296\} \not\subset B$. *l)* $0 \subseteq A$. *m)* $\{0\} \subseteq A$. *n)* $\varnothing \subset B$.
o) $\{\ \} \subseteq C$. *p)* $A \subseteq A$. *q)* $B \subset B$.

Megoldás

A halmazokat felsorolással is megadhatjuk: $A = \{\dots -9; -6; -3; 0; 3; 6; 9; \dots\}$,
$B = \{7; 17; 27; 37; 47; 57, \dots\}$, $C = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; \dots\}$.
a) Hamis.
b) Hamis.
c) Igaz; például 27 vagy 36.
d) Hamis. A négyzetszámok nem végződhetnek 7-re, így B-nek és C-nek nincs közös eleme.
e) Hamis. A négyzetszámok nem végződhetnek 2-re, így 2-es végződésű szám csak az A halmazban szerepelhet.
f) Igaz; például 144.
g) Igaz.
h) Hamis.
i) Igaz. $576 = 24^2$, $1296 = 36^2$.
j) Igaz; mindhárom elem osztható 3-mal (gondoljunk az oszthatósági szabályra!).
k) Igaz.
l) Hamis; a 0 nem halmaz.
m) Igaz.
n) Igaz.
o) Igaz.
p) Igaz.
q) Hamis. Minden halmaz része önmagának, de nem *valódi része*.

8. K2 Az alábbi állításokban A és B tetszőleges halmazok. Melyik igaz az állítások közül?
(1) Ha $1 \in A$, akkor $\{1\} \subseteq A$.
(2) Ha $A \subset B$, akkor $A \subseteq B$.
(3) Ha $1 \in A$, akkor $1 \not\subset A$.

Megoldás

Az (1) és (2) állítások definíció szerint igazak, (3) pedig azért teljesül, mert $1 \not\subset A$ mindig igaz. (Az 1 nem halmaz.)

9. E1

Igazoljuk a következő állításokat!

a) Minden halmaz része önmagának.

b) Ha $H_1 \subseteq H_2$ és $H_2 \subseteq H_3$, akkor $H_1 \subseteq H_3$ is teljesül.

c) Ha $H_1 \subseteq H_2$ és $H_2 \subset H_3$, akkor $H_1 \subset H_3$ is teljesül.

d) Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

e) Egyetlen üres halmaz van.

Megoldás

a) $A \subseteq B$, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$ is fennáll. Emiatt $A \subseteq A$ is teljesül: a definícióban B-t A-val helyettesítve „ha $x \in A$, akkor $x \in A$”.

b) Minden $x \in H_1$ esetén $x \in H_2$, és minden $x \in H_2$ esetén $x \in H_3$; vagyis $H_1 \subseteq H_3$.

c) Az előző meggondolásunk annyiban módosul, hogy $H_2 \neq H_3$ miatt $H_1 = H_3$ sem teljesülhet.

d) $\varnothing \not\subset A$, ha van olyan $x \in \varnothing$, amelyre $x \notin A$. De az üres halmaznak ilyen eleme nincs, ezért az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

e) Legyen például $A = \{$a Földön élő marslakók$\}$, $B = \{$5 méter magas emberek$\}$. Jelenlegi tudásunk szerint mindkét halmaz üres halmaz: $A = \varnothing$, $B = \varnothing$. Két halmaz akkor különböző, ha legalább az egyik halmazban van olyan elem, amelyik nincs benne a másikban. Az A és B halmazokban – és általában az üres halmazban – nincs ilyen elem, ezért $A = B$; és hasonló okok miatt bármely két üres halmaz is egyenlő.

10. K2

$A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

a) Hány részhalmaza van A-nak?

b) Hány valódi részhalmaza van A-nak?

c) Hány 2 elemű részhalmaza van B-nek?

d) Hány 4 elemű részhalmaza van B-nek?

e) Hány olyan halmaz van, amelyik A-nak és B-nek is részhalmaza?

Megoldás

a) 8 darab. 0 elemű 1, 1 elemű 3, 2 elemű 3 és 3 elemű 1.

b) 7; nem valódi részhalmaz az $\{1; 2; 3\}$, azaz A önmaga.

c) 15. A 2 öt részhalmazban szerepel; a 3 további négy részhalmazban (a $\{2; 3\}$ lehetőséget már számoltuk); a 4 további három részhalmazban; az 5 kettőben; végül a 6 egyben (ez a $\{6; 7\}$ részhalmaz). Összesen $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ a 2 elemű részhalmazok száma.

d) 15. Minden 2 elemű részhalmaz egyúttal egy 4 eleműt is meghatároz. Például: $\{2; 3\} \leftrightarrow \{4; 5; 6; 7\}$, $\{4; 6\} \leftrightarrow \{2; 3; 5; 7\}$ stb. Ezért a 2 elemű és 4 elemű részhalmazokat párokba állíthatjuk, számuk ugyanannyi.

e) Ezek a $\{2; 3\}$ halmaz részhalmazai: $\{\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2; 3\}$. Összesen 4 megoldás van.

3. MŰVELETEK HALMAZOKKAL

1. K1 Legyen A = {egyjegyű páros természetes számok}, B = {5-nél nem nagyobb természetes számok}, s a H alaphalmaznak tekintsük az egyjegyű természetes számok halmazát.
a) Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal!

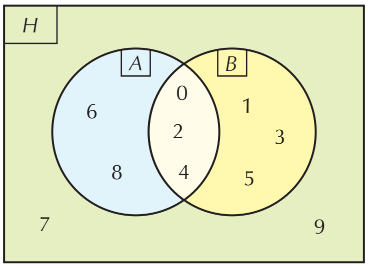
Adjuk meg – például felsorolással – az alábbi halmazokat!

b) $A \cap B$;	*c)* $B \cap A$;	*d)* $A \cup B$;	*e)* $B \cup A$;	*f)* $A \setminus B$;	*g)* $B \setminus A$;
h) $\overline{A}$;	*i)* $\overline{B}$;	*j)* $\overline{A \cap B}$;	*k)* $\overline{A \cup B}$;	*l)* $\overline{A \setminus B}$;	*m)* $\overline{B \setminus A}$;
n) $\overline{A} \cap B$;	*o)* $\overline{A} \cap \overline{B}$;	*p)* $A \cup \overline{B}$;	*q)* $\overline{A} \cup \overline{B}$.		

A kapott eredmények között vannak-e egyenlők?

Megoldás

a)



b) {0; 2; 4};	*c)* {0; 2; 4};	*d)* {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8};
e) {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8};	*f)* {6; 8};	*g)* {1; 3; 5};
h) {1; 3; 5; 7; 9};	*i)* {6; 7; 8; 9};	*j)* {1; 3; 5; 6; 7; 8; 9};
k) {7; 9};	*l)* {0; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 9};	*m)* {0; 2; 4; 6; 7; 8; 9};
n) {1; 3; 5};	*o)* {7; 9};	*p)* {0; 2; 4; 6; 7; 8; 9};
q) {1; 3; 5; 6; 7; 8; 9}.		

Egyenlő halmazok: *b)* és *c)*; *d)* és *e)*; *g)* és *n)*; *k)* és *o)*; *m)* és *p)*.
Ez alapján sejtéseket fogalmazhatunk meg: például $B \setminus A = \overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ vagy $\overline{B \setminus A} = A \cup \overline{B}$.

2. K2 Legyen A = {15-nél nem nagyobb, 2-vel osztható természetes számok}, B = {15-nél nem nagyobb, 3-mal osztható természetes számok}, C = {15-nél nem nagyobb, 5-tel osztható természetes számok}, s a H alaphalmaznak tekintsük a 15-nél nem nagyobb természetes számok halmazát.

a) Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal!

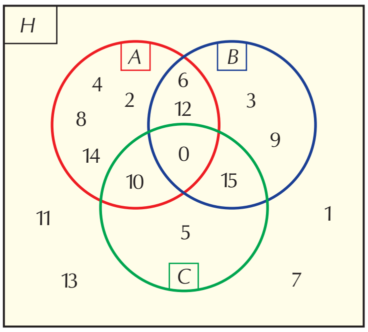
Adjuk meg – például felsorolással – az alábbi halmazokat!

b) $(A \cap B) \cap C$;	*c)* $A \cap (B \cap C)$;	*d)* $(A \cup B) \cup C$;	*e)* $A \cup (B \cup C)$;
f) $(A \setminus B) \setminus C$;	*g)* $A \setminus (B \setminus C)$;	*h)* $(A \cup B) \cap C$;	*i)* $A \cup (B \cap C)$;
j) $(A \cup B) \setminus C$;	*k)* $A \cup (B \setminus C)$;	*l)* $(A \cap B) \setminus C$;	*m)* $A \cap (B \setminus C)$;
n) $A \setminus (B \cup C)$;	*o)* $A \setminus (B \cap C)$;	*p)* $\overline{B}$;	*q)* $\overline{B \cap C}$;
r) $\overline{B \cup C}$;	*s)* $\overline{B \setminus C}$;	*t)* $\overline{B} \cap C$;	*u)* $\overline{B} \cap \overline{C}$;
v) $\overline{B} \cup C$;	*z)* $\overline{B} \cup \overline{C}$.		

A kapott eredmények között vannak-e egyenlők?

Megoldás

a)



b) $\{0\}$;
c) $\{0\}$;
d) $\{0; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15\}$;
e) $\{0; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15\}$;
f) $\{2; 4; 8; 14\}$;
g) $\{0; 2; 4; 8; 10; 14\}$;
h) $\{0; 10; 15\}$;
i) $\{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 15\}$;
j) $\{2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 14\}$;
k) $\{0; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14\}$;
l) $\{6; 12\}$;
m) $\{6; 12\}$;
n) $\{2; 4; 8; 14\}$;
o) $\{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$;
p) $\{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14\}$;
q) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$;
r) $\{1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; 14\}$;
s) $\{0; 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14; 15\}$;
t) $\{5; 10\}$;
u) $\{1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; 14\}$;
v) $\{0; 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14; 15\}$;
z) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$.

A bonyolultabb feladatokat érdemes részekre bontással megoldani, azaz a műveleteket lépésenként végezni. Például:

g) $A \setminus (B \setminus C)$: Először meghatározzuk a $B \setminus C$ halmazt: $\{0; 3; 6; 9; 12; 15\} \setminus \{0; 5; 10; 15\} = \{3; 6; 9; 12\}$. Ezután a kapott halmazt kivonjuk A-ból: $\{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\} \setminus \{3; 6; 9; 12\} = \{0; 2; 4; 8; 10; 14\}$.

Egy másik példa:

t) $\overline{B} \cap C$: Először meghatározzuk a $\overline{B}$ halmazt: $\overline{B} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14\}$. Ezután a két halmaz metszetét állapítjuk meg: $\overline{B} \cap C = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14\} \cap \{0; 5; 10; 15\} = \{5; 10\}$.

Egy másik megoldási út (szemléltetési lehetőség) a megfelelő tartományok lépésenként, más-más színnel történő színezése.

Egyenlő halmazok például: *b)* és *c)*; *d)* és *e)*; *f)* és *n)*; *l)* és *m)*; *q)* és *z)*; *r)* és *u)*; *s)* és *v)*.

Ez alapján sejtéseket fogalmazhatunk meg: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$; $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$; $\overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$; $\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$; $\overline{B \setminus C} = \overline{B} \cup C$.

3. K2 Adjuk meg – például felsorolással vagy egyszerűbb műveletek segítségével – az alábbi halmazokat (A, B, C, H az előző feladatban definiált halmazok)!

a) $\overline{(A \cup B) \cap C}$;
b) $\overline{A \cup (B \cap C)}$;
c) $\overline{(B \cap C) \setminus A}$;
d) $\overline{B \cap (C \setminus A)}$;
e) $\overline{A \setminus (B \cup C)}$;
f) $\overline{(A \setminus B) \cup C}$;
g) $\overline{A} \cap (B \setminus C)$;
h) $\overline{B \cup C} \cap A$;
i) $A \cap (B \setminus \overline{C})$;
j) $A \setminus (\overline{B} \setminus C)$;
k) $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$;
l) $(A \cap B) \cup (A \setminus C)$;
m) $(A \cap B) \cup (B \setminus C)$;
n) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

Megoldás

a) $H \setminus \{0; 10; 15\}$;
b) $\{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13\}$;
c) $H \setminus \{15\}$;
d) $H \setminus \{15\}$;
e) $H \setminus \{2; 4; 8; 14\}$;
f) $\{1; 3; 6; 7; 9; 11; 12; 13\}$;
g) $\{3; 9\}$;
h) $\{2; 4; 8; 14\}$;
i) $\{0\}$;
j) $\{0; 6; 10; 12\}$;
k) $\{3; 9\}$;
l) $\{0; 2; 4; 6; 8; 12; 14\}$;
m) $\{0; 3; 6; 9; 12\}$;
n) $\{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14\}$.

A bonyolultabb feladatokat ismét érdemes részekre bontással megoldani, azaz a műveleteket lépésenként végezni. Például:

f) $\overline{(A \setminus B) \cup C}$: Először meghatározzuk az $A \setminus B$ halmazt: $\{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\} \setminus \{0; 3; 6; 9; 12; 15\} =$ $= \{2; 4; 8; 10; 14\}$. Következik $(A \setminus B) \cup C$: $\{2; 4; 8; 10; 14\} \cup \{0; 5; 10; 15\} = \{0; 2; 4; 5; 8; 10; 14; 15\}$. Végül ezen halmaz komplementere: $\{1; 3; 6; 7; 9; 11; 12; 13\}$.

Egy másik példa: *j)* $A\setminus(\overline{B}\setminus C)$: Először meghatározzuk a $\overline{B}$ halmazt (lásd előző feladat):
$\overline{B} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14\}$.
$\overline{B}\setminus C = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14\} \setminus \{0; 5; 10; 15\} = \{1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; 14\}$; végül:
$A\setminus(\overline{B}\setminus C) = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\} \setminus \{1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; 14\} = \{0; 6; 10; 12\}$.

Egy másik megoldási út (szemléltetési lehetőség) a megfelelő tartományok lépésenként, más-más színnel történő színezése.

4. K1 A H alaphalmazon adott az A és B halmaz (azaz $A \subseteq H$, $B \subseteq H$). Határozzuk meg az alábbi halmazokat!
a) $A \cap B$, ha $A = \varnothing$; *b)* $A \cup B$, ha $A = \varnothing$; *c)* $A \setminus B$, ha $A = \varnothing$; *d)* $B \setminus A$, ha $A = \varnothing$;
e) $\overline{A}$, ha $A = \varnothing$; *f)* $A \cap B$, ha $A \subseteq B$; *g)* $A \cup B$, ha $A \subseteq B$; *h)* $A \setminus B$, ha $A \subseteq B$;
i) $\overline{B}\setminus\overline{A}$, ha $A \subseteq B$; *j)* $\overline{\overline{A}}$; *k)* $\overline{\overline{\overline{A}}}$.

Megoldás

a) $\varnothing$; *b)* B; *c)* $\varnothing$; *d)* B; *e)* H; *f)* A; *g)* B; *h)* $\varnothing$; *i)* $\varnothing$; *j)* A; *k)* $\overline{A}$.

A *j)* és *k)* feladatok alapján általánosíthatunk: ha egy A halmaznak n-szer vesszük a komplementerét, akkor az eredmény n paritásától függően A vagy $\overline{A}$.

5. K2 Az $A \not\subset B$ kapcsolatot fogalmazzuk meg a metszet, illetve a különbség művelete segítségével!

Megoldás

Ha $A \not\subset B$, akkor $A \cap B \neq A$; illetve ekkor $A \setminus B \neq \varnothing$.

6. K1 Mivel egyenlők az alábbi halmazok?
a) $\overline{\mathbf{Z}^+}$ a $\mathbf{Z}$ alaphalmazon; *b)* $\overline{\mathbf{Z}^-}$ a $\mathbf{Z}$ alaphalmazon; *c)* $\overline{\mathbf{N}}$ a $\mathbf{Z}$ alaphalmazon;
d) $\overline{\mathbf{Z}}$ a $\mathbf{Q}$ alaphalmazon; *e)* $\overline{\mathbf{Q}}$ az $\mathbf{R}$ alaphalmazon; *f)* $\overline{\mathbf{R}_0^+}$ az $\mathbf{R}$ alaphalmazon.

Megoldás

a) $\mathbf{Z}_0^-$; *b)* $\mathbf{N}$; *c)* $\mathbf{Z}^-$; *d)* $\overline{\mathbf{Z}} = \{$racionális, de nem egész számok$\}$; azaz olyan, tovább már nem egyszerűsíthető $\frac{a}{b}$ alakú racionális számok ($a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$), amelyekben $b \neq \pm 1$.
e) $\{$irracionális számok$\}$; *f)* $\mathbf{R}^-$.

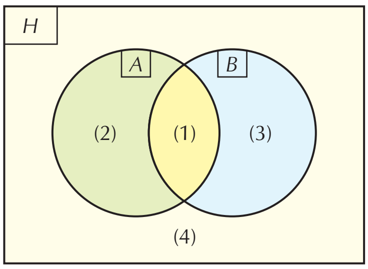
7. E1 Az 1. és 2. feladat megoldása alapján megsejthetjük az alábbi összefüggéseket (*a)* és *b)* az ún. de Morgan-azonosságok):
a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
c) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
d) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

A Venn-diagram segítségével bizonyítsuk be a sejtéseket!

Megoldás

A H alaphalmaz, valamint A és B Venn-diagramján (1), (2), (3), illetve (4)-gyel jelöltük az egyes tartományokat. (Például (2) jelenti az $A \setminus B$ részhalmazt.)

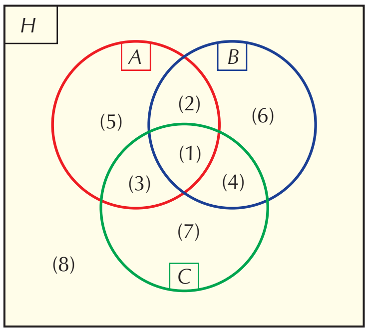
Vizsgáljuk meg, hogy az egyes műveletek melyik tartományokat (mely részhalmazokat) adják eredményül!



a) $\overline{A \cup B}$: (4); $\overline{A}$: (3), (4); $\overline{B}$: (2), (4); $\overline{A} \cap \overline{B}$: (4).

Vagyis $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: az állítást igazoltuk.

b) $\overline{A \cap B}$: (2), (3), (4) tartományok. $\overline{A} \cup \overline{B}$: (2), (3), (4) szintén; ezzel az állítást igazoltuk.

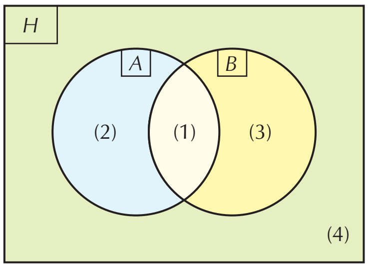


A H alaphalmaz, valamint A, B és C Venn-diagramján (1), (2), …, (8)-cal jelöltük az egyes tartományokat. (Például (2) jelenti az $(A \cap B) \setminus C$ részhalmazt.) A *c)* és *d)* feladat által meghatározott tartományok:

c) $(A \cap B) \cup C$: (1), (2), (3), (4), (7); $(A \cup C) \cap (B \cup C)$: (1), (2), (3), (4), (7); vagyis az egyenlet két oldala valóban azonos.

d) $(A \cup B) \cap C$: (1), (3), (4); $(A \cap C) \cup (B \cap C)$: (1), (3), (4). Ez az állítás is igaz.

8. K2 Adott a H alaphalmaz, valamint két halmaz, A és B. Venn-diagramjukon (1), (2), (3), illetve (4)-gyel jelöltük az egyes tartományokat. (Például (2) jelenti az $A \setminus B$ részhalmazt.)



Az alábbi, logikai kötőszókat tartalmazó megfogalmazások az egyes tartományok elemeire vonatkoznak. Állapítsuk meg, hogy az *a)–p)* meghatározások mely részhalmazok elemeire igazak, azaz a feladatokban megadott x elemek mely tartományokat határozzák meg!

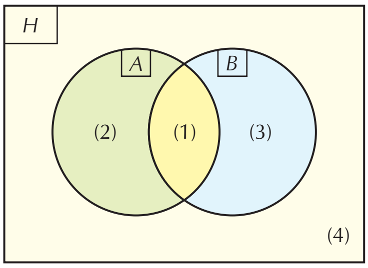
Például: az „*x eleme A-nak és x eleme B-nek*” meghatározás az $A \cap B$ részhalmazra vonatkozik (ennek x elemeire teljesül), tehát az (1) tartományt határozza meg.

a) x eleme A-nak *vagy* x eleme B-nek;
b) x (A és B közül) *legalább az egyik* halmaznak eleme;
c) x *legfeljebb az egyik* halmaznak eleme;
d) x *pontosan az egyik* halmaznak eleme;
e) x *legalább* az A halmaznak az eleme;
f) x *legfeljebb* az A halmaznak az eleme;
g) x *nem* eleme A-nak;
h) x *sem* A-nak, *sem* B-nek nem eleme;
i) x *egyik* halmaznak *sem* eleme;
j) x *csak az egyik* halmaznak eleme;
k) x *csak* A-nak eleme;
l) x eleme A-nak, *de* B-nek nem;
m) x eleme az egyik halmaznak, de a másiknak nem;
n) x *vagy* A-nak, *vagy* B-nek eleme (de csak az egyiknek);
o) *ha* x eleme A-nak, *akkor* x eleme B-nek is;
p) *ha* x eleme az egyik halmaznak, akkor eleme a másik halmaznak is.

Megoldás

a) (1), (2), (3); *b)* (1), (2), (3); *c)* (2), (3), (4); *d)* (2), (3); *e)* (1), (2); *f)* (2), (4); *g)* (3), (4); *h)* (4); *i)* (4); *j)* (2), (3); *k)* (2); *l)* (2); *m)* (2), (3); *n)* (2), (3); *o)* (1), (3), (4); *p)* (1), (4).

9. K2 Tekintsük az A = {egyjegyű páros természetes számok} és B = {egyjegyű (pozitív) prímszámok} halmazokat, s a H alaphalmaznak tekintsük az egyjegyű természetes számok halmazát!



Fogalmazzuk meg, hogy mi jellemzi az alább felsorolt tartományok elemeit, s ezeket adjuk meg az unió és kivonás halmazműveleteivel is!

a) (1); *b)* (2); *c)* (4); *d)* (2), (3);
e) (2), (4); *f)* (1), (4); *g)* (1), (3), (4); *h)* (2), (3), (4).

Megoldás

A tartomány (vagy tartományok) elemei olyan egyjegyű természetes számok,
a) amelyek páros számok és prímszámok;
b) amelyek páros számok, de nem prímszámok;
c) amelyek sem páros számok, sem prímszámok;
d) amelyek vagy páros számok, vagy prímszámok (de a két tulajdonság egyszerre nem teljesül);
e) amelyek legfeljebb páros számok (azaz a két tulajdonság közül legfeljebb az első igaz rájuk);
f) amelyekre vagy mindkét tulajdonság teljesül, vagy egyik sem;
g) amelyek ha páros számok, akkor prímszámok is;
h) amelyekre nem teljesül mindkét tulajdonság.

A tartományok többféleképpen is megadhatók az egyes műveletekkel. Például:
a) $A \setminus (A \setminus B)$; *b)* $A \setminus B$; *c)* $H \setminus (A \cup B)$; *d)* $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$; *e)* $H \setminus B$; *f)* az *a)* és *c)* feladat alapján: $(A \setminus (A \setminus B)) \cup (H \setminus (A \cup B))$; *g)* a *b)* alapján: $H \setminus (A \setminus B)$; *h)* $H \setminus (A \setminus (A \setminus B))$.

4. EGYSZERŰ ÖSSZESZÁMOLÁSI FELADATOK

1. K1 A Magyar Értelmező Kéziszótár (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972) címszavakat tartalmazó oldalai 1-től 1550-ig számozottak. Az oldalak sorszámozása közben összesen hány számjegyet nyomtattak a lexikon lapjaira?

Megoldás

1-től 9-ig 9 darab egyjegyű számot nyomtattak; 10-től 99-ig 90 darab kétjegyűt; 100-tól 999-ig 900 darab háromjegyűt; 1000-től 1550-ig 551 darab négyjegyűt. Az összes leírt számjegy száma $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 551 \cdot 4 = 5093$ darab.

2. K1 Az *A* vagy *B* összeg a nagyobb?

a) $A = 101 + 103 + 105 + \ldots + 801$, $B = 100 + 102 + 104 + \ldots + 800$;
b) $A = 201 + 204 + 207 + \ldots + 801$, $B = 200 + 203 + 206 + \ldots + 800 + 803$.

Megoldás

a) A *B* összeg minden tagja 1-gyel kisebb, így az *A* összeg a nagyobb. ($801 - 101 = 700$; $700 : 2 = 350$; tehát az *A* és *B* összeg is 351 tagból áll. $A - B = 351$.)
b) Az *A* összeg 201 tagú, a *B* 202 tagú; *B* a nagyobb. (A különbség: $803 - 201 = 602$.)

3. K2 Egy televíziós vetélkedőn hangzott el a következő kérdés. „Egy körvonalon felvettünk öt kék és egy piros pontot. A pontok által meghatározott háromszögek közül melyikből van több: amelyiknek van piros csúcsa, vagy amelyiknek nincs?" Nos?

Megoldás

Minden piros csúccsal rendelkező háromszöget (kölcsönösen egyértelműen) párosíthatunk a kimaradt három kék csúcsból álló háromszöggel. A kétfajta háromszög száma egyenlő.

4. K1 Egy ismeretlen halott fogazatát azonosítás céljából összehasonlítják az egykori fogászati kartotékokkal. Hányféle különböző emberi fogazat lehetséges, ha

a) azt vizsgálják, hogy az egyes fogak hiányoznak valakinél vagy sem;
b) egy pontosabb vizsgálatban a fogak állapota háromféle lehet: a meglévő fogakat is kétfelé osztják, egészségesekre, illetve már kezeltekre, tömöttekre.

(32 foggal számoljunk!)

Megoldás

a) A 32 fog állapota 2-féle lehet: $2^{32} = 4\,294\,967\,296$.
b) A 32 fog mindegyikének az állapota 3-féle lehet: $3^{32} \approx 1{,}85 \cdot 10^{15}$. Ennyi ember nem is él a Földön!

5. K1 Adott két párhuzamos egyenes, *a* és *b*. Kijelölünk az *a* egyenesen 3, a *b* egyenesen 4 pontot, és összekötjük mindegyik pontot mindegyik ponttal. Hány új összekötő egyenes keletkezett?

Megoldás

Az *a* egyenesen lévő pontok (3 lehetőség) bármelyikét összeköthetjük a *b* egyenesen lévő 4 pont bármelyikével. A szorzási szabály miatt az összekötő egyenesek száma $3 \cdot 4 = 12$.

6. K2 Adott az $A = \{1; 2; 3; \ldots; 100\}$ halmaz.

a) Az *A* halmaznak hány kételemű részhalmaza van?
b) Az *A* halmaznak hány 98 elemű részhalmaza van?
c) Az *A* halmaz melyik fajta részhalmazaiból van több: amelyek 33, vagy amelyek 67 eleműek?

Megoldás

a) Az 1 elem 99 darab részhalmazban szerepel: {1; 2}, {1; 3}, …, {1; 100}. A 2 további 98 részhalmazban, mert az {1; 2} lehetőséget már számoltuk: {2; 3}, {2; 4}, …, {2; 100}. A 3 további 97 részhalmazban; a 4 további 96-ban és így tovább. Végül a 99 elem egy részhalmazban (ez a {99; 100} részhalmaz). Összesen $99 + 98 + 97 + \ldots + 1 = 4950$ a 2 elemű részhalmazok száma. (Ez utóbbi összeget legegyszerűbben a párosítás módszerével határozhatjuk meg. $99 + 1 = 100$; $98 + 2 = 100$; $97 + 3 = 100$ stb. Mivel 49 pár képezhető, a keresett összeg $49 \cdot 100 + 50$.)

b) 4950. Minden 98 elemű részhalmaz párosítható a kimaradt két elemből álló részhalmazzal. A 98 és 2 elemű részhalmazok száma megegyezik.

c) Az előző pontban leírt szimmetriatulajdonság miatt a kétfajta részhalmaz száma ugyanannyi.

7. K1 Egy összejövetelen 5 fiú és 5 lány vesz részt. A táncoló pároknak hányféle összetétele lehetséges, ha mindenki táncol, és a lányok egymással, illetve a fiúk egymással nem táncolnak?

Megoldás

Állítsuk sorba a fiúkat! Ehhez a rögzített sorrendhez a lányok bármilyen sorrendje egy-egy lehetséges (különböző) táncrendet ad. Az öt lányt $5! = 120$-féleképpen állíthatjuk sorba.

8. K2 Feldobunk egyszerre egy piros és egy fehér dobókockát.

a) Hányféle eredménye lehet a dobásnak?
b) Hány esetben kaphatunk legalább egy hatost?
c) Hány esetben lesz a dobott számok összege legalább 10?
d) Hány esetben lesz a két dobott szám összege páratlan?
e) Hány esetben lesz a két dobott szám szorzata páros?
f) Hány esetben lesz a két dobott szám szorzata 3-mal osztható?

Megoldás

a) A piros és a fehér dobókocka is 6-féle értéket mutathat. Ezek egymástól függetlenek, ezért a szorzási szabály alapján a dobásnak $6 \cdot 6 = 36$-féle eredménye lehet.

b) A komplementer leszámolás módszerét alkalmazzuk. Az összes lehetőség száma 36. A 6-os nélküli dobások száma $5 \cdot 5 = 25$. „Összes – rossz = Jó”: $36 - 25 = 11$ esetben van a dobott számok között 6-os.

Más megoldási lehetőség:
Ha az első dobás 6-os: ez 6 lehetőség;
ha a második dobás 6-os: ez is 6 lehetőség.
Kétszer számoltuk azt az esetet, amikor mindkét dobás 6-os, ezért az összegből ezt egyszer le kell vonni. Eredmény: $6 + 6 - 1 = 11$.

c) Az összeg 10: $4 + 6$, $5 + 5$, $6 + 4$; ez 3 lehetőség.
Az összeg 11: $5 + 6$, $6 + 5$; ez 2 eset.
Az összeg 12: $6 + 6$; ez 1 esetben áll fenn.
Összesen $3 + 2 + 1 = 6$ esetben lesz a dobott számok összege legalább 10.

d) Egy lehetséges okoskodás a következő:
Az első piros (6-féle) dobás tetszőleges lehet. A második fehér kockán – az első eredményétől függően, de – mindig 3-féle szám esetén lesz az összeg páratlan. Így $6 \cdot 3 = 18$ a megfelelő esetek száma.

e) A komplementer leszámolás módszerét alkalmazzuk. Az összes lehetőség száma 36. Mindkét kockán páratlan számot $3 \cdot 3 = 9$-féleképpen dobhatunk. A számok szorzata $36 - 9 = 27$ esetben lesz páros.

f) Ha az első (piros) dobás 3 vagy 6, és a második akármi: ez $2 \cdot 6 = 12$ eset. Ha a második (fehér) dobás 3 vagy 6, és az első akármi: ez $6 \cdot 2 = 12$ újabb eset. $12 + 12 = 24$; de kétszer számoltuk azokat az eseteket, amikor mindkét kockán 3-mal osztható számot dobtunk. Ez $2 \cdot 2 = 4$-féleképpen fordulhat elő, tehát az eredmény $24 - 4 = 20$.

9. K1 Hányféle különbözően kitöltött, hagyományos totószelvény van? (A klasszikus totószelvényen 13 + 1 mérkőzés végeredményére tippelhetünk, mindegyik tipp lehet 1, 2 vagy X.)

Megoldás

Mindegyik tipp 3-féle lehet, a különböző kitöltések száma $3^{14} = 4\,782\,969$.

10. K2 A 2-es számrendszerben hány
a) legfeljebb 6 jegyű; *b)* pontosan 6 jegyű
természetes szám van?

Megoldás

a) Az $1000000_2 = 64$ számnál kisebb természetes számok száma 64.
b) A legnagyobb helyiérték 1, a többi 5 számjegy 2-féle lehet, 0 vagy 1. Eredmény: $2^5 = 32$.

11. K2 Oldjuk meg a 3. példát a komplementer leszámolás módszerével!
A feladat: 0, 1, 2, 3, 5 számjegyekből hány darab 5 jegyű, 5-tel osztható természetes szám készíthető, ha
a) minden számjegyet fel kell használni;
b) egy-egy számjegy többször is szerepelhet?

Megoldás

a) Összesen $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ ötjegyű természetes szám készíthető a számjegyekből. Ezek közül 5-tel nem osztható $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 54$ darab van: az utolsó helyre 3-féle számjegy kerülhet; ezután az első helyre szintén 3-féle számjegy (0 és a már felhasznált szám nem), majd a további helyekre rendre 3, 2, 1. Az 5-tel osztható számok száma tehát $96 - 54 = 42$.
b) Összes 5 jegyű szám: $4 \cdot 5^4$; az 5-tel nem oszthatók száma $4 \cdot 5^3 \cdot 3$; az 5-tel oszthatók száma tehát $4 \cdot 5^4 - 4 \cdot 5^3 \cdot 3 = 1000$.

12. K2 Jancsi a padláson egy régi, poros füzetben találta az alábbi feladatot.
„Két teljesen egyforma, külsőre megkülönböztethetetlen kockát feldobunk, a dobott számok összegét tekintjük. Hány esetben fordul elő, hogy a dobott számok összege 7? Az összes lehetséges kimenetel hányad részében fordul elő ez az esemény?”

Az elsárgult papírlapokon három, réges-régen leírt megoldási gondolatmenetet is olvasott. Mi a véleményünk ezekről?

„*Első gondolatmenet:* Mivel a kockák teljesen egyformák, 11-féle lehetséges összeg van: 2, 3, ..., 12. Ebből egy eset kedvező, a keresett arány $\frac{1}{11}$.

Második gondolatmenet (ez a megoldási javaslat Leibniz híres német matematikustól származik): Az egyes összegek többféleképpen is előállhatnak:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1+1	1+2	1+3 2+2	1+4 2+3	1+5 2+4 3+3	1+6 2+5 3+4	2+6 3+5 4+4	3+6 4+5	4+6 5+5	5+6	6+6
db:	1	1	2	2	3	3	3	2	2	1	1

A 21 lehetséges összegből 3 állítja elő a 7-et, így a keresett arány $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

Harmadik gondolatmenet: Hiába egyforma külsőre a két kocka, azért csak különböznek egymástól. Így az előző táblázat módosul:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1+1	1+2 2+1	1+3 2+2 3+1	1+4 2+3 3+2 4+1	1+5 2+4 3+3 4+2 5+1	1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1	2+6 3+5 4+4 5+3 6+2	3+6 4+5 5+4 6+3	4+6 5+5 6+4	5+6 6+5	6+6
db:	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

A keresett arány $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$."

Megoldás

Az első két gondolatmenet hibás. Komoly probléma, hogy mást jelent a *különbözőség* és mást a *megkülönböztethetőség* fogalma. Külsőleg hiába teljesen egyforma két kocka, azért különböznek egymástól (például befesthetők pirosra és fehérre).

Tehát a matematika sok területén kiválót alkotó Leibniz a megoldásban hibázott.

13. Hány szám készíthető az alábbi számjegyekből? (Minden megadott számjegyet fel kell használni.)

K1 *a)* 1, 1, 2;
K1 *b)* 1, 1, 2, 3;
K1 *c)* 1, 1, 2, 3, 4;
K1 *d)* 1, 1, 1, 2, 3, 4;
K2 *e)* 1, 1, 2, 2, 3, 4;
K2 *f)* 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4;
E1 *g)* 0, 1, 1, 2, 2, 3;
E1 *h)* 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2.

Megoldás

a) 3.

b) Ha egyforma számjegyek szerepelnek, akkor a következő gondolatmenettel érhetünk célt. Tegyük fel, hogy a két 1-es különböző; jelöljük őket például *a*-val és *b*-vel. Ekkor az *a*, *b*, 2, 3 elemek összes sorrendje a kérdés, ez 4!. De az így számolt sorrendekben – *a* és *b* azonossága miatt – minden tényleges sorrendet kétszer számoltunk, hiszen *a* és *b* felcserélhető. (Például 3*a*2*b* és 3*b*2*a* megegyeznek.) Ezért a valóban különböző sorrendek száma $\frac{4!}{2} = 12$.

c) $\frac{5!}{2} = 60$.

d) Ha a három 1-es különböző lenne (például *a*, *b*, *c*), akkor 6!-féle sorrendet kapnánk. De most az *a*, *b*, *c* betűk egymás között 3!-féleképpen cserélgethetők, s a cserével kapott sorrendek valójában – az eredeti feladat szempontjából – megegyeznek. A különböző sorrendek száma tehát $\frac{6!}{3!} = 120$.

e) Osztanunk kell a két darab 1-es miatt 2!-sal, a két darab 2-es miatt pedig ismét 2!-sal.

Eredmény: $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$.

f) $\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$.

g) A komplementer leszámolás módszerét alkalmazzuk. Az összes (legfeljebb) 6 jegyű szám száma – a 0 lehet a szám elején is – $\frac{6!}{2! \cdot 2!}$. A „rossz" esetek száma – amikor a 0 áll a szám elején – $\frac{5!}{2! \cdot 2!}$.

Eredmény: $\frac{6!}{2! \cdot 2!} - \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 150$.

h) $\frac{7!}{3! \cdot 3!} - \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 120$.

14. Egy szabályos játékkockával három dobást végzünk, a kapott számokat egymás mellé írjuk, s így egy háromjegyű számot kapunk.

K2 *a)* Hányféle számot kaphatunk?
K2 *b)* Hányféle számot kaphatunk, amelyben legalább az egyik számjegy 6-os?
K2 *c)* Hányféle számot kaphatunk, amelyben a számjegyek szorzata páros?
E1 *d)* Hányféle számot kaphatunk, amelyben van 1-es és 6-os számjegy is?

Megoldás

a) $6^3 = 216$.
b) Nincs 6-os: $5^3 = 125$ lehetőség. Van 6-os: $216 - 125 = 91$.
c) Ha minden számjegy páratlan: $3^3 = 27$ eset. A komplementer leszámolás módszerével az eredmény $216 - 27 = 189$. (Ekkor a számjegyek között van páros.)
d) Nincs 1-es: $5^3 = 125$ lehetőség. Az összes lehetőségből kivonjuk azt, amikor nincs 1-es, majd kivonjuk, amikor nincs 6-os: $216 - 125 - 125$. De ekkor kétszer vontuk ki azokat az eseteket, amikor sem 1-est, sem 6-ost nem dobtunk; ezek számát egyszer hozzá kell adni az összeghez. Nincs sem 1-es, sem 6-os: $4^3 = 64$ eset. Eredmény: $216 - 125 - 125 + 64 = 30$.

15. K2 A közelmúltban újfajta rendszámtáblákat vezettek be. A régifajta rendszámtáblán két betűt és négy számjegyet lehetett felhasználni, például BG 03–81. Az újabb rendszámtáblákon három betű és három számjegy használható fel, például MTA 031.
a) Hány különböző rendszámtábla készíthető az egyes típusokból?
b) Melyik fajta rendszámtáblából van több: amelyikben nem ismétlődik számjegy, vagy amelyikben igen? (A kérdésre mindkét típus esetén válaszoljunk.)
(A rendszámtáblán összesen 26-féle betű és 10-féle számjegy szerepelhet.)

Megoldás

a) A régifajtából $26^2 \cdot 10^4 = 6\,760\,000$; az új típusból $26^3 \cdot 10^3 = 17\,576\,000$. (Az újfajta rendszám 2,6-szer több lehetőséget biztosít.)
b) A régi típus esetén:
Ha minden számjegy különböző, akkor $26^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$-féle rendszámtábla készíthető. Tehát van ismétlődés (esetleg több is) $26^2 \cdot 10^4 - 26^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3\,352\,960$ esetben. Ez több mint az összes lehetőség fele; vagyis több van azokból a rendszámtáblákból, amelyeken van(nak) azonos számjegy(ek).
Az új típus esetén: $26^3 \cdot 10^3 - 26^3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 4\,921\,280$. Itt azokból a rendszámtáblákból van több, amelyeken nem ismétlődik számjegy.

16. K2 Tíz diáknak szeretnénk két jutalomtárgyat kiosztani. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha
a) a tárgyak egyformák, és egy diák csak egy tárgyat kaphat;
b) a tárgyak egyformák, és egy diák két tárgyat is kaphat;
c) a tárgyak különbözők, és egy diák csak egy tárgyat kaphat;
d) a tárgyak különbözők, és egy diák két tárgyat is kaphat?

Megoldás

a) $9 + 8 + 7 + \ldots + 1 = 45$. (Lásd 6. *a)* feladat.)
b) $45 + 10 = 55$. (Az előző *a)* feladatbeli lehetőségekhez hozzáadtuk azokat, amikor valamelyik gyerek két ajándékot kap.)
c) $10 \cdot 9 = 90$. (Az első tárgyat 10, a másodikat már csak 9 gyereknek adhatjuk.)
d) $10^2 = 100$. (Mindkét tárgyat 10-féleképpen oszthatjuk ki.)

5. HALMAZOK ELEMSZÁMA

1. Legyen a $H = \{1; 2; 3; \ldots , 50\}$ alaphalmaz három részhalmaza $A = \{\text{páros számok}\}$, $B = \{3\text{-mal osztható számok}\}$, $C = \{\text{négyzetszámok}\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazok elemszámait!

K1 *a)* $\overline{C}$; **K1** *b)* $B \cap C$; **K1** *c)* $A \cup C$; **K1** *d)* $A \setminus C$;
K2 *e)* $\overline{B \cup C}$; **K2** *f)* $\overline{B \setminus C}$; **K2** *g)* $\overline{C \cap A}$; **K2** *h)* $\overline{C \setminus A}$.

Megoldás

$A = \{2; 4; 6; \ldots; 50\}$, $B = \{3; 6; 9; \ldots; 48\}$, $C = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49\}$.

a) $|\overline{C}| = 43$, mert $|C| = 7$.
b) $|B \cap C| = 2$; $B \cap C = \{3^2, 6^2\}$.
c) $A \cup C = A \cup \{1; 9; 25; 49\}$, mert C páros elemei szerepelnek A-ban. Ezért $|A \cup C| = 29$.
d) $A \setminus C = A \setminus \{4; 16; 36\}$, mert C páratlan elemei nem szerepelnek A-ban. Ezért $|A \setminus C| = 22$.
e) $B \cup C = B \cup \{1; 4; 16; 25; 49\}$, mert C többi eleme közös. $|B| = 16$; $|B \cup C| = 21$;
$|\overline{B \cup C}| = 50 - 21 = 29$.
f) $B \setminus C = B \setminus \{9; 36\}$, mert C többi eleme nincs benne B-ben. $|\overline{B \setminus C}| = 50 - (16 - 2) = 36$.
g) $C \cap A = \{4; 16; 36\}$; $|\overline{C \cap A}| = 47$.
h) $C \setminus A = \{1; 9; 25; 49\}$; $|\overline{C \setminus A}| = 46$.

2. K1 $|A| = 10$, $|B| = 8$. Mennyi a legkisebb és legnagyobb érték, amit felvehet
a) $|A \setminus B|$; *b)* $|A \cap B|$; *c)* $|A \cup B|$?

Megoldás

a) $|A \setminus B| \geq 2$; akkor lehet egyenlőség, ha $B \subseteq A$.
$|A \setminus B| \leq 10$; akkor lehet egyenlőség, ha $A \cap B = \varnothing$.
b) $|A \cap B| = 0$, ha $A \cap B = \varnothing$.
$|A \cap B| \leq 8$; akkor lehet egyenlőség, ha $B \subseteq A$.
c) $|A \cup B| \geq 10$; akkor lehet egyenlőség, ha $B \subseteq A$.
$|A \cup B| \leq 18$; akkor lehet egyenlőség, ha $A \cap B = \varnothing$.

3. K2 A, B véges halmazok. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?
a) Ha $|A| = |A \cup B|$, akkor $B \subseteq A$.
b) Ha $|A| = |A \cup B|$, akkor $B \subset A$.
c) Ha $|A| = |A \cap B|$, akkor $A \subseteq B$.
d) Ha $|A| = |A \cap B|$, akkor $|A \setminus B| = 0$.
e) Ha $|A| = |A \setminus B|$, akkor $B \subseteq A$.

Megoldás

a) Igaz; ha $|A| = |A \cup B|$, akkor $B \setminus A = \varnothing$.
b) Hamis; lehetséges $A = B$ is.
c) Igaz; $A \setminus B = \varnothing$.
d) Igaz. $A \setminus B = \varnothing$.
e) Hamis; a feltételből $A \cap B = \varnothing$ következik.

4. E1 Melyik igaz az előző feladat állításai közül, ha A, B végtelen halmazok, és az állításokban az elemszámok helyett halmazok számossága szerepel?

Megoldás

Egyik állítás sem fog teljesülni.

a) Ellenpélda: $A = \mathbf{Z}^+$, $B = \mathbf{N}$. Most az A és $A \cup B = B$ halmazok számossága megegyezik az $1 \leftrightarrow 0$, $2 \leftrightarrow 1$, $3 \leftrightarrow 2$ stb. megfeleltetés miatt, de $B \not\subset A$.

b) Az előző ellenpélda most is megfelelő.

c) Legyen fordítva az ellenpélda: $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{Z}^+$. Ekkor A és $A \cap B$ számossága megegyezik, és $A \not\subset B$.

d) Az előző *c)* ellenpélda most is megfelelő.

e) Ellenpélda az $A = \{1; 3; 5; 7; \dots\}$ és $B = \{2; 4; 6; 8; \dots\}$ halmaz.

5. K2 A, B, C véges halmazok, H az alaphalmaz. Milyen feltételek esetén teljesülnek az alábbi egyenlőségek, egyenlőtlenségek?

a) $|A \cup B| = |A| + |B|$;

b) $|A \setminus B| = |A| - |B|$;

c) $|\overline{B}| = |H| - |B|$;

d) $|A \cap B| = \dfrac{|A| + |B|}{2}$;

e) $|A| + |B| + |C| > |A \cup B \cup C|$;

f) $|A \cap B \cap C| = \dfrac{|A| + |B| + |C|}{3}$.

Megoldás

Alkalmazzuk az $|A \cap B| = x$, $|A \setminus B| = a$, $|B \setminus A| = b$ jelölést. ($a, b, x \in \mathbf{N}$.)

a) A feltétel: $A \cap B = \varnothing$. (Egyébként az $|A| + |B|$ összegben az $A \cap B$ elemszámát kétszer számolnánk: $|A \cup B| = a + b + x$, $|A| + |B| = (a + x) + (b + x) = a + b + 2x$.)

b) $a = (a + x) - (b + x) = a - b$, azaz $b = 0$. A feltétel: $B \setminus A = \varnothing$, vagyis $B \subseteq A$.

c) Ez azonosság (a definícióból közvetlenül következik, mert $B \subseteq H$), így az egyenlőség mindig igaz.

d) $x = \dfrac{(a + x) + (b + x)}{2}$, innen $a + b = 0$, azaz $a = b = 0$. $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$, vagyis $A = B$.

e) Az egyenlőtlenség általában teljesül; csak akkor nem igaz, ha az $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ részhalmazok mindegyike üres halmaz.

f) Tudjuk, hogy $|A \cap B \cap C| \le |A|$; $|A \cap B \cap C| \le |B|$; $|A \cap B \cap C| \le |C|$. A három egyenlőtlenség összeadásából $|A \cap B \cap C| \le \dfrac{|A| + |B| + |C|}{3}$ következik. Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $A \cap B \cap C = A$, $A \cap B \cap C = B$, $A \cap B \cap C = C$; azaz $A = B = C$.

6. K1 A $H = \{a, b, c, \dots, g\}$ alaphalmaz A, B, C, D részhalmazait az alábbi táblázattal adtuk meg:

H	a	b	c	d	e	f	g
A	1	0	1	0	1	1	0
B	0	0	0	1	1	1	0
C	1	0	1	1	0	1	1
D	0	0	1	0	0	1	0

Az első sorban a H halmaz elemeit tüntettük fel; a következő sorokban az egyes halmazoknál 1-est írtunk, ha az aktuális elem benne van a halmazban, 0-t, ha nincs. Például $a \in A$, de $a \notin B$. Szemléltessük a táblázat segítségével, hogy mivel egyenlő az alábbi halmazok elemszáma, s határozzuk is meg az elemszámokat!

a) $(A \cup B) \cup C$; *b)* $A \cap (B \cap C)$; *c)* $(A \cap B) \cup C$; *d)* $A \cup (C \setminus D)$;
e) $A \cup (C \setminus B)$; *f)* $(A \cup C) \setminus (B \cup D)$; *g)* $\overline{A \cup B}$; *h)* $\overline{A \cup (C \setminus B)}$;
i) $\overline{A} \cap \overline{C}$; *j)* $\overline{(C \setminus B) \setminus D}$; *k)* $\overline{C \setminus (B \setminus D)}$.

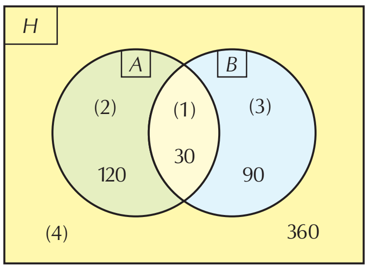
Megoldás

a) Az $(A \cup B) \cup C$ halmazba szemléletesen azok az elemek tartoznak, ahol az első három sor valamelyikében 1-es szerepel. Az elemszám: 6.
b) Az elemszám 1. Az első három sor mindegyikében 1-es van.
c) Az elemszám 6. A 3. sorban, vagy az első két sor mindegyikében 1-es szerepel.
d) Az elemszám 6. $C \setminus D = \{a, d, g\}$; (a 3. sorban 1-es szerepel, de a 4. sorban 0.) $A \cup (C \setminus D) =$ $= \{a, c, d, e, f, g\}$.
e) Az elemszám 5.
f) Az elemszám 2. Az 1. és 3. sor valamelyikében 1-es szerepel, feltéve, hogy a 2. és 4. sorokban 0 van; $|\{a, g\}| = 2$.
g) Az elemszám 2. Az első két sorban 0 szerepel.
h) Az elemszám 2. Az *e)* halmaz komplementere.
i) $|\{b\}| = 1$. (Az 1. és 3. sorban 0 van.)
j) Az elemszám 2. Azok az elemek *nem* tartoznak ebbe a halmazba, amelyek C-ben benne vannak, de B-ben és D-ben nem. $\{a, g\}$
k) Az elemszám 3. $B \setminus D = \{d, e\}$: a 2. sorban 1-es van, de a 4. sorban 0. $C \setminus \{B \setminus D\} = \{a, c, f, g\}$.

7. K2 A 600-nál nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amelyik
a) osztható 4-gyel;
b) osztható 5-tel;
c) osztható 4-gyel és 5-tel;
d) osztható 4-gyel vagy 5-tel;
e) osztható vagy 4-gyel, vagy 5-tel (de csak az egyikkel);
f) a 4 és 5 közül legalább az egyikkel osztható;
g) a 4 és 5 közül legfeljebb az egyikkel osztható;
h) a 4 és 5 közül pontosan az egyikkel osztható;
i) ha osztható 4-gyel, akkor osztható 5-tel is;
j) a 4 és 5 számok közül ha osztható az egyikkel, akkor osztható a másikkal is;
k) nem osztható sem 4-gyel, sem 5-tel?

Megoldás

Jelölje A és B a 4-gyel, illetve 5-tel osztható számok halmazát, s legyen $H = \{1; 2; 3; \ldots; 600\}$ az alaphalmaz. Ekkor $|A| = 150$, $|B| = 120$, $|A \cap B| = 30$ ($A \cap B$ a 20-szal osztható számok halmaza). A Venn-diagramon az egyes tartományokat (1), (2), (3), (4)-gyel jelöltük, s $A \cap B$-ből kiindulva meghatároztuk az elemszámaikat.



a) $|A| = 150$;
b) $|B| = 120$;
c) $|A \cap B| = 30$;
d) $|A \cup B| = 240$;
e) $120 + 90 = 210$;
f) $|A \cup B| = 240$;
g) pontosan az egyik számmal vagy egyikkel sem osztható számok: (2), (3) és (4)-es tartományok: $600 - 30 = 570$;
h) 210 (megegyezik *e)*-vel);
i) az állítás a (2)-es tartomány számaira nem teljesül: $600 - 120 = 480$;
j) az állítás a (2) és (3) tartományokra nem teljesül: $360 + 30 = 390$;
k) (4)-es tartomány: 360.

8. K2 Hány elemű lehet az A és B halmaz, ha
a) $|A \cap B| = 10$ és $|A \cup B| = 13$;
b) $|A \cup B| = 13$ és $|A \setminus B| = 8$?

Megoldás

Vezessük be az $|A \setminus B| = a$, $|B \setminus A| = b$, $|A \cap B| = c$ jelöléseket. ($a, b, c \in \mathbf{N}$.)

a) $a + b = 3$, így $0 \le a \le 3$, és $10 \le |A| \le 13$, s hasonló állítható B-ről is. A lehetséges elemszámok:

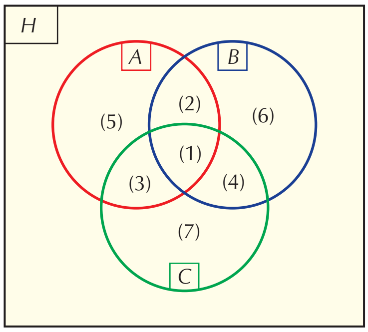
$\lvert A \setminus B\rvert$	3	2	1	0
$\lvert B \setminus A\rvert$	0	1	2	3
$\lvert A\rvert$	13	12	11	10
$\lvert B\rvert$	10	11	12	13

b) $b + c = 5 = |B|$. $0 \le b \le 5$, így $8 \le |A| \le 13$.

9. K2 Az A, B, C halmazokról tudjuk, hogy $|A \setminus B| = 8$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cup B| = 21$, $|C \setminus A| = 11$, $|A \cap B \cap C| = 1$, $|C| = 15$, $|B \cup C| = 23$. Határozzuk meg az A és B halmazok elemszámát!

1. megoldás:

Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal, s jelöljük (1), (2), (3), …, (7)-tel az egyes tartományok elemszámait (ábra)!



Ekkor 7 egyenletet kapunk 7 ismeretlennel:

1. (3) + (5) = 8,
2. (1) + (2) = 3,
3. (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) = 21,
4. (4) + (7) = 11,
5. (1) = 1,
6. (1) + (3) + (4) + (7) = 15,
7. (1) + (2) + (3) + (4) + (6) + (7) = 23.

Az egyenletrendszer megoldása után

$|A|$ = (1) + (2) + (3) + (5), $|B|$ = (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) az eredmény.

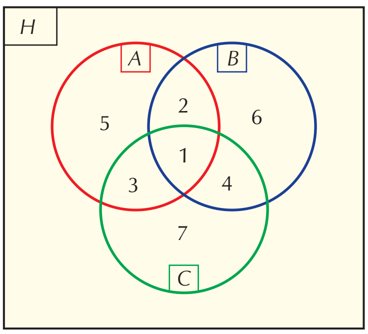
Megjegyzés: Ez a bonyolult megoldási módszer hasonló feladatokban mindig alkalmazható. Az egyenletrendszert megoldva A és B mellett meghatározhatjuk C elemszámát is, vagy bármely, a halmazokból felépülő kifejezés elemszámát, például $|(A \cup B) \setminus C|$.

Az alábbiakban megoldjuk az egyenletrendszert, de a feltételeket figyelembe véve a feladatra most egyszerűbb megoldás is adható.

A 2. és 5. egyenletből (2) = 2; a 6. és 4. egyenlet különbségéből, figyelembe véve (5)-öt, (3) = 3. Az első egyenletből (5) = 5, így a következő egyenleteink maradtak:

3′. (4) + (6) = 10,
4′. (4) + (7) = 11,
7′. (4) + (6) + (7) = 17.

3′ és 4′ összegéből kivonjuk 7′-t: (4) = 4; s innen (6) = 6 és (7) = 7 adódik. Az alábbi ábrán tüntettük fel az egyes tartományok elemszámát.



$|A| = 11$, $|B| = 13$.

2. megoldás:

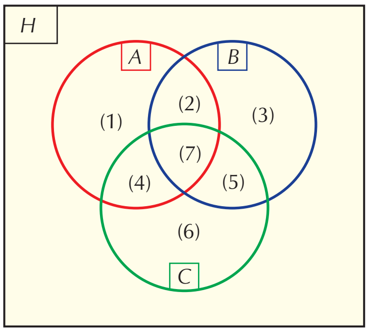
$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B| = 8 + 3 = 11$. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, innen
$|B| = |A \cup B| - |A| + |A \cap B| = 21 - 11 + 3 = 13$.
(Ebben a megoldásban nem használtuk fel a C-re vonatkozó összefüggéseket.)

10. E1

a) Adjunk meg három olyan A, B, C halmazt, amelyek közül bármely kettőnek végtelen sok közös eleme van, de a három halmaz közös része üres!
b) Az előző feladat további megkötése, hogy $A \cup B \cup C = \mathbf{N}$ is teljesüljön!

Megoldás

a) Sokféle megoldás adható. Például az ábra A, B, C halmazainak (i)-vel jelölt részhalmazaiba kerüljenek a $10k + i$ alakú számok, ahol $k \in \mathbf{Z}$, és $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. (A (7) így üres halmaz marad.)

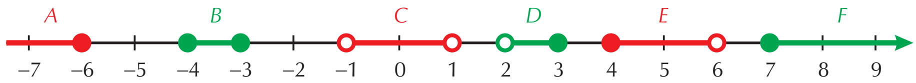


b) Legyen például $A = \{$páros számok$\}$, $B = \{$3-mal osztható egész számok$\}$, $C = \{$6-tal nem osztható egész számok$\}$; ezek a halmazok a feltételeknek megfelelnek. Könnyen megmutatható, hogy bármely két halmaznak végtelen sok közös eleme van, és a három halmaz közös része üres. Ugyanakkor $A \cup B \cup C = \mathbf{N}$ is teljesül, mert $A \cap B = \overline{C}$, és így minden olyan természetes szám, amelyik nincs benne sem az A, sem a B halmazban, benne van C-ben.

6. PONTHALMAZOK

1. K1 Ábrázoljuk az $A =]-\infty; -6]$, $B = [-4; -3]$, $C =]-1; 1[$, $D =]2; 3]$, $E = [4; 6[$ és $F = [7; \infty[$ intervallumokat a számegyenesen!

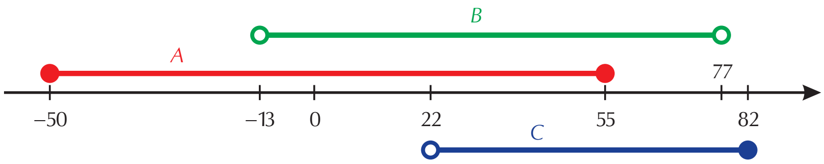
Megoldás



2. K2 Tekintsünk három intervallumot: $A = [-50; 55]$, $B =]-13; 77[$, $C = [22; 82[$. Hány egész szám van a $\{-100; -99; -98; \ldots; 100\}$ halmazban, amely az intervallumok közül

a) csak A-nak eleme;
b) pontosan egynek az eleme;
c) legfeljebb kettőnek az eleme;
d) legalább kettőnek az eleme;
e) B-nek nem eleme;
f) B-nek nem eleme (de valamelyik másik intervallumnak igen);
g) eleme B-nek és C-nek, de A-nak nem?

Megoldás



a) $A \setminus (B \cup C) = [-50; -13]$; az intervallum $50 - 12 = 38$ egész számot tartalmaz.
b) A $[-50; -13] \cup [77; 82[$ halmaz $38 + 5 = 43$ egész számot tartalmaz.
c) A $[-100; 22[\cup]55; 100]$ halmaz $100 + 1 + 21 + 45 = 167$ egész számot tartalmaz.
d) A $]-13; 77[$ intervallum $12 + 1 + 76 = 89$ egész számot tartalmaz.
e) A $[-100; -13] \cup [77; 100]$ halmaz $88 + 24 = 112$ egész számot tartalmaz.
f) A $[-50; -13] \cup [77; 82[$ halmaz $38 + 5 = 43$ egész számot tartalmaz.
g) $(B \cap C) \setminus A =]55; 77[$; az intervallum 21 egész számot tartalmaz.

3. K1 Határozzuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat, ha:
a) $A = [1; 5]$, $B = \{1; 3; 7\}$;
b) $A =]-3; 4[$, $B = \{-4; -3; -2\}$!

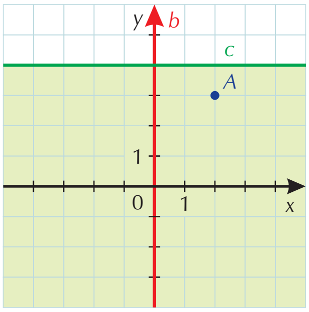
Megoldás

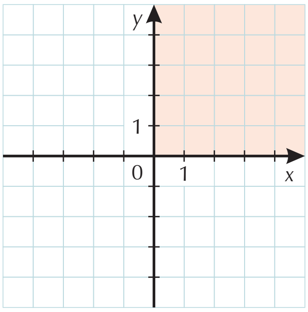
a) $A \cup B = [1; 5] \cup \{7\}$, mert $1 \in A$ és $3 \in A$.
$A \cap B = \{1; 3\}$.
$A \setminus B = [1; 5] \setminus \{1; 3\} =]1; 5] \setminus \{3\}$. (Az eredményt megadhatjuk $]1; 3[\cup]3; 5]$ alakban is.)
$B \setminus A = \{7\}$.
b) $A \cup B =]-3; 4[\cup \{-4; -3\} = \{-4\} \cup [-3; 4[$, mert $-2 \in A$.
$A \cap B = \{-2\}$.
$A \setminus B =]-3; 4[\setminus \{-2\}$. (Vagy $A \setminus B =]-3; -2[\cup]-2; 4[$.)
$B \setminus A = \{-4; -3\}$.

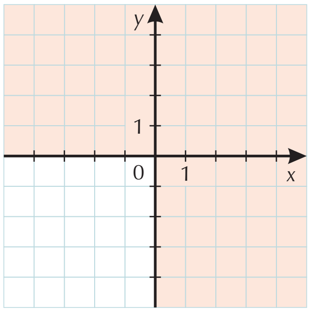
4. K1 Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x; y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbiak:
a) $x = 2, y = 3$; *b)* $x = 0$; *c)* $y \leq 4$; *d)* $x > 0$ és $y > 0$; *e)* $x \geq 0$ vagy $y \geq 0$!

Megoldás

Az egyes ponthalmazok az ábrán láthatók.







a) A ponthalmaz egyetlen pontból, az *A* pontból áll;
b) a ponthalmaz a *b* egyenes (az *y* tengely);
c) a ponthalmaz a *c* egyenes, valamint az „alatta” lévő félsík;
d) a ponthalmaz az első síknegyed (a koordinátatengelyek nem tartoznak a halmazhoz);
e) a ponthalmaz az első, második és negyedik síknegyed (a koordinátatengelyek a halmazhoz tartoznak).

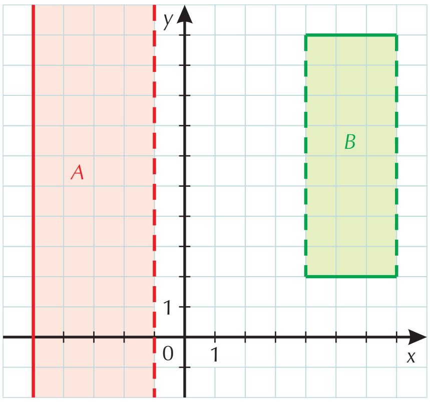
5. K2

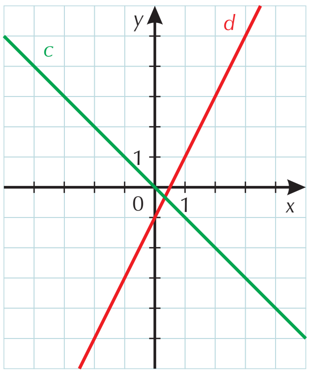
Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x;\ y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbiak!

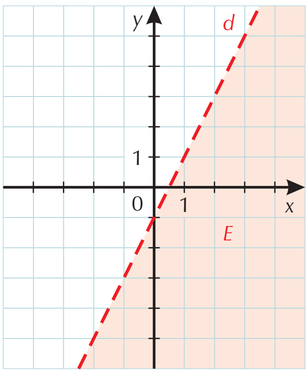
a) $-5 \le x < -1$; *b)* $4 < x < 7$ és $2 \le y \le 10$; *c)* $x + y = 0$; *d)* $y = 2x - 1$;
e) $y < 2x - 1$; *f)* $y = 2x - 1$ és $-2 < x < 3$; *g)* $x \cdot y \ge 0$; *h)* $x^2 - y^2 = 0$.

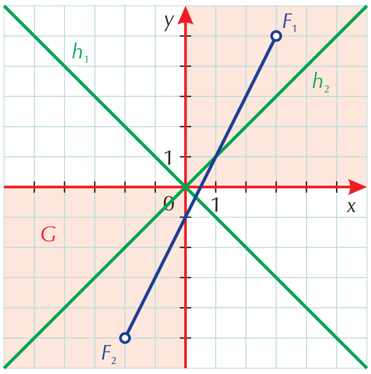
Megoldás

A kapott ponthalmazok az ábrán láthatók:









a) Az *A* ponthalmaz „balról” zárt, „jobbról” nyílt sáv.
b) A *B* ponthalmaz téglalap. (A „vízszintes” határok a ponthalmazhoz tartoznak, a „függőlegesek” nem.)
c) A ponthalmaz az $y = -x$ egyenletű *c* egyenes.
d) A ponthalmaz a *d* egyenes.

e) Az E ponthalmaz a d egyenes „alatti” nyílt félsík.
f) A ponthalmaz az ábrán látható F_1F_2 nyílt szakasz.
g) A G ponthalmaz az első és harmadik síknegyedből áll, a tengelyekkel.
h) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0$. A H ponthalmaz a h_1: $x + y = 0$ és h_2: $x - y = 0$ egyenletű egyenesekből áll.

6. E1 Adjunk meg három olyan ponthalmazt, amelyekre teljesül az alábbi feltételek mindegyike!
1. A halmazok elemszáma végtelen.
2. Bármely két halmaznak végtelen sok közös eleme van.
3. A három halmaz metszete üres halmaz

1. megoldás:

Az 5. lecke 10. feladatának alapján képezünk ponthalmazokat. Tekintsük az A = {páros számok}, B = {3-mal osztható egész számok}, C = {6-tal nem osztható egész számok} számhalmazok elemeinek megfelelő pontokat a számegyenesen. Könnyen belátható, hogy az így kapott ponthalmazok a feltételeknek megfelelnek.

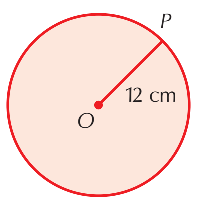
2. megoldás:

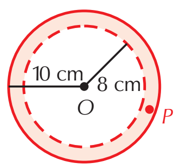
Megfelelő geometriai konstrukció például a háromoldalú egyenes hasáb; ennek a palástját alkotó három téglalap pontjai adják a halmazokat.

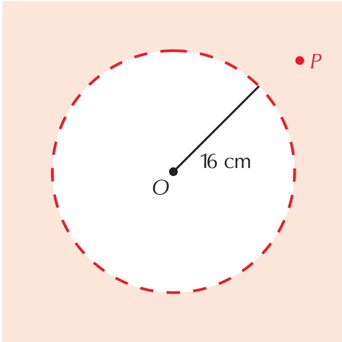
7. NEVEZETES PONTHALMAZOK

1. K1 A síkon adott az O pont. Határozzuk meg a síkon azon P pontok halmazát, amelyekre
a) $OP \le 12$ cm; *b)* 8 cm $< OP \le 10$ cm; *c)* $OP > 16$ cm!

Megoldás

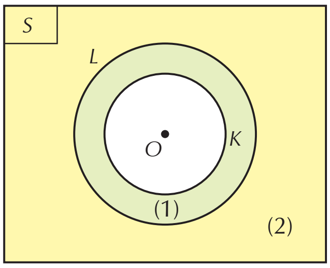






A P pontok halmaza
a) az O középpontú, 12 cm sugarú zárt körlemez;
b) az O középpontú, 8 cm és 10 cm sugarú koncentrikus körök által meghatározott körgyűrű (a belső körív nem tartozik a ponthalmazhoz);
c) az O középpontú, 16 cm sugarú zárt körlemezen kívüli pontok a síkon.

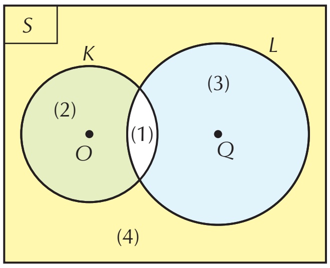
2. K1 Az S síkon felvett K és L koncentrikus körök középpontja O. Megadjuk a körlemezek pontjait: $K = \{P \in S \mid OP \le 10 \text{ cm}\}$ és $L = \{P \in S \mid OP \le 15 \text{ cm}\}$.
a) Határozzuk meg a $K \cap L$, $K \cup L$, $K \setminus L$, $L \setminus K$, $\overline{K}$ halmazokat!
b) Határozzuk meg az ábrán (1)-gyel és (2)-vel jelölt ponthalmazokat! (A határvonal a ponthalmazokhoz tartozik.)



Megoldás

a) $K \cap L = K$; $K \cup L = L$; $K \setminus L = \varnothing$; $L \setminus K = \{P \in S \mid 10 \text{ cm} < OP \le 15 \text{ cm}\}$; $\overline{K} = S \setminus K =$
$= \{P \in S \mid OP > 10 \text{ cm}\}$.
b) Az (1) körgyűrű esetén: $\{P \in S \mid 10 \text{ cm} \le OP \le 15 \text{ cm}\}$;
(2): $\{P \in S \mid 15 \text{ cm} \le OP\}$.

3. K1 Az S síkon felvett K kör középpontja O, sugara 12 cm; az L kör középpontja Q, sugara 16 cm; az OQ távolság 24 cm.
Határozzuk meg az ábrán látható (1), (2), (3), (4) tartományokat!
(A határvonal nem tartozik a halmazokhoz.)



Megoldás

(1): $\{P \in S \mid OP < 12 \text{ cm és } QP < 16 \text{ cm}\}$;
(2): $\{P \in S \mid OP < 12 \text{ cm és } QP > 16 \text{ cm}\}$;
(3): $\{P \in S \mid OP > 12 \text{ cm és } QP < 16 \text{ cm}\}$;
(4): $\{P \in S \mid OP > 12 \text{ cm és } QP > 16 \text{ cm}\}$.

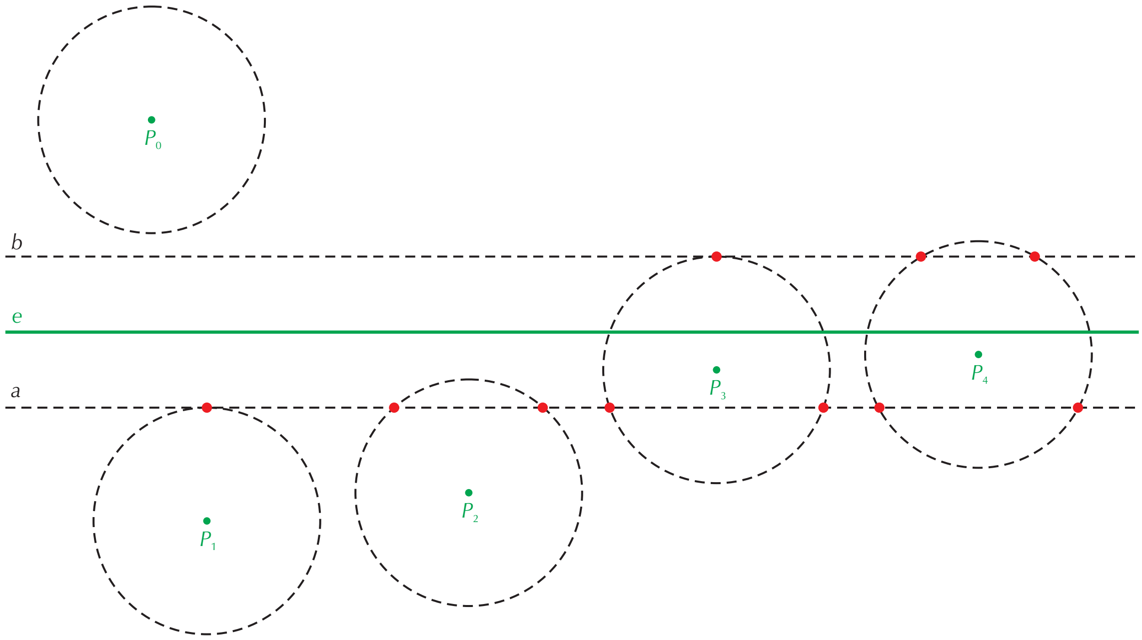
A következő 4–13. feladatokban a szerkesztési problémák megoldását ponthalmazok metszetének a meghatározására vezetjük vissza. Eltekintünk a szerkesztési feladatok teljes értékű megoldásától (elemzés, szerkesztés, bizonyítás, diszkusszió), ugyanis ezek egyrészt rendkívül hosszadalmasak, hely- és időigényesek; másrészt ezekben az egyszerű feladatokban csekély a szakmai vagy *módszertani hozadékuk*[2]. *A keresett ponthalmazok (egyenesek, körök) azonosítása, majd megszerkesztése általában az alapszerkesztések közé tartozik.*

A feladatok megoldhatóságára, illetve a megoldások számára is csak röviden utalunk.

4. K1 Adott egy *P* pont és egy rá nem illeszkedő *e* egyenes. Szerkesszünk olyan pontokat a síkon, amelyek az egyenestől 2 cm-re, a ponttól 3 cm-re vannak!

Megoldás

Az *e* egyenestől 2 cm-re lévő pontok halmaza a vele párhuzamos *a*, *b* egyenespár (melynek *e* a középpárhuzamosa), a *P* ponttól 3 cm-re lévő pontok halmaza a *P* középpontú, 3 cm sugarú *k* kör. A körnek és az egyenespárnak a *P* pont helyzetétől függően 0, 1, 2, 3 vagy 4 közös pontja lehet (az ábrán P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 jelöli *P* megfelelő helyzeteit).



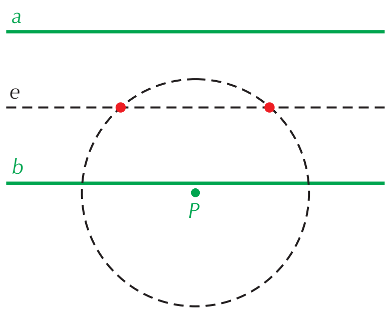
5. K1 Adott két egyenes, *a* és *b*, valamint egy *P* pont. Szerkesszünk olyan pontokat a síkon, amelyek egyenlő távolságra vannak a két egyenestől és 4 cm-re a ponttól!

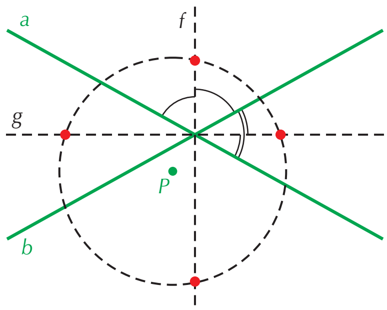
Megoldás

Ha az *a* és *b* egyenesek párhuzamosak, akkor a tőlük egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az e középpárhuzamos egyenes; a *P* ponttól 4 cm-re lévő pontok halmaza pedig a *P* középpontú, 4 cm sugarú *k* kör. Az e és *k* ponthalmazoknak a *P* pont helyzetétől függően 0, 1 vagy 2 közös pontjuk lehet.

Ha az *a* és *b* egyenesek metszik egymást, akkor a tőlük egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az *f* és *g* szögfelező egyenesek. A körnek és az *f*, *g* egyenespárnak a *P* pont helyzetétől függően 0, 1, 2, 3 vagy 4 közös pontja lehet.

Az ábrán mindkét esetre egy-egy példát láthatunk.





[2] A témakörről részletesebben olvashatunk *A geometriai szerkesztésekről* c. olvasmányban.

6. K1 Adott két pont, A és B, és egy e egyenes. Szerkesszünk olyan pontokat a síkon, amelyek egyenlő távolságra vannak a két ponttól és 4 cm-re az egyenestől!

Megoldás

Az A és B pontoktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az AB szakasz m felezőmerőlegese; az e egyenestől 4 cm-re lévő pontok halmaza a vele párhuzamos a, b egyenespár (melynek e a középpárhuzamosa). Az m egyenesnek, valamint a párhuzamos a, b egyenespárnak 0, 2 vagy végtelen sok közös pontja lehet. (Ez utóbbi helyzet akkor áll elő, ha az m és például az a egyenesek egybeesnek. Ha tovább elemezzük a pontok elhelyezkedését, megállapíthatjuk, hogy ekkor az AB egyenes merőleges e-re, és az AB szakasz F felezőpontja éppen 4 cm-re van az e egyenestől.)

7. K1 Adott két pont, A és B, és egy e egyenes. Szerkesszünk olyan pontokat a síkon, amelyek az A ponttól 3 cm-re, a B-től 4 cm-re, az egyenestől pedig 5 cm-re vannak!

Megoldás

Az e egyenestől 5 cm-re lévő pontok halmaza a vele párhuzamos a, b egyenespár (melynek e a középpárhuzamosa), az A ponttól 3 cm-re lévő pontok halmaza az A középpontú, 3 cm sugarú k_A kör, a B ponttól 4 cm-re lévő pontok halmaza pedig a B középpontú, 4 cm sugarú k_B kör. A k_A és k_B köröknek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet; a feladat megoldásszáma tehát attól függ, hogy k_A és k_B közös pontja(i) közül hány esik az a vagy b egyenesek valamelyikére.

8. K1 Az ABC háromszög AB oldalán szerkesszünk olyan pontot, amelyik a másik két oldalegyenestől egyenlő távolságra van!

Megoldás

A keresett pont az AB oldal, valamint a CA és CB oldalegyenesek (belső) szögfelezőjének a metszéspontja. (Ez a pont mindig létezik.)

9. K2 Az ABC háromszög síkjában szerkesszünk olyan pontot, amelyik az AC és BC oldalegyenesektől, valamint az A és B pontoktól is egyenlő távolságra van!

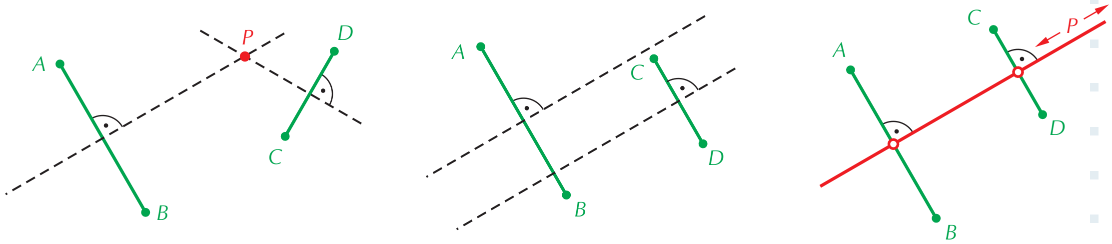
Megoldás

A keresett pont rajta van az AC és BC oldalegyenesek f és g szögfelező egyenesein, valamint az AB szakasz m felezőmerőlegesén is. Általában két megoldás van; ha m párhuzamos az f belső szögfelezővel, akkor a két egyenes egybeesik, s ekkor végtelen sok megoldás van. (Ez a helyzet akkor áll elő, ha $AC = BC$, azaz a háromszög egyenlő szárú.)

10. K2 Adott két szakasz, AB és CD. Szerkesszünk olyan P pontot, amelyikre az ABP és a CDP egyenlő szárú háromszögek alapjai AB és CD!

Megoldás

A keresett pont az AB és CD szakaszok felezőmerőlegeseinek a metszéspontja. A két egyenesnek 0, 1 vagy végtelen sok közös pontja lehet, s ez lehet a megoldásszám is.



(Természetesen ha a két felezőmerőlegesnek egy közös pontja van, abból még nem következik, hogy a feladatnak is van megoldása. Ha például a felezőmerőlegesek az AB szakasz felezőpontjában metszik egymást, akkor nem kapunk megoldást, mert ekkor ABP nem háromszög.)

11. K1 Szerkesszünk két adott ponton, A-n és B-n átmenő, adott r sugarú kört!

Megoldás

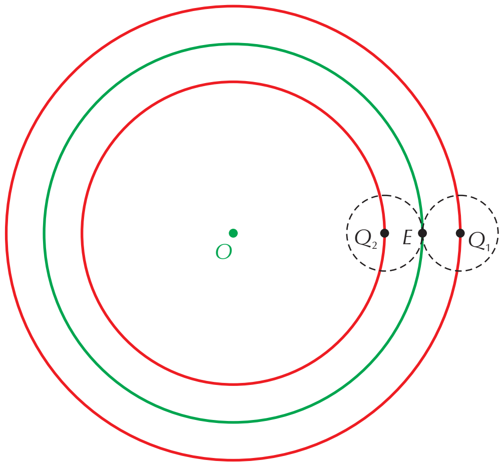
A keresett kör O középpontja A-tól és B-től egyaránt r távolságra van, így az A és B középpontú, r sugarú körök metszéspontjaként állítható elő. A két körnek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet; ennyi a feladat megoldásainak a száma.

12. K2 Vegyünk fel egy 5 cm sugarú kört. Szerkesszük meg azoknak a köröknek a középpontjait, amelyek érintik a megadott kört, és a sugaruk 1 cm; 4 cm; 6 cm!

Megoldás

Jelöljük az 5 cm sugarú kör középpontját O-val. A két kör centrálisa (a középpontjaikat összekötő egyenes) szimmetriaokok miatt átmegy a közös E érintési ponton. Ha a két kör egymást kívülről érinti, akkor középpontjaik távolsága $5 + 1 = 6$ (cm), míg ha a körök belülről érintik egymást, akkor a középpontok távolsága $5 - 1 = 4$ (cm).

Jelölje az O középpontú kört kívülről érintő, 1 cm sugarú kör középpontját Q_1, s hasonlóan a belső érintőkör középpontját Q_2. Mivel $OQ_1 = 6$ cm = állandó, a Q_1 pontok az O középpontú, 6 cm sugarú körön helyezkednek el; míg a Q_2 pontok az O középpontú, 4 cm sugarú körön (ábra). A keresett körök Q_1 és Q_2 középpontjainak a halmaza tehát egy-egy O középpontú kör.

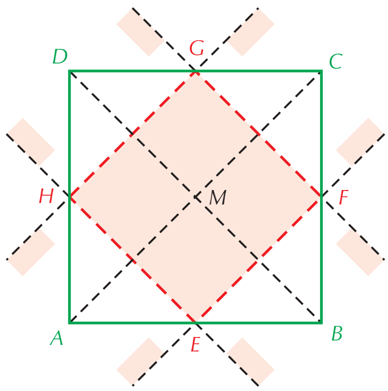


Hasonló eredményt kapunk a 4 cm és 6 cm sugarú érintőkörök középpontjainak a halmazára is. Ha a két kör egymást kívülről érinti, akkor középpontjaik távolsága rendre $5 + 4 = 9$ és $5 + 6 = 11$ (cm); míg ha a körök belülről érintik egymást, akkor a középpontok távolsága $5 - 4 = 1$ és $6 - 5 = 1$ (cm). A keresett ponthalmazok az O középpontú, 9 cm, 11 cm és 1 cm sugarú körök.

13. K2 Határozzuk meg egy négyzet belsejében azon P pontok halmazát, amelyek közelebb vannak a négyzet középpontjához, mint a csúcsaihoz!

Megoldás

Az M középpontú, $ABCD$ csúcsú négyzet oldalainak a felezőpontjait jelölje E, F, G, H (ábra). A keresett P pontok az AM szakasz EH felezőmerőlegesének M-et tartalmazó félsíkjába esnek; s hasonlót állíthatunk az EF, FG és GH felezőmerőlegesekről is. A négy félsík közös része az $EFGH$ nyílt négyzetlemez pontjainak a halmaza. (A halmaz nyílt, azaz a négyzet kerülete nem tartozik a keresett ponthalmazhoz.)



14. E1 Egy P pont és egy H alakzat távolsága megegyezik a P és H pontjainak távolságai közül a legkisebbel, amennyiben létezik. Hol vannak azok a pontok a síkon, amelyek adott távolságra vannak
a) egy A kezdőpontú félegyenestől;
b) egy adott AB szakasztól?

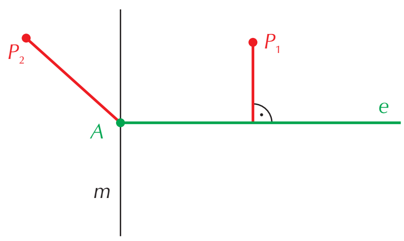
Megoldás

a) Az e egyenesre A-ban állított merőlegest jelöljük m-mel. Az m egyenes két félsíkra osztja a síkot.

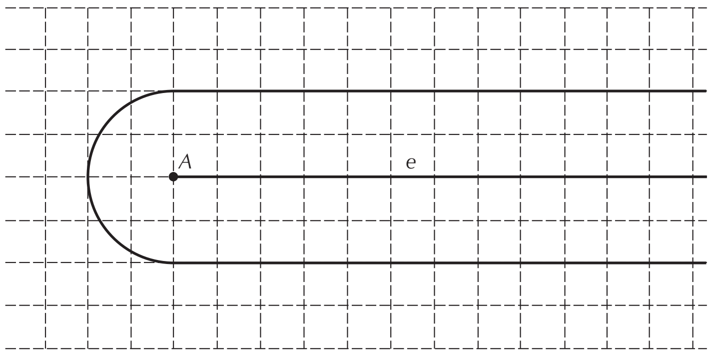
Ha a P pont az e félegyenest tartalmazó félsíkban van, akkor P-ből merőleges szakaszt bocsátunk e-re, és ennek a szakasznak a hossza a pont és félegyenes távolsága. (Az ábrán ezt az esetet P_1 szemlélteti.)

Ha P az e-t nem tartalmazó félsíkban van (az ábrán a P_2 pont), akkor $Pe = PA$.

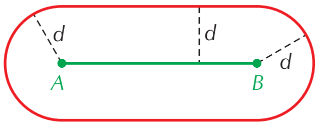
(Ha $P \in m$, akkor a két szakasz egybeesik.)



A keresett pontok tehát az e-t tartalmazó félsíkban két félegyenest, az e-t nem tartalmazó félsíkban pedig egy *A* középpontú félkört alkotnak. A félegyenesek és e távolsága, valamint a félkör sugara az adott távolsággal egyezik meg.



b) Jelöljük a pontok és az *AB* szakasz távolságát *d*-vel. A keresett ponthalmaz egy atlétikai „futópályára" hasonlít.



15. K2 Vegyük fel a síkon az *A* és *B* pontokat úgy, hogy távolságuk 12 cm legyen, s jelöljük az *AB* szakasz felezőmerőlegesét *f*-fel. Hány olyan *P* pont van a síkon, amelyre

a) $PA = 10$ cm, $PB = 4$ cm; *b)* $PA = 8$ cm, $PB = 4$ cm; *c)* $PA = 16$ cm, $PB = 4$ cm;
d) $PA = 16$ cm, $Pf = 8$ cm; *e)* $PA = 14$ cm, $Pf = 8$ cm; *f)* $PA = 3$ cm, $Pf = 8$ cm;
g) $PA = 1$ cm, $Pf = 8$ cm; *h)* $PA = 8$ cm, $Pf = 3$ cm; *i)* $PA = 3$ cm, $Pf = 3$ cm?

Megoldás

A pontok száma:
a) 2; *b)* 1; *c)* 1; *d)* 4; *e)* 3; *f)* 2; *g)* 0; *h)* 2; *i)* 1.

Az *a)–c)* feladatokban két kör lehetséges metszéspontjainak, a *d)–i)* feladatokban pedig egy kör és két párhuzamos egyenes közös pontjainak a számát határozzuk meg.

SZÁMOKRÓL ÉS HALMAZOKRÓL (OLVASMÁNY)

1. E1 Adjuk meg a következő számokat közönséges tört alakban!

a) $A = 3,4\dot{2}$; *b)* $B = 5,8\overline{23}$; *c)* $C = 1,15\overline{854}$; *d)* $D = 1,32\dot{7}$; *e)* $E = 2,\dot{9}$.

Megoldás

a) $10A = 34,\dot{2}$; $9A = 30,8$; $A = \frac{30,8}{9} = \frac{308}{90}\left(= \frac{154}{45}\right)$.

b) $100B = 582,3\overline{23}$; $99B = 576,5$; $B = \frac{576,5}{99} = \frac{5765}{990}\left(= \frac{1153}{198}\right)$.

c) $1000C = 1158,54\overline{854}$; $999C = 1157,39$; $C = \frac{1157,39}{999} = \frac{115\,739}{99\,900}$.

d) $D = \frac{1195}{900}\left(= \frac{239}{180}\right)$.

e) $E = 3 = \frac{3}{1}$.

2. E1 Hány valódi részhalmaza van a következő halmazoknak?
A = {legfeljebb kétjegyű, 20-szal osztható természetes számok};
$B = \{1; 2; 7; 11; 12; 15; -3,2; a\}$;
$C = \{23; 25; 27; \ldots ; 77\}$.

Megoldás

$|A| = 5$, $|B| = 8$, $|C| = 28$. A valódi részhalmazok száma $2^5 - 1 = 31$; $2^8 - 1 = 255$; illetve $2^{28} - 1$.

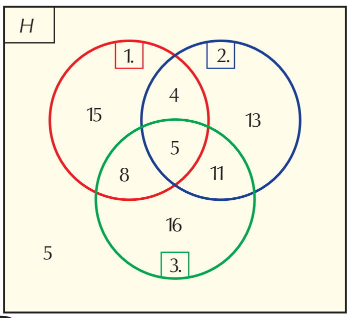
3. E1 Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely
a) páros vagy 5-tel kezdődik;
b) van benne 0 és 1 számjegy is?

Megoldás

a) Az 1000, 1001, 1002, …, 9999 számok között 4500 darab páros van (a számok fele), és 1000 darab, amelyik 5-össel kezdődik. Az 5-össel kezdődő páros számok darabszáma 500. A szitaformula alapján az eredmény: $4500 + 1000 - 500 = 5000$.

b) Nincs benne 0: $9^4 = 6561$ darab;
nincs benne 1: $8 \cdot 9^3 = 5832$ darab (első helyre nem kerülhet 0);
nincs benne sem 0, sem 1: $8^4 = 4096$ darab.
Eredmény: $9000 - 6561 - 5832 + 4096 = 703$.

4. E1 Egy városi fizikaversenyen három feladatot tűztek ki. A 77 induló közül az első feladatot 32-en, a másodikat 33-an, a harmadikat 40-en oldották meg hibátlanul. Az első és második feladatra 9, a második és harmadik feladatra 16, az első és harmadik feladatra 13 tanuló adott helyes megoldást. Mindhárom feladat megoldása 5 diáknak sikerült. Hányan nem tudtak egyetlen feladatot sem megoldani?



1. megoldás:

Az első, második és harmadik feladatokat megoldókat egy-egy halmazba soroljuk. Elkészítjük a három halmaz Venn-diagramját úgy, hogy belülről (a három halmaz közös metszetétől) kifelé haladva, az egyes tartományokba az elemszámokat írjuk. (H a versenyen indult tanulók alaphalmaza.)

A három halmaz uniója 72 elemű, így 5 tanuló nem tudott megoldani egyetlen feladatot sem.

2. megoldás:

Az $|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$ szitaformulát alkalmazzuk. Ez alapján $|A\cup B\cup C| = 32 + 33 + 40 - 9 - 16 - 13 + 5 = 72$, s innen $|H| - 72 =$ $= 5$ az eredmény.

Ha tudjuk, hogy van megoldás, akkor készen vagyunk. Egyébként az 1. megoldáshoz hasonló módon meg kell bizonyosodnunk arról, hogy a feltételeknek megfelelő halmazok valóban léteznek.

5. E1 A $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ halmaznak hány olyan részhalmaza van, amelynek eleme
a) az 1 és a 2;
b) az 1 vagy a 2?

Megoldás

a) Az 1 és 2 mellé a maradék 6 elemből alkotott tetszőleges részhalmazt választhatunk ki. Eredmény: $2^6 = 64$.
b) Az 1 eleme $2^7 = 128$ részhalmaznak; a 2 szintén 128-nak; az 1 és a 2 pedig 64-nek. A szitaformula alapján az eredmény: $128 + 128 - 64 = 192$.

II. GEOMETRIA – SOKSZÖGEK

8–9. A HÁROMSZÖGEKRE VONATKOZÓ ISMERETEK

1. K1 Létezik-e olyan háromszög, amelyben az oldalak
a) 33, 66, 35;
b) 33, 66, 30;
c) 2008, 2010, 3;
d) x, $2x$, $3x$, $(x > 0)$;
e) $2a$, $3a$, $4a$. $(a > 0)$?

Megoldás

A háromszög-egyenlőtlenség *a; c; e*-re teljesül, így ezek a háromszögek léteznek, a többi esetben nincs háromszög.

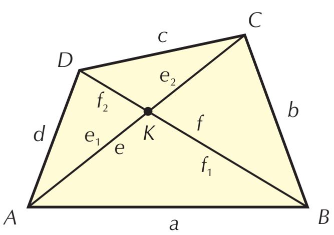
2. K1 Mekkora lehet a háromszög harmadik oldala, ha két oldala
a) 10 cm és 25 cm;
b) 0,5 m és 150 mm;
c) 10 dm és 100 cm?

Megoldás

a) 15 cm < harmadik oldal < 35 cm;
b) 350 mm < harmadik oldal < 650 mm;
c) harmadik oldal < 200 cm.

3. E1 Bizonyítsuk be, hogy minden konvex négyszögben az átlók hosszának összege nagyobb, mint a négyszög kerületének fele, de kisebb, mint a négyszög kerülete!

Megoldás



Jelölje a négyszög oldalait *a, b, c, d*. Osszuk az *e* és *f* átlókkal a négyszöget négy háromszögre. Legyen az átlók metszéspontja *K*. Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget az *ABC, ABD, ACD* és a *BCD* háromszögekre. Például: $b + a > e$. A négy egyenlőtlenség összeadásából adódik, hogy $2 \cdot (a + b + c + d) > 2(e + f)$, ahonnan $k > (e + f)$. Az egyenlőtlenség másik oldalának igazolásához jelölje az *AK, KC, BK* és *KD* szakaszokat e_1, e_2, f_1, f_2. Most az *ABK, BKC, CDK,* és *ADK* háromszögekre kell felírni a háromszög-egyenlőtlenséget. Például: $f_1 + e_1 > a$ stb. A négy egyenlőtlenség összeadásából adódik, hogy $2(e + f) > k$, ahonnan $(e + f) > \frac{k}{2}$.

4. K1 Létezik-e olyan háromszög, amelyben az oldalak aránya
a) 2 : 3 : 4;
b) 2 : 4 : 6?

Megoldás

a) van; *b)* nincs.

5. K1 Létezik-e olyan háromszög, amelyben a szögek aránya
a) 2 : 3 : 4;
b) 2 : 4 : 6;
c) 2 : 7 : 27?
Ha igen, határozzuk meg a szögeit!

Megoldás

a) 180°-ot 2 + 3 + 4 = 9 részre kell osztani, ebből az egyik szög 2 rész, a másik 3 rész, a harmadik 4 rész. Tehát a szögek: 40°; 60°; 80°.
b) 30°; 60°; 90°.
c) 10°; 35°; 135°.

6. K1 Mekkorák a derékszögű háromszög szögei, ha egyik külső szöge
a) 120°;
b) 108°;
c) 90°;
d) 60°?

Megoldás

a) 60°; 30°; 90°;
b) 72°; 18°; 90°;
c) 90° és a másik kettő bármekkora szög lehet, ha az összegük 90°;
d) Ez lehetetlen, mert a 60° melletti belső szög 120° lenne, de egy derékszögű háromszögben nincs tompaszög.

7. E1 Egy egyenlő szárú háromszög egyik belső és egyik külső szögének összege 108°. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei?

Megoldás

Itt a belső és külső szög nem lehet egymás mellett, mert azok összege 180°.
I. Egy alapszöghöz adhattuk hozzá a szárszög külső szögét. Ebben az esetben a külső szög egyenlő a nem mellette fekvő két alapszög összegével. Ezért $3\alpha = 108^\circ$, $\alpha = 36^\circ$, ahol α az alapszöget jelöli. Innen a szárszögre 108° adódik.

II. A szárszöghöz adhattuk hozzá az alapszög külső szögét. Ebben az esetben a külső szög egy alapszög és a szárszög összege, tehát ha α az alapszöget jelöli, akkor $\alpha + 2\beta = 108^\circ$. A háromszög szögösszege miatt $2\alpha + \beta = 180^\circ$. Az egyenletrendszer megoldása $\alpha = 84^\circ$; $\beta = 12^\circ$.

10–11. PITAGORASZ-TÉTEL

1. K1 A következő három szám lehet-e egy derékszögű háromszög három oldala hosszának a mérőszáma?

a) $4, \quad 8, \quad \sqrt{80}$;

b) $\sqrt{3}, \quad \sqrt{8}, \quad \sqrt{5}$;

c) $7, \quad 24, \quad 25$;

d) $12, \quad 16, \quad 21$;

e) $a\sqrt{2}, \quad a, \quad a$ $(a > 0)$.

Megoldás

a) $4, \quad 8, \quad \sqrt{80}$ derékszögű;

b) $\sqrt{3}, \quad \sqrt{8}, \quad \sqrt{5}$ derékszögű;

c) $7, \quad 24, \quad 25$ derékszögű;

d) Nem derékszögű;

e) $a\sqrt{2}, \quad a, \quad a$ derékszögű.

2. K2 Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alapja 2 cm-rel hosszabb a száránál. Mekkora a kerülete?

Megoldás

Az egyenlő szárú derékszögű háromszög alapja $a\sqrt{2}$, ha a szára a. Tehát $a\sqrt{2} = a + 2$, ahonnan $a = \dfrac{2}{\sqrt{2}-1} = 2\left(\sqrt{2}+1\right)$, ahonnan $k = a\left(2+\sqrt{2}\right) = 2\left(\sqrt{2}+1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$.

3. K2 Az egyenlő oldalú háromszög kerülete 6 cm. Mekkora a területe?

Megoldás:

Az egyenlő oldalú háromszög oldala tehát $a = 2$ cm. A szabályos háromszög magassága az oldal $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$-szerese, ahogy az a fél szabályos háromszögre felírt Pitagorasz-tételből kiszámolható, így a területe a következő képlettel számolható: $T = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Jelen esetben $T = \sqrt{3}$ cm^2.

4. K1 Egy 60°-os szög szárait érinti egy 5 cm sugarú kör. Milyen távol van a szög csúcsától az érintési pont? A kör a szögfelezőt két pontban metszi. Milyen távol van a szög csúcsától a két metszéspont?

Megoldás

A szögszár, mint érintő, merőleges az érintési pontba húzott sugárra. A kör középpontja rajta van a szögfelezőn. Ezért a szög csúcsa, az érintési pont és a kör középpontja 60°–30°-os derékszögű háromszöget alkot. Tehát az érintési pont a szög csúcsától $5\sqrt{3}$ távolságra van. A két metszéspont a szög csúcsától 5 cm és 15 cm távolságra van.

5. K2 Egy téglalap egyik oldala $AB = 8$ cm, a másik oldala $BC = 4$ cm. Az AB oldalon az A ponttól milyen messze van az a pont, amelyik egyenlő távol van A-tól és C-től?

Megoldás

Jelölje az AB oldalon P a keresett pontot. Mivel $AP = CP$, a PBC háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt $PC^2 = 4^2 + (8 - PC)^2$, ahonnan $PC = 5$ cm. A keresett pont tehát A-tól 5 cm-re van az AB oldalon.

6. K2 Egy téglalap egyik oldalánál a másik oldala 3 cm-rel kisebb, az átlója 3 cm-rel nagyobb. Mekkorák az oldalak?

Megoldás

Legyenek a téglalap csúcsai *ABCD*. Az *ABC* háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt $a^2 + (a - 3)^2 = (a + 3)^2$. A zárójelben álló kifejezéseket négyzetre emelve és az egyenletet rendezve $a = 12$ cm adódik. A másik oldal 9 cm.

7. K2 Határozzuk meg az 5 cm sugarú körbe írt szabályos háromszög oldalának hosszát!

Megoldás

Ha meghúzzuk a szabályos háromszög két magasságát, a metszéspontjuk, az egyik csúcs és a magasság talppontja 60°–30°-os derékszögű háromszöget alkot, amelynek átfogója 5 cm. Az oldal fele $\frac{5\sqrt{3}}{2}$, tehát az oldal $5\sqrt{3}$.

8. K1 Határozzuk meg az 5 cm sugarú kör köré írt szabályos háromszög oldalának hosszát!

Megoldás

A feladat megoldásához használjuk fel a 4. feladat megoldását. A 60°-os szög csúcsától távolabbi metszéspontnak a csúcstól való távolsága a keresett szabályos háromszög magassága, amiről már tudjuk, hogy 15 cm. Az oldal és a magasság összefüggését felírva $15 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, ahonnan $a = 10\sqrt{3}$.

9. K1 Az egységnyi területű rombusz egyik szöge 120°-os. Mekkora az oldala?

Megoldás

A rombusz másik szöge 60°-os. A rombuszt a 120°-os szögéből kiinduló átlója két szabályos háromszögre bontja. Már láttuk, hogy az *a* oldalú szabályos háromszög területe $T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, ennek kétszerese a rombusz területe, ami 1. Innen $1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, ahonnan $a^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $a = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$.

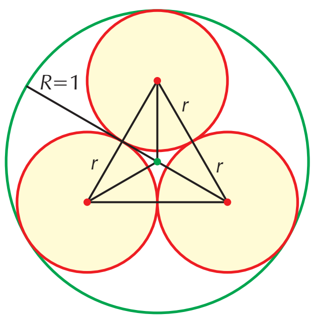
10. K2 Mekkora távolságra lehet egymástól egy 6 cm-es és egy 8 cm-es húr egy 5 cm sugarú körben?

Megoldás

A körben vegyük fel a 8 cm hosszú húrt. A 6 cm-es húrt ezután kétféleképpen lehet elhelyezni: vagy elválasztja a két húrt a kör középpontja, vagy nem. A húr felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján. A húrnak a középponttól való távolságának négyzetét ezért úgy kapjuk meg, hogy a sugár négyzetéből kivonjuk a húr hossza felének négyzetét. A 8 cm-es húr a középponttól 3 cm-re, a 6 cm-es húr 4 cm-re van. A kettő távolsága így 7 cm vagy 1 cm lehet.

11. E1 Egységsugarú körbe írjunk három egyenlő sugarú kört, amelyek egymást és az egységkört is érintik. Mekkora a beírt körök sugara?

Megoldás



Jelöljük a keresett körsugarakat *r*-rel. Szimmetria miatt a beírt körök középpontjai olyan szabályos háromszöget alkotnak, amelynek oldala a beírt körök átmérője. A szabályos háromszög középpontja az egységkör középpontja. Az egységkör középpontja és két kiskör középpontja 120°-os szárszögű egyenlő szárú háromszöget alkot, melynek szárai $(1 - r)$ hosszúak. Az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságát behúzva felírhatjuk a 60°–30°-os derékszögű háromszögre, hogy $r = (1 - r)\frac{\sqrt{3}}{2}$, ahonnan $r(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$, így $r = 2\sqrt{3} - 3$.

12. E2 Bizonyítsuk be, hogy ha egy téglatest egy csúcsba futó éleinek aránya 2 : 5 : 14, akkor a testátló és az élek hosszának aránya racionális!

Megoldás

A három egy csúcsba futó él tehát $2x$; $5x$; $14x$. A téglatest testátlóját a kockáéhoz hasonlóan lehet kiszámítani, és azt kaphatjuk, hogy a téglatest testátlójának négyzete egyenlő az egy csúcsba futó élek négyzetösszegével. Tehát $t^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (2x)^2 + (5x)^2 + (14x)^2 = 225x^2$, ahonnan $t = 15x$, ami állításunkat igazolja.

12–13. A HÁROMSZÖGEK NEVEZETES PONTJAI, VONALAI

1. K1 Válasszuk ki az alábbi állítások közül az igazakat! A válaszokat indokoljuk!
A háromszög köré írt kör középpontja
a) van olyan háromszög, amiben középvonalra esik;
b) mindig rajta van egy magasságon;
c) mindig a háromszög belső pontja;
d) van olyan háromszög, amiben rajta van valamelyik oldalfelező merőlegesen.

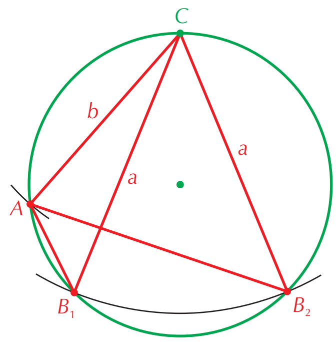
Megoldás

a) Igaz, például a derékszögű háromszög.
b) Hamis.
c) Hamis, például a tompaszögű háromszög.
d) Igaz, minden háromszögben az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.

2. K2 Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és a körülírt kör sugara! Hány megoldás van?

Megoldás

Vegyük fel az adott sugarú kört, és tetszőleges C pontjából mint középpontból húzzunk kört az egyik oldallal mint sugárral. Ez kimetszi a háromszög köré írt körből az oldal másik végpontját. A C csúcs körül a másik oldalhosszal mint sugárral húzott kör a háromszög köré írt kört két pontban metszi, ha a hosszabb oldal is kisebb, mint a háromszög köré írt kör átmérője. Egy megoldás van, ha egyenlő vele, és nincs megoldás, ha a hosszabb oldal nagyobb az átmérőnél. Egy megoldás van akkor is, ha a két oldal egyenlő, de kisebb az átmérőnél.



Megjegyzés: Szerkesztéskor az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőknek.

3. K1 Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a hozzá tartozó magassága és a körülírt kör sugara!

Megoldás

Vegyük fel a kört, és tetszőleges pontjából, mint középpontból, húzzunk kört az adott oldallal mint sugárral. Ez kimetszi a háromszög köré írt körből az oldal másik végpontját. Az oldalhoz tartozó magasság a harmadik csúcs számára egy párhuzamos egyenespárt ad az oldalegyenestől magasságnyi távolságra. A háromszög köré írt kör és az egyenespár metszéspontjai a háromszög harmadik csúcsa. Lehet a feladatnak 0; 1; vagy 2 nem egybevágó megoldása az adatoktól függően.

4. K1 Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a körülírt kör sugara és az adott oldalon fekvő egyik szög!

Megoldás

Vegyük fel a kört, és tetszőleges pontjából mint középpontból húzzunk kört az adott oldallal mint sugárral. Ez kimetszi a háromszög köré írt körből az oldal másik végpontját. Mérjük ezután az oldalra a rajta fekvő szöget, ez a félegyenes kimetszi a harmadik csúcsot a körből. Ha a szöget mindkét irányban rá tudjuk mérni úgy, hogy a félegyenes messe a kört, két megoldást is kaphatunk, ennek feltételét most tovább nem vizsgáljuk.

5. E1 Bontsunk fel egy háromszöget három egyenlő szárú háromszögre!

Megoldás

A kívánt felbontást kapjuk, ha a háromszög csúcsait a körülírt kör középpontjával kötjük össze.

6. K1 Az *ABC* háromszög beírt körének középpontja *O*. Az $AOB\sphericalangle = 150°$. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög tompaszögű!

Megoldás

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 180° - 150° = 30°$. Innen $\gamma = 120°$.

7. K1 Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a beírt kör sugara!

Megoldás

Az alapot felvéve, az alap *F* felezőpontjában állított merőlegesre rámérjük a kör sugarát. Ez a beírt kör *K* középpontja. A kör tehát megszerkeszthető. Azután az alap végpontjait összekötve *K*-val a belső szögfelezőkhöz jutunk, amelyekre tükrözve az alap egyenesét, a szárak egyeneseihez jutunk. Ezek metszéspontja pedig a harmadik csúcs. Megoldhatóság feltétele, hogy az alap nagyobb legyen a beírt kör átmérőjénél.

8. K1 Válasszuk ki az alábbi állítások közül az igazakat! A válaszokat indokoljuk!
A háromszögbe írt kör középpontja
a) mindig rajta van egy magasságon;
b) mindig a háromszög belső pontja;
c) nincs olyan háromszög, ahol egybeesik a háromszög köré írt kör középpontjával.

Megoldás

a) Hamis, például a 30°–60°–90°-os háromszög derékszögű csúcsából induló magasság és szögfelező nem esik egybe.
b) Igaz, mert a belső szögfelezők metszéspontja.
c) Hamis, szabályos háromszögnél egybeesik.

9. E1 Mekkorák a háromszög külső szögfelezői által alkotott háromszög szögei?

Megoldás

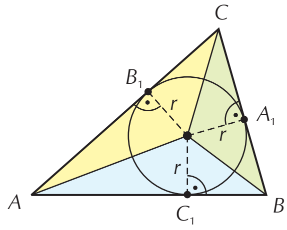
A háromszög külső és belső szögfelezője merőleges egymásra, ezért a háromszög *A* és *B* csúcsa és az *A* és *B* csúcsból induló külső szögfelezők metszéspontja által alkotott háromszög két szöge $90° - \frac{\alpha}{2}$; $90° - \frac{\beta}{2}$.

Az *A* és *B* csúcsokból induló külső szögfelezők szöge tehát $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

A HÁROMSZÖGEK OLDALAIT ÉRINTŐ KÖRÖK (OLVASMÁNY)

1. E1 Határozzuk meg a háromszögbe írt kör sugarát az oldalak segítségével!
(Segítség: Írjuk fel az *ABC* háromszög területét az *AOB*, *BOC*, *AOC* területek összegeként!)

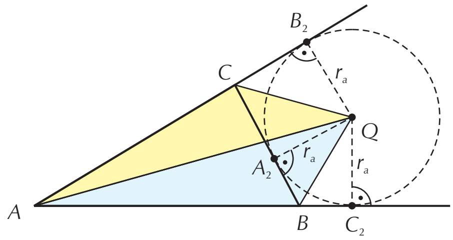
Megoldás



Az *AO*, *BO*, *CO* szakaszok behúzásával az *ABC* háromszöget három részháromszögre bontjuk fel. Ezek területösszege az eredeti háromszög területével egyenlő: $t_{ABC} = t_{ABO} + t_{BCO} + t_{ACO}$. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért $OC_1 = r$ az *ABO* háromszög *AB* oldalához tartozó magasság. Az *ABO* háromszög területe $t_{ABO} = \frac{AB \cdot OC_1}{2} = \frac{c \cdot r}{2}$. A másik két részháromszögre is felírhatjuk a szimmetrikus kifejezéseket, ezért $t_{ABC} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = r \cdot \left(\frac{a+b+c}{2}\right) = r \cdot s$. Ha az *ABC* háromszög területét *t*-vel jelöljük, akkor a keresett összefüggés: $r = \frac{t}{s}$. (A *t* terület már kifejezhető az oldalakkal, a Hérón-képlet felhasználásával.)

2. E1 Határozzuk meg a háromszög oldalaihoz írt körök sugarát az oldalak segítségével!
(Hasonlóan: $T_{ABC} = T_{ABQ} + T_{ACQ} - T_{BCQ}$).

Megoldás



Az előző példa megoldási módszerét követjük.
Az *AQ*, *BQ*, *CQ* szakaszok behúzásával az *ABQ*, *BCQ* és *ACQ* háromszögeket kapjuk. Az *ABC* háromszög területe $t_{ABC} = t_{ABQ} + t_{ACQ} - t_{BCQ}$. A megfelelő háromszögekben QC_2, QB_2 és QA_2 magasságok, hosszuk egyenlő: r_a. (Mindegyik a hozzáírt kör sugara.) Ez alapján

$$t_{ABC} = \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_a}{2} + \frac{a \cdot r_a}{2} = r_a \cdot \left(\frac{b+c-a}{2}\right) = r_a \cdot \left(\frac{2s-2a}{2}\right) = r_a \cdot (s-a).$$

Ha az *ABC* háromszög területét *t*-vel jelöljük, akkor a keresett összefüggés: $r_a = \frac{t}{s-a}$. (A *t* terület már kifejezhető az oldalakkal, a Hérón-képlet alapján.)

Szimmetriaokok miatt a háromszög *b* és *c* oldalaihoz írt körök sugara $r_b = \frac{t}{s-b}$, illetve $r_c = \frac{t}{s-c}$.

14. NÉGYSZÖGEK ÁTTEKINTÉSE, OSZTÁLYOZÁSA

1. K1 Az alábbi állítások közül melyek igazak és miért?

a) Minden téglalap trapéz.
b) Van olyan deltoid, ami paralelogramma.
c) Minden trapéz konvex.
d) Ha egy négyszögben van két egyenlő szög, akkor paralelogramma.
e) Ha egy paralelogrammának van szimmetriatengelye, akkor az téglalap.
f) Ha egy négyszögben van két derékszög, akkor az még lehet, hogy nem trapéz.

Megoldás

a) Igaz, van párhuzamos oldalpárja.
b) Igaz, például a rombusz.
c) Igaz, minden szöge kisebb 180°-nál.
d) Hamis, például a húrtrapéz.
e) Hamis, például a rombusz.
f) Igaz, például deltoid is lehet, de még ez sem biztos.

2. K2 Egy derékszögű trapéz három oldalának hossza x, x és $2x$. Mekkorák lehetnek a szögei és a negyedik oldala? $(x > 0)$

Megoldás

Három lehetőség van.
Lehet téglalap, minden szöge derékszög, és a negyedik oldal hossza $2x$.
Lehet olyan derékszögű trapéz, melynek két alapja x *és* $2x$, és a magassága is x. Ennek szögei 90°, 90°, 45°, 135°. A negyedik oldala $x\sqrt{2}$ hosszú.
Lehet olyan derékszögű trapéz, melynek egyik alapja és a magassága x, és a másik szára $2x$. Ennek szögei 90°,90°, 30°, 150°. A negyedik oldala $x\sqrt{3}+x$.

3. E1 Egy derékszögű trapézt az egyik átlója két egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontja. Fejezzük ki a trapéz oldalait a derékszögű szár hosszának függvényében!

Megoldás

Lehet négyzet, minden szöge derékszög, és minden oldala egyenlő a derékszögű szár hosszával.
Lehet olyan derékszögű trapéz, melynek rövidebb alapja egyenlő a derékszögű szárral, hosszabb alapja ennek kétszerese. A nem derékszögű szár hossza a derékszögű szár $\sqrt{2}$-szöröse.

15. A SOKSZÖGEKRŐL

1. K1 Hány átlója van egy konvex

a) 5 szögnek;
b) 12 szögnek;
c) 29 szögnek?

Számítsuk ki a sokszögek belső szögeinek összegét is!

Megoldás

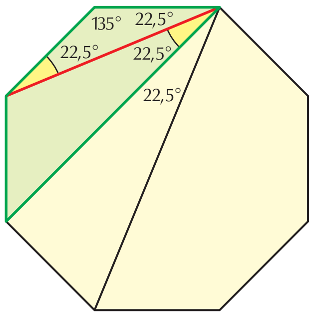
a) 5 szögnek	5 átlója van.	A belső szögek összege 540°.
b) 12 szögnek	54 átlója van.	A belső szögek összege 1800°.
c) 29 szögnek	377 átlója van.	A belső szögek összege 4860°.

2. K1 Egy szabályos hatszög csúcsai közül hagyjunk el kettőt. Milyen négyszögek keletkezhetnek? Határozzuk meg a keletkező négyszögek szögeit!

Megoldás

Keletkezhet téglalap, minden szöge 90°.
Keletkezhet szimmetrikus trapéz, melynek szögei 60°, 60°, 120°, 120°.
Keletkezhet deltoid, melynek szögei 60°, 120°, 90°, 90°.

3. K1 Mekkora szöget zárnak be egy szabályos nyolcszög egy csúcsból induló átlói?



Megoldás

A tengelyes szimmetria miatt csak három szöget kell megadni. A szabályos nyolcszög minden belső szöge 135°-os. A legrövidebb átló az oldallal 22,5°-os szöget zár be. A következő átló egy trapézt vág le, ezért ennek szöge a legrövidebb átlóval szintén 22,5°, mert ez az oldallal bezárt szögnek váltószöge. Végül a leghosszabb átló felezi a szabályos nyolcszög belső szögét, így az oldallal bezárt szög 67,5°. Ebből levonva az eddigi 45°-ot, a harmadik szögre is 22,5° marad.

4. K1 Egy szabályos sokszögnek 54 átlója van. Mekkora a sokszög egy szöge? Van-e a sokszögnek szimmetria-középpontja?

Megoldás

$\frac{n(n-3)}{2} = 54$. Kettővel beszorozva azt kapjuk, hogy a 108-at kell két természetes szám szorzatára bontani úgy, hogy az egyik tényező 3-mal nagyobb, mint a másik. Ennek a $9 \cdot 12 = 108$ szorzat tesz eleget. A szabályos sokszög tehát 12 oldalú, így van szimmetria-középpontja. A szabályos 12 szög minden szöge 150°.

5. K1 Hány oldala van annak a konvex sokszögnek, amelyre igaz, hogy belső szögei összegéhez hozzáadva egyik külső szögét 1500°-ot kapunk?

Megoldás

Konvex sokszög belső szöge pozitív, de kisebb mint 180°, ezért a külső szögére is ez igaz.
$1500° = 8 \cdot 180° + 60°$, tehát a sokszög 10 oldalú.

III. ALGEBRA

16. MŰVELETEK RACIONÁLIS SZÁMKÖRBEN

1. K1 Számítsuk ki az alábbi műveletsorok eredményét!

a) $5 + 3 \cdot 8 - 4 : 2$; **Megoldás:** 27;

b) $3 - 24 : 8 + 25 \cdot 4 - 10^2$; **Megoldás:** 0;

c) $0{,}24 : 2^3 - 0{,}03 + 2{,}5 \cdot 0{,}4 + 3^2$; **Megoldás:** 10;

d) $(4126 - 794) \cdot 3$; **Megoldás:** 9996;

e) $76 + 24 : 4$; **Megoldás:** 82;

f) $(76 + 24) : 4$; **Megoldás:** 25;

g) $126 + 58 - 12 : 4$; **Megoldás:** 181;

h) $56 - 123 + (4 + 28) : (-20)$. **Megoldás:** –68,6.

2. K1 Keressünk a különbözőképpen megadott számok között egyenlőket!

a) $(3 \cdot 2)^2$; **Megoldás:** 36;

b) $3 \cdot 9 - 3^2$; **Megoldás:** 18;

c) $(2^4 - 2^3 : 2) \cdot (4^2 - 2^4)$; **Megoldás:** 0;

d) $3 \cdot (9 - 3^2)$; **Megoldás:** 0;

e) $3^2 \cdot 2$; **Megoldás:** 18;

f) $(2^3 + 3 - 2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 2)^2$; **Megoldás:** 48;

g) $3 \cdot 2^2$; **Megoldás:** 12;

h) $3^2 \cdot 2 - 3 \cdot 2$; **Megoldás:** 12;

i) $3 \cdot (3 \cdot 2 - 2)$; **Megoldás:** 12;

j) $10(11 - 8)^2 \cdot (1 + 3)^2$. **Megoldás:** 1440.

Egyenlők: $18 = B = E$; $0 = C = D$; $12 = G = H = I$.

3. K2 Műveletsort úgy készítettünk, hogy leírtuk a pozitív egész számokat 1-től 2008-ig egymás mellé, majd bármely két szomszédos szám közé +, vagy – jelet írtunk.
Számítsuk ki a műveletsor eredményét, ha
– mindenhova + jelet írtunk; **Megoldás:** 2 017 036;
– váltakozva írtunk + és – jelet, az első + jel volt! **Megoldás:** 1006;
Ötlet: A másodiktól kezdve 2-2 tag összege –1.

Váltakozva írtunk + és – jelet, az első – jel volt. **Megoldás:** –1004;
Ötlet: Az elsőtől kezdve két szomszédos összege: –1.

Váltakozva írtunk két + és egy – jelet, az első + jel volt. **Megoldás:** 671 007 + 1 = 671 008.
Ötlet: $1 + (2 + 3 - 4) + (5 + 6 - 7) + (8 + 9 - 10) + \ldots + (2006 + 2007 - 2008) =$
$= 1 + (1) + (4) + (7) + \ldots + (2005)$.

4. K1 Az alábbi törtek bővítése vagy egyszerűsítése során hibákat vétettünk. Keressük meg és jelöljük meg a helyesen elvégzett törtbővítést, illetve -egyszerűsítést! A rosszakat javítsuk ki! *Például* $\frac{3}{4} = \frac{5}{6}$ rossz (mert ha 2-vel bővítettünk, akkor $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$-ot kapunk).

a) $\frac{11}{44} = \frac{121}{1396}$; **Megoldás:** 11-gyel bővítve a helyes eredmény: $\frac{11}{44} = \frac{121}{484}$.

b) $\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; **Megoldás:** 2-vel bővítve: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, vagy 3-mal bővítve: $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.

c) $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$; **Megoldás:** Jó a bővítés.

d) $\frac{7}{5} = \frac{49}{25}$. **Megoldás:** 7-tel bővítve: $\frac{7}{5} = \frac{49}{35}$, vagy 5-tel bővítve: $\frac{7}{5} = \frac{35}{25}$.

5. Zsebszámológép használata nélkül döntsük el, hogy az alábbi két szám közül melyik nagyobb!

K2 *a)* $A = \frac{7}{9}$, $B = \frac{9}{11}$.

Megoldás

Mivel $1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$ és $1 - \frac{9}{11} = \frac{2}{11}$, ezért A < B.

Más módon: $A = \frac{7}{9} = \frac{77}{99} < \frac{9}{11} = \frac{81}{99} = B$.

K2 *b)* $C = \frac{99}{100}$, $D = \frac{100}{101}$.

Megoldás

Mivel $1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$ és $1 - \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$, ezért C < D.

Más módon: $C = \frac{9999}{10\,100} < \frac{100}{101} = \frac{10\,000}{10\,100} = D$.

E1 *c)* $E = \frac{2009}{2010}$, $F = \frac{2010}{2011}$.

Megoldás

Mivel $1 - \frac{2009}{2010} = \frac{1}{2010}$ és $1 - \frac{2010}{2011} = \frac{1}{2011}$, ezért $E < F$.

Más módon: $E = \frac{2009}{2010} = \frac{4\,040\,099}{4\,042\,110} < \frac{2010}{2011} = \frac{4\,040\,100}{4\,042\,110} = F$.

17. ÖSSZETETT MŰVELETEK RACIONÁLIS SZÁMKÖRBEN

1. K2 Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\frac{23}{4}\cdot\left(\frac{8}{12}-\frac{5}{6}+\frac{3}{18}\right):\frac{13}{7}=$ **Megoldás:** 0.

b) $\left(\frac{3}{4}-2\right)^2-\frac{18}{32}=$ **Megoldás:** 1.

c) $\left(\frac{3}{4}+7,5-\frac{5}{2}+0,25\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+4,3+\frac{3}{2}+\frac{7}{10}\right)=$ **Megoldás:** 36.

d) $\frac{\left(\frac{3}{2}+\frac{15}{4}\right)\cdot 8}{22-3\cdot 5}=$ **Megoldás:** 6.

2. K2 Határozzuk meg, hogy az alábbi műveletsorok eredménye melyik esetben lesz negatív egész szám!

a) $\left(\frac{3}{8}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right):\left(2\frac{1}{3}-\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\right)=$ **Megoldás:** $\frac{9}{8}$.

b) $\frac{3-\frac{1}{5}}{2+\frac{1}{3}}:\frac{\left(3\frac{1}{2}\right)^2-((-3)^2+1)}{\left(\frac{-3}{2}\right)^2}=$ **Megoldás:** $\frac{6}{5}$.

c) $\frac{\left(\frac{1}{6}+0,1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0,1+\frac{1}{15}\right)}{\left(0,5+\frac{1}{3}-0,25\right):\left(0,25-\frac{1}{6}\right)}=$ **Megoldás:** $\frac{1}{7}$.

d) $\left[\frac{\frac{4}{5}-\frac{2}{5}}{-\frac{7}{3}}:\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}\right]\cdot(-5)^2=$ **Megoldás:** $-\frac{6}{7}$.

e) $\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)=$ **Megoldás:** 2.

Ezen feladatok megoldásai közül egyik sem negatív egész szám.

18. A HATVÁNYOZÁS FOGALMÁNAK KITERJESZTÉSE

1. K1 Írjuk fel egyetlen szám hatványaként!

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} =$ **Megoldás:** 7^3.

b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} =$ **Megoldás:** $\left(\frac{4}{5}\right)^6$.

c) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) =$ **Megoldás:** $(-3)^5$.

d) $-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ **Megoldás:** $-(2^8)$.

e) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 =$ **Megoldás:** $(2 \cdot 3)^4 = 6^4$.

2. K1 Írjuk fel az alábbi hatványokat szorzat alakban, és számítsuk ki a hatványértékeket!

a) 3^3; 4^4; 5^3.

Megoldás: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$;
$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$;
$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

b) $(5-8)^4$; $(2^3 + 5^2)^2$; $(2^4 - 2 \cdot 7^0 \cdot 3)^5$.

Megoldás: $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$;
$33 \cdot 33 = 1089$;
$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$.

3. K2 Mi az utolsó számjegye az alábbi hatványértékeknek?

a) 2^5; 2^6; 2^7; 2^8; 2^{15}; 2^{28}; 2^{100}; 2^{2222}.

Megoldás

A hatványvégződések periodikusan ismétlődnek: 2, 4, 8, 6, 2, …
$2^5 = \ldots 2$; $2^6 = \ldots 4$; $2^7 = \ldots 8$; $2^8 = \ldots 6$; $2^{15} = \ldots 8$; $2^{28} = \ldots 6$; $2^{100} = \ldots 6$; $2^{2222} = \ldots 4$.

b) 3^{55}; 3^{200}; 3^{2010}; 23^{23}; 123^{251}.

Megoldás

A hatványvégződések periodikusan ismétlődnek: 3, 9, 7, 1, 3, …
$3^{55} = \ldots 7$; $3^{200} = \ldots 1$; $3^{2010} = \ldots 9$; $23^{23} = \ldots 7$; $123^{251} = \ldots 7$.

c) 27^{27}.

Megoldás

A hatványvégződések periodikusan ismétlődnek: 7, 9, 3, 1, 7, …
$27^{27} = \ldots 3$.

4. K1 Számítsuk ki következő hatványok értékét!

a) 2^{-5}; 4^{-3}; 5^{-2}; 10^{-1}; 10^{-4}.

Megoldás

$2^{-5} = \frac{1}{32}$; $4^{-3} = \frac{1}{64}$; $5^{-2} = \frac{1}{25}$; $10^{-1} = \frac{1}{10}$; $10^{-4} = \frac{1}{10\,000}$.

b) ; ; ; .

Megoldás

$\frac{1}{2^{-6}} = 64;\quad \frac{5}{5^{-4}} = 3125;\quad \frac{8}{5^{-3}} = 1000;\quad \frac{7}{4^{-2}} = 112.$

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2};\quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-5};\quad 0{,}2^{-2};\quad 0{,}1^{-5}.$

Megoldás

$\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = 49;\quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-5} = 3125;\quad 0{,}2^{-2} = 25;\quad 0{,}1^{-5} = 100\,000.$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2};\quad \left(\frac{16}{25}\right)^{-4};\quad \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}.$

Megoldás

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = 6{,}25;\quad \left(\frac{16}{25}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{4}\right)^{8} = \frac{390\,625}{65\,536};\quad \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}} = \frac{1}{8}.$

e) $\left(-\frac{6}{5}\right)^{-2};\quad -\left(\frac{3}{4}\right)^{-2};\quad -\frac{5^{-3}}{10};\quad \frac{\frac{2}{10^{-3}}}{\frac{10^{-2}}{4}};\quad \frac{5^{-4}}{4}.$

Megoldás

$\left(-\frac{6}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{36};\quad -\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = -\frac{16}{9};\quad -\frac{5^{-3}}{10} = -\frac{1}{1250};\quad \frac{\frac{2}{10^{-3}}}{\frac{10^{-2}}{4}} = 800\,000;\quad \frac{5^{-4}}{4} = \frac{1}{2500}.$

5. K1 Írjuk fel negatív kitevőjű hatványként az alábbi számokat!

a) $\frac{1}{2^5};\quad \frac{1}{3^8};\quad 25\cdot\frac{1}{5^5}.$

Megoldás

$\frac{1}{2^5} = 2^{-5};\quad \frac{1}{3^8} = 3^{-8};\quad 25\cdot\frac{1}{5^5} = 5^2\cdot 5^{-5} = 5^{-3}.$

b) $\frac{2}{32};\quad \frac{2}{250};\quad \frac{6}{162};\quad \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-5}}.$

Megoldás

$\frac{2}{32} = 2^{-4};\quad \frac{2}{250} = \frac{1}{125} = 5^{-3};\quad \frac{6}{162} = \frac{3}{81} = 3^1\cdot 3^{-4} = 3^{-3};\quad \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-5}} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}.$

c) $0{,}01;\quad 0{,}00001;\quad 0{,}0000001.$

Megoldás

$0{,}01 = 10^{-2};\quad 0{,}00001 = 10^{-5};\quad 0{,}0000001 = 10^{-7}.$

6. K2 Alakítsuk át a következő kifejezéseket úgy, hogy ne tartalmazzanak negatív kitevőt!

a) $(2x)^{-5}$; $\frac{1}{3}x^{-2}$; $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$; $\frac{1}{y^{-4}}$; $5x^{-3}$; $\frac{y^{-7}}{5^{-2}}$.

Megoldás: $(2x)^{-5} = \frac{1}{(2x)^5} \quad x \neq 0;$

$$\frac{1}{3}x^{-2} = \frac{1}{3x^2} \quad x \neq 0;$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2;$$

$$\frac{1}{y^{-4}} = y^4;$$

$$5x^{-3} = \frac{5}{x^3} \quad x \neq 0;$$

$$\frac{y^{-7}}{5^{-2}} = \frac{25}{y^7} \quad y \neq 0.$$

b) $5a^{-2} \cdot a^5$; $9^2 \cdot b^5 \cdot \left(\frac{3}{b}\right)^{-4}$; $\frac{16}{125} \cdot c^7 \cdot \frac{(2 \cdot c)^{-4}}{(5 \cdot c)^{-3}}$.

Megoldás: $5a^{-2} \cdot a^5 = 5a^3;$

$$9^2 \cdot b^5 \cdot \left(\frac{3}{b}\right)^{-4} = \frac{9^2 \cdot b^5 \cdot b^4}{3^4} = b^9;$$

$$\frac{16}{125} \cdot c^7 \cdot \frac{(2 \cdot c)^{-4}}{(5 \cdot c)^{-3}} = \frac{2^4 \cdot c^7 \cdot 5^3 \cdot c^3}{5^3 \cdot 2^4 \cdot c^4} = c^6.$$

c) $x \cdot \left(2x^{-2} + 4x^{-1}\right)$.

Megoldás: $x \cdot \left(2x^{-2} + 4x^{-1}\right) = 2x^{-1} + 4x^0 = \frac{2}{x} + 4, \quad x \neq 0.$

19. A HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI, A PERMANENCIAELV

1. K1 Végezzük el a következő műveleteket, és a végeredményt adjuk meg egyetlen szám hatványaként!

a) $3^5 \cdot (3^2)^4 \cdot 3^3$; **Megoldás:** 3^{16};

b) $\dfrac{(11^5)^3}{11^{18}}$; **Megoldás:** 11^{-3};

c) $\dfrac{(2^7)^4}{2^{12} \cdot 2^8 \cdot 2^9}$; **Megoldás:** $\dfrac{2^{28}}{2^{29}} = 2^{-1}$;

d) $\dfrac{2^{21}}{4^9}$; **Megoldás:** 2^3;

e) $\dfrac{3^{22} \cdot 9^3}{(9^2)^4 \cdot 3^{-7}}$. **Megoldás:** $\dfrac{3^{22} \cdot 3^6}{3^{16} \cdot 3^{-7}} = 3^{19}$.

2. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét!

K1 *a)* $2^4 \cdot 5^3$; **Megoldás:** 2000;

K1 *b)* $\dfrac{27^{11}}{9^{16}}$; **Megoldás:** $\dfrac{(3^3)^{11}}{(3^2)^{16}} = 3$;

K1 *c)* $\dfrac{5^7 + 5^6}{5^7}$; **Megoldás:** $\dfrac{6}{5}$;

K1 *d)* $\dfrac{3^{12} + 3^{13}}{9^5 + 3^{11}}$; **Megoldás:** $\dfrac{3^{12}(1+3)}{3^{10}(1+3)} = 9$;

K2 *e)* $\dfrac{2^{10} \cdot 5^{12} + 2^{12} \cdot 5^{10}}{10^{12}}$; **Megoldás:** $\dfrac{2^{10} \cdot 5^{10}(5^2 + 2^2)}{2^{12} \cdot 5^{12}} = \dfrac{29}{100}$;

K2 *f)* $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{105} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{110} \cdot \dfrac{1}{2^{108}}$. **Megoldás:** $\dfrac{2^{210} \cdot 3^{110}}{3^{105} \cdot 2^{110} \cdot 2^{108}} = \dfrac{3^5}{2^8} = \dfrac{243}{256}$.

3. K2 Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

a) $\dfrac{66^{50}}{11^{50} + (5^2 \cdot 121)^{25}} =$

Megoldás: $\dfrac{66^{50}}{11^{50} + (5^2 \cdot 121)^{25}} = \dfrac{6^{50} \cdot 11^{50}}{11^{50} + 5^{50} \cdot 11^{50}} = \dfrac{6^{50} \cdot 11^{50}}{11^{50} \cdot (1 + 5^{50})} = \dfrac{6^{50}}{1 + 5^{50}}$.

b) $\dfrac{5 \cdot 3^{81} + (3^5)^{16}}{(2^5 - 2^4) \cdot \dfrac{27^{27}}{3}} =$

Megoldás: $\dfrac{5 \cdot 3^{81} + (3^5)^{16}}{(2^5 - 2^4) \cdot \dfrac{27^{27}}{3}} = \dfrac{5 \cdot 3^{81} + 3^{80}}{16 \cdot \dfrac{3^{81}}{3}} = \dfrac{3^{80}(5 \cdot 3 + 1)}{16 \cdot 3^{80}} = 1$.

4. Tegyük ki a $<$; $>$; $=$ jelek valamelyikét úgy, hogy igaz állítások legyenek!

K2 *a)* $8^{25} \qquad 2^{34} \cdot 4^{13}$.

Megoldás: $8^{25} = 2^{75} \quad > \quad 2^{34} \cdot 4^{13} = 2^{60}$.

K2 *b)* $7^{15} \cdot 7^{10} \qquad 7^{150}$.

Megoldás: $7^{25} \quad < \quad 7^{150}$.

K2 *c)* $3^5 \cdot 3^8$ $\quad 3^2 \cdot 3^{10} + 2 \cdot 3^{12}$.

Megoldás: $3^{13} \quad = \quad 3^2 \cdot 3^{10} + 2 \cdot 3^{12} = 3^{12} + 2 \cdot 3^{12} = 3^{12}(1 + 2) = 3^{13}$.

K2 *d)* $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \quad \frac{2^6}{5}$.

Megoldás: $\frac{2^6}{5^6} \quad < \quad \frac{2^6}{5}$.

E1 *e)* $24^{46} \quad \frac{36^{36}}{4^{13}}$.

Megoldás: $(2^3 \cdot 3)^{46} = 2^{138} \cdot 3^{46} \qquad \frac{(2^2 \cdot 3^2)^{36}}{2^{26}}$;

$(2^{46} \cdot 3^{46}) \cdot 2^{92} \qquad (2^{46} \cdot 3^{46}) \cdot 3^{26}$;

$2^{92} = 4^{46} \quad > \quad 3^{26}$.

20. SZÁMOK NORMÁLALAKJA

1. K1 Írjuk fel a következő számokat normálalakban!

a) 618; 5437; 1008; –456 000; 1 000 000.

Megoldás

$618 = 6,18 \cdot 10^2$; $5437 = 5,437 \cdot 10^3$; $1008 = 1,008 \cdot 10^3$;

$-456\,000 = -4,56 \cdot 10^5$; $1\,000\,000 = 1 \cdot 10^6$.

b) 0,235; 0,0087; –0,000 301; 0,000 000 01; –0,0002.

Megoldás

$0,235 = 2,35 \cdot 10^{-1}$; $0,0087 = 8,7 \cdot 10^{-3}$; $-0,000\,301 = -3,01 \cdot 10^{-4}$;

$0,000\,000\,01 = 1 \cdot 10^{-8}$; $-0,0002 = -2 \cdot 10^{-4}$.

c) $\frac{60}{8}$; $\frac{4000}{25}$; $-\frac{6}{150}$; $\frac{1400}{3}$.

Megoldás

$\frac{60}{8} = 7,5 \cdot 10^0$; $\frac{4000}{25} = 1,6 \cdot 10^2$; $-\frac{6}{150} = -4 \cdot 10^{-2}$; $\frac{1400}{3} = 4,\dot{6} \cdot 10^2$.

2. K2 A hatványozás azonosságainak felhasználásával végezzük el az alábbi műveleteket, a végeredményt normálalakban adjuk meg!

a) $630\,000 \cdot (-120\,000\,000) =$ **Megoldás:** $-7,56 \cdot 10^{13}$.

b) $24\,000\,000^2 \cdot 480\,000\,000\,000 =$ **Megoldás:** $2,7648 \cdot 10^{26}$.

c) $\frac{5\,600\,000\,000^3}{700\,000\,000\,000^2} =$ **Megoldás:** $3,584 \cdot 10^5$.

d) $0,000\,000\,022\,41 \cdot 645\,000\,000\,000 =$ **Megoldás:** $1,445445 \cdot 10^4$.

e) $0,000\,000\,455 \cdot 0,000\,000\,642 \cdot 3\,650\,000\,000 =$ **Megoldás:** $1,0662015 \cdot 10^{-3}$.

3. Végezzük el a kijelölt műveleteket, és a végeredményt adjuk meg normálalakban!

K1 *a)* $3,5 \cdot 10^{-8} \cdot 2,5 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^3 =$ **Megoldás:** $3,5 \cdot 10^1$.

K1 *b)* $6,25 \cdot 10^{13} \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-8} =$ **Megoldás:** $1,25 \cdot 10^0$.

K1 *c)* $(1,8 \cdot 10^5)^2 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot (2,5 \cdot 10^{-3})^2 =$ **Megoldás:** $1,215 \cdot 10^0$.

K2 *d)* $\frac{6,3 \cdot 10^7 \cdot 8,4 \cdot 10^6}{(2,1 \cdot 10^{-10})^2} =$ **Megoldás:** $1,2 \cdot 10^{34}$.

K2 *e)* $\frac{4,5 \cdot 10^{-8} \cdot 7,2 \cdot 10^3}{2,25 \cdot 10^{-4} \cdot 3,6 \cdot 10^{-2}} =$ **Megoldás:** $4 \cdot 10^1$.

K1 *f)* $10^5 + 10^4 + 10^3 =$ **Megoldás:** $1,11 \cdot 10^5$.

K1 *g)* $2,5 \cdot 10^6 + 4,3 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^3 =$ **Megoldás:** $2,928 \cdot 10^6$.

K2 *h)* $6,8 \cdot 10^{-4} + 3,2 \cdot 10^{-5} - 3 \cdot 10^{-3} =$ **Megoldás:** $-2,288 \cdot 10^{-3}$.

Ellenőrizzük az eredményeket számológéppel!

4. K1 Hány molekula van 23,56 mol oxigénben, ha egy mol $6,02 \cdot 10^{23}$ db részecskét tartalmaz?

Megoldás

$N = 23,56 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}$ db $= 1,42 \cdot 10^{25}$ db részecske van 23,56 mol oxigénben.

5. K2 A fény sebessége 300 000 km/s. Számítsuk ki, hogy a fény mennyi idő alatt ér el a Naptól a lecke 1. példájában megadott bolygókig!

Megoldás

Felhasználjuk azt az ismeretet, hogy az idő kiszámítható a sebesség és s távolság ismeretében.

$t = \frac{s}{v}$, ahol t az idő, s a távolság (megtett út) és v a sebesség.

Merkúr: 58 000 000 km ≈ $5{,}79 \cdot 10^7$ km; $t = \frac{s}{v} \approx \frac{5{,}79 \cdot 10^7\ \text{km}}{3 \cdot 10^5\ \frac{\text{km}}{\text{sec}}} = 193$ sec;

Vénusz: 108 000 000 km ≈ $1{,}08 \cdot 10^8$ km; $t \approx 360$ sec;

Föld: 150 000 000 km ≈ $1{,}5 \cdot 10^8$ km; $t \approx 500$ sec ≈ 8,3 perc;

Mars: 228 000 000 km ≈ $2{,}28 \cdot 10^8$ km; $t \approx 760$ sec ≈ 12,7 perc;

Jupiter: 778 000 000 km ≈ $7{,}78 \cdot 10^8$ km; $t \approx 259$ sec ≈ 43,2 perc;

Szaturnusz: 1 426 000 000 km ≈ $1{,}426 \cdot 10^9$ km; $t \approx 477$ sec ≈ 79,4 perc = 1,32 h.

6. K2 A fényév az a távolság, amelyet a fény egy év alatt tesz meg. Vigyázat, a neve beugrató, mert a fényév nem idő-, hanem távolságegység!
Egy fényév hány km?

Megoldás

1 sec alatt 300 000 km-t tesz meg a fény.
1 év = 365 nap = 8760 h = $3{,}1536 \cdot 10^7$ sec.

$s = v \cdot t = 300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{sec}} \cdot 3{,}1536 \cdot 10^7\ \text{sec} \approx 9{,}46 \cdot 10^{12}$ km-t tesz meg a fény egy év alatt, tehát:

1 fényév ≈ $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.

7. K2 A Szíriusz a legfényesebb csillag az égbolton.

a) Hány km-re van a Földtől a Szíriusz, ha 1 085 000-szer távolabb áll tőlünk, mint a Nap?

Megoldás: A Nap–Föld távolság $1{,}50 \cdot 10^8$ km, így a Szíriusz–Föld távolság:
$1\,085\,000 \cdot 1{,}50 \cdot 10^8 \approx 1{,}63 \cdot 10^{14}$ km.

b) Hány év alatt ér ide a fény a Szíriuszról?

Megoldás: $t = \frac{s}{v} \approx \frac{1{,}63 \cdot 10^{14}\ \text{km}}{300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{sec}}} = 5{,}43 \cdot 10^8\ \text{sec} \approx 17{,}2$ év.

c) Hány fényévnyi távolságra van tőlünk a Szíriusz?

Megoldás: A Szíriusz 17,2 fényév távolságra van tőlünk.

8. K2 Az Amazonas átlagos vízhozama világelső, másodpercenként 220 millió liter vizet szállít.

a) Hány liter vizet szállít az Amazonas egy év alatt?

Megoldás: 1év = $3{,}1536 \cdot 10^7$ sec.
A vízhozam egy év alatt $2{,}2 \cdot 10^8 \cdot 3{,}1536 \cdot 10^7$ liter = $6{,}94 \cdot 10^{15}$ liter.

b) Hasonlítsuk össze, egy év alatt hányszor több vizet szállít az Amazonas, mint a Tisza! A Tisza vízhozama 4000 m³ másodpercenként.

Megoldás: $4000\ \text{m}^3 = 4\,000\,000$ liter = $4 \cdot 10^6$ liter. $\frac{220 \cdot 10^6\ \text{liter}}{4 \cdot 10^6\ \text{liter}} = 55$.
Az Amazonas 55-ször nagyobb vízhozamú.

A SZÁMOLÓGÉPEK SZÁMÁBRÁZOLÁSA (OLVASMÁNY)

1. K2 Melyik nagyobb, A_5 vagy B_5, ha $A_5 = \frac{222221}{222223}$ és $B_5 = \frac{333331}{333334}$?

Hasonlítsuk össze a megfelelő A_6 és B_6, A_7 és B_7, …, A_{1000} és B_{1000} értékeket is!

Megoldás

A nagyobb sorszámú törtek számológéppel már nem hasonlíthatók össze.

Jelöljük x-szel a $(k + 1)$ darab 1-esből álló 111…1 számot! Ekkor $A_k = \frac{2x-1}{2x+1}$, $B_k = \frac{3x-2}{3x+1}$. Mindkét törtet bővítve: $A_k = \frac{(2x-1)(3x+1)}{(2x+1)(3x+1)}$, $B_k = \frac{(3x-2)(2x+1)}{(3x+1)(2x+1)}$. A szorzások elvégzése után a két számláló $6x^2 - x - 1$, illetve $6x^2 - x - 2$ alakú. $A_k - B_k = \frac{1}{(2x+1)(3x+1)}$, tehát $A_k > B_k$.

2. K2 Gépünk szerint $\frac{1}{7}$ = .142857143. Írassuk ki a $.142857143 - \frac{1}{7}$ értéket! Milyen eredményt kapunk, s ezt hogyan magyarázhatjuk?

Megoldás

A kiírt érték nem nulla, hanem (az adott számológéptől függő) pozitív szám. Ennek az az oka, hogy a gép által az $\frac{1}{7}$ értékére kiírt .142857143 nem pontos, hanem (felfelé) kerekített szám.

3. K2 Anna gépének kijelzőjén a .333333333 érték szerepel. Ezt szorozza 3-mal, mire a gép válaszul kiírja az 1-et. Anna ezután beírja a .333333333 számot, s ezt újfent 3-mal szorozza. Most viszont eredményül a .999999999 számot kapja. Hogy lehetséges ez? A gép rossz, vagy Anna egy bűvészmutatványát láttuk?

Megoldás

Anna trükkje az, hogy először az 1/3 művelet (a gép által kiírt .333333333) értékét szorozta 3-mal, aminek eredménye 1 lett. Másodszor viszont a „normál” .333333333 háromszorosára természetesen .999999999-et kapott.

21. EGY- ÉS TÖBBVÁLTOZÓS ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK, HELYETTESÍTÉSI ÉRTÉK

1. K1 Matematikai tanulmányaink során hol találkoztunk a fejezet elején szereplő algebrai kifejezésekkel? Mit határozhatnak meg ezek a kifejezések? A betűk mely számhalmaz elemeit helyettesíthetik?

Megoldás

Több helyes válasz is elképzelhető.

abc: Például a téglatest térfogatának kiszámítása, élek: a, b, c, pozitív valós számok.

$100a + 10b + c$. Például a háromjegyű számok általános alakja tízes számrendszerben. A betűk: számjegyek.

kc: Két tetszőleges szám szorzata.

$4k + 3$: Például: Néggyel osztva 3 maradékot adó számok. $k \in \mathbf{N}^+$.

$r^2\pi m$: Például: A henger térfogata, r, m pozitív valós számok.

$2a + 2b$: Például: A téglalap kerülete, a, b pozitív számok.

$\frac{x+y}{2}$: Például: Két szám számtani közepe, x, y valós számok.

$\frac{1}{a+b+c}$: Például: Három szám összegének reciproka, $a + b + c \neq 0$, valós számok.

$\frac{s}{t}$: Például: A sebesség meghatározása, a megtett út, eltelt idő függvényében.

a^{2k+1}: Például: Páratlan egész kitevős hatvány, $a \in \mathbf{N}^+$, $k \in \mathbf{N}$.

$a_1 + (n-1)d$: Például: Számtani sorozat a_n tagja, a_1 és d valós számok, $n \in \mathbf{N}^+$.

2. K1 Értelmezzük a kifejezéseket a valós számok lehető legbővebb halmazán! Adjuk meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $(a-b+c)^3$; **Megoldás:** $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$.

b) $\frac{ax}{(b-2)(b+3)}$; **Megoldás:** $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R} \setminus \{2; -3\}$.

c) $\frac{s}{t}$; **Megoldás:** $s \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

d) $3k + 1$; **Megoldás:** $k \in \mathbf{R}$.

e) $(e-f)^m$. **Megoldás:** $e \in \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{N}^+$, ha $m \in \mathbf{Z}$, $m \leq 0 \Rightarrow e \neq f$.

3. K1 Számítsuk ki a kifejezések helyettesítési értékét! Mely számok nem tartoznak az értelmezési tartományba?

a) $a^2 - b^2$, ha $a = 15$, $b = 14$.

Megoldás: $a^2 - b^2 = 29$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$.

b) $\frac{2(x^2-y^2)}{x+y}$, ha $x = 2007$, $y = 7002$.

Megoldás: $\frac{2(x^2-y^2)}{x+y} = -9990$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $x \neq -y$.

4. K1 Írjunk fel egy-egy algebrai kifejezést a szövegnek megfelelően!

a) Havonta c Ft jövedelemből mennyi marad meg év végén, ha havi kiadásunk k Ft?

Megoldás: $12c - 12k = 12(c-k)$.

b) Az n szám 7-tel osztva 5-öt ad maradékul.

Megoldás: $n = 7k + 5$, $k \in \mathbf{Z}$, vagy $n = 7l - 2$, $l \in \mathbf{Z}$.

c) Az *f* számnál 15-tel kisebb szám négyzetének harmada.

Megoldás: $\frac{(f-15)^2}{3}$, $f \in \mathbf{R}$.

d) A *p* és *q* számok összegének reciproka.

Megoldás: $\frac{1}{p+q}$, $p \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{R}$, $p \neq -q$.

e) A *r* és *s* számok reciprokának összege.

Megoldás: $\frac{1}{r} + \frac{1}{s}$, $r \in \mathbf{R}$, $s \in \mathbf{R}$, $r \neq 0$, $s \neq 0$.

22. EGYNEMŰ KIFEJEZÉSEK SZORZÁSA, ÖSSZEVONÁSA, POLINOMOK

1. K1 Melyek az egynemű kifejezések a következő egytagú kifejezések között?

a) $-2ab^2$; $3{,}2ab$; $\frac{5}{6}a^2b$; $17ab$; $9a^2b$; $-7ab$; $\frac{9}{13}ab^2$; $-5a^2b$.

Megoldás: Egyneműek: $-2ab^2$, $\frac{9}{13}ab^2$.
Egyneműek: $3{,}2ab$, $17ab$, $-7ab$.
Egyneműek: $\frac{5}{6}a^2b$, $9a^2b$, $-5a^2b$.

b) $3x^2yz$; $-4xy^2z$; $5{,}3xyz$; $\frac{2{,}4xy^2z}{5}$; $7^2\cdot x^2yz$; $\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot xyz^2$; $-15x^2yz$;
$3xyz$; $\frac{-xyz^2}{3}$; $5xy^2z$; $-3{,}6xy^2z$.

Megoldás: Egyneműek: $3x^2yz$, $7^2\cdot x^2yz$, $-15x^2yz$.
Egyneműek: $-4xy^2z$, $\frac{2{,}4xy^2z}{5}$, $5xy^2z$, $-3{,}6xy^2z$.
Egyneműek: $5{,}3xyz$, $3xyz$.
Egyneműek: $\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot xyz^2$, $\frac{-xyz^2}{3}$.

2. K1 Válasszuk ki az alábbi kifejezések közül az egytagúakat! Határozzuk meg az egytagú kifejezések együtthatóját!

a) $2a+b$; $-5x^3$; $0{,}6x\cdot x$; $-\frac{1}{3}+y$; a^2-b^2.

Megoldás: Egytagú: $-5x^3$, együttható: -5.
Egytagú: $0{,}6x^2$, együttható: $0{,}6$.

b) $3a^2+b\cdot b$; $\frac{10}{4}xcyy$; $-x^3+y$; $-xyxy$; $5xy$.

Megoldás: Egytagú: $\frac{10}{4}xcyy$, együttható: $\frac{10}{4}$.
Egytagú: $-xyxy$, együttható: -1.
Egytagú: $5xy$, együttható: 5.

c) $ab+c$; $\frac{e\cdot f}{2}$; $2a+2b$; $3xxb+c^2$; $-3ab^2c$.

Megoldás: Egytagú: $\frac{e\cdot f}{2}$, együttható: $\frac{1}{2}$.
Egytagú: $-3ab^2c$, együttható: -3.

3. Végezzük el az alábbi egytagú kifejezések szorzását!

K1 a) $x^3\cdot x^5$; **Megoldás:** x^8.

K1 b) $5a^3\cdot 2a^2$; **Megoldás:** $10a^5$.

K1 c) $\frac{5}{3}y\cdot 3y^4$; **Megoldás:** $5y^5$.

K1 d) $\frac{24}{5}x^8\cdot\frac{5}{3}x^0$; **Megoldás:** $8x^8$.

K2 *e)* $(-4x^5)\cdot(-7x^4)(3x^3)$; **Megoldás:** $84x^{12}$.

K2 *f)* $(6a^2b)\cdot(-3a^3b^5)$; **Megoldás:** $-18a^5b^6$.

K2 *g)* $(-5bc^2)\cdot(4b^2c)$; **Megoldás:** $-20b^3c^3$.

K2 *h)* $\frac{21}{11}x^8y^4\cdot\frac{132}{9}x^5y^8$; **Megoldás:** $28x^{13}y^{12}$.

K2 *i)* $-2a^6\cdot 6a^4\cdot\left(-\frac{5}{24}a^3\right)$; **Megoldás:** $\frac{5}{2}a^{13}$.

K2 *j)* $4d^2e^3\cdot(-8e^2d^5)$; **Megoldás:** $-32e^5d^7$.

K2 *k)* $(-5x^n)\cdot\left(-\frac{2}{5}x^{n+3}\right)$; **Megoldás:** $2x^{2n+3}$.

K2 *l)* $(x^{2n-1})\cdot\left(-\frac{3}{4}x^{n+1}\right)$. **Megoldás:** $-\frac{3}{4}x^{3n}$.

4. K1 Végezzük el az összevonásokat a következő kifejezésekben!

a) $5x-4x-9x$; **Megoldás:** $-8x$.

b) $6a-(-12a)+21a-7a$; **Megoldás:** $32a$.

c) $11y^2-(-5y^2)-25y^2$; **Megoldás:** $-9y^2$.

d) $8xy-5xy+12xy$; **Megoldás:** $15xy$.

e) $1{,}4x^2z-3{,}6x^2z+5{,}7x^2z-(-6{,}4x^2z)$; **Megoldás:** $9{,}9x^2z$.

f) $15abaa-17a^3b-5a^2ab+21ba^3$; **Megoldás:** $14a^3b$.

g) $5a^3b^2+7b^2a^3-4a^2b^2a+3ab^2a^2+175ba^2ab$. **Megoldás:** $186a^3b^2$.

23. POLINOMOK FOKSZÁMA, EGYENLŐSÉGE, ZÉRUSHELYE

1. K1 Határozzuk meg a polinomok fokszámát!

a) $\frac{1}{7}a$; **Megoldás:** fokszám: 1.

b) $\frac{4x^3}{5}$; **Megoldás:** fokszám: 3.

c) $14a^5 + 7a^4 - a$; **Megoldás:** fokszám: 5.

d) $p^3q^4 + 3p^5 - 4q^2$. **Megoldás:** fokszám: 7.

2. K1 Keressük meg a polinomok zérushelyeit!

a) $a(x) = 4 - 3x$; **Megoldás:** a polinom zérushelye: $\frac{4}{3}$.

b) $b(x) = \frac{2}{5}x$; **Megoldás:** a polinom zérushelye: 0.

c) $c(x) = x^2 - 1$. **Megoldás:** a polinom zérushelyei: 1; –1.

3. K1 Határozzuk meg az alábbi polinomokban a hiányzó együtthatókat úgy, hogy a két polinom egyenlő legyen!

a) $x^2 + 3x - 5 = 3x - 5 - ax^2$; $a = .$

Megoldás: $a = -1$.

b) $-3x^4 + 6x^3 - 4x + 1 = 6x^3 - ax^4 + bx^2 - 4x + 1$; $a = ,$ $b = .$

Megoldás: $a = 3$, $b = 0$.

4. K2 Számítsuk ki az alábbi polinomok helyettesítési értékét a megadott helyeken!

a) $(5x^2 - 3y^2) + \left[-(x^2 - 2xy + y^2) + (5x^2 - 5xy + 2y^2)\right]$; $x = 1$; $y = 2$.

Megoldás

$$(5x^2 - 3y^2) + \left[-(x^2 - 2xy + y^2) + (5x^2 - 5xy + 2y^2)\right] = 9x^2 - 3xy - 2y^2.$$

A helyettesítési érték: –5.

b) $\left(-\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{5}{6}x^2y^2 + 2\right) - \left(x^2y^2 - \frac{1}{3}x^2y^2 + \frac{1}{12}xy - 4\right)$; $x = -4$; $y = \frac{1}{2}$.

Megoldás

$$\left(-\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{5}{6}x^2y^2 + 2\right) - \left(x^2y^2 - \frac{1}{3}x^2y^2 + \frac{1}{12}xy - 4\right) = \frac{1}{3}x^2y^2 - \frac{3}{4}xy + 6.$$

A helyettesítési érték: $\frac{37}{6}$.

5. K1 Döntsük el, hogy az alábbi polinomoknak a megadott számok közül melyik zérushelye!

a) $p(x) = x^2 - 5x + 6$; $x = 0;\ 2;\ 4;\ 3.$

Megoldás: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

b) $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 6x - 6$; $x = -3;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2.$

Megoldás: Egyik szám sem zérushelye a polinomnak.

c) $p(x) = x^3 - 2x - 3 - (2x - 4x^2 + 13)$; $x = 0;\ 2;\ -2;\ 3;\ -4.$

Megoldás: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = -4$.

6. K1 Tekintsük a következő polinomot: $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 20$.
Igaz-e rá az állítás? A *p(x)* polinom bármely pozitív valós számra pozitív értéket vesz fel.

Megoldás

Az állítás igaz, mert ekkor az összeg minden tagja pozitív.

24. MŰVELETEK POLINOMOKKAL

1. K1 Végezzük el a következő összevonásokat!

a) $32a - (17a + 22b)$; **Megoldás:** $15a - 22b$.

b) $12x - (8y + 5x)$; **Megoldás:** $7x - 8y$.

c) $(23a + 45b) - (18a - 7b)$; **Megoldás:** $5a + 52b$.

d) $(9a^2 - 5a) - (11a^2 - 7a)$. **Megoldás:** $-2a^2 + 2a$.

2. Bontsuk fel a zárójelet, és végezzük el a lehetséges összevonásokat!

K1 a) $(1{,}1xy - 2x^2y + 7{,}5xy^2) - (1{,}8xxy - 5{,}7y^2x + 2{,}5xy)$.

Megoldás

$-1{,}4xy - 3{,}8x^2y + 13{,}2xy^2$.

K1 b) $(3a^3b - 13b^2) - (7a^3b + 6b^2)$.

Megoldás

$-4a^3b - 19b^2$.

K1 c) $(2xy - 31xz - 23yz) - (7yz - 16xy + 12xz)$.

Megoldás

$18xy - 43xz - 30yz$.

K2 d) $(4r^2s + 8rs^2 - 13rs) + (3r^2s - 6sr^2) - (-7sr + 5r^2s - 11rs^2)$.

Megoldás

$-4r^2s + 19rs^2 - 6rs$.

K1 e) $(8x - 3y) - 5(4x - 3y) + 2(3y - 7x)$.

Megoldás

$(8x - 3y) - 5(4x - 3y) + 2(3y - 7x) = 8x - 3y - 20x + 15y + 6y - 14x = -26x + 18y$.

K2 f) $(3x^3 - 2x^2 + 4x - 3) + 2(-3x^3 + 5x^2 - 9x + 7) - 3(2x^3 - 5x^2 + 8x - 1)$.

Megoldás

$$(3x^3 - 2x^2 + 4x - 3) + 2(-3x^3 + 5x^2 - 9x + 7) - 3(2x^3 - 5x^2 + 8x - 1) =$$
$$= 3x^3 - 2x^2 + 4x - 3 - 6x^3 + 10x^2 - 18x + 14 - 6x^3 + 15x^2 - 24x + 3 =$$
$$= -9x^3 + 23x^2 - 38x + 14.$$

25. NÉHÁNY NEVEZETES SZORZAT

1. K1 Végezzük el a következő műveleteket!

a) $(x+y)^2$; **Megoldás:** $x^2+2xy+y^2$.

b) $(a+3)^2$; **Megoldás:** a^2+6a+9.

c) $(y-1)^2$; **Megoldás:** y^2-2y+1.

d) $(2b-3)^2$; **Megoldás:** $4b^2-12b+9$.

e) $(5d+1)^2$; **Megoldás:** $25d^2+10d+1$.

f) $\left(\frac{a}{2}-2\right)^2$; **Megoldás:** $\frac{a^2}{4}-2a+4$.

g) $(-x-2)^2$; **Megoldás:** x^2+4x+4.

h) $(3a^2-5)^2$; **Megoldás:** $9a^4-30a^2+25$.

i) $(4b^2+3b)^2$; **Megoldás:** $16b^4+24b^3+9b^2$.

j) $(5x^2y-1)^2$; **Megoldás:** $25x^4y^2-10x^2y+1$.

k) $(7m^2n-5mn^2)^2$; **Megoldás:** $49m^4n^2-70m^3n^3+25m^2n^4$.

l) $\left(\frac{5}{3}x^3y+\frac{3}{5}xy^2\right)^2$; **Megoldás:** $\frac{25}{9}x^6y^2+2x^4y^3+\frac{9}{25}x^2y^4$.

m) $\left(\frac{11}{7}z^4s^2-\frac{14}{3}z^2s^3\right)^2$. **Megoldás:** $\frac{121}{49}z^8s^4-\frac{44}{3}z^6s^5+\frac{196}{9}z^4s^6$.

2. Alakítsuk át az alábbi háromtagú összegeket kéttagú összeg vagy különbség négyzeteként!

K1 *a)* x^2-2x+1; **Megoldás:** $(x-1)^2$.

K1 *b)* y^2+6y+9; **Megoldás:** $(y+3)^2$.

K1 *c)* $m^2-20m+100$; **Megoldás:** $(m-10)^2$.

K1 *d)* $9z^2-48z+64$; **Megoldás:** $(3z-8)^2$.

K1 *e)* $25j^2+20ij+4i^2$; **Megoldás:** $(5j+2i)^2$.

K2 *f)* $\frac{36}{49}a^2-\frac{9}{7}ab+\frac{9}{16}b^2$; **Megoldás:** $\left(\frac{6}{7}a-\frac{3}{4}b\right)^2$.

K1 *g)* y^4-8y^2+16; **Megoldás:** $(y^2-4)^2$.

K2 *h)* $x^6+x^3+\frac{1}{4}$; **Megoldás:** $\left(x^3+\frac{1}{2}\right)^2$.

K2 *i)* $\frac{9}{4}n^2-\frac{6}{5}n\cdot m+\frac{4}{25}m^2$. **Megoldás:** $\left(\frac{3}{2}n-\frac{2}{5}m\right)^2$.

3. Alakítsuk teljes négyzet és egy konstans tag összegére az alábbi kifejezéseket!

K1 *a)* $x^2-8x+16$; **Megoldás:** $(x-4)^2$.

K2 *b)* $x^2-8x+13$; **Megoldás:** $(x-4)^2-3$.

K2 *c)* $x^2-6x+11$; **Megoldás:** $(x-3)^2+2$.

K2 *d)* $x^2-14x+40$; **Megoldás:** $(x-7)^2-9$.

K2 *e)* x^2-3x+2; **Megoldás:** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

K2 *f)* $x^2-11x+16$; **Megoldás:** $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2-\frac{57}{4}$.

K2 *g)* x^2+7x+5; **Megoldás:** $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{29}{4}$.

K2 *h)* $x^2+\frac{4}{3}x+2$; **Megoldás:** $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{14}{9}$.

K2 *i)* $x^2-\frac{7}{5}x+1$. **Megoldás:** $(x-0,7)^2+0,51$.

4. K1 A tanult nevezetes azonosságok felhasználásával bontsuk fel a zárójelet!

a) $(x-1)(x+1)$; **Megoldás:** x^2-1.

b) $(y+5)(y-5)$; **Megoldás:** y^2-25.

c) $(2a-3)(2a+3)$; **Megoldás:** $4a^2-9$.

d) $(2x-5y)(2x+5y)$; **Megoldás:** $4x^2-25y^2$.

e) $(7m^2-2)(7m^2+2)$; **Megoldás:** $49m^4-4$.

f) $\left(\frac{4}{3}y+\frac{3}{5}y^2\right)\left(\frac{4}{3}y-\frac{3}{5}y^2\right)$; **Megoldás:** $\frac{16}{9}y^2-\frac{9}{25}y^4$.

g) $(4x^3-5x)(4x^3+5x)$; **Megoldás:** $16x^6-25x^2$.

h) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{7}b\right)\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{7}b\right)$; **Megoldás:** $\frac{1}{9}a^2-\frac{4}{49}b^2$.

i) $(2{,}5+a^2)(2{,}5-a^2)$; **Megoldás:** $\frac{25}{4}-a^4$.

j) $(6x^2y+1)(6x^2y-1)$. **Megoldás:** $36x^4y^2-1$.

26. AZ AZONOSSÁGOK ALKALMAZÁSA

1. Számítsuk ki a tanult azonosságok felhasználásával a következő szorzásokat, kivonásokat!

K1 *a)* $98 \cdot 102$; $75 \cdot 65$; $51 \cdot 49$.

Megoldás

$98 \cdot 102 = (100-2)(100+2) = 100^2 - 2^2 = 9996$;

$75 \cdot 65 = (70+5)(70-5) = 70^2 - 5^2 = 4875$;

$51 \cdot 49 = (50+1)(50-1) = 50^2 - 1^2 = 2499$.

K1 *b)* $0{,}8 \cdot 1{,}2$; $307 \cdot 293$; $9{,}9 \cdot 10{,}1$.

Megoldás

Az előző, *a)* feladat alapján:
0,96; 89 951; 99,99.

K1 *c)* $48^2 - 38^2$; $165^2 - 35^2$.

Megoldás

Az előző, *a)* feladat alapján: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

$48^2 - 38^2 = 860$; $165^2 - 35^2 = 26\,000$.

K2 *d)* $\dfrac{31^2 - 29^2}{43^2 - 41^2}$; $\dfrac{768^2 - 542^2}{458^2 - 232^2}$.

Megoldás

$$\frac{31^2 - 29^2}{43^2 - 41^2} = \frac{(31+29)(31-29)}{(43+41)(43-41)} = \frac{120}{168} = \frac{5}{7};$$

$$\frac{768^2 - 542^2}{458^2 - 232^2} = \frac{(768+542)(768-542)}{(458+232)(458-232)} = \frac{1310 \cdot 226}{690 \cdot 226} = \frac{131}{69}.$$

2. E1 Végezzük el a következő műveleteket!

a) $(x+y+z)^2$; **Megoldás:** $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$.

b) $(x+2y+z)^2$; **Megoldás:** $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 4yz + 2xz$.

c) $(x+b+5)^2$; **Megoldás:** $x^2 + b^2 + 25 + 2bx + 10b + 10x$.

d) $\left(ay - bx + \frac{1}{2}\right)^2$; **Megoldás:** $a^2y^2 + b^2x^2 + \frac{1}{4} - 2abxy - bx + ay$.

e) $(2m - 3n + 1)^2$; **Megoldás:** $4m^2 + 9n^2 + 1 - 12mn - 6n + 4m$.

f) $(6a + 5b - c)^2$; **Megoldás:** $36a^2 + 25b^2 + c^2 + 60ab - 10bc - 12ca$.

g) $(x^2 + x + 1)^2$; **Megoldás:** $x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x + 2x^2$.

h) $\left(\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 9\right)^2$. **Megoldás:** $\frac{1}{4}x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 9x^3 + 36x^2 + 81$.

3. K1 Egészítsük ki az alábbi egyenlőségeket úgy, hogy igazak legyenek!

a) $(x-y)^2 + \boxed{} = (x+y)^2$; **Megoldás:** $\boxed{4xy}$.

b) $x^2 - 10x = (x-5)^2 - \boxed{}$; **Megoldás:** $\boxed{25}$.

c) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - \boxed{}$; **Megoldás:** $\boxed{2ab}$.

d) $a^2 + b^2 = (a-b)^2 - \boxed{}$; **Megoldás:** $\boxed{-2ab}$.

e) $x^2 + 1 = (x+1)^2 - \boxed{}$. **Megoldás:** $\boxed{2x}$.

4. K1 Két szám összege 10, szorzatuk 21. Mennyi a két szám négyzetének az összege?

Megoldás

Jelöljük a számokat a-val és b-vel. Ekkor: $a + b = 10$ és $ab = 21$.

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 10^2 - 2 \cdot 21 = 58$.

5. K1 Két szám összege négy, szorzata $\frac{15}{4}$. Mennyi a két szám négyzetének az összege?

Megoldás

Jelöljük a számokat a-val és b-vel. Ekkor: $a + b = 4$, $ab = \frac{15}{4}$.

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 4^2 - 2 \cdot \frac{15}{4} = 8{,}5$.

6. K1 Két szám szorzata 12, különbsége $\frac{16}{3}$. Mennyi a két szám összegének négyzete?

Megoldás

Jelöljük a számokat a-val és b-vel. Ekkor: $a - b = \frac{16}{3}$, $ab = 12$.

$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab = \frac{256}{9} + 48 = \frac{688}{9}$.

7. K2 A zárójelek felbontása után írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket!

a) $(3 - x)^2 + (3 - x)(3 + x) + 6(x + 1)^2$.

Megoldás

$(3 - x)^2 + (3 - x)(3 + x) + 6(x + 1)^2 = 9 - 6x + x^2 + 9 - x^2 + 6x^2 + 12x + 6 = 6x^2 + 6x + 24$.

b) $(2y - 3)(2y + 3) - 4(y - 2)^2$.

Megoldás

$(2y - 3)(2y + 3) - 4(y - 2)^2 = 4y^2 - 9 - 4y^2 + 16y - 16 = 16y - 25$.

c) $3(2 - x)^2 + 4(x - 5)^2$.

Megoldás

$3(2 - x)^2 + 4(x - 5)^2 = 12 - 12x + 3x^2 + 4x^2 - 40x + 100 = 7x^2 - 52x + 112$.

d) $5(1 - y)(1 + y) - 8(1 - y)^2 - (2 - y)^2$.

Megoldás

$5(1 - y)(1 + y) - 8(1 - y)^2 - (2 - y)^2 = 5 - 5y^2 - 8 + 16y - 8y^2 - 4 + 4y - y^2 =$
$= -14y^2 + 20y - 7$.

e) $(2x + 5y)^2 - (5y - 2x)^2 - 8x(5y - 1)$.

Megoldás

$(2x + 5y)^2 - (5y - 2x)^2 - 8x(5y - 1) = 4x^2 + 20xy + 25y^2 - 25y^2 + 20xy - 4x^2 - 40xy + 8x = 8x$.

f) $(a + 2)(a - 2)(4 + a^2) + (1 - a)(1 + a)(1 + a^2)$.

Megoldás

$(a + 2)(a - 2)(4 + a^2) + (1 - a)(1 + a)(1 + a^2) = (a^2 - 4)(a^2 + 4) + (1 - a^2)(1 + a^2) =$
$= a^4 - 16 + 1 - a^4 = -15$.

g) $5a(a-3)^2-5(a-1)^3+15(a+2)(a-2)$.

Megoldás

$5a(a-3)^2-5(a-1)^3+15(a+2)(a-2)=$
$=5a^3-30a^2+45a-5a^3+15a^2-15a+5+15a^2-60=30a-55.$

h) $(y+2)^3-y(3y+1)^2+(2y+1)\left(4y^2-2y+1\right)$.

Megoldás

$(y+2)^3-y(3y+1)^2+(2y+1)\left(4y^2-2y+1\right)=$
$=y^3+6y^2+12y+8-9y^3-6y^2-y+8y^3-4y^2+2y+4y^2-2y+1=11y+9.$

27. POLINOMOK SZORZATTÁ ALAKÍTÁSÁNAK MÓDSZEREI

1. K1 Milyen műveleti sorrendet kell figyelembe venni az alábbi műveletek elvégzésekor? Ennek segítségével határozzuk meg, melyik összeg és melyik szorzat az alábbi kifejezések közül!

a) $2xy + z$; $\frac{d^2}{5}$; $-\frac{7}{5}x(x+y)$; c^5d^2; $aaxayy$; $3 + xx + \frac{yyy}{3}$.

Megoldás: $2xy + z$: összeg;

$\frac{d^2}{5}$: szorzat;

$-\frac{7}{5}x(x+y)$: szorzat;

c^5d^2: szorzat;

$aaxayy$: szorzat;

$3 + xx + \frac{yyy}{3}$: összeg.

b) $\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)$; $(x^2+2)y^3$; $2x(1-x)$; $-\frac{5}{3}a^4$; $25b^2-16a^2$.

Megoldás: $\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)$: szorzat;

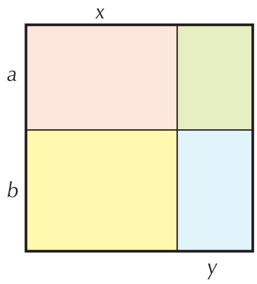
$(x^2+2)y^3$: szorzat;

$2x(1-x)$: szorzat;

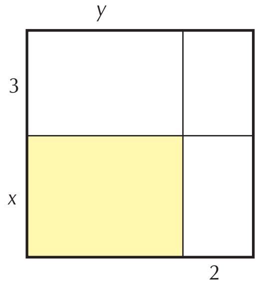
$-\frac{5}{3}a^4$: szorzat;

$25b^2-16a^2$: összeg.

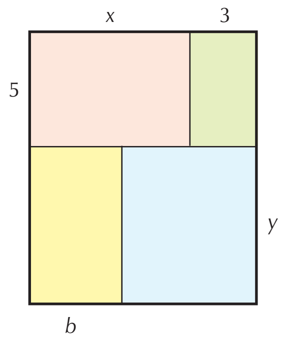
2. K1 Írjuk fel a színezett alakzatok területét kétféleképpen: szorzat alakban és összeg alakban!



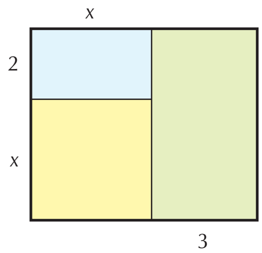
Megoldás: $(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by$.



Megoldás: $(x+3)(y+2) = xy + 3y + 2x + 6$.



Megoldás: $(x+3)(5+y) = by + 5x + 5\cdot 3 + (x+3-b)y$.



Megoldás: $(x+3)(x+2) = x^2 + 2\cdot x + 3(x+2)$.

3. Kiemeléssel alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket!

K1 *a)* $12a - 3c$; **Megoldás:** $3(4a - c)$.

K1 *b)* $ab + bc$; **Megoldás:** $b(a + c)$.

K1 *c)* $15ax - 27ay$; **Megoldás:** $3a(5x - 9y)$.

K1 *d)* $x^2y - xzy$; **Megoldás:** $xy(x - z)$.

K1 *e)* $6 - 12x$; **Megoldás:** $6(1 - 2x)$.

K1 *f)* $24a^3 - 54a$; **Megoldás:** $6a(4a^2 - 9)$.

K1 *g)* $a^3b^4 - ab^2$; **Megoldás:** $ab^2(a^2b^2 - 1)$.

K1 *h)* $x^k + x^{k+1}$; **Megoldás:** $x^k(1 + x)$.

K2 *i)* $14z^n - 21z^{n-2}$; **Megoldás:** $7z^{n-2}(2z^2 - 3)$.

K2 *j)* $5x^3y^{k+3} + 15x^2y^{k+1}$; **Megoldás:** $5x^2y^{k+1}(xy^2 + 3)$.

K1 *k)* $ay + by + cy$; **Megoldás:** $y(a + b + c)$.

K2 *l)* $2x^4 - 8x^2 - 4x$; **Megoldás:** $2x(x^3 - 4x - 2)$.

K2 *m)* $6a^2b + 15ab - 3ab^2$; **Megoldás:** $3ab(2a + 5 - b)$.

K2 *n)* $14x^2y^2z - 21xy^2z^2 + 35xyz^2$. **Megoldás:** $7xyz(2xy - 3yz + 5z)$.

4. A következő kifejezéseket kéttagú összeg kiemelésével alakítsuk szorzattá!

K1 *a)* $y(x-1) + x(x-1)$; **Megoldás:** $(x-1)(y+x)$.

K1 *b)* $7a(a-b) + 3b(a-b)$; **Megoldás:** $(a-b)(7a+3b)$.

K1 *c)* $2n(x+2) - (x+2)$; **Megoldás:** $(x+2)(2n-1)$.

K2 *d)* $3x(x+5) - x - 5$; **Megoldás:** $(x+5)(3x-1)$.

K2 *e)* $2a(a-2) - a + 2$; **Megoldás:** $(a-2)(2a-1)$.

K2 *f)* $8ab + 3ac + 8cb + 3c^2$. **Megoldás:** $8b(a+c) + 3c(a+c) = (a+c)(8b+3c)$.

5. A következő kifejezéseket alakítsuk szorzattá! (Útmutatás: a megfelelő tagokat bontsuk ketté.)

K2 *a)* $x^2 + 5x + 4$.

Megoldás: $x^2 + x + 4x + 4 = x(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x+4)$.

K2 *b)* $x^2 + 8x + 12$.

Megoldás: $(x^2 + 4x + 4) + (4x + 8) = (x+2)^2 + 4(x+2) = (x+2)(x+6)$.

E1 *c)* $x^2 - 8x + 15$.

Megoldás: $(x^2 - 6x + 9) + (-2x + 6) = (x - 3)^2 - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 5)$.

E1 *d)* $x^2 - 3x + 2$.

Megoldás: $(x^2 - 2x + 1) - (x - 1) = (x - 1)^2 - (x - 1) = (x - 1)(x - 2)$.

E1 *e)* $x^2 - x - 12$.

Megoldás: $(x - 4)(x + 3)$.

E1 *f)* $x^2 - 2x - 8$.

Megoldás: $(x - 4)(x + 2)$.

28. SZORZATTÁ ALAKÍTÁS NEVEZETES SZORZATOK FELHASZNÁLÁSÁVAL

Alakítsunk szorzattá a tanult módszerek együttes alkalmazásával (kiemelés, nevezetes azonosságok felhasználása)!

1. K1

a) $2a^2 - 2b^2$; **Megoldás:** $2(a-b)(a+b)$.

b) $10x^2 - 10$; **Megoldás:** $10(x-1)(x+1)$.

c) $3x^3 - 3x$; **Megoldás:** $3x(x+1)(x-1)$.

d) $m^3n - mn^3$; **Megoldás:** $mn(m-n)(m+n)$.

e) $18a^2 - 50b^2$; **Megoldás:** $2(3a+5b)(3a-5b)$.

f) $8a^4b^2 - 98a^2b^4$; **Megoldás:** $2a^2b^2(2a+7b)(2a-7b)$.

g) $\frac{8}{25}x^5y^3 - \frac{2}{49}xy^3$. **Megoldás:** $2xy^3\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{7}\right)\left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{7}\right)$.

2. K1

a) $3a^2 - 6ab + 3b^2$; **Megoldás:** $3(a^2 - 2ab + b^2) = 3(a-b)^2$.

b) $7c^2 + 14cd + 7d^2$; **Megoldás:** $7(c+d)^2$.

c) $15ab^2 - 30ab + 15a$; **Megoldás:** $15a(b-1)^2$.

d) $-x^2 - 2x - 1$; **Megoldás:** $-(x+1)^2$.

e) $-y^2 + 4y - 4$. **Megoldás:** $-(y-2)^2$.

3. K2

a) $a^2 + 2ab + b^2 - 1$.

Megoldás: $(a+b)^2 - 1 = (a+b+1)(a+b-1)$.

b) $x^2 - 2xy + y^2 - 9$.

Megoldás: $(x-y)^2 - 3^2 = (x-y-3)(x-y+3)$.

c) $36 - x^2 - 2xy - y^2$.

Megoldás: $6^2 - (x+y)^2 = (6-x-y)(6+x+y)$.

d) $4y^2 - 20yx + 25x^2 - 121$.

Megoldás: $(2y-5x)^2 - 121 = (2y-5x-11)(2y-5x+11)$.

e) $a^2 - b^2 + a - b$.

Megoldás: $(a-b)(a+b) + (a-b) = (a-b)(a+b+1)$.

f) $m^2 - n^2 - 2m - 2n$.

Megoldás: $(m+n)(m-n-2)$.

g) $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$.

Megoldás: $a^2(a-b) - b^2(a-b) = (a-b)(a-b)(a+b) = (a-b)^2(a+b)$.

h) $x^2 - 4xy + 4y^2 - xz + 2yz$.

Megoldás: $(x-2y)^2 - z(x-2y) = (x-2y)(x-2y-z)$.

4. K2 Alakítsuk teljes négyzetté, majd ennek felhasználásával szorzattá az alábbi kifejezéseket!

a) $a^2 + 6a + 8$.

Megoldás: $(a+3)^2 - 1 = (a+4)(a+2)$.

b) $a^2 - 5a + 6$.

Megoldás: $(a-2,5)^2 - 0,25 = (a-2,5)^2 - 0,5^2 = (a-3)(a-2)$.

c) $a^2 - 7a + 12$.

Megoldás: $(a-3)(a-4)$.

d) $a^2 + 2a - 15$.

Megoldás: $(a+5)(a-3)$.

e) $a^2 - 3a - 10$.

Megoldás: $(a-5)(a+2)$.

f) $a^2 + 8a + 12$.

Megoldás: $(a+6)(a+2)$.

g) $2a^2 + 10a + 8$.

Megoldás: $2\left[(a+2,5)^2 - 2,25\right] = 2(a+2,5-1,5)(a+2,5+1,5) = 2(a+1)(a+4)$.

h) $-a^2 - 8a - 15$.

Megoldás: $-(a^2 + 8a + 15) = -(a+3)(a+5)$.

i) $2a^2 - 6a + 4$.

Megoldás: $2(a^2 - 3a + 2) = 2(a-1)(a-2)$.

j) $-2a^2 + 2a + 24$.

Megoldás: $-2(a^2 - a - 12) = -2(a-4)(a+3)$.

k) $3a^2 - 6a - 24$.

Megoldás: $3(a-4)(a+2)$.

5. E1 A megismert azonosságok alkalmazásával alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket!

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x$.

Megoldás: $x^3(x+1) + x(x+1) = (x+1)x(x^2+1)$.

b) $x^3 - 1 + 6x^2 - 6$.

Megoldás: $(x-1)(x^2+x+1) + 6(x-1)(x+1) = (x-1)(x^2+7x+7)$.

c) $x^3 - 6x^2 + 5$.

Megoldás: $x^2(x-1) - 5(x^2-1) = (x-1)(x^2-5x-5)$.

d) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$.

Megoldás: $x^3(x^2-1) + x^2 - 1 = (x^2-1)(x^3+1) = (x-1)(x+1)(x+1)(x^2-x+1) =$
$= (x-1)(x+1)^2(x^2-x+1)$.

29. ALGEBRAI TÖRTKIFEJEZÉSEK EGYSZERŰSÍTÉSE, SZORZÁSA, OSZTÁSA

1. K1 Mely számok esetén értelmezhetjük az alábbi törteket?
Megoldás: Törtkifejezéseknél a nevező vizsgálatával tehetjük meg a kikötést.

a) $\frac{x-8}{12}$; **Megoldás:** Minden valós szám esetén értelmezhetjük a törtet.

b) $\frac{10}{y-4}$; **Megoldás:** $y-4\neq 0 \Rightarrow y\neq 4$, ezért $y\in \mathbf{R}$; $y\neq 4$.

c) $\frac{x+3}{x-8}$; **Megoldás:** $x\in \mathbf{R}$; $x\neq 8$.

d) $\frac{x^2+36}{x+6}$; **Megoldás:** $x\in \mathbf{R}$; $x\neq -6$.

e) $\frac{y(y-7)}{y}$; **Megoldás:** $y\in \mathbf{R}$; $y\neq 0$.

f) $\frac{5x-5}{6x+3}$; **Megoldás:** $x\in \mathbf{R}$; $x\neq -\frac{1}{2}$.

g) $\frac{6x}{x^2+1}$. **Megoldás:** Minden valós szám esetén értelmezhetjük a törtet.

2. K1 Egyszerűsítsük a következő törteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\frac{18a}{45ab}$; **Megoldás:** $\frac{2}{5b}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

b) $\frac{28a^2b^3}{49b^4}$; **Megoldás:** $\frac{4a^2}{7b}$, $b\neq 0$.

c) $\frac{5x^3}{30ax^2}$; **Megoldás:** $\frac{x}{6a}$, $a\neq 0$, $x\neq 0$.

d) $\frac{72a^4b^6}{108b^5a}$; **Megoldás:** $\frac{2a^3b}{3}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

e) $\frac{132x^4y^8}{22x^5y^3}$. **Megoldás:** $\frac{6y^5}{x}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

3. K1 Alakítsuk szorzattá az alábbi törtek számlálóját, illetve nevezőjét, majd egyszerűsítsük a törteket!

a) $\frac{13x(x-y)}{26xy-26y^2}$; **Megoldás:** $\frac{13x(x-y)}{26xy-26y^2}=\frac{13x(x-y)}{26y(x-y)}=\frac{x}{2y}$, $y\neq 0$, $x\neq y$.

b) $\frac{6a(a-b)}{15b(b-a)}$; **Megoldás:** $\frac{-2a}{5b}$, $b\neq 0$, $a\neq b$.

c) $\frac{ax-bx}{x^2+xa}$; **Megoldás:** $\frac{a-b}{x+a}$, $x\neq 0$, $x\neq -a$.

d) $\frac{t^2}{t^2+ts}$; **Megoldás:** $\frac{t}{t+s}$, $t\neq 0$, $t\neq -s$.

e) $\frac{ab}{a+ab}$; **Megoldás:** $\frac{b}{1+b}$, $a\neq 0$, $b\neq -1$.

f) $\frac{x^2-y^2}{xy+y^2}$; **Megoldás:** $\frac{x-y}{y}$, $y\neq 0$, $x\neq -y$.

g) $\frac{a^2-a}{ab-b}$; **Megoldás:** $\frac{a}{b}$, $b\neq 0$, $a\neq 1$.

h) $\frac{a^2-6a+9}{5a-15}$. **Megoldás:** $\frac{a-3}{5}$, $a\neq 3$.

4. Egyszerűsítsük a következő törteket!

K2 *a)* $\dfrac{6x^2-12xy+6y^2}{15x^2-15y^2}$.

Megoldás: $\dfrac{6(x-y)^2}{15(x-y)(x+y)}=\dfrac{2(x-y)}{5(x+y)}$, $x\neq\pm y$.

K2 *b)* $\dfrac{3a^2-27}{7a^2+42a+63}$.

Megoldás: $\dfrac{3(a-3)}{7(a+3)}$, $a\neq-3$.

K2 *c)* $\dfrac{3x-3y+cx-cy}{4c+12}$.

Megoldás: $\dfrac{3(x-y)+c(x-y)}{4(c+3)}=\dfrac{(x-y)(3+c)}{4(c+3)}=\dfrac{x-y}{4}$, $c\neq-3$.

E1 *d)* $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$.

Megoldás: $\dfrac{a+2}{a+5}$, $a\neq-5$, $a\neq-1$.

E1 *e)* $\dfrac{2x^2-12x+18}{x^2-7x+12}$.

Megoldás: $\dfrac{2(x^2-6x+9)}{(x-4)(x-3)}=\dfrac{2(x-3)^2}{(x-4)(x-3)}=\dfrac{2x-6}{x-4}$, $x\neq4$, $x\neq3$.

5. Végezzük el a kijelölt műveleteket, és írjuk a törteket a lehető legegyszerűbb alakba!

K1 *a)* $\dfrac{12x^2y^4}{7x^2y}\cdot\dfrac{9x^2y^3}{15xy^2}$.

Megoldás: $\dfrac{36xy^4}{35}$, $x\neq0$, $y\neq0$.

K1 *b)* $13a^2b^3\cdot\dfrac{4a}{39b^2}$.

Megoldás: $\dfrac{4a^3b}{3}$, $b\neq0$.

K1 *c)* $\dfrac{12ab}{25c}:8a^2$.

Megoldás: $\dfrac{3b}{50ac}$, $a\neq0$, $c\neq0$.

K2 *d)* $\dfrac{a-b}{b}\cdot\dfrac{ab^2}{a^2-ab}$.

Megoldás: $\dfrac{a-b}{b}\cdot\dfrac{ab^2}{a^2-ab}=b$, $a\neq0$, $b\neq0$, $a\neq b$.

K2 *e)* $\dfrac{a^2+ab}{a}:\dfrac{ab-b^2}{b}$.

Megoldás: $\dfrac{a^2+ab}{a}:\dfrac{ab-b^2}{b}=\dfrac{a+b}{a-b}$, $a\neq0$, $b\neq0$, $a\neq b$.

K2 *f)* $\frac{a^2b+ab^2}{ab}\cdot\frac{a^3-a^2b}{a^2+ab}$.

Megoldás: $\frac{a^2b+ab^2}{ab}\cdot\frac{a^3-a^2b}{a^2+ab}=a(a-b),\quad a\neq 0,\quad b\neq 0,\quad a\neq -b.$

K2 *g)* $\frac{2a^2-2b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{5a+5b}{4a-4b}$.

Megoldás: $\frac{2a^2-2b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{5a+5b}{4a-4b}=\frac{5}{2},\quad a\neq\pm b.$

6. E1 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{5x^3-5y^3}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{10x^2-10y^2}{2x+2y}$.

Megoldás: $\frac{5(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)^2}\cdot\frac{10(x-y)(x+y)}{2(x+y)}=25(x^2+xy+y^2),\quad x\neq\pm y.$

b) $\frac{7x^2-7y^2}{2x^3+2y^3}:\frac{x^3-x^2y}{4x^2+4xy}$.

Megoldás: $\frac{14(x+y)}{x(x^2-xy+y^2)},\quad x\neq 0,\quad x\neq -y.$

c) $\frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}\cdot\frac{2x^2-4x}{x^2-6x+9}$.

Megoldás: $\frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)(x-2)}\cdot\frac{2x(x-2)}{(x-3)^2}=\frac{2x}{x-3},\quad x\neq -4,\quad x\neq 2,\quad x\neq 3.$

30. ALGEBRAI TÖRTKIFEJEZÉSEK ÖSSZEVONÁSA, MŰVELETEK TÖRTKIFEJEZÉSEKKEL

1. K1 Végezzük el a következő törtek összevonását!

a) $\frac{2a-3}{6}+\frac{a+1}{10}$.

Megoldás: $\frac{10a-15+3a+3}{30}=\frac{13a-12}{30}$.

b) $\frac{4a-3}{4}-\frac{5a-7}{15}$.

Megoldás: $\frac{60a-45-20a+28}{60}=\frac{40a-17}{60}$.

c) $\frac{2a+3b}{3}-5\cdot\frac{a-7b}{2}+2\cdot\frac{a-b}{5}$.

Megoldás: $\frac{10(2a+3b)-75(a-7b)+12(a-b)}{30}=\frac{-43a+543b}{30}$.

d) $\frac{2(3a-b)}{2}-\frac{5(4a-b)}{11}+\frac{(7a-b)}{33}$.

Megoldás: $\frac{33(6a-2b)-6(20a-5b)+2(7a-b)}{66}=\frac{92a-38b}{66}=\frac{46a-19b}{33}$.

e) $\frac{a^2-b^2}{4}+\frac{(a+b)^2}{3}-\frac{(a-b)^2}{6}$.

Megoldás: $\frac{5a^2+12ab-b^2}{12}$.

f) $\frac{2a-5}{7}-a-\frac{4a-3}{4}$.

Megoldás: $\frac{4(2a-5)-28a-7(4a-3)}{28}=\frac{-48a+1}{28}$.

2. K1 Vizsgáljuk meg, a változók mely értékénél értelmezhetők az alábbi műveletek, majd végezzük el a törtek összeadását, kivonását!

a) $\frac{11x-2y}{x}+\frac{3x-7y}{y}$.

Megoldás: $\frac{y(11x-2y)+x(3x-7y)}{xy}=\frac{3x^2-2y^2+4xy}{xy}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

b) $\frac{3x}{xy^2}-\frac{4y}{x^2y}$.

Megoldás: $\frac{3x^2-4y^2}{x^2y^2}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

c) $\frac{6x-2y}{x^2y}-\frac{5x-4y}{xy^2}$.

Megoldás: $\frac{y(6x-2y)-x(5x-4y)}{x^2y^2}=\frac{10xy-5x^2-2y^2}{x^2y^2}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

3. K1 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x}$.

Megoldás: $\frac{5x+3(x-2)}{x(x-2)}=\frac{2(4x-3)}{x(x-2)}$, $x\neq 0$, $x\neq 2$.

b) $\frac{5}{x}-\frac{4}{x-1}$.

Megoldás: $\frac{5(x-1)-4x}{x(x-1)}=\frac{x-5}{x(x-1)}$, $x\neq 0$, $x\neq 1$.

c) $\frac{x}{x-5}-\frac{9}{x+5}$.

Megoldás: $\frac{x(x+5)-9(x-5)}{(x-5)(x+5)}=\frac{x^2-4x+45}{(x-5)(x+5)}$, $x\neq 5$, $x\neq -5$.

d) $\frac{6}{x+2}+\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}$.

Megoldás: $\frac{6(x-2)+(x+2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{6(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{6}{x+2}$, $x\neq -2$, $x\neq 2$.

e) $\frac{x+5}{x(x-1)}-\frac{3x+7}{2(x-1)(x+1)}$.

Megoldás: $\frac{2(x+1)(x+5)-x(3x+7)}{2x(x+1)(x-1)}=\frac{-x^2+5x+10}{2x(x+1)(x-1)}$, $x\neq 0$, $x\neq 1$, $x\neq -1$.

4. A következő törtek összeadásakor először alakítsuk szorzattá a nevezőt, majd ezután keressük meg a közös nevezőt!

K1 *a)* $\frac{5}{a+1}-\frac{3}{a-1}+\frac{7}{a^2-1}$.

Megoldás: $\frac{5}{a+1}-\frac{3}{a-1}+\frac{7}{a^2-1}=\frac{5(a-1)-3(a+1)+7}{(a+1)(a-1)}=\frac{2a-1}{(a+1)(a-1)}$,

$a\neq \pm 1$.

K1 *b)* $\frac{4a}{3a-3}+\frac{3}{5a-5}$.

Megoldás: $\frac{4a}{3a-3}+\frac{3}{5a-5}=\frac{20a+9}{15\cdot(a-1)}$, $a\neq 1$.

K1 *c)* $\frac{2}{3a-3b}+\frac{5}{6a+6b}$.

Megoldás: $\frac{2}{3a-3b}+\frac{5}{6a+6b}=\frac{4(a+b)+5(a-b)}{6(a-b)(a+b)}=\frac{9a-b}{6(a+b)(a-b)}$, $a\neq \pm b$.

K2 *d)* $\frac{7a-1}{3a^2-6a}+\frac{2a+3}{a^2-4}$.

Megoldás: $\frac{7a-1}{3a^2-6a}+\frac{2a+3}{a^2-4}=\frac{(7a-1)(a+2)+3a(2a+3)}{3a(a+2)(a-2)}=\frac{13a^2+22a-2}{3a(a+2)(a-2)}$,

$a\neq 0$, $a\neq \pm 2$.

K2 *e)* $\dfrac{5}{a^2+4a+4}+\dfrac{2a+1}{a^2-4}-\dfrac{3a-2}{a^2-4a+4}$.

Megoldás

$$\frac{5}{a^2+4a+4}+\frac{2a+1}{a^2-4}-\frac{3a-2}{a^2-4a+4}=\frac{5(a-2)^2+(2a+1)(a+2)(a-2)-(3a-2)(a+2)^2}{(a+2)^2(a-2)^2}=$$

$$=\frac{-a^3-4a^2-32a+24}{(a+2)^2(a-2)^2},\quad a\neq\pm 2.$$

5. E Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezések értéke független x-től!

a) $\left(1-\dfrac{2x-1}{3x-2}\right)\cdot\left(3-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

Megoldás

$$\left(1-\frac{2x-1}{3x-2}\right)\cdot\left(3-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x-1}{3x-2}\cdot\frac{-3x+2}{1-x}=1,\quad x\neq\frac{2}{3},\quad x\neq 1.$$

b) $\left(\dfrac{2x+3}{3x-1}-\dfrac{2x+7}{3x+1}\right):\dfrac{10-8x}{9x^2-1}$.

Megoldás

$$\frac{(2x+3)(3x+1)-(2x+7)(3x-1)}{9x^2-1}\cdot\frac{9x^2-1}{10-8x}=\frac{-8x+10}{9x^2-1}\cdot\frac{9x^2-1}{10-8x}=1,\quad x\neq\frac{1}{3},\quad x\neq-\frac{1}{3},\quad x\neq\frac{5}{4}.$$

c) $\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{2x^2+10x-13}{x^2+x-6}$.

Megoldás

$$\frac{(x+1)(x+3)-(x-2)(x-2)-(2x^2+10x-13)}{(x-2)(x+3)}=\frac{-2x^2-2x+12}{(x-2)(x+3)}=\frac{-2(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)}=-2,$$

$x\neq 2,\quad x\neq -3.$

IV. OSZTHATÓSÁG, A SZÁMELMÉLET ALAPJAI

31. A MARADÉKOS OSZTÁS, AZ OSZTHATÓSÁG FOGALMA, TULAJDONSÁGAI

1. K1 Írjuk fel az $(a : b)$ osztásokat $a = b \cdot q + r$ alakban, ahol $0 \le r < b$!

a) $a = 88$; $b = 23$. **Megoldás:** $88 = 23 \cdot 3 + 19$.
b) $a = 100$; $b = 7$. **Megoldás:** $100 = 7 \cdot 14 + 2$.
c) $a = 2008$; $b = 103$. **Megoldás:** $2008 = 103 \cdot 19 + 51$.

2. K1 Mely állítások igazak? Indokoljuk véleményünket!

a) $12 \mid 240$.

Megoldás: Igaz, mert $240 = 12 \cdot 20 + 0$.

b) $103 \mid 103$.

Megoldás: Igaz, mert $103 = 103 \cdot 1 + 0$.

c) $0 \mid 15$.

Megoldás: Hamis, mert 0 többszörösei 0-val egyenlők.

d) $30 \mid 0$.

Megoldás: Igaz, mert $0 = 30 \cdot 0 + 0$.

e) $4 \mid 4^{111}$.

Megoldás: Igaz, mert $4^{111} = 4 \cdot 4^{110} + 0$.

3. K1 Induljunk ki a következő igaz feltételekből: $3 \mid 4086$ és $3 \mid 101\,010$. A számolások elvégzése nélkül állapítsuk meg, hogy helyesek-e a következtetések!

a) $\Rightarrow$ $3 \mid 101\,010 \cdot 4086$; **Megoldás:** Igaz.
b) $\Rightarrow$ $3 \mid 101\,010 - 4086$; **Megoldás:** Igaz.
c) $\Rightarrow$ $4086 \mid 101\,010 + 3$; **Megoldás:** Hamis.
d) $\Rightarrow$ $3 \mid 101\,010^{4086}$. **Megoldás:** Igaz.

4. Legyenek a és b egész számok, valamint $a + b = 120$. Helyesek-e az alábbi következtetések? (A feladatban szereplő összes betű pozitív egész számot jelöl.)

K2 *a)* Ha $4 \mid a$, akkor $4 \mid b$. **Megoldás:** Igaz, mivel $4 \mid 120$.

K2 *b)* Ha $c \mid 120$, akkor $c \mid a + b$. **Megoldás:** Igaz.

K2 *c)* Ha $d \mid 120$, akkor $d \mid a$ vagy $d \mid b$. **Megoldás:** Hamis, például $a = 10$, $b = 110$, $d = 30$.

E1 *d)* Ha $k \mid 120 - a$, akkor $k \mid 120 - b$. **Megoldás:** Hamis, például $a = 78$, $b = 42$, $k = 7$.

E1 *e)* Mivel $3 \mid 120$, ezért $3 \mid a$. **Megoldás:** Hamis, például $a = 10$, $b = 110$.

E1 *f)* Ha $10 \mid a$, akkor $10 \mid b$. **Megoldás:** Igaz, mivel $10 \mid 120$.

32. OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

1. K1 Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

a) Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható kettővel.

Megoldás: Igaz, mert $2 \mid 4$.

b) Ha egy szám osztható 9-cel, akkor osztható 3-mal.

Megoldás: Igaz, mert $3 \mid 9$.

c) Minden olyan szám, amely osztható 2-vel és 3-mal, osztható 6-tal is.

Megoldás: Igaz, mert $2 \mid 6$, $3 \mid 6$, $\text{lnko}\,(2; 3) = 1$.

d) Ha egy szám osztható 6-tal és 2-vel, akkor osztható 12-vel.

Megoldás: Hamis, például 18 esetén.

e) Ha egy szám osztható 6-tal és 4-gyel, akkor osztható 24-gyel.

Megoldás: Hamis, például 36 esetén.

2. K1 Döntsük el, hogy az alábbi számok közül melyik osztható 4-gyel; 9-cel; 12-vel; 36-tal; 30-cal!

12 564; 7 245 540; 21 113; 5 675 345.

Megoldás

4; 9; 12; 36 | 12 564.
4; 9; 12; 30; 36 | 7 245 540.
A 21 113-nak egyik szám sem osztója.
Az 5 675 345-nek egyik szám sem osztója.

3. K2 Fogalmazzunk meg szabályt 6-tal, illetve 12-vel való oszthatóságra!

Megoldás

Egy szám pontosan akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal, mert $2 \cdot 3 = 6$, valamint 2 és 3 relatív prímek.
Egy szám pontosan akkor osztható 12-vel, ha osztható 4-gyel és 3-mal, mert $4 \cdot 3 = 12$, valamint 4 és 3 relatív prímek.

4. K2 Milyen számot írhatunk az ismeretlen betű helyére, hogy a $\overline{12\,451\,3x4}$ osztható legyen

a) 3-mal? **Megoldás:** $x = 1; 4; 7$.
b) 4-gyel? **Megoldás:** $x = 0; 2; 4; 6; 8$.
c) 6-tal? **Megoldás:** $x = 1; 4; 7$.
d) 9-cel? **Megoldás:** $x = 7$.
e) 12-vel? **Megoldás:** $x = 4$.

5. E1 Bizonyítsuk be, hogy $10^n - 1$ minden n természetes szám esetén osztható 9-cel!

Megoldás

$10^n - 1$ minden számjegye 9-es, tehát összegük osztható 9-cel.

6. E1 Igazoljuk, hogy három egymást követő természetes szám szorzata osztható 6-tal!

Megoldás

Biztosan van legalább egy páros, illetve egy hárommal osztható a tényezők között, tehát szorzatuk osztható 6-tal.

7. E1 Minimum hány darab egymást követő természetes számot kell összeszoroznunk ahhoz, hogy bármelyik természetes számtól indulva a szorzat osztható legyen 12-vel? Indokoljuk a választ!

Megoldás

Egy szám pontosan akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel is. Négy egymást követő egész szám között biztosan van 4-gyel és 3-mal osztható is. Ennél kevesebb nem biztos, hogy elég, például: $5 \cdot 6 \cdot 7$ nem osztható 12-vel.

8. E1 Határozzuk meg az n pozitív egész szám értékét úgy, hogy az alábbi törtek értéke pozitív egész szám legyen!

Megoldás

$\frac{n}{3}$, ha $3\,|\,n$, $n \geq 3$, $n \in \mathbf{N}$.

$\frac{n+2}{3}$, ha n pozitív egész, és 3-mal osztva 1-et ad maradékul, azaz $n = 3k + 1$, $k \in \mathbf{N}$.

$\frac{5n-3}{3}$, ha $3\,|\,n$, azaz $n = 3k$, $n \in \mathbf{N}^+$.

$\frac{n-1}{4}$, ha $n > 1$, pozitív egész, és 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, azaz $n = 4k + 1$, $k \in \mathbf{N}^+$.

$\frac{2n-3}{5}$, ha n pozitív egész, és 5-tel osztva 4 a maradék, azaz $n = 5k + 4$, $k \in \mathbf{N}$.

$\frac{7n-2}{9}$, ha n pozitív egész, és 9-cel osztva 8-at ad maradékul, azaz $n = 9k + 8$, $k \in \mathbf{N}$.

33. PRÍMSZÁMOK, A SZÁMELMÉLET ALAPTÉTELE, OSZTÓK SZÁMA

1. K1 Az alábbi számok közül melyik összetett szám?
3; 7; 9; 143; 479; 247; 357; 833; 957; 2007; 2009.

Megoldás

Összetett számok: 9; 143; 247; 357; 833; 957; 2007; 2009.

2. K1 Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak!
a) Ha egy szám prímtényezős felbontásában szerepel 2 hatványa, akkor a szám négyzetszám.

Megoldás: Hamis. Például a 12 esetén.

b) Minden összetett számnak páros sok pozitív osztója van.

Megoldás: Hamis, például a 9 esetén.

c) Ha egy természetes szám prím, akkor a nála 3-mal nagyobb szám összetett szám.

Megoldás: Hamis, például a 2 esetén.

d) Minden páros négyzetszám osztható 4-gyel.

Megoldás: Igaz.

e) Minden 4-gyel osztható természetes szám négyzetszám.

Megoldás: Hamis, például a 12 esetén.

3. E1 Fel lehet-e két csoportra osztani a 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 számokat úgy, hogy minden számot felhasználunk, és a csoportokban lévő számok szorzata egyenlő?

Megoldás

Nem lehet, mert amelyik csoportba a 7 kerül, ott a szorzat osztható 7-tel, a másik csoportba került számok szorzata pedig nem osztható 7-tel, mivel csak egy 7-tel osztható van a számok között.

4. K1 Bontsuk fel prímszámok szorzatára az alábbi számokat!
168; 768; 2008; 4500; 2592; 13 464; 14 625; 33 075.

Megoldás

$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7;$

$768 = 2^8 \cdot 3;$

$2008 = 2^3 \cdot 251;$

$4500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3;$

$2592 = 2^5 \cdot 3^4;$

$13\,464 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17;$

$14\,625 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13;$

$33\,075 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2.$

5. K1

Határozzuk meg a számok prímtényezős felbontásának segítségével, melyik osztható
a) 9-cel! *b)* 4-gyel! *c)* 125-tel!

$2^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 11$; $3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$.

Megoldás

Osztható 9-cel: $3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$.
Osztható 4-gyel: $2^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 11$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$.
Osztható 125-tel: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$.

6. K2

Írjuk fel az alábbi számok pozitív osztóit!
a) 75; *b)* 72; *c)* 150; *d)* 726; *e)* 121; *f)* 225.

Megoldás

a) 75 osztói: 1, 75, 3, 25, 5, 15;
b) 150 osztói: 1, 150, 2, 75, 3, 50, 5, 30, 6, 25, 10, 15;
c) 72 osztói: 1, 72, 2, 36, 3, 24, 4, 18, 6, 12, 8, 9;
d) 726 osztói: 1, 726, 2,363, 3, 242, 6, 121, 11, 66, 22, 33;
e) 121 osztói: 1, 121, 11;
f) 225 osztói: 1, 225,3, 75, 5, 45, 9,25, 15.

7. E1

Határozzuk meg az alábbi számok pozitív osztóinak a számát!
675; 3024; 288; 686; 243; 1225; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $11^2 \cdot 13^3 \cdot 19$.

Megoldás

675 osztóinak száma: 12.
3024 osztóinak száma: 40.
288 osztóinak száma: 18.
686 osztóinak száma: 8.
243 osztóinak száma: 6.
1225 osztóinak száma: 9.
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ osztóinak száma: 48.
$11^2 \cdot 13^3 \cdot 19$ osztóinak száma: 24.

8. E1

Mely természetes számoknak van páratlan sok osztója?

Megoldás

A négyzetszámoknak van páratlan sok osztója, mert prímhatványaik kitevője páros szám, az 1-gyel nagyobb pedig páratlan. (Minden más esetben biztosan van legalább egy olyan prímhatvány, amelynek kitevője páratlan szám.) Páratlan számok szorzata páratlan.
(Az állítás az osztópárok segítségével is megadható, mivel van olyan osztó, melynek párja saját maga.)

9.

Mely n természetes szám esetén lesz az alábbi törtek értéke egész szám?

K2 *a)* $\frac{7}{n-2}$; **Megoldás:** $(n-2)|7$, ezért $n = 9$, vagy $n = 3$.

K2 *b)* $\frac{12}{n+3}$; **Megoldás:** $(n+3)|12$, ezért $n = 9$, vagy $n = 3$, vagy $n = 1$, vagy $n = 0$.

E1 *c)* $\frac{2n-4}{n+3}$; **Megoldás:** $\frac{2n-4}{n+3} = \frac{2(n+3)-10}{n+3} = 2 - \frac{10}{n+3}$. Ezért $(n+3)|10$, $n = 2$, vagy $n = 7$.

E1 *d)* $\frac{3n-5}{n+5}$; **Megoldás:** $\frac{3n-5}{n+5} = \frac{3(n+5)-20}{n+5} = 3 - \frac{20}{n+5}$. Ezért $(n+5)|20$, $n = 0$, vagy $n = 5$, vagy $n = 15$.

34. LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓ, EUKLIDESZI ALGORITMUS, LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS

1. K1 Döntsük el az alábbi állításokról, hogy:
Biztosan igaz! Lehetetlen! Lehet, hogy igaz, lehet, hogy nem!

a) Két számnak végtelen sok közös többszöröse van.

Megoldás: Biztosan igaz.

b) Két szám közös pozitív osztói közül van legkisebb.

Megoldás: Biztosan igaz.

c) Két szám közös többszörösei közül van legnagyobb.

Megoldás: Lehetetlen.

d) Két szám legkisebb többszöröse nagyobb, mint a megadott két szám közül a nagyobb.

Megoldás: Lehet, hogy igaz, lehet, hogy nem.

2. K1 Határozzuk meg a megadott számok legnagyobb közös osztóját!

a) 72; 108; **Megoldás:** $2^2 \cdot 3^2 = 36$.

b) 375; 1800; **Megoldás:** $3 \cdot 5^2 = 75$.

c) 5544; 42 075; **Megoldás:** $3^2 \cdot 11 = 99$.

d) 2250; 468; 2100; **Megoldás:** $2 \cdot 3 = 6$.

e) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$; $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$; **Megoldás:** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$.

f) $2^2 \cdot 3 \cdot 17^3 \cdot 23$; $2^3 \cdot 5 \cdot 17^2 \cdot 29$. **Megoldás:** $2^2 \cdot 17^2 = 1156$.

3. K1 Keressük meg az alábbi számpárok, illetve számhármasok legkisebb közös többszörösét!

a) 54; 150; **Megoldás:** $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 1350$.

b) 360; 168; **Megoldás:** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

c) 864; 7875; **Megoldás:** $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 = 756\,000$.

d) 125; 875; 2625; **Megoldás:** $3 \cdot 5^3 \cdot 7 = 2625$.

e) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$; $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11$; **Megoldás:** $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 = 8\,316\,000$.

f) $2 \cdot 3^3 \cdot 13^3 \cdot 17$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17^2$. **Megoldás:** $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13^3 \cdot 17^2 = 685\,727\,640$.

4. K1 Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

a) $\frac{450}{620}$; **Megoldás:** $\frac{450}{620} = \frac{45}{62}$.

b) $\frac{1750}{2625}$; **Megoldás:** $\frac{1750}{2625} = \frac{2}{3}$.

c) $\frac{1080}{756}$. **Megoldás:** $\frac{1080}{756} = \frac{10}{7}$.

5. E2 Melyik az a két pozitív egész szám, amelyre igaz:

a) lnko $(x; y) = 6$ és $x \cdot y = 2520$?

Megoldás: $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7;$

$x = 2 \cdot 3 \cdot l; \quad y = 2 \cdot 3 \cdot k; \quad l, k \in \mathbf{N}, \quad$ lnko $(l; k) = 1;$

$xy = 2^2 \cdot 3^2 \cdot l \cdot k \Rightarrow l \cdot k = 2 \cdot 5 \cdot 7.$

l	1	2	5	7	10	14	35	70
k	70	35	14	10	7	5	2	1
x	6	12	30	42	60	84	210	420
y	420	210	84	60	42	30	12	6

b) lnko $(x; y) = 18$ és $x + y = 576$?

Megoldás: $x = 18 \cdot n; \quad y = 18 \cdot m; \quad n, m \in \mathbf{N}; \quad$ lnko $(n; m) = 1;$

$x + y = 576 \Rightarrow 18n + 18m = 576 \Rightarrow n + m = 32.$

n	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
m	31	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1
x	18	54	90	126	162	198	234	270	306	342	378	414	450	486	522	558
y	558	522	486	450	414	378	342	306	270	234	198	162	126	90	54	18

c) lnko $(x; y) = 12$ és lkkt $[x; y] = 1260$?

Megoldás: lnko $(x, y) = 12 = 2^2 \cdot 3;$

lkkt $[x, y] = 1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, tehát mind a két szám prímfelbontásában szerepel. Természetesen x és y szerepe felcserélhető, így összesen 8 megoldás van.

x	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$	$2^2 \cdot 3^2 = 36$
y	$2^2 \cdot 3 = 12$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$

6. K2 Egy villamos egyik végállomásáról két különböző irányba indítanak villamosokat. Az I. villamost 12 percenként indítják, a II. villamost 15 percenként. Reggel 7 órakor egyszerre indul a két különböző irányba villamos.

a) Mikor indítják a villamosokat legközelebb egyszerre?

Megoldás: lkkt $[12; 15] = 60$, ezért óránként indulnak egyszerre villamosok. Legközelebb 8 órakor.

b) Reggel 7 óra után és délután 5 óra előtt hányszor indítják egyszerre a két villamost?

Megoldás: A két idő között 9 óra van, ezért kilencszer indítanak egyszerre villamost.

7. E1 Milyen a értéknél teljesülnek a következő feltételek?

lnko $(21; a) \neq 1$ és lnko $(a; 15) \neq 1$, de lnko $(15; 21; a) = 1$.

Megoldás

lnko $(21; a) \neq 1$, ezért $3 \mid a$ vagy $7 \mid a$.

lnko $(a; 15) \neq 1$, ezért $3 \mid a$ vagy $5 \mid a$.

lnko $(15; 21; a) = 1$, tehát 3 nem osztója a-nak.

Azok az a számok felelnek meg a feltételeknek, amelyek $35k$ alakúak, ahol $k \in \mathbf{Z}$, de 3 nem osztója k-nak.

emelt szint

35. POLINOMOK OSZTHATÓSÁGA

1. E1 Igazoljuk a leckében szereplő azonosságokat a bemutatott bizonyítás alapján!

a) $(a+b)\,|\,(a^{2n+1}+b^{2n+1}),\quad n\in\mathbf{N}.$

Megoldás

$(a+b)(a^{2n}b^0-a^{2n-1}b^1+a^{2n-2}b^2-\ldots+a^0b^{2n})=$

$=a^{2n+1}b^0-a^{2n}b^1+a^{2n-1}b^2-\ldots+a^1b^{2n}+$

$+a^{2n}b^1-a^{2n-1}b^2+a^{2n-2}b^3-\ldots+a^0b^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}.$

b) $(a+b)\,|\,(a^{2n}-b^{2n}),\quad n\in\mathbf{N}^+.$

Megoldás

Az előző gondolatmenethez hasonlóan igazolhatjuk.

2. E1 Igazoljuk az állításokat!

a) $11\,|\,(17^{20}-6^{20}).$

Megoldás

Mivel $(a-b)\,|\,(a^n-b^n)$, ezért $(17-6)=11\,|\,(17^{20}-6^{20})$.

b) $23\,|\,(17^{13}+6^{13}).$

Megoldás

Mivel $(a+b)\,|\,(a^{2n+1}+b^{2n+1})$, ezért $17+6=23\,|\,(17^{13}+6^{13})$.

c) $23\,|\,(17^{2008}-6^{2008}).$

Megoldás

Mivel $(a+b)\,|\,(a^{2n}-b^{2n})$, ezért $17+6=23\,|\,(17^{2008}+6^{2008})$.

3. E1 Bizonyítsuk be a következő oszthatóságokat!

a) $(a+5)\,|\,(a^2-2a-35).$ **Megoldás:** $(a^2-2a-35)=(a+5)(a-7).$

b) $(y-8)\,|\,(y^2+7y-120).$ **Megoldás:** $(y^2+7y-120)=(y-8)(y+15).$

c) $(b-3c)\,|\,(b^2-2bc-3c^2).$ **Megoldás:** $(b^2-2bc-3c^2)=(b-3c)(b+c).$

4. E1 Mutassuk meg, ha p 3-nál nagyobb prímszám, akkor p^2 24-gyel osztva 1-et ad maradékul!

Megoldás

Azt kell belátni, hogy $24\,|\,p^2-1=(p-1)(p+1)$. Mivel $p>3$, ezért az egyik tényező osztható 3-mal. Mind a két tényező páros szám, szomszédos páros számok, ezért az egyik 4-gyel is osztható, így a szorzat osztható 8-cal. Mivel 3 és 8 relatív prímek, és $3\cdot 8=24$, ezért az állítás igaz.

5. E2 Igaz-e az állítás?

$7\,|\,3^{2n+2}-2^{n+1},\quad n\in\mathbf{N}^+.$

Megoldás

Alakítsuk át a kifejezést:

$7\,|\,3^{2n+2}-2^{n+1}=3^{2(n+1)}-2^{n+1}=9^{n+1}-2^{n+1}$. Mivel minden n-re $n\in\mathbf{N}^+$ $(a-b)\,|\,a^n-b^n$ és $7\,|\,9-2$, ezért az állítás igaz.

6. E2 Figyeljük meg a következő állításokat! Írjuk fel a következő három hasonló állítást! Fogalmazzuk meg az állításokat általánosan! Igazoljuk az előző megfogalmazásunkat!

$1^3 = 1^2 - 0^2$;

$2^3 = 3^2 - 1^2$;

$3^3 = 6^2 - 3^2$;

$4^3 = 10^2 - 6^2$;

$5^3 = 15^2 - 10^2$.

Megoldás

$6^3 = 21^2 - 15^2$;

$7^3 = 28^2 - 21^2$;

$8^3 = 36^2 - 28^2$.

Vizsgáljuk meg a jobb oldali hatványok alapjait! Az alapok különbségeit vizsgálva:

$1;\ 3 = 1 + 2;\ 6 = 1 + 2 + 3;\ 10 = 1 + 2 + 3 + 4;\ \ldots;\ 36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8;\ \ldots$

Használjuk fel: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Észrevételünk miatt a bizonyítandó állítás:

$$n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n^2+2n+1) - (n^2-2n+1)n^2}{4} =$$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 - n^4 + 2n^3 - n^2}{4} = \frac{4n^3}{4} = n^3.$$

36. SZÁMRENDSZEREK

1. K1 Írjuk át kettes számrendszerbe az alábbi számokat!
35; 79; 127; 257; 1000.

Megoldás

$35 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 = 100011_2$.
Ehhez hasonlóan a többi tízes számrendszerben lévő számot kettő hatványaiként csoportosíthatjuk.
$79 = 1001111_2$;
$127 = 1111111_2$;
$257 = 100000001_2$;
$1000 = 1111101000_2$.

2. K1 Írjuk fel tízes számrendszerben az alábbi számokat!
10101_2; 10110_2; 1111111_2; 100000_2.

Megoldás

$10101_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 16 + 4 + 1 = 21$.
Ugyanilyen módon felírható a többi szám is.
$10110_2 = 22$; $1111111_2 = 127$; $100000_2 = 32$.

3. E1 Írjuk át az alábbi tízes számrendszerbeli számokat a megadott alapszámú számrendszerbe!
a) 47-et 7-es alapú számrendszerbe; **Megoldás:** $47 = 6 \cdot 7^1 + 5 = 65_7$.
b) 129-et 4-es alapú számrendszerbe; **Megoldás:** $129 = 2 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 1 = 2001_4$.
c) 6457-et 2-es számrendszerbe; **Megoldás:** $6457 = 1100100111001_2$.
d) 529-et 8-as számrendszerbe. **Megoldás:** $529 = 1021_8$.

4. E1 Írjuk át a következő számokat tízes számrendszerbe!
$45\,321_6$; 100011101_2; 505_9; $43\,012_7$; 1201_{12}.

Megoldás

$45\,321_6 = 4 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 1 = 6385$;
$100011101_2 = 285$;
$505_9 = 410$;
$43\,012_7 = 10\,642$;
$1201_{12} = 2017$.

5. E1 Melyik számrendszerben lehet $807 = 3423_x$?

Megoldás

A számrendszer alapja legalább 5, és 6-nál nagyobb nem lehet, mert akkor a szám nagyobb, mint 807. Így a két lehetőséget megvizsgálva adódik, hogy a keresett számrendszer alapja 6.
$807 = 3423_6$.

6. E2 Írjuk fel az alábbi számokat 3-as számrendszerbe!
6507_9; 4204_6; 110101_2.

Megoldás

A megadott számokat írjuk át tízes számrendszerbe, majd azután hármas számrendszerbe:
$6507_9 = 4786 = 20120021_3$;
$4204_6 = 940 = 1021211_3$;
$110101_2 = 53 = 1222_3$.

7. E2 Végezzük el a következő műveleteket!

$$\begin{array}{r} 10011_2 \\ +\ \ 1101_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3243_5 \\ +\ \ 441_5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23112_4 \\ 1031_4 \\ +\ \ 3311_4 \\ \hline \end{array}$$

Megoldás

Hasonlóan végezzük az összeadást, mint tízes számrendszerben. Például: $4_5 + 3_5 = 12_5$.
Ennek megfelelően:

$$\begin{array}{r} 10011_2 \\ +\ \ 1101_2 \\ \hline 100000_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3243_5 \\ +\ \ 441_5 \\ \hline 4234_5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23112_4 \\ 1031_4 \\ +\ \ 3311_4 \\ \hline 100120_4 \end{array}$$

8. E1 Határozzuk meg az *x* értékét!
$1220_3 = 63_x$.

Megoldás

Írjuk fel az adott számokat helyiértékes alakban:

$1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 0 = 6 \cdot x + 3;$

$51 = 6x + 3;$

$x = 8.$

A keresett számrendszer alapja 8.

9. E2 Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások!
(Felhasználjuk azt az ismeretet, hogy tetszőleges alapú számrendszerben az alapszámnál 1-gyel kisebb számmal való oszthatóság a számjegyekkel való oszthatóságtól függ, azaz pontosan akkor teljesül, ha a számjegyek összege osztható az alapszámnál 1-gyel kisebb számmal.)

a) 4532_6 osztható 5-tel.

Megoldás
A számjegyek összege 14, nem osztható öttel, tehát a szám sem osztható 5-tel.

b) 12121_4 osztható 3-mal.

Megoldás
A számjegyek összege 7, nem osztható hárommal, tehát a szám sem osztható 3-mal.

c) 23011_8 osztható 7-tel.

Megoldás
A számjegyek összege 7, osztható héttel, tehát a szám osztható 7-tel.

d) 210111_3 osztható 2-vel.

Megoldás
A számjegyek összege 6, osztható kettővel, tehát a szám osztható 2-vel.

V. FÜGGVÉNYEK

37. BEVEZETŐ FELADATOK A FÜGGVÉNYEKHEZ

1. K1 Keressünk olyan mennyiségeket, amelyek fordítottan arányosak!

Megoldás

Nézzünk néhány példát!

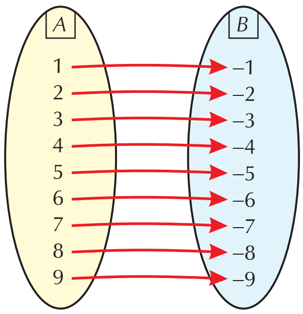
a) Egy adott hosszúságú útszakaszt szeretnénk megtenni állandó sebességgel. Sebességünk és az út megtételéhez szükséges idő fordítottan arányos lesz. Képlettel: $s = vt =$ állandó.

b) Egy 90 m^2-es téglalap alapú házat szeretnénk építeni. Az utcafront és az udvari front hossza fordítottan arányos lesz egymással, hiszen a kettő szorzata állandó, 90 m^2.

c) Egy hegyi menedékházban egy embernek 100 napra elegendő élelem van elraktározva. Ha többen akarnak itt meghúzódni, akkor nyilván kevesebb ideig lesz elég az élelmiszer-tartalék. Az emberek száma és az eltölthető napok mennyisége fordítottan arányos, hiszen a kettő szorzata pontosan 100 lesz.

2. K1 Adjunk meg egy olyan hozzárendelést, ami az egyjegyű egész számokhoz negatív egészeket rendel!

Megoldás



Hozzárendelésünk igen egyszerű, például minden számhoz a mínusz egyszeresét rendeli.

3. K1 Adjunk meg olyan hozzárendelést, ami a sík pontjaihoz a sík pontjait rendeli! Hány ilyet tanultunk már?

Megoldás

A geometriai transzformációk éppen megfelelnek, hiszen a sík minden pontjához egyértelműen hozzárendelnek egy (nem feltétlenül) másik pontot. Tehát említhetjük a tengelyes és középpontos tükrözést, az eltolást, az elforgatást.

4. K2 Milyen hozzárendeléseket valósítanak meg a következők:

a) bizonyítvány;
b) egy menza menüje;
c) az órarend?

Megoldás

a) Minden tantárgyhoz egyértelműen hozzárendelünk egy jegyet.
b) Minden ételhez egyértelműen hozzárendelünk egy árat.
c) Minden naphoz több órát is rendelünk.

5. K2 Keress a környezetedben olyan információkat, amelyeket hozzárendelés formájában adunk meg!

Megoldás

Például: az állampolgár és a személyi igazolványának a száma, vagy áru a bevásárlóközpontban és a vonalkódja.

6. E1 Tudunk-e mondani olyan hozzárendelést, ami bármely két egész számhoz egyértelműen rendel egy harmadikat?

Megoldás

Ilyen hozzárendelés az összeadás, kivonás, szorzás. Az osztást azért nem említettük, mert nullával nem lehet osztani. Természetesen lehet még kitalálni ilyeneket, például: bármely két egész számhoz hozzárendeljük a nagyobbikat (ha egyformák, akkor mindegy, melyiket).

38. MIT NEVEZÜNK FÜGGVÉNYNEK?

1. K1 Határozzuk meg a következő függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!
f: (1; 2), (3; 4), (4; 5), (6; 5), (7; 7), (8; 7).

Megoldás

Ha rendezett számpárokkal adjuk meg a függvényt, akkor a számpár első tagja az ÉT-nek eleme, a második tag pedig az ÉK-nak. Ezért $D_f = \{1, 3, 4, 6, 7, 8\}$ és $R_f = \{2, 4, 5, 7\}$.

2. K1 Legyen $D_f = \{1, 2, 3\}$ és $R_f = \{5, 6, 7\}$. Adjuk meg az összes ilyen függvényt rendezett számpárokkal! Hány megoldást kapnánk, ha az {5, 6, 7} a képhalmaz lenne?

Megoldás

Lényegében annyi megoldás van, ahányféle módon sorba rakhatjuk az 5, 6, 7 számokat.
1. megoldás: {1; 5}, {2; 6}, {3; 7};
2. megoldás: {1; 5}, {2; 7}, {3; 6};
3. megoldás: {1; 6}, {2; 5}, {3; 7};
4. megoldás: {1; 6}, {2; 7}, {3; 5};
5. megoldás: {1; 7}, {2; 5}, {3; 6};
6. megoldás: {1; 7}, {2; 6}, {3; 5}.

Ha az {5, 6, 7} a képhalmaz, akkor nem kell feltétlenül mindhárom elemnek részt vennie a hozzárendelésben. Az $\{1; x\}$, $\{2; y\}$, $\{3; z\}$ felírásban x, y és z is egymástól függetlenül lehet 3-féle: 5, 6 vagy 7. Ez azt jelenti, hogy a lehetséges esetek száma $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

3. K1 Határozzuk meg a következő függvények értékkészletét!

a) f: {pozitív páros számok} $\to \mathbf{Z}$, $f(x) = \frac{x}{2}$.

Megoldás

Az ÉT a pozitív páros egész számok, ezek bármelyikét elosztjuk kettővel, szintén egész számot kapunk. Így minden pozitív egész számot megkapunk, mégpedig akkor, amikor a kétszeresét osztjuk kettővel. Tehát $R_f = \mathbf{Z}^+$.

b) g: $[0; 10] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x}{2}$.

Megoldás

$0 \le x \le 10 \quad / :2$

$0 \le \frac{x}{2} \le 5$. Tehát $R_f = [0; 5]$.

c) h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \frac{x}{2}$.

Megoldás

Mivel az ÉT az összes valós szám, ezeket kettővel osztva megkapjuk az összes valós számot. (Minden számnak van kétszerese.)

d) i: $[-1; 5] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x + 3$.

Megoldás

$-1 + 3 = 2$, $\quad 5 + 3 = 8$. Tehát $R_i = [2; 8]$.

e) j: $\{-2; -1; 0; 1; 2\} \to \mathbf{R}$, $j(x) = 1$.

Megoldás

$R_j = \{1\}$.

f) $k: \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\} \to \mathbf{R}$, $k(x) = -x$.

Megoldás

$R_k = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, azaz a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete megegyezik.

4. K1 Adjuk meg a következő függvények hozzárendelési szabályát, értelmezési tartományát és értékkészletét!

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	4	7	10	13	16	19	22	25

Megoldás

$f: \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \to \{1,4,7,10,13,16,19,22,25\}$, $x \mapsto 3x - 2$.

b)

x	2	4	6	8	10	12	14	16
$g(x)$	3	1	–1	–3	–5	–7	–9	–11

Megoldás

$g: \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} \to \{-11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3\}$, $x \mapsto 5 - x$.

5. K1 Adjunk meg egy olyan függvényt, aminek az értelmezési tartománya $\{1, 2, 3, 4\}$ és értékkészlete az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz!

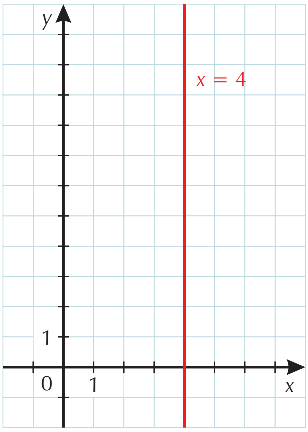
Megoldás

Nincs ilyen függvény, mert az értékkészletnek maximum négy eleme lehet.
Általánosan is igaz $|R_f| \le |D_f|$, ha D_f és R_f elemszáma véges.

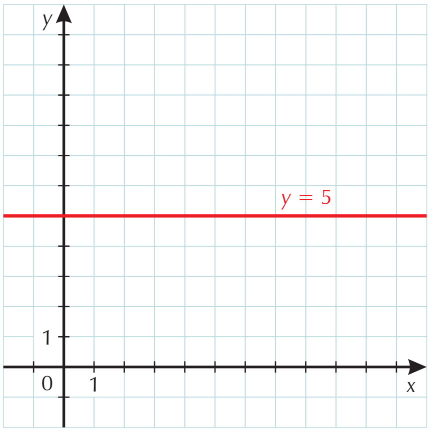
39–40. PONTHALMAZOK ÉS FÜGGVÉNYEK ÁBRÁZOLÁSA DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZERBEN

1. K1 Mi az egyenlete a következő alakzatoknak?

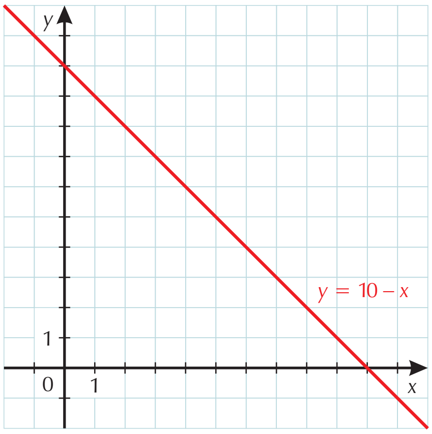
a)



b)



c)



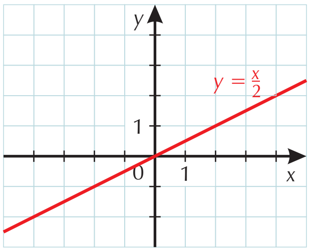
Megoldás

a) Ezen a függőleges egyenesen azok a pontok helyezkednek el, amelyeknek az első koordinátája 4. Tehát az egyenlete $x = 4$.
b) A vízszintes egyeneseken lévő pontoknak a második koordinátája állandó. Itt $y = 5$.
c) Ezen az egyenesen olyan pontok vannak, amelyek első és második koordinátájának összege 10.

2. K1 Keressük meg azokat a pontokat, amelyeknek második koordinátája feleakkora, mint az első!

Megoldás

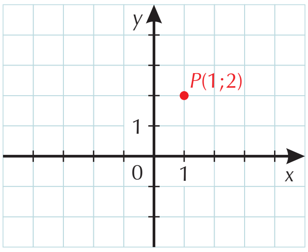
Tehát $y = \frac{x}{2}$. Ezek a pontok egy origón átmenő egyenesen helyezkednek el.



3. K1 Van-e olyan függvény, aminek a képe egyetlen pont?

Megoldás

Természetesen van. Ha az ÉT egyetlen szám, akkor a grafikon is egyetlen pont lesz. Például: f: $\{1\} \to \{2\}$, $x \mapsto 2$.

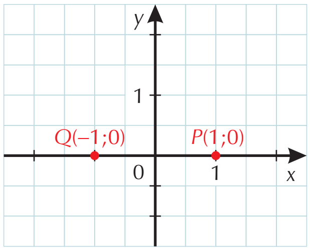


4. K2 Keressük meg a koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik az alábbi egyenletet!

a) $[(x-1)^2 + y^2] \cdot [(x+1)^2 + y^2] = 0$.

Megoldás

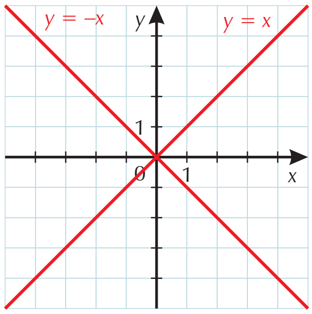
A szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Két eset van.
Első eset: $(x-1)^2 + y^2 = 0$. Két négyzetszám összege csak úgy lehet nulla, ha mindkettő nulla. Tehát csak $x = 1$ és $y = 0$ lehet, ez viszont a $P(1;\ 0)$ pontot jelenti.
Második eset: $(x+1)^2 + y^2 = 0$. Az előbbiek miatt $x = -1$ és $y = 0$, vagyis $Q(-1,\ 0)$ a jó pont.
Tehát a keresett ponthalmaz két pontból áll, a P és Q pontokból.



b) $x^2 - y^2 = 0$.

Megoldás

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 0$.
Tehát $x - y = 0$ vagy $x + y = 0$.
$x = y$ vagy $-x = y$. Az első esetben az origón átmenő első síknegyedbeli szögfelező. A második esetben a második síknegyedbeli szögfelező. A megoldáshalmaz a két egyenes uniója.



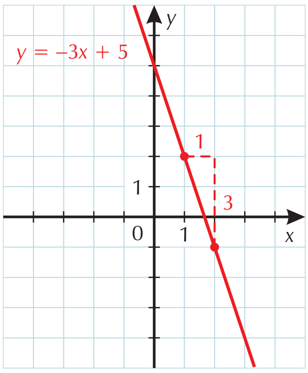
41. LINEÁRIS FÜGGVÉNYEK

1. K1 Ábrázoljuk a következő függvényeket!

a) $f(x) = -3x + 5$.

Megoldás

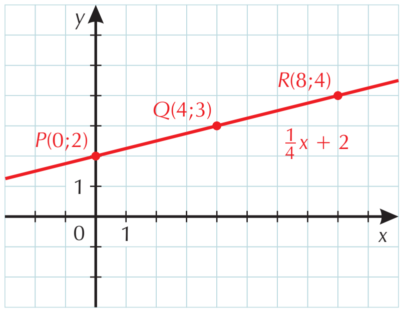
A konstans tag 5, ezért a grafikon az y tengelyt a $P(0;\ 5)$ pontban metszi. A meredekség –3, tehát ha x értékét eggyel megnöveljük, akkor a függvény értéke 3-mal csökken.



b) $g(x) = \frac{1}{4}x + 2$.

Megoldás

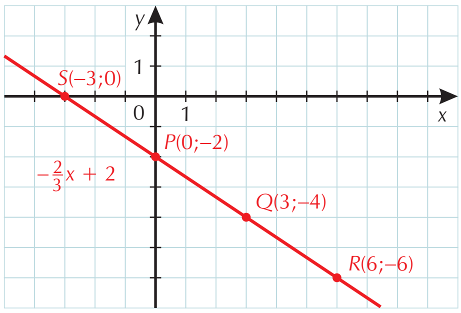
A grafikon az y tengelyt 2-nél metszi. A meredeksége $\frac{1}{4}$, ami azt jelenti, hogy ha x értéke eggyel nő, akkor a függvény értéke is nő, de csak $\frac{1}{4}$-del. Az $m = \frac{1}{4}$ azt is jelenti, hogy ha x értékét néggyel növeljük, akkor a függvény értéke eggyel nő. Így a $P(0;\ 2)$ pontból kiindulva könnyen kaphatunk egész koordinátájú pontokat. Például: $Q(4;\ 3)$, $R(8;\ 4)$ stb.



c) $h(x) = -\frac{2}{3}x - 2$.

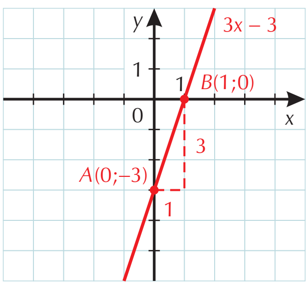
Megoldás

A grafikon az y tengelyt a –2-nél metszi. A meredeksége $-\frac{2}{3}$, ami azt jelenti, hogy ha hárommal növeljük x-et, akkor y értéke 2-vel csökken. A grafikon áthalad a $P(3;\ -4)$, $Q(6;\ -6)$ pontokon.



2. K1 Keressük meg azt az elsőfokú függvényt, amelynek képe áthalad a következő pontokon!

a) $A(0;\ -3)$ és a $B(1;\ 0)$.



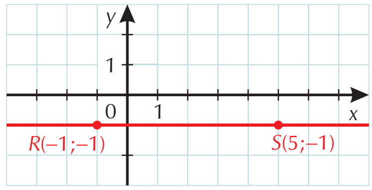
Megoldás

Az elsőfokú függvény általános alakja az $f(x) = mx + b$. Az ábráról rögtön leolvashatjuk b értékét, $b = -3$. Mivel ha x-et nulláról egyre növeljük, akkor a függvény értéke 3-mal nő, ez azt jelenti, hogy $m = 3$.
Tehát $f(x) = 3x - 3$.

b) $R(-1; -1)$ és az $S(5; -1)$.

Megoldás

A grafikon vízszintes egyenes, tehát konstans függvényről van szó. Így $f(x) = -1$.



c) $P(-6; 3)$ és a $Q(1; -4)$.

Megoldás

A megoldást $f(x) = mx + b$ alakban keressük. A megadott pontok alapján:

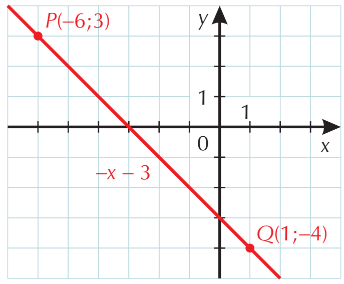
I: $3 = -6m + b$.

II: $-4 = m + b$. Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat!

$7 = -7m \quad / :(-7)$

$-1 = \mathrm{m} \Rightarrow -4 = -1 + \mathrm{b} \Rightarrow -3 = b$

$f(x) = -x - 3$.

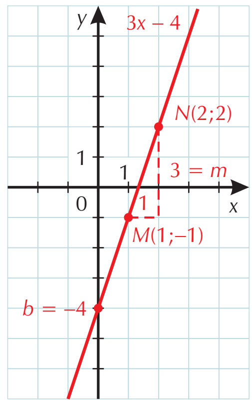


d) $M(1;\ -1)$ és az $N(2; 2)$.

Megoldás

Ha x-et egyről kettőre növeljük, az f értéke 3-mal nő, vagyis $m = 3$. Ha az $M(1; -1)$ pontból egyet megyünk balra, akkor hármat kell lépnünk lefelé, így eljutunk a $Q(0; -4)$ pontba. Tehát $b = -4$.

$f(x) = 3x - 4$.



3. K1 A megadott függvények közül melyek az elsőfokúak?

a) $f(x) = 1000x - \dfrac{1}{1000}$; *b)* $g(x) = \dfrac{3 - 5x}{7}$; *c)* $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$;

d) $i: \mathbf{R}\setminus\{-3\},\ i(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3},\ x \in \mathbf{R}\setminus\{-3\}$; *e)* $h(x) = (x - 2)\cdot(2x + 3)$.

Megoldás

a) elsőfokú függvény, $m = 1000$, $b = -\dfrac{1}{1000}$.

b) elsőfokú függvény, $m = -\dfrac{5}{7}$, $b = \dfrac{3}{7}$.

c) másodfokú függvény.

d) $\dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = \dfrac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3,\ x \neq -3$, ami egy elsőfokú kifejezés.

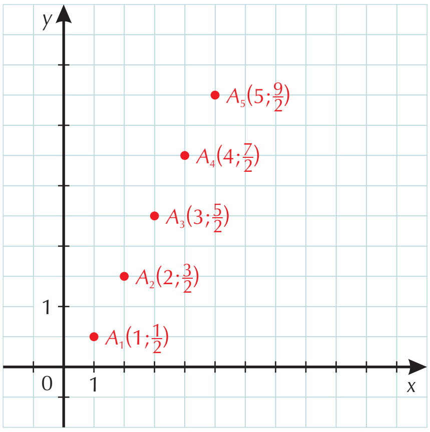
e) $(x - 2)(2x + 3) = 2x^2 - x - 6$, ami egy másodfokú kifejezés.

4. K1 Ábrázoljuk a következő sorozatok első öt elemét a koordináta-rendszerben! Döntsük el róluk, hogy számtaniak-e!

a) $a_n = \dfrac{2n-1}{2}$.

Megoldás

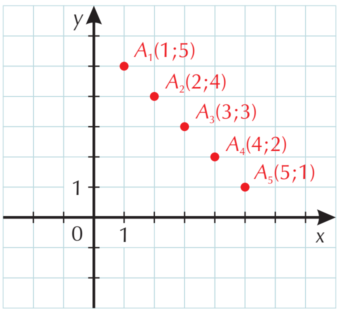
$a_1 = \dfrac{2\cdot 1-1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{2\cdot 2-1}{2} = \dfrac{3}{2}$, $a_3 = \dfrac{2\cdot 3-1}{2} = \dfrac{5}{2}$, $a_4 = \dfrac{2\cdot 4-1}{2} = \dfrac{7}{2}$, $a_5 = \dfrac{2\cdot 5-1}{2} = \dfrac{9}{2}$. Tehát ábrázolnunk kell az $A_1\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$, $A_2\left(2; \dfrac{3}{2}\right)$, $A_3\left(3; \dfrac{5}{2}\right)$, $A_4\left(4; \dfrac{7}{2}\right)$, $A_5\left(5; \dfrac{9}{2}\right)$ pontokat. Számtani sorozat, $d = 1$, ami az n együtthatója.



b) $b_n = 6 - n$.

Megoldás

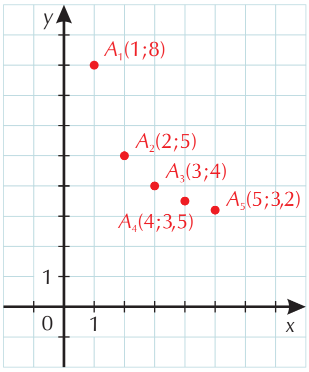
Az előzőhöz hasonlóan könnyen kiszámíthatjuk az első öt elemet.
$b_1 = 5$, $b_2 = 4$, $b_3 = 3$, $b_4 = 2$, $b_5 = 1$.
Számtani sorozat, $d = -1$.



c) $c_n = \dfrac{6}{n} + 2$.

Megoldás

$c_1 = 8$, $c_2 = 5$, $c_3 = 4$, $c_4 = 3{,}5$, $c_5 = 3{,}2$.
Nem számtani sorozat, mert például: $c_2 - c_1 \neq c_3 - c_2$, $5 - 8 \neq 4 - 5$, $-3 \neq -1$.

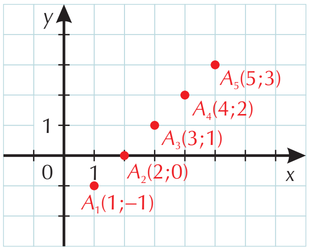


d) $d_n = \dfrac{n^2 - 4}{n + 2}$.

Megoldás

$\dfrac{n^2 - 4}{n + 2} = \dfrac{(n - 2)(n + 2)}{n + 2} = n - 2$, $n \neq -2$, ez egy számtani sorozat, $d = 1$.

Az elemek: $d_1 = -1$, $d_2 = 0$, $d_3 = 1$, $d_4 = 2$, $d_5 = 3$.



42. AZ ABSZOLÚTÉRTÉK-FÜGGVÉNY

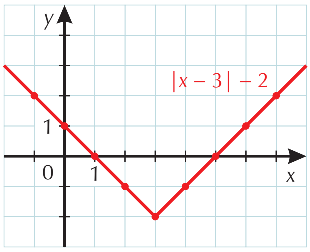
1. Ábrázoljuk a következő függvényeket táblázat segítségével!

K1 *a)* $f(x) = |x - 3| - 2$.

Megoldás

$x = 3$-nál lesz a legkisebb az abszolút érték. Ezért érdemes a három környékéről választani az x értékeit.

x	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$x - 3$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$\|x - 3\|$	4	3	2	1	0	1	2	3	4
$\|x - 3\| - 2$	2	1	0	–1	–2	–1	0	1	2



$$f(x) = \begin{cases} (x-3) - 2 = x - 3 - 2 = x - 5, & \text{ha } x \geq 3; \\ -(x-3) - 2 = -x + 3 - 2 = -x + 1, & \text{ha } x < 3. \end{cases}$$

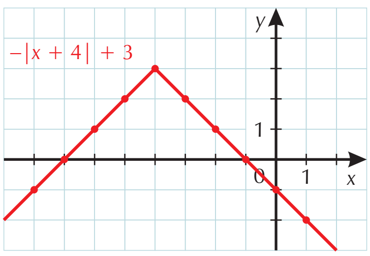
Valóban a két félegyenest kaptuk meg.

K1 *b)* $g(x) = -|x + 4| + 3$.

Megoldás

Itt az $x = -4$-nél lesz az abszolút értéken belül nulla. Érdemes az x értékeket a (–4) közeléből választani.

x	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
$x + 4$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$\|x + 4\|$	4	3	2	1	0	1	2	3	4
$-\|x + 4\|$	–4	–3	–2	–1	0	–1	–2	–3	–4
$-\|x + 4\| + 3$	–1	0	1	2	3	2	1	0	–1



$$g(x) = \begin{cases} -(x+4) + 3 = -x - 4 + 3 = -x - 1, & \text{ha } x \geq -4; \\ -[-(x+4)] + 3 = x + 4 + 3 = x + 7, & \text{ha } x < -4. \end{cases}$$

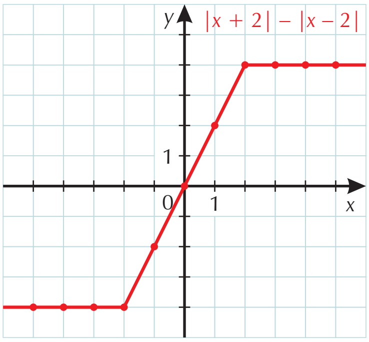
Pontosan ezt a két félegyenest kaptuk meg.

E1 *c)* $h(x) = |x+2| - |x-2|$.

Megoldás

Az $x = 2$ és az $x = -2$ is fontos szerepet játszik. Ezért –6-tól +6-ig írjuk a számokat a táblázatba:

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
$x+2$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\|x+2\|$	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x-2$	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$\|x-2\|$	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
$\|x+2\|-\|x-2\|$	–4	–4	–4	–4	–4	–2	0	2	4	4	4	4	4



$$h(x) = \begin{cases} (x+2)-(x-2) = x+2-x+2 = 4, & \text{ha } x \ge 2; \\ (x+2)-[-(x-2)] = (x+2)+(x-2) = x+2+x-2 = 2x, & \text{ha } -2 \le x < 2; \\ -(x+2)-[-(x-2)] = -(x+2)+(x-2) = -x-2+x-2 = -4, & \text{ha } x < -2. \end{cases}$$

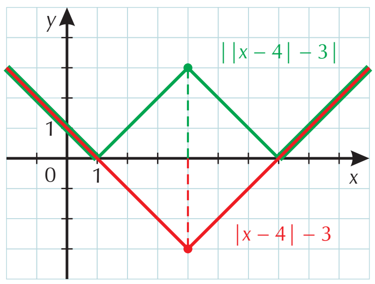
Az első esetben mindkét abszolút értéken belül pozitív szám áll.
A második esetben az $(x-2)$ már negatív.
Harmadszor pedig már mindkettő negatív.
Látható, hogy az x tengelyen a –2-től balra haladva mind a kisebbítendő, mind a kivonandó eggyel nő. Ez pontosan azt jelenti, hogy a különbség nem változik. Ugyanez történik, ha az x tengelyen kettőtől jobbra haladunk.

E1 *d)* $i(x) = ||x-4|-3|$.

Megoldás

$x = 4$-nél a belső abszolútérték-függvényünk nullát vesz fel, ezért ez lesz a táblázatban a középső érték.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x-4$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$\|x-4\|$	4	3	2	1	0	1	2	3	4
$\|x-4\|-3$	1	0	–1	–2	–3	–2	–1	0	1
$\|\|x-4\|-3\|$	1	0	1	2	3	2	1	0	1



$$-g(x) = |x-4|-3 = \begin{cases} (x-4)-3 = x-4-3 = x-7, & \text{ha } x \ge 4; \\ -(x-4)-3 = -x+4-3 = -x+1, & \text{ha } x < 4. \end{cases}$$

Az $i(x)$ függvényt könnyen tudjuk ábrázolni. A $-g(x)$ függvénygörbének csak az x tengely alatti részét kell tükröznünk az x-re.

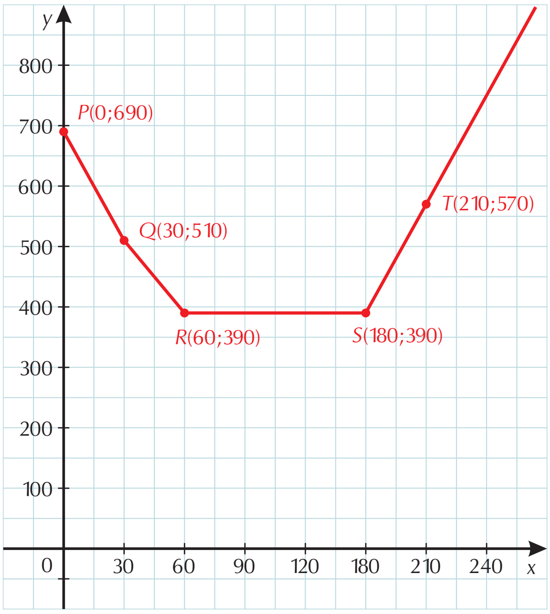
2. E1 Hogyan változik a **4. példa** megoldása, ha tudjuk még, hogy Hatvanba kétszer, Miskolcra pedig háromszor annyi árut szállítanak, mint Gödöllőre?

Megoldás

A feladat feltételeinek módosítása azt jelenti, hogy a Hatvanig megtett utat kétszeresen, a Miskolcig megtettet pedig háromszorosan kell figyelembe venni. Amíg Gödöllőre egyszer megy a kamion, addig Hatvanba kétszer, Miskolcra pedig háromszor.

Az $f(x) = |x-30| + 2|x-60| + 3|x-180|$ függvényt kell vizsgálnunk.

$$f(x) = \begin{cases} -(x-30)-2(x-60)-3(x-180) = -6x+690, & \text{ha } x < 30; \\ (x-30)-2(x-60)-3(x-180) = -4x+630, & \text{ha } 30 \le x < 60; \\ (x-30)+2(x-60)-3(x-180) = 390, & \text{ha } 60 \le x < 180; \\ (x-30)+2(x-60)+3(x-180) = 6x-690, & \text{ha } 180 \le x. \end{cases}$$



Az ábránkon jól látható, hogy Hatvan és Miskolc között mindegy, hova tesszük a bázist.

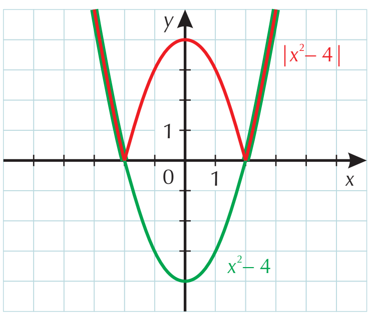
3. Ábrázoljuk a következő függvényeket!

K2 *a)* $f(x) = |x^2 - 4|$.

Megoldás

Először készítsünk táblázatot!

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$x^2 - 4$	12	5	0	–3	–4	–3	0	5	12
$\lvert x^2 - 4 \rvert$	12	5	0	3	4	3	0	5	12

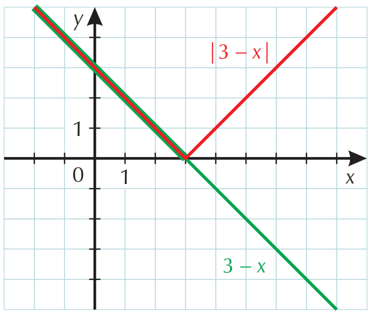


A végeredményt úgy kaptuk, hogy az $x^2 - 4$ függvénygörbe x tengely alatti részét tükröztük az x tengelyre.

K1 *b)* $g(x) = |3 - x|$.

Megoldás

A $g_1(x) = 3 - x$ lineáris függvényt könnyen tudjuk ábrázolni. Az y tengelyt 3-nál metszi, és a meredeksége $m = (-1)$. Ezután már csak a görbe x tengely alatti részét kell tükrözni az x tengelyre.



A grafikonunk megegyezik az $i(x) = |x - 3|$ függvény grafikonjával, amint azt könnyen ellenőrizhetjük. Ez azért nyilvánvaló, mert $3 - x = -(x - 3)$. Tehát egyik szám a másiknak a mínusz egyszerese, ami egyben azt is jelenti, hogy az abszolút értékük megegyezik.

43. A MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY

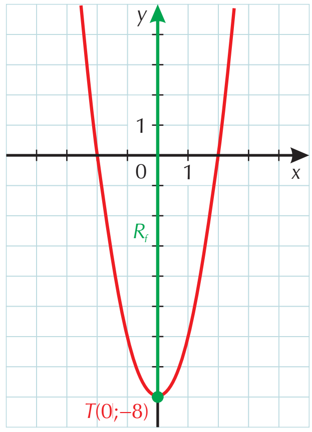
1. K1 Értéktáblázat segítségével ábrázoljuk a következő függvényeket!
Keressük meg a parabolák tengelypontjait! Adjuk meg a függvények értékkészletét!

a) $f(x) = 2x^2 - 8$.

Megoldás

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$2x^2 - 8$	10	0	–6	–8	–6	0	10

A parabola tengelypontja a $T(0; -8)$. $R_f = [-8; \infty[$.

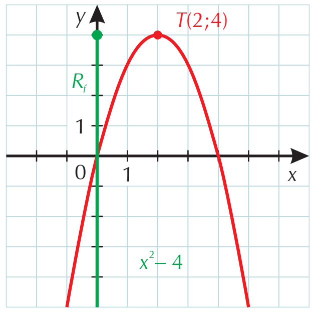


b) $g(x) = -x^2 + 4x$.

Megoldás

x	–1	0	1	2	3	4	5
$-x^2$	–1	0	–1	–4	–9	–16	–25
$4x$	–4	0	4	8	12	16	20
$-x^2 + 4x$	–5	0	3	4	3	0	–5

Tehát a függvényünknek maximuma van. $R_g =]-\infty; 4]$. A parabola tengelypontja: $T(2; 4)$.



c) $h(x) = -(x-2)^2 + 4$.

Megoldás

x	–1	0	1	2	3	4	5
$-(x-2)^2 + 4$	–5	0	3	4	3	0	–5

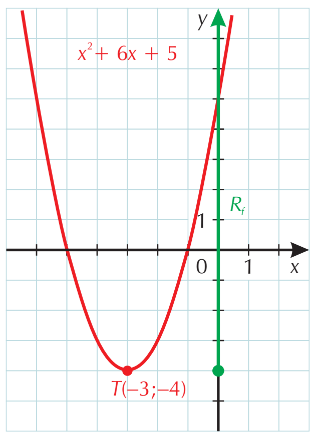
A grafikon teljes egészében megegyezik a $g(x)$ függvény grafikonjával, mivel
$-(x-2)^2 + 4 = -[x^2 - 4x + 4] + 4 = -x^2 + 4x - 4 + 4 = -x^2 + 4x$.

d) $i(x) = x^2 + 6x + 5$.

Megoldás

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
$x^2 + 6x + 5$	5	0	–3	–4	–3	0	5

A parabola tengelypontja: $T(-3; -4)$.
$R_i = [-4; \infty[$.



e) $j(x) = (x + 3)^2 - 4$.

Megoldás

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
$x^2 + 6x + 5$	5	0	–3	–4	–3	0	5

$R_i = [-4; \infty[$.

Jól látható, hogy a két grafikon $(j(x) = i(x))$ teljesen megegyezik, mivel $(x + 3)^2 - 4 = x^2 + 6x + 9 - 4 = x^2 + 6x + 5$.

f) $k(x) = x|x|$.

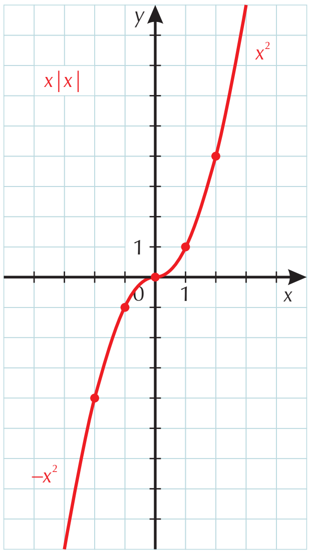
Megoldás

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$x \cdot \lvert x \rvert$	–16	–3	–4	–1	0	1	4	9	16

$x \geq 0$-ra az $x \mapsto x^2$, $x < 0$-ra pedig az $x \mapsto -x^2$ függvény grafikonját kapjuk, mert

$$k(x) = \begin{cases} x \cdot x = x^2, & \text{ha } x \geq 0; \\ x \cdot (-x) = -x^2, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

$R_j = R$.



2. E1 Adjuk meg azt a másodfokú függvényt, aminek képe illeszkedik a következő három pontra!

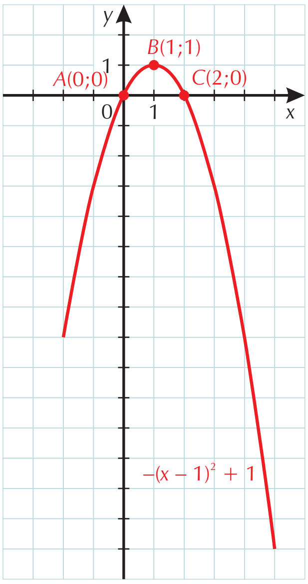
a) $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(2; 0)$.

Megoldás

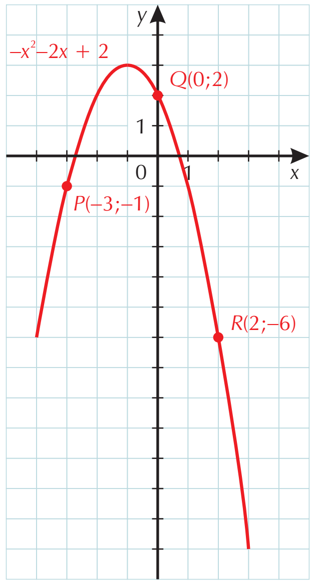
Az A és C pontok egymás tükörképei az $x = 1$ egyenletű egyenesre, ezért a parabolánk tengelye az $x = 1$ egyenes lesz. A három pont alapján az is nyilvánvaló, hogy „szomorú” (lefelé nyíló), és az x^2 együtthatója –1 lesz.

Ezek után:

$f(x) = -(x - 1)^2 + 1$. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez jó is.



b) $P(-3; -1)$, $Q(0; 2)$, $R(2; -6)$.



Megoldás

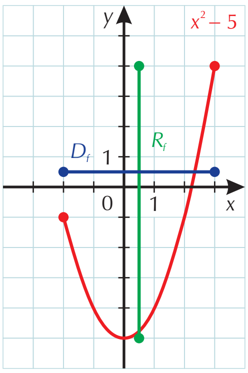
A megadott pontok alapján tudjuk a függvény helyettesítési értékét három helyen.
Ezeket behelyettesíthetjük az $f(x) = ax^2 + bx + c$ képletünkbe.

$-1 = a(-3)^2 + b(-3) + c$
$2 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow 2 = c$
$-6 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$
$-1 = 9a - 3b + 2 \qquad / -2$
$-6 = 4a + 2b + 2 \qquad / -2$
$-3 = 9a - 3b \qquad / :3$
$-8 = 4a + 2b \qquad / :2$
$-1 = 3a - b$
$-4 = 2a + b \qquad$ (/ adjuk össze a két egyenletet)
$-5 = 5a \qquad / :5$
$-1 = a \Rightarrow -4 = 2 \cdot (-1) + b \Rightarrow -4 = -2 + b \Rightarrow -2 = b.$

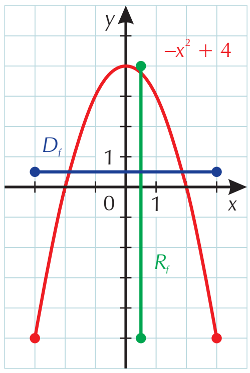
Összefoglalva: $f(x) = -x^2 - 2x + 2$.
Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez jó is.

3. K2 A grafikonjuk alapján adjuk meg a következő másodfokú függvények hozzárendelési szabályát, értelmezési tartományát és értékkészletét!

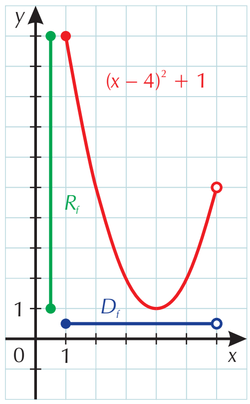
a)



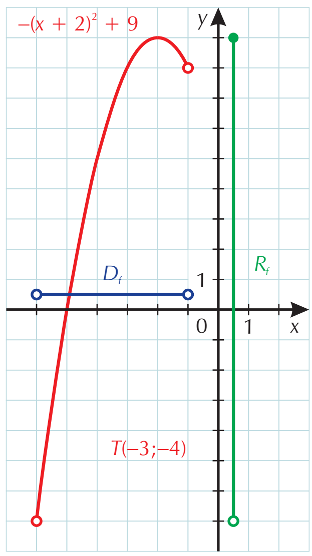
b)



c)



d)



Megoldás

a) Az első grafikonon az $x \mapsto x^2 - 5$ függvény képét látjuk a $[-2; 3]$ intervallumon. A legkisebb függvényérték -5, a legnagyobb pedig 5. Ezek alapján: $D_f = [-2; 3]$, $R_f = [-5; 4]$ és $f(x) = x^2 - 5$.

b) A lefelé néző parabolát 4-gyel toltuk el az y tengely mentén 4 egységgel.
$D_f = [-3; 3]$, $R_f = [-5; 4]$ és $f(x) = -x^2 + 4$.

c) A normálparabolát eltoltuk néggyel jobbra és eggyel felfelé.
$D_f = [1; 6[$, $R_f = [1; 10]$ és $f(x) = (x-4)^2 + 1$.

d) A lefelé néző parabolát kettővel balra toltuk és utána kilenccel felfelé.
$D_f =]-6; -1[$, $R_f =]-7; 9]$ és $f(x) = -(x+2)^2 + 9$.

4. K2 Egy nagy erővel megütött golflabda földfelszíntől mért távolságát jó közelítéssel a $h = 25t - 5t^2$ függvény írja le. (A t időt másodpercben, a h magasságot méterben számítjuk.)

a) Mekkora volt a földfelszíntől mért legnagyobb távolsága a labdának?

b) Mekkora távolságot tett meg vízszintes irányban a labda, ha a vízszintes irányú sebessége a mozgás folyamán állandónak tekinthető 32 m/s volt? (A labdát lassító közegellenállás hatását elhanyagoljuk.)

Megoldás

a) A $h(t) = 5t(5 - t)$ függvény képe lefelé nyitott parabola, $t = 0$ és $t = 5$ zérushelyekkel. A függvény a maximális értékét $t = 2{,}5$ esetén veszi fel, ez $h(2{,}5) = 31{,}25$. Tehát a golflabda földfelszíntől mért legnagyobb távolsága 31,25 méter.

b) A labda 5 másodpercig van a levegőben, ezalatt $5 \cdot 32 = 160$ (m) távolságot tesz meg vízszintes irányban.

44. RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK

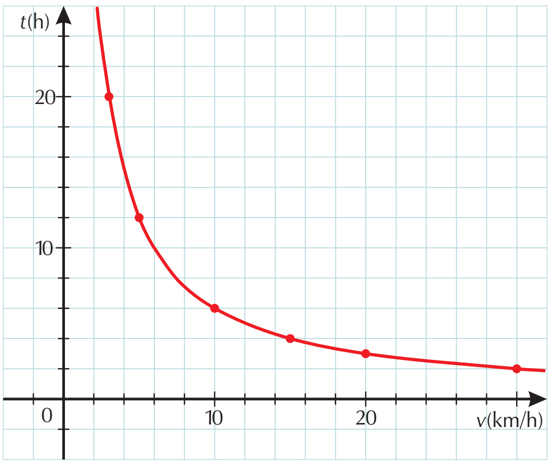
1. K1 Keressünk fordítottan arányos mennyiségeket! Adjuk meg a nekik megfelelő függvényt a grafikonjával együtt!

Megoldás

a) Egy adott hosszúságú útszakaszt szeretnénk megtenni állandó sebességgel. Sebességünk és az út megtételéhez szükséges idő fordítottan arányos lesz. Képlettel: $s = vt =$ állandó. Legyen az út 60 km, és a sebességünk gyalogosan $5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, kerékpárral $10\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $15\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, vagy $30\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Készítsünk táblázatot!

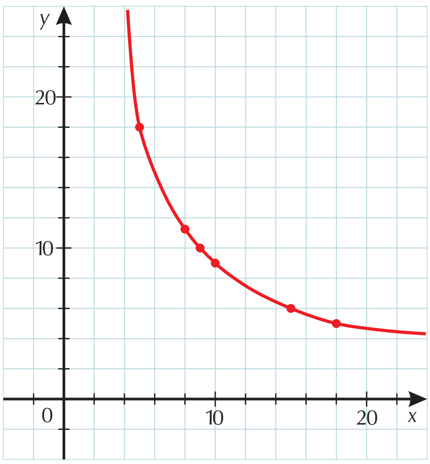
v (km/h)	5	10	15	20	30
t (h)	12	6	4	3	2



Megkaptuk a fordított arányosság képét, a hiperbolát.

b) Egy 90 m^2-es téglalap alapú házat szeretnénk építeni. Az utcafront és az udvari front hossza fordítottan arányos lesz egymással, hiszen a kettő szorzata állandó, 90 m^2.
Az *x* jelentse az utcafront hosszát, *f*(*x*) pedig az udvari front hosszát.

x	5	8	9	10	15	18
f(*x*)	18	11,25	10	9	6	5



A kapott értékek alapján megkaptuk a hiperbolát.

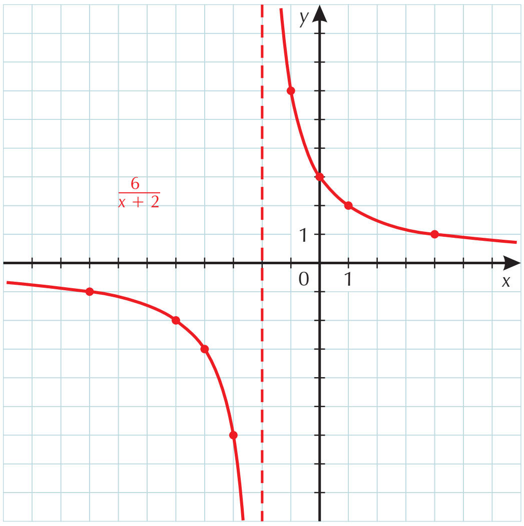
2. K1 Ábrázoljuk a következő függvényeket értéktáblázat segítségével! Ügyesen válasszuk meg x értékeit!

a) $f\colon \mathbf{R}\setminus\{-2\} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{6}{x+2}$.

Megoldás

$x = -2$-nél lesz a függőleges aszimptota. A vízszintes pedig továbbra is az x tengely marad.

x	–8	–5	–4	–3	–1	0	1	4
$x+2$	–6	–3	–2	–1	1	2	3	6
$\frac{6}{x+2}$	–1	–2	–3	–6	6	3	2	1



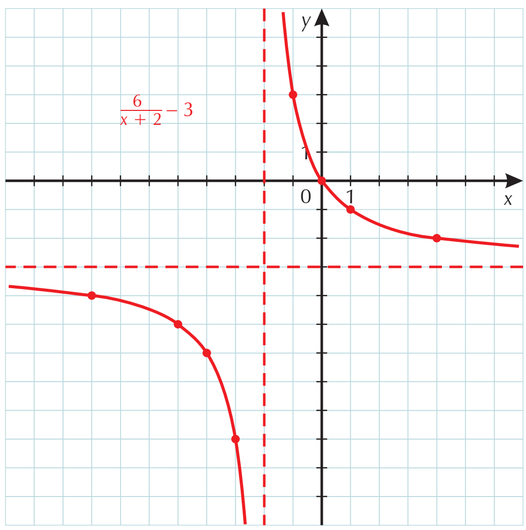
b) $g\colon \mathbf{R}\setminus\{-2\} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{6}{x+2} - 3$.

Megoldás

Az előző megoldás felhasználásával:

x	–8	–5	–4	–3	–1	0	1	4
$x+2$	–6	–3	–2	–1	1	2	3	6
$\frac{6}{x+2}$	–1	–2	–3	–6	6	3	2	1
$\frac{6}{x+2} - 3$	–4	–5	–6	–9	3	0	–1	–2

A $g(x)$ helyettesítési értékei 3-mal kisebbek minden x-re $f(x)$-nél, ezért a függvénygörbét (–3) egységgel az y tengellyel párhuzamosan eltoljuk. Így a vízszintes aszimptota is „lejjebb" van hárommal, mint az *a)*-ban.



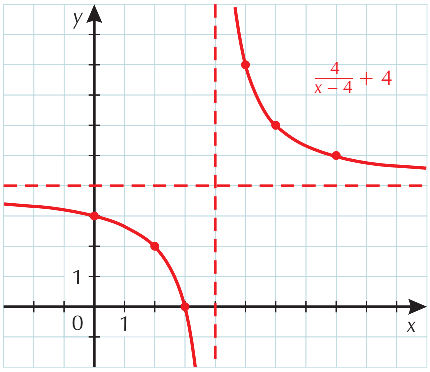
c) $h\colon \mathbf{R}\setminus\{4\} \to \mathbf{R},\quad x \mapsto \dfrac{4}{x-4} + 4.$

Megoldás

Az $x = 4$-nél nincs értelme a kifejezésnek, ezért itt lesz a függőleges aszimptota.

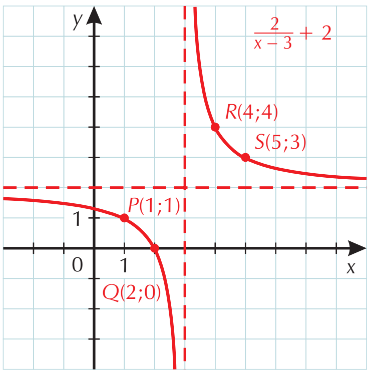
x	0	2	3	5	6	8
$x-4$	–4	–2	–1	1	2	4
$\dfrac{4}{x-4}$	–1	–2	–4	4	2	1
$\dfrac{4}{x-4}+4$	3	2	0	8	6	5

A vízszintes aszimptota az $y = 4$ egyenes lesz.

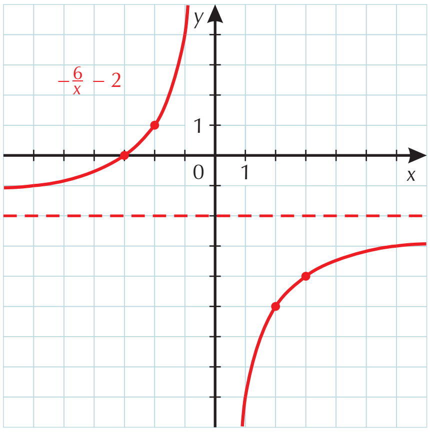


3. K2 Adjuk meg a grafikonjukkal megadott függvények hozzárendelési szabályát!

a)



b)



Megoldás

a) Az $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ függvény grafikonja 3-mal jobbra tolódott és kettővel felfelé. Így a képletünk:

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + 2.$$

b) Az $x \mapsto \dfrac{6}{x}$ grafikonját az x tengelyre tükröztük és kettővel „lejjebb” toltuk.

$$f(x) = \frac{-6}{x} - 2.$$

AZ EGÉSZRÉSZ-, TÖRTRÉSZ- ÉS AZ ELŐJELFÜGGVÉNY (OLVASMÁNY)

1. **Nem érettségi tananyag.** Adjuk meg azt a függvényt, ami a számokat tízesekre kerekíti!

Megoldás

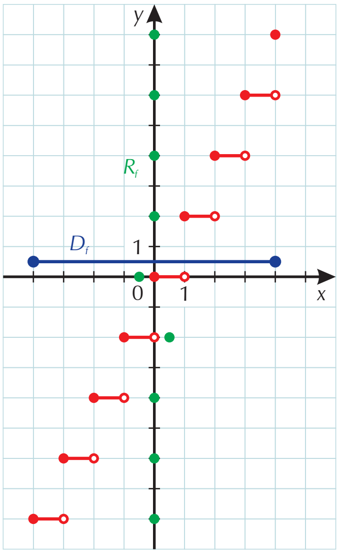
$f(x) = 10 \cdot \left[\frac{x+5}{10}\right]$. Pl.: $f(26) = 10 \cdot \left[\frac{26+5}{10}\right] = 10[3,1] = 10 \cdot 3 = 30$.

2. **Nem érettségi tananyag.** Ábrázoljuk a következő függvényeket!

a) $f\colon [-4;4] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2 \cdot [x]$.

Megoldás

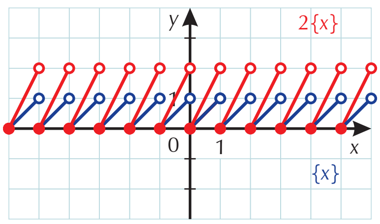
Kiindulhatunk az $x \mapsto [x]$ grafikonjából. Ennek az értékei változnak kétszeresükre. Ez azt jelenti, ahol eddig nulla volt, az is marad, ahol egy volt, ott most kettő lesz stb.



b) $g\colon [-4;4] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2 \cdot \{x\}$.

Megoldás

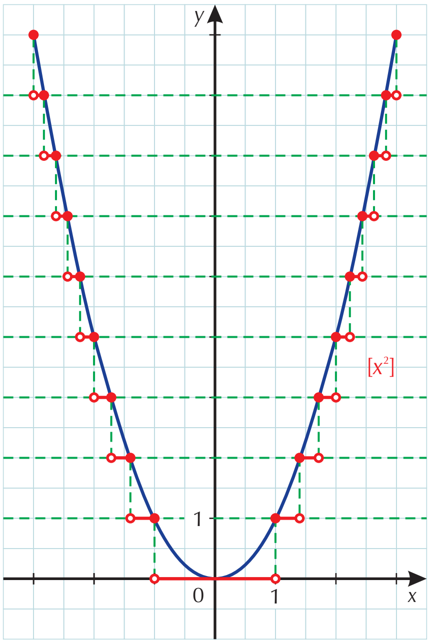
Az $x \mapsto \{x\}$ értékei változnak kétszeresükre. A $[0; 1[$ intervallumon az $x \mapsto 2x$ függvény grafikonját kell megrajzolni. Mivel a periódus nem változik, ezt a görbét kell csak ismételni a továbbiakban.



c) $h\colon [-3;3] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto [x^2]$.

Megoldás

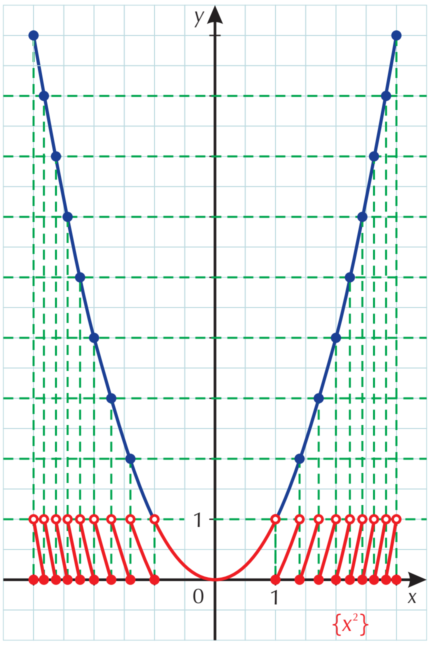
Az *y* tengely minden egész koordinátájú pontjába húzzunk egy vízszintes egyenest! Ahol a függvénygörbe metszi ezeket az egyeneseket, oda teszünk egy teli karikát, mert az egész számok egész része önmaga. Az egyes sávokban pedig levetítjük a görbét az alsó egyenesre.



d) $i\colon [-3;3] \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \{x^2\}$.

Megoldás

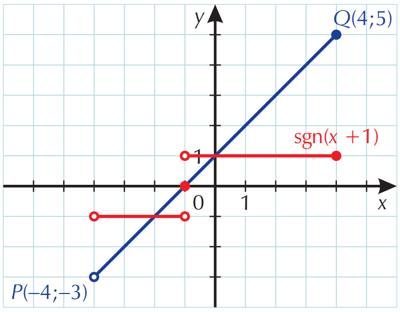
Az előző megoldást felhasználva, csak az egyes sávokban lévő részeket kell eltolni függőlegesen a [0; 1[sávba. Vigyázzunk arra, hogy az *x* tengelyen lévő pontokat teli, míg az $y = 1$ egyenesen lévőket üres karikával jelöljük!



e) j: $]-4;4] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \operatorname{sgn}(x+1)$.

Megoldás

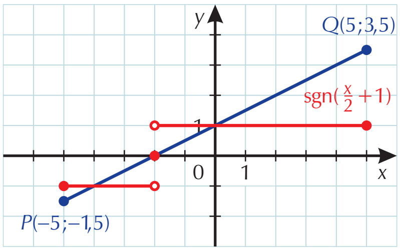
Az $(x + 1)$ kifejezés előjelét kell ábrázolnunk. Ahol ez nulla (az $x = -1$-nél), ott nulla, ha pozitív, akkor $+1$, ha negatív, akkor -1 a függvény értéke.



f) k: $[-5;5] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{2}+1\right)$.

Megoldás

Az előző feladat alapján először az $x \mapsto \left(\frac{x}{2}+1\right)$ grafikonját rajzoljuk meg. Ahol ez metszi az x tengelyt, ott nulla, ahol az x tengely alatt van, ott a függvényünk értéke -1, ahol pedig fölötte, ott $+1$.



VI. STATISZTIKA

45–46. ADATOK ÉS ÁBRÁZOLÁSUK. A STATISZTIKA TÁRGYA, FELADATA

1. K1 Gyűjtsük össze az osztályba járó lányok magasságának adatait! Ábrázoljuk oszlopdiagramon!

Megoldás

Mindenki a saját osztályára készíti el.

2. K1 Keressünk hibás (csalfa, tendenciózus) diagramokat a nyomtatott sajtóban!

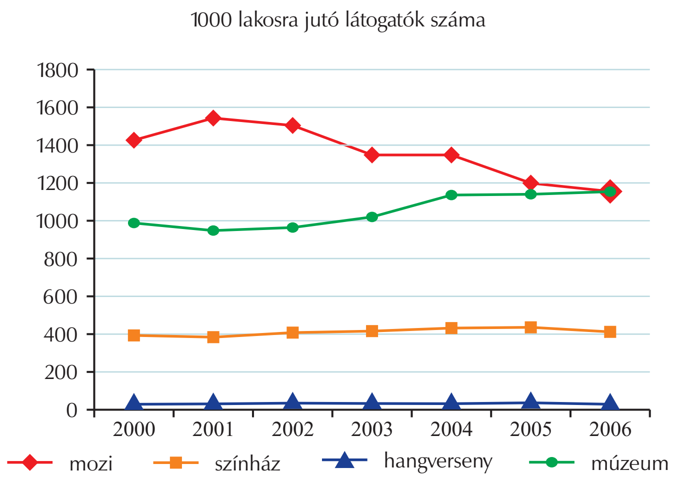
Megoldás

Hiba lehet például egy diagramon, ha
a) nincs rajta az értéktengely (*y*) zérushelye, mert megváltoztatja a görbe meredekségét;
b) különálló adatokat összeköt (pl. kisnemesek száma, középnemesek száma, nagybirtokosok száma);
c) különböző szélességű osztályokat azonos *x* tengelyű beosztás mellett ábrázol… stb.

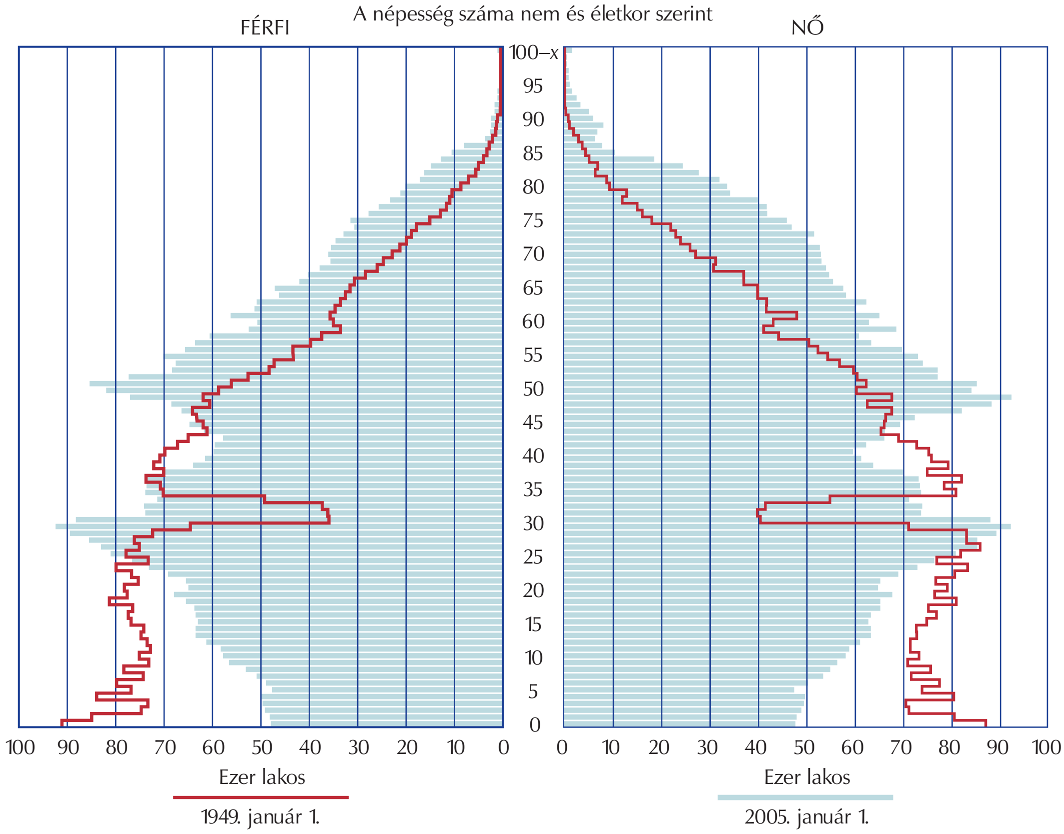
3. K1 Ábrázoljuk közös vonaldiagramon a látogatók számát! (Forrás: KSH.)

Megoldás

Év	1000 lakosra jutó			
	mozilátogató	színházlátogató	hangversenylátogató	múzeumlátogató
2000	1426	393	42	987
2001	1543	383	44	947
2002	1504	409	48	962
2003	1348	414	46	1019
2004	1346	432	45	1137
2005	1199	437	50	1139
2006	1155	413	43	1154



4. K1 Az alábbi grafikont korfának hívjuk. Mit olvashatunk le a 2005-ös korfáról, összehasonlítva az 1949-essel? (Forrás: KSH.)
Mi okozza a beugrást a 28–33 éveseknél az 1949-es korfán?
Hol tart ez a beugrás 2005-ben?
Mikor születtek a 2005-ös korfa maximális férfi- és női értékeihez tartozók?



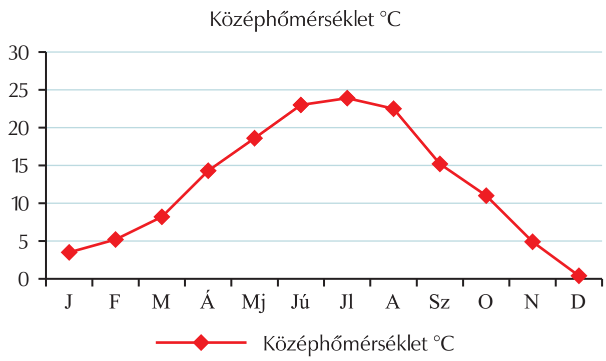
Megoldás

A 2005-ös korfa alja összeszűkül, ami azt jelenti, hogy kevés gyerek születik, az 1949-es korfa széles alapokon áll.
A II. világháború.
A 84–89 éveseknél.
A maximális érték férfiakra a 28 éveseknél található. Ők 1977-ben születtek. Nőkre a maximális érték az 50 éveseknél van, ők 1955-ben születtek.

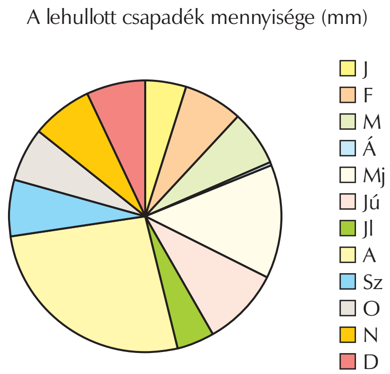
5. K1 Ábrázoljuk a középhőmérsékleteket vonaldiagramon! (Forrás: OMSZ.)
A lehullott csapadék összmennyiségének hány százaléka esett az egyes hónapokban? Ábrázoljuk kördiagramon!

Időszak		A siófoki megfigyelőállomás időjárási adatai				
		közép-	maximális	minimális	lehullott csapadék, mm	a napsütéses órák száma
		hőmérséklet, °C				
2007.	J	3,5	13,7	–6,1	31	88
	F	5,2	13,4	–1,1	46	104
	M	8,2	19,4	–0,6	43	153
	Á	14,3	24,4	3,1	1	309
	Mj	18,6	31	5,1	90	291
	Jú	23,0	35,6	12	61	326
	Jl	23,9	37,7	15	29	344
	A	22,5	34,1	13,4	173	276
	Sz	15,2	24,7	5,8	44	200
	O	11,0	21	1	42	130
	N	4,9	16,3	–4	47	76
	D	0,4	10,3	–7	47	29

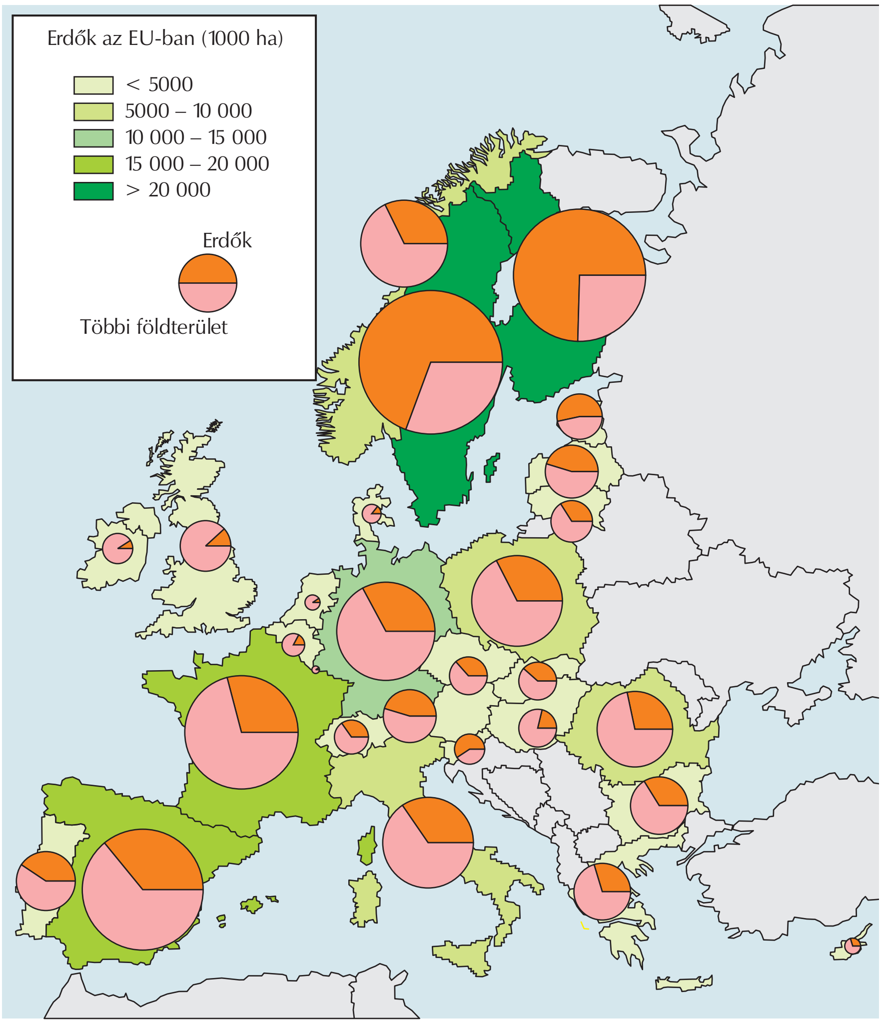
Megoldás



HÓNAP	%
J	4,74
F	7,03
M	6,57
Á	0,15
Mj	13,76
Jú	9,33
Jl	4,43
A	26,45
Sz	6,73
O	6,42
N	7,19
D	7,19



6. K2 Ez a térkép és a kördiagramok az Európai Unió országainak erdős területeiről készült adatokat mutatja. Értelmezzük! (Forrás: eurostat.com)
Hol a legnagyobb az erdők aránya (narancssárga) a többi földterülethez (rózsaszín) képest?
A térkép színezése szerint milyen határok közt van az erdős terület nagysága Spanyolországban, Romániában és Portugáliában?



Megoldás

Finnországban (kb. 75%) és Svédországban (kb. 66%).
Spanyolországban 15 000 és 20 000 ha között, Romániában 5000 és 10 000 ha között, Portugáliában 5000 ha alatt.

47–48. KÖZÉPÉRTÉKEK

1. K1 Az osztályzatai melyik középértékét érdemes kérnie a jó tanulónak, aki egyszer elfelejtette megcsinálni a feladatát, és kapott egy 1-est? És a rossz tanulónak, akinek pontokból összejött egy 5-öse?

Megoldás

A jó tanuló inkább a móduszt vagy a mediánt kérje, mert azt egy szélsőséges jegy kevésbé módosítja, míg a rossz tanulón sokat segít, ha az átlagot választja, ami érzékenyebb a kiugró értékekre.

2. K1 Számítsuk ki annak az osztálynak az átlagát matematikából, amelyben 6 db 5-ös, 7db 4-es, 9 db 3-as, 3 db kettes és egyetlen elégtelen volt!

Megoldás

5	4	3	2	1
6	7	9	3	1

Az osztályba tehát 26-an járnak, és az átlaguk:

$$\overline{X} = \frac{6\cdot 5 + 7\cdot 4 + 9\cdot 3 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1}{6+7+9+3+1} = \frac{92}{26} \approx 3{,}54.$$

3. K1 Az évfolyamon kémiából az *a* osztály átlaga 3,65; a *b* osztály átlaga 4,02; a *c* osztály átlaga 3,86, míg a *d* osztály átlaga 3,54 volt. Mennyi az évfolyam átlaga kémiából, ha az egyes osztályokba rendre 28; 25; 32 és 30 gyerek jár?

Megoldás

$$\overline{X} = \frac{28\cdot 3{,}65 + 25\cdot 4{,}02 + 32\cdot 3{,}86 + 30\cdot 3{,}54}{28+25+32+30} \approx 3{,}76.$$

4. K2 Egy 10 elemű pozitív egészekből álló mintában a medián 19. Ha az utolsó, legnagyobb elem értékét 20-szal megnöveljük, hogy változik a medián értéke? Változhat-e a módusz? Változik-e és mennyivel az átlag?

Megoldás

A medián nem változik. A módusz változhat, ha a legnagyobb érték volt a módusz. Az átlag 2-vel nő.

5. K2 Ha az utolsó tesztemet angolból 89 pontra írom, akkor 82 pont lesz az átlagom, ha csak 57 pontra, akkor az átlagom 78 pont lesz. Hány tesztet írtam az idén?

Megoldás

Legyen n a tesztek száma, és az eredményüket jelölje x_1, x_2, x_3 …x_{n-1}. A feltétel szerint $\overline{X_1} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + 89}{n} = 82$ és $\overline{X_2} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + 57}{n} = 78$. A két egyenletet kivonva egymásból és n-nel átszorozva: $89 - 57 = 82n - 78n$, ahonnan $n = 8$.

6. K2 Adjunk meg olyan pozitív természetes számokból álló 10 elemű mintát, amelynek mediánja 2, és egyetlen módusza 4! Mennyi az átlaga?

Megoldás

Ha a medián 2, akkor az ötödik és hatodik helyen álló elemek átlaga 2 a nagyság szerint rendezett mintában, így ha az ötödik és hatodik helyen is 2 áll, akkor csak úgy lehet az egyetlen módusz 4, ha az utolsó négy helyen mindig 4-es áll, az első három helyen 1-es, az azt követő három helyen 2-es áll. Ekkor az átlag $\frac{25}{10} = 2{,}5$. Lehetne úgy is a medián 2, ha az ötödik helyen 1-es, a hatodik helyen 3-as áll, de ekkor az első öt hely mindegyikén 1-es kell álljon. Ebben az esetben viszont nem lehet az egyetlen módusz a 4.

7. K1 Számítsuk ki az előző lecke feladatsorának 5. feladatában az éves középhőmérsékletet mint a havi középhőmérsékletek átlagát! Vegyük figyelembe, hogy az egyes hónapokban hány nap van. A február legyen 28 napos.

Megoldás

Az éves középhőmérséklet a hónapok középhőmérsékleteinek súlyozott átlaga. $\overline{X} \approx 12{,}6\ ^\circ\mathrm{C}$.

8. E1 Egy diáknak 7 jegye van matematikából. Ha még egy ötöst kapna, az átlaga 0,125-del nőne. Hány 4-ese lehet eddig, ha a két leggyengébb jegyének átlaga 2?

Megoldás

Megoldhatjuk például egyenlettel: Jelöljük az első 7 jegy átlagát $\overline{X}$-gal.

$\frac{7 \cdot \overline{X} + 5}{8} = \overline{X} + 0{,}125$, ahonnan $\overline{X} = 4$. Mivel ebből következik, hogy az első 7 jegy összege $7 \cdot 4 = 28$, a két legrosszabb jegy összege hasonlóan 4, így az öt darab jobb osztályzat összege 24. Ez azonban csak úgy jöhet ki, ha 4 darab 5-ös és egy darab 4-es jegye van.

9. E1 Hány fős az az évfolyam, ahol ha az osztályzatom eggyel jobb, mint a többiek átlaga, akkor hozzávéve az én jegyem, az átlag 0,02-dal emelkedik? Mennyi volt az átlag az én jegyem nélkül?

Megoldás

Hasonlóan számolunk, mint az előző feladatban. $\frac{(n-1) \cdot \overline{X} + (\overline{X} + 1)}{n} = \overline{X} + 0{,}02$. Innen $n = 50$. Látszik, hogy a második kérdésre nem egyértelmű a válasz, mivel $\overline{X}$ kiesett. Ezért $\overline{X}$ értéke akármennyi lehetett. $(1 \le \overline{X} < 5.)$

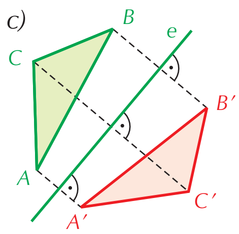
VII. GEOMETRIA – TÜKRÖZÉSEK

50–51. TENGELYES TÜKRÖZÉS

1. K1

Tükrözzünk egy háromszöget
a) egyik oldalegyenesére;
b) egyik szögfelező egyenesére;
c) a sík egy, a háromszöget nem metsző egyenesére!

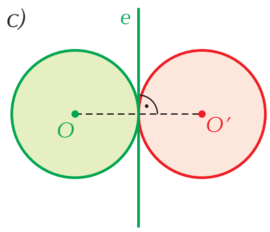
Megoldás



2. K1

Tükrözzünk egy kört
a) egyik átmérőjére;
b) egyik húr egyenesére;
c) egyik érintőjére!

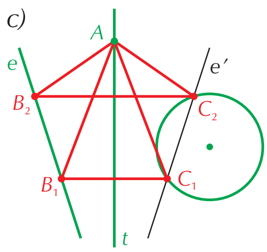
Megoldás



3. K2

Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szimmetriatengelye, az azon lévő csúcs és a másik két csúcson átmenő
a) egy-egy egyenes;
b) egy-egy kör;
c) egy kör és egy egyenes!

Megoldás

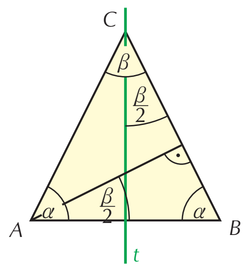


a)–c) Legyen a háromszög *A* csúcsa a szimmetriatengelyen! Mivel a *B* csúcs tükörképe a *C* csúcs, így a *B*-n átmenő alakzat (egyenes, illetve kör) tükörképe átmegy a *C* csúcson. Ennek a tükörképnek és az eredetileg is *C*-n átmenő alakzatnak a metszéspontja megadja *C*-t, és ezt visszatükrözve *B*-t kapjuk. A megoldások száma a metszéspontok számától függ.

4. K2

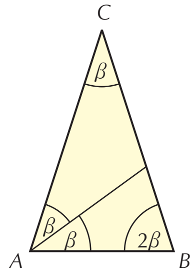
Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő szárú háromszög szárához tartozó magasságának az alappal bezárt szöge fele a szárszögnek!

Megoldás



Jelölje az alapszöget α, a szárszöget β. Ekkor $2\alpha + \beta = 180°$, ahonnan $\alpha + \frac{\beta}{2} = 90°$. Mivel az alap végpontjából induló magasság által levágott háromszög két szögét ismerjük ($90°$ és α), ezért a feladatban szereplő szög csak $\frac{\beta}{2}$ lehet.

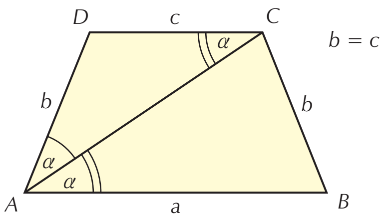
5. K2 Egy egyenlő szárú háromszög alapjának egyik végpontjából induló belső szögfelezője a háromszöget két egyenlő szárú háromszögre vágja szét. Mekkorák a háromszög szögei?



Megoldás

Az alap egyik végpontjából induló szögfelező akkor vágja két egyenlő szárú háromszögre az eredeti háromszöget, ha a szárszög fele az alapszögnek. Ebben az esetben a háromszög szögeinek összegét felírva a szárszögre 36°, az alapszögekre 72° adódik.

6. K2 Bizonyítsuk be, hogy ha egy szimmetrikus trapéz átlója felezi a trapéz egyik szögét, akkor a szára valamelyik alappal egyenlő!

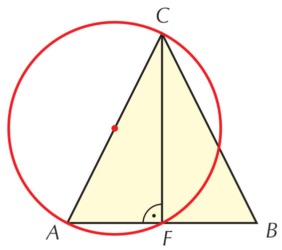


Megoldás

Ha a trapéz alapjai *AB* és *DC*, és az *AC* átló felezi a trapéz *DAB* szögét, akkor *DAC* ∢ = *ACD* ∢, mivel *BAC* ∢ = *ACD* ∢, mert váltószögek. Ebből következik, hogy a *CDA* háromszög *CA* oldalán lévő szögei egyenlők, tehát *AD* = *DC*.

52–53. A THALÉSZ-TÉTEL

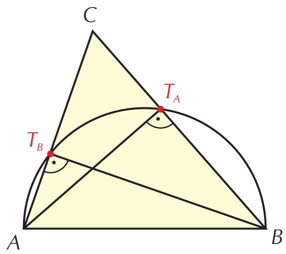
1. K1 Igazoljuk, hogy egy egyenlő szárú háromszög szára mint átmérő fölé rajzolt kör átmegy az alap felezőpontján!



Megoldás

Az alap felezőpontja rajta van az alap felezőmerőlegesén, ezért ebből a pontból a szár derékszögben látszik. Az összes ilyen pont viszont illeszkedik a Thalész-körre.

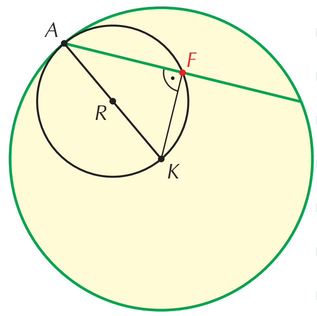
2. K1 Hol metszi egy hegyesszögű háromszög tetszőleges oldala mint átmérő fölé rajzolt kör a másik két oldalt?



Megoldás

Az oldal végpontjaiból induló magasságok talppontjaiban, hiszen ezekből a pontokból látszik az adott oldal derékszögben.

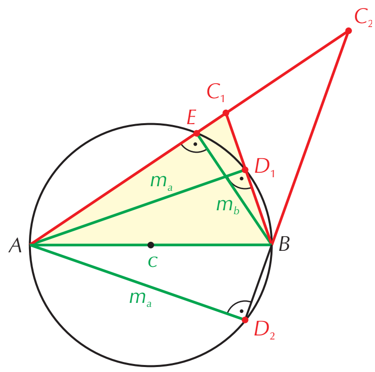
3. K1 Egy kör egyik húrjának egyik végpontját kössük össze a középponttal. Bizonyítsuk be, hogy ennek a sugárnak a Thalész-köre felezi a húrt!



Megoldás

A húr felezőmerőlegese átmegy a középponton, ezért a középpontot a húr végpontjával összekötő sugár a húr felezőpontjából derékszögben látszik, tehát rajta van a Thalész-körön.

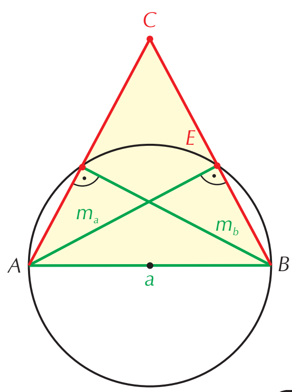
4. K1 Szerkesszünk háromszöget egy oldalából és a két másik oldalhoz tartozó magasságából!



Megoldás

Legyen adott az AB oldal és az A-ból és B-ből induló m_a és m_b magasságok. A vázlatból látható, hogy a magasságok közül vagy mindkettő kisebb kell legyen, mint az oldal, vagy az egyik kisebb, a másik pedig egyenlő az oldallal. Ekkor olyan derékszögű háromszögről van szó, amelynek derékszögű csúcsa az oldalon van. Vegyük fel az AB oldalt. Szerkesszük meg a Thalész-körét. Az A középpontú m_a sugarú kör és a Thalész-kör metszéspontja megadja m_a és BC oldalegyenes metszéspontját. Jelöljük D_1-vel. Hasonlóan megszerkesztjük az m_b magasságvonal és AC oldalegyenes metszéspontját. Jelöljük E-vel. A C csúcsot AE és BD egyenesek metszéspontjaként kapjuk, ha van ilyen. A feladatnak lehet több megoldása is attól függően, melyik metszéspontot választottuk E-nek, illetve D-nek.

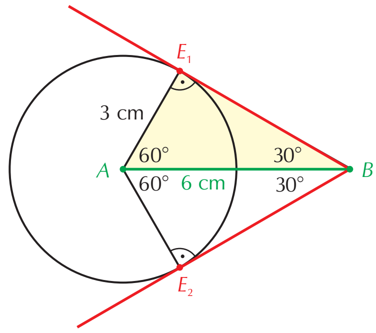
5. K1 Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget az alapjából és a szárhoz tartozó magasságából!



Megoldás

A feladat azonos az előzővel, mivel az alap két végpontjából induló magasságok a tengelyes szimmetria miatt egyenlők.

6. K2 Adott A és B pont, amelyek távolsága 6 cm. Szerkesszünk B-n át olyan egyenest, amely A-tól 3 cm-re halad! Mekkorák a szögei annak a háromszögnek, melynek csúcsai A, B és az egyenesen az A-hoz legközelebb eső pont?



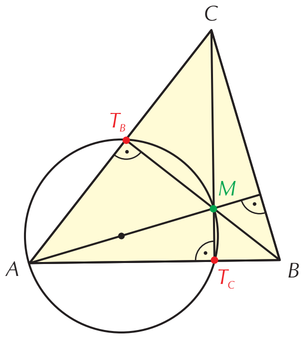
Megoldás

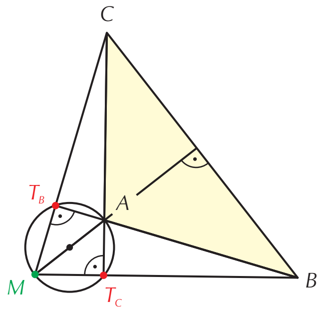
Átfogalmazhatjuk a feladatot úgy, hogy húzzunk B-ből érintőt az A középpontú 3 cm sugarú körhöz. Ha E_1-gyel és E_2-vel jelöljük az érintési pontot a körön, akkor azt látjuk, hogy az ABE háromszög egy szabályos háromszög fele, tehát szögei 30°–60°–90°.

7. K1 Hol metszi a háromszög AC és AB oldalát az AM szakasz Thalész-köre? (M a háromszög magasságpontját jelöli.)

Megoldás

A C-ből és B-ből induló magasságvonalak talppontjaiban.



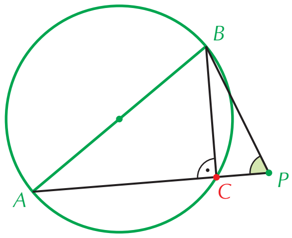


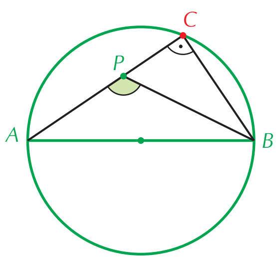
8. K2 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög AB oldalának felezőpontja és a BC és AC oldalon lévő magasságtalppontok egyenlő szárú háromszöget határoznak meg!

Megoldás

Az állítás igaz, mert az oldalfelező pontot bármelyik említett magasságtalpponttal összekötve a Thalész-kör egyik sugarát kapjuk.

9. E1 Bizonyítsuk be, hogy egy körön kívül fekvő P pontot összekötve a kör egy átmérőjének A és B végpontjaival, az APB szög hegyesszög! Mit mondhatunk, ha P a Thalész-körön belül van?

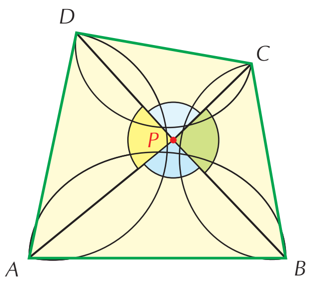




Megoldás

Kössük össze P-t a hozzá nem közelebbi átmérővégponttal. Tegyük fel, hogy ez az A pont. Az AP szakasznak és a Thalész-körnek a metszéspontját C-vel jelölve, az ABC háromszög derékszögű. Mivel C-nél derékszög van, és ez a CBP háromszög külső szöge, tehát $CPB\sphericalangle = APB\sphericalangle < 90°$. Hasonlóan igazolható, hogy $APB\sphericalangle > 90°$, ha P a körön belül van.

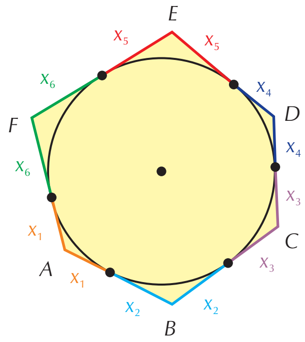
10. E2 Le lehet-e fedni egy tetszőleges konvex négyszög alakú teraszt az eső ellen az oldalak fölé befele húzott félkör alakú ernyőkkel?



Megoldás

Igen, le. Bizonyítsuk indirekt módon! Tegyük fel, hogy van olyan pont, amit egyetlen Thalész-kör sem fed le. Ez a pont akkor minden Thalész-kör külső pontja, ezért ebből a pontból minden oldal hegyesszögben látszik. Ez azonban lehetetlen, mert ez a négyszög belső pontja, ezért az oldalak látószögeinek összege 360°. Négy hegyesszög összege viszont biztosan kisebb 360°-nál.

11. E1 Bizonyítsuk be, hogy egy érintőhatszögben $a + c + e = b + d + f$!



Megoldás

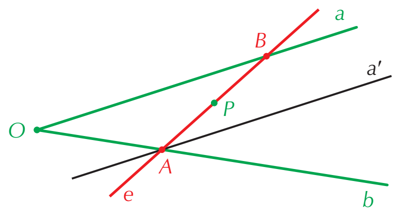
Külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők. Ha az *A*-ból induló érintőszakaszokat x_1-gyel, a *B*-ből indulókat x_2-vel… stb. jelöljük, akkor a megfelelő oldalakat alkotó érintőszakaszokat összeadva adódik az állítás.

54–55. KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS

1. K1 Tükrözzünk egy háromszöget
a) az egyik csúcsára;
b) az egyik oldal felezőpontjára;
c) egy háromszögön kívül eső pontra;
d) a háromszög egy belső pontjára!

Megoldás: A megoldást az olvasóra bízzuk.

2. K1 Adott egy konvex szög és szárai közt egy pont. Szerkesszünk olyan egyenest, amely átmegy a ponton, és a szögszárak közti szakaszát az adott pont felezi!



Megoldás

Mivel az adott pontra vonatkozóan a szögszárakon lévő pontok tükrösek, ezért ha az egyik szögszárat tükrözzük a megadott pontra, a tükörkép kimetszi a másik szögszárból a keresett egyenes egy pontját. Ezt összekötve a szögszárak közti ponttal, adódnak a szögszárak közé eső szakasz végpontjai és a keresett e egyenes.

3. K1 Adott egy konvex szög és szárai közt egy pont. Szerkesszünk olyan rombuszt, amelynek középpontja a megadott pont, és két szemközti csúcsa a szögszárakon van!

Megoldás

Az előző feladat szerint megszerkesztjük a rombusz két szemközti csúcsát. Az ezeket összekötő szakasz a rombusz átlója. Mivel a rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezen a merőleges egyenesen a megadott pontra szimmetrikusan felvett két pont a szögszárakon felvett két ponttal rombuszt határoz meg. Egyrészt középpontosan szimmetrikus, tehát paralelogramma, és átlói merőlegesek, ezért rombusz. Végtelen sok megoldás van.

4. K2 Bizonyítsuk be, hogy a szabályos hatszög középpontosan szimmetrikus sokszög! Minden szabályos sokszög középpontosan szimmetrikus?

Megoldás

Mivel két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő, ezért paralelogramma. Az átlók egyenlő hosszúak (két oldalhossznyi), ezért téglalap. Az ötödik és hatodik csúcs is az átló felezőpontjára tükrösen helyezkedik el, tehát az állítás igaz. Nem, például szabályos háromszög.
Megjegyzés: Általában az igaz, hogy a páros oldalszámú szabályos sokszögeknek van, a páratlan oldalszámú szabályos sokszögeknek nincs szimmetria-középpontja.

5. Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott
K1 *a)* két oldala és egyik átlója;
K1 *b)* két oldala és a közbezárt szög;
K1 *c)* egy oldala és két átlója;
K1 *d)* két átlója és az átlók szöge;
K2 *e)* egy átlója, egy oldala és az adott oldalhoz tartozó magassága;
K2 *f)* két átlója és az egyik oldalhoz tartozó magassága!

Megoldás

a) Két oldala és egyik átlója által meghatározott háromszög szerkeszthető. A negyedik csúcs a háromszögnek az átló felezőpontjára való tükrözéssel adódik.
b) Két oldala és a közbezárt szög ismeretében egy olyan háromszög szerkeszthető, amelynek a megadott szöggel szemközti oldala a paralelogramma egyik átlója. Ennek felezőpontjára tükrözve a háromszöget, adódik a paralelogramma.

c) Az oldalból és a két átló feléből szerkesszünk háromszöget, ezt tükrözzük arra a csúcsra, amelyben a két félátló találkozik (ez a paralelogramma középpontja). A két képpont és az eredetileg szerkesztett háromszög másik két csúcsa a keresett paralelogramma.

d) A két átló és az átlók szöge ugyanazt a háromszöget határozza meg, mint az előbb, így a befejezés is ugyanaz.

e) Legyen mondjuk adva az AB oldal és az AC átló. Vegyünk fel két párhuzamos egyenest egymástól m távolságra. Jelöljünk ki tetszőlegesen az egyik párhuzamoson egy pontot, legyen ez C. C középpontú AC sugarú kör kimetszi a másik párhuzamosból az A pontot. (Feltétel: $m \le AC$. Egyenlőség esetén az AC átló merőleges az AB oldalra. Más esetben két AC átló lehet.) Ezután az A-t tartalmazó egyenesre A-ból felmérjük AB-t. (Vigyázat, kétfelé mérhetjük fel! Egy AC átlóhoz két megoldást kaphatunk.)

f) Vegyünk fel két párhuzamos egyenest egymástól m távolságra. Szerkesszük meg a középpárhuzamosukat. Ennek tetszőleges pontja legyen a paralelogramma középpontja. Ebből a pontból mindkét átló felével kört szerkesztünk. A középpontra tükrös két-két metszéspontot választva kapjuk a paralelogrammákat.

56. KÖZÉPVONALAK

1. K1 Szerkesszünk trapézt, ha adott
a) m magassága, k középvonala és az egyik alapon fekvő két szöge: α és β;
b) a középvonala, a két szára és a magassága!

Megoldás

a) Vegyünk fel két párhuzamos egyenest egymástól m távolságra. Szerkesszük meg a középpárhuzamosukat. Ennek tetszőleges pontjából mérjük fel a középvonalat. Ennek végpontjaiban mérjük fel az α és β szögeket. Ezek kimetszik az egyik párhuzamosból a trapéz két csúcsát, a szögszárak egyenesei pedig a másik két csúcsot.
b) Vegyünk fel két párhuzamos egyenest egymástól m távolságra. Szerkesszük meg a középpárhuzamosukat. Ennek tetszőleges pontjából mérjük fel a középvonalat. Ennek végpontjaiban szerkesszünk rendre a szárak felével köröket. Ezek kimetszik a párhuzamosokból a trapéz csúcsait. A megfelelőket kössük össze.

2. K2 Adott egy konvex négyszög. Szerkesszünk olyan paralelogrammát, amelynek csúcsai a négyszög egy-egy oldalára esnek! (A diszkussziótól tekintsünk el.)

Megoldás

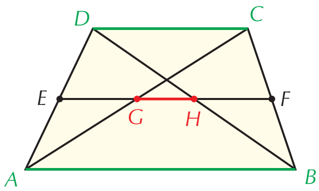
Tudjuk, hogy az oldalfelező pontok paralelogrammát adnak, tehát ez például jó megoldás.

3. K1 Mit mondhatunk arról a négyszögről, amelynek oldalfelező pontjai
a) rombuszt;
b) téglalapot alkotnak?

Megoldás

a) Ha rombuszt alkotnak, akkor a négyszög átlói egyenlők.
b) Ha téglalapot alkotnak, akkor a négyszög átlói merőlegesek.

4. K2 Bizonyítsuk be, hogy a trapéz átlóinak felezőpontjait összekötő szakasz egyenlő az alapok különbségének felével!

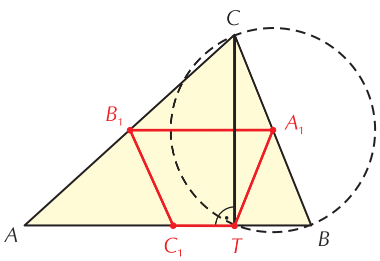


Megoldás

Legyen $AB > CD$! Használjuk az ábra jelöléseit. FG az ABC háromszög AB-vel párhuzamos középvonala, ezért hossza $\frac{AB}{2}$. Hasonlóan HF a BCD háromszög középvonala, ezért hossza $\frac{CD}{2}$. Innen $HG = \frac{AB - CD}{2}$.

5. K2 Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög oldalfelező pontjai és egyik magasságának talppontja egyenlő szárú háromszöget vagy húrtrapézt határoz meg!

Megoldás



Az oldalfelező pontok által alkotott háromszög oldalai párhuzamosak a nem felezett oldallal és feleakkorák (középvonalak). Így A_1B_1 párhuzamos AB-vel és az arra illeszkedő C_1T-vel is, ahol T a C-ből induló magasság talppontja. Tehát $A_1B_1C_1T$ trapéz. Azt kell még belátni, hogy $B_1C_1 = A_1T$. Ez azért igaz, mert $B_1C_1 = \frac{BC}{2}$, mivel középvonal, $A_1T = \frac{BC}{2}$, mert a BC oldal Thalész-körének sugara. Ha T azonos C_1-gyel, akkor az $A_1B_1C_1$ háromszög egyenlő szárú.

57–58. A HÁROMSZÖGEK NEVEZETES PONTJAI, VONALAI

1. Szerkesszünk háromszöget, ha adott

K1 *a)* egy oldala, a hozzá tartozó magasság és egy másik magasság;

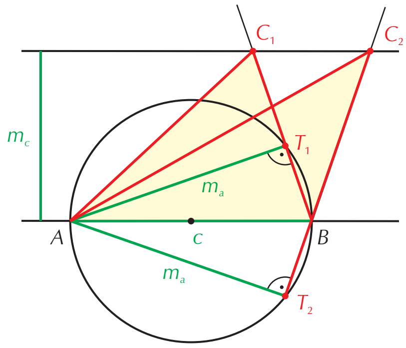
K1 *b)* egy oldala, a hozzá tartozó súlyvonal és magasság;

K1 *c)* egy oldala és a másik két oldalhoz tartozó súlyvonala;

K1 *d)* egy oldala és a hozzá tartozó súlyvonal és egy másik súlyvonal;

K2 *e)* két oldala és a közbezárt súlyvonal;

E1 *f)* három súlyvonala!

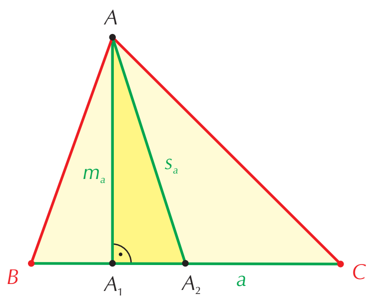


Megoldás

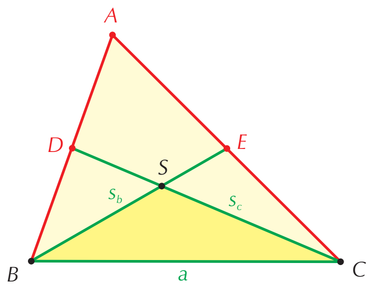
Használjuk az ábra jelöléseit!

a) Vegyünk fel két párhuzamos egyenest egymástól m_c távolságra. Az egyik egyenesen vegyük fel az AB szakaszt. Az AB szakasz Thalész-köre és az A középpontú m_a sugarú körök metszéspontjai adják m_a talppontját, T_1, T_2-t. A BT_1 és BT_2 egyenesek és a másik párhuzamos metszéspontja C_1, C_2.

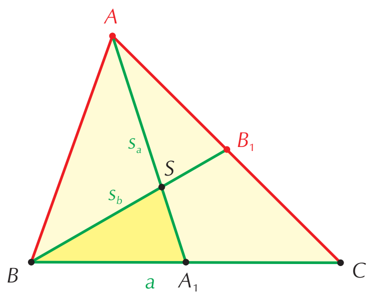
b) Az A_1AA_2 háromszög megszerkeszthető (AA_2 Thalész-körét kell A középpontú, m_a sugarú körrel metszeni). Mivel $A_2B = A_2C = \frac{BC}{2}$, ezért A_2 körül húzott $\frac{BC}{2}$ sugarú kör kimetszi A_1A_2 egyenesből a B és C pontokat. A feladatnak nincs megoldása, ha $m_a > s_a$; $m_a = s_a$ esetén egyenlő szárú háromszög alapja és magassága adott.



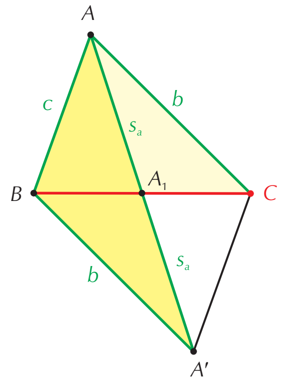
c) Legyen adott az a, s_b, s_c, SBC háromszög három oldala $\left(a, \frac{2}{3}s_b, \frac{2}{3}s_c\right)$, így ez szerkeszthető. $SD = \frac{1}{2}SC$ és $SE = \frac{1}{2}SB$, így D és E szerkeszthető. BD és EC egyenesek metszéspontja adja C-t. A diszkussziótól eltekintünk.



d) Legyen adott az a, s_a és s_b. BSA_1 háromszög szerkeszthető a három oldalából ($BA_1 = \frac{1}{2}BC$; $BS = \frac{2}{3}s_b$; $SA_1 = \frac{1}{3}s_a$). B tükörképe A_1-re C, C tükörképe B_1-re A. A diszkussziótól eltekintünk.

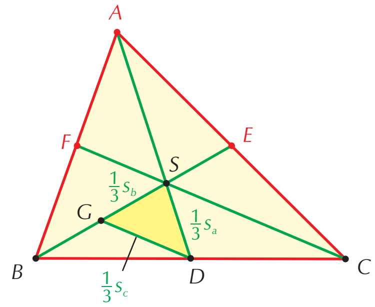


e) Legyen adott a c; b; s_a. Tükrözzük a háromszöget BC felezőpontjára. A tükörképet jelöljük A'-vel. Az ABA' háromszög szerkeszthető három oldalából ($cBA' = b$; $AA' = 2s_a$). AA' felezőpontjára tükrözve B-t, kapjuk C-t. A szerkeszthetőség feltétele, hogy a c; b; $2s_a$ szakaszokra teljesüljön a háromszög-egyenlőtlenség.



Megoldás

f) D, E, F pontok az oldalak felezőpontjait jelölik. Legyen G a BS szakasz felezőpontja. Ekkor $GD = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}SC = \frac{1}{3}SF$. Így DGS háromszög mindhárom oldala egy-egy adott súlyvonal harmada, tehát DGS háromszög szerkeszthető. S tükörképe G-re B; B tükörképe D-re C. Mivel $AS = 2SD$, így A is szerkeszthető. DGS háromszögből látszik, hogy a három súlyvonalra teljesülnie kell a háromszög-egyenlőtlenségnek.



2. E1 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonala kisebb, mint a közrefogó oldalak számtani közepe!

Megoldás

Tükrözzük a háromszöget a harmadik oldal felezőpontjára, így paralelogrammát kapunk. A kapott ábráról leolvasható az állítás a háromszög-egyenlőtlenség miatt.

3. E1 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalai hosszának összege kisebb, mint a háromszög kerülete!

Megoldás

$s_a < \frac{b+c}{2}$;

$s_b < \frac{a+c}{2}$;

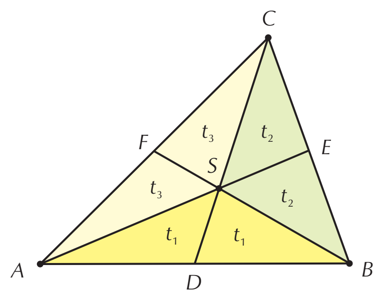
$s_c < \frac{b+a}{2}$.

Az egyenlőtlenségeket összeadva adódik az állítás.

4. K2 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlypontját a háromszög csúcsaival összekötve három egyenlő területű részre bontottuk a háromszöget!

Megoldás

D, E, F pontok az ABC háromszög oldalainak felezőpontjait jelölik. SD súlyvonal ABS háromszögben, ezért $t(ASD) = t(BSD) = t_1$. Hasonlóan $t(CSE) = t(BSE) = t_2$ és $t(CSF) = t(ASF) = t_3$. CD súlyvonal az ABC háromszögben is, ezért egyenlő területekből $\left(\frac{1}{2}t(ABC)\right)$ egyenlő területeket (t_1) levonva egyenlő marad, tehát $t(CSA) = t(BSC)$, azaz $2t_2 = 2t_3 \Rightarrow t_2 = t_3$. Az AD súlyvonalból kiindulva hasonlóan bizonyítható, hogy $t_1 = t_3$, ami egyúttal a hat részháromszög területének egyenlőségét jelenti, és a feladat állítását igazolja.



5. E1 Jelölje egy *ABC* hegyesszögű háromszög magasságpontját *M*, és körülírt körének *A*-val átellenes pontját *A'*. Bizonyítsuk be, hogy *BMCA'* paralelogramma!

Megoldás

A Thalész-tétel szerint $ABA' \sphericalangle = 90°$, tehát *BA'* párhuzamos *CM*-mel, mert mindegyik $\perp$ *AB*-re. Hasonlóan bizonyítható, hogy *BM* párhuzamos *CA'*-vel. Ha egy négyszögben van két párhuzamos oldalpár, akkor az paralelogramma.

VIII. EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK, EGYENLETRENDSZEREK

59. AZ EGYENLET, EGYENLŐTLENSÉG FOGALMA

1. K1 Tekintsük a következő kijelentő mondatokat. Ha eldönthető, akkor döntsük el, hogy az állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

a) Tizenhat négyszerese négyzetszám.

Megoldás: Igaz.

b) Tegnap délután sütött a nap.

Megoldás: Nem dönthető el.

c) Mai napon lesz biológiaóránk.

Megoldás: Nem dönthető el.

d) A körnek négy szimmetriatengelye van.

Megoldás: Hamis.

e) Minden paralelogramma trapéz.

Megoldás: Igaz.

f) Minden harmadik természetes szám osztható hárommal.

Megoldás: Nem dönthető el.

g) $3 \cdot 5 = 16$.

Megoldás: Hamis.

2. K1 Állapítsuk meg, hogy az alábbi logikai függvények mely értékekre igazak és mely értékekre hamisak a megadott értékek közül!

a) $3x + 7 = x - 3$; $x = 0;\ -2;\ -5;\ 3$.

Megoldás: Igaz, ha $x = -5$, a többi esetben hamis.

b) $|2x - 5| = 4$; $x = -2{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 1{,}5;\ \frac{9}{2}$.

Megoldás: Igaz, ha $x = 0{,}5$; $x = \frac{9}{2}$, a többi esetben hamis.

c) $-(x + 2)^2 + 3 = -x - 1$; $x = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0$.

Megoldás: Igaz, ha $x = -3$; $x = 0$, a többi esetben hamis.

3. K1 Válasszuk ki az azonosságokat a következő egyenletek közül!

a) $2x + 3 + x - 5 = x - 8 + 4x + 3 - x$.

Megoldás

Összevonás után azt kapjuk, hogy

$3x - 2 = 4x - 5$, melyből $x = 3$ megoldás, más nem, ezért nem azonosság.

b) $11 - 2x = 7x + 29 - (9x + 18)$.

Megoldás

Összevonás után azt kapjuk, hogy

$11 - 2x = -2x + 11$, mely azonosság, tetszőleges szám esetén igaz.

c) $\frac{5x+3}{2} = \frac{15x}{6} + 1,5$.

Megoldás

Rendezve az egyenletet:

$\frac{15x+9}{6} = \frac{15x}{6} + 1,5 \quad / \cdot 6$

$15x + 9 = 15x + 9$

azonosság, tetszőleges szám esetén igaz.

d) $3 - x = 5 - x$.

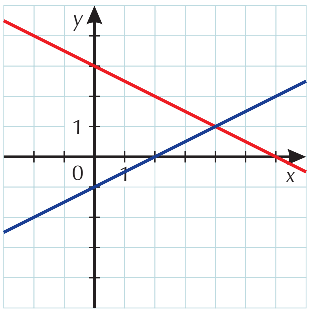
Megoldás

Rendezve:

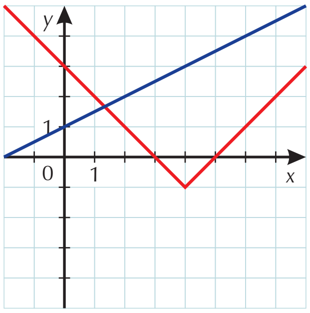
$3 = 5$ adódik, ami ellentmondás, ezért nincs olyan szám, melyre igaz lenne az egyenlet.

4. K1 Írjunk fel olyan egyenletet, melynek ábrázolásához az alábbi grafikonokat rajzoltuk fel!

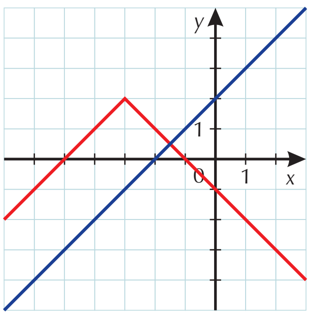
a)



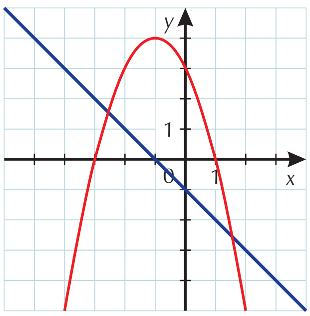
c)



b)



d)



Megoldás

a) $\frac{1}{2}x - 1 = -\frac{1}{2}x + 3$;

b) $-|x + 3| + 2 = x + 2$;

c) $|x - 4| - 1 = \frac{1}{2}x + 1$;

d) $-(x + 1)^2 + 4 = -x - 1$.

5. Mely számok esetén értelmezhetjük az alábbi egyenleteket?

K1 *a)* $\frac{2x-5}{4}=3.$

Megoldás

Minden valós szám esetén értelmezhető az egyenlet.

K1 *b)* $\frac{5}{x}=\frac{8}{x-1}.$

Megoldás

Akkor nem értelmezhető, ha a nevező 0. Azaz $x \neq 0$; $x \neq 1$ kikötést kell tennünk. Az egyenlet tehát értelmezhető $\forall x \in \mathbf{R}$, kivéve $x = 0$; $x = 1$.

K1 *c)* $\frac{x+1}{x-1}+\frac{3x+4}{5x-5}=\frac{1}{5}.$

Megoldás

Az egyenlet értelmezhető $\forall x \in \mathbf{R}$, kivéve $x = 1$.

K1 *d)* $\frac{x}{x-5}+\frac{2x-1}{x^2-5x}=1.$

Megoldás

A nevező szorzattá alakítása után

$\frac{x}{x-5}+\frac{2x-1}{x(x-5)}=1$ adódik, hogy $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$; $x \neq 5$.

K2 *e)* $\frac{x+3}{x-2}+\frac{x-2}{x+3}=\frac{2x^2+8x-11}{x^2+x-6}.$

Megoldás

A jobb oldali nevező szorzattá alakítása után

$\frac{x+3}{x-2}+\frac{x-2}{x+3}=\frac{2x^2+8x-11}{(x-2)(x+3)}$ adódik, hogy $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \neq 2$; $x \neq -3$.

6. Milyen számot írhatunk a b betű helyére, hogy azonos egyenlőtlenséget kapjunk?

K2 *a)* $(x+5)^2+b \geq 0.$

Megoldás

Algebrai úton is és grafikusan is végiggondolható, hogy $b \geq 0$ érték esetén a bal oldal nemnegatív.

E1 *b)* $x^2-8x+b \geq 0.$

Megoldás

Alakítsuk át a bal oldalt. $x^2-8x+b=(x-4)^2-16+b.$

Mivel $(x-4)^2$ $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén nemnegatív, ezért $-16+b \geq 0$ kell legyen. Ebből $b \geq 16$.

E1 *c)* $x^2+2x+3+b \geq 0.$

Megoldás

Előzőhöz hasonlóan megoldva adódik $b \geq -2$.

E1 *d)* $-(x+3)^2+5+b \leq 0.$

Megoldás

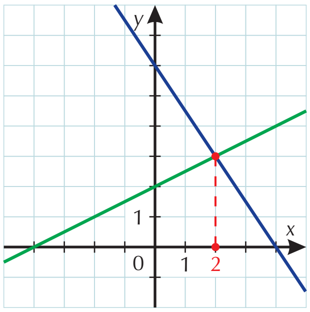
Mivel $-(x+3)^2$ $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén legfeljebb 0, ezért $5+b \leq 0$ kell hogy teljesüljön. Ebből azt kapjuk, hogy $b \leq -5$.

60. EGYENLET, EGYENLŐTLENSÉG MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

1. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket!

K1 *a)* $\frac{1}{2}x + 2 = -\frac{3}{2}x + 6.$

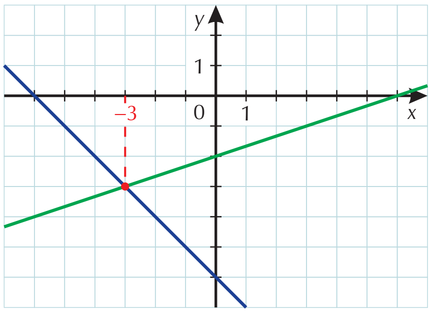
Megoldás



Az ábráról leolvasható a metszéspont x koordinátája, ez lesz az egyenlet megoldása.
$x = 2.$
Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy jó a megoldás.

K1 *b)* $\frac{1}{3}x - 2 = -x - 6.$

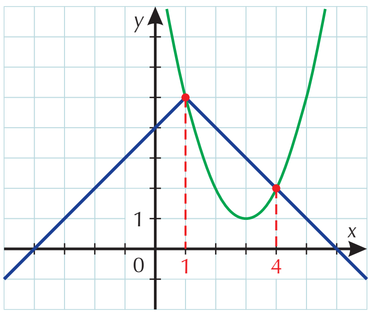
Megoldás



Az ábráról leolvasható a metszéspont x koordinátája, ez lesz az egyenlet megoldása.
$x = -3.$
Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük a megoldást.

E1 *c)* $-|x - 1| + 5 = (x - 3)^2 + 1.$

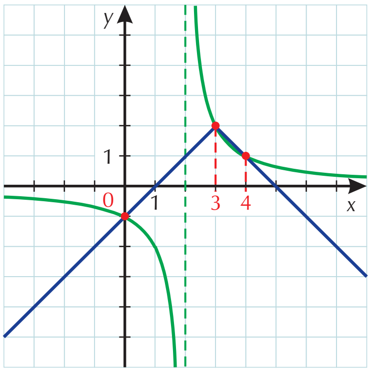
Megoldás



Az egyenletnek két megoldása van: $x_1 = 1$; $x_2 = 4$.

E1 *d)* $2 - |x - 3| = \dfrac{2}{x-2}$.

Megoldás



Az egyenletnek három megoldása van: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = 4$.

2. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{x-2} = \sqrt{1-x}$.

Megoldás

Vizsgáljuk meg az egyenlet két oldalának értelmezési tartományát.
Bal oldal: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.
Jobb oldal: $1 - x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq 1$.
A két oldal értelmezési tartományának nincs közös része, tehát nincs olyan valós szám, melyre az egyenlet mindkét oldala értelmezhető, ezért nincs megoldása az egyenletnek.

b) $\sqrt{x} + 2\sqrt{-x} = 5$.

Megoldás

A bal oldalon lévő négyzetgyökös kifejezések miatt az

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \text{ számra értelmezhető az egyenlet.}$$

Behelyettesítve az egyenletbe az $x = 0$-t, kapjuk, hogy $0 = 5$, ami ellentmondás. Az egyenletnek nincs megoldása.

c) $\sqrt{x-5} - \sqrt{5-x} = 0$.

Megoldás

A bal oldalon lévő négyzetgyökös kifejezések miatt az

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 5 \\ 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 5 \text{ számra értelmezhető az egyenlet.}$$

Behelyettesítve az egyenletbe az $x = 5$-t, kapjuk, hogy $0 = 0$, tehát az $x = 5$ jó megoldás, és más megoldás nem lehet.

d) $\sqrt{2x-5} + \sqrt{2{,}5 - x} = 3$.

Megoldás

A bal oldalon lévő négyzetgyökös kifejezések miatt az

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2{,}5 \\ 2{,}5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2{,}5\text{-re értelmezhető az egyenlet.}$$

Behelyettesítve az $x = 2{,}5$-et, ellentmondást kapunk, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

K2 *a)* $|x-3|+|y+5|=0.$

Megoldás

Két abszolút érték összege csak úgy lehet 0, ha mindkét abszolút érték 0. Ezért az egyenlet megoldása: $x = 3$; $y = -5$.

K2 *b)* $(x+1)^2+(y-2)^2=0.$

Megoldás

Mivel minden szám négyzete nemnegatív, ezért két négyzetszám összege csak úgy lehet 0, ha mindkét tag 0. Ezért az egyenlet megoldása: $x = -1$; $y = 2$.

E1 *c)* $(x+7)^2\cdot(2y-3)=0.$

Megoldás

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ha $(x+7)^2 = 0 \Rightarrow x = -7$, ekkor $2y - 3$ tetszőleges, ezért y is tetszőleges valós szám lehet.

Ha $2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$, akkor x tetszőleges.

E1 *d)* $(2y+7)^2+(x+4y-5)^2=0.$

Megoldás

Mivel minden szám négyzete nemnegatív, ezért két négyzetszám összege csak úgy lehet 0, ha mindkét tag 0. Tehát

$$\left.\begin{aligned} 2y+7&=0\\ x+4y-5&=0\end{aligned}\right\},\ \text{amelyből } y=-3{,}5;\ x=19.$$

E1 *e)* $|3y-z|+|2y+x|+|x-3|=0.$

Megoldás

Három abszolút érték összege akkor 0, ha mindhárom abszolút érték 0.
Ezért:

$3y - z = 0;$

$2y + x = 0;$

$x - 3 = 0.$

A 3. egyenletből $x = 3$, ezt behelyettesítve a második egyenletbe $y=-\frac{3}{2}$, majd y értékét behelyettesítve kapjuk, hogy $z=-\frac{9}{2}$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

4. Oldjuk meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

E1 *a)* $(x-4)^2+1=1-2|x-4|.$

Megoldás

Algebrai úton: Vizsgáljuk az egyenlet két oldalának lehetséges értékeit.

A bal oldal: $(x-4)^2+1\geq 1.$

A jobb oldal: $1-2|x-4|\leq 1.$

Ezért a két oldal csak úgy lehet egyenlő, ha mindkét oldal 1. Ez pedig azt jelenti, hogy $(x-4)^2=0$ és $|x-4|=0$. Azaz az egyenletnek $x = 4$ a megoldása.

E1 *b)* $x^2 - 6x + 7 < -3|x+1| - 4$.

Megoldás

Alakítsuk át a bal oldalt:

$x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 2$, ebből látható, hogy a bal oldal ≥ -2. Az egyenlet jobb oldala ≤ -4, ezért nincs olyan x érték, melyre a két oldal egyenlő lenne, tehát az egyenlőtlenségeknek nincs megoldása.

c) **Nem érettségi tananyag.** $(x-2)^2 + 1 = \{x\}$.

Megoldás

Az egyenlet bal oldala legalább 1, a jobb oldal kisebb, mint 1, ezért nincs megoldása az egyenletnek.

5. K2 Egy 12 cm magas gyertya 6 óra alatt, egy 9 cm-es gyertya 9 óra alatt ég el. Egyszerre meggyújtjuk mindkét gyertyát, amelyek ezután egyenletesen égnek (fogyásuk egyenletes).
a) Ábrázoljuk a gyertyák magasságát az eltelt idő függvényében!
b) Meggyújtásuk után hány perccel lesz kétszer akkora az egyik gyertya, mint a másik?

Megoldás

a)

b) Az idő függvényében az I. gyertya magasságát a $h(t) = 12 - 2t$, a II. gyertya magasságát pedig a $h(t) = 9 - t$ függvények írják le. A II. gyertya akkor lesz kétszeres magasságú, amikor
$9 - t = 2(12 - 2t)$.
Az egyenlet megoldása $t = 5$ (óra).
Ellenőrzés: 5 óra múlva az első gyertya magassága $12 - 2 \cdot 5 = 2$ cm, a másodiké $9 - 5 = 4$ cm.

61. EGYENLET, EGYENLŐTLENSÉG MEGOLDÁSA SZORZATTÁ ALAKÍTÁSSAL

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket!
A megoldás során felhasználjuk, hogy egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

K1 *a)* $(x-5)(x+3)=0$.

Megoldás

$x_1=5$; $x_2=-3$.

K1 *b)* $(2x-5)(x+2)(x-1)=0$.

Megoldás

$x_1=2{,}5$; $x_2=-2$; $x_3=1$.

K1 *c)* $x(x-3)\le 0$.

Megoldás

Egy kéttényezős szorzat értéke nempozitív, ha az egyik tényező nemnegatív, a másik tényező nempozitív.
Így a két lehetőség:

I. $\left.\begin{matrix} x\ge 0 \\ x-3\le 0 \end{matrix}\right\}$, illetve II. $\left.\begin{matrix} x\le 0 \\ x-3\ge 0 \end{matrix}\right\}$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $0\le x\le 3$, azaz $x\in[0;3]$.

K1 *d)* $(5x-6)(2-3x)\ge 0$.

Megoldás

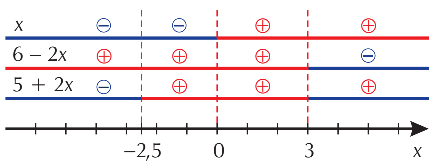
Egy kéttényezős szorzat értéke nemnegatív, ha mindkét tényező nemnegatív, illetve mindkét tényező nempozitív.

Ebből adódóan a megoldás $\frac{2}{3}\le x\le\frac{6}{5}$, azaz $x\in\left[\frac{2}{3};\frac{6}{5}\right]$.

K2 *e)* $x(6-2x)(5+2x)>0$.

Megoldás

Egy szorzat akkor pozitív, ha a negatív tényezők száma páros.
A bal oldali szorzat zérushelyei: $x=0$; $x=3$; $x=-2{,}5$. Ezek nem lehetnek megoldások, mert a szorzat pozitív kell hogy legyen.
Számegyenesen a zérushelyek két félegyenesre és két intervallumra bontják a számegyenest.



1. eset:
Ha $x<-2{,}5$, akkor
$x<0$; $6-2x>0$; $5+2x<0$, ezért a szorzat pozitív.

2. eset:
Ha $-2{,}5<x<0$, akkor
$x<0$; $6-2x>0$; $5+2x>0$, ezért a szorzat negatív.

3. eset:
Ha $0 < x < 3$, akkor
$x > 0$; $6 - 2x > 0$; $5 + 2x > 0$, ezért a szorzat pozitív.

4. eset:
Ha $x > 3$, akkor
$x > 0$; $6 - 2x < 0$; $5 + 2x > 0$, ezért a szorzat negatív.
Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $]-\infty; -2,5[\cup]0; 3[$.

K2 *f)* $(2x - 4)(5x + 8)(x - 6) < 0$.

Megoldás

Egy többtényezős szorzat akkor negatív, ha a negatív tényezők száma páratlan.
Az *e)* feladatrészhez hasonlóan megoldva az egyenlőtlenséget, a megoldáshalmaz:
$]-\infty; -1,6[\cup]2; 6[$.

2. Alakítsuk szorzattá a bal oldalon álló kifejezéseket, és határozzuk meg az egyenletek zérushelyeit!

K1 *a)* $(x - 1)(x + 5) + (x - 1)(x + 8) = 0$.

Megoldás

$(x - 1)(2x + 13) = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{13}{2}$.

K1 *b)* $(2x - 5)(3x + 4) - (2x - 5)(1 - x) = 0$.

Megoldás

$(2x - 5)(4x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2,5;\ x_2 = -\frac{3}{4}$.

K1 *c)* $(x + 2)(5x - 7) - 2 - x = 0$.

Megoldás

$(x + 2)(5x - 7) - 2 - x = 0$,
$(x + 2)(5x - 7) - (2 + x) = 0$,
$(x + 2)(5x - 8) = 0 \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = \frac{8}{5}$.

K2 *d)* $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Megoldás

$(x + 2)(x + 3) = 0;\quad x_1 = -2;\ x_2 = -3$.

K2 *e)* $x^3 + 6x^2 + 8x = 0$.

Megoldás

$x(x + 4)(x + 2) = 0;\quad x_1 = -4;\ x_2 = -2;\ x_3 = 0$.

K2 *f)* $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$.

Megoldás

$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = x^2(x + 3) - 4(x + 3) = (x + 3)(x - 2)(x + 2)$.
A megoldások: $x_1 = -3;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2$.

3. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{x-4}{x+2} > 0.$

Megoldás

Egy tört akkor pozitív, ha a számlálója és nevezője azonos előjelű.

I. $\left.\begin{array}{l} x-4>0 \\ x+2>0 \end{array}\right\}$,

$\left.\begin{array}{l} x>4 \\ x>-2 \end{array}\right\}$, melyből adódik

$x > 4.$

II. $\left.\begin{array}{l} x-4<0 \\ x+2<0 \end{array}\right\}$,

$\left.\begin{array}{l} x<4 \\ x<-2 \end{array}\right\}$, amelyből kapjuk, hogy

$x < -2.$

A feladat megoldása: $]-\infty; -2[\,\cup\,]4; \infty[$.

b) $\frac{2x+5}{3x-9} \le 0.$

Megoldás

$\left[-\frac{5}{2}; 3\right[.$

c) $\frac{x+5}{x-2} < 1.$

Megoldás

Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget.
A feladat megoldása: $]-\infty; 2[$.

d) $2 - \frac{3}{x-4} \le 0.$

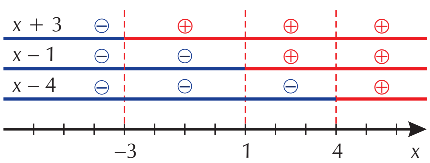
Megoldás

$\left[\frac{11}{2}; 4\right[.$

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!
Az egyenlőtlenségek megoldása során használjuk fel azt a tényt, hogy egy tört akkor negatív, ha a negatív értékű szorzó- és osztótényezők száma páratlan, és akkor pozitív, ha a negatív tényezők száma páros.

K2 *a)* $\frac{(x+3)(x-1)}{x-4} < 0.$

Megoldás: Készítsünk táblázatot az egyes tényezők előjeléről:



Az egyenlőtlenség megoldása a táblázatból kiolvasható.
$x < -3; \quad 1 < x < 4.$

K2 *b)* $\frac{(2x+1)(3x+5)}{(4x+8)(x-2)} \ge 0.$

Megoldás

Az egyenlőtlenség megoldása $]-\infty; -2[\,\cup\left[-\frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right]\cup\,]2; \infty[$.

E1 *c)* $\frac{x-1}{x-3} > \frac{7}{x-1} + 1.$

Megoldás: Az egyenlőtlenség megoldása $\left]-\infty; 1\right[\cup \left]3; \frac{19}{5}\right[$.

E1 *d)* $\frac{x-1}{x-3} < \frac{3x-2}{3x}.$

Megoldás: $\left]-\infty; 0\right[\cup \left]\frac{3}{4}; 3\right[$.

5. E2 Két egész szám összegéhez hozzáadjuk a két szám szorzatát, eredményül 23-at kapunk. Melyik ez a két szám?

Megoldás

Írjuk fel egyenletet a feladat megoldásához:
$x + y + xy = 23.$
Szorzattá alakítva:
$(x+1)(y+1) = 24.$
Az egyenlet megoldásait 24 osztói felírásával kaphatjuk meg.
Nézzük táblázatban a lehetséges megoldásokat:

x	0	23	–2	–25	1	11	–3	–13	2	7	–4	–9	3	5	–5	–7
y	23	0	–25	–2	11	1	–13	–3	7	2	–9	–4	5	3	–7	–5

A táblázatból is látszik, hogy összesen 8 számpár tesz eleget a feltételeknek.

6. E2 Két természetes szám reciprokainak összege $\frac{1}{11}$. Melyik ez a két természetes szám?

Megoldás

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{11}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$
Szorzat alakban írva:
$(a-11)(b-11) = 121.$
A megoldás $a = b = 22; \quad a = 12, \quad b = 132.$

7. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a természetes számok halmazán!
a) $2x^2 + xy = 28.$

Megoldás: Szorzattá alakítva: $x(2x+y) = 28$. 28 osztóit vizsgálva:

$(x; y) = (1; 26),$
$(x; y) = (2; 10),$
$(x; y) = (26; 1),$
$(x; y) = (10; 2).$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$

Megoldás: $x \neq 0, \quad y \neq 0$. Rendezve: $3x + 3y = xy$.

Szorzattá alakítva: $(x-3)(y-3) = 9$.
9 osztóit vizsgálva:

x	4	12	6
y	12	4	6

Tehát: $(x; y) = (4; 12)$ vagy $(12; 4)$ vagy $(6; 6)$.

62. A LEGÁLTALÁNOSABB MÓDSZER: A MÉRLEGELV

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket mérlegelv segítségével!

a) $5(x+1)-7=3(x-2)+4$.

Megoldás

$x=0$.

b) $4x-(x+5)+12=14+2x$.

Megoldás

Zárójelfelbontás során figyeljünk az előjelekre.
$x=7$.

c) $(8-4x)-(3x-5)=2x-5$.

Megoldás

Zárójelfelbontás során figyeljünk az előjelekre.
$x=2$.

d) $4(x-5)-3(2x+3)=8x-6(5-x)$.

Megoldás

Felbontva a zárójeleket
$4x-20-6x-9=8x-30+6x$.
$x=\frac{1}{16}$.

e) $5(3x-4)+3(7-x)=17-2(x-3)$.

Megoldás

$x=\frac{11}{7}$.

2. Van-e az alábbi egyenleteknek megoldása a pozitív számok halmazán?

K1 *a)* $\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}=\frac{3x-2}{4}$.

Megoldás

Hozzunk közös nevezőre:
$\frac{40}{60}x+\frac{36}{60}=\frac{45x-30}{60}$.
Rendezés után kapjuk, hogy $x=13{,}2\in\mathbf{R}^{+}$.

K1 *b)* $\frac{3-2x}{2}+6=\frac{5x+2}{7}-2x$.

Megoldás

Szorozzunk be a közös nevezővel:
$7(3-2x)+84=2(5x+2)-28x$.
Zárójelfelbontás és rendezés után kapjuk, hogy
$x=-\frac{101}{4}\notin\mathbf{R}^{+}$, tehát nincs megoldás az alaphalmazon.

K2 *c)* $\frac{5x+3}{8} - \frac{10-3x}{5} = \frac{3x+7}{3} - 6.$

Megoldás

Hozzunk közös nevezőre:
$\frac{15(5x+3) - 24(10-3x)}{120} = \frac{40(3x+7) - 6 \cdot 120}{120}.$
Beszorozva a nevezővel és felbontva a zárójeleket:
$75x + 45 - 240 + 72x = 120x + 280 - 720.$

Ebből kapjuk hogy $x = -\frac{245}{27} \notin \mathbf{R}^+$, tehát nincs megoldás az alaphalmazon.

K2 *d)* $\frac{11(x+3)}{6} - \frac{3x-1}{5} = \frac{13-x}{2} + \frac{5x}{3}.$

Megoldás

Rendezés után kapjuk, hogy $x = 12 \in \mathbf{R}^+$.

K2 *e)* $5 - \frac{2-9x}{5} + \frac{2x+7}{4} = 4 - \frac{5-4x}{6}.$

Megoldás

Beszorozva a közös nevezővel:
$300 - 12(2-9x) + 15(2x+7) = 240 - 10(5-4x).$
A zárójelek felbontása után:
$300 - 24 + 108x + 30x + 105 = 240 - 50 + 40x.$

$x = -\frac{191}{98}$, ami nem megoldás a pozitív számok halmazán.

3. A tanult nevezetes azonosságok felhasználásával oldjuk meg az alábbi egyenleteket!
K1 *a)* $(x+3)^2 + (x+5)(x-2) + 4 = 2(x+7)(x-3).$

Megoldás

Felbontva a zárójeleket:
$x^2 + 6x + 9 + x^2 + 3x - 10 + 4 = 2x^2 + 8x - 42.$
Rendezve az egyenletet:
$x = -45.$

K1 *b)* $(x-5)(x+5) - (x+3)(x+5) = 4(3x-8).$

Megoldás

Felbontva a zárójeleket:
$x^2 - 25 - x^2 - 8x - 15 = 12x - 32.$
Rendezve az egyenletet:
$x = -0{,}4.$

K2 *c)* $(x-2)^3 + (x+3)^3 - x^3 - 4x^2 = x^2(x-1) + 19x - 1.$

Megoldás

Felbontva a zárójeleket:
$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - x^3 - 4x^2 = x^3 - x^2 + 19x - 1.$
Összevonás után rendezve az egyenletet:
$x = -1.$

4. A változók lehetséges értékeinél van-e megoldása az alábbi egyenleteknek?

K1 *a)* $\frac{5}{x-4} - 2 = \frac{3}{x-4}$.

Megoldás

Kikötés: $x \neq 4$.
Beszorozva a nevezővel:
$5 - 2(x-4) = 3$.
$x = 5$.

K1 *b)* $1 + \frac{3}{x-3} = \frac{x}{x-3} - 1$.

Megoldás

Kikötés: $x \neq 3$.
Beszorozva a nevezővel, majd elvégezve az összevonást, kapjuk, hogy $x = 3$, ami a kikötés miatt nem megoldása az egyenletnek.

K1 *c)* $\frac{5}{x-4} + \frac{3}{x} = \frac{1}{x-4}$.

Megoldás

Kikötés: $x \neq 0$; $x \neq 4$.
Hozzunk közös nevezőre:
$\frac{5x + 3(x-4)}{x(x-4)} = \frac{x}{x(x-4)}$.
Beszorozva a nevezővel, majd rendezve, kapjuk, hogy:
$x = \frac{12}{7}$.

K2 *d)* $\frac{5x-4}{x-1} + \frac{2}{3x-3} - \frac{2x-7}{2x-2} = 3$.

Megoldás

Alakítsunk szorzattá a nevezőben, majd tegyünk kikötést: $x \neq 1$.
Hozzunk közös nevezőre:
$\frac{6(5x-4) + 4 - 3(2x-7)}{6(x-1)} = 3 \qquad / \cdot 6(x-1)$
$30x - 24 + 4 - 6x + 21 = 18x - 18$.
$x = -\frac{19}{6}$.

K2 *e)* $\frac{x}{x-3} + \frac{5x-1}{x^2-3x} = 1$.

Megoldás

Alakítsunk szorzattá a nevezőben, majd tegyünk kikötést:
$\frac{x}{x-3} + \frac{5x-1}{x(x-3)} = 1; \qquad x \neq 0; \quad x \neq 3$.
Közös nevezőre hozva, majd beszorozva a nevezővel:
$x^2 + 5x - 1 = x^2 - 3x$.
$x = \frac{1}{8} = 0,125$.

K2 *f)* $\dfrac{x-3}{x+2}+\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{2x^2+5x-6}{x^2-x-6}$.

Megoldás

Alakítsunk szorzattá a nevezőben, majd tegyünk kikötést:

$$\frac{x-3}{x+2}+\frac{x-2}{x-3}=\frac{2x^2+5x-6}{(x+2)(x-3)}.$$

Kikötés: $x-2$; $\quad x\neq 3$.

Hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{(x-3)^2+(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{2x^2+5x-6}{(x+2)(x-3)}.$$

Beszorozva a nevezővel és rendezve az egyenletet, adódik:

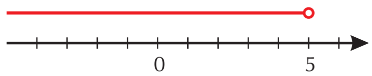
$x=1$.

5. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a legbővebb számhalmazon, és ábrázoljuk a megoldásokat számegyenesen!

Az egyenlőtlenségek megoldása során is alkalmazhatjuk a mérlegelvet, figyelve arra, hogy ha egyenlőtlenséget negatív számmal osztunk vagy szorzunk, az egyenlőtlenség iránya megváltozik.

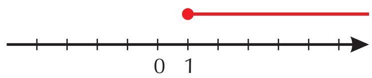
K1 *a)* $5x<3x+10$.

Megoldás: $x<5$.



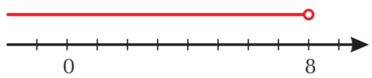
K1 *b)* $8x+7\leq 9x+8$.

Megoldás: $x\geq -1$.



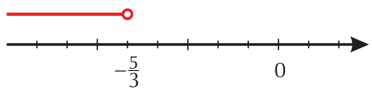
K1 *c)* $6x-6<3x+18$.

Megoldás: $x<8$.



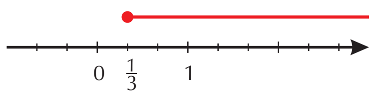
K1 *d)* $3(x+1)+5(x+5)>11(x+3)$.

Megoldás: $x<-\dfrac{5}{3}$.



K1 *e)* $6x-2(3x+4)\leq 2(3x-5)$.

Megoldás: $x\geq\dfrac{1}{3}$.



K2 *f)* $\dfrac{2x-3}{5}-\dfrac{5-2x}{3}\leq 2x+1$.

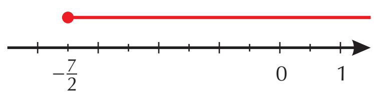
Megoldás

A bal oldalon közös nevezőre hozunk, majd a nevezővel beszorzunk:

$3(2x-3)-5(5-2x)\leq 15(2x+1)$.

Összevonás, rendezés után kapjuk:

$x\geq -\dfrac{7}{2}$.



K2 *g)* $\frac{4(x+2)}{3} + \frac{4-3x}{2} > \frac{5x+1}{4}$.

Megoldás

Közös nevezőre hozunk, majd a nevezővel beszorzunk és összevonunk:

$\frac{16(x+2)+6(4-3x)}{12} > \frac{3(5x+1)}{12} \quad / \cdot 12$

$-2x + 56 > 15x + 3.$

$x < \frac{53}{17}.$

K2 *h)* $(x-5)(x-3) - 4 < (x-4)^2 + 6$.

Megoldás

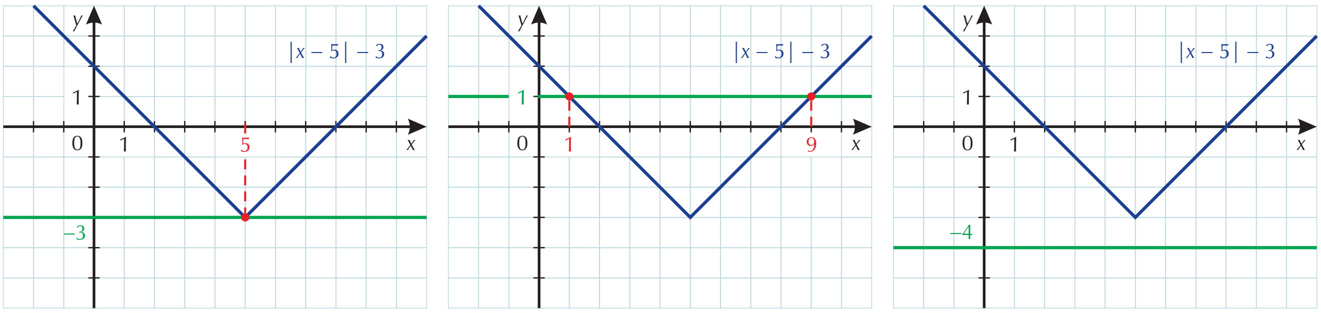
Felbontva a zárójeleket és elvégezve az összevonást, azt kapjuk, hogy $11 < 22$. Ez igaz, tehát az egyenlőtlenségnek minden valós szám megoldása.

63. ABSZOLÚT ÉRTÉKET TARTALMAZÓ EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

1. K2 Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

K1 *a)* $|x-5|-3=-3$; $|x-5|-3=1$; $|x-5|-3=-4$.

Megoldás



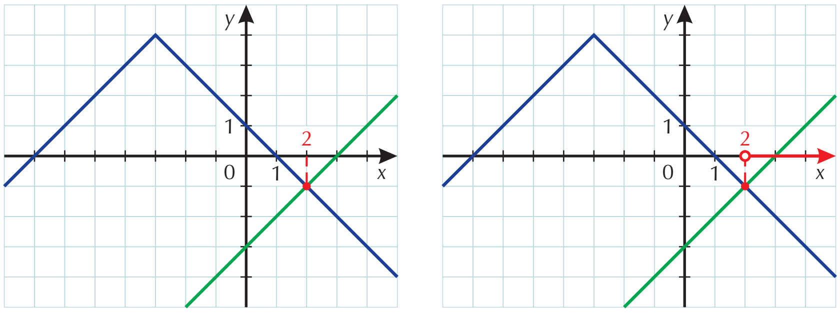
$|x-5|-3=-3$ egyenlet megoldása $x=5$.

$|x-5|-3=1$ egyenlet megoldása $x_1=1$; $x_2=9$.

$|x-5|-3=-4$ egyenletnek nincs megoldása.
Ahol van megoldás, ott az ellenőrzés szükséges.

b) $-|x+3|+4=x-3$; $-|x+3|+4<x-3$.

Megoldás

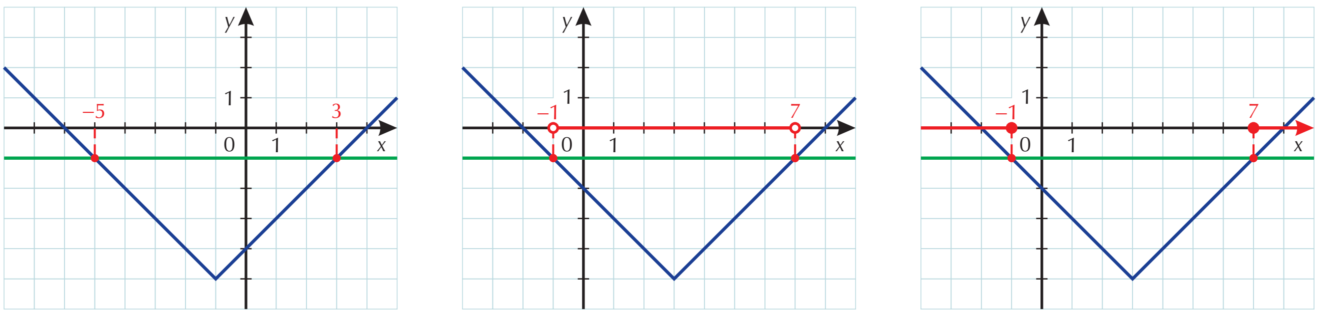


$-|x+3|+4=x-3$ egyenlet megoldása $x=2$.

$-|x+3|+4<x-3$ egyenlőtlenség megoldása $x>2$.

c) $|x+1|-5=-1$; $|x-3|-5<-1$; $|x-3|-5\geq -1$.

Megoldás



$|x+1|-5=-1$ egyenlet megoldása $x_1=3$; $x_2=-5$.

$|x-3|-5<-1$ egyenlőtlenség megoldása $-1<x<7$.
$|x-3|-5\geq -1$ egyenlőtlenség megoldása $x\leq -1$ vagy $x\geq 7$.

d) $\frac{1}{3}x-2\geq |x-4|-2$.

Megoldás: $3\leq x\leq 6$.

e) $|x+1|-3>\frac{1}{2}x+2$.

Megoldás: $x<-4$; vagy $x>8$.

2. K1 Oldjuk meg algebrai úton az alábbi egyenleteket!
a) $|x|-2=3$.

Megoldás

$|x|=5$.
$x_1=5$; $x_2=-5$.

b) $2|x|+4=|x|+1$.

Megoldás

Rendezve az egyenletet, kapjuk, hogy $|x|=-3$, ennek az egyenletnek nincs megoldása.

c) $|x-3|=5$.

Megoldás

$x-3=\pm 5$.
$x_1=8$; $x_2=-2$.

d) $|x+5|=-1$.

Megoldás

Nincs megoldás.

3. K1 Van-e a pozitív számokon megoldása az alábbi egyenleteknek?
a) $|x+3|=7-x$.

Megoldás

1. eset:
$x\geq -3$, akkor az egyenlet
$x+3=7-x$ alakba írható, melyből
$x=2$. A megoldás az $x>-3$ vizsgált intervallumba esik.

2. eset:
$x<-3$, ekkor az egyenlet
$-(x+3)=7-x$ alakú lesz, melynek nincs megoldása.
Az $|x+3|=7-x$ egyenletnek a pozitív számok halmazán $x=2$ a megoldása.

b) $|x-4|=\frac{1}{2}x+3$.

Megoldás

Az $|x-4|=\frac{1}{2}x+3$ egyenletnek a pozitív számok halmazán $x_1=14$; $x_2=\frac{2}{3}$ a megoldása.

c) $|x-2| = x-2$.

Megoldás

$x \geq 2, \quad x \in \mathbf{R}^{+}$.

d) $2 - |x+5| = \frac{1}{2}x + 10$.

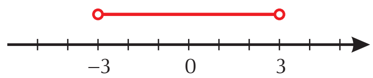
Megoldás

Az egyenletnek nincs megoldása.

4. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket, és a megoldást ábrázoljuk számegyenesen!

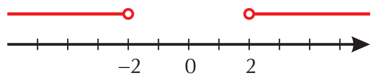
a) $|x| < 3$.

Megoldás: $-3 < x < 3$.



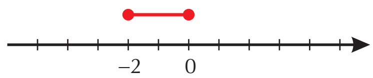
b) $|x| > 2$.

Megoldás: $x < -2$ vagy $x > 2$.



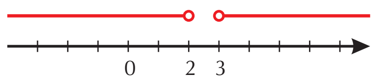
c) $|x+1| \leq 1$.

Megoldás: $-2 \leq x \leq 0$.



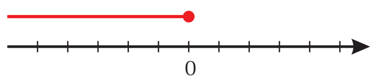
d) $|2x-5| > 1$.

Megoldás: $x < 2$ vagy $x > 3$.



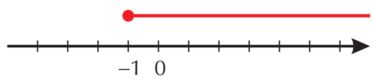
e) $|x| \geq 2x$.

Megoldás: $x \leq 0$.



f) $|x-2| \leq 2x+5$.

Megoldás: $x \geq -1$.



5. E1 Oldjuk meg a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $|x-2| + |x+3| = 7$.

Megoldás

Az abszolút értéken belüli kifejezések zérushelyei: $x = -3$; $x = 2$.

I. Ha $x < -3$, akkor az egyenlet

$-(x-2) + (-1)(x+3) = 7$ alakú, melynek megoldása $x = -4$. A kapott érték az $x < -3$ vizsgált intervallumba esik, és megoldása az egyenletnek.

II. Ha $-3 \leq x \leq 2$, akkor az egyenlet

$-(x-2) + x + 3 = 7$, amelynek nincs megoldása.

III. Ha $x > 2$, akkor az egyenlet

$x - 2 + x + 3 = 7$, amelynek megoldása $x = 3$. A kapott érték megoldása az eredeti egyenletnek.

A feladat megoldása $x_1 = -4$; $x_2 = 3$.

b) $|x| + |x-5| = 2$.

Az előző felbontással vizsgálva az egyenletet, nincs megoldás.

c) $|1 - x| + |x + 2| \leq 5$.

Megoldás

Vizsgáljuk az egyenlőtlenség megoldását esetszétválasztással.
Az abszolút értéken belüli kifejezések zérushelyei: $x = -2$; $x = 1$.

1. eset:
$x < -2$, ekkor az egyenlőtlenség
$1 - x - x - 2 \leq 5$ alakú. Ebből adódik
$x \geq -3$. Összevetve a $x < -2$ feltétellel:
$-3 \leq x < -2$.

2. eset:
$-2 \leq x \leq 1$, ekkor
$1 - x + x + 2 \leq 5$, amelyből
$3 \leq 5$ azonosságot kapjuk a $-2 \leq x \leq 1$ intervallumon.
Így ezen az intervallumon a megoldás:
$-2 \leq x \leq 1$.

3. eset:
$x > 1$, ekkor
$-1 + x + x + 2 \leq 5$, amelyből
$x \leq 2$. Összevetve $x > 1$ feltétellel:
$1 < x \leq 2$.
Az eredeti egyenlőtlenség megoldása a három vizsgált eset megoldásának egyesítése:
$-3 \leq x \leq 2$.

d) $||x - 3| - 2| - 1 = 3$.

Megoldás

Lebontogatással vagy grafikus úton is megoldható az egyenlet.
$x_1 = -3$; $x_2 = 9$.

e) $\frac{1}{2}||x + 1| - 2| - 3 = 1$.

Megoldás

$x_1 = -11$; $x_2 = 9$.

f) $\left|\frac{1}{x - 3}\right| > 2$.

Megoldás

Az egyenlőtlenség grafikusan is megoldható.
Algebrai úton:
$\left|\frac{1}{x - 3}\right| > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x - 3} > 2$ vagy $\frac{1}{x - 3} < -2$ teljesül, feltéve, hogy $x \neq 3$.

1. eset:

$\frac{1}{x - 3} > 2$;

$\frac{1}{x - 3} - 2 > 0$;

$\frac{7 - 2x}{x - 3} > 0$.

Egy tört értéke pozitív, ha a számlálója és a nevezője azonos előjelű.
Ennek vizsgálatából kapjuk, hogy

$3 < x < \frac{7}{2}$.

2. eset:

$\frac{1}{x-3} < -2;$

$\frac{1}{x-3} + 2 < 0;$

$\frac{2x-5}{x-3} < 0.$

Egy tört értéke negatív, ha a számlálója és a nevezője különböző előjelű.
Ennek vizsgálatából kapjuk, hogy

$\frac{5}{2} < x < 3.$

Az eredeti egyenlőtlenség megoldása a két eset egyesítése:

$\frac{5}{2} < x < 3$ vagy $3 < x < \frac{7}{2}$, melyet más alakban írva $\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$, $x \neq 3$.

64. PARAMÉTERES EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

1. E1 Határozzuk meg az egyenletben szereplő a paraméter értékét úgy, hogy az egyenleteknek
I. legyen;
II. ne legyen megoldása!

a) $ax - 2 = 2x - 4$.

Megoldás

Rendezve az egyenletet:
$x(a - 2) = -2$.

Ha $a \neq 2$, akkor $x = \dfrac{-2}{a-2}$ a megoldás.

Ha $a = 2$, akkor az egyenlet $0 = -2$ lesz, ami ellentmondás, tehát nincs megoldás.
Tehát, ha $a \neq 2$, akkor van az egyenletnek megoldása, ha $a = 2$, akkor nincs.

b) $(a + 3)x = 5x - 7$.

Megoldás

Rendezve az egyenletet:
$x(a - 2) = -7$.

Ha $a \neq 2$, akkor $x = \dfrac{-7}{a-2}$ a megoldás.

Ha $a = 2$, akkor az egyenlet $0 = -7$ lesz, ami ellentmondás, tehát nincs megoldás.
Tehát ha $a \neq 2$, akkor van az egyenletnek megoldása, ha $a = 2$, akkor nincs.

c) $(a - 2)x + 11 = 2ax - 4$.

Megoldás

Rendezve az egyenletet:
$x(-a - 2) = -15$.

Ha $-a - 2 \neq 0$, azaz $a \neq -2$, akkor $x = \dfrac{15}{a+2}$ a megoldás.

Ha $-a - 2 = 0$, azaz $a = -2$, akkor az egyenlet $0 = -15$ lesz, ami ellentmondás, tehát nincs megoldás.
Tehát ha $a \neq -2$, akkor van az egyenletnek megoldása, ha $a = -2$, akkor nincs.

2. E1 Hogyan válasszuk meg a p paraméter értékét, hogy az egyenlet megoldása pozitív szám legyen?

a) $3x - p = -7$.

Megoldás

$x = \dfrac{p-7}{3}$.

Az egyenlet megoldása pozitív, ha $\dfrac{p-7}{3} > 0 \Rightarrow p > 7$.

b) $5x + 3p = 2x - 4$.

Megoldás

Előző alapján a megoldás pozitív, ha $p < -\frac{4}{3}$.

c) .

Megoldás

Ha $p \neq 1$, akkor $x = \frac{2}{1-p}$.

Ha $p = 1$, akkor nincs megoldás.

A megoldás pozitív, ha $p < 1$.

d) $(p+1)x + 9 = 2x - 5$.

Megoldás

Ha $p \neq 1$, akkor $x = \frac{14}{1-p}$.

Ha $p = 1$, akkor nincs megoldás.

A megoldás pozitív, ha $p < 1$.

3. E1 Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán, az a valós paraméter!

a) $5x = a$.

Megoldás

$x = \frac{a}{5}$.

b) $2x + a = ax$.

Megoldás

Ha $a \neq 2$, akkor $x = \frac{a}{a-2}$ a megoldás.

Ha $a = 2$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

c) $7x - (a+2)x = 4$.

Megoldás

Ha $a \neq 5$, akkor $x = \frac{4}{5-a}$ a megoldás.

Ha $a = 5$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

d) $ax + 5 = 3x + 7$.

Megoldás

Ha $a \neq 3$, akkor $x = \frac{2}{a-3}$ a megoldás.

Ha $a = 3$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

e) $a^2x + a = ax - 1$.

Megoldás

Rendezve az egyenletet:

$xa(a-1) = -(a+1)$.

Ha $a \neq 0$; $a \neq 1$, akkor $x = \frac{-(a+1)}{a(a-1)}$.

Ha $a = 0$ vagy $a = 1$, akkor nincs megoldás.

f) $18 + a^2x = 2a + 9ax$.

Megoldás

Rendezve az egyenletet:
$xa(a-9) = 2(a-9)$.

Ha $a \neq 0$; $a \neq 9$, akkor $x = \frac{2}{a}$.

Ha $a = 0$, akkor nincs megoldás.
Ha $a = 9$, akkor azonosság, tehát minden szám megoldás.

4. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletek megoldása 2-nél nagyobb valós szám legyen!

E1 *a)* $\frac{5(x-2p)}{3} + 1 = x - p$.

Megoldás

$x = \frac{7p-3}{2}$.

$\frac{7p-3}{2} > 2$ akkor teljesül, ha $p > 1$.

E2 *b)* $p(1-2x) = 5 - 3x$.

Megoldás

Ha $p = \frac{3}{2}$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $p \neq \frac{3}{2}$, akkor $x = \frac{5-p}{3-2p}$.

A p értékének meghatározásához az $\frac{5-p}{3-2p} > 2$ egyenlőtlenséget kell megoldani.

$\frac{5-p-2(3-2p)}{3-2p} > 0$; $\quad \frac{3p-1}{3-2p} > 0$.

Egy tört értéke akkor pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.

I. $\left.\begin{array}{l} 3p-1>0 \\ 3-2p>0 \end{array}\right\}$, illetve II. $\left.\begin{array}{l} 3p-1<0 \\ 3-2p<0 \end{array}\right\}$.

Az egyenlőtlenség-rendszer megoldása: $\frac{1}{3} < p < \frac{3}{2}$, ami egyben a feladat megoldása is.

5. E2 Oldjuk meg az alábbi paraméteres egyenleteket az egész számok halmazán!

a) $4ax - 6 = (a+2)x + 12$.

Megoldás

Egyenletrendezés után kapjuk, hogy $x(3a-2) = 18$.

Ha $a \neq \frac{2}{3}$, akkor $x = \frac{18}{3a-2}$.

Az egyenlet zérushelye akkor egész szám, ha $3a - 2$ osztója 18-nak.
Az a értékeinek meghatározásához készítsünk táblázatot:

$3a-2$	-1	-2	-3	-6	-9	-18	1	2	3	6	9	18
$3a$	1	0	-1	-4	-7	-16	3	4	5	8	11	20
a	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{16}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{20}{3}$

Ha $a = \frac{2}{3}$, akkor nincs megoldása az egyenletnek.

b) $\dfrac{3}{ax-2}=\dfrac{2}{5x-2a}$.

Megoldás

Kikötések: $x \neq \dfrac{2}{a}$ és $5x-2a \neq 0$, azaz $x \neq \dfrac{2a}{5}$.

Ha $a=0$, akkor $x \notin \mathbf{Z}$.
Rendezzük az egyenletet:
$15x-6a=2ax-4 \Rightarrow x(15-2a)=6a-4$.

Ha $a \neq \dfrac{15}{2}$, akkor

$x=\dfrac{6a-4}{15-2a}=\dfrac{6a-45+45-4}{15-2a}=-3+\dfrac{41}{15-2a}$.
x értéke akkor egész, ha $15-2a$ osztója 41-nek.

$15-2a$	–1	–41	1	41
$-2a$	–16	–56	–14	26
a	8	28	7	–13

Ha $a=\dfrac{15}{2}$, nincs megoldása az egyenletnek.

c) $\dfrac{3x-2a}{1-a}=\dfrac{x+2a}{1+a}$.

Megoldás

Az előző feladatrész gondolatmenetét követve kapjuk, hogy $x=\dfrac{2a}{1+2a}$ az egyenlet megoldása, feltéve,

hogy $a \neq -1; -\dfrac{1}{2}; 1$.

$x \in \mathbf{Z}$, ha $a=0$, ekkor $x=0$.

65. ELSŐFOKÚ EGYENLETRENDSZEREK

1. K1 Oldjuk meg behelyettesítő módszerrel a következő egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{array}{ll}(1) & x-y=-2\\(2) & 3y-2x=9\end{array}\right\}.$

Megoldás

Fejezzük ki az (1) egyenletből x-et, $x=y-2$, majd helyettesítsük be a (2) egyenletbe:

$3y-2(y-2)=9;$

$y=5.$

Visszahelyettesítve az $x=y-2$ egyenletbe $y=5$-öt, kapjuk: $x=3$.

Az egyenletrendszer megoldása az $x=3$; $y=5$ számpár.

Ellenőrzés során a kapott értékeket mindkét egyenletbe be kell helyettesíteni!

b) $\left.\begin{array}{ll}(1) & x-3y=-4\\(2) & 5y-3x=-5\end{array}\right\}.$

Megoldás

Az (1) egyenletből x-et kifejezve:

$\left.\begin{array}{ll}(1) & x=3y-4\\(2) & 5y-3x=-5\end{array}\right\}.$ Behelyettesítve a (2) egyenletbe:

$5y-3(3y-4)=-5 \quad\Rightarrow\quad y=4{,}25.$

Az egyenletrendszer megoldása az $x=8{,}75$; $y=4{,}25$ számpár.

c) $\left.\begin{array}{ll}(1) & x=5-3y\\(2) & x+8y=10\end{array}\right\}.$

Megoldás

Az egyenletrendszer megoldása az $x=2$; $y=1$ számpár.

d) $\left.\begin{array}{ll}(1) & 2x+6y=6\\(2) & x+2y=\frac{4}{3}\end{array}\right\}.$

Megoldás

Az egyenletrendszer megoldása az $x=-2$; $y=\frac{5}{3}$ számpár.

2. K1 Oldjuk meg az azonos együtthatók módszerével az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{array}{ll}(1) & 3x+2y=8\\(2) & 2x-y=10\end{array}\right\}.$

Megoldás

Szorozzuk be a (2) egyenletet 2-vel:

$\left.\begin{array}{ll}(1) & 3x+2y=8\\(2) & 2x-y=10\end{array}\right\} \quad /\cdot 2$

Adjuk össze a két egyenletet:

$\left.\begin{array}{ll}(1) & 3x+2y=8\\(2) & 4x-2y=20\end{array}\right\} \quad +$

$7x=28,$

$x=4.$

Az egyenletrendszer megoldása az $x=4$; $y=-2$ számpár.

Ellenőrzés során a kapott értékeket mindkét egyenletbe be kell helyettesíteni!

b) $\left.\begin{array}{ll}(1) & x = 2 - 4y \\ (2) & 8y + 3x = 5\end{array}\right\}.$

Megoldás

Írjuk az egyenletrendszert más alakban (bal oldalon csak ismeretlen, jobb oldalon csak szám legyen).

$\left.\begin{array}{ll}(1) & x + 4y = 2 \\ (2) & 3x + 8y = 5\end{array}\right\}\quad / \cdot 2$

$\left.\begin{array}{ll}(1) & 2x + 8y = 4 \\ (2) & 3x + 8y = 5\end{array}\right\}$

$(2) - (1) \quad x = 1.$

Az egyenletrendszer megoldása az $x = 1;\ y = \frac{1}{4}$ számpár.

c) $\left.\begin{array}{ll}(1) & x - 2y = 11 \\ (2) & 3x + 2y = 9\end{array}\right\}.$

Megoldás

Az egyenletrendszer megoldása az $x = 5;\ y = -3$ számpár.

d) $\left.\begin{array}{ll}(1) & 4x + 3y = 6 \\ (2) & 2x + y = 4\end{array}\right\}.$

Megoldás

Az egyenletrendszer megoldása az $x = 3;\ y = -2$ számpár.

3. K2 Vezessünk be célszerűen megválasztott új ismeretlent, és ennek segítségével oldjuk meg az egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12}\end{array}\right\}.$

Megoldás

Vezessük be az

$a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$ jelöléseket. Ekkor

$a + b = \frac{2}{3}$,

$a - b = \frac{1}{12}$.

A 1. és 2 feladatban gyakorolt módszer valamelyikével megoldva: $a = \frac{3}{8}$; $b = \frac{7}{24}$.

Ennek alapján az egyenletrendszer megoldása az $x = \frac{8}{3}$; $y = \frac{24}{7}$ számpár.

Ellenőrzés során a kapott értékeket mindkét egyenletbe be kell helyettesíteni!

b) $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x+3} + \frac{4}{y-5} = 2 \\ \frac{3}{x+3} + \frac{8}{y-5} = 5\end{array}\right\}.$

Megoldás

Vezessük be az

$a = \frac{1}{x+3}$, $b = \frac{1}{y-5}$ jelöléseket. Ekkor az

$\left.\begin{array}{r}a + 4b = 2 \\ 3a + 8b = 5\end{array}\right\}$ egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása: $a = 1$; $b = \frac{1}{4}$.

Visszahelyettesítve:

$1 = \frac{1}{x+3} \quad \Rightarrow \quad x = -2;$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{y-5} \quad \Rightarrow \quad y = 9.$

A megadott egyenletrendszer megoldása az $x = -2$; $y = 9$ számpár.
Ellenőrzés során a kapott értékeket mindkét egyenletbe be kell helyettesíteni!

c) $\left.\begin{aligned} \frac{9}{2x-y} + \frac{7}{2x+y} &= 2 \\ \frac{6}{2x-y} - \frac{14}{2x+y} &= -\frac{4}{3} \end{aligned}\right\}.$

Megoldás

Vezessük be az

$a = \frac{1}{2x-y}$, $b = \frac{1}{2x+y}$ jelöléseket. Ekkor

$\left.\begin{aligned} 9a + 7b &= 2 \\ 6a - 14b &= -\frac{4}{3} \end{aligned}\right\}.$

$a = \frac{1}{9}$; $b = \frac{1}{7}$.

Visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$\left.\begin{aligned} \frac{1}{9} &= \frac{1}{2x-y} \\ \frac{1}{7} &= \frac{1}{2x+y} \end{aligned}\right\}.$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása az $x = 4$; $y = -1$ számpár.
Ellenőrzés során a kapott értékeket mindkét egyenletbe be kell helyettesíteni!

4. K1 Két szám összege 40, különbsége 13. Melyik ez a két szám?

Megoldás

Legyen az egyik szám x, a másik szám y. A szöveg alapján felírható egyenletrendszer:

$\left.\begin{aligned} x + y &= 40 \\ x - y &= 13 \end{aligned}\right\},$

melynek megoldása: $x = 26,5$; $y = 13,5$.
Az ellenőrzés során a kapott értékeket a szövegbe kell behelyettesíteni.
A keresett két szám a 26,5 és a 13,5.

5. K1 Egy panzióban három- és kétágyas szobák vannak. Összesen 14 szoba van, a férőhelyek száma 34. Hány két-, illetve háromágyas szoba van a panzióban?

Megoldás

Jelöljük a kétágyas szobák számát x-szel, a háromágyasokét y-nal.
A felírható egyenletrendszer

$\left.\begin{aligned} x + y &= 14 \\ 2x + 3y &= 34 \end{aligned}\right\}$, melynek megoldása: $x = 8$; $y = 6$.

Az ellenőrzés során a kapott értékeket a szövegbe kell behelyettesíteni.
A kétágyas szobák száma 8, a háromágyasoké 6.

6. K1 Egy- és kéteurós pénzérméből összegyűjtöttünk 35 db-ot, melynek értéke 56 euró. Melyik pénzérméből hány darabot gyűjtöttünk össze?

Megoldás

Legyen az egyeurós pénzérmék darabszáma x, a kéteurós pénzérmék darabszáma y.

$\left.\begin{aligned} x + y &= 35 \\ x + 2y &= 56 \end{aligned}\right\}.$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 14$; $y = 21$.
Egyeurósból 14 db-ot, a kéteurósból 21 db-ot gyűjtöttünk össze.

7. K1 Ha egy kétjegyű számhoz hozzáadjuk a jegyei felcserélésével kapott számot, 132-t kapunk. Másrészt tudjuk, hogy a jegyek felcserélésével kapott szám harmadrésze 8-cal kisebb, mint az eredeti szám. Melyik kétjegyű számról van szó?

Megoldás

Legyen a kétjegyű szám $\overline{xy}$ alakú.
Készítsünk táblázatot:

	Tízesek	Egyesek	Szám
Eredeti szám	x	y	$10x + y$
Felcserélt szám	y	x	$10y + x$

A szöveg alapján felírható egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 10x + y + 10y + x &= 132 \\ \frac{10y + x}{3} + 8 &= 10x + y \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 3$; $y = 9$.
A keresett kétjegyű szám 39.

8. K1 Egy somlói galuska és egy krémes ára 560 Ft. Három krémes 80 Ft-tal drágább, mint egy somlói. Mennyit kell fizetnünk öt krémesért és két somlóiért?

Megoldás

Legyen a somlói galuska ára x Ft, a krémes ára y Ft. Így

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 560 \\ 3y - 80 &= x \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 400$; $y = 160$.
5 krémesért és 2 somlóiért 1600 Ft-ot kell fizetni.

66. GYAKORLATI ALKALMAZÁSOK 1.

1. K1 Egy kétjegyű számban a tízes helyiértéken 2-vel kisebb szám áll, mint az egyes helyiértéken. Ha a számjegyeket felcseréljük, az eredeti és felcserélt számok összege 154. Melyik ez a szám?

Megoldás

	Tízesek	Egyesek	Szám
Eredeti szám	$x-2$	x	$10(x-2)+x$
Felcserélt szám	x	$x-2$	$10x+(x-2)$

A felírható egyenlet:

$10(x-2)+x+10x+x-2=154$;

$x=8$.

Az ellenőrzést a szövegbe történő behelyettesítéssel kell elvégezni.

A keresett szám a 68.

2. K1 Egy háromjegyű szám első számjegye 2. Ha a tízes és az egyes helyiértéken lévő számokat felcseréljük, akkor az eredeti szám és a kapott szám különbsége 63. Melyik ez a szám?

Megoldás

A szám, illetve a felcserélt szám egyaránt 2-vel kezdődik, ezért elegendő a százas helyi értéken lévő szám elhagyása után kapott kétjegyű számmal foglalkozni.

	Tízesek	Egyesek	Szám
Eredeti szám	x	y	$10x+y$
Felcserélt szám	y	x	$10y+x$

$10x+y-(10y+x)=63$;

$9x-9y=63$;

$x-y=7$.

Mivel $0 \le x;\ y \le 9$; és $x;\ y$ egész szám, ezért $x=9;\ y=2$; vagy $x=8;\ y=1$; vagy $x=7;\ y=0$ lehetőség adódik.

Ellenőrizve mindhárom eset jó megoldást ad.

A keresett számok tehát: 292, 281, illetve 270 lehet.

3. K1 Egy fürdőmedencét két csapon keresztül lehet feltölteni. Az első csap egyedül 18 óra alatt, a másik csap egyedül 15 óra alatt töltené fel a medencét. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha az első csapból 2 órán keresztül folyik a víz, majd ezt a csapot elzárják?

Megoldás

Az első csapból 2 órán keresztül folyik a víz, ezért ekkor a medence $\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$ része telik meg.

A másik csap 1 óra alatt a medence $\frac{1}{15}$ részét tölti meg, és x óráig van nyitva, hogy a medence $\frac{8}{9}$ részét megtöltse.

Így tehát $\frac{x}{15}=\frac{8}{9}$, amelyből $x=\frac{40}{3}$ óra.

A második csap a medencét egyedül 13 óra 20 perc alatt tölti meg.

A medence 15 óra 20 perc alatt telik meg.

4. K1 Egy autópálya-szakasz építéséhez kavicsot hordanak. Három különböző teljesítményű teherautó végzi a munkát. Az egyik teherautó egyedül 5 nap alatt, a másik teherautó egyedül 8 nap alatt, a harmadik teherautó egyedül 9 nap alatt vinné a helyszínre a szükséges kavicsmennyiséget. Mennyi idő alatt végzi el a három teherautó a munkát, ha párhuzamosan dolgoznak?

Megoldás

A három teherautó x nap alatt végzi el a munkát.
Készítsünk táblázatot!

	Egyedül a munkát ennyi nap alatt végzi el	Egyedül a munka hányad részét végzi el egy nap alatt	x nap alatt a munka hányad részét végzi el
I. teherautó	5	$\frac{1}{5}$	$\frac{x}{5}$
II. teherautó	8	$\frac{1}{8}$	$\frac{x}{8}$
III. teherautó	9	$\frac{1}{9}$	$\frac{x}{9}$

A táblázat alapján:

$\frac{x}{5} + \frac{x}{8} + \frac{x}{9} = 1;$

$x = \frac{360}{157}.$

A három teherautó együtt $\approx 2,3$ nap alatt viszi a helyszínre a szükséges kavicsmennyiséget.

5. K1 Karcsi 17 évvel fiatalabb mogorva szomszédjánál. Ha kétszer annyi idős lenne, mint most, akkor egy évvel volna idősebb, mint szomszédja jelenleg. Hány éves a mogorva szomszéd?

Megoldás

Foglaljuk táblázatba adatainkat:

	Most	Karcsi kétszer annyi idősen
Karcsi	$x - 17$	$2(x - 17)$
Mogorva szomszédja	x	

A felírható egyenlet: $2(x - 17) - 1 = x$.
Ebből kapjuk, hogy $x = 35$.
Az ellenőrzés során a kapott értékeket a szövegbe kell behelyettesíteni.
A mogorva szomszéd 35 éves.

6. K1 Három testvér közül a legidősebb kétszer annyi éves, mint a legfiatalabb, a középső négy évvel fiatalabb, mint a legidősebb. Öt év múlva életkoraik összege 46 év. Hány évesek most a testvérek?

Megoldás

Válasszuk a legfiatalabb testvér életkorát x-nek. Ekkor a legidősebb $2x$, a középső $2x - 4$ éves. Öt év múlva minden testvér öt évet öregedett, ezért öt év múlva az életkoruk összege:
$2x + 2x - 4 + x + 15 = 46$, ebből
$x = 7$.
A testvérek életkora most 14 év, 10 év, 7 év.

7. K1 Egy téglalap alakú füvesített terület közepére kb. 98,28 m² területű, kör alakú szökőkutat terveznek. Mekkora a füvesített terület oldalainak hossza, ha oldalainak aránya 7 : 3, és a szökőkút területe a téglalap alakú park területének 13%-át foglalja el?

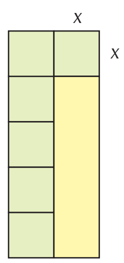
Megoldás

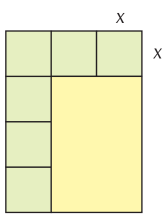
A téglalap alakú füvesített terület nagysága legyen x.
$x \cdot 0{,}13 = 98{,}28$,
$x = 756\ \text{m}^2$.
A park oldalhosszainak aránya 3 : 7, ezért jelöljük
a rövidebb oldalt $3y$-nal,
a hosszabb oldalt $7y$-nal:
$3y \cdot 7y = 756$.
$y^2 = 36$,
$y = 6$.
A park oldalainak hossza 18 m és 42 m.

8. K1 Egy lakóparkot L alakú park határol, mely 6 db egybevágó négyzetre bontható. A parknak nincs kerítése a lakónegyed felé. A parkot határoló kerítéshossz mérőszámának tízszerese (m-ben mérve) megegyezik a park területének mérőszámával. Hány négyzetméter a park területe?

Megoldás

Két lehetőség adódik a lakóépület oldalaihoz csatlakozó park kialakítására, amelyet az alábbi rajzok szemléltetnek:





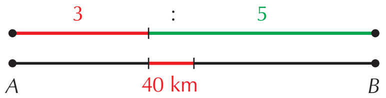
Legyen x a négyzet oldala.
Mindkét esetben a kerítés hossza $9x$, a füvesített terület $6x^2$.
Ezek alapján
$90x = 6x^2 \quad / :x \neq 0$
$6x = 90$,
$x = 15$.
Az ellenőrzés során a kapott értéket a szövegbe kell behelyettesíteni.
Az épületet határoló park területe: $6 \cdot 15 \cdot 15 = 1350\ (\text{m}^2)$.

67. GYAKORLATI ALKALMAZÁSOK 2.

1. K1 Egy autó *A*-ból *B* felé halad. Bizonyos idő múlva a megtett út úgy aránylik a még hátralévőhöz, mint 3 : 5. Ha az autó megtesz még 40 km-t, akkor az út felénél tart. Mekkora az *AB* távolság?

Megoldás

Készítsünk ábrát!



Jelöljük 8*x*-szel az *AB* távolságot.
A felírható egyenlet:
$3x + 40 = 5x - 40;$
$x = 40.$
AB távolsága 320 km, és ez megfelel a feltételeknek.

2. K1 10 liter 20%-os oldathoz legalább hány liter 80%-os oldatot öntsünk, hogy a keverék legalább 50%-os legyen?

Megoldás

Készítsünk táblázatot!

	Mennyiség (liter)	Töménység (%)	Alkoholtartalom
20%-os oldat	10	20	$0{,}20 \cdot 10$
80%-os oldat	x	80	$0{,}8 \cdot x$
50%-os keverék	$10 + x$	50	$0{,}50 \cdot (10 + x)$

A táblázat segítségével egyenlőtlenséget írhatunk fel:
$0{,}20 \cdot 10 + 0{,}80x \ge 0{,}50(10 + x).$
Az egyenlőtlenség megoldása: $x \ge 10.$
A 80%-os alkoholból legalább 10 litert kell a 20%-oshoz önteni.

3. E2 Numizmatikus barátomnak *k* db érméje összesen *K* dkg. Legfeljebb hány érme tömege lehet nagyobb, mint $\frac{K}{k} + 0{,}01$?

Megoldás

Nézzük meg, hogy az össztömegben hányszor van meg $\frac{K}{k} + 0{,}01$!

$\frac{K}{\frac{K}{k} + 0{,}01} = \frac{K \cdot k}{K + 0{,}01k}$, ennek a kifejezésnek az egész része adja meg, hogy legfeljebb hány érme tömege lehet nagyobb, mint $\frac{K}{k} + 0{,}01$.

4. E1 Az *a* alapú számrendszerben felírt 3002_a szám a 2*a* alapú számrendszerben felírva 302_{2a}. Mi a szám tízes számrendszerbeli alakja?

Megoldás

Az *a* alapú számrendszerben felírt 3002_a szám tízes számrendszerbeli alakja:
$3002_a = 3 \cdot a^3 + 0 \cdot a^2 + 0 \cdot a + 2.$
A 2*a* alapú számrendszerben felírt 302_{2a} szám tízes számrendszerbeli alakja:
$302_{2a} = 3 \cdot (2a)^2 + 0 \cdot 2a + 2.$

A két egyenlőség ugyanazt a számot állítja elő, ezért

$3 \cdot a^3 + 0 \cdot a^2 + 0 \cdot a + 2 = 3(2a)^2 + 0 \cdot a + 2;$

$3a^3 = 12a^2;$

$a_1 = 0,\ a_2 = 4.$

Az első nem lehet a szöveges feladat megoldása, így az $a = 4$ esetén a szám tízes számrendszerbeli alakja: $3002_a = 3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4 + 2 = 194$, illetve $302_8 = 3 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 2 = 194$.

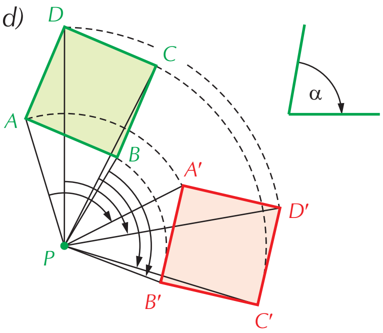
IX. GEOMETRIA – TOVÁBBI EGYBEVÁGÓSÁGOK

68. A PONT KÖRÜLI ELFORGATÁS SZÁRMAZTATÁSA ÉS TULAJDONSÁGAI

1. K1 Szerkesszük meg egy négyzet elforgatott képét, ha
a) a középpont körül forgatunk 45°-kal;
b) a csúcsa körül forgatunk –90°-kal;
c) az egyik oldal felezőpontja körül forgatunk 60°-kal;
d) egy külső pont körül forgatunk α szöggel!

Megoldás

d)

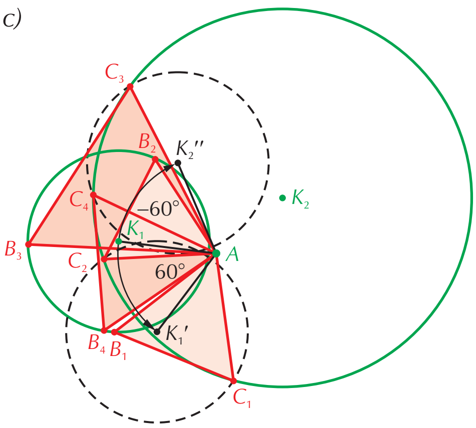


2. K2 Szerkesszünk szabályos háromszöget, ha adott egy csúcsa és
a) egy-egy egyenes, ami a másik két csúcson megy át;
b) egy egyenes és egy kör, ami a másik két csúcson megy át;
c) két kör, ami a másik két csúcson megy át!

Megoldás

a)–c) Legyen a háromszög *A* csúcsa adott!
Mivel a *B* csúcs elforgatott képe a *C* csúcs, így a *B*-n átmenő alakzat (egyenes, illetve kör) elforgatott képe átmegy a *C* csúcson. Ennek a képnek és az eredetileg is *C*-n átmenő alakzatnak a metszéspontja megadja *C*-t, és ezt visszaforgatva *B*-t kapjuk. (60°-kal, illetve –60°-kal forgatunk.)
A megoldások száma a metszéspontok számától függ.

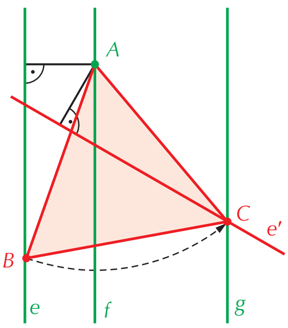
c)



3. E1 Adott három párhuzamos egyenes. Szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, amelynek egy-egy csúcsa egy-egy egyenesre esik!

Megoldás

Jelöljünk ki az egyik egyenesen egy tetszőleges *A* pontot! Ezzel a feladatot visszavezettük a **2.** *a)* feladatra.



69. A KÖZÉPPONTI SZÖG ÉS A HOZZÁ TARTOZÓ KÖRÍV

1. K1 Mekkora a fokban megadott következő szögek ívmértéke?

a) 15°; *b)* –75°; *c)* 150°; *d)* 210°; *e)* –300°; *f)* 540°; *g)* 17°; *h)* –204°; *i)* 1234°.

Megoldás

a) $\frac{\pi}{12}$; *b)* $-5\frac{\pi}{12}$; *c)* $5\frac{\pi}{6}$; *d)* $7\frac{\pi}{6}$; *e)* $-5\frac{\pi}{3}$; *f)* 3π; *g)* $17\frac{\pi}{180}$; *h)* $-204\frac{\pi}{180}$; *i)* $1234\frac{\pi}{180}$.

2. K1 Hány fokosak az ívmértékben megadott következő szögek?

a) $\frac{3\pi}{8}$; *b)* $\frac{\pi}{18}$; *c)* $\frac{5\pi}{12}$; *d)* $\frac{2\pi}{3}$; *e)* $-\frac{\pi}{2}$; *f)* $\frac{7\pi}{15}$; *g)* $\frac{100\pi}{6}$; *h)* 1; *i)* –5; *j)* 2008.

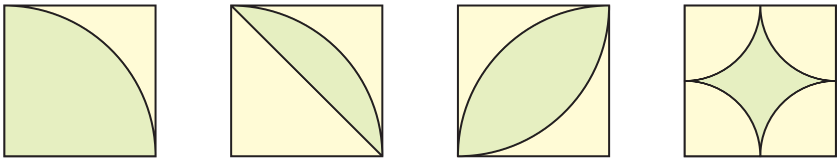
Megoldás

a) 67,5°; *b)* 10°; *c)* 75°; *d)* 120°; *e)* –90°; *f)* 84°; *g)* 3000°; *h)* kb. 57,3°; *i)* kb. –286,5°; *j)* kb. 115 050°.

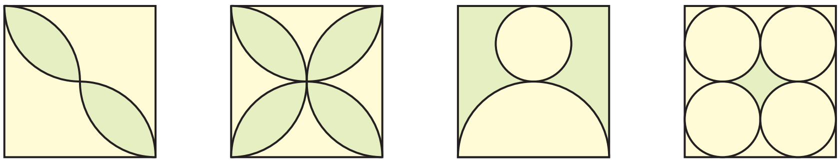
70. A KÖRÍV HOSSZA, A KÖRCIKK TERÜLETE

1. K1 Számítsuk ki a zöld részek területét, ha a négyzet oldala egységnyi!

a)



b)



Megoldás

a) $t_1 = 1 - \frac{\pi}{4}$ (négyzet területe mínusz egységsugarú negyedkör területe).

$t_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ (egységsugarú negyedkör területe mínusz a négyzet területének fele).

$t_3 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$ (az előző terület kétszerese).

$t_4 = 1 - \frac{\pi}{4}$ (négyzet területe mínusz 4 darab 0,5 egységsugarú negyedkör területe).

b) $t_1 = 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ (az *a)* rész t_3 területét kell kiszámítani 0,5 egységoldalú négyzetben, és azt kétszer venni).

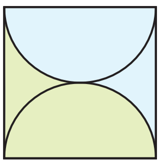
$t_2 = \frac{\pi}{2} - 1$ (az előző terület kétszerese).

$t_3 = 1 - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} = 1 - \frac{3\pi}{16}$ (négyzet területe mínusz 0,5 egységsugarú félkör mínusz 0,25 egységsugarú kör).

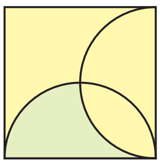
$t_4 = 1 - \frac{\pi}{4}$ (négyzet területe mínusz 4 darab 0,25 egységsugarú kör területe).

2. K1 Hányadrésze a zöld terület a négyzet területének?

a)



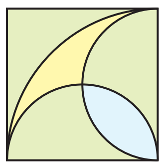
b)



Megoldás

a) A fele.
b) Az 3. feladat zöld területe negyede a négyzetének.

3. E1 Bizonyítsuk be, hogy a kék és sárga területek egyenlők!



Megoldás

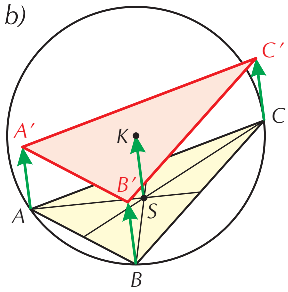
Legyen a négyzet oldalhossza 1. Használjuk az 1–2. feladat eredményeit! Ekkor $t_{KÉK} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$. Ugyanakkor $t_{SÁRGA} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$, tehát egyenlők.

71–72. ELTOLÁS

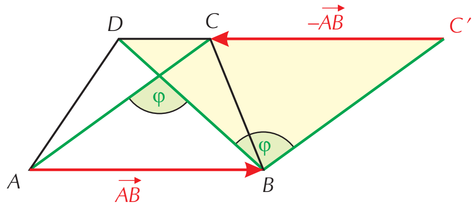
1. K1 Toljunk el egy háromszöget
a) az egyik oldalvektorával;
b) a háromszög súlypontjából a körülírt kör középpontjába mutató vektorral!

Megoldás

b)

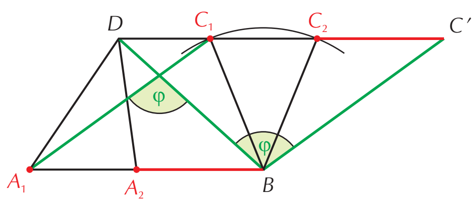


2. K2 Szerkesszünk trapézt, ha adottak az átlói, az átlók szöge és
a) az egyik alapja;
b) az egyik szára!



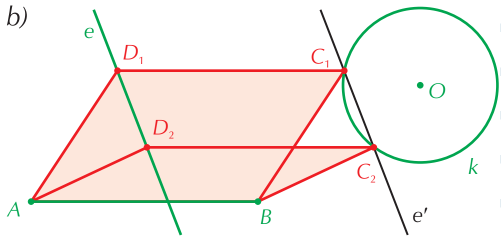
Megoldás

Legyen a trapéz *AB* oldala adott! Toljuk el az *AC* átlót $\overrightarrow{AB}$ vektorral úgy, hogy a két átló mindegyike most a *B* pontból induljon, és a közrezárt szögük az átlók szöge (vagy annak kiegészítő szöge). A *DBC′* háromszög szerkeszthető.
a) *C′* pontból mérjük vissza *AB*-t, így megkapjuk *C*-t. Toljuk vissza *B*-t $\overrightarrow{AB}$ vektorral, (azaz $-\overrightarrow{AB}$ vektorral toljuk el), így megkapjuk *A*-t.
b) *B* középpontú *BC* szár sugarú körrel elmetszve *BC′*-t, megkapjuk *C*-t. Toljuk vissza *B*-t $\overrightarrow{AB}$ vektorral, így megkapjuk *A*-t. A diszkussziótól eltekintünk.



3. K2 Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott egyik oldala és a másik két csúcson átmenő
a) egy-egy egyenes,
b) egy kör és egy egyenes!

b)



Megoldás

Legyen a paralelogramma *AB* oldala adott!
Mivel az *AD* oldal $\overrightarrow{AB}$ vektorral eltolt képe a *BC* oldal, így a *D*-n átmenő alakzat (egyenes, illetve kör) eltolt képe átmegy a *C* csúcson. Ennek a képnek és az eredetileg is *C*-n átmenő alakzatnak a metszéspontja megadja *C*-t, és ezt visszatolva *B*-t kapjuk.
A megoldások száma a metszéspontok számától függ.

73. A VEKTOR FOGALMA

1. K1 Egyenlő-e a négyzet két átlóvektora?

Megoldás

Nem, mert irányuk különböző.

2. K2 Egyenlők-e a kocka szemközti lapjain párhuzamosan futó átlóvektorok?

Megoldás

Igen, ha az irányuk azonos.

3. K1 Van-e olyan vektor, ami egyenlő a 45°-os elforgatottjával?

Megoldás

Igen, a nullvektor.

4. K1 Van-e olyan vektor, ami egyenlő a kétszeres nyújtásával?

Megoldás

Igen, a nullvektor.

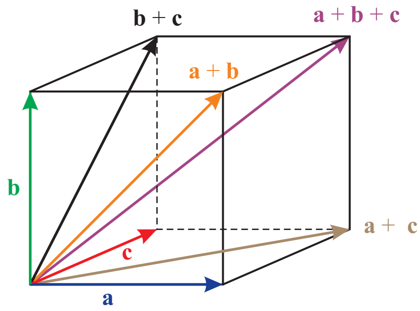
74. VEKTOROK ÖSSZEGZÉSE

1. K1 Rajzoljunk tetszőleges négyszöget. Szerkesszük meg az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ összegvektort!

Megoldás

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$.

2. K1 Fejezzük ki a kocka egy csúcsból induló három oldalvektora segítségével az adott csúcsból a többi csúcsba mutató vektorokat!



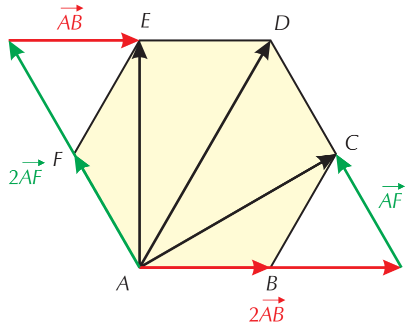
Megoldás

$\underline{a}$
$\underline{b}$
$\underline{c}$
$\underline{a} + \underline{b}$
$\underline{b} + \underline{c}$
$\underline{a} + \underline{c}$
$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$

3. K1 Fejezzük ki egy szabályos hatszög egyik csúcsából induló két oldalvektora segítségével az adott csúcsból a többi csúcsba mutató vektorokat! ($\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF}$ vektort $2\overrightarrow{EF}$ vektornak szokás írni.)

Megoldás

Indítsuk az A csúcsból az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AF}$ vektorokat. A hatszög csúcsait az óramutató járásával ellentétesen körbe betűzzük meg. Ekkor $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$; végül $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$.



4. K1 Három (egyenlő tömegű) kutya egyenlő nagyságú erővel húzza ugyanazt a zsákmányt. Mekkora szöget zár be közülük két kutya által kifejtett erő, ha egy tapodtat sem tudnak semmilyen irányba mozdulni?

Megoldás

Az erővektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, és egy síkban vannak.

5. E1 Szerkesszük meg a háromszög súlypontjából a csúcsokba mutató három vektor összegét! Mit tapasztalunk? Indokoljuk!

Megoldás

Mindig nullvektor. Már megszerkesztettük a három súlyvonal $\frac{1}{3}$-ából a háromszöget, ami azt jelenti, hogy a három súlyvonalvektor összege nulla.

6. K2 A folyó sebessége 3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. A folyásirányra merőlegesen 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel evezünk. Szerkesszük meg a csónak haladási irányát és sebességét!

Megoldás

A 3-4-5 oldalú derékszögű háromszöget kell megszerkeszteni. A csónak sebessége 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ lesz.

75. KÉT VEKTOR KÜLÖNBSÉGE

1. K2 Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor abszolút értéke egyenlő, akkor a két vektor összege és különbsége merőleges egymásra!

Megoldás

Ha a két vektor rombuszt feszít ki, akkor annak átlói a kérdezett vektorok, és az átlók merőlegesek. Ha azonosak vagy ellentettek, akkor a két kérdezett vektor egyike nullvektor, ezért igaz az állítás.

2. K2 Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor összege és különbsége merőleges egymásra, akkor a két vektor abszolút értéke egyenlő!

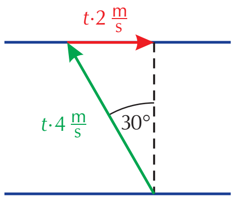
Megoldás

Egy pontból felmérve a vektorokat, az összeg- és különbségvektorok a két vektor által kifeszített paralelogramma átlói. Ha ezek merőlegesek egymásra, akkor rombuszról van szó, aminek az oldalai (a két vektor abszolút értéke) egyenlők. Ha az összeg-, illetve a különbségvektor nullvektor, akkor a két vektor ellentétes, illetve azonos.

3. K2 A folyó sebessége 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Szeretnénk pontosan szemben partot érni. Milyen irányba induljunk el, ha 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel tudunk evezni?

Megoldás

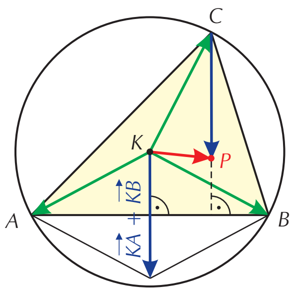
Olyan vektorháromszöget kapunk, amelynek átfogója kétszer akkora, mint egyik befogója. Ez a szabályos háromszög fele, tehát a partra merőleges iránytól 30°-kal a folyásirány szerint felfele kell evezni.



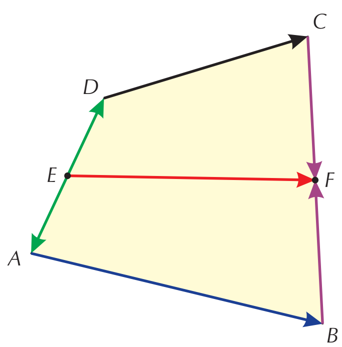
4. E1 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög körülírt körének középpontjából a csúcsokhoz mutató vektorok összege a háromszög magasságpontjába mutat!

Megoldás

Jelöljük P-vel azt a pontot, ahová a három vektor összege mutat, és K-val a körülírt kör középpontját. Tehát $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KP}$. A háromszög köré írt kör középpontjától a csúcsokba vezető vektorok hossza egyenlő. Ezért az első feladat szerint a két vektor összege merőleges az adott oldalra. Például $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} \perp \overrightarrow{AB}$. Másrészt $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{CP}$. Ez azt jelenti, hogy CP merőleges AB-re, tehát P rajta van a C-ből induló magasságvonalon. Hasonlóan igazolható, hogy rajta van a másik két magasságvonalon is, ezért P csak a magasságpont lehet.



5. E1 Tekintsük az $ABCD$ négyszög AD oldalának felezőpontját E-t és BC oldalának felezőpontját, F-et. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög $\overrightarrow{EF}$ középvonalvektorára igaz, hogy $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$!

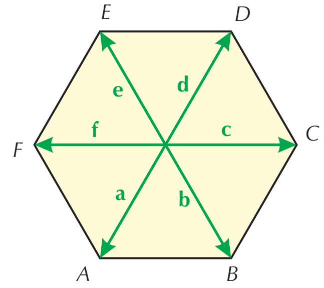


Megoldás

Írjuk fel kétféleképpen az $\overrightarrow{EF}$ középvonalvektort. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$, másrészt $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$. A két egyenletet összeadva és az ellentett vektorokat kiejtve adódik az állítás.

6. K2 Jelölje egy szabályos hatszög csúcsait A, B, C, D, E, F. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \mathbf{0}$, és $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA} = \mathbf{0}$!

Megoldás



A hatszög középpontjából a csúcsokhoz vezető vektorok legyenek rendre $\mathbf{a}$; $\mathbf{b}$; $\mathbf{c}$ …. A vektorok kivonását alkalmazva:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{d} - \mathbf{c} + \mathbf{f} - \mathbf{e}$.

Mivel minden vektornak szerepel az ellentettje is, így valóban nullvektort kapunk. A másik összefüggést felbontva az első ellentettjét kapjuk, így az is teljesül.

76. EGYBEVÁGÓSÁG

1. E1 Bizonyítsuk be, hogy két szabályos háromszög egybevágó, ha megegyezik
a) a magasságuk;
b) a beírt körük sugara!

Megoldás

a) Megegyezik a magasságuk és a magasság mindkét oldalán fekvő 90°-os és 30°-os szög.
b) A beírt körük sugara a magasság harmada, mivel a középpont súlypont is.
Az előző feladat értelmében az állítás tehát igaz.

2. E1 Bizonyítsuk be, hogy két egyenlő szárú derékszögű háromszög egybevágó, ha megegyezik
a) a befogójuk;
b) a háromszög köré írt körük sugara!

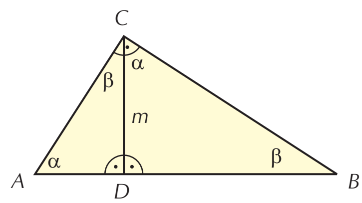
Megoldás

a) A befogójuk, a másik befogójuk és a közbezárt szög egyenlő (két oldal és a közbezárt szög egyenlő).
b) A háromszög köré írt körük sugara az átfogó fele, tehát egy oldal és a rajta fekvő két 45°-os szög egyenlő.

3. Melyek igazak a következő állítások közül? Válaszunkat indokoljuk!
K2 *a)* Két háromszög egybevágó, ha megegyezik két szögük és egy oldaluk.
K2 *b)* Ha egy háromszögben két magasság egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú.
E1 *c)* Két háromszög egybevágó, ha megegyezik két szögük és a harmadik csúcshoz tartozó magasságuk.

Megoldás

a) Hamis, nem biztos, hogy két megfelelő szög egyezik meg.
b) Igaz. Tekintsük azt az oldalt, amely végpontjából indulnak a magasságok. Egy magasság, az oldal, valamint az oldallal szemközti 90°-os szög megegyezik. (Derékszög csak a háromszög legnagyobb oldalával lehet szemben.) Így a felvett oldalon fekvő két szög egyenlő.
c) Igaz. Itt az okozhatna bajt, ha a magasság nem választaná el a két csúcsot, de ekkor a két háromszögben az oldalon fekvő két szög közül az egyik nem lenne egyenlő, hanem 180°-ra egészítenék ki egymást.



X. FÜGGVÉNYEK – TRANSZFORMÁCIÓK

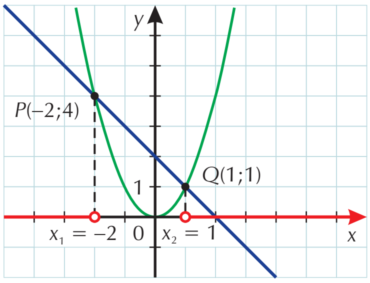
77. EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK GRAFIKUS MEGOLDÁSA

1. Oldjuk meg az első négy példa megoldásának felhasználásával a következő egyenlőtlenségeket!

K1 *a)* $x^2 > 2 - x$.

Megoldás

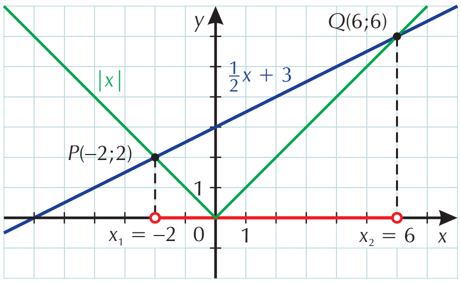
Azon x értékeket keressük, ahol az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonja fölötte van az $x \mapsto 2 - x$ függvény grafikonjának.
Az x tengelyen pirossal jelöltük a $]-\infty; -2[$ és az $]1; \infty[$ intervallumot, ami éppen a megoldása a feladatnak.
Tehát $x \in\ ]-\infty; -2[\ \cup\ ]1; \infty[$.



K2 *b)* $|x| < \frac{1}{2}x + 3$.

Megoldás

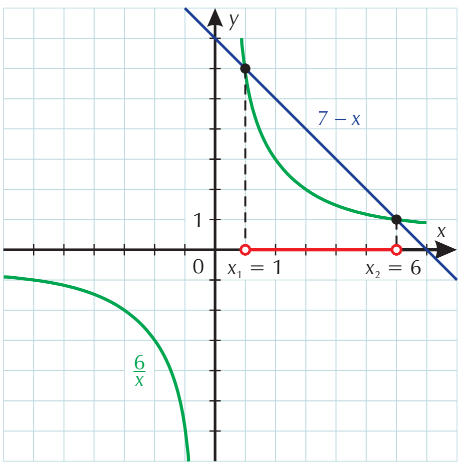
Az egyenesnek az $|x|$ feletti részét kell levetítenünk az x tengelyre.
A megoldáshalmazt jelöljük M-mel. $M =]-2; 6[$.



K2 *c)* $\frac{6}{x} < 7 - x$.

Megoldás

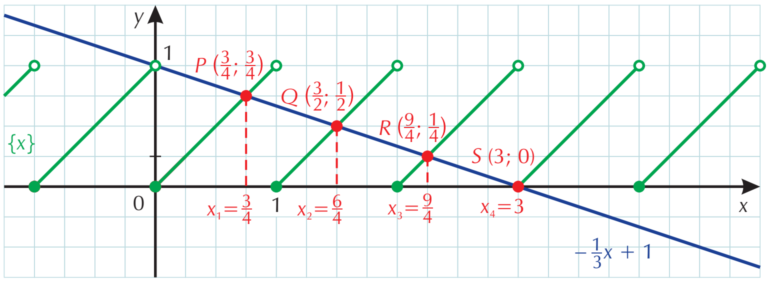
Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.
A megoldáshalmaz az $M =]-\infty; 0[$ és az $]1; 6[$ nyílt intervallumok uniója.



d) **Nem érettségi tananyag.** $\{x\} > 1 - \frac{x}{3}$.

Megoldás

A grafikonnak az a része érdekes, ahol az $x \mapsto \{x\}$ képe van fölül.



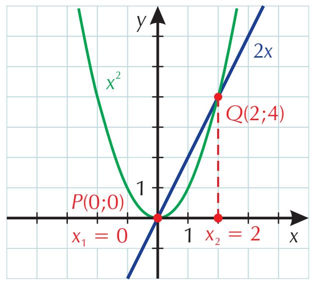
A megoldáshalmaz: $M = \left]\frac{3}{4}; 1\right[\cup \left]\frac{3}{2}; 2\right[\cup \left]\frac{9}{4}; 3\right[\cup]3; \infty[$.

2. Oldjuk meg az egyenleteket!

K1 *a)* $x^2 = 2x$.

Megoldás

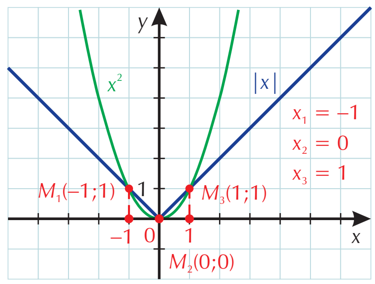
Megrajzoljuk a két függvény grafikonját.
A két grafikon a $P(0; 0)$ és a $Q(2; 4)$ pontokban metszi egymást.
Ez azt jelenti, hogy $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ a megoldás.



E1 *b)* $x^2 = |x|$.

Megoldás

A két grafikon három pontban metszi egymást.
Tehát a megoldásuk: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.



c) **Nem érettségi tananyag.** $[x] = x^2 - 2$.

Megoldás

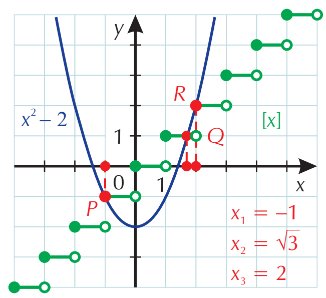
Ábrázolva a két függvényt látható, hogy három metszéspont van. A $P(-1, -1)$ és $R(2; 2)$ pontok koordinátái könnyen leolvashatók a grafikonról. A Q pontról csak azt tudjuk, hogy a második koordinátája 1. Az első koordinátát kiszámíthatjuk.

$1 = x^2 - 2$,

$3 = x^2$,

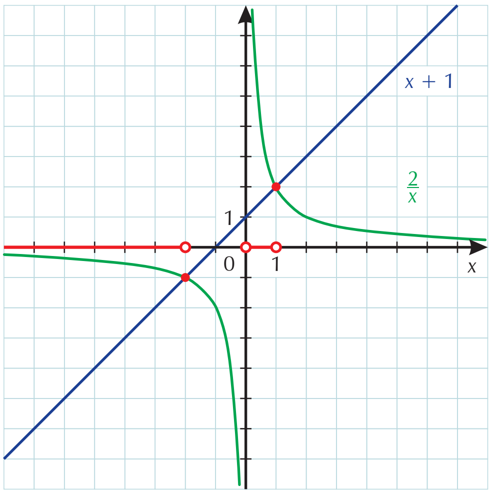
$\pm\sqrt{3} = x$, nekünk csak az $x = \sqrt{3}$ felel meg.

Tehát a megoldásuk: $x_1 = -1$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = 2$.



3. Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket!

K1 *a)* $x + 1 < \frac{2}{x}$.



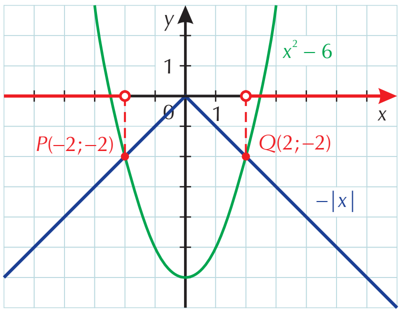
Megoldás

$x \neq 0$.
Rajzoljuk meg a grafikonokat!
A megoldáshalmaz: $M =]-\infty; -2[\cup]0; 1[$.

E1 *b)* $x^2 - 6 > -|x|$.

Megoldás

Ábrázoljuk a két függvényt!

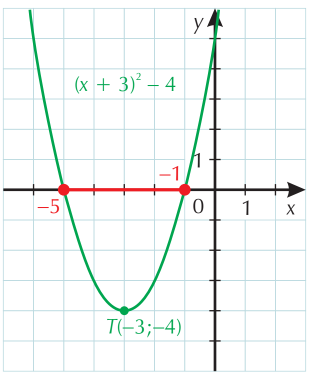


A két grafikon a $P(-2; -2)$ és a $Q(2; -2)$ pontban metszi egymást.
A megoldáshalmaz: $M =]-\infty; -2[\cup]2; \infty[$.

K2 *c)* $x^2 + 6x + 5 \leq 0$.

Megoldás

A bal oldalnak megfelelő függvényt átalakítjuk.
$x^2 + 6x + 5 = x^2 + 6x + 9 - 4 = (x + 3)^2 - 4$. Az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonját hárommal balra és utána néggyel lefelé eltolva kapjuk a végeredményt.

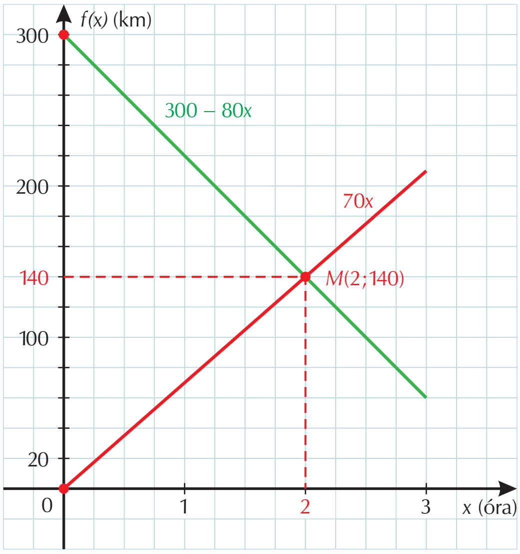


Az x tengellyel való metszéspontokat és a görbének a tengely alatti részét keressük.
A megoldáshalmaz: $M = [-5; -1]$.

4. K2 Győr és Miskolc távolsága autópályán 300 km. Reggel egy időben elindul két személyautó egymással szemben. A Győrből indulónak 70 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$, a Miskolcról indulónak pedig 80 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ az átlagsebessége. Az indulás után mennyi idővel találkoznak? Mennyi idő múlva lesz a két autó távolsága 30 km? (Ábrázoljuk az autók távolságát az idő függvényében!)

Megoldás

A fizikából ismert $s = v \cdot t$ összefüggés alapján felírhatjuk a két személygépkocsi út–idő függvényét. Győrből szemlélve az eseményeket: az eltelt időt x-szel jelöljük, a megtett utat pedig $f(x)$-szel, ami egyben a Győrtől mért távolságát is mutatja. $f(x) = 70x$. A második gépkocsi Győrtől mért távolságát $g(x)$-szel jelöljük. $g(x) = 300 - 80x$.
Egy koordináta-rendszerben ábrázolva a két függvényt, láthatjuk, hogy két óra elteltével találkoznak.



Két óra elteltével az első autó 140 km-t, a második pedig 160 km-t tesz meg. Tehát éppen találkoznak.

A két autó távolsága akkor lesz 30 km, amikor $f(x) - g(x) = 30$ vagy $g(x) - f(x) = 30$ teljesül.
Az első esetben $70x - (300 - 80x) = 30$, innen $x = 2{,}2$ (óra); a második esetben $300 - 80x - 70x = 30$, azaz $x = 1{,}8$ (óra).

Megjegyzés: A két feltételt egyszerre is felírhatjuk $|f(x) - g(x)| = 30$ alakban, ekkor a $|150x - 300| = 30$ egyenlet megoldásait keressük; például $150x - 300 = \pm 30$ átalakítással.

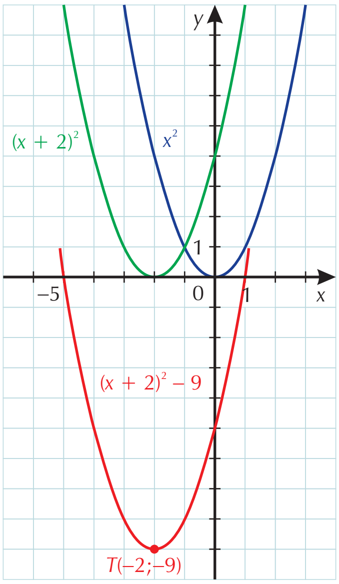
A FÜGGVÉNYTRANSZFORMÁCIÓK (OLVASMÁNY)

Ábrázoljuk a következő függvényeket a megfelelő transzformációs lépések segítségével! Keressük meg a tengelypontok koordinátáit!

1. **K1** *a)* $f(x) = (x + 2)^2 - 9$.

Megoldás

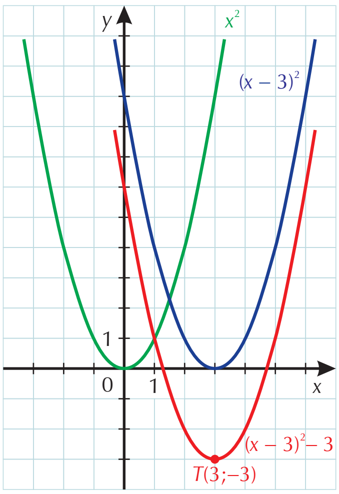
$x^2 \to (x + 2)^2 \to (x + 2)^2 - 9$. Az $x \mapsto x^2$ grafikonját el kell tolnunk 2-vel balra, és utána 9-cel kell lefelé eltolni. A tengelypont a $T(-2; -9)$ pont lesz.



K2 *b)* $g(x) = x^2 - 6x + 6$.

Megoldás

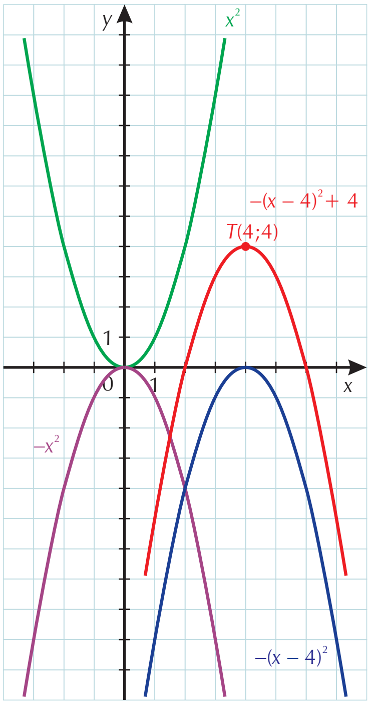
Először teljes négyzetté alakítjuk:
$x^2 - 6x + 6 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 6 = (x^2 - 6x + 9) - 3 = (x - 3)^2 - 3$. Így már leolvashatjuk a transzformációkat.
$x^2 \to (x - 3)^2 \to (x - 3)^2 - 3$. Az alapfüggvényt eltoljuk 3-mal jobbra, majd 3-mal lefelé. $T(3; -3)$.



K2 *c)* $h(x) = -x^2 + 8x - 12$.

Megoldás

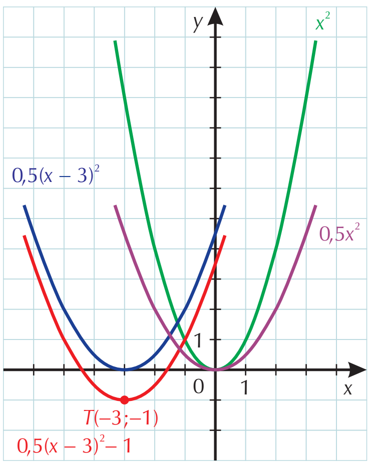
Először teljes négyzetté alakítjuk:
$-x^2 + 8x - 12 = -(x^2 - 8x + 12) = -(x^2 - 8x + 16 - 16 + 12) = -[(x^2 - 8x + 16) - 4] =$
$= -[(x-4)^2 - 4] = -(x-4)^2 + 4$.
$x^2 \to -x^2 \to -(x-4)^2 \to -(x-4)^2+4$. A normálparabolát először tükrözzük az x tengelyre, eltoljuk jobbra néggyel, majd felfelé néggyel. $T(4;\ 4)$.



E1 *d)* $i(x) = 0,5x^2 + 3x + 3,5$.

Megoldás

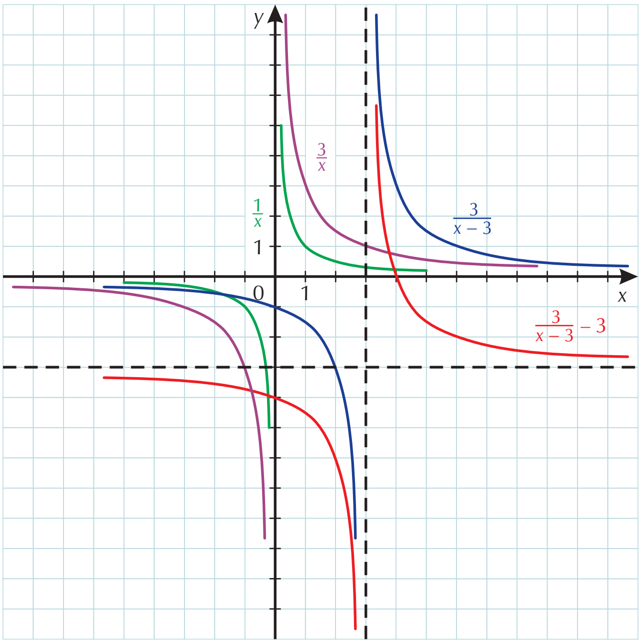
Először teljes négyzetté alakítjuk:
$0,5x^2 + 3x + 3,5 = 0,5(x^2 + 6x + 7) = 0,5(x^2 + 6x + 9 - 9 + 7) =$
$= 0,5[(x^2 + 6x + 9) - 2] = 0,5[(x+3)^2 - 2] = 0,5(x+3)^2 - 1$.
$x^2 \to 0,5x^2 \to 0,5(x+3)^2 \to 0,5(x+3)^2 - 1$. A normálparabolát felére zsugorítjuk, majd balra toljuk 3-mal, végül eggyel eltoljuk lefelé. $T(-3;\ -1)$.



2. **K1** *a)* $f(x) = \frac{3}{x-3} - 3.$

Megoldás

$\frac{1}{x} \to \frac{3}{x} \to \frac{3}{x-3} \to \frac{3}{x-3} - 3$. Az $x \mapsto \frac{1}{x}$ alapfüggvényt először háromszorosára nagyítjuk, majd eltoljuk hárommal jobbra (így a függőleges aszimptota az $x = 3$ egyenes lesz), majd hárommal lefelé (a vízszintes aszimptota az $y = -3$ lesz).



K2 *b)* $g(x) = \frac{x-1}{x+1}.$

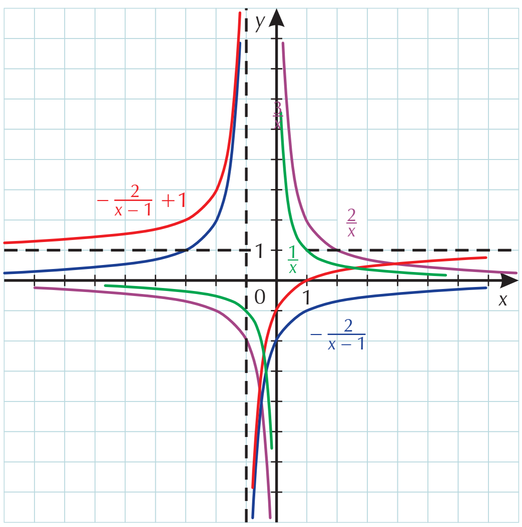
Megoldás

Először leválasztjuk az egész részt:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-1-1}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} = -\frac{2}{x+1} + 1.$$

$$\frac{1}{x} \to \frac{2}{x} \to -\frac{2}{x+1} \to -\frac{2}{x+1} + 1.$$

Az $x \mapsto \frac{1}{x}$ alapfüggvényünket kétszeresére nyújtjuk, tükrözzük az x tengelyre, ezután eltoljuk eggyel balra és végül eggyel felfelé.



K2 c) $h(x) = \dfrac{-3x + 13}{x - 4}$.

Megoldás

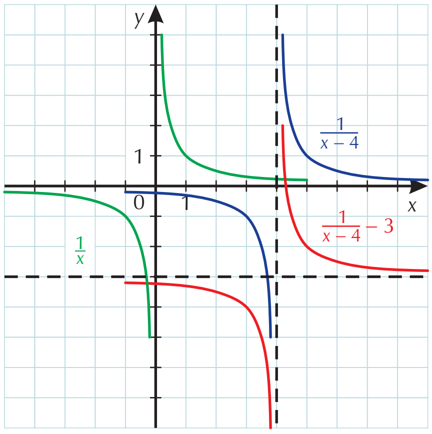
Először leválasztjuk az egész részt:

$$\frac{-3x+13}{x-4} = \frac{-3x+12-12+13}{x-4} = \frac{-3(x-4)+1}{x-4} = \frac{-3(x-4)}{x-4} + \frac{1}{x-4} =$$

$$= -3 + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-4} - 3.$$

$$\frac{1}{x} \to \frac{1}{x-4} \to \frac{1}{x-4} - 3.$$

Az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ alapfüggvényünket először eltoljuk néggyel jobbra, utána pedig hárommal lefelé.

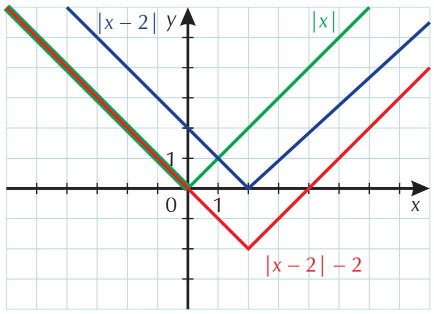


3. K1 a) $f(x) = |x - 2| - 2$.

Megoldás

$|x| \to |x - 2| \to |x - 2| - 2$.

Az $x \mapsto |x|$ alapfüggvényünket először eltoljuk kettővel jobbra, utána pedig kettővel lefelé.

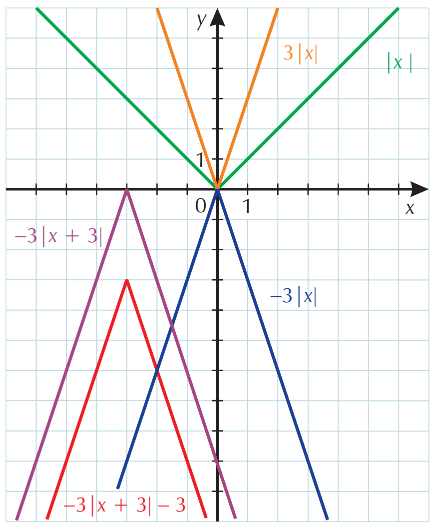


b) $g(x) = -3|x + 3| - 3$.

Megoldás

$|x| \to 3|x| \to -3|x| \to -3|x + 3| \to -3|x + 3| - 3$.

Az $x \mapsto |x|$ alapfüggvényt először megnyújtjuk háromszorosára, tükrözzük az x tengelyre, eltoljuk hárommal balra, majd hárommal lefelé.

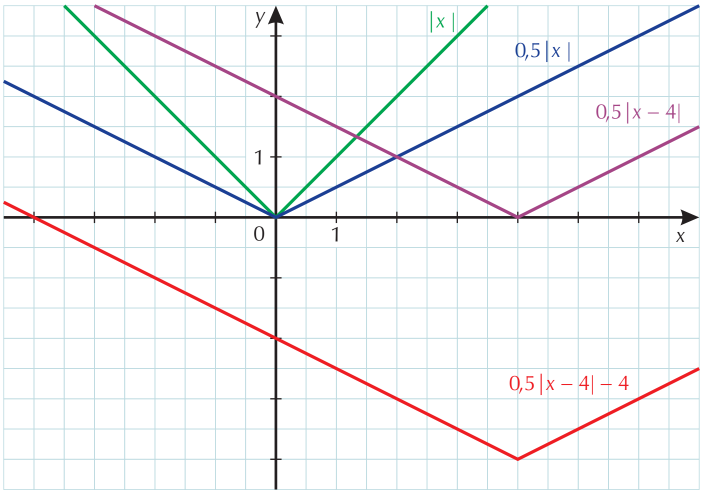


c) $h(x) = 0{,}5|x-4| - 4.$

Megoldás

$|x| \to 0{,}5|x| \to 0{,}5|x-4| \to 0{,}5|x-4| - 4.$

Az $x \mapsto |x|$ alapfüggvényt először zsugorítsuk felére, majd toljuk el néggyel jobbra és végül néggyel lefelé.

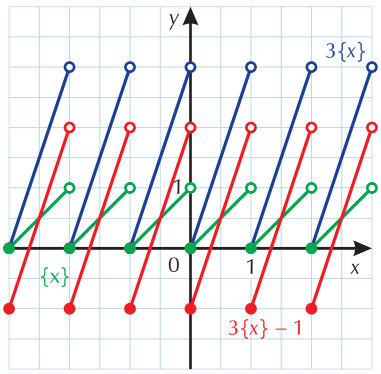


4. **Nem érettségi tananyag.**

a) $f(x) = 3 \cdot \{x\} - 1.$

Megoldás

Először az $x \mapsto \{x\}$ függvényt nyújtsuk háromszorosára, majd toljuk el eggyel lefelé.
$\{x\} \to 3\{x\} \to 3\{x\} - 1.$



b) $g(x) = -\{x\} + 1.$

Megoldás

az $x \mapsto \{x\}$ függvényt először tükrözzük az x tengelyre, majd toljuk el eggyel felfelé.
$\{x\} \to -\{x\} \to -\{x\} + 1.$