Csajági Sándor–Dr. Fülöp Ferenc

Fizika 9. évfolyam
(NT-17105) tankönyv feladatainak megoldása

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, Budapest

Tartalom

1. lecke Fizikai kísérletek, mérések, mértékegységrendszerek

1. Melyik nagyobb az alábbi mennyiségek közül?
10 mm vagy 0,1 cm; 2000 dm^2 vagy 2 m^2;
300 cm^3 vagy 30 000 mm^3; 12 h vagy 1200 s.
Megoldás:
10 mm > 0,1 cm; 2000 dm^2 > 2 m^2; 300 cm^3 > 30 000 mm^3; 12 h > 1200 s.

2. *a)* Fejezzük ki az alábbi tömegeket grammban!
260 mg; 28 dkg; 37 kg; 45 μg.
b) Fejezzük ki az alábbi hosszúságokat méterben!
3 nm; 0,7 km; 1,6 am; 27 mm.
Megoldás:
a) 260 mg = 0,26 g; 28 dkg = 280 g; 37 kg = 37 000 g; 45 μg = 0,000 045 g.
b) 3 nm = 0,000 000 003 m; 0,7 km = 700 m; 1,6 am = 0,000 000 000 000 000 0016 m; 27 mm = 0,027 m .

3. Egy játszótér hossza 120 m. Hány lépéssel tudunk végigmenni rajta, ha a lépésünk hossza 75 cm? Mennyivel lép többet az, aki 6 dm-es lépésekkel halad?
Megoldás:
Ha a lépésünk hossza 75 cm, akkor $N_1 = 120\,\mathrm{m} : 0{,}75\ \mathrm{m} = 160$ lépéssel teszünk meg 120 métert.
Ha a lépésünk hossza 6 dm, akkor $N_2 = 120\,\mathrm{m} : 0{,}6\ \mathrm{m} = 200$ lépéssel, 40 lépéssel többel teszünk meg 120 métert.

4. Keress az interneten öt olyan mértékegységet, amelyet ma már nem használunk! Nézz utána, régebben milyen területen használták őket!
Megoldás:
Pl. Bibliában:
Hosszmértékek: ujj, tenyér, arasz (1 ujj = 18,75 mm, 1 tenyér = 4 ujj, 1 arasz = 3 tenyér).
Területmérték: egy iga (1 iga = 0,25 ha).
Térfogatmérték: egy sea (véka) (1 sea = 7,3 l).
Görögöknél:
Hosszmértékek: egy olümpiai stadion = 192,27 m.
Területmérték: arura (egy arura = 2760 m^2).
Térfogatmérték: medimnosz (egy medimnosz = 78,79 l).
Középkori Magyarországon:
Hosszmértékek: rőf (egy rőf = 2 láb = 24 hüvelyk = 32 ujj = kb. 60-65 cm).
Területmérték: négyszögöl (1 négyszögöl = 3,6 m^2).
Súlymérték: obulus (1 obulus = 1/48 uncia = 1/24 lat = 0,57 g)

5. Az otthonunkban található technikai eszközökön megtaláljuk a rájuk jellemző technikai jellemző adatokat. Ilyet láthatunk például a villanybojleren, a hajszárítón, a vízmelegítőn, az akkumulátoron. Az eszközök áramfelvételére, teljesítményére vonatkozó számok mögött más-más mértékegységek állnak.

Gyűjtsd össze az otthonodban használatos eszközökön feltüntetett adatokat! Van-e valamilyen kapcsolat az egyes mértékegységek között? Nézz utána az interneten!

Megoldás:
Például egy porszívón a következőket olvashatjuk: 230 V - 50 Hz, 1800 W.
Jelentésük: a porszívó a $U = 230$ V (effektív) feszültségű $f = 50$ Hz frekvenciájú hálózatról működik, teljesítménye $P = 1800$ W.
Az eszköz áramfelvétele: $I = P/U = 7{,}82$ A. A mértékegységek között a kapcsolat $P = U \cdot I$ alapján: W = V · A.

2. lecke A mechanikai mozgás

1. Mondjunk olyan vonatkoztatási rendszert, amelyből a folyón lévő csónak nyugalomban látszik!
Megoldás:
A vonatkoztatási rendszerünket bármely másik folyón úszó tárgyhoz kell rögzítenünk. Ekkor a csónak állni látszik.

2. Válaszolj a következő kérdésekre:

a. Földön állva egy helikoptert látunk elhaladni felettünk. Milyen mozgást végez a helikopter légcsavarjának egy pontja a helikopterhez és hozzánk képest?
Megoldás:
A helikopterhez képest egyenletes körmozgást végez, míg hozzánk képest összetett mozgást: egy egyenes vonalú egyenletes mozgást és egy egyenletes körmozgást végez.

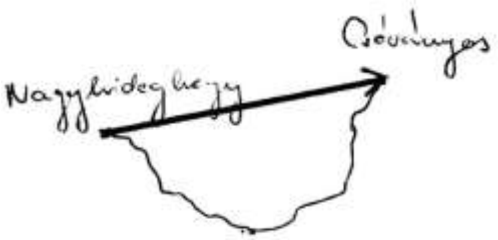
b. Lehetséges-e, hogy az Egyenlítőn álló megfigyelő nyugalomban lát egy mesterséges holdat? A megfigyelt pont pályája egyenletes spirál.
Megoldás:
Igen, azt a mesterséges holdat látja nyugalomban, amelyik a Földdel együtt forog. Ezek a stacionárius pályán lévő műholdak.

c. Egy mozgó járműben leejtünk egy pénzérmét. Vajon álló járműben is ugyanannyi idő alatt esik le a pénzérme?
Megoldás:
Igen, mert a mindkét vonatkoztatási rendszerben ugyanúgy értelmezzük a mozgást.

3. Nagymaros és Visegrád között komppal lehet átkelni a Dunán. Nyáron, munkanapokon Nagymaros és Visegrád között az első kompjárat Visegrádról indul 5 óra 25 perckor. A következő Visegrádról induló járat a 6 óra 25 perces, majd ezt követően 7 óra 45 perctől 20 óra 45 percig óránként megy a komp Visegrádról Nagymarosra. Az utolsó járat Nagymarosról indul 21 órakor. A két révkikötő közötti távolság 500 m. Milyen hosszú utat tesz meg a komp egy nap alatt?
Megoldás:
A komp naponta 16-szor indul Nagymarosról Visegrád felé. A komp által megtett út: 16·1000 m = 16 000 m= 16 km.

4. A Börzsönyben lévő Nagy-Hideg-hegy magassága 864 m, a Csóványos magassága 938 m. A két csúcs távolsága légvonalban 2,4 km. Becsüljük meg a térképrészlet alapján, hogy legalább hány km utat teszünk meg, ha Nagy-Hideg-hegyről az országos kéktúra útvonalán átmegyünk Csóványosra! (A becslésnél azt is figyelembe kell venni, hogy nem mindig felfelé haladunk.) Mekkora az ugyanehhez az úthoz tartozó elmozdulás?

Megoldás:
A turista útvonalakon a barna szintvonalak 50 m emelkedést vagy süllyedést jelent. Összesen lefele kb. 10, felfelé kb. 11 szintvonalat keresztezünk. Ezenkívül a légvonaltól is eltér az utunk, így összesen több, mint 3 km-t kell megtennünk.
Az elmozdulásvektor Nagyhideghegyről Csóványosra mutat. A függőleges irányú elmozdulás 938m – 865 m = 73 m, míg a vízszintes irányú elmozdulás 2,4 km. A függőleges irányú elmozdulás elhanyagolható a vízszintes irányú elmozdulás nagyságához képest, így a teljes elmozdulás hossza 2,4 km. Az elmozdulásvektort az ábra mutatja.



1. ábra: Nagyhideghegyről Csóványosra mutató elmozdulásvektor

3. lecke Egyenes vonalú egyenletes mozgás

1. A budavári sikló eredetileg 3 m/s sebességűre építették ki; de a tempót 1988-ban az utasok kérésére a felére csökkentették. A pálya hosszúsága közel 100 méter. Az alsó és felső állomás közti szintkülönbség mintegy 50 méter.
a) Mennyi idő alatt ér a sikló a célállomásra?
b) Készítsük el a budavári sikló út-idő és sebesség-idő grafikonját!

Megoldás:

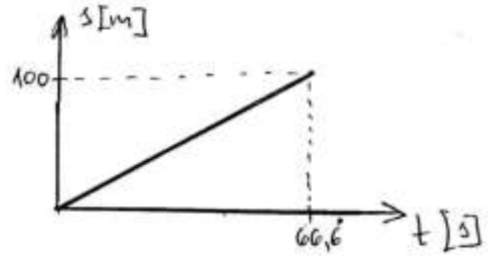
Adatok: $\bar{v} = 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
$\underline{s = 100\text{ m.}}$
t=?

a) Az alsó és a felső állomás közti út megtételéhez szükséges idő:

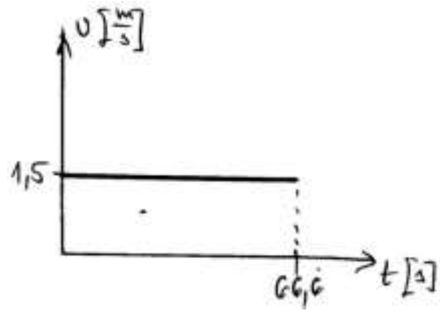
$$t = \frac{s}{v} = \frac{100\text{ m}}{1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 66\frac{2}{3}\text{ s.}$$

A budavári sikló $\frac{200}{3}$ s alatt ér a célállomásra.

b)



2. ábra: Milyen arányosság áll fenn az egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén a megtett út és az eltelt idő között?



3. ábra: Az egyenes vonalú egyenletes mozgás sebesség-idő grafikonja az idő tengellyel párhuzamos egyenes.

2. Egyenletesen haladó vonat ablakából kitekintve azt látjuk, hogy a vonat 2,5 perc alatt 45 db telefonoszlop mellett halad el. Mennyi idő alatt éri el a vonat a 600 m-re lévő útkereszteződést, ha két telefonoszlop távolsága 50 m?

Megoldás:
Adatok:
t_1 = 2,5 min,
<u>s = 600 m.</u>
t_2 = ?

A 2,5 perc alatt megtett út: $s = 45 \cdot 50\ \text{m} = 2250\ \text{m}$.

A vonat sebessége: $v = \frac{2250\ \text{m}}{2{,}5\ \text{min}} = 900\ \frac{\text{m}}{\text{min}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(A feladat szövege megengedi azt is, hogy a megtett útnak $44 \cdot 50$ m, ill. $46 \cdot 50$ m közötti akármelyik értéket válasszuk. Ekkor a vonat sebessége 14,67 m/s-nél nagyobbnak, és 15,33 m/s-nél kisebbnek adódik.)

Az útkereszteződésig visszalévő idő: $t_2 = \frac{s}{v} = \frac{600\ \text{m}}{15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 40\ \text{s}$.

A vonat 40 s alatt éri el az útkereszteződést.
(A feladat szövege megengedi azt is, hogy, a menetidő 39,13 s és 40,91 s legyen.)

3. Egy gépkocsi először 3 óráig 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ezután 2 óráig 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladt.

a) Mennyi utat tett meg a gépkocsi az indulástól számított 4 óra alatt?
b) Mennyi idő alatt tett meg a gépkocsi az indulás helytől mérve 360 km utat?
c) Mennyi utat tett meg összesen a gépkocsi?
d) Ábrázoljuk a mozgást út-idő és sebesség-idő grafikonon!

Megoldás:

Adatok:

$v_1 = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$,

$t_1 = 3$ h,

$v_2 = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$,

$\underline{t_2 = 2\text{ h.}}$

a) $s = ?$

b) $t = ?$

c) $s = ?$

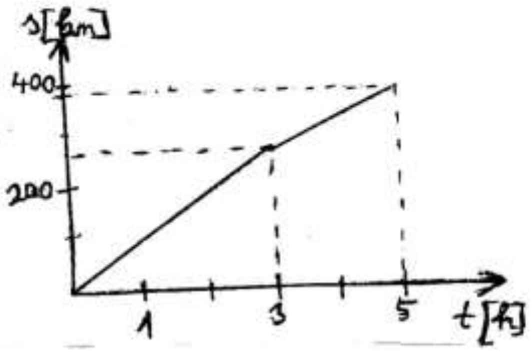
a) $s = v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2' = 270\text{ km} + 60\text{ km} = 330\text{ km}$ ($t_2' = 1$h)

b) 3 h alatt megtett 270 km-t, a vissza levő 90 km-t 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 1,5 h alatt teszi meg. Az összes eltelt idő 4,5 h.

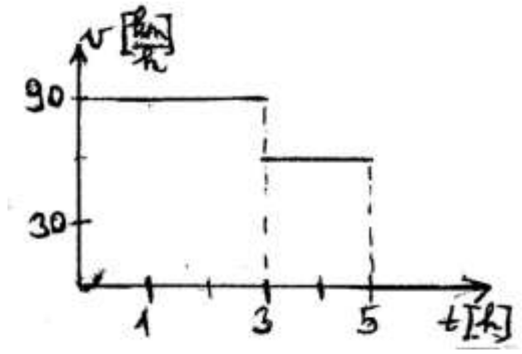
c) Az összes megtett út:

$$s = v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3\text{ h} + 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2\text{ h} = 270\text{ km} + 120\text{ km} = 390\text{ km}.$$

d) A mozgás grafikonjai:



4. ábra: Egyenletes mozgást végzett a gépkocsi az út megtétele alatt?



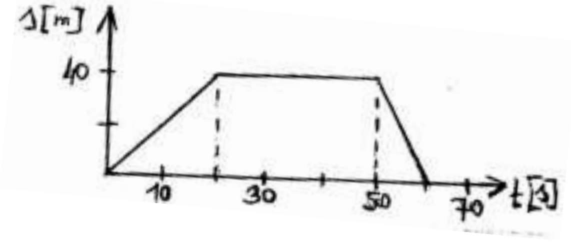
5. ábra: Hol van a gépkocsi az indulás után 4 óra múlva?

A gépkocsi 4 óra alatt 330 km-t tett meg. A gépkocsi az indulási helyétől 360 km-re 4,5 h múlva ért, míg 5 óra alatt összesen 390 km-t tett meg.

4. Az ábra egy kerékpáros út-idő grafikonját mutatja.

a) Határozd meg, hogy az egyes szakaszokhoz milyen mozgást tartozik!

b) Mekkora a megtett út?



c) Ábrázoljuk a kerékpáros mozgását sebesség-idő grafikonon!

6. ábra: Az egyes szakaszokon milyen típusú mozgás játszódik le?

Megoldás:

a)

I. egyenes vonalú egyenletes mozgás,

II. áll,

III. egyenes vonalú egyenletes mozgás (a test visszafele mozog).

Az egyes szakaszokon a sebességek:

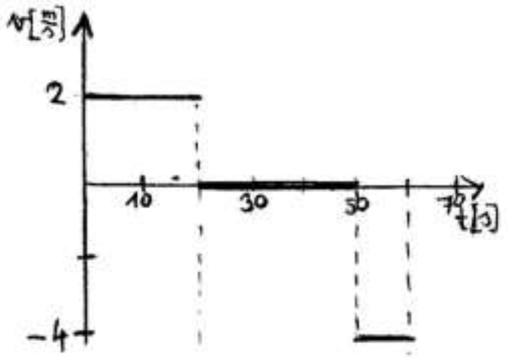
$$v_{\mathrm{I}} = \frac{40\ \mathrm{m}}{20\ \mathrm{s}} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_{\mathrm{II}} = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_{\mathrm{III}} = \frac{-40\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{s}} = -4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b) A megtett út 80 m.

c)



7. ábra: A mozgás sebesség-idő grafikonján mit jelent, hogy a sebesség negatív előjelű?

4. lecke Változó mozgások: átlagsebesség, pillanatnyi sebesség

1. Feltétlenül egyenletesen mozog az a kerékpáros, amely időegységenként egyenlő utakat tesz meg?

Megoldás:

Nem, mert időegységen belül változtathatja sebességét, csak a megtett utaknak kell megegyezniük.

2. Magyarországon az ügetőverseny rekordját egy Hitelező nevű kanca tartja, ideje 1 min17,6 másodperc. A derbi távja 1900 méter, indítása autóstarttal történik. Mekkora volt a győztes ló átlagsebessége?

Megoldás:

s = 1900 m,

t = 1 min 17,6 s = 77,6 s.

$v_{\text{átl}} = ?$

$$v_{\text{átl}} = \frac{1900\ \text{m}}{77{,}6\ \text{s}} = 24{,}48\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A győztes ló átlagsebessége 24,48 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ volt.

3. Egy gépkocsi a Budapest – Pécs közötti 210 km-es utat 3 óra alatt teszi meg. Az út első felében 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel haladt.

a) Mekkora az egész útra számított átlagsebesség?

b) Mekkora az autó átlagsebessége az út második felében?

Megoldás:

Adatok: s = 210 km, t = 3 h, $v_1 = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) $$v_{\text{átl}} = \frac{210\ \text{km}}{3\ \text{h}} = 70\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

A gépkocsi egész útra számított átlagsebessége 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) $$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{105\ \text{km}}{60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1{,}75\ \text{h}, \qquad t_2 = 1{,}25\ \text{h}$$

$$v_{2,\text{átl}} = \frac{105\ \text{km}}{1{,}25\ \text{h}} = 84\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Az autó átlagsebessége az út 2. felében 84 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

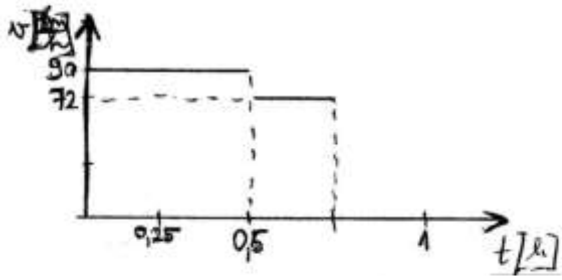
4. Az ábrán egy személygépkocsi sebesség-idő grafikonja látható. Mekkora a teljes időre számított átlagsebesség?

Megoldás:

Adatok:

$v_1 = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $t_1 = \frac{1}{2}\text{h}$,

$v_2 = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $t_2 = \frac{1}{4}\text{h}$.



$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{2}\ \text{h} = 45\ \text{km},$$

$s_2 = v_2 \cdot t_2 = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{4}\ \text{h} = 18\ \text{km},$

$$v_{\text{átl}} = \frac{45\,\text{km} + 18\,\text{km}}{\frac{1}{2}\text{h} + \frac{1}{4}\text{h}} = 84\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

8. ábra: Meg tudná határozni a mozgás egyes szakaszain megtett utakat?

Az egész útra számított átlagsebesség 84 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

5. Carlos Sastre Candill lett a 21 futamból álló 2008-as Tour de France győztese. A futam részeredményeit hetes bontásban az alábbi táblázatban találod. Számítsd ki, hogy mekkora átlagsebességgel nyerte meg a versenyt!

	1. hét	2. hét	3. hét
Út [km]	1186	1265	1108,5
Idő	28h 25min 14s	30h 31min 9s	28h 56min 29s

9. ábra: A győztes részeredményei hetes bontásban

Megoldás:

Adatok: s_1 = 1186 km = 1 186 000 m,

s_2 = 1265 km = 1 265 000 m,

s_3 = 1108,5 km = 1 108 500 m,

t_1 = 28h 25min 14s = 102 314 s,

t_2 = 30h 31min 9s = 109 869 s,

t_3 = 28h 56min 29s = 104 189 s.

$$v_{átl} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{1186000\ \text{m} + 1265000\ \text{m} + 1108500\,\text{m}}{102314\ \text{s} + 109869\ \text{s} + 104189\ \text{s}}$$

$$v_{átl.} = \frac{3559500\ \text{m}}{316372\ \text{s}} = 11{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}} = 40{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Carlos Sastre Candill 40,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebességgel nyerte meg a versenyt.

6. Egy autós a 6-os főútvonalon 40 percig 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad, majd utolér egy 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó teherautót. 15 percig nem tudja megelőzni, így követi azt.

a) Mekkora az összes megtett út?

b) Mekkora az autó átlagsebessége a mozgás teljes ideje alatt?

c) Rajzoljuk fel ugyanabban a koordinátarendszerben a sebesség-idő és az átlagsebesség-idő grafikont!

d) Rajzoljuk fel az út-idő koordinátarendszerben mozgás grafikonját!

Megoldás:

Adatok: $v_1 = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $t_1 = \frac{2}{3}\text{h}$,

$v_2 = 72\ \frac{km}{h}$, $t_2 = \frac{1}{4}$ h.

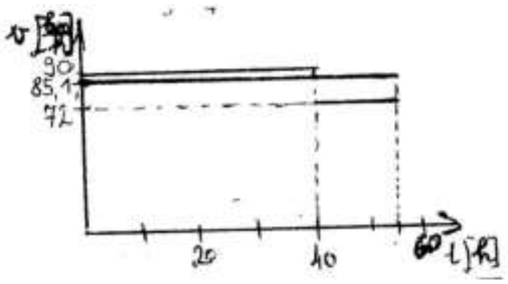
a) $s = v_1t_1 + v_2t_2 + v_1t' = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{2}{3}\text{h} + 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{4}\text{h} = 78$ km.

Az összes megtett út 78 km.

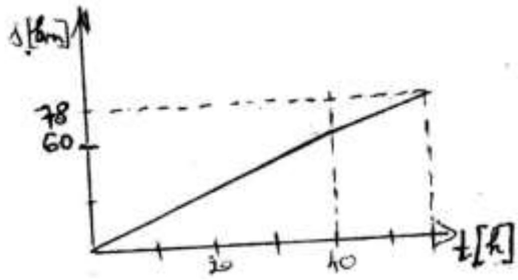
b) $v_{\text{átl}} = \dfrac{60\ \text{km} + 18\ \text{km}}{\frac{2}{3}\text{h} + \frac{1}{4}\text{h}} = 85{,}1\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Az autó átlagsebessége a mozgás teljes ideje alatt $85{,}1\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

c) Grafikonok:



11. ábra: Megegyezik a sebesség-idő grafikon alatti terület az átlagsebesség-idő grafikon alatti területtel?



10. ábra: A mozgás út- idő grafikonja

5. lecke Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

1. Egy személygépkocsi a sebességét 15 s alatt 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$-ról 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$-ra növeli.

a) Mekkora a gyorsulása?
b) Mekkora utat tesz meg a mozgás ezen időszakában?

Megoldás:

Adatok:

$v_0 = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$,

t = 15s

a) a = ?

b) s = ?

a) A gépkocsi gyorsulása $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ összefüggés alapján: $a = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) A feladatot kétféleképpen oldhatjuk meg.

I. $s = v_0t + \frac{a}{2}t^2$, behelyettesítve s = 187,5 m.

II. $s = \dfrac{v_0 + v}{2} t$ alapján: s = 187,5 m.

A személygépkocsi 187,5 m utat tesz meg.

2. Egy kezdősebesség nélkül induló, egyenletesen gyorsuló test 6 s alatt 9 m utat tesz meg.
   a) Mekkora a mozgó test gyorsulása?
   b) Mekkora a test sebessége 6 s eltelte után?
   c) Mekkora utat tett meg a test az ötödik másodperc végéig?
   d) Mekkora utat tett meg a mozgás ötödik és hatodik másodperce között?

Megoldás:

Adatok**:** t = 6 s, s = 9 m.

a) a = ?

b) v = ?

c) s_5 = ?

d) Δs = ?

a) A test gyorsulása:

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{18}{36} = 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) A test sebessége a 6. másodperc végén:

$$v = a \cdot t = 0{,}5 \cdot 6 = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

c) Az ötödik másodperc végéig megtett út:

$$s_5 = \frac{a}{2} t^2 = \frac{0{,}5}{2} 25 = 6{,}25\ \mathrm{m}.$$

d) A hatodik másodpercben megtett utat megkapjuk, ha az első hat másodperc alatti útból kivonjuk az első öt másodperc alatt megtett utat:

$$\Delta \mathrm{s} = \frac{a}{2}\left(t_6^2 - t_5^2\right) = \frac{0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}\left(36\,\mathrm{s}^2 - 25\,\mathrm{s}^2\right) = 2{,}75\ \mathrm{m}.$$

3. Legalább milyen hosszú kifutópálya szükséges a MIG-29 katonai repülőgép felszállásához, hogy a repülőgép egyenletesen gyorsuló mozgással elérje a földön a felszálláshoz szükséges 225 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ sebességet, ha teljes terhelés esetén a maximális gyorsulása 4 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$?

Megoldás:

Adatok: v = 225 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ = 62,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a = 4 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

A felszálláshoz szükséges idő:

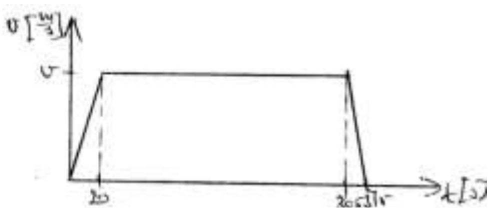
$$t = \frac{v}{a} = \frac{62{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 15{,}625\ \mathrm{s}.$$

A kifutópálya minimális hossza:

$$s = \frac{a}{2}t^2 = \frac{4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}\left(15{,}625\ \mathrm{s}\right)^2 = 488{,}25\ \mathrm{m}.$$

Biztonsági okokból a repülőtereken a kifutópályák hossza minimális a felszállási hossznál lényegesen hosszabb (min. kétszerese).

4. Egy villamos két állomás között 3000 m utat tesz meg. Sebességének nagyságát az ábra mutatja. Mekkora volt a villamos sebessége a két állomás között?



12. ábra: Számold ki a grafikon alatti terület nagyságát!

Megoldás:
A grafikon alatti terület a megtett úttal egyenlő. Egyenletesen változó mozgásnál a grafikon alatti terület megegyezik a $\frac{v}{2}$ átlagsebességgel egyenletesen haladó jármű sebességével. Így felírható:

$$s = \frac{v}{2}t_1 + v \cdot t_2 + \frac{v}{2} \cdot t_3,$$

$$\text{amelyből } v = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 36\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

A villamos sebessége a két állomás között 36 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

6. lecke Kezdősebességgel rendelkező egyenletesen változó mozgások

1. Egy teherautó 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességről 20 másodpercen keresztül 0,6 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással gyorsít.
   a. Mekkora sebességre tesz szert a teherautó?
   b. Mennyi utat fut be az idő alatt?

Megoldás:
Adatok:

$v_0 = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$t = 20$ s

$\underline{a = 0{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

a) v = ?
b) s = ?

a) A teherautó sebességét a $v = v_0 + a \cdot t$ összefüggéssel számíthatjuk ki.

$$v = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20\text{ s} = 22\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A teherautó 22 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességet ért el.

b) A teherautó által befutott utat az $s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2$ összefüggés alapján számítjuk ki.

$$s = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20\text{ s} + \frac{0{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}(20\text{s})^2 = 320\text{ m}.$$

A teherautó 320 m utat fut be.

2. Egy autó 54 km/h sebességről 6 másodperc alatt lassult le, és állt meg. Egy motorkerékpáros álló helyzetből indulva 6 s alatt érte el a 18 m/s sebességet. Melyiknek volt nagyobb a gyorsulása?

Megoldás:

Adatok:
v_1 = 54 km/h
t = 6 s
$\underline{v = 18\text{ m/s}}$
$a_{\text{autó}}$ = ?,
a_{motor} = ?

Az autó gyorsulása: $a_{\text{autó}} = \frac{0 - 15\ \frac{m}{s}}{6s - 0\ s} = -2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

A motorkerékpáros gyorsulása: $a_{\text{motor}} = \frac{18\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0\frac{\text{m}}{\text{s}}}{6\text{s} - 0\text{s}} = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

A motorkerékpáros gyorsulása volt a nagyobb: $|a_{\text{autó}}| < a_{\text{motor}}$.

3. Egy gépkocsi 72 km/h sebességről 8 s alatt fékezett le, egyenletesen változó mozgással.

e) Mekkora a fékút?

f) Rajzold fel a mozgás út-idő és sebesség-idő grafikonjait!

Megoldás:

Adatok: v = 72 km/h = 20m/s, t = 8 s.

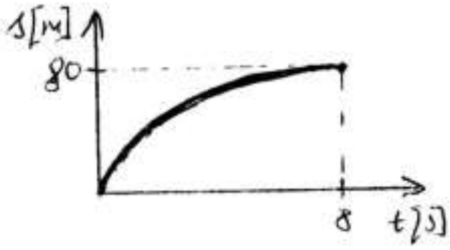
a) A fékút kiszámításához először a gyorsulást kell meghatároznunk:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0\,\frac{m}{s} - 20\,\frac{m}{s}}{8\,s} = -2{,}5\,\frac{m}{s^2}.$$

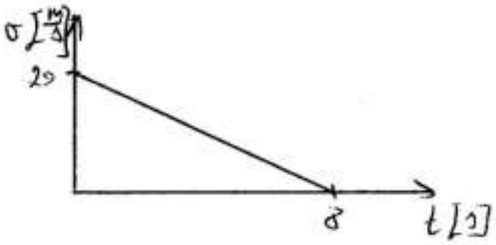
A fékút:

$$s = \frac{a}{2}t^2 = \frac{2{,}5\,\frac{m}{s^2}}{2}\,64\,s^2 = 80\,m.$$

b) A mozgás út-idő és sebesség-idő grafikonjai:



13. ábra: Egyenletesen lassuló mozgásnál a gépkocsi egyre lassabban halad. Az egyes időtartamokra eső megtett utakról mit mondhatunk?



14. ábra: A Sebesség egyenletesen csökken?

4. Egy álló helyzetből induló autó 12 másodperc alatt 108 km/h sebességre gyorsult fel. Mekkora utat tett meg eközben?

Megoldás:

Adatok:

t = 12s

v = 108 km/h

s = ?

Első lépésben az álló helyzetből induló autó gyorsulását számítjuk ki.

$$a = \frac{v}{t} = \frac{30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{12\text{s}} = 2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Az autó által megtett út:

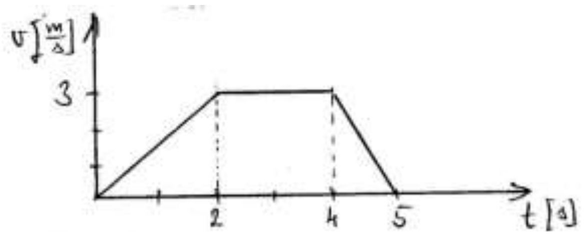
$$s = \frac{a}{2}t^2 = \frac{2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}144\text{s}^2 = 180\text{ m}.$$

Az autó által 12 másodperc alatt megtett út 180 m.

5. Az ábrán egy kerékpáros sebesség-idő grafikonja látható.

a) Milyen mozgást végez a kerékpáros az egyes időközökben?

b) Mekkora a gyorsulása, és mennyi utat tesz meg az egyes időközökben?



15. ábra: Mely szakaszokon nő, csökken ill. állandó a mozgás sebessége?

Megoldás:

a) Az egyes időközök alatti mozgások:

I. egyenletesen gyorsuló mozgás

II. egyenletes mozgás (v=állandó)

III. egyenletesen lassuló mozgás

b) A gyorsulást az $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ összefüggéssel számítjuk ki. A megtett utat egyenletesen változó mozgásnál az $s = \dfrac{a}{2}t^2$, míg egyenletes mozgásnál s = $v \cdot t$ felhasználásával számítjuk ki.

$$a_1 = \frac{3\frac{m}{s} - 0\frac{m}{s}}{2s - 0s} = 1{,}5\frac{m}{s^2}, \Rightarrow \qquad s_1 = 3 \text{ m.}$$

$$a_2 = \frac{3\frac{m}{s} - 3\frac{m}{s}}{4s - 2s} = 0\frac{m}{s^2}, \Rightarrow \qquad s_1 = 6 \text{ m.}$$

$$a_3 = \frac{0\frac{m}{s} - 3\frac{m}{s}}{5s - 4s} = -3\frac{m}{s^2}, \Rightarrow s_1 = 1{,}5 \text{ m.}$$

A kerékpáros az egyes szakaszokon rendre 3 m-t, 6 m-t és 1,5 m-t tesz meg.

6. Álló helyzetből induló jármű 20 másodpercen keresztül egyenletesen gyorsít. Gyorsulása 1 m/s^2, majd a megszerzett sebességgel egyenletesen mozog.

c) Mekkora utat tesz meg a jármű az indulástól számított 60 s alatt?

d) Mennyi idő alatt tesz meg 300 m utat?

Megoldás:

Adatok: t_1 = 20 s, a = 1 $\frac{m}{s^2}$, t_2 = 60 s, s_2 = 300 m.

a) A mozgás egy egyenletesen gyorsuló és egy egyenletes mozgásból áll.

Az egyenletesen gyorsuló szakasz: $s_1 = \dfrac{a}{2}t^2 = 200$ m.

Az egyenletesen gyorsuló mozgás alatt elért végsebességgel halad a test az egyenletes mozgás alatt:

$$v = a \cdot t = 20\ \frac{m}{s},\ s_2 = v(t_2 - t_1) = 800 \text{ m.}$$

A összes megtett út:

$$s = s_1 + s_2 = 1000 \text{ m.}$$

Az indulástól számított 20 s alatt 1 km-t tett meg a jármű.

b) Az első 200 m-t 20 s alatt teszi meg, a további 100 m-en 20 m/s sebességgel halad. Így az összes eltelt idő: t = 25 s.

7. Egyenletesen gyorsuló gépkocsi sebessége 12 s alatt a kezdeti érték háromszorosára nőtt, miközben a jármű 240 m utat tett meg. Mekkora volt a gépkocsi kezdeti sebessége és a gyorsulása?

Megoldás:

Adatok:

t = 12 s

<u>s = 240 m</u>

v_0 = ?

a = ?

A gépkocsi kezdeti sebessége v_0, végsebessége $3v_0$.

A gépkocsi kezdősebességét az $s = \frac{v_0 + 3v_0}{2}t$ összefüggéssel számíthatjuk ki, amelyre

$v_0 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$-ot kapunk.

A gépkocsi gyorsulása: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{30\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\frac{\text{m}}{\text{s}}}{12\text{s}} = 1{,}66\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A gépkocsi kezdeti sebessége 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a gyorsulása pedig 1,66 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ volt.

8. Az Anna-kolibrik testhossza csupán tíz centiméter, üzemanyaguk teljesen hétköznapi nektár, mégis ők tartják a zuhanórepülés világrekordját. A kolibri minden más gerinces állat repülési rekordját megdöntötte, még a fecskéét is, amely testhosszának csupán a 350-szeresét teszi meg másodpercenként. Az Anna-kolibri közel függőleges irányú zuhanásban27,3 m/s sebességre gyorsul fel, 4,2 m-es úton. A zuhanás végén hirtelen széttárja szárnyait, és felröppen. Mekkora gyorsulással zuhan a kolibri?

Megoldás:

Adatok:

$v = 27{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

<u>s = 4,2 m</u>

a = ?

A kolibri gyorsulása a $v = \sqrt{2as}$ összefüggésből számítható ki, amely levezethető az $s = \frac{a}{2}t^2$ és a $v = a \cdot t$ összefüggésekből.

A gyorsulás: $a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(27{,}3\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 4{,}2\text{m}} = 88{,}725\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Az Anna-kolibrik 88,725 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással zuhan.

7. lecke Szabadesés

1. Egy 12 m magas ugródeszkáról ugró versenyző számára mennyi idő áll rendelkezésre gyakorlatának bemutatásához? Milyen sebességgel ér a vízbe?

Megoldás:

Adatok:

$\underline{h = 12\text{ m}}$

$v = ?$

A vízbeérés ideje: $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ összefüggésbe behelyettesítve t = 1,55 s.

A vízbeérés sebességét kétféleképpen számolhatjuk ki:

I. A $v = g \cdot t$ alapján $v = 15{,}5\ \frac{m}{s}$.

II. A $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot s}$ alapján a sebesség: $v = 15{,}5\ \frac{m}{s}$.

A magasugró 1,55 s alatt, 15,5 m/s sebességgel ér a vízbe.

2. A bungee jumpinggal mélybe ugró ember sebessége az egyik pontban 3 m/s, míg a másik pontban 6 m/s. Menyi idő telik el míg egyik pontból a másikba ér? Mekkora a két pont közötti távolság?

Megoldás:

Adatok: v_1 = 3 m/s, v_2 = 6 m/s.

$\Delta t = ?$

$\Delta s = ?$

A szabadesés kezdetétől eltelt idő:

$$t_1 = \frac{v_1}{g}\text{, melyből } t_1 = 0{,}3\text{ s,}$$

$$t_2 = \frac{v_2}{g}\text{, melyből } t_2 = 0{,}6\text{ s.}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1\text{ , } \Delta t = 0{,}3\text{ s.}$$

A két pont közötti távolság:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{g}{2}t_2^2 - \frac{g}{2}t_1^2,$$

behelyettesítve: Δs = 1,35 m.

A mélybe ugró ember 0,3 s alatt ér az egyik pontból a másikba, amelyek közötti távolság 1,35 m.

3. A Pisai ferdetorony magassága legalacsonyabb oldalán 55,68 m, míg a legmagasabb oldalán 56,70 m. Amennyiben Galilei ejtési kísérleteket végzett volna a ferdetoronyból, mennyi idő alatt és milyen sebességgel értek volna le a vasgolyók? Mekkora lett volna az átlagsebességük?

Megoldás:
Adatok:
<u>h = 55,68 m</u>
t = ?
$v_{átl}$ = ?

A szabadesés ideje a $h = \frac{g}{2}t^2$ -ből számítható, ahonnan t = 3,34 s.

A $v = g{\cdot}t$ összefüggésből: $v = 33{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A ferdetoronyból eső test átlagsebessége:

$$v_{átl} = \frac{h}{t} = 16{,}67\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A vasgolyók 3,34 s alatt 33,4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel értek volna a talajra 16,67 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ átlagsebességgel.
(Feltételeztük, hogy az ejtési kísérletet a ferdetorony 55,68 m magasan lévő pontjában végezték.)

4. Egy személyfelvonó egyenletesen 12 m/s sebességgel mozog lefelé. A felvonó mellett kavicsot ejtünk el. Mikor és hol találkozik a kavics a felvonóval? Mekkora a találkozáskor a kavics sebessége? Rajzoljuk fel a felvonó és a kavics út-idő és sebesség-idő grafikonját!

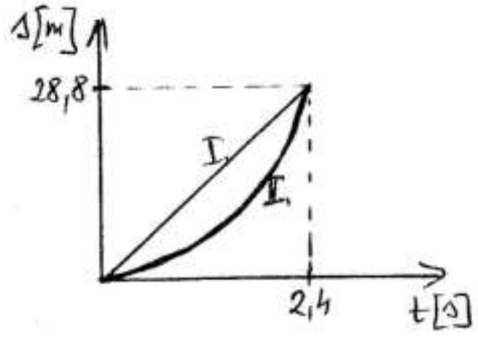
Megoldás:
Adatok:
<u>v = 12 m/s</u>
t = ?
s = ?
v_k = ?

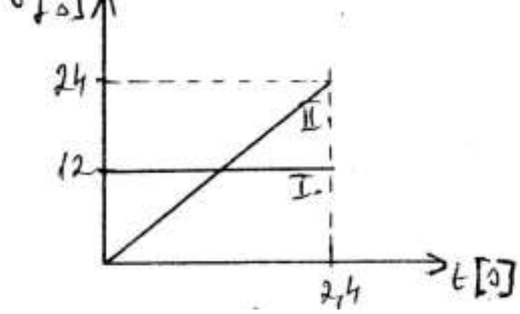
A felvonó egyenletes mozgással mozog, míg az elejtett kavics szabadeséssel. A megtett útjaik egyenlők.

$$v \cdot t = \frac{g}{2}t^2$$

A $t = \frac{2v}{g}$ -ből t = 2,4 s. A megtett út $s = v{\cdot}t = 12\ \frac{m}{s} \cdot 2{,}4\ \text{s} = 28{,}8$ m.

A kavics sebessége $v_k = g{\cdot}t = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2{,}4\ \text{s} = 24\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.





16. ábra: Hogyan változik a mozgás folyamán a személyfelvonó és a kavics sebessége?

17. ábra: A személyfelvonó egyenletes mozgást végez, míg a kavics szabadesést.

A kavics a felvonóval 2,4 s múlva találkozik, ez idő alatt mindkét test 28,8 m-t tett meg. Találkozáskor a kavics sebessége 24 m/s.

5. Egy test h = 80 m magasról esik. Osszuk fel az utat kettő olyan részre, amelyet a test egyenlő időközök alatt tesz meg!

Megoldás:
Adatok:
h = 80 m

A h magasságból az esés ideje: t = 4 s.
Mindkét útszakaszt 2 s alatt teszi meg, a megtett utak: h_1 = 20 m, h_2 = 60 m.

A 80 m-es út első 20 m-ét és a további 60 m-t egyaránt 2 s alatt tette meg a szabadon eső test.

6. Milyen magasról esett az a test, amely esésének utolsó másodpercében 25 m utat tett meg?

Megoldás:
A t + 1 s szabad esés utolsó másodpercében megtett út:

$$s = \frac{g}{2} \cdot (t+1)^2 - \frac{g}{2} t^2 = \frac{g}{2} \cdot (2t + 1\text{s})$$

Ebből: $t = \left(\frac{2s}{g} - 1\text{s} \right) \cdot \frac{1}{2} = 2\,\text{s}$

Az esés ideje: 3 s. Az esés magassága: $h = \frac{g}{2} \cdot (3\text{ s})^2 = 45\text{ m}$.

7. Szabadon eső test h = 180 m magasról esik. Osszuk fel az utat három olyan részre, amelyet a test egyenlő időközök alatt tesz meg!

Megoldás:

Az esés teljes ideje: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6\text{ s}$.

Az első 2 s alatt megtett út: $s_1 = \frac{g}{2} \cdot (2\ s)^2 = 20\text{ m}$.

Az első 4 s alatt megtett út: $s_1 + s_2 = \frac{g}{2} \cdot (4\ s)^2 = 80\text{ m}$, így s_2 = 60 m, és s_3 = 100 m .

8. lecke Összetett mozgások

1. Egy helyben lebegő léghajóból kidobunk egy testet a föld felé irányuló v_0 = 10 m/s kezdősebességgel.

a) Mekkora lesz a test sebessége 8 s múlva?
b) Mekkora utat tesz meg a test 8 s alatt?
c) Rajzold fel az út-, sebesség- és gyorsulás-idő grafikonokat!

Megoldás:

Adatok: $v_0 = 10\ \frac{m}{s}$, t = 8 s.

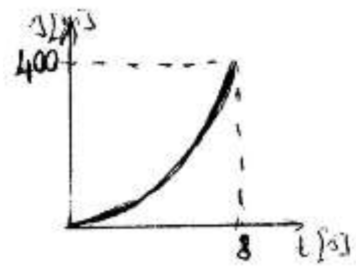
a) A test pillanatnyi sebessége: $v = v_0 + g \cdot t$, behelyettesítve: v = 90 m/s.
A test sebessége 8 s múlva 90 m/s.

b) A megtett út a $h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ alapján számítható.

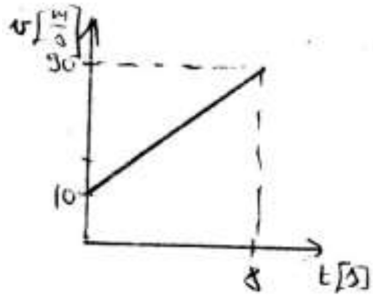
h = 80m + 320 m = 400 m.

A kidobott test 400 m utat tesz meg.

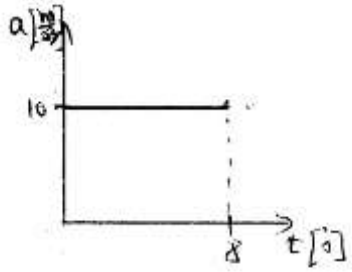
c) A léghajóból kidobott test mozgásának grafikonjai:



20. ábra: Az egyenletesen gyorsuló mozgást végző test megtett út - idő grafikonja parabola.



18. ábra: A sebesség-idő grafikon alapján is kiszámítható a megtett út nagysága?



19. ábra: A gyorsulás- idő koordinátarendszerben a grafikon alatti terület a sebességváltozás előjeles nagyságával egyenlő.

8. A földről függőlegesen fellőtt test sebessége $v_0 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

a) Mekkora a test sebessége 1 s, 2 s, 4 s múlva?
b) Mekkora magasságban van ezekben az időpontokban a test?

Megoldás:
Adatok:
$\underline{v_0 = 20\ \mathrm{m/s}}$
a) v_1 = ?, v_2 = ?, v_3 = ?
b) h_1 = ?, h_2 = ?, h_3 = ?

a) A test függőleges hajítást végez függőlegesen felfelé.

$v_1 = v_0 - g \cdot t_1 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\ \mathrm{s} = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,

$v_2 = v_0 - g \cdot t_2 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2\mathrm{s} = 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,

$v_3 = v_0 - g \cdot t_3 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4\mathrm{s}\ = -\ 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

$$h_1 = v_0 \cdot t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ 1\ \mathrm{s} - \frac{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(1\mathrm{s})^2 = 15\ \mathrm{m}.$$

$$h_2 = v_0 \cdot t_2 - \frac{g}{2} t_2^2 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ 2\ \mathrm{s} - \frac{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(2\,\mathrm{s})^2 = 20\ \mathrm{m}.$$

$$h_3 = v_0 \cdot t - \frac{\mathrm{g}}{2} \mathrm{t}_3^2 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ 4\ \mathrm{s} - \frac{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(4\,\mathrm{s})^2 = 0\ \mathrm{m}.$$

A földről függőleges hajítást végző test az elhajítás után 1 s múlva 15 m-es magasságban 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel halad. Kettő másodperc múlva 20 m magasságban megáll (0 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a sebessége), vagyis ez a pálya legmagasabb pontja. A harmadik esetben 4 s alatt visszatért a kiindulási helyzetébe – 20 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel (a sebesség iránya lesz ellentétes az elhajítás sebességével).

9. A földről függőlegesen fellőtt test sebessége v_0 = 30 m/s.

- **a)** Mennyi idő alatt éri el a maximális magasságot?
- **b)** Mekkora a test által elért legnagyobb magasság?
- **c)** Mekkora a megtett út és az elmozdulás 3 s alatt?

Megoldás:
Adatok:
v_0 = 30 m/s,
t = 3s.

a) A maximális magasságot a $0 = v_0 - g \cdot t$ összefüggés alapján, $t = \frac{v_0}{g}$ idő alatt éri el.
Behelyettesítve: t = 3 s.

b) Az emelkedés magassága: $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$.
$h_{\max}$ = 45 m.

c)
A fellőtt test t = 3 s múlva pont a pálya legmagasabb pontjában van. A test **elmozdulása** és a **megtett útja** egyenlő, 45 méter.

10. A Föld felszíne felett 45 m magasságban vízszintes irányú v_0 = 20 m/s sebességgel kilövünk egy kavicsot.

- **a)** Mennyi idő alatt és mekkora sebességgel ér Földet?
- **b)** Mekkora távolságra repül el a kavics?
- **c)** Mekkora a kavics végsebessége?

Megoldás:
Adatok: v_0 = 20 m/s, h = 45 m.

a) A kavics Földet érésének ideje a $h = \frac{g}{2}t^2$ összefüggésből $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$.

A földet érés sebességének függőleges komponense $v_y = g \cdot t$.

Behelyettesítve: t = 3 s, v_y = 30 m/s.

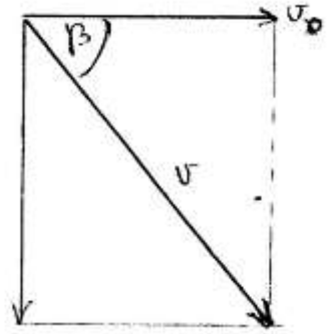
b) A kavics vízszintesen v_0 = 20 m/s sebességgel egyenes vonalú egyenletes mozgással mozog.

A kavics helyének vízszintesen koordinátája: $x = v_0 \cdot t = 60\ \mathrm{m}$.

A kilövési és a becsapódási pontok távolsága: $d = \sqrt{x^2 + y^2} = 75\ \mathrm{m}$.

c) A kavics végsebessége a vízszintes és függőleges irányú sebességkomponenseinek vektori összege. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + g \cdot t^2}$.

A kavics végsebessége v = 36 m/s.



11. Mekkora vízszintes irányú sebességgel kell egy 45 m magas toronyház tetejéről eldobnunk egy kavicsot ahhoz, hogy a kavics a toronyháztól 60 m-re érjen földet?

Megoldás:

Adatok:

h = 45 m,

s = 60 m

v_0 = ?

A kavics a mozgása folyamán vízszintes hajítást végez: függőlegesen szabadon esik, míg vízszintesen egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

A szabadesésének ideje:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot \mathrm{h}}{\mathrm{g}}} = 3\ \mathrm{s}.$$

Ezen idő alatt a kavics vízszintesen egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, így a kezdősebessége:

$$v_0 = \frac{s}{t} = \frac{60\ \mathrm{m}}{3\ \mathrm{s}} = 20\ \mathrm{m/s}.$$

A kavicsot vízszintesen 20 m/s sebességet kell elhajítani.

6. Egy 60 m/s sebességgel függőlegesen felfelé fellőtt lövedék milyen magasan van és mennyi utat tett meg a kilövéstől számított 2., 4., 6., 8., 10. és 12. másodperc végén?

Készítsük el a megtett út-idő, elmozdulás-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő grafikonokat!

Megoldás:

Adatok:

v_0 = 60 m/s , t_1 = 2 s, t_2 = 4 s, t_3 = 6 s, t_4 = 8 s, t_5 = 10 s, t_6 = 12 s

h = ?

s = ?

A földfelszíntől mért távolságot az $h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ összefüggésből számítjuk ki:

$$h_1 = v_0 \cdot t_1 - \frac{g}{2} \cdot t_1^2 = 60 \cdot 2 - \frac{10}{2} 2^2 = 100 \text{ m},$$

Hasonlóan: h_2 = 160 m, h_3 = 180 m, h_4 = 160 m, h_5 = 100 m, h_6 = 0 m.

A fellövés után megtett utak:

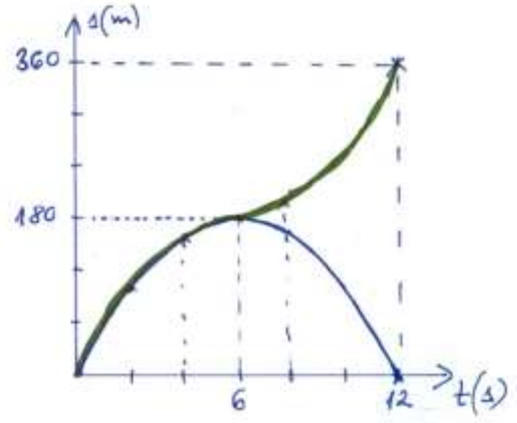
s_1 = 100 m, s_2 = 160 m, s_3 = 180 m, s_4 = 200 m, s_5 = 260 m, s_6 = 360 m.

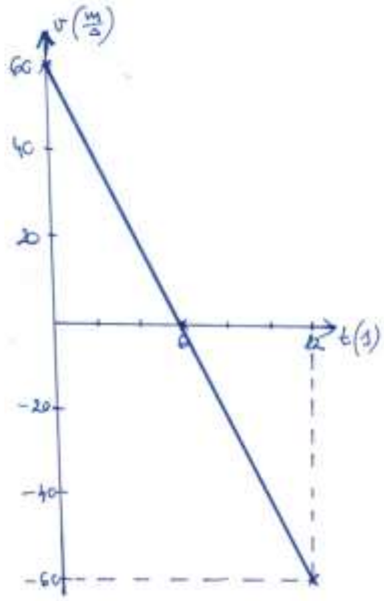
Az első 6 másodpercben a lövedék emelkedik, majd ezután esik vissza a föld felé.

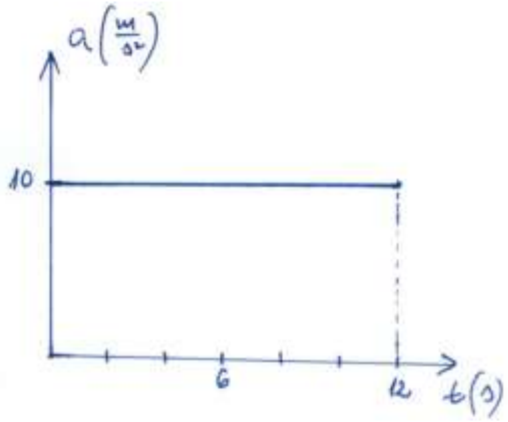
Az egyes időpontokban a sebességeket a $v = v_0 - g \cdot t$ összefüggéssel számítjuk ki:

$v_1 = 40\ \frac{m}{s}$, $v_2 = 20\ \frac{m}{s}$, $v_3 = 0\ \frac{m}{s}$, $v_4 = -20\ \frac{m}{s}$, $v_5 = -40\ \frac{m}{s}$, $v_6 = -60\ \frac{m}{s}$.

A mozgás grafikonjai:







7. Egy 1200 m magasan egy helyben álló helikopterből kiugrik egy ejtőernyős. Kilenc másodpercig szabadon esik, ekkor kinyitja az ejtőernyőjét, majd 475 m úton egyenletesen lassul 5 m/s sebességre. Ezután ezzel a sebességgel egyenletesen süllyed tovább.

a) A kiugrástól számítva mennyi idő múlva érkezik le a földre?

b) Rajzoljuk fel az ejtőernyős sebesség-, gyorsulás- és megtett út grafikonját az idő függvényében!

Megoldás:

Adatok: h = 1200 m, s_2 = 475 m, t_1 = 9 s, v_3 = 5 m/s.

a) Az út első szakaszán szabadon esik a test, a másodikon egyenletesen lassul, majd a mozgás harmadik részén állandó sebességgel süllyed.

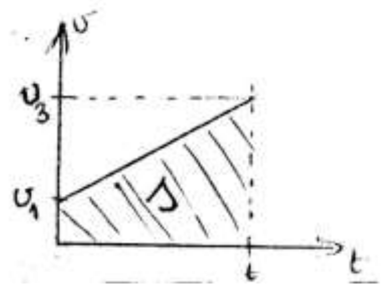
Az I. szakaszon a megtett út $s_1 = \frac{g}{2} \cdot t^2$,

sebesség $v_1 = g \cdot t$ összefüggésből számítható.

Behelyettesítve: s_1 = 405 m, v_1 = 90 m/s.

A II. szakaszon a lassulás t_2 ideje számítható.

$s_2 = \frac{v_1 + v_3}{2} \cdot t_2$, innen t_2 = 10 s.



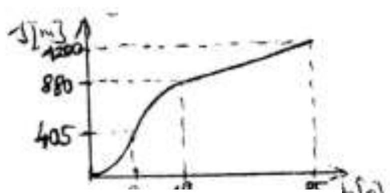
21. ábra: A v-t grafikon alatti terület a megtett úttal egyenlő?

A III. szakaszon az egyenletes mozgás ideje: $t_3 = \frac{s_3}{v_3}$.

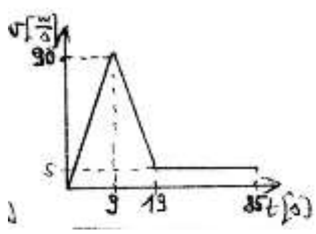
Behelyettesítve: t_3 = 64 s.

Az teljes esési idő: $t = t_1 + t_2 + t_3$, amelyből t = 85 s.

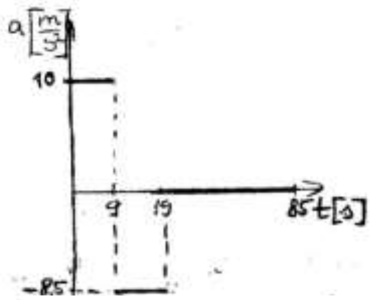
b) A grafikonok:



23. ábra: Hány szakaszból áll az s-t grafikon?



22. ábra: A mozgás melyik szakaszán éri el az ejtőernyős a maximális sebességet?



24. ábra: A második szakaszon a lassuló mozgás előjele negatív.

9. lecke Az egyenletes körmozgás kinematikai leírása

Feladatok:

1. A lemezjátszó 18 teljes fordulatot tesz meg 40 s alatt. Mekkora a fordulatszáma és a periódusideje?

Megoldás:

Adatok:

$n = 18$
$\Delta t = 40$ s

$f = ?$
$T = ?$

A fordulatszám:

$$f = \frac{n}{\Delta t} = \frac{18}{40\ s} = 0{,}45\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

A periódusidő:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}45\ \frac{1}{s}} = 2{,}22\ \mathrm{s}.$$

A lemezjátszó fordulatszáma $0{,}45\ \frac{1}{\mathrm{s}}$, a periódusideje 2,22 s.

2. Egyenletes körmozgást végző körhinta egy kocsija 8 m sugarú körpályán 16 s alatt tesz meg egy kört.

a) Mekkora körhinta kocsijának fordulatszáma?
b) Mekkora a szögsebessége?
c) Mekkora sebességgel halad a körhinta kocsijában ülő gyermek, ha a hinta külső felére ült?

Megoldás:

Adatok:

$r = 8$ m

$T = 16$ s

a) $f = ?$
b) $\omega = ?$
c) $v = ?$

a) A fordulatszám: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{16\ s} = 0{,}0625\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.

b) A szögsebesség: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{16\ s} = \frac{\pi}{8}\frac{1}{\mathrm{s}}$.

c) A gyermek kerületi sebessége:

$$v = \frac{2r \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot 8\ m \cdot \pi}{16\ s} = \pi\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A körhinta fordulatszáma $0{,}0625\ \frac{1}{\mathrm{s}}$, a szögsebessége $\frac{\pi}{8}\ \frac{1}{s}$, a kerületi sebessége pedig $\pi\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

3. A Föld 150 millió km sugarú körpályán 365,25 nap alatt járja körül a Napot. Mennyi a Föld középpontjának kerületi sebessége?

Megoldás:

Adatok:

$r = 150$ millió km$=1{,}5\cdot10^8$ km
$T = 365{,}25$ nap$=3{,}156\cdot10^7$ s

$v = ?$

A Föld pályáját körpályával írjuk le, akkor a kerületi sebességet a $v = \frac{2r\pi}{T}$ összefüggésből számoljuk.

$$v = \frac{2r\pi}{T} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8 \cdot \pi\ \mathrm{km}}{3{,}156 \cdot 10^7\,\mathrm{s}} = 29{,}86\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

A Föld középpontjának Nap körüli kerületi sebessége $29{,}86\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

4. Európa legnagyobb óriáskerekének átmérője 135 m. Mekkora az óriáskerék szögsebessége és kerületi sebessége, ha 30 perc alatt tesz meg egy teljes kört?

Megoldás:

Adatok:

$r = 67{,}5$ m
$T = 30$ perc $= 1800$ s

$\omega =?$
$v =?$

A London Eye szögsebességét $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ összefüggéssel számíthatjuk ki.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1800\ \mathrm{s}} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$

$$v = \omega \cdot r = 3{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 6{,}75\ \mathrm{m} = 0{,}24\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Az óriáskerék szögsebessége $3{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{s}}$, míg kerületi sebessége $0{,}24\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

5. Egy egyenletes körmozgást végző kerék *A* pontjának $3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, *B* pontjának $6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a kerületi sebessége. Mekkora a két körpálya sugarának különbsége, ha a szögsebességük egyaránt $1{,}5\ \frac{1}{\mathrm{s}}$?

Megoldás:

Adatok:

$\omega = 1{,}5\ \frac{1}{\mathrm{s}}$

$v_A = 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v_B = 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$\Delta r = ?$

A két sugár különbsége $\Delta r = r_B - r_A$.

A sugarakat a $v = \omega \cdot r$ összefüggésből határozzuk meg.

Így
$$r_A = \frac{v_A}{\omega} = \frac{3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}5\ \frac{1}{\mathrm{s}}} = 2\ \mathrm{m},$$

$$r_B = \frac{v_B}{\omega} = \frac{6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}5\ \frac{1}{\mathrm{s}}} = 4\ \mathrm{m}.$$

A sugarak különbsége $\Delta r = r_B - r_A = 4\ \mathrm{m} - 2\ \mathrm{m} = 2\ \mathrm{m}$.

6. Egy autó $15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebessége halad, kerekének átmérője 0,6 m.

a) Mekkora a kerekének periódusideje és fordulatszáma?

b) Hány fordulatot tesz meg percenként?
c) Mekkora utat fut be az autó egy perc alatt, és mennyi a kerék talajjal érintkező pontja által befutott szakasz hossza?

Megoldás:
Adatok:

$v = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$d = 0{,}6$ m, $r = 0{,}3$ m.

a) $T = ?$, $f = ?$

b) $n = ?$

c) $s = ?$ $i = ?$

a) Az autókerék külső pontjainak kerületi sebessége $v_k = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (Ha a kezemben lévő kerék külső pontjainak kerületi sebessége $15\frac{m}{s}$, akkor ha letesszük a földre az $15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel fog elindulni. Vagy: A kerék akkor gördül tisztán, ha a kerék külső pontjának kerületi sebesség megegyezik a kerék tengelyének sebességével.)

A kerék periódusideje: $v_k = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}$ összefüggésből:

$$T = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{v_k} = \frac{2 \cdot 0{,}3 \cdot \pi}{15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}1256 \text{ s.}$$

A fordulatszám:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}126 \text{ s}} = 7{,}95\ \frac{1}{\text{s}}.$$

b) Egy perc alatt megtett fordulatok száma:

$$n = f \cdot t = 7{,}95\ \frac{1}{\text{s}} \cdot 60 \text{ s} = 477.$$

Az autó kereke egy perc alatt 477 fordulatot tesz meg.

c) A befutott út hossza és a befutott szakasz megegyezik.

$$s = 477 \cdot 2r\pi = 900 \text{ m.}$$

Az autó 900 m-t tesz meg egy perc alatt.

7. Egy toronyóra kismutatója 70 cm, míg a nagymutatója 120 cm hosszúságú.
a) Mekkora a szögsebességük aránya?
b) Mekkora a kerületi sebességük aránya?
c) Mekkora a fordulatszámuk aránya?

Megoldás:

Adatok:

$r_A = 70$ cm$=0{,}7$ m

$r_B = 120$ cm $= 1{,}2$ m

a) $\frac{\omega_A}{\omega_B} = ?$

b) $\frac{v_A}{v_B} = ?$

c) $\frac{f_A}{f_B} = ?$

Jelöljük a kismutató adatait „A” alsó indexel, míg a nagymutatóét „B”-vel. A kismutató keringési ideje: $\boldsymbol{T_A}$ **= 43200 s** A nagymutató keringési ideje: $\boldsymbol{T_B}$ **= 3600 s**.

a) Szögsebességük az $\omega = \frac{2\pi}{T}$ összefüggés felhasználásával:

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{\frac{2\pi}{T_A}}{\frac{2\pi}{T_B}} = \frac{T_B}{T_A}.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{3600\ \text{s}}{43200\ \text{s}} = \frac{1}{12}.$$

b) A kerületi sebességek arányait a $v = \omega \cdot r$ összefüggés alapján számítjuk ki.

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega_A \cdot r_A}{\omega_B \cdot r_B} = \frac{\omega_A}{\omega_B} \cdot \frac{r_A}{r_B} = \frac{1}{12} \cdot \frac{0{,}7\ \text{m}}{1{,}2\ \text{m}} = 0{,}0486.$$

c) A fordulatszámok arányát az $f = \frac{1}{T}$ összefüggésből az előzőekhez hasonlóan számítjuk ki.

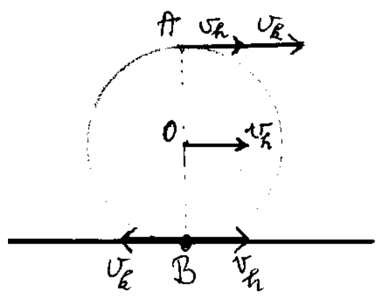
$$\frac{f_A}{f_B} = \frac{\frac{1}{T_A}}{\frac{1}{T_B}} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{3600\ \text{s}}{43200\ \text{s}} = \frac{1}{12}.$$

8. Egy kerékpár 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad, kerekének sugara 34 cm. Mekkora a kerék legfelső és a talajjal érintkező pontjának a sebessége?

Megoldás:

Adatok:

$v_h = 18\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$



$r = 34\ \text{cm} = 0{,}34\ \text{m}$

$v_A = ?$

$v_B = ?$

Vizsgáljuk meg, hogy a kerékpár haladási sebessége és a kerekpár kerékabroncsának kerületi sebessége hogyan viszonyul egymáshoz. A kerék haladásából származó szögsebessége:

25. ábra: A kerékpárabroncs minden egyes pontjának sebessége a kerékpár haladó és az abroncs középpontja körüli körmozgásból tevődik össze.

$$\omega = \frac{v_h}{r}$$

A kerék minden pontja azonos szögsebességgel mozog, ezért a kerületi sebesség:

$$v_k = \omega \cdot r = \frac{v_h}{r} \cdot r = v_h$$

Gondoljuk meg a következőket.

Ha a kerékpár áll és megforgatjuk a kereket, akkor a kerék minden pontjának lesz egy v_k kerületi sebessége.

Ha a kerékpár v_h sebességgel halad, így a kerék középpontjának (O pont) a sebessége v_h.

Tehát látható, hogy a haladó és a forgómozgásból adódó sebességek a kerék minden pontjában vektorilag összeadódnak.

Az A pontban a sebességvektorok egyirányúak:

$$v_A = v_h + \omega \cdot r = v_h + v_k = 2v_h$$

A B pontban a két sebességvektor ellentétes irányú:

$$v_B = v_h - \omega \cdot r = v_h - v_k = 0$$

Tehát a kerék legfelső pontja 36 km/h a sebessége, míg a legalsó pontja nyugalomban van.

10. lecke Centripetális gyorsulás

1. A játékvasút mozdonya az 1,6 m sugarú körpályán 6 perc alatt 18 teljes kört tesz meg. Mekkora a centripetális gyorsulása a mozdonynak?

Megoldás:

Adatok:

$r = 1{,}6$ m
$t = 6$ perc $= 360$ s
$n = 18$

$a_{cp} = ?$

A fordulatszám: $$f = \frac{n}{\Delta t} = \frac{18}{360\ \mathrm{s}} = 0{,}05\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

A szögsebesség:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 0{,}05\ \frac{1}{\mathrm{s}} = 0{,}314\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

A centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = \omega^2 \cdot r = \left(0{,}314\ \frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 1{,}6\ \mathrm{m} = 0{,}158\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A játékvasút mozdonyának fordulatszáma 0,05 $\frac{1}{\mathrm{s}}$, szögsebessége 0,314 $\frac{1}{\mathrm{s}}$, centripetális gyorsulása 0,158 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

2. A Föld Nap körüli pályájának átlagos sugara $1{,}5 \cdot 10^8$ km, pálya menti sebessége 30 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.

a) Mekkora utat fut be a Föld egy nap alatt?
b) Mekkora a Föld centripetális gyorsulása a Nap körüli pályán haladva?

Megoldás:

Adatok:

$r = 1{,}5 \cdot 10^8\ \mathrm{km} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$,
$v = 30\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 3 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,
$t = 24\ \mathrm{h} = 86400\ \mathrm{s}$.
a) $s = ?$
b) $a_{\mathrm{cp}} = ?$

a) A Föld egy nap alatt befutott útjának hossza:

$$s = v \cdot t = 30\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot 86400\ \mathrm{s} = 2\,592\,000\ \mathrm{km}.$$

b) A Föld centripetális gyorsulása:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(3 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{1{,}5 \cdot 10^{11}\mathrm{m}} = 6 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A Föld a Nap körül 2 592 000 km utat fut be egy nap alatt. A centripetális gyorsulása $6 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

3. A francia SPOT műholdak körpályán keringenek, átlagos pályamagasságuk a Föld felszínétől 832 km. A Földet 101 percenként kerülik meg.

a) Mekkora a SPOT műholdak kerületi sebessége?

b) Mekkora a műholdak centripetális gyorsulása?

Megoldás:

Adatok:

d = 832 km= $8{,}32 \cdot 10^5$ m,
R_F = 6370 km =$6{,}37 \cdot 10^6$ m,
T = 101 min = 6060 s
a) v = ?
b) a_{cp} = ?

a) A műhold kerületi sebessége: $v_{ker} = \frac{2(R_F + d)\pi}{T}$.

Behelyettesítve:

$$v = 7467\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7{,}467\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

b) A műholdak centripetális gyorsulása:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R_F + d},$$

amelyből

$$a_{cp} = 7{,}73\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4. Egy helikopter 1,2 m hosszúságú propellerje 10 1/s szögsebességgel forog. Mekkora a propeller végpontjának centripetális gyorsulása?

Megoldás:

Adatok:

R = 1,2 m; f = 10 1/s.
$a_{cp} = ?$

$$a_{cp} = \omega^2 \cdot R = (2\pi f)^2 \cdot R = 4737{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

5. A Merkúr a Nap körül 57,9 millió km távolságban 87,9 nap alatt kerüli meg a Napot. Számítsuk ki, hogy a Merkúr Nap körüli pályáján mekkora sebességgel halad, és mekkora a centripetális gyorsulása!

Megoldás:

Adatok:

$r = 5{,}79 \cdot 10^{10}\ \text{m}$; $T = 7{,}595 \cdot 10^6\ \text{s}$.
$v_{ker} = ?$
$a_{cp} = ?$

A Merkúr kerületi sebessége a Nap körüli pályáján: $v_{ker} = \frac{2r\pi}{T} = 47\,902\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A Merkúr centripetális gyorsulása: $a_{cp} = \frac{v_{\text{ker}}^2}{r} = 0{,}0396\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

6. Egy 1500 kg tömegű személygépkocsi egy *R* sugarú kanyarhoz közeledik 90 km/h sebességgel. Mekkora a kanyar sugara, ha a gépkocsi centripetális gyorsulása 3,125 m/s^2 ?

Megoldás:

Adatok:

m = 1500 kg; v = 90 km/h = 25 m/s; a = 3,125 m/s^2.
R = ?

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_{cp}} = 200\ \text{m}.$$

(A személygépkocsi tömege felesleges adat.)

11. lecke A bolygók mozgása, Kepler-törvények

1. Az egyik Galilei–hold, az Io 424 000 km sugarú pályán kering a Jupiter körül. Mekkora a Jupiter tömege, ha az Io 1,77 nap alatt kerüli meg a Jupitert?

Megoldás:

Adatok:

r_{Io} = 424 000 km = 4,24·10^5 km = 4,24·10^8 m,

T_{Io} = 1,77 nap = 152 928 s.

M_{Jupiter} = ?

Az Io pályájának kerületi sebessége $v = \frac{2r\pi}{T}$ alapján számítható.

$$v_{Io} = \frac{2r\pi}{T} = \frac{2 \cdot 4{,}24 \cdot 10^8\,\text{m} \cdot \pi}{152928\text{s}} = 17420\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 17{,}42\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Az Io és a Jupiter között fellépő gravitációs vonzás adja a körpályán tartáshoz szükséges centripetális erőt.

$$m\frac{v^2}{r} = \gamma\frac{m \cdot M}{r^2},$$

amelyből
$$M = \frac{v^2 \cdot r}{\gamma} = 1{,}92 \cdot 10^{27}\ \text{kg}.$$

A Jupiter tömege $1{,}92 \cdot 10^{27}$ kg, amely kb. 318-szor nagyobb a Föld tömegénél.

2. A francia SPOT műhold pályamagassága 832 km, és a Földet 101 perc alatt kerüli meg. A Landsat–7 földmegfigyelő műhold 705 km átlagos magasságban kering. Mennyi idő alatt tesz meg egy fordulatot a Föld körül?

Megoldás:

Adatok:

h_1 = 832 km; T_1 = 101 min; h_2 = 705 km.
T_2 = ?

Mindkét műhold a Föld körül kering, így a keringési idejük és a pályasugaraik között fennáll (Kepler III. tv.):

$$\frac{R_L^3}{R_S^3} = \frac{T_L^2}{T_S^2}.$$

Behelyettesítve:

$$R_S = R + h_1 = 6370\ \text{km} + 832\ \text{km} = 7202\ \text{km}$$

$$R_L = R + h_2 = 6370\ \text{km} + 705\ \text{km} = 7075\ \text{km}$$

$T_L = 99{,}2\ \text{min}$.

A Landsat–7 földmegfigyelő műhold 99,2 perc alatt tesz meg egy fordulatot a Föld körül.

3. A Föld 150 millió km távolságban kering a Nap körül. A keringési ideje 1 év. Határozzuk meg az Uránusz keringési idejét, ha tudjuk, hogy a Naptól való átlagos távolsága 2875 millió km!

Megoldás:

Adatok:

r_1 = 150 millió km; T_1 = 1 év; r_2 = 2875 millió km.
T_2 = ?

Mindkét bolygó a Nap körül kering, így a keringési idejük és a pályasugaraik között fennáll (Kepler III. tv.):

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}.$$

Behelyettesítve:

$T_2 = 99{,}2\ \text{min}$.

Az Uránusz 83,9 év alatt tesz meg egy fordulatot a Nap körül.

4. A Mars holdja a Phobos $9{,}38 \cdot 10^3$ km átlagos távolságra 0,319 nap alatt kerüli meg a Marsot. Milyen távolságra kering a Deimos a Mars körül, ha a keringési ideje 1,262 nap?

Megoldás:

Adatok:

R_P = 9,38·10^3 km,
T_P = 0,319 nap,
T_D = 1,262 nap
R_D = ?

A Deimos és a Phobos a Mars körül kering, így a keringési idejük és a pályasugaraik között fennáll (Kepler III. tv.):

$$\frac{R_D^3}{R_P^3} = \frac{T_D^2}{T_P^2}.$$

Behelyettesítve:

$$R_D = 2{,}346 \cdot 10^4 \text{ km}.$$

A Deimos 2,346·10^4 km távolságra kering a Mars körül.

5. A Mars pályájának sugara 1,524, míg a Vénuszé 0,723 csillagászati egység. Egy csillagászati egységnek nevezik a Nap-Föld távolságot, amely 150 millió km. Mekkora a Vénusz Nap körüli keringési ideje, ha a Mars 687 nap alatt kerüli meg a Napot?

Megoldás:

Adatok:

r_M = 1,524

r_V = 0,723

T_M = 687 nap

T_V = ?

A bolygók Nap körüli mozgására érvényes Kepler 3. törvénye: $\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$.

Az összefüggést felhasználva:

$$T_v = \sqrt{\frac{r_V^3}{r_M^3} \cdot T_M^2} = \sqrt{\left(\frac{r_V}{r_M}\right)^3} \cdot T_M.$$

Behelyettesítve:

$$T_V = \sqrt{\left(\frac{0{,}723}{1{,}524}\right)^3} \cdot 687 \text{ nap} = 224{,}5 \text{ nap}.$$

A Vénusz Nap körüli keringési ideje 224,5 nap.

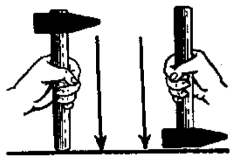
12. lecke Newton I. törvénye

2. Mi a magyarázata az alábbi jelenségeknek?

a) A háziasszonyok az ablakon át ki szokták rázni a portörlő rongyot. Miért hullanak ki a rongyból a porrészecskék?
Megoldás:
A rázás következtében a tehetetlenségüknél fogva hullanak ki a részecskék a törlőrongyból.

b) Miért löttyen ki a leves a tányérunkból, ha hirtelen megmozdítjuk a tányért?
Megoldás:
A leves tehetetlenségénél fogva helyben marad, a tényár „kiszalad" alóla.

c) A meglazult kalapácsnyelet szeretnénk a kalapács fejébe beleerősíteni. Melyik erősítési mód a jobb?
Megoldás:
A kalapács fejének nagyobb a tömege, mint a nyelének. Ezért a kalapács nyelét kell a talajhoz ütnünk. A kalapács feje a nagyobb tehetetlensége miatt jobban rászorul a nyélre, mintha fordítva tennénk.



26. ábra: Melyik esetben szorul rá jobban a nyélre a kalapács feje?

3. Inerciarendszernek tekinthető-e a következő testekhez rögzített vonatkoztatási rendszer:

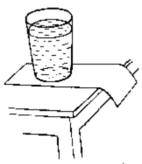
a) az úttest mellett álló személygépkocsi;
b) egyenes vonalú, egyenletes mozgást végző kerékpáros;
c) kanyarodó autóbusz;
d) fékező vonat?

Megoldás:

a) A személygépkocsi áll, inerciarendszernek tekinthető.
b) A kerékpáros is inerciarendszernek tekinthető.
c) Nem inerciarendszer.
d) Nem inerciarendszer.

4. Egy űrhajókabinból a Földre történő visszaérkezése közben vízszintes v sebességgel kilőnek az űrhajóból egy kis csomagot. Milyen mozgást végez a csomag a szabadesés alatt lévő kabinból figyelve?
Megoldás:
A szabadesést végző kabinhoz képest a csomag vízszintes irányú egyenes vonalú egyenletes mozgást végez (külső körülmények zavaró hatásától eltekintünk).

5. Ha hirtelen mozdulattal kirántjuk a vízzel teli pohár alól a papírlapot, a pohár alig



mozdul el, de a papírlapot ki tudjuk húzni. Ha lassan, óvatosan végezzük el a kísérletet, akkor nem sikerül kihúzni a lapot. Mi az oka?
Megoldás:
A pohár a tehetetlensége miatt az első esetben mozdulatlan marad.
27. ábra: Miért nem szakad el a vékony papírlap?

6. Személygépkocsiban egy fonál végére egy kis vasgolyót rögzítünk. Mi történik a vasgolyóval, ha az autó elindul vagy fékez? Merre mozdul el a vasgolyó, amikor a gépkocsi elindul?
Megoldás:
Az autó elinduláskor a vasgolyó tehetetlenségénél fogva mozgásiránnyal ellentétesen mozdul el, míg fékezéskor az eredeti mozgásirányba lendül ki.

28. ábra: Gépkocsiban fonálon függő vasgolyó

13. lecke Newton II. törvénye

1. Egy teherautó 4 500 N erő hatására 0,6 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozgott. Mekkora a tömege?

Megoldás:

Adatok:

F = 4500 N
a = 0,6 m/s^2

m =?

Newton II. törvényéből kifejezve:

$$m = \frac{F}{a} = \frac{4500\ \text{N}}{0{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 7500\ \text{kg}\,.$$

A teherautó tömege 7 500 kg.

2. Nézzünk utána az interneten, hogy melyik a szárazföldön, illetve a vízben élő legnagyobb tömegű állat? Mekkora a tömegük?
Megoldás:
Szárazföldön: afrikai elefánt kb. 5 tonna, vízen: kékbálna 130 tonna.

3. A higany sűrűsége ρHg = 13 546 kg/m^3.

a) Mekkora a tömege 1 dm^3 higanynak?
b) Mekkora a térfogata 1 kg higanynak?

Megoldás:
Adatok:
V = 1 dm^3 = 10^{-3} m^3,

$\underline{\rho_{Hg} = 13\ 546\ \mathrm{kg/m^3}.}$
m =?
V = ?

a) Az 1 dm^3 higany tömege:

$$m = \rho \cdot V = 13\ 546\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3} = 13{,}546\ \mathrm{kg}\cdot$$

b) Az 1 kg higany térfogata:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1\ \mathrm{kg}}{13546\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}} = 7{,}38\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3}\ (=73{,}8\ \mathrm{cm^3}).$$

Az 1 dm^3 higany tömege 13546 kg, míg az 1 kg térfogata $7{,}38\cdot 10^{-5}$ m^3.

4. Mekkora erő hat az 500 kg tömegű pótkocsira, ha sebességét 8 másodperc alatt zérusról 10 m/s-ra gyorsítja?

Megoldás:
Adatok:
t = 8 s,
m = 500 kg,
$\underline{v = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$
F = ?

A gépkocsira ható erő nagysága:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = 625\ \mathrm{N}.$$

A pótkocsira 625 N nagyságú erő hat.

5. Mekkora állandó erőt kell az 50 kg tömegű kiskocsira kifejteni, hogy a kocsi az indulástól számított 5 s alatt 12,5 m utat tegyen meg?

Megoldás:
Adatok:
m = 50 kg,
t = 5 s,
$\underline{s = 12{,}5\ \mathrm{m}}$
F = ?

Számítsuk ki a kiskocsi gyorsulását az $s = \frac{a}{2}t^2$ összefüggésből!

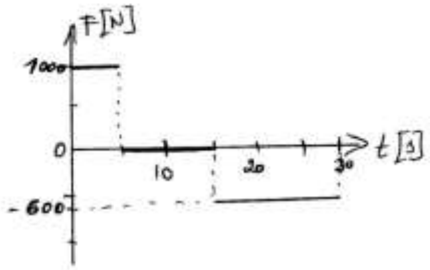
$$a = \frac{2s}{t^2} = 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}.$$

A kiskocsira ható gyorsító erő nagysága:

$$F = m \cdot a = 50\ \text{kg} \cdot 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 50\ \text{N}.$$

A kiskocsira 50 N állandó erő hat a 12,5 m-es úton.

6. A grafikon egy 800 kg tömegű személygépkocsi mozgásáról készült. A grafikon alapján határozzuk meg, hogy mekkora volt a személygépkocsi gyorsulása! Egy irányban haladt-e, vagy menet közben megfordult a gépkocsi?



29. ábra: A mozgás folyamán egy irányban haladt vagy megfordult a gépkocsi?

Megoldás:

Adatok:

m = 800 kg

---

a = ?

Jelöljük rendre a_1, a_2 és a_3-mal az egyes szakaszok gyorsulását.

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{1000\ \text{N}}{800\ \text{kg}} = 1{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_2 = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ \text{mert}\ F = 0\ \text{N}.$$

$$a_3 = \frac{F_3}{m} = \frac{-600\ \text{N}}{800\ \text{kg}} = -0{,}75\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

tehát a személygépkocsi lassult a 3. szakaszban.

A személygépkocsi gyorsulása az egyes szakaszokon: 1,25 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, 0 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, -0,75 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A gépkocsi sebessége az 1. szakasz végén:

$$v_1 = a_1 \cdot t_1 = 1{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5\ \text{s} = 6{,}25\ \frac{m}{s}.$$

A 2. szakaszon a személygépkocsi sebessége nem változik ($v_2 = v_1$). A 3. szakasz végén a sebessége:

$$v_3 = v_2 - a_3 \cdot t_3 = 6{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}75\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 15\ \text{s} = -5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A személygépkocsi sebessége a 3. szakasz végére -5 m/s, mivel a 3. szakasz alatt a sebessége nullára csökken, majd a sebesség iránya ellentétesre fordul. Tehát a személygépkocsi megfordul menet közben.

7. Mekkora erő gyorsítja a 250 kg tömegű motorkerékpárt, ha gyorsulása 2,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

Megoldás:

Adatok:

m = 250 kg

$a = 2{,}5\ \frac{m}{s^2}$

F =?

Newton II. törvénye alapján:

$$F = m \cdot a = 250\ \text{kg} \cdot 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 625\ \text{N}.$$

A motorkerékpárt 625 N nagyságú erő gyorsítja.

8. Mennyi idő alatt gyorsul fel az 1200 kg tömegű gépkocsi 54 km/h sebességről 72 km/h sebességre, ha 3000 N állandó nagyságú erő gyorsítja? Mennyi utat tesz meg ezalatt?

Megoldás:

Adatok:

m = 1200 kg
F = 3000 N

$v_1 = 54\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v_2 = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

s=?

A gyorsulás az $F = m \cdot a$ alapján:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3000\ \text{N}}{1200\ \text{kg}} = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A gyorsulás ideje az $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$-ből:

$$t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2\ \text{s}.$$

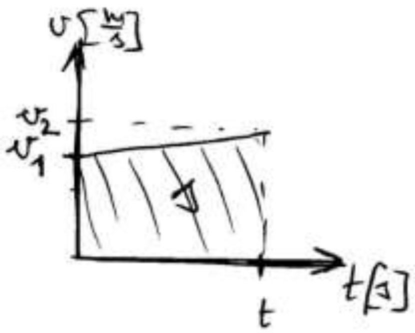
A megtett utat kétféleképpen számolhatjuk ki.

I. A grafikon alatti terület adja a megtett utat:

$$s = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot t,$$

$$s = \frac{15\ \frac{m}{s} + 20\ \frac{m}{s}}{2} \cdot 2\ s = 35\ m.$$

II. Az $s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ képlettel számolunk.



30. ábra: A sebesség-idő koordinátarendszerben a grafikon alatti terület a megtett úttal egyenlő.

$$s = 15\frac{m}{s}\cdot 2\ s + \frac{2{,}5\ \frac{m}{s^2}}{2}\cdot 4\ s^2 = 35\ m\,.$$

A gépkocsi 2 s alatt gyorsul fel, ezalatt 35 m utat tesz meg.

9. Mekkora gyorsítóerő szükséges ahhoz, hogy az 1260 kg tömegű személyautó 100 m úton 54 km/h sebességet érjen el?

Megoldás:
Adatok:
m = 1 260 kg
s = 100 m
$v = 54\frac{\text{km}}{\text{h}} = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$
F=?
A test gyorsulását kell meghatároznunk, majd abból megkapjuk a gyorsító erő nagyságát.

A $v = a\cdot t$ összefüggésből: $t = \frac{v}{a}$,

amelyet az $s = \frac{a}{2}\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s}$.

Behelyettesítve:

$$a = \frac{225\ \frac{m^2}{s^2}}{2\cdot 100\ m} = 1{,}125\ \frac{m}{s^2}\,.$$

A testre ható gyorsító erő:

$$F = ma = 1260\ \text{kg}\cdot 1{,}125\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1417{,}5\ \text{N}.$$

1417,5 N gyorsítóerő szükséges a személyautó felgyorsításához.

10. Egy 25g tömegű 600 m/s sebességű lövedék 30 cm mélyen fúródott be egy fatörzsbe. A fatörzs állandó nagyságú erőt fejtett ki a fára.

a) Menyi idő alatt állt meg a lövedék a fatörzsben?

b) Mekkora volt a gyorsulása?

c) Mekkora erő lassította a lövedéket?

Megoldás:
Adatok:
m = 25 g = $2{,}5\cdot 10^{-2}$ kg
v = 600 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
s = 30 cm = 0,3 m

a) t=?
b) a=?
c) F=?

a) A fatörzs állandó nagyságú erőt fejtett ki a lövedékre, ezért lassulása állandó és sebessége is egyenletesen csökken.

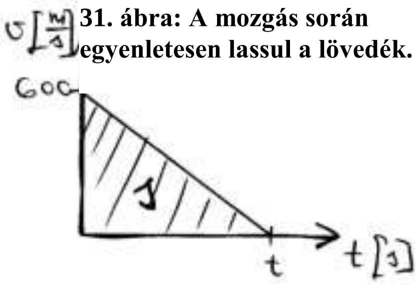
A mozgás út-idő grafikonja

A grafikon alapján megtett út:

$$s = \frac{v}{2} \cdot t .$$

Behelyettesítve:

$$0{,}3 = \frac{600}{2} \cdot t \Rightarrow t = 10^{-3}\,\mathrm{s} .$$



31. ábra: A mozgás során egyenletesen lassul a lövedék.

b) A gyorsulás az $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ összefüggésből határozzuk meg.

$$a = \frac{0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 600\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10^{-3}\,\mathrm{s}} = -6 \cdot 10^{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} .$$

c) A lövedéket lassító erő:

$$F = m{\cdot}a = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg} \cdot 6 \cdot 10^{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1{,}5 \cdot 10^{4}\,\mathrm{N} .$$

11. 9. Mekkora átlagos erővel tudja egy mozdony a 15 t tömegű vasúti vagont 2 m/s sebességről 5 m/s sebességre 3 másodperc alatt felgyorsítani?

Megoldás:

Adatok:

m = 15 t = $1{,}5 \cdot 10^4$ kg

$v_1 = 2\,\dfrac{m}{s}$

$v_2 = 5\,\dfrac{m}{s}$

t = 3 s

$F_{átl}$ = ?

Az átlagos erő nagysága:

$$F_{átl.} = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot \frac{v_2 - v_1}{t} = 1{,}5 \cdot 10^{4}\ \mathrm{N}.$$

14. lecke Newton III. törvénye

Feladatok

1. A lovas kocsit a ló ugyanakkora erővel húzza, mint amekkora erővel a kocsi hat a lóra. Miért nem marad a kocsi nyugalomban?

Megoldás:

A lovaskocsi és a ló között Newton III. törvénye értelmében valóban ugyanakkora nagyságú, és ellentétes irányú erő hat. Viszont ez a két erő különböző testekre hat: a lóra, ill. a lovaskocsira. A ló és a kocsi nem alkot zárt rendszert, mert a ló lábával erőt fejt ki a talajra. Ennek az erőnek az ellenereje (un. tapadási súrlódási erő) fogja mozgatni a lovat.

2. Egy kötélhúzó versenyen két csapatban 5- 5 ember húzza ellentétes irányban a kötél két végét. Mindkét csapat a kötélre 2000-2000 N erőt fejt ki. Elszakad-e a kötél, ha 2400 N-nál nagyobb terhelést nem bír el?

Megoldás:

Az egyik csapat által kifejtett 2000 N erő hat a másik csapatra, míg a másik által kifejtett 2000 N erő hat az elsőre. Ezek a kölcsönhatásban fellépő erők egyenlő nagyságúak és ellentétes irányúak. A kötél bármely pontját is tekintjük, akkor arra 2000 N nagyságú erő hat, így a kötél nem szakadhat el.

3. Egy fonállal összekötött rugó mindkét irányban 8 N nagyságú erőt fejt ki. Két oldalról egy 0,1kg és egy 0,4kg tömegű kiskocsihoz rögzítjük. A fonalat elégetve 0,1 s-ig tartó állandó 8 N nagyságú erők gyorsítják a kocsikat.

a) Mekkora az egyes kocsik gyorsulása?
b) Mekkora végsebességet érnek el a kiskocsik?

Megoldás:

Adatok:

$F = 8$ N
$t = 0{,}1$ s
$m_1 = 0{,}1$ kg
$\underline{m_2 = 0{,}4 \text{ kg}}$
a) $a_1 = ?$; $a_2 = ?$
b) $v_1 = ?$; $v_2 = ?$

a) A fonal elégetése után mindkét kiskocsira 8 N nagyságú gyorsító erő hat. Newton II. törvénye értelmében a gyorsulások:

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{8\,\text{N}}{0{,}1\ \text{kg}} = 80\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{8\ \text{N}}{0{,}4\ \text{kg}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Az egyes kocsik gyorsulása 80 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, illetve 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) A kiskocsikra $t = 0{,}1$ s-ig állandó gyorsító erő hat, így a végsebességek:

$$v_1 = a_1 \cdot t = 80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}1\ \text{s} = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_2 = a_2 \cdot t = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}1\ \mathrm{s} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A kiskocsik végsebessége 8 m/s és 2 m/s.

4. Egy összeszorított rugót fonállal összekötünk, majd egyik oldalára egy 0,5 kg, míg a másik oldalára pedig egy ismeretlen tömegű golyót helyezünk. A fonál elégetésekor a 0,5 kg-os golyót 6 m/s sebességgel, míg a másikat 1,5 m/s sebességgel löki el. Mekkora az ismeretlen golyó tömege? Ezt a módszert a lendület alapján történő tömegmérésnek nevezik.

Megoldás:

Adatok:

$m_1 = 0{,}5$ kg

$v_1 = 6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$v_2 = 1{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$m_2 = ?$

A fonal elégetésekor a rugó mindkét golyóra ugyanakkora erővel hat. Így Δt idő alatt mindkét golyó megegyező nagyságú lendületváltozást szenved.

$$F_1 = F_2$$

$$m_1 \cdot \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = m_2 \cdot \frac{\Delta v_2}{\Delta t}$$

$$m_1 \cdot \Delta v_1 = m_2 \cdot \Delta v_2$$

Az m_2-t kifejezve és behelyettesítve:

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = 0{,}5\ \mathrm{kg} \cdot \frac{6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 2\ \mathrm{kg}.$$

Az ismeretlen tömegű golyó tömege 2 kg.

5. Egy 57 kg tömegű nyugvó bomba három részre esik szét, amelyek közül kettő egymásra merőlegesen 6 m/s sebességgel távozik. Milyen irányban és mekkora sebességgel repül el a harmadik darab?

Megoldás:

Adatok:

$M = 3m = 57$ kg,

$\Delta v_1 = \Delta v_2 = 6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$

$v_3 = ?$

Az robbanás során az 1-es és 2 es testre ható erők azonos nagyságúak, és merőlegesek egymásra:

$$F_1 = F_2 = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \ .$$

A 3-as testre ezek ellenereje hat az ellentétes irányban.

Például: Az F_1 erő az m tömegű 3-as testnek a robbanás Δt ideje alatt x-irányban Δv_1, az F_2 erő y-irányban Δv_2 sebességváltozást okoz. Így a 3-as test sebességének nagysága:

$$v_3 = \sqrt{(\Delta v_1)^2 + (\Delta v_2)^2} = \sqrt{2} \cdot 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 9{,}49\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A harmadik darab iránya mindkét repeszdarabbal 135°-os szöget zár be.

6. Egy kiskocsi és a hozzá rögzített töltött pisztoly együttes tömege 1,2kg. A kocsi $0{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel gurul. A pisztoly elsütésekor a lőporból képződő gáz a pisztoly csövéhez képest $50\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel repíti ki a 0,05kg tömegű pisztolygolyót. Mekkora lesz a lövés után a kocsi és a golyó sebessége?

Megoldás:

Adatok:

M = 1,2 kg; v_1 =0,8 m/s; m = 0,05 kg; u = 50 m/s.

u_1 = ?; u_2 = ?

A kölcsönhatás törvény szerint a két test között ható erőkre igaz:

$$F_1 = -F_2$$

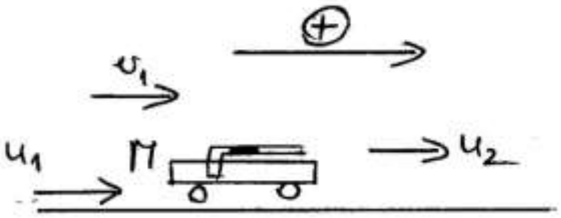
$$(M - m) \cdot \frac{\Delta u_1}{\Delta t} = -m \frac{\Delta u_2}{\Delta t}$$

$$(M - m) \cdot (u_1 - v_1) = m \cdot (v_1 - u_2) \qquad (1)$$

Használjuk fel, hogy a pisztolygolyó sebessége a csőhöz képest u: $u_2 = u_1 + u$.(2)

Az (1) és (2) egyenletekbe behelyettesítve és megoldva:

Az autó sebessége u_1 = -1,28 m/s, a pisztolygolyó sebessége u_2 = 48,72 m/s.



15. lecke Lendület, a lendületmegmaradás törvénye, lendülettétel

Feladatok:

1. Lehet-e egyenlő egy futball- és egy kosárlabda lendülete? Miért? Mi a feltétele ennek?

Megoldás:

Lehet, ekkor a két labdára a tömeg és sebesség szorzatának egyenlőnek kell lennie ($m_1v_1 = m_2v_2$).

2. Mekkora sebességgel halad az a személygépkocsi, amelynek a tömege 1000 kg és lendülete 15 000 $\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?

Megoldás:

Adatok:

m = 1 000 kg

I = 15 000 $\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

v =?

A lendületre vonatkozó összefüggésből:

$$v = \frac{I}{m} = \frac{15\,000\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1000\ \mathrm{kg}} = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A személygépkocsi sebessége 15 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

3. Egy eredetileg nyugvó 300 kg tömegű csónakból 2,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel vízbe ugrik egy 60 kg tömegű ember.

a) Mekkora és milyen irányú lesz ezután a csónak sebessége?

b) Mekkora erőlökés hat az emberre és a csónakra a kölcsönhatás során?

Megoldás:

Adatok:

M = 300 kg
m = 60 kg
$v_1 = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

a) v_2 = ?
b) $F \cdot \Delta t = ?$

a)
A csónak és az ember összes lendülete kiugrás előtt nulla. A csónak az ember sebességével ellentétes irányban indul el.
A csónak sebességének nagyságát a lendület-megmaradás törvényéből számíthatjuk ki.

$$0 = M \cdot v_2 - m \cdot v_1,$$

Ebből a csónak sebessége $v_2 = \frac{m}{M} \cdot v_1 = \frac{60\text{kg}}{300\text{kg}} \cdot 2{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A csónak sebességének a nagysága 0,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ lesz, iránya a vízbe ugró ember sebességének irányával lesz ellentétes.

b) A csónak és az ember között ható erőlökés nagysága:

$$F \cdot \Delta t = \Delta I = M \cdot v_2 (= m \cdot v_1) = 150\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4. Egy álló 55 kg tömegű görkorcsolyázó gyermekhez hátulról közeledik egy 45 kg tömegű, 4 m/s sebességgel haladó másik görkorcsolyázó, aki találkozáskor hátulról átkarolja az állót. Mekkora közös sebességgel haladnak tovább?

Megoldás:
Adatok:
m_1 = 55 kg
m_2 = 45 kg
v_2 = 4 m/s

u = ?

A két görkorcsolyázó találkozásakor rugalmatlan ütközés játszódik le. A lendület-megmaradás törvényét felírva:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$$

Mivel $v_1 = 0$, ezért

$$u = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

Behelyettesítve:

$$u = \frac{45\ \text{kg}}{55\ \text{kg} + 45\ \text{kg}} \cdot 4\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A görkorcsolyázók 1,8 m/s közös sebességgel haladnak tovább.

5. Egy görkorcsolyán álló tanulónak szemből 3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességű, 6 kg-os medicinlabdát dobunk. Mekkora sebességgel fog az 50 kg tömegű görkorcsolyázó haladni, miután elkapta a labdát?

Megoldás:

Adatok:

$v_1 = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$M = 50$ kg,

$\underline{m = 6\text{ kg}}$

$u = ?$

A medicinlabda eredeti mozgásirányát vesszük pozitívnak, ehhez viszonyítjuk a sebességek előjelét. A rugalmatlan ütközés játszódik le, így a lendületmegmaradás törvénye ($v = 0$):

$$M{\cdot}v + m{\cdot}v_1 = (M+m){\cdot}u.$$

Az u értéke: $u = 0{,}32\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A görkorcsolyázó 0,32 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad a medicinlabdával együtt.

6. Egy 0,2 kg tömegű játékautó, amelynek sebessége 0,4 m/s, utolér egy vele egy irányban haladó, 0,15 kg tömegű és 0,2 m/s sebességű kocsit. Ütközés után az elöl haladó kocsi sebessége 0,4 m/s lesz.

a) Mekkora hátsó játékautó sebessége?

b) Mekkora átlagos erő hatott a játék autókra a 0,1 s ideig tartó ütközésben?

Megoldás:

Adatok:

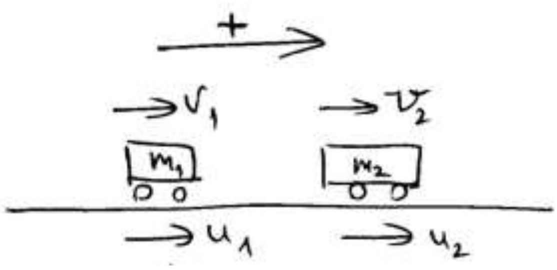
$m_1 = 0{,}2$ kg, $v_1 = 0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$m_2 = 0{,}15$ kg, $v_2 = 0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\underline{u_2 = 0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$

a) $u_1 = ?$

b) $F_{\acute{a}tl.} = ?\ \Delta t = 0{,}1$ s



32. ábra: Hogyan vesszük figyelembe a lendületek irányát, azaz vektor jellegét?

a)

Az m_1 tömegű test mozgásának irányát vegyük pozitív iránynak. Az ütközés tökéletesen rugalmasan játszódik le.

A lendület-megmaradás törvényét felírva:

$$m_1{\cdot}v_1 + m_2{\cdot}v_2 = m_1{\cdot}u_1 + m_2{\cdot}u_2$$

Behelyettesítve:

$$0{,}2\ \text{kg}\cdot 0{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}}+0{,}15\ \text{kg}\cdot 0{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}}=0{,}2\ \text{kg}\cdot u_1+0{,}15\text{kg}\cdot 0{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

amelyből $u_1 = 0{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Az m_1 tömegű játékautó az eredeti mozgásirányával ellentétesen u_1 = 0,25 m/s sebességgel halad.

b)

$$F_{átl.}=\frac{\Delta I_2}{\Delta t}=\frac{m_2\cdot(u_2-v_2)}{\Delta t}=0{,}3\ \text{N}$$

7. Egy házbontáshoz 150 kg-os faltörő ingát használnak. Az ingára függesztett vasgolyó előttünk jobbról balra haladva 2,5 m/s sebességgel halad át a mozgása legmélyebb pontján. Mennyi lesz lendületének megváltozása, míg balról jövet jobbra halad át a legmélyebb pontján?

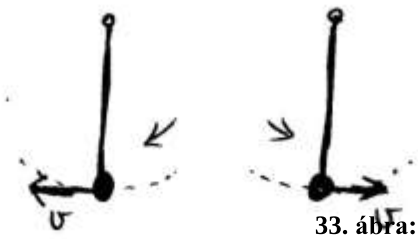
Megoldás:

Adatok:

M = 150 kg

$\upsilon = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

ΔI =?



33. ábra: A lendület „vissz

A lendületváltozás a sebesség irányának megváltozásából következik.

$$\Delta\bar{\upsilon}=\bar{\upsilon}-(-\bar{\upsilon})=2\bar{\upsilon}.$$

Így $\Delta\vec{I}=\text{m}\cdot\Delta\vec{\upsilon}=150\ \text{kg}\cdot 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}=750\ \ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A faltörő inga lendületváltozása $\Delta\vec{I}$ =750 $\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

16. lecke A dinamika alapegyenlete

Feladatok:

1. Mekkora és milyen irányú a testre ható erők eredője az alábbi esetekben?

a) A teherautó egyenes vonalú pályán egyenletesen gyorsul, majd egyenletes mozgást végez, végül lassul.

b) Ejtőernyős egyenletes sebességgel süllyed a Föld felé.

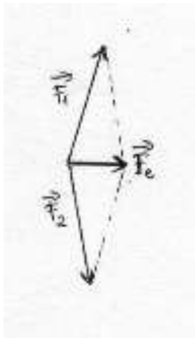
Megoldás:

Adatok:

a) Gyorsulás esetén az eredő erő a mozgás iránnyal megegyező. Egyenletes mozgásnál az eredő erő nagysága nulla. Lassulás esetén az eredő erő a mozgás irányával ellentétes.

b) Az eredő nagysága nulla.

2. Lehet-e a testre ható erők eredőjének nagysága kisebb, valamelyik összetevőjének nagyságánál? Rajzoljuk le!



34. ábra: Az eredő nagysága kisebb is lehet, mint bármelyik összetevő nagysága.

Megoldás:

A két erő egymással tompaszöget zár be, akkor az eredő erő kisebb valamelyik összetevőnél. Ha a két erő egyenlő nagyságú, ellentétes irányú, akkor az eredő nullvektor.

3. Egy csúzliból 40 g tömegű követ 400 m/s^2 gyorsulással lövünk ki, amikor a két gumiszál 60°-os szöget zár be egymással. Szerkesszük meg az eredőt, és számítással határozzuk meg a gumiszálakban ébredő erők nagyságát!

Megoldás:

Adatok:

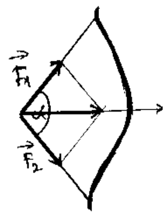
a = 400 m/s^2

α = 60°,

m = 40 g.

---

a = ?



Az $\vec{F}_1$ és $\vec{F}_2$ nyíl húrjaiban ható erők α = 60°-os szöget zárnak be egymással, így a kilövés irányával 30°-ot. A nyíl az eredő irányában gyorsul. Az ábrán látható szabályos háromszögek vizsgálatából következik, hogy $F_e = \sqrt{3}F$. Alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét: $\vec{F}_e = m \cdot \vec{a}$.

$$\sqrt{3}F = m \cdot a \Rightarrow F = \frac{m \cdot a}{\sqrt{3}} = 9{,}24 \text{ N.}$$

35. ábra: A nyílvesszőre F_1 és F_2 erők hatnak, mégis úgy gyorsul, mintha az eredő gyorsította volna.

4. Egy labdát egyszerre ketten értek el, és egymásra merőleges irányú 100 N és 300 N nagyságú erővel rúgtak bele. Határozd meg az eredő nagyságát, és szerkeszd meg az eredő irányát!

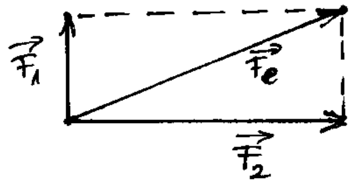
Megoldás:

Adatok:

F_1 = 100 N,
F_2 = 300 N
F_e = ?

Az eredő nagyságát Pitagorasz tétellel határozzuk meg.

$$F_e^2 = F_1^2 + F_2^2 \Rightarrow F_e = 316{,}2 \text{ N}.$$



36. ábra: Az eredő erő nagysága határozza meg a labda mozgásának irányát.

5. Az 1200 kg tömegű gépkocsink motorjának húzóerejét kívánjuk megmérni. Mérésünk szerint a jármű 36 km/h sebességről 54 km/h sebességre 8 s alatt gyorsult fel, és a mozgást akadályozó összes erőt 350 N erőre becsüljük. Mekkora húzóerőt fejtett ki a gépjármű motorja?

Megoldás:

Adatok:

m = 1200 kg

$v_1 = 36\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v_2 = 54\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

t = 8 s

$F_{ell} = 350 N$

F_h=?

37. ábra: A gépjárműre a motor húzóereje és a mozgást akadályozó erő hat.

A dinamika alapegyenlete alapján felírható, hogy

$$F_e = F_h - F_{ell}$$

Határozzuk meg a gépkocsi gyorsulását, majd a dinamika alapegyenletéből az eredő erő nagyságát.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{8\ \text{s}} = 0{,}625\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$F_e = m \cdot a = 1200\ \text{kg} \cdot 0{,}625\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 750\ \text{N}.$$

A húzóerő: $F_h = F_e + F_{ell}$.

Behelyettesítve:

$$F_h = 750\ \text{N} + 350\ \text{N} = 1\ 100\ \text{N}.$$

A gépjármű motorja 1 100 N húzóerőt fejt ki.

6. Egy folyóban lévő csónakot két gyerek húz. Egyik dél felé 110 N, Míg a másik nyugat felé 100 N erővel. A víz északi irányban 80 N erőt, míg a szél kelet felé 60 N erőt fejt ki. Ezen erők hatására a csónak 0,5 m/s^2 gyorsulással mozog.

a) Mekkora a csónak tömege?

b) Szerkeszd meg az eredő irányát!

Megoldás:

Adatok:

$F_D = 110$ N

$F_{NY} = 100$ N

$F_É = 80$ N

$F_K = 60$ N

$a = 0{,}5$ m/s^2

a) $m = ?$

b) $F_e = ?$

a) Az eredő erő nagyságát az ábra felhasználásával határozhatjuk meg.

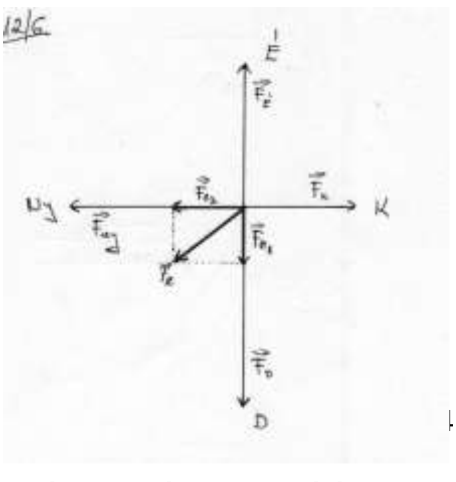
$$|F_e| = 50\ \text{N}.$$

A csónak tömegét a dinamika alapegyenletéből számíthatjuk ki.

$$m = \frac{F_e}{a} = \frac{50\,\text{N}}{0{,}5\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 100\ \text{kg}.$$

A csónak 100 kg tömegű.

b)



38. ábra: A csónak gyorsulását az eredő iránya határozza meg.

7. Egy 500 000 kg tömegű Airbus 380-as utasszállító repülőgépre felszállás közben a négy hajtóműve egyenként 340 000 N tolóerőt fejt ki. A haladási iránnyal ellentétesen a repülőgépre 260 000 N erő hat. Mekkora úton és mennyi idő alatt éri el az álló helyzetből induló repülőgép a 70 m/s felszállási sebességet?

Megoldás:

Adatok:

m = 500 000 kg

F_t = 340 000 N

F_{ell} = 260 000 N

v = 70 m/s

s = ?

t = ?

Az Airbusra ható tolóerő a négy hajtómű által kifejtett tolóerő összege:

$$F_t = 4 \cdot 340\,000\ \text{N} = 1\,360\,000\ \text{N}.$$

Az Airbusra ható erők eredője

$$F_e = F_t - F_{ell} = 1\,360\,000\ \text{N} - 260\,000\ \text{N} = 1\,100\,000\ \text{N}.$$

A dinamika alapegyenletéből meghatározzuk az Airbus gyorsulását:

$$a = \frac{F_e}{m} = \frac{1100\,000\,\text{N}}{500\,000\,\text{N}} = 2{,}2\ \text{m/s}^2.$$

A felszálláshoz szükséges idő:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{70\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 31{,}8\ \text{s}.$$

A felszálláshoz szükséges úthossz:

$$s = \frac{a}{2}t^2 = \frac{2{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}(31{,}8\ \text{s})^2 = 1\,113{,}6\ \text{m}.$$

Az álló helyzetből induló repülőgép 31,8 s alatt 1 113,6 m -es pályán éri el a felszálláshoz szükséges 70 m/s sebességet.

17. lecke   Nehézségi erő, súly és súlytalanság

Feladatok:

1. Egy lift $1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással indul felfelé. Mekkora erőt mutat a liftben álló 50 kg tömegű fiú lába alá helyezett szobamérleg?

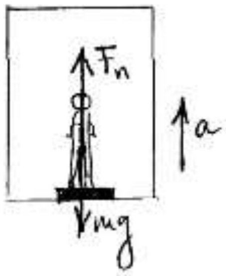
Megoldás:

Adatok:

$a = 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, felfelé

$m = 50\ \mathrm{kg}$

$F_n = ?$



39. ábra: Melyik erő a nagyobb: az F_n vagy az mg?

A lift felfelé indul, a dinamika alaptörvénye alapján:

$m \cdot a = F_n - m \cdot g.$

A szobamérleg által mutatott súly:

$$F_n = m \cdot g + m \cdot a = m \cdot (g + a).$$

Behelyettesítve:

$$F_n = 50\ \mathrm{kg} \cdot \left(10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 575\ \mathrm{N}.$$

A szobamérleg 575 N nagyságú erőt mutat.

2. Mekkora gyorsulással és merre indul az a lift, amely egy 120 kg tömegű szekrény súlya 950 N?

Megoldás:

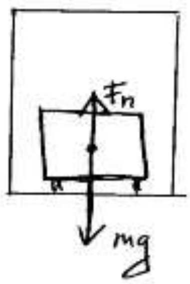
Adatok:

$m = 120$ kg

$F_n = 900\ \mathrm{N}$

$a = ?$

A szekrény súlya „normál” körülmények között 1200 N. Mivel a liftben mért súly kisebb, mint a „normál”, ezért a lift lefele mozog.



A dinamika alaptörvényét felírva:

$$m \cdot a = m \cdot g - F_n.$$

Behelyettesítve:

$$a = \frac{1200\,\mathrm{N} - 900\,\mathrm{N}}{120\ \mathrm{kg}} = 2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

40. ábra: Milyen erők hatnak a bútorra?

A lift lefele mozog $2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással.

3. Egy kötél maximális terhelése (szakítószilárdsága) 840 N. Legfeljebb mekkora gyorsulással mászhat rajta felfelé egy 70 kg tömegű ember?

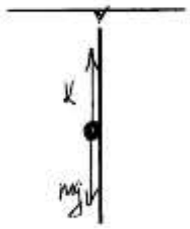
Megoldás:

Adatok:

m = 70 kg
$K = 840\ \mathrm{N}$

---

a = ?



41. ábra: A K erő mire fordítódik? Miért nagyobb, mint az mg?

Az ember felfelé gyorsul a kötélen, így az emberre ható erők eredője felfelé mutat. A dinamika alaptörvénye alapján:

$$F_e = K - m \cdot g.$$

A gyorsulás:

$$a = \frac{K - m \cdot g}{m} = \frac{840\mathrm{N} - 700\mathrm{N}}{70\ \mathrm{kg}} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A kötélen legfeljebb 2 $\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással mászhat felfelé egy 70 kg tömegű ember.

4. Egy 800 N súlyú ember összecsavart lepedőből font függőleges kötélen menekül az égő ház emeletéről.

a. Hogyan kell leereszkednie anélkül, hogy a kötél elszakadna, ha a kötél maximális terhelése 700 N?

b. Mekkora sebességgel érkezik le, ha az emelet magassága 4 m?

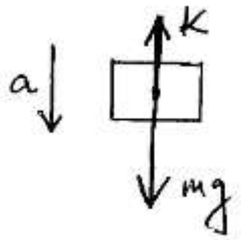
Megoldás:

Adatok:

mg = 800 N;
h = 4 m
$K_{\max} = 700\ \mathrm{N}$

---

a) a = ?
b) v = ?



42. ábra: Függeszkedhet-e egy helyben ezen a kötélen az ember?

a) Az embernek egy minimális gyorsulással kell lefele ereszkednie, hogy ne szakadjon el a kötél.

A dinamika alaptörvénye alapján:

$$ma = m \cdot g - K_{max}.$$

A gyorsulás nagysága:

$$a_{\min} = \frac{m \cdot g - K_{\max}}{m}.$$

Behelyettesítve:

$$a = \frac{800\ \mathrm{N} - 700\ \mathrm{N}}{80\ \mathrm{kg}} = 1{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Az embernek legalább $1{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással kell süllyednie, hogy ne szakadjon el a kötél.

b)

$$a_{\min} = 1{,}25 \frac{m}{s^2}.$$

A mozgás egy kezdősebesség nélküli egyenletesen gyorsuló mozgás.

$$v_{\min} = \sqrt{2a \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 1{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4\ \mathrm{m}} = 3{,}16\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A földet érés sebessége legalább $3{,}16\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

5. Egy liftben a lift mennyezetéhez *m* és *M* tömegű testeket függesztünk az ábra szerint. Mekkora erő hat az egyes fonalakban, ha a lift $a = 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással halad felfelé?

Megoldás:

Adatok:

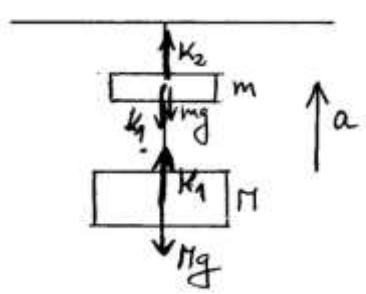
$a = 1{,}5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$m = 5$ kg

$M = 8\ \mathrm{kg}$

$K_1 = ?$

$K_2 = ?$



43. ábra: Mekkora az egyes köteleket feszítő erő?

Az *M* tömegű testre ható erők: K_1 és Mg.

Az *m* tömegű testre ható erők: K_1, K_2 és mg.

Mindkét testre felírjuk a dinamika alapegyenletét:

(1) $m \cdot a = K_2 - K_1 - m \cdot g$

(2) $M \cdot a = K_1 - M \cdot g$

(2)-ből

$$K_1 = M \cdot (g + a),$$

(1)-ből

$$K_2 = K_1 + m \cdot (g + a) = (m + M) \cdot (g + a).$$

Behelyettesítve:

$$K_1 = 92 \text{ N},$$

$$K_2 = 149{,}5 \text{ N}.$$

6. Egy 60 kg tömegű ember a párizsi Eiffel torony kilátójának második emeletéről belép a liftbe és rááll egy rugós mérlegre. A lift indulásakor azt látja, hogy a mérleg 5 s-ig 480 N erőt mutat, azután 12,5 s-ig 600 N erőt, majd 5 s-ig 720 N erőt. Ekkor a lift megáll, az utas kilép belőle.

a) Az Eiffel-torony földszintjére vagy a 3. emeletére érkezett-e a látogató, ha a földszint és a második emelet szintkülönbsége egyenlő a második és a harmadik emelet szintkülönbségével?

b) Milyen magasan van az Eiffel-torony 3. emelete?

Megoldás:

Adatok:

$m = 60$ kg,

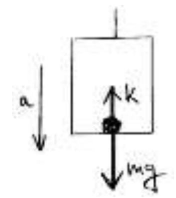
$t_1 = 4$ s, $K_1 = 480$ N,

$t_2 = 12{,}5$ s, $K_2 = 600$ N,

$t_3 = 4$ s, $K_3 = 720$ N.

a) Hová érkezett a lift?

b) h = ?



44. ábra: Lefelé mozgó liftben a nehézségi erőnél kisebb erő hat a lift padlójára.

A mozgás első szakaszára a mozgásegyenletet felírva:

$$ma_1 = mg - K_1.$$

Behelyettesítve:

$$a_1 = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ iránya lefelé mutat.}$$

a) Az Eiffel-torony földszintjére érkezett a lift, hisz először gyorsul lefelé, majd a végén gyorsul felfelé.

b) Az első szakazon megtett út és végsebesség:

$$s_1 = \frac{a_1}{2} \cdot t^2 = 16 \text{ m},$$

$$v = a_1 \cdot t_1 = 8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A középső szakaszon egyenes vonalú egyenletes mozgást végez a liftben álló ember.

$$K_2 = mg = 600 \text{ N}.$$

A megtett út:

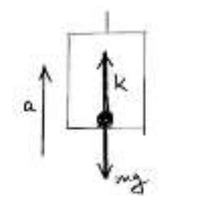
$$s_2 = v \cdot t_2 = 8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 12{,}5 \text{ s} = 100 \text{ m}.$$

A mozgás harmadik szakaszára felírva a mozgásegyenletet:

$$Ma_3 = K_3 - mg.$$

Ebből:

$$a_3 = 2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ iránya felfelé mutat.}$$



45. ábra: A függőlegesen felfelé gyorsuló mozgást végző emberre milyen erők hatnak?

Az harmadik szakazon megtett út:

$$s_3 = \frac{a_3}{2} \cdot t_3^2 = 16 \text{ m},$$

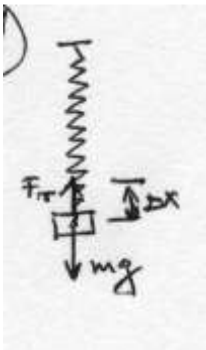
A harmadik emelet magassága:

$$\Sigma s = 2 \cdot (s_1 + s_2 + s_3) = 264 \text{ m}.$$

18. lecke A rugóerő

Feladatok:

1. Mekkora annak a rugónak a rugóállandója, amelyet egy 100 N súlyú test 5 cm-rel nyújt meg? Milyen irányú a fellépő rugóerő?



46. ábra: A rugóerő és a nehézségi erő hatására egyensúlyban van a felfüggesztett test.

Megoldás:

Adatok:

$G = 100$ N,

$\underline{\Delta x = 5 \text{ cm} = 0{,}05 \text{ m}}$

$D = ?$, $F_r = ?$

Newton II. törvénye értelmében a rugó megnyúlását okozó nehézségi erő a rugóerővel tart egyensúlyt:

$$F_r - mg = 0.$$

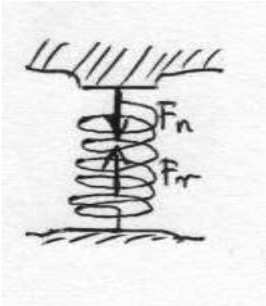
A rugóállandót az $F_r = - D \cdot \Delta x$ összefüggésből számíthatjuk ki:

$$D = \frac{F_r}{\Delta x} = \frac{100\ \mathrm{N}}{0{,}05\ \mathrm{m}} = 2\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

A rugóerő a rugóra ható erővel ellentétes irányú, azaz a rugóerő a megnyúlással ellentétes irányban lép fel.

2. Egy vasúti mozdony egy-egy lengéscsillapítójára 3 000 kg teher jut. Mekkora a lengéscsillapítóban használt rugó rugóállandója, ha a mozdony súlya miatt 3 cm-t nyomódik össze?

Megoldás:
Adatok:
m = 3 000 kg
Δx = 3 cm = 0,03 m
D = ?



47. ábra: A lengéscsillapítóra kifejtett nyomóerő egyensúlyt tart a rugóerővel.

A lengéscsillapítóra a mozdony F_n nyomóereje hat: F_n = 30 000 N.
Az mg nehézségi erő tart egyensúlyt a rugó által kifejtett F_r rugóerővel.

$$F_n = F_r$$

A rugóállandó nagysága az $F_r = -D\cdot\Delta x$ lineáris erőtörvényből a következőképpen számítható ki:

$$D = \frac{F_r}{\Delta x} = \frac{F_n}{\Delta x}.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$D = \frac{30000\,\mathrm{N}}{0{,}03\,\mathrm{m}} = 10^6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

A lengéscsillapítóban használt rugóállandó $10^6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

3. Egy 200 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ rugóállandójú rugóra felfüggesztünk egy 2 kg tömegű testet. Mekkora lesz a rugó megnyúlása, ha a ráakasztott test nyugalomban van?

Megoldás:
Adatok:
$D = 200\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$
m = 2 kg
Δx = ?

Newton II. törvénye értelmében a rugóban ébredő erő tart egyensúlyt a 2 kg tömegű testre ható nehézségi erővel, vagyis

$$mg - D\cdot\Delta x = 0.$$

A rugó megnyúlása:

$$\Delta x = \frac{mg}{D} = \frac{20\,\text{N}}{200\,\frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0{,}1\ \text{m}.$$

A rugó 0,1 m-re nyúlik meg, ha a test nyugalomban van.

4. Egy rugóra akasztott test a Földön 36 cm-rel nyújtja meg a rugót. Mennyire nyújtaná meg a rugót a Holdon ugyanez a test?

Megoldás:
Adatok:
Δx_F = 36 cm = 0,36 m
Δx_H = ?

A Holdon a testek súlya hatoda a Földön mértnek, vagyis $G_H = \frac{1}{6} \cdot G_F$. Ez azt jelenti, hogy a Holdon a rugót a rugóra akasztott test hatod annyira nyújtja meg, vagyis Δx_H = 6 cm-re.

5. Egy 500 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ és egy 1000 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ rugóállandójú dinamométert összeakasztunk, majd széthúzzuk őket. A kisebb rugóállandójú erőmérő 10 N erőt mutat.

a) Mekkora erőt mutat a másik? Mekkora az egyes rugók megnyúlása?
b) Mekkora rugóállandójú rugóval lehetne helyettesíteni a két rugót?

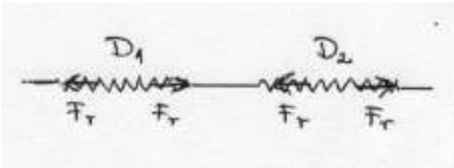
Megoldás:
Adatok:

$D_1 = 500\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$,

$D_2 = 1000\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$,

F_1 = 10 N

a) F_2 = ?
b) D_e =?



48. ábra: Az egyes rugókban fellépő rugóerők egyenlőek egymással.

a)
Newton III. törvénye értelmében a nagyobb rugóállandójú erőmérő is 10 N nagyságú erőt mutat: ($F = F_1 = F_2$)
Az egyes rugók megnyúlását az $F = -D \cdot \Delta x$ összefüggéssel számítjuk ki.

$$\Delta x_1 = \frac{F}{D_1} = \frac{10\ \text{N}}{500\ \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0{,}02\ \text{m},$$

$$\Delta x_2 = \frac{F}{D_2} = \frac{10\ \text{N}}{1000\ \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0{,}01\ \text{m}.$$

A másik rugóban is 10 N nagyságú erő hat. A két rugó megnyúlása rendre 0,02 m és 0,01 m.
b)
A helyettesítő rugóban szintén 10 N ébred, és a megnyúlás $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 0{,}03$ m.

A helyettesítő rugó rugóállandója: $D_e = \frac{F}{\Delta x} = \frac{10\ \text{N}}{0{,}03\ \text{m}} = 333{,}3\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

6. Egy 100 N/m és egy 200 N/m rugóállandójú rugót párhuzamosan kötünk egymással. A rugók függőlegesek, és azonos hosszúságúak. A végükre helyezett, mindvégig vízszintes pálcát 30 N erővel húzunk.

a) Mekkora a rugók megnyúlása? Mekkora erőt fejtenek ki az egyes rugók?

b) Mekkora rugóállandójú rugóval lehetne helyettesíteni a két rugót?

Megoldás:

Adatok:

$D_1 = 100\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$,

$D_2 = 200\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$,

$\underline{F = 30\ \mathrm{N}}$

a) $\Delta x_1 = ?$, $\Delta x_2 = ?$, $F_1 = ?$, $F_2 = ?$

b) $D_e = ?$

a) A két rugó egyenlő mértékben nyúlik meg ($\Delta x_1 = \Delta x_2$), mivel a pálca mindvégig vízszintes marad. Az $F = 30$ N húzóerő egyenlő a két rugó által kifejtett erő összegével: $F = F_1 + F_2$.

Mivel $F_1 = D_1 \cdot \Delta x$ és $F_2 = D_2 \cdot \Delta x$, így

$$F = D_1 \cdot \Delta x + D_2 \cdot \Delta x = (D_1 + D_2) \cdot \Delta x.$$

A rugók megnyúlása az adatok behelyettesítése után:

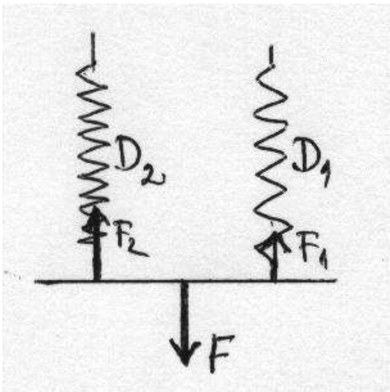
$$\Delta x = 0{,}1\ \mathrm{m}.$$

Az egyes rugók által kifejtett erők nagysága:

$$F_1 = D_1 \cdot \Delta x = 100\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}1\ \mathrm{m} = 10\ \mathrm{N},$$

$$F_2 = D_2 \cdot \Delta x = 200\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}1\ \mathrm{m} = 20\ \mathrm{N}.$$

A rugók 0,1 m-re nyúlnak meg a 30 N húzóerő hatására. Az egyes rugókban 10 N illetve 20 N nagyságú erő ébred.



49. ábra: Az F húzóerővel a két rugóban ébredő erő eredője tart egyensúlyt.

b) A két rugót olyan rugóállandójú rugóval lehet helyettesíteni, amelynek pontosan ugyanakkora a megnyúlást hoz létre, mint az előző kettő.

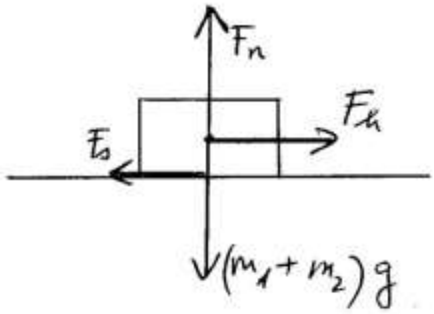
A rugóerőre vonatkozó $F = -D \cdot \Delta x$ összefüggés alapján:

$$D_e = \frac{F}{\Delta x} = \frac{30\,\mathrm{N}}{0{,}1\mathrm{m}} = 300\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

Egy 300 N/m rugóállandójú rugóval lehet helyettesíteni a két rugót.

19. lecke Súrlódás

1. Mekkora vízszintes irányú húzóerővel kell húznunk az egyenletes sebességgel mozgó szánkót a havon, ha a szánkó és a gyermek együttes tömege 35 kg? A szánkó és a hó közötti csúszási súrlódási együttható 0,1.



50. ábra: Az egyenletes mozgatáshoz miért van szükség húzóerőre?

Megoldás:

Adatok:

$m_1 + m_2 = 35$ kg,
$\mu = 0{,}15$.

A F_h húzóerővel az F_s csúszási súrlódási erő tart egyensúlyt.

$$F_s = \mu \cdot (m_1 + m_2) \cdot g = 52{,}5 \text{ N}.$$

Tehát $F_h = 52{,}5$ N.

A szánkót 52,5 N vízszintes irányú erővel kell húznunk.

2. Egy $m = 80$ kg tömegű össztömegű szánt 100 N vízszintes irányú erővel húzzuk. A szán talpa és havas út közötti csúszási súrlódási együttható 0,1.

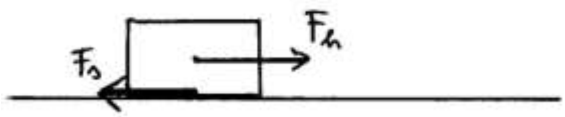
a) Mekkora gyorsulással mozog a szán a húzóerő hatására?
b) Mekkora végsebességet ér el 8 másodperc alatt?

Megoldás:

Adatok:

$m = 80$ kg
$F_h = 100$ N
$\mu = 0{,}1$
$t = 8$ s

a) $a = ?$
b) $v = ?$



51. ábra: Mire fordítódik a húzóerő és a súrlódási erő nagyságának különbsége?

a) A testre vízszintes irányban az F_h húzóerő és az F_s súrlódási erő hat.

A súrlódási erő nagysága:

$$F_s = \mu \cdot F_h = \mu \cdot mg = 0{,}1 \cdot 80 \text{ kg} \cdot 10 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 80 \text{ N}.$$

Az F_h és F_s eredője hozza létre a test gyorsulását:

$$m \cdot a = F_h - F_s.$$

A gyorsulás:

$$a = \frac{F_h - F_s}{m}.$$

Behelyettesítve:

$$a = \frac{100\mathrm{N} - 80\mathrm{N}}{80\mathrm{kg}} = 0{,}25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A szán 0,25 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással mozog 100 N erő hatására.

b) A végsebesség a v = a·t összefüggéssel számítható.

$$v = a \cdot t = 0{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 8\ \mathrm{s} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A szán 2 m/s végsebességet ér el 8 s alatt.

3. Azt figyeltük meg, hogy a sík jégen 3 m/s sebességgel ellökött korong 4 másodperc múlva áll meg. Mekkora csúszási súrlódási együttható?

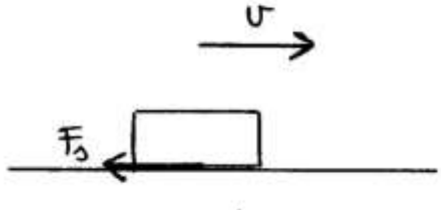
Megoldás:

Adatok:

$v = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$t = 4\ \mathrm{s}$

$\mu = ?$



52. ábra: A jégkorongra ható súrlódási erő milyen irányú a sebesség irányához képest?

A korongot a súrlódási erő lassítja.

$$F_e = F_s \Rightarrow m \cdot a = \mu \cdot m \cdot g \quad \Rightarrow \quad a = \mu \cdot g.\ (1)$$

A korong gyorsulása:

$$a = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{\left|0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right|}{4\ \mathrm{s}} = 0{,}75\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

(1)-be helyettesítve:

$$\mu = \frac{a}{g} = \frac{0{,}75\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}075.$$

A korong és a jég közötti csúszási súrlódási együttható értéke 0,075.

4. Egy kosárlabdázó cipőjének talpa és a sportcsarnok padlója közötti tapadási súrlódási együttható 1,1. Mekkora gyorsulással indulhat meg egy kosárlabdázó magcsúszás nélkül?

Megoldás:

Adatok:

$\mu_0 = 1{,}1$

$a = ?$

A kosárlabdázó a tapadási súrlódási erő maximumát ($F_{t.max}$) fejheti ki induláskor, amely egyben az eredő is.

$$F_e = F_{t,max},$$

$$m \cdot a = \mu_0 \cdot m \cdot g.$$

Innét

$$a = 11\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A kosárlabdázó akár 11 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással is indulhat megcsúszás nélkül.

5. Legalább mekkora erővel lehet megmozdítani egy 120 kg tömegű szekrényt, amelynek tapadási súrlódási együtthatója 0,7?

Megoldás:

Adatok:

m = 120 kg

$\underline{\mu_0 = 0{,}7}$

F = ?

A szekrény megmozdításához a tapadási súrlódási erő maximumánál nagyobb erőt kell kifejtenünk.

$$F_{t,max} = \mu_0 \cdot m \cdot g = 0{,}7 \cdot 120\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 840\ \mathrm{N}.$$

A szekrény megmozdításához 840 N-nál nagyobb erőre van szükség.

6. Egy 4 gramm tömegű revolvergolyót 280 m/s sebességgel lövünk bele egy fahasábba, amelyben 5 cm mélyen egyenletesen lassulva megáll. Mekkora a golyó lassulását okozó súrlódási erő nagysága?

Megoldás:

Adatok:

$m = 4\ \mathrm{g} = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}$,

$v = 280\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,

$\underline{d = 5\ \mathrm{cm} = 0{,}05\ \mathrm{m}}$

F_s = ?

Először kiszámítjuk a revolvergolyó lassulását az 5 cm-es úton a v = $\sqrt{2 \cdot a \cdot s}$ összefüggéssel.

$$a = \frac{v^2}{2 \cdot s} = \frac{(280\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2 \cdot 0{,}05\mathrm{m}} = 7{,}84 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A revolvergolyóra a fahasábban csak a súrlódási erő hat, amely egyben az eredő erő is, így

$$m \cdot a = F_s.$$

A súrlódási erő nagysága:

$$F_s = m \cdot a = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 7{,}84 \cdot 10^5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3136\ \text{N}.$$

A golyó lassulását okozó súrlódási erő nagysága 3136 N.

7. A teherautón bútorokat szállítanak. A bútorok és a teherautó platója között a tapadási súrlódási együttható 0,4. Mekkora maximális gyorsulással indulhat a teherautó? Mekkora az a minimális út, amely alatt a bútorok megcsúszása nélkül a teherautó elérheti az 54 km/h sebességet?

Megoldás:

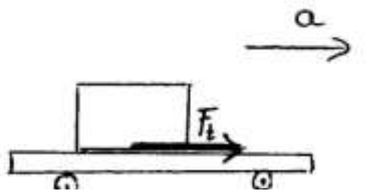
Adatok:

$v = 54\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\mu_t = 0{,}4$

a_{max} =?

s =?



53. ábra: Milyen irányú erő gyorsítja a bútorokat? Hogyan nevezzük ezt az erőt?

A bútorokat a tapadási súrlódási erő gyorsítja.

Így: $m \cdot a_{max} = \mu_0 \cdot mg.$

A maximális gyorsulás: $a_{max} = 4\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

A gyorsítás időtartama: $t = \frac{v}{a} = \frac{15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3{,}75\ \text{s}.$

A megtett út az $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ képlettel számítható.

Behelyettesítve:

$$s = \frac{4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot (3{,}75\ \text{s})^2 = 28{,}125\ \text{m}.$$

A maximális úthossz 28,125 m.

8. Parafa és üveg között a tapadási súrlódási együttható 0,3. A dugót 60 N erővel sikerült kihúzni az üvegből. Mekkora erővel lépett fel az üveg és a parafa között?

Megoldás:

Adatok:

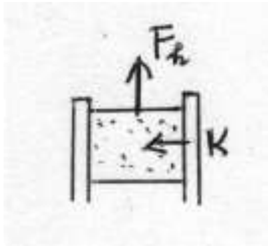
$\mu_0 = 0{,}3$,

$\underline{F_h = 60\text{ N.}}$

$K = ?$

A parafa dugóra az üveg szájával párhuzamos irányban F_h erővel hatunk. Erre az F_h húzóerőre merőleges az üveg és a parafa között fellépő a parafát az üvegbe szorító K erő. Ez a K erő egyben a fellépő tapadási súrlódási erő is. A K erő körkörösen fellép az üveg és a parafa érintkezési határán, mi egyszerűsítés miatt az ábrán egy helyen az teljes parafára ható nyomóerőt jelöljük.

Ezért az üveg és parafa közötti K erő az F_n felületre merőleges nyomóerő.



54. ábra: A húzóerő nagyságát az üveg oldalirányú nyomóereje határozza meg.

$$F_h = \mu \cdot K \Rightarrow K = \frac{F_h}{\mu} = \frac{60\text{ N}}{0{,}3} = 200\text{ N}.$$

Az üveg és a parafa között 200 N nagyságú erő lépett fel.

9. Mérési feladat. Határozzuk meg egy fahasáb és az asztallap közötti csúszási súrlódási együtthatót dinamométer segítségével!

Szükséges eszközök:

- fahasáb
- dinamométer
- szögmérővel ellátott, állítható hajlásszögű lejtő

A mérés fizikai alapjai:

A testek mozgása közben az érintkező felületek között csúszási súrlódási erő lép fel. Ha a test csúszik az alátámasztásként használt felületen, akkor a súrlódási erő (F_s) egyenesen arányos a felületeket merőlegesen egymáshoz nyomó erővel (F_n), és függ a felületek anyagi minőségétől, azaz

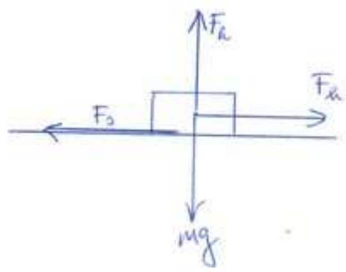
$$\mu = F_s/F_n.$$

A μ az összefüggésben szereplő csúszási súrlódási együttható.

A mérés menete:

a) Súrlódási együttható mérése vízszintes felületen való csúszás esetén

Először a dinamométer segítségével lemérjük a fahasáb súlyát, vagyis a fahasábra ható nehézségi erőt. Ezután a fahasábot helyezzük vízszintes deszkalapra. A hasábot mozgassuk a deszkalapon úgy, hogy állandó sebességgel mozogjon. Ekkor a fahasábra ható erők eredője zérus, ugyanis a testre ható húzóerő (F_h) a



55. ábra: Vízszintes talajon lévő testre ható erők

súrlódási erővel (F_s), míg a testre ható nehézségi erő (mg), a testre ható az alátámasztásból származó kényszererővel (F_n) tart egyensúlyt. A dinamométer tehát éppen a súrlódási erő nagyságával egyenlő nagyságú erőt mutat.

A mérési eredményeket foglaljuk táblázatba:

	$mg = F_n$	$F_h = F_s$	$\mu = F_s / F_n$
1.			
2.			
3.			
átlag	-------	-----------	

b) Súrlódási együttható meghatározása lejtőn

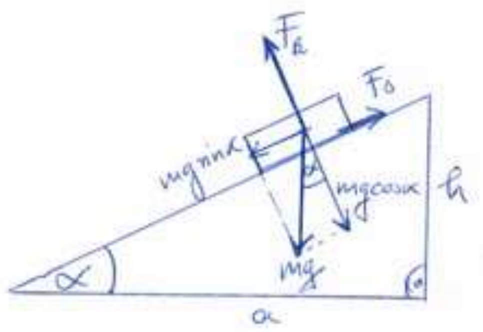
A fahasábot egy változtatható hajlásszögű lejtőre helyezzük, majd a lejtő végét addig emeljük, amíg a fahasáb egyenletes mozgással csúszni kezd.(Mivel a tapadási súrlódási együttható értéke nagyobb, mint a csúszási súrlódási együttható értéke, ezért a fahasábot kis lökéssel kell megindítani. Azt a helyzetet kell megkeresnünk, amelynél kis lökéssel való indítás után magától „magától" is egyenletesen mozog a fahasáb.)

Az egyenletes mozgáshoz tartozó szöget a lejtőre szerelt szögmérővel mérhetjük meg.

Egyenletes mozgás esetén a lejtőn a fahasábra ható erők eredője zérus.

A testre ható erők:

- a testre ható a nehézségi erő (mg),
- az alátámasztás – lejtő - által kifejtett kényszererő (F_k),
- súrlódási erő (F_s).



56. ábra: Lejtőn lévő testre ható erők felbontása lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges összetevőkre

A lejtőn lévő testre felírva a mozgásegyenleteket:

$$0 = F_k - mg \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

$$0 = mg \cdot \sin\alpha - F_s \qquad (2)$$

A felületeket egymáshoz nyomó erő nagysága: $F_n = F_k = mg \cdot \cos\alpha$.

Az egyenletekből a súrlódási tényezőt felírva:

$$\boldsymbol{\mu} = F_s / F_n = mg\sin\alpha / mg\cos\alpha = \mathbf{tg\alpha}.$$

Mivel tgα = *h/s,* ahol *h* a lejtő magassága, míg *a* a lejtő alapja, ezért a $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{h/a}$ összefüggéssel is számolhatunk.

A mérési eredményeinket táblázatba foglaljuk:

α (fok)	μ = tgα
középérték:	

h (cm)	*a* (cm)	$\mu = h/a$
	középérték:	

10. Az m = 200 kg tömegű rakomány egy M = 2500 kg tömegű kisteherautón fekszik. A plató és a rakomány közötti tapadási súrlódási együttható értéke $\mu_0 = 0,3$. Számítsuk ki, hogy a kisteherautó motorja mekkora maximális húzóerőt fejthet ki a gépkocsira, hogy a rakomány meg ne csússzon a platón?

Megoldás:

Adatok:
m = 200 kg,
M = 2500 kg,
$\underline{\mu_0 = 0,3.}$
F_h = ?

57. ábra: Hogyan vesszük figyelembe, hogy a húzóerőnek van függőleges irányú komponense?

I. megoldás:

Berajzoljuk a két testre ható erőket. A m tömegű rakományt a tapadási súrlódási erő gyorsítja, míg a M tömegű gépkocsira az F_h húzóerő és az F_t tapadási súrlódási erő ellenereje hat. Írjuk fel a mozgás irányába eső mozgásegyenleteket.

$$M \cdot a = F_h - F_t$$
$$\underline{m \cdot a = F_t}$$

Az egyenletrendszerből:

$$(M+m) \cdot a = F_h.$$

A tapadási súrlódási erő maximuma:

$F_{t,max} = \mu_0 \cdot mg$, amely a m tömegű test maximális gyorsulásakor lép fel.

Ebből következik, hogy:

$$m \cdot a = F_{t,max} = \;\Rightarrow\; m \cdot a = \mu_0 \cdot mg \;\Rightarrow\; a = \mu_0 \cdot g.$$

Ezt az F_h húzóerő kifejezésébe behelyettesítve:

$$F_h = (M+m) \cdot a = \mu_0 \cdot (M+m) \cdot g.$$

II. megoldás:

Amennyiben F_h elegendően kicsi a rakomány megcsúszásához a két test együtt mozog. Ebben az esetben mindkét test gyorsulása azonos:

$$a = \frac{F_h}{M+m}.$$

A rakományt a M tömegű test gyorsításakor a m tömegű testre ható F_t tapadási súrlódási erő gyorsítja. Ennek nagysága:

$$F_t = m \cdot a = m \cdot \frac{F_h}{M+m}. \quad (1)$$

Láthatjuk, hogy az F_h növekedésével az F_t tapadási súrlódási erő is növekszik. Ez azonban nem nőhet minden határon túl, a maximális értéke:

$$F_{t,max} = \mu_0 \cdot F_n = \mu_0 \cdot mg. \quad (2)$$

Az (1) és (2)-ből összevetéséből következik, hogy:

$$\mu_0 \cdot mg = m \cdot \frac{F_h}{M+m}.$$

Innen pedig

$$F_h = \mu_0 \cdot (M+m) \cdot g.$$

Az adatokat behelyettesítve: a kisteherautó motorja 8100 N maximális húzóerőt fejthet ki a gépkocsira.

11. Egy tengerparti matrózkocsmában a csapos egy 0,9 másodpercig tartó, 14 N erejű lökéssel küldi a matrózok elé a sört. Mekkora sebességre gyorsul fel a korsó, ha a söröskorsó tömege 2 kg, a pult súrlódási együtthatója pedig 0,2? Milyen messzire csúszik el a korsó?

Megoldás:

Adatok:
t = 0,9 s,
F = 14 N,
m = 2 kg,
$\underline{\mu = 0{,}2.}$
v = ?
s = ?

A testre ható erők:
1. nehézségi erő,
2. F_h tolóerő,
3. F_s súrlódási erő,
4. pult nyomóereje.

Osszuk a mozgást két részre: az első szakaszon gyorsítjuk a korsót, majd a második szakaszon egyenletesen lassul.

I. szakasz:

Az erők hatására vízszintes irányban gyorsul a korsó, míg függőleges irányú elmozdulás nincs. A mozgásegyenletek:

$$ma_1 = F_t - F_s$$
$$\underline{0 = F_n - mg}$$

A súrlódási erő: $F_s = \mu \cdot mg$ = 4 N.

A gyorsulás:

$$a_1 = \frac{F_t - F_s}{m} = \frac{14\ N - 4\ N}{2\ kg} = 5\ \frac{m}{s^2}.$$

A korsó legnagyobb sebességét a gyorsítás végén éri el:

$$v = a_1 \cdot t = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}9\text{s} = 4{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ez alatt megtett út:

$$s_1 = \frac{a_1}{2} \cdot t^2 = \frac{5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot 0{,}81\ \text{s}^2 = 2{,}025\ \text{m}.$$

II.szakasz:

A korsó elengedése után a korsóra csak a súrlódási erő hat.

Ekkor a lassulása:

$$a_2 = \frac{F_e}{m} = \frac{F_s}{m} = \frac{4\ \text{N}}{2\ \text{kg}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A megállásig szükséges idő:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{4{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2{,}25\ \text{s}.$$

A megállásig megtett út:

$$s_2 = \frac{a_2}{2} \cdot t^2 = \frac{2\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (2{,}25 s)^2 = 5{,}0625 m.$$

A korsó teljes útja:

$$s = s_1 + s_2 = 2{,}025\text{m} + 5{,}0625\text{m} = 7{,}0875\ \text{m} \approx 7{,}1\ \text{m}.$$

12. Egy $90\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladó személygépkocsi akadályt vesz észre maga előtt. A gépkocsi nedves aszfalton fékez, a gépkocsik kerekei és az aszfalt közötti tapadási súrlódási együttható értéke 0,6.

a) Mennyi idő alatt tud megállni, ha a kerekek nem csúsznak meg?
b) Mekkora utat tesz meg a megállásig?
c) Rajzold fel a megtett utat az idő, majd a sebesség függvényében is!

Megoldás:

Adatok:

$v = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\mu_0 = 0{,}6$

a) t = ?
b) s = ?
c) s-t grafikon

a) A gépkocsit kerekei megcsúszás nélkül maximális tapadást biztosítanak, így a tapadási súrlódási erő lassítja a gépkocsit

A dinamika alapegyenlete szerint:

$$m \cdot a = \mu_0 \cdot mg,$$

$$a = 0{,}6 \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A megálláshoz szükséges idő a $v = a \cdot t$ képletből számítható.

$$t = \frac{v}{a} = \frac{25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4{,}167\ \text{s}.$$

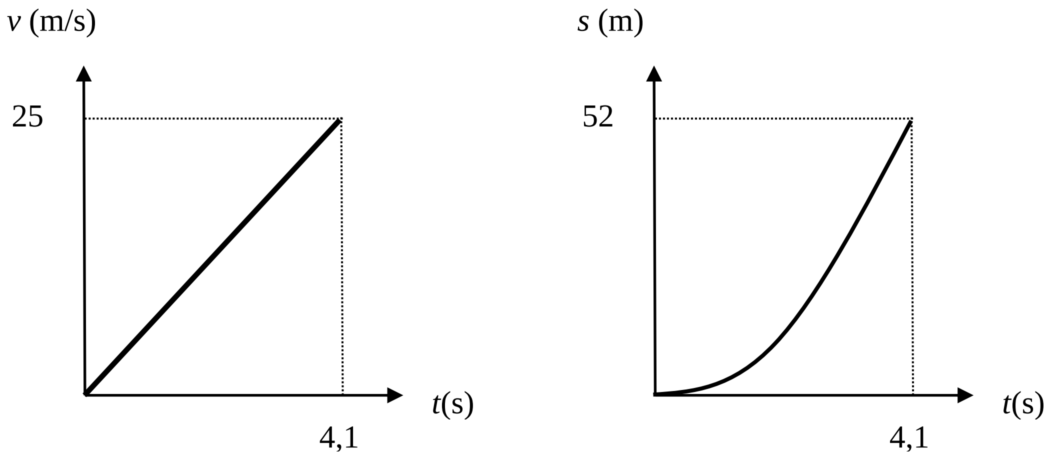
A gépkocsi 4,167 s alatt tud megállni, ha a kerekek nem csúsznak meg.

b) Az egyenletes lassulás az $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ összefüggéssel is számítható (mintha nyugalomból indulva v sebességre gyorsulna):

$$s = \frac{6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot 17{,}36\ \mathrm{s}^2 = 52{,}083\ \mathrm{m}.$$

A gépkocsi a megállásig 52,083 m utat tesz meg.

c)



58. ábra: Egyenletesen lassuló gépkocsi megtett sebesség-idő és út- idő grafikonjai

20. lecke Szabaderők, kényszererők

Feladatok:

1. Egy 30°-os hajlásszögű lejtőn áll egy utasával együtt 75 kg tömegű szánkó. Mekkora lejtővel párhuzamos erővel kell tartani a szánkót, ha:

a. a súrlódási együttható értékét elhanyagoljuk?

b. a tapadási súrlódási együttható értéke 0,15?

Megoldás:

Adatok:

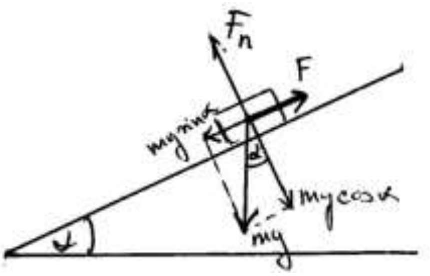
m = 75 kg,

$\alpha = 30^\circ$

a) F = ? ha $\mu = 0$,

b) F = ? ha $\mu = 0{,}15$.

a) A szánkóra ható erők: nehézségi erő, talaj nyomóereje és az F húzóerő. Írjuk fel a lejtő síkjával párhuzamos és arra merőleges irányban a mozgásegyenleteket:



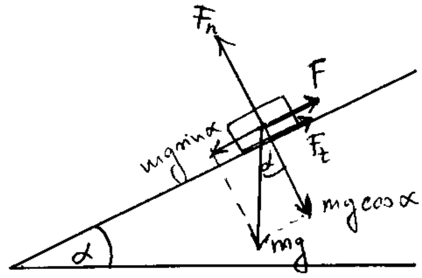
$$\left.\begin{aligned} F - mg\sin\alpha &= 0, \\ F_n - mg\cos\alpha &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Az F erőre kapjuk, hogy F = 375 N.

59. ábra: A szánkó egy helyben tartásához a húzóerővel a nehézségi erő lejtőirányú összetevőjét egyensúlyozzuk . .

b) A testre ható erők: nehézségi erő, lejtő nyomóereje, húzóerő és a tapadási súrlódási erő.
Először megnézzük, hogy elindul-e a szánkó, ha magára hagyjuk a lejtőn. Ezt a testre ható nehézségi erő lejtő irányú összetevője és a tapadási súrlódási erő eredője határozza meg.
$mg\sin\alpha$ = 375 N,
$F_t = \mu_0\, mg\cos\alpha$ = 97,42 N.
A két erő eredője a lejtővel párhuzamosan lefelé mutat, azért a test elindul, ha magára hagyjuk.
A mozgásegyenletek:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= mg\sin\alpha - F_t - F \\ 0 &= F_n - mg\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$



60. ábra: A tapadási súrlódási erő mindig a testre ható erő irányával ellentétes.

Az első egyenletből:

$$F = mg\sin\alpha - F_t = 277{,}58 \text{ N}.$$

2. Egy 30°-os hajlásszögű lejtőn utasával együtt egy 40 kg tömegű szán csúszik lefelé. A lejtő és a szán talpa között a súrlódási együttható 0,1.
a. Mekkora a súrlódási erő és a lejtő szánkóra kifejtett kényszerője?
b. Mekkora a lejtőn lecsúszó test gyorsulása?
c. Mekkora sebességgel ér le az 5m hosszú lejtő aljára?

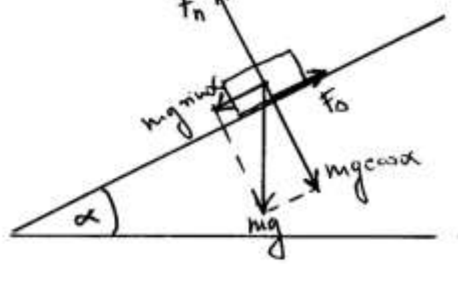
Megoldás:
Adatok:
α = 30°
m = 40 kg,
$\underline{\mu = 0{,}1.}$
a) F_s = ?, F_n = ?
b) a = ?
c) v = ?, ha l = 5m.

a) A testre ható erők: nehézségi erő, lejtő nyomóereje, súrlódási erő.
A súrlódási erő: $F_s = \mu mg\cos\alpha$.
Behelyettesítve:

$$F_s = 34{,}64 \text{ N}, \; K = mg\cos\alpha = 346{,}4 \text{ N}.$$

b) A mozgásegyenleteket lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges irányokban írjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} ma &= mg\sin\alpha - F_s \\ 0 &= F_n - mg\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$



Az első egyenletből:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,$$

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

61. ábra: Mely erők hozzák létre a lejtőn lefelé mozgó test re ható eredő erőt?

Behelyettesítve:

$$a = 5{,}86\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

c) A sebesség a lejtő hosszával felírva:

$$v = \sqrt{2al} = 7{,}65\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

3. Egy 30°-os hajlásszögű lejtőn egy 40 kg tömegű ládát húzunk egyenletes sebességgel felfelé a lejtő síkjával párhuzamos erővel. Mekkora ez a húzóerő, ha a láda és a lejtő között a súrlódási együttható értéke 0,2?

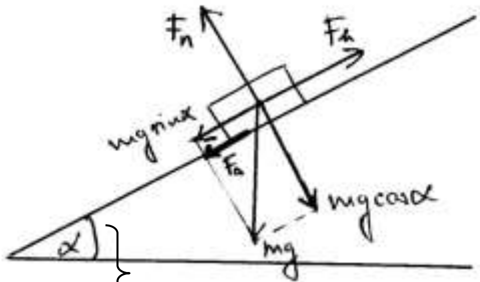
Megoldás:

Adatok:

$\alpha = 30°$,
$m = 40$ kg,
$\underline{\mu = 0{,}2.}$
$F_h = ?$

A ládát egyenletes sebességgel húzzuk a lejtőn felfelé, ezért a lejtővel párhuzamos F_h húzóerő és a nehézségi erő lejtőirányú összetevőjének és a súrlódási erőnek az eredője nulla.
A lejtőre merőleges irányban a lejtő K nyomóereje és a nehézségi erő lejtőre merőleges összetevője tart egyensúlyt.

$$0 = F_h - mg\sin\alpha - F_s$$
$$0 = F_n - mg\cos\alpha.$$



62. ábra: Lejtőn felfelé irányuló mozgás esetén merre mutat a súrlódási erő?

A súrlódási erő:

$$F_s = \mu \cdot F_{ny} = \mu mg\cos\alpha = 69{,}3\ \mathrm{N}.$$

Az (1) egyenletből:

$$F_h = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = mg\cdot(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Behelyettesítve:

$$F_h = 400\cdot\left(0{,}5 + 0{,}2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 269{,}3\ \mathrm{N}.$$

4. Egy 30°-os hajlásszögű lejtőre 5 kg tömegű vödröt helyezünk, és a lejtővel párhuzamosan 50 N nagyságú erővel húzzuk felfelé, 1,2 s-on át. Mekkora lesz a megtett út és a végsebesség, ha a $\mu = 0{,}25$?

Megoldás:

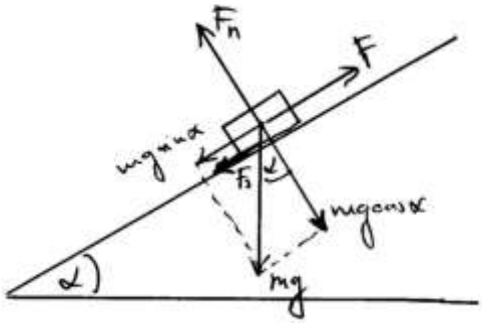
Adatok:

$\alpha = 30°$,
$m = 5$ kg,
$F = 50$ N,
$t = 1{,}2$ s,
$\underline{\mu = 0{,}25.}$
a) $s = ?$
b) $v = ?$

A lejtőre helyezett testre ható erők: nehézségi erő, lejtő nyomóereje, F húzóerő és a súrlódási erő.

A mozgásegyenleteket a lejtővel párhuzamos és a lejtőre merőleges irányokban írjuk fel.

$$\left.\begin{aligned} ma &= F - mg\sin\alpha - F_s, \\ 0 &= F_n - mg\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$



63. ábra: Az eredő erő a lejtővel párhuzamosan felfelé mutat.

A súrlódási erő: $F_s = \mu mg\cos\alpha$.
Az első mozgásegyenletbe beírva:

$$ma = F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha.$$

Behelyettesítve: $a = 2{,}83\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A megtett út: $s = \frac{a}{2} \cdot t^2 = 2{,}04$ m.

A végsebesség: $v = \sqrt{2as} = 3{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

5. Egy 30°-os hajlásszögű lejtőn 4 s alatt csúszik le egy láda súrlódás nélkül. Mennyi idő alatt ér le a láda a lejtő aljára, ha a csúszási súrlódási együttható értéke 0,3?

Megoldás:

Adatok:

$\alpha = 30°$,
$\underline{t_1 = 4 \text{ s súrlódás nélkül}}$
$t_2 = ?$, ha $\mu = 0{,}3$.

a) Mozgásegyenletek:

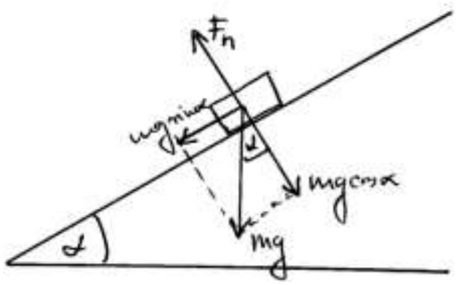
$$\left.\begin{aligned} ma &= mg\sin\alpha, \\ 0 &= F_n - mg\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

A gyorsulás:

$$a = g\sin\alpha = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A lejtő hossza:

$$l = \frac{a}{2} \cdot t^2 = 40 \text{ m}.$$



64. ábra: Súrlódásmentes esetben lejtőn lefelé az eredő erőt a nehézségi erő lejtővel párhuzamos összetevője adja.

b) $\mu = 0{,}3$,
A testre ható erők:
nehézségi erő, F_s súrlódási erő és a F_n lejtő nyomóereje.
Mozgásegyenletek:

$$\left.\begin{array}{l} ma = mg\sin\alpha - F_s, \\ 0 = K - mg\cos\alpha \end{array}\right\}$$

Az első egyenletből:

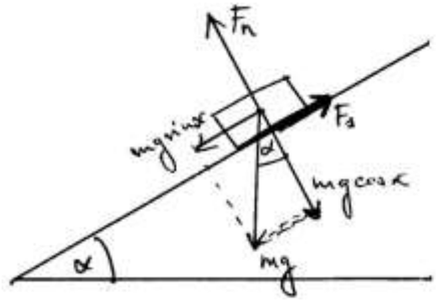
$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,$$
$$a = g\cdot(\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha).$$

Behelyettesítve:

$$a = 2{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A leérkezésig eltelt idő:

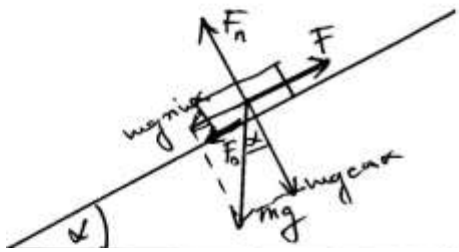
$$l = \frac{a}{2}\cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\cdot l}{a}} = 5{,}77\ \mathrm{s}.$$



65. ábra: Milyen irányú lesz a súrlódási erő?

6. Egy testet 5 N állandó erővel tudunk egyenletesen felfelé húzni α = 30° hajlásszögű lejtőn. Ugyanezen a lejtőn lefelé szabadon csúszva a test 5 $\frac{m}{s}$ sebességről 5 m hosszú úton áll meg. Mekkora a test tömege és mekkora a csúszási súrlódási együttható?
(2007. évi emelt szintű fizika írásbeli érettségi vizsga 3. feladata)

Megoldás:
Adatok:
$F_h = 5$ N,
$\alpha = 30°$,
$v = 5$ m/s,
$\underline{s = 5\ \mathrm{m}.}$
$m = ?$
$\mu = ?$



66. ábra: Merre mutat a súrlódási erő, ha felfelé ill. lefelé halad a test?

A testre ható húzóerő: $F_h = 5$N.
A nehézségi erő lejtővel párhuzamos összetevője: $mg\cdot\sin\alpha$, a lejtőre merőleges összetevője $mg\cdot\cos\alpha$.
A súrlódási erő mindkét irányú mozgás esetén: $F_s = \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha$.
Tekintsük pozitív iránynak a lejtővel párhuzamosan felfelé, és lejtőre merőlegesen felfelé mutató irányt.

A mozgásegyenletek felfelé és lefelé mozgásra is felírjuk.
Ha a test felfelé mozog:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = F - mg\cdot\sin\alpha - \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha, \\ 0 = F_n - mg\cdot\cos\alpha. \end{array}\right\}$$

Ha a test lefelé mozog:

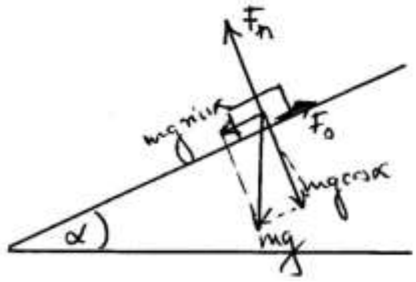
$$\left.\begin{array}{l} ma = mg\cdot\sin\alpha - \mu\cdot mg\cdot\cos\alpha, \\ 0 = F_n - mg\cdot\cos\alpha. \end{array}\right\}$$

Először vegyük azt az esetet, amikor a test lefelé mozog.
A lejtőn lefelé mozgás során a test egyenes vonalú egyenletesen lassuló mozgást végez, amelyre érvényes az $v = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}$ összefüggés. Ez felhasználva a test lassulásának nagysága:

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\left(5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 5\ \text{m}} = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tehát a gyorsulás:

$$a = -\ 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



67. ábra: Lejtővel párhuzamos irányban az eredő erőt a nehézségi erő lejtő irányú összetevője és a súrlódási erő határozza meg.

Mivel lefelé mozgáskor a test lassul, így a lejtővel párhuzamos mozgásegyenlet (a gyorsulás értékét előjelesen írjuk be):

$$ma = mg \cdot \sin\alpha - \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha.$$

Ebből μ értéke:

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nézzük a lejtővel párhuzamosan felfelé mozgást! A mozgásegyenletből a tömeget tudjuk meghatározni.

$$0 = F - mg \cdot \sin\alpha - \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha,$$

Behelyettesítve:

$$m = 0{,}4\ \text{kg}.$$

Megjegyzés:
Az érettségi vizsga útmutatója a feladat megoldását munkatétellel oldja meg. A munkatétel fogalmának elsajátítása után a feladatot azzal a módszerrel is oldjuk meg.

21. lecke Egyenletes körmozgás dinamikai leírása

Feladatok:

1. A mosógép centrifugájának fordulatszáma $15\frac{1}{\text{s}}$. Mekkora a centripetális gyorsulása a 20 cm sugarú centrifugadobra tapadó ruhadarabnak? Mekkora a 2,5 kg tömegű ruhára ható erők eredője?

Megoldás:
Adatok:

$f = 15\frac{1}{s}$
r = 20 cm = 0,2 m
m = 2,5 kg

a_{cp}=?

A ruhadarab kerületi sebessége:

$$v = \omega \cdot r = 2\pi \cdot f \cdot r = 2\pi \cdot 15\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m} = 18{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(18{,}85\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0{,}2\ \mathrm{m}} = 1776{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A ruhára ható erők eredője:

$$F_{cp} = m \cdot a_{cp} = 2{,}5\ \mathrm{kg} \cdot 1777\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4\,441{,}5\ \mathrm{N}.$$

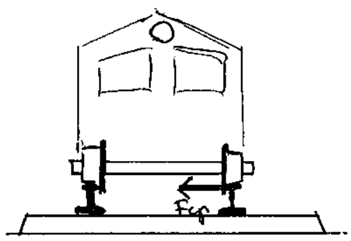
A mosógép centrifugájának centripetális gyorsulása 1776,6 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a ruhára ható erők eredője 4 441,5 N.

2. Egyenes pályán 162 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ sebességgel haladó Intercity egy 500m sugarú kanyarhoz közeledik. A mozdony tömege $1{,}2 \cdot 10^5$ kg. Mekkora centripetális erőt kell létrehoznia a sínpályának?

Megoldás:
Adatok:
$v = 162\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,
r = 500 m,

$m = 1{,}2 \cdot 10^5\,\mathrm{kg}$.

K = ?



68. ábra: A vonat kerekére csak a külső sínszál fejti ki a körpályán maradáshoz szükséges kényszererőt.

A körpályán tartáshoz szükséges centripetális erőt a sínszál által a kerék peremére kifejtett oldalirányú erő szolgáltatja.

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r} = 1{,}2 \cdot 10^5\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\left(45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{500\ \mathrm{m}} = 4{,}86 \cdot 10^5\,\mathrm{N}.$$

Ugyanekkora erővel nyomja a kerék pereme oldalirányban a sínszálat.

3. Egy 2500 kg tömegű kisteherautó $54\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel 100 m sugarú kanyarhoz közeledik. Legalább mekkora súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy a kanyarban a kisteherautó meg ne csússzon?

Megoldás:

Adatok:

m = 2500 kg,

$v = 54\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

r = 100 m.

μ=?

Az autónak a körpályán tartásához $F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$ centripetális erőre van szükség. Ezt a centripetális erőt a kerekekre oldalirányban ható a kerekek és a talaj között fellépő tapadási súrlódási erő szolgáltatja.

A tapadási súrlódási erőre fennáll, hogy $F_{t\max} \le \mu_0 mg$, ezért

$$F_{cp} \le F_{t\max},$$

$$m \cdot \frac{v^2}{r} \le \mu_0 mg.$$

Ebből:

$$\frac{v^2}{r \cdot g} \le \mu_0 .$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$\mu_0 \ge \frac{v^2}{r \cdot g} = \frac{\left(15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{100\ \text{m} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}225.$$

A tapadási súrlódási együtthatónak legalább 0,225-nek kell lennie.

4. Mekkora erővel nyomja a híd közepét a hídon $90\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel áthaladó 1150 kg tömegű Suzuki, ha a hídpálya egy 150 m sugarú körívnek tekinthető?

Megoldás:

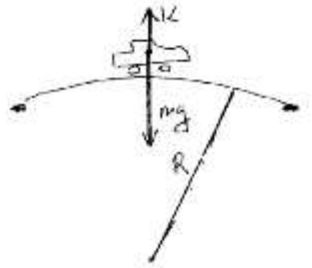
Adatok:

$v = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

m = 1200 kg

$\underline{r = 150\ \text{m}}$

K' =?



69. ábra: Az autóra ható *K* kényszererő mikor kisebb, nagyobb vagy egyenlő a nehézségi erővel?

A Suzukira az *mg* nehézségi erő és a híd által a járműre kifejtett *K* nyomóerő hat. A két erő eredője hozza létre a kör középpontja felé mutató centripetális erőt.

$$F_{cp} = mg - K,$$

$$K = mg - F_{cp} = mg - m\frac{v^2}{r} = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right).$$

Behelyettesítve:

$$K = 1200\ \text{kg} \cdot \left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - \frac{\left(25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{150\ \text{m}}\right) = 7000\ \text{N}.$$

A híd 7000N erővel nyomja az autót, ugyanekkora erővel nyomja az autó is a hidat: K' = 7000 N.

5. Egy Boeing 747-es kétszintes utasszállító repülőgép vízszintes síkú köríven fordul délről nyugatra. A gép törzsének sebessége 540 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a szárnyvégek távolsága 70 m.

a. Mekkora a gép törzse által befutott körív sugara, ha a szárnyvégek kerületi sebességei úgy aránylanak egymáshoz, mint 70:71?
b. Mennyi ideig fordul a gép?
c. Mekkora a gép törzsének centripetális gyorsulása?
d. Mekkora a gép törzsére ható erők eredője, azaz a centripetális erő, ha a tömege $3{,}6 \cdot 10^5$ kg?

Megoldás:

Adatok:

$v = 540\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 150\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$m = 3{,}6 \cdot 10^5$ kg

$\underline{d = 70\ \text{m}}$

a) r = ?

b) t = ?

c) a_{cp} = ?

d) F_{e} = ?

a) A két szárnyvég pályasugara r_1 és $r_2 = r_1 + d$, míg sebessége v_1 és v_2.
A szárnyak szögsebessége egyenlő:

$$(\omega=)\ \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}.$$

Ebből $r_1 = 4900$ m, míg $r_2 = 4970$ m.
A géptörzs pályaívének sugara $r = 4935$ m.

b) A gép a fordulás ideje alatt $\frac{1}{4}$ körívet tesz meg, amelyhez 150 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel t idő szükséges. A kerületi sebességre felírható:

$$v_k = \frac{\frac{2 \cdot 4935\ \mathrm{m} \cdot \pi}{4}}{t},\ \text{ahonnan}$$

$$t = 51{,}68\ \mathrm{s}.$$

c) A centripetális gyorsulás $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$, amelybe behelyettesítve: $a_{cp} = 4{,}56\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

d) A centripetális erő nagysága:

$$F_{cp} = m \cdot a_{cp} = 3{,}6 \cdot 10^5\ \mathrm{kg} \cdot 4{,}56\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1{,}64 \cdot 10^6\ \mathrm{N}.$$

A géptörzs sugara 4935 m, a gép fordulási ideje 51,68 s.

A gép centripetális gyorsulásának nagysága 4,56 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a centripetális erő nagysága $1{,}64 \cdot 10^6$ N.

7. Függőleges síkban 200m sugarú körpályán $162\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ sebességgel halad egy műrepülőgép. Mekkora erővel nyomja a 60kg tömegű pilóta az ülését a körpálya legfelső és legalsó pontjában?

Megoldás:

Adatok:

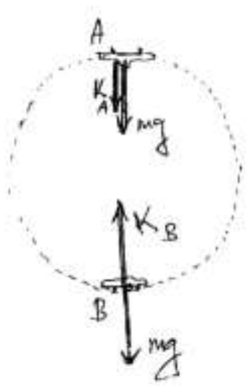
$v = 162\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

r = 200 m

$m = 60\ \mathrm{kg}$

K_A =?

K_B =?



70. ábra: A legfelső az ülés a pilóta felett, míg a legalsó pontban az ülés a pilóta alatt helyezkedik el.

A pilótára a nehézségi erő és az ülés által kifejtett nyomerő hat.

A legfelső pontban:

A legfelső pontban a pilótára ható mindkét erő lefele mutat.

Így $$F_{cp} = mg + K_A$$

amelyből $$K_A = m\frac{v^2}{r} - mg = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right).$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$K_A = 60\ \text{kg} \cdot \left(\frac{\left(45\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{200\ \text{m}} - 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 7{,}5\ \text{N}.$$

A legalsó pontban:

A legalsó pontban a pilótára a nehézségi erő lefelé, míg az ülés nyomóereje a kör középpontja felé mutat. Az eredőjük hozza létre a centripetális erőt, amely a kör középpontja felé mutat:

$$F_{cp} = K_B - mg,$$

amelyből

$$K_B = m \cdot \frac{v^2}{r} + mg = m\left(\frac{v^2}{r} + g\right).$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$K_B = 60\ \text{kg} \cdot \left(\frac{\left(45\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{200\ \text{m}} + 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1207{,}5\ \text{N}.$$

22. lecke A Newton-féle gravitációs (tömegvonzási) törvény

Feladatok:

1. Mekkora gravitációs vonzóerő hat a Föld és a Nap között, ha tudjuk, hogy távolságuk 150 millió km, a Föld tömege $6{\cdot}10^{24}$ kg, a Nap tömege $2{\cdot}10^{30}$ kg?

Megoldás:

Adatok:

r = 150 millió km = $1{,}5{\cdot}10^8$ km = $1{,}5{\cdot}10^{11}$ m,
$m = 6{\cdot}10^{24}$ kg,
$M = 2{\cdot}10^{30}$ kg.

F = ?

A gravitációs vonzóerő:

$$F = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{\left(1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}\right)^2} = 3{,}55 \cdot 10^{22}\ \text{N}.$$

A Nap és a Föld között a gravitációs erő nagysága $3{,}55{\cdot}10^{22}$ N.

2. A Nap–Föld távolság 150 millió km, és a Nap tömege $2\cdot10^{30}$ kg. Mekkora a Föld kerületi sebessége, ha feltételezzük, hogy a Föld megközelítőleg körpályán kering a Nap körül?

Megoldás:

Adatok:

r = 150 millió km = $1{,}5\cdot10^{8}$ km = $1{,}5\cdot10^{11}$m,
$M = 2\cdot10^{30}$ kg.

v_k = ?

A gravitációs vonzóerő tartja a Földet a Nap körüli körpályán:

$$m \cdot a_{cp} = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2}.$$

$$\frac{v_k^2}{r} = \gamma \frac{M}{r^2}$$

$$v_k = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = 29{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

3. A Mars tömege 0,1-szerese a Föld tömegének, sugara fele a Föld sugarának. Mekkora a nehézségi gyorsulás a Mars felszínén? Mekkora gravitációs erő hatott a 410 kg-os Phoenix űrszondára a Mars felszínén?

Megoldás:

Adatok:

$M_{\text{Föld}} = 6\cdot10^{24}$ kg,

$M_{\text{Mars}} = 0{,}1\cdot M_{\text{Föld}} = 6\cdot10^{23}$ kg,

$$R_{Mars} = \frac{R_{Föld}}{2} = 3185\ \text{km} = 3{,}185\cdot10^{6}\ \text{m}.$$

g_{Mars} = ?

Egy bolygó felszínén lévő a m tömegű testre ható mg nehézségi erő egyenlő a gravitációs erővel.

$$mg = \gamma \frac{m \cdot M}{R^2}.$$

Ebből

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

A Mars felszínén a g értéke:

$$g_M = \gamma \cdot \frac{0{,}1M}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = 0{,}4\gamma \cdot \frac{M}{R^2} = 0{,}4 \cdot g_{Föld}.$$

A Mars felszínén a gravitációs gyorsulás 0,4-szerese a földinek, értéke $g_{Mars} = 3{,}92\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

A gravitációs vonzóerő az űrszonda és a Mars között:

$$F_g = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2} \cdot \frac{410 kg \cdot 6 \cdot 10^{23} kg}{\left(3{,}185 \cdot 10^6 m\right)^2} = 1617 N.$$

$$\text{(Vagy: } F_g = m \cdot g_{Mars} = 1609\ \mathrm{N}\text{.)}$$

A Mars felszínén a nehézségi gyorsulás 3,92 $\dfrac{m}{s^2}$.

A gravitációs vonzóerő 1617 N, (vagy 1609 N).

4. A Hold átmérője 3400 km, tömege 7,5·10^{22} kg. Az Apollo–11 űrhajó a Hold felszíne felett 100 km magasságban keringett a Hold körül. Mennyi volt a keringési ideje?

Megoldás:

Adatok:

$2R$ = 3400 km

h = 100 km

M_{Hold} = 7,5·10^{22} kg,

T = ?

Az űrhajó a Hold körül egyenletes körmozgást végez. Ennek dinamikai feltétele:

$$F_{gr.} = m \cdot a_{cp}$$

$$\gamma \cdot \frac{Mm}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

Ebből a T keringési időt kifejezve, és felhasználva, hogy $r = R + h$ = 1800 km:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{\gamma M}} = 287\,827\ s$$

A műhold keringési ideje kb. 80 óra.

5. A Nap sugara 700 000 km. Felszínén a gravitációs gyorsulás 274 $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Mekkora a Nap tömege és átlagos sűrűsége?

Megoldás:

Adatok:

R = 700 000 km = 7·10^5 km

$g_{\text{Nap}} = 274\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$M_{\text{Nap}} = ?$

$\rho_{\text{Nap}} = ?$

A Nap felszínén lévő képzeletbeli m tömegű testre ható nehézségi erő és a gravitációs erő egyenlő.

$$mg = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$M = \frac{R^2 \cdot g}{\gamma} = \frac{\left(7 \cdot 10^8\ \text{m}\right)^2 \cdot 274\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\ \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}} = 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}.$$

A Nap átlagos sűrűsége:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi} = \frac{2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{\frac{4}{3} \cdot \left(7 \cdot 10^8\ \text{m}\right)^3 \cdot \pi} = 1\,392\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

A Nap tömege $2 \cdot 10^{30}$ kg, a Nap átlagos sűrűsége 1 392 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

6. A Jupiter – és egyben a Naprendszer - legnagyobb Holdját, a Ganümédészt Galileo Galilei fedezte fel 1610-ben. A Ganümédész átmérője 5260 km, sűrűsége $1942\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Mekkora a nehézségi gyorsulás a hold felszínén, ha a keringési ideje 7,155 nap? Mely égitesteket nevezzük Galilei-holdaknak?

Megoldás:

Adatok:

$r = 2630$ km $= 2{,}63 \cdot 10^6$ m,

$\rho = 1942\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$,

$T = 7{,}155$ nap.

$g = ?$

Először a Ganymedes térfogatát, majd tömegét kell meghatároznunk.

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = 7{,}62 \cdot 10^{19}\,\text{m}^3.$$

$$m = \rho \cdot V = 1942\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 7{,}62 \cdot 10^{19}\ \text{m}^3 = 1{,}48 \cdot 10^{23}\ \text{kg}.$$

A Ganymedes felszínén a gravitációs gyorsulás $g = \gamma \cdot \frac{m}{r^2}$.

Behelyettesítve:

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{1{,}48 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}}{\left(2{,}63 \cdot 10^6\ \mathrm{m}\right)^2} = 1{,}42\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A Jupiter négy legnagyobb holdját Galilei-holdaknak nevezzük. A holdak nevei: Io, Európa, Ganümédész, Kallisztó. A holdakat Galileo Galilei fedezte fel.

8. Függőleges síkban egy 1,2 m-es fonálra erősített teniszlabdát forgatunk. Mekkora fordulatszámmal forgatjuk a labdát, ha elengedéskor a sebesség iránya függőlegesen felfelé mutat, es elengedés után 2 s múlva a labda sebessége 5 m/s lesz?

Megoldás:

Adatok:

r = 1,2 m

t = 2 s

$v = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

---

f = ?

a) Az elengedés után a teniszlabda függőlegesen felfelé irányuló hajítást végez. A sebességére a $v = v_0 - gt$ összefüggés érvényes.

A kezdősebesség:

$$v_0 = v + g \cdot t = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2\ \mathrm{s} = 25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) Elengedés előtt a teniszlabda egyenletes körmozgást végez: $v = v_0$.

A fordulatszám a $v = 2r \cdot \pi f$ összefüggésből számítható:

$$f = \frac{v_0}{2r \cdot \pi} = \frac{25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2 \cdot 1{,}2\ \mathrm{m} \cdot \pi} = 3{,}3\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

23. lecke Mesterséges égitestek

Feladatok:

1. A Nemzetközi Űrállomás un. alacsony Föld körüli pályán, 360 km magasságban kering a Föld felszíne felett a Föld körül. Az űrállomás tömege 400 tonna. Határozzuk meg, hogy mekkora gravitációs erő hat a Föld és az űrállomás között!

Megoldás:

Adatok:

$r = R + h = 6370\ \text{km} + 360\ \text{km} = 6{,}73 \cdot 10^6\ \text{m}$,

$m = 4 \cdot 10^5\ \text{kg}$

$M = 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$

$F_{gr} = ?$

Az űrállomás és a Föld között fellépő $F = \gamma \dfrac{mM}{r^2}$ gravitációs erő értéke kb. $4{,}42 \cdot 10^6\ \text{N}$.

2. A Nemzetközi Űrállomás egy 400 tonnás szerkezet, amely 360 km magasságban 92 perc alatt kerüli meg a Földet. Mekkora gravitációs gyorsulás hat a Nemzetközi Űrállomáson tartózkodó űrhajósra?

Megoldás:

Adatok:

$r = R + h = 6370\ \text{km} + 360\ \text{km} = 6{,}73 \cdot 10^6\ \text{m}$

$T = 92\ \text{min} = 5520\ \text{s}$

$m = 4 \cdot 10^5\ \text{kg}$

$a = ?$

Az űrállomás és a Föld között fellépő $F = \gamma \dfrac{mM}{r^2}$ gravitációs biztosítja a centripetális gyorsulást:

$$F_{gr} = \gamma \frac{mM}{r^2} = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

A gravitációs gyorsulás:

$$\frac{F_{gr}}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = 8{,}72\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

3. Az egyik Galilei–hold, az Io 424 000 km sugarú pályán kering a Jupiter körül. Mekkora a Jupiter tömege, ha az Io keringési ideje 1,77 nap?

Megoldás:

Adatok:

$r_{\mathrm{Io}} = 424\,000$ km $= 4{,}24\cdot 10^5$ km $= 4{,}24\cdot 10^8$ m,

$T_{\mathrm{Io}} = 1{,}77$ nap $= 152\,928$ s.

$M_{\mathrm{Jupiter}} = ?$

Az Io pályájának kerületi sebessége $v = \dfrac{2r\pi}{T}$ alapján számítható.

$$v_{Io} = \frac{2r\pi}{T} = \frac{2\cdot 4{,}24\cdot 10^8\ \mathrm{m}\cdot\pi}{152928\ \mathrm{s}} = 17420\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 17{,}42\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Az Io és a Jupiter között fellépő gravitációs vonzás adja a körpályán tartáshoz szükséges centripetális erőt.

$$m\frac{v^2}{r} = \gamma\frac{m\cdot M}{r^2},$$

amelyből
$$M = \frac{v^2\cdot r}{\gamma} = 1{,}92\cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}.$$

A Jupiter tömege $1{,}92\cdot 10^{27}$ kg, amely 318-szor nagyobb a Föld tömegénél.

4. Egy másik Jupiter hold, a Callisto keringési ideje 16,7 nap. Milyen messze van a Jupitertől? A Jupiter tömegét vedd a Négyjegyű függvénytáblázatból!
(1 882 000km)

Megoldás:

Adatok:

$T = 16{,}7$ nap $= 1{,}44\cdot 10^6$ s,

$M = 318\cdot 6\cdot 10^{24}$ kg $= 1{,}91\cdot 10^{27}$ kg

$r = ?$

A Callisto körpályán kering a Jupiter körül, kerületi sebessége $v = \dfrac{2r\pi}{T}$ összefüggéssel számítható. A Callisto körpályán tartásához szükséges centripetális erőt a gravitációs erő biztosítja.

$$m\frac{v^2}{r} = \gamma\frac{m\cdot M}{r^2} \qquad (1)$$

Az (1) összefüggésbe a $v = \dfrac{2r\pi}{T}$ -t behelyettesítve és egyszerűsítve:

$$\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{T^2} = \gamma \cdot M.$$

A körpálya sugara:

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma \cdot MT^2}{4\pi^2}}.$$

Behelyettesítve:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 1{,}91 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(1{,}44 \cdot 10^6\,\mathrm{s}\right)^2}{4\pi^2}} = 1{,}88 \cdot 10^9\,\mathrm{m} = 1{,}88 \cdot 10^6\,\mathrm{km}.$$

A Callisto 1 888 000 km távolságra van a Jupitertől.

5. A Föld első mesterséges holdját, a Szputnyik–1-et 1957-ben állították Föld körüli pályára. Egy fordulatot 96 perc 10 másodperc alatt tett meg.
a) Mekkora volt az űrhajó szögsebessége?
b) Milyen magasságban és mekkora sebességgel keringett az űrhajó?

Megoldás:

Adatok:

$R = 6370\ \mathrm{km}$

$M = 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$

$T = 5770\ \mathrm{s}$

---

a) $\omega = ?$

b) $h = ?$, $v = ?$

a)

A mesterséges hold szögsebessége:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1{,}09 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

A mesterséges hold körpályán tartásához szükséges centripetális erőt a gravitációs erő biztosítja.

$$m\omega^2 \cdot r = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2}.$$

Felhasználva, hogy $r = R + h$, és behelyettesítve:

$$h = \sqrt[3]{\frac{\gamma \cdot M}{\omega^2}} - R = 592{,}4\ \mathrm{km}.$$

$$v_{\mathrm{ker}} = (R + h) \cdot \omega = 7589\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

24. lecke A forgatónyomaték, a merev testekre ható erőrendszerek

Feladatok:

1. Mekkora a forgatónyomatéka annak az 50 N nagyságú erőt kifejtő szerelőkulcsnak, ha a szerelőkulcs hossza 30 cm és az erő hatásvonala merőleges rá? Mekkora lesz a forgatónyomaték, ha az erőkart a felére csökkentjük, de az erő nagyságát megháromszorozzuk?

Megoldás:

Adatok:

$F = 50$ N
$D = 30$ cm $= 0{,}3$ m

a) M =?
b) M' =?

a) A forgatónyomaték definíciója alapján:

$$M = F \cdot d = 50\ \mathrm{N} \cdot 0{,}3\ \mathrm{m} = 15\ \mathrm{Nm},$$

b)
$$M' = 3F \cdot \frac{d}{2} = 1{,}5 F \cdot d = 1{,}5 M = 22{,}5\ \mathrm{Nm}.$$

A szerelőkulcs által kifejtett forgatónyomaték első esetben 15 Nm, míg a szerelőkulcs hosszát felére csökkentve 22,5 Nm.

2. Egy 50 kg-os es egy 30 kg-os gyermek mérleghintázik. Az 50 kg-os fiú 1,5 m-re ül a forgástengelytől. Hova üljön a másik gyermek, hogy egyensúlyban legyenek?

Megoldás:

Adatok:

$m_1 = 50$ kg

$m_2 = 30$ kg

$k_1 = 1{,}5$ m

$k_2 = ?$

A mérleghinta tengelyére, mint vonatkoztatási tengelyre írjuk fel a forgatónyomatékok egyenlőségét kifejező egyenletet:

$$M_1 = M_2$$

$$F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$$

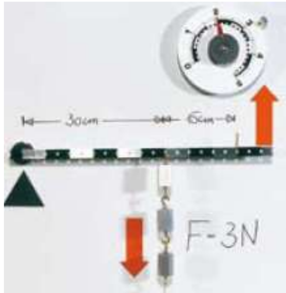
A k_2 erőkart kifejezve, és behelyettesítve: $k_2 = 2{,}5$ m. A 30 kg-os gyermek a mérleghinta másik oldalára, a tengelytől 2,5 méter távolságra üljön.

3. Egy 45 cm hosszúságú, elhanyagolható tömegű rúdra a forgástengelytől 30 cm-re egy m = 0,3 kg tömegű testet akasztunk. Mekkora erővel kell az ábra szerint rúd másik végét emelnünk, hogy a rúd továbbra is vízszintes maradjon?

Megoldás:

Adatok:

l = 45 cm = 0,45 m
d_1 = 30 cm = 0,3 m
m = 0,3 kg
d_1=?



71. ábra: A forgatónyomatékok egyenlőségét a forgástengelyre áll fenn.

A forgástengelyre a forgatónyomatékok egyenlőségét felírva:

$$F\,l = mg\,d_1.$$

Innét:

$$F = 2\ \text{N}.$$

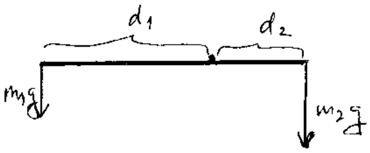
A rúd végét 2 N erővel kell emelnünk.

4. Két tanuló az iskolatáskáját egy 60 cm hosszú rúdra szeretné felakasztani. Hol kell a rudat alátámasztaniuk, ha az egyik táska 5 kg, míg a másik 8 kg tömegű?

Megoldás:

Adatok:

m_1 = 5kg
m_2 = 8 kg
l = 60 cm = 0,6 m
d_1=?
d_2=?



72. ábra: A felfüggesztési pont a nagyobb tömegű táskához lesz közelebb.

A táskák közös tömegközéppontjára felírjuk a forgatónyomatékok egyenlőségét. ($l=d_1+d_2$)

$$m_1g\cdot d_1 = m_2g\cdot(l-d_1).$$

A d_1-et kifejezve:

$$d_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot l\,.$$

Behelyettesítve:

$$d_1 = \frac{8\ \text{kg}}{5\ \text{kg}+8\ \text{kg}}\cdot 0{,}6\ \text{m} = 0{,}37\ \text{m}\,.$$

$$d_2 = 0{,}23\text{m}.$$

A rudat a nehezebb táskától 23 cm-re kell alátámasztani.

5. Egy autót két párhuzamos hatásvonalú, megegyező irányú erővel tol két ember. Mekkora nagyságú erőt fejt ki az egyik ember, ha az eredő erejük 200 N nagyságú, és a másik ember 80 N nagyságú erővel tolja az autót? Milyen távolságra van az eredő hatásvonala a nagyobbik erő hatásvonalától, ha a két ember 120 cm-re áll egymástól? Rajzold le a ható erőket és az eredőt!

Megoldás:

Adatok:

F_e = 200 N,

F_2 = 80 N,

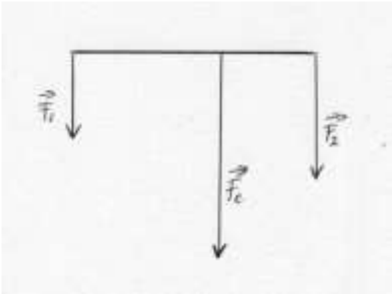
$\underline{d = 120 \text{ cm} = 1{,}2 \text{ m}}$

Az első ember által kifejtett erő nagysága F_1 = 120 N. Az eredő hatásvonalára nézve a két összetevő forgatónyomatéka egyenlő:

$$F_1\, x = F_2 \cdot (d\text{-}x).$$

Az egyenletbe az adatokat behelyettesítve x = 0,48 m.

Az eredő hatásvonala a nagyobbik erő hatásvonalától 0,48 m-re van.



73. ábra: Párhuzamos, megegyező irányú erők esetén az eredő a két hatásvonal közöt helyezkedik el.

6. Egy 4 m hosszúságú mérleghinta egyik végére ült Józsi, akinek tömege 40 kg. A másik végére Eszter ül, aki 30 kg-os. Hova ültessék Feri nevű kistestvérüket, akinek tömege 25 kg?

Megoldás:

Adatok:

L = 4 m,

m_1 = 40 kg,

m_2 = 30 kg.

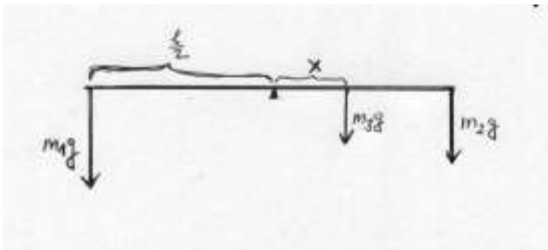
$\underline{m_3 = 25 \text{ kg.}}$

A mérleghinta forgástengelyére felírva a forgatónyomatékokat:

$$m_1 g \cdot \frac{l}{2} = m_2 g \cdot \frac{l}{2} + m_3 g \cdot x,$$

amelyből x = 0,8 m.

Ferinek 0,8 m-re kell ülnie a mérleghinta forgástengelyétől Eszter oldalán.



4. ábra: A forgástengelyre nézve a forgatónyomatékok egyenlőségének fenn kell állnia.

7. Egy testre egymástól 60 cm távolságban két párhuzamos hatásvonalú, ellentétes irányú erő hat, amelynek nagysága 150 N és 60 N. Számítsuk ki az eredő nagyságát és határozzuk meg a hatásvonalának helyét!

Megoldás:

Adatok:

F_1 = 150 N,

F_2 = 60 N

<u>d = 60 cm = 0,6 m.</u>

F_e = ?

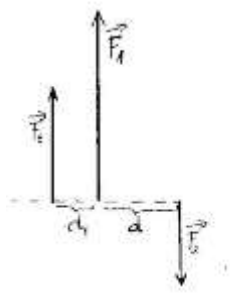
Az eredő nagysága F_e = 90 N, hatásvonala párhuzamos az összetevőkkel.

Hatásvonalának távolsága legyen az F_1-től d_1, F_2-től d_2. Az eredő hatásvonalára felírjuk a két összetevő forgatónyomatékát:

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2.$$

Az egyenletbe a megadott adatokat behelyettesítve: d_1 = 0,4 m, d_2 = 1 m.

Az eredő nagysága 90 N. Az eredő hatásvonala a két összetevő hatásvonalán kívül, a nagyobbik összetevő oldalán helyezkedik el, tőle 0,4 m távolságra.



74. ábra: Két párhuzamos hatásvonalú, ellentétes irányú erő esetén az eredő a két hatásvonalon kívül, a nagyobbik oldalán helyezkedik el.

8. Egy erőpár forgatónyomatéka 12 Nm, a ható erők nagysága 8 N. Mekkora a hatásvonalaik távolsága?

Megoldás:

Adatok:

M = 12 Nm,

<u>F = 8 N</u>

d = ?

Az erőpár forgatónyomatékát felírva: M = $F \cdot d$, amelyből:

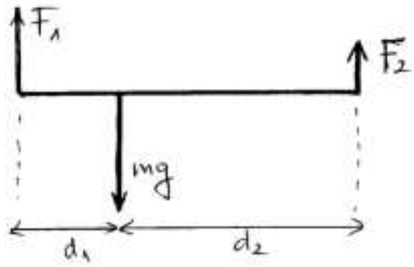
$$d = \frac{M}{F} = \frac{12\,\text{Nm}}{8\,\text{N}} = 1{,}5 \text{ m}.$$

Az erőpár két összetevőjének hatásvonala 1,5 m távolságra helyezkedik el egymástól.

25. lecke Merev testek egyensúlya

Feladatok:

1. Egy 600 N súlyú terhet 1,8 hosszúságú rúdon ketten emelnek úgy, hogy a teher a rúd egyik végétől kétszer olyan távolságra van a rúdra függesztve, mint a másiktól. Mekkora erőket kell a teher felemeléséhez a rúd végére kifejteni?



75. ábra: A teherhez közelebb, vagy távolabb kell nagyobb erőt kifejteni?

Megoldás:

Adatok:

mg = 600 N,

$d_1 = \frac{l}{3}$,

$d_2 = \frac{2}{3}l$.

F_1=?

F_2=?

A rúdra a nehézségi erőn kívül az F_1 és F_2 erő hat. Legyen az F_1 támadáspontja a vonatkoztatási pont, akkor

$$0 = F_2 \cdot l - mg \cdot d_1.$$

Az F_2 nagysága:

$$F_2 = mg \cdot \frac{d_1}{l}.$$

Behelyettesítve:

$$F_2 = 600\mathrm{N} \cdot \frac{\frac{l}{3}}{l} = 200\mathrm{N}.$$

A testre ható erők eredője nulla, így

$$0 = F_1 + F_2 - mg.$$

Ebből: $F_1 = mg - F_2 = 600\ \mathrm{N} - 200\ \mathrm{N} = 400\ \mathrm{N}.$

(A rúd hossza felesleges adat.)

2. Egy vándor 12 kg terhet visz a vállán. A terhet a bot egyik végére akasztotta, míg a bot közepét vállával alátámasztotta. A bot másik végén kezében fogva vízszintesen tartja a botot.

a. Mekkora erővel nyomja a bot a vándor vállát?

b. Mekkora lenne a vállát nyomó erő, ha a botot a vállán a teher felöli egyharmad hosszban támasztaná alá?

Megoldás:

Adatok:

$m = 12\ \text{kg}$

i. F_1=?

ii. $F_1' = ?$, ha $d = \dfrac{l}{3}$

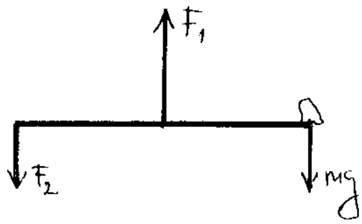
a) A botra ható erők: a teher *mg* nehézségi ereje és az F_1, F_2 erők. A rúd vízszintes és egyensúlyban van, így $F_2 = m \cdot g$.

$$F_1 = F_2 + mg = 2mg.$$

Behelyettesítve:

$$F_1 = 240\ \text{N}, \quad F_2 = 120\ \text{N}.$$

A bot a vándor vállát 240 N erővel nyomja.



76. ábra: A vándor vállának mely erőket kell kiegyensúlyoznia?

b) Az F_1' támadáspontját véve vonatkoztatási pontnak:

$$0 = F_2' \cdot \frac{2}{3} l - mg \cdot \frac{l}{3},$$

$$F_2' = \frac{mg}{2} = 60\,\text{N}.$$

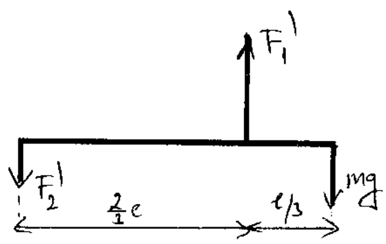
Az erők eredője nulla, így

$$0 = F_1' - F_2' - mg,$$

$$F_1' = F_2' + mg.$$

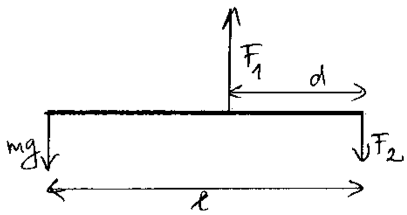
Behelyettesítve:

$$F_1' = 60\text{N} + 120\text{N} = 180\text{N}.$$



77. ábra: Hogyan tudná csökkenteni a vállára ható nyomóerőt?

3. Ásóval földdarabot emelünk. Egyik kezünkkel az ásó nyelét 100 N nagyságú erővel emeljük, míg a másik kezünkkel az ásó nyelének végét 55 N erővel lefelé nyomjuk. Mekkora földdarab tömege és milyen hosszú az ásó, ha a két kezünk távolsága 50 cm.



78. ábra: Milyen irányú erőt fejtünk ki kezünkkel az ásónyélre?

Megoldás:

Adatok:

$F_1 = 100$ N,
$F_2 = 55$ N,
$d = 50 \text{ cm} = 0{,}5 \text{ m}$.

$mg = ?$
$l = ?$

Az ásó rúdjára az erők merőlegesen hatnak. A rúd egyensúlyban van, ezért a rá ható erők eredője nulla.

$$0 = F_1 - F_2 - mg.$$

Ebből: $$mg = F_1 - F_2 = 45 \text{ N}.$$

A földdarab tömege 4,5kg.

Az egyensúlyban lévő test forgatónyomatékainak előjeles összege is nulla. Legyen az *mg* támadáspontja a vonatkoztatási pont:

$$F_1 \cdot (l - d) = F_2 \cdot l.$$

Ebből $$l = \frac{F_1}{F_1 - F_2} \cdot d = 1{,}\dot{1} \text{ m}.$$

A földdarab tömege 4,5 kg, míg az ásó hossza 1,1 m.

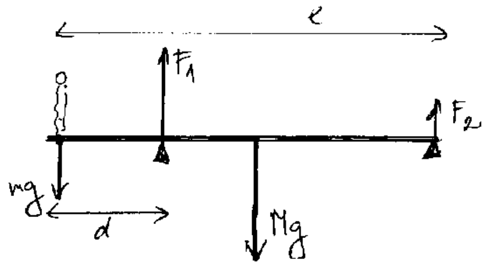
4. Egy előadáson az előadóművész egy 250 kg tömegű, 10 m hosszú, víz fölé lógó homogén tömegeloszlású gerendán játszik. A gerenda az egyik végén, és a másik végétől 2,5m-re van alátámasztva. Kisétálhat-e a gerenda végére a 70 kg tömegű előadóművész? Mekkora erők hatnak ekkor az alátámasztási pontokban?

Megoldás:

Adatok:

$M = 250$ kg,
$m = 70$ kg,
$l = 10$ m,
$d = 2{,}5$ m

$F_1 = ?$
$F_2 = ?$



79. ábra: Sorolja fel a deszkára ható erőket, és írja fel az erők forgatónyomatékát!

A gerenda egyensúlyban van, tehát a testre ható erők eredője nulla és a forgatónyomatékok előjeles összege szintén nulla.

A vonatkoztatási pontnak az F_1 támadáspontját vegyük fel.

$$0 = F_1 + F_2 - mg - Mg \qquad (1)$$

$$0 = F_2 \cdot (l - d) - Mg \cdot \left(\frac{l}{2} - d\right) + mg \cdot d. \qquad (2)$$

A (2) összefüggés alapján F_2 meghatározható.

$$F_2 = 600\ \text{N}.$$

Az (1) egyenlet alapján:

$$F_1 = (M+m)\cdot g - F_2,$$

Behelyettesítve:

$$F_1 = 2600\ \text{N}.$$

Az előadóművész kisétálhat a deszka végére. Az alátámasztási pontokban fellépő erők:

$$F_1 = 2600\ \text{N}, \qquad F_2 = 600\ \text{N}.$$

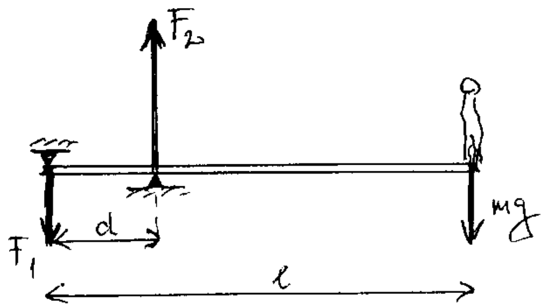
5. A 6 m hosszú ugródeszka egyik végén és ettől 1,2 m távolságban van megerősítve. A deszka szabad végén egy 60 kg tömegű műugró áll. Mekkora és milyen irányú erők hatnak a deszka rögzítési pontjaiban?

Megoldás:

Adatok:

$l = 6$ m,
$d = 1{,}2$m,
$m = 60\ kg$.

F_1=?
F_2=?



80. ábra: A rögzítési pontokban milyen irányú erő hat? Melyik erő nagysága a nagyobb?

Az ugródeszkára a nehézségi erőn kívül az alátámasztási pontokban hat erő. Mivel a testre ható erők eredője nulla, ezért F_1 lefelé, míg F_2 felfelé hat.

Az F_1 támadáspontja legyen a forgatónyomatékok vonatkoztatási pontja:

$$0 = F_2 \cdot d - mg \cdot l.$$

Ebből:

$$F_2 = mg \cdot \frac{l}{d}.$$

Behelyettesítve:

$$F_2 = 600\ \text{N} \cdot \frac{6\ \text{m}}{1{,}2\ \text{m}} = 3000\ \text{N}.$$

Az ugródeszkára ható erők eredője nulla, így:

$$0 = F_2 - F_1 - mg,$$

$$F_1 = F_2 - mg.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$F_1 = 3000\ \text{N} - 600\ \text{N} = 2400\ \text{N}.$$

Az F_1 iránya ellentétes az F_2 irányával.

A deszkára az alátámasztásban felfelé 3000 N erő hat, míg a deszka végén 2400 N nagyságú erő hat lefelé.

26. lecke Szilárd testek rugalmas alakváltozásai

Feladatok:

1. Egy hosszú, függőlegesen lógó, 0,2 mm^2 keresztmetszetű acélhuzal végén levő fogantyúba három diák kapaszkodik, a tanulók tömege 67 kg, 56 kg, illetve 57 kg. Mekkora a huzalban fellépő rugalmas feszültség? Mekkora a megnyúlása és a relatív megnyúlás? A szükséges adatokat a Négyjegyű függvénytáblázatokból keressük ki!

Megoldás:
Adatok:
m = 67 kg + 56 kg + 57 kg = 180 kg
A = 0,2 mm^2
$E_{acél} = 210 GPa$

$\sigma = ?$
$\Delta l = ?$
$\varepsilon = ?$

A huzalban ébredő feszültség: $\sigma = \dfrac{F}{A} = \dfrac{mg}{A} = 9 \cdot 10^9\ \text{Pa}$

A huzal megnyúlása: $\Delta l = \dfrac{F \cdot l_0}{E \cdot A} = 0{,}04286 \cdot l_0$

(Az l_0 értéke nélkül nem lehet megmondani a megnyúlást.)

A huzal relatív megnyúlása: $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0} = 0{,}04286$.

2. Egy 70 kg tömegű ember kapaszkodik a 8 m hosszú, 2 mm^2 keresztmetszetű acélhuzal végén lógó fogantyúban. Mennyivel nyúlt meg a huzal tehetetlen állapothoz képest? Mi történne, ha a huzal alumíniumból lenne? A hiányzó adatokat keresd ki a Négyjegyű függvénytáblázatokból!

Megoldás:

Adatok:

$m = 70\ kg, l_0 = 8m, A = 2mm^2$,

A Négyjegyű függvénytáblázatból kikeressük: Young-modulus: $E_{acél} = 210GPa$, szakítószilárdság: $\sigma_{acél} = 500MPa, \sigma_{alumínium} = 200MPa$

$\Delta l = ?$

A keltett rugalmas feszültség:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{70kg \cdot 10\,{}^{m}/_{s^2}}{2 \cdot 10^{-6} m^2} = 3.5 \cdot 10^8 Pa$$

Ez kisebb, mint az acél szakítószilárdsága, de nagyobb, mint az alumíniumé. Tehát az acél nyúlik, az alumínium huzal elszakad.

Az acél megnyúlása:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{E \cdot A} = \frac{m \cdot g \cdot l_0}{E_{acél} \cdot A} = \frac{70kg \cdot 10\,{}^{m}/_{s^2} \cdot 8m}{210GPa \cdot 2 \cdot 10^{-6} m^2} = 1{,}33cm$$

3. Milyen hosszú acélhuzal nem képes már megtartani saját súlyát, ha függőlegesen lógatjuk? (Az acél szakítószilárdsága $\sigma_{acél}$ = 500 MPa)

Megoldás:

Adatok:

$\sigma_{acél} = 500MPa, \qquad l = ?$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{\rho_{acél} \cdot A \cdot l \cdot g}{A}, \qquad l = \frac{\sigma}{\rho_{acél} \cdot g} = \frac{500MPa}{7800\,{}^{kg}/_{m^3} \cdot 10\,{}^{m}/_{s^2}} = 6410m$$

4. Egy *m* = 15 mg tömegű pók 3 μm vastag pókfonálon lóg. A fonál szakítószilárdsága háromszor nagyobb, mint az acélé. Hányszoros biztosítással védi életét a pók? Mekkora tömegű zsákmányt ejthet ahhoz, hogy egy pókfonál még meg tudja tartani őt és zsákmányát?

Megoldás:

Adatok:

$m = 15mg$,

az előző feladat adata alapján $\sigma_{pókfonál} = 1500MPa$, $d_{pókfonál} = 3\mu m$

Biztosítási faktor: $B = ?$, $m_{zsákmány} = ?$

A pók által keltett rugalmas feszültség a fonálban:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{d^2 \cdot \pi/_4} = \frac{15 \cdot 10^{-6} kg \cdot 10\,{}^{m}/_{s^2}}{\frac{9 \cdot 10^{-12} \cdot \pi m^2}{4}} = 2{,}1 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2}$$

A biztosítás mértéke: $\frac{\sigma}{\sigma_{pókfonál}} = 71{,}5$

b) $\sigma_{pókfonál} = \frac{(m + m_{zsákmány}) \cdot g}{A} \Rightarrow m_{zsákmány} = \frac{\sigma \cdot A - m \cdot g}{g} = 1013mg$,

ez a pók tömegének $\frac{m_{zsákmány}}{m} = 67{,}5$ -szerese

5. A modern anyagtechnológia (nanotechnológia) napjainkban már ipari méretekben képes szén nanocsöveket előállítani. Ezek 1–10 nm átmérőjű, akár mm hosszúságot is elérő csövek, amelyek falát szénatomok alkotják. Különlegességük, hogy egy szénatomnak csupán három szomszédja van, de ezekkel rendkívül erős kötést létesít. Egy ilyen csőnek a hossztengely irányú szakítószilárdsága harmincszorosa az acélnak, miközben sűrűsége csupán a hatoda. Milyen hosszú nanocsőszál lenne képes még saját súlyát megtartani?

Megoldás:

Nem kell végigszámolni a feladatot, elég, ha felhasználjuk a második feladat megoldásánál alkalmazott összefüggést. A nagyobb szakítószilárdság miatt harmincszoros, a kisebb sűrűség miatt hatszoros a hossznövekedés, vagyis összességében 180-szoros, ami $l' = 180 \cdot 6410 = 1153{,}8 km$.

Megjegyzés: A Nemzetközi Űrállomás ~ 360 km magasságban kering a Föld felszíne fölött!

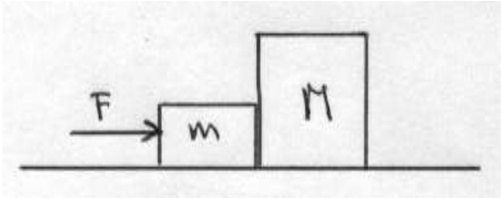
27. lecke Pontrendszerek

Feladatok:

1. Vízszintes asztallapra egymás mellé m = 2 kg és M = 6 kg tömegű téglatesteket helyezünk. A két téglatestet egy F = 40 N nagyságú, vízszintes irányú, az oldallapokra merőleges erővel megtoljuk.

a) Mekkora a téglák gyorsulása, ha a súrlódástól eltekintünk?

b) Mekkora erővel nyomja az egyik test a másikat?



81. ábra: A két testet külön-külön vizsgáljuk meg, hogy milyen erők hatnak rájuk!

Megoldás:

Adatok:

M = 6 kg,

m = 2 kg,

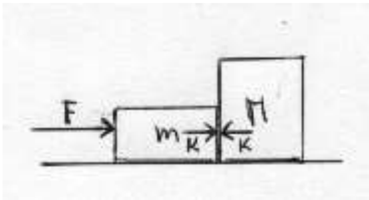
$\underline{F = 40\ \text{N}}$

a) a = ?

b) K = ?

I. megoldás:

A két testre ható erőket az ábra mutatja.



82. ábra: Irjuk fel mindkét testre a mozgásegyenleteket!

A dinamika alaptörvényét mindkét tesre felírva:

$$\left.\begin{aligned} M\cdot a &= K \\ \underline{m\cdot a} &\underline{= F - K} \end{aligned}\right\}$$

A gyorsulást a mozgásegyenletek összeadásával kapjuk:

$$a = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A két test között fellépő erő nagysága:

$$K = M\cdot a = 6\ \text{kg}\cdot 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 30\ \text{N}.$$

A téglák gyorsulása $a = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, közöttük 30 N nagyságú erő lép fel.

II. megoldás:

A két testet egy testnek tekintjük. Ebben az esetben a M-m tömegű testre csak az F erő hat. A Newton II. törvényét felírva:

$$(M+m)\cdot a = F.$$

A megadott adatokat behelyettesítve kapjuk:

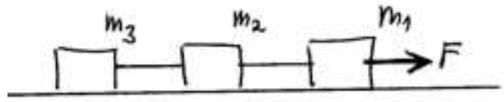
$$a = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ebben az esetben a M és m test között fellépő K erő értékét nem tudjuk kiszámolni. A I. megoldásban ismertett módszert kell alkalmazni a K értékének meghatározásához.

2. Az ábrán látható módon egy vízszintes talajon húzunk három, kötéllel összekötött testet. A húzóerő nagysága 50 N, a testek tömege m_1=10kg, m_2=8kg, m_3=4kg, a súrlódás a testek és az asztal között μ=0,2.

a) Mekkora a testek gyorsulása?

b) Mekkora erő ébred a kötélben?



83. ábra: Milyen erők hatnak az egyes testekre?

Megoldás:

Adatok:

F_h = 50 N

m_1 = 10 kg

m_2 = 8 kg

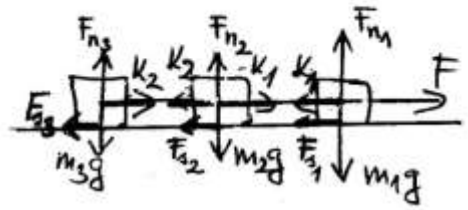
m_3 = 4 kg

μ = 0,2

b) a =?

c) K =?

A testre ható erőket az ábra mutatja.



84. ábra: Melyik kötélben hat nagyobb erő? Miért?

Az m1 tömegű test gyorsulását a F_h, F_{s1} és K_1 eredője határozza meg (függőleges irányú elmozdulás nincs, így F_{h1}=$m_1 \cdot g$). Hasonlóan m_2 gyorsulását K_1, F_{s2} és K_2, míg m_3 tömegű test gyorsulását K_2 és F_{s2} határozza meg.

A fonal nyújthatatlanságából következik, hogy a test gyorsulása megegyezik.

Ezeket az összefüggéseket és a dinamika alaptörvényét alkalmazva a mozgásegyenleteket felírjuk. Vegyük pozitív iránynak a mozgás irányát.

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot a_1 &= F_h - F_{s1} - K_1 \\ m_2 \cdot a_2 &= K_1 - F_{s2} - K_2 \\ m_3 \cdot a_3 &= K_2 - F_{s3} \\ \underline{a_1 = a_2} &\underline{= a_3} \end{aligned}\right\}$$

A súrlódási erők:

$$F_{s1} = \mu \cdot m_1 \cdot g = 20 \text{ N},$$

$$F_{s2} = \mu \cdot m_2 \cdot g = 16 \text{ N},$$

$$F_{s3} = \mu \cdot m_3 \cdot g = 8 \text{ N}.$$

A gyorsulást a mozgásegyenletek összeadásával kapjuk meg.

$$a = \frac{F_h - F_{s1} - F_{s2} - F_{s3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Behelyettesítve:

$$a = 0{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

b) A kötélerőket a mozgásegyenletekből számoljuk.

$$K_2 = m_3 \cdot a + F_{s3},\ \text{míg}\ K_1 = F_h - m_1 \cdot a - F_{s1}$$

Behelyettesítés után:

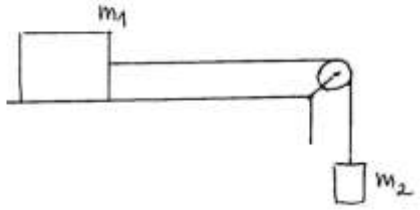
$K_1 = 27$ N

$K_2 = 9$ N

3. Vízszintes asztallapon $m_1 = 8$ kg tömegű testhez, csigán átvetett fonállal, $m_2 = 4$ kg tömegű testet kötünk. Az asztallap és a rajta lévő test között a csúszási súrlódási együttható 0,2. A csiga és a fonál tömege, valamint a csiga tengelyénél fellépő súrlódás elhanyagolható.

a) Mekkora gyorsulással mozog a rendszer?

b) Mekkora erő feszíti a fonalat?



85. ábra: Mely erők hatnak a rendszerre?

Megoldás:

Adatok:

$m_1 = 8$ kg

$m_2 = 4$ kg

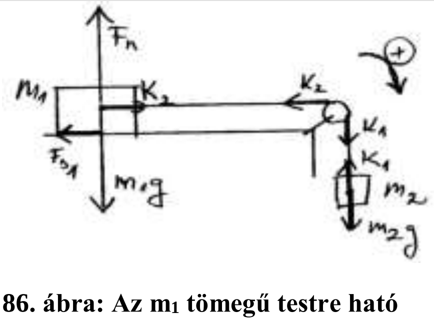
$\mu = 0{,}2$

a) a =?

b) K =?

Az ábra mutatja az egyes testre ható erőket.

A csiga tömege elhanyagolható, ezért forgatásához nem szükséges, hogy a rá ható K_1 és K_2 erők közül valamelyik nagyobb legyen a másiknál. (A csiga szerepe ebben a feladatban az, hogy a fonal irányát, azaz a ható erők irányát megváltoztassa.) A K_1 és K_2 nagysága megegyik. A fonal nyújthatatlan, ezért $a_1 = a_2$.



86. ábra: Az m_1 tömegű testre ható függőleges irányú erők rést vesznek-e a rendszer gyorsításánan?

A rendszer mozgásirányát pozitív iránynak választjuk, és felírjuk a mozgásegyenleteket.

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot a_1 &= K_2 - F_{s1} \\ m_2 \cdot a_2 &= m_2 \cdot g - K_1 \\ a_1 &= a_2 \\ \underline{K_1} &\underline{= K_2} \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldva:

$$a = \frac{m_2 \cdot g - F_{s1}}{m_1 + m_2}$$

A súrlódási erő:

$$F_{s1} = \mu \cdot m_1 \cdot g = 0{,}2 \cdot 8 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 16 \text{ N}$$

A gyorsulás:

$$a = \frac{40 \text{ N} - 16 \text{ N}}{12 \text{ kg}} = 2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A kötélerő:

$$K = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a = m_2 \cdot (g - a)$$

$$K = 4g \cdot \left(10 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 32 \text{ N.}$$

4. Az ábrán látható elrendezésben m_1 = 4 kg, m_2 = 12 kg, m_3 = 8 kg. A testeket összekötő fonál és a csigák tömege elhanyagolható, a súrlódás értéke 0,15. Mekkora a testek gyorsulása?

Megoldás:

Adatok:

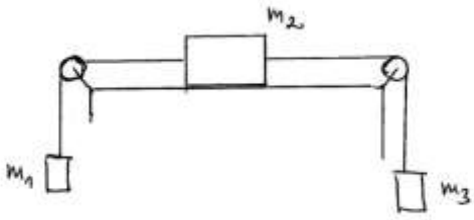
$m_1 = 4$ kg

$m_2 = 12$ kg

$m_3 = 8$ kg

$\mu = 0{,}2$

a=?



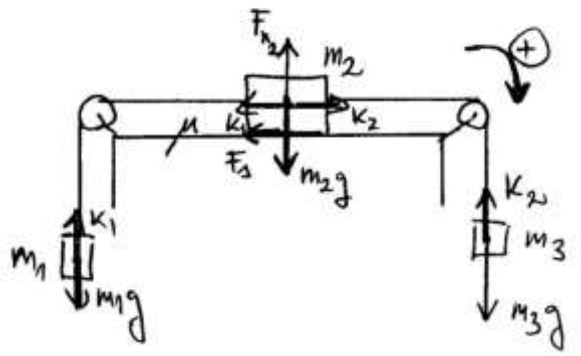
87. ábra: Merre indul a rendszer?

Az ábra mutatja az egyes testekre, illetve az egyes köteldarabokban ható erőket. A csigák tömege elhanyagolható: $K_1 = K_2$. A fonal nyújthatatlan: $a_1 = a_2 = a_3$.

Válasszuk pozitívnak az m_3 irányát.

A mozgásegyenleteket felírva:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot a_1 &= K_1 - m_1 \cdot g \\ m_2 \cdot a_2 &= K_2 - K_1 - F_s \\ m_3 \cdot a_3 &= m_3 \cdot g - K_2 \\ a_1 &= a_2 = a_3 \\ K_1 &= K_2 \end{aligned}\right\}$$



88. ábra: Mi dönti el, hogy a rendszer elindul-e, illetve jobbra vagy balra gyorsul?

A súrlódási erő:

$$F_s = \mu \cdot m_2 \cdot g = 0{,}2 \cdot 12\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 24\ \text{N}.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$a = \frac{m_3 \cdot g - m_1 \cdot g - F_s}{m_1 + m_2 + m_3}$$

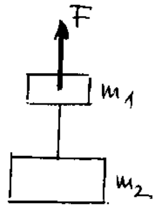
Behelyettesítve:

$$a = \frac{80\ \text{N} - 40\ \text{N} - 24\ \text{N}}{24\ \text{kg}} = \frac{2}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

5. Az m_1 = 2 kg és m_2 = 4 kg tömegű testeket zsineggel összekötünk és felfüggesztünk az ábra szerint.

a) Mekkora *F* húzóerőt kell a felső zsinegre kifejteni ahhoz, hogy a két testet a földfelszín felett tartsuk?

b) Mekkora erővel kell hatni a felső zsinegre, hogy a két test felfelé irányuló 1,4 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozogjon?



89. ábra: Rajzoljuk be az egye testekre ható erőket!

c) A b)-beli feltételek mellett mekkora erő feszíti a két testet összekötő fonalat?

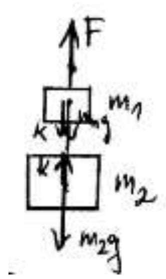
Megoldás:

Adatok:

m_1=2 kg

$m_2 = 4$ kg

a) a = ?



90. ábra: Milyen erők hatnak a rendszerre? A belső erők is részt vesznek a rendszer mozgatásában?

b) F = ?, ha $a = 1{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

c) K = ?

a) Az ábrán látható az egyes testekre, illetve a kötélben ható erő. A fonal nyújthatatlan, így a két test gyorsulása megegyezik (a_1 = a_2). Midnkét test nyugalomban van, ezrt figyelembe véve a mozgásegyenletek (pozitív irány felfele mutat):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= F - m_1 \cdot g - K \\ 0 &= K - m_2 \cdot g \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása után:

$$F = (m_1 + m_2) \cdot g,$$

azaz F = 60 N.

b) Mindkét test felfele mozog, így a pozitív irány is felfelé mutat:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot a_1 &= F - m_1 \cdot g - K \\ m_2 \cdot a_2 &= K - m_2 \cdot g \\ a_1 &= a_2 \end{aligned}\right\}$$

Ebből:

$$F = (m_1+m_2) \cdot a + (m_1+m_2) \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot (g + a)$$

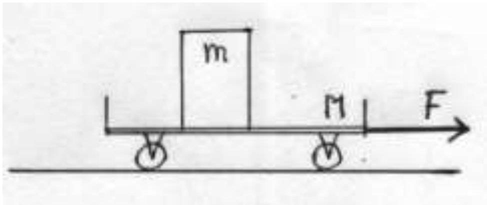
$$F = 68{,}4 \text{ N}.$$

c) A fonalat összekötő erő a b)-beli mozgásegyenletből számolhatjuk ki.

$$K = m_2 \cdot (g + a),$$

$$K = 45{,}6\ \text{N}.$$

6. A teherautó M = 2000 kg tömegű pótkocsiján áll egy m = 150 kg tömegű szekrény. A pótkocsi és a szekrény közötti súrlódási együttható μ = 0,25. A pótkocsi és a talaj közötti súrlódás elhanyagolható. Határozzuk meg azt a legkisebb F erőt, amellyel a pótkocsira hatva a szekrény éppen megcsúszik a platón!



91. ábra: Mitől függ, hogy megcsúszik-e a szekrény a pótkocsin?

Megoldás:

Adatok:

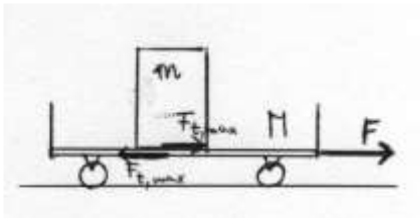
M = 2000 kg

m = 150 kg

μ = 0,25

F_{min} = ?

Az ábrán láthatóak a testekre ható erők: M tömegű pótkocsira az F húzóerő és az $F_{t,max}$ tapadási súrlódási erőt, és a m tömegű szekrényre ható tapadási súrlódási erőt.



92. ábra: A szekrényt a tapadási súrlódási erő gyorsítja.

Számítsuk ki a tapadási súrlódási erő maximumát!

$$F_{t,max} = \mu \cdot mg = 0{,}25 \cdot 150\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 375\ \text{N}.$$

Azt az esetet nézzük meg, amikor a két test éppen együtt mozog. Ebben az esetben a két test gyorsulása ($a_1 = a_2$) megegyezik. Felírva a mozgásegyenletet:

$$\left.\begin{aligned} M \cdot a &= F - F_{t,\,max} \\ m \cdot a &= F_{t,\,max} \end{aligned}\right\}$$

A gyorsulás nagysága:

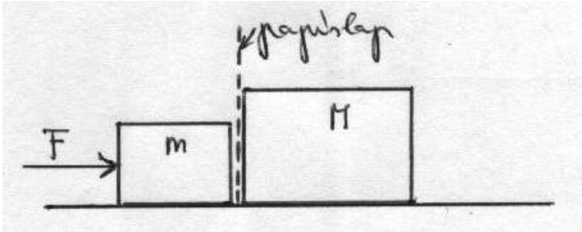
$$a = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A pótkocsira ható húzóerő nagysága:

$$F = M \cdot a + F_{t,\,max} = 2000\ \text{kg} \cdot 2{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 375\ \text{N} = 5\,375\ \text{N}.$$

5 375 N-nál nagyobb erő esetén a szekrény megcsúszik a pótkocsin: F_{min} > 5 375 N.

7. Vízszintes asztallapra egymás mellé m = 1 kg és M = 4 kg tömegű téglatesteket, közéjük pedig elhanyagolható tömegű papírlapot helyezünk. A m tömegű téglatestet F = 15 N erővel tolni kezdjük az oldallapjára merőlegesen úgy, hogy az a M tömegű testet maga előtt tolja. A téglatestek és az asztallap közötti súrlódástól tekintsünk el.



93. ábra: Rajzoljuk be a két testre és a papírlapra ható erőket!

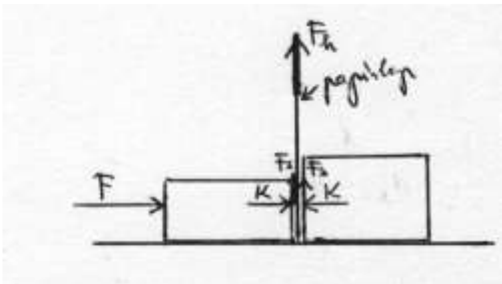
a. Mekkora a téglák gyorsulása, ha a súrlódástól eltekintünk?
b. Mekkora erővel tudjuk kihúzni a téglák közül a papírlapot, ha a papír és a téglatestek közötti súrlódási együttható μ = 0,2?

Megoldás:

Adatok:
m = 1 kg
M = 4 kg
F = 15 N

a) a = ?
b) F_h = ?

a) Az ábrán látható két testre ható erő. Mindkét test azonos gyorulással mozog ($a_1 = a_2$), ezt figyelembe véve a mozgásegyenletek (pozitív irány F erővel megegyező irányban mutat):



94. ábra: Rajzoljuk be a testekre és a papírlapra fellépő erőket!

$$m \cdot a_1 = F - K$$
$$\underline{M \cdot a_2 = K}$$

A két egyenletet összeadva és figyelembe véve, hogy $a_1 = a_2$ a két test közös gyorsulása:

$$a = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Először számítsuk ki a két tégla között fellépő K nyomóerőt.

$$K = M \cdot a = 12\ \text{N}.$$

A téglák között lévő papírlap mindkét felületén fellép az F_s súrlódási erő, így a papírlapra ható F_h húzóerő nagysága kétszerese a papírlap egyik oldala és a téglák között fellépő súrlódási erőnek: $F_h = 2 \cdot F_s$.

A súrlódási erő nagysága:

$$F_s = \mu \cdot K = 0{,}2 \cdot 12\ \text{N} = 2{,}4\ \text{N}.$$

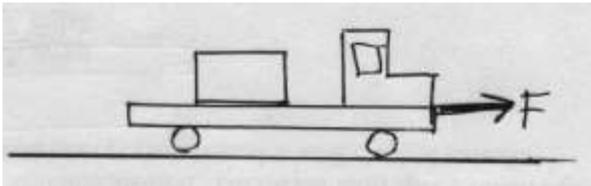
Így a húzóerő

$$F_h = 2 \cdot F_s = 4{,}8\ \text{N}.$$

A papírlapot a téglák közül 4,8 N erővel tudjuk kihúzni.

8. Egy 2500 kg tömegű kisméretű tehergépkocsira 300 kg tömegű ládát helyezünk. A test és a kocsi között a csúszási súrlódási együttható 0,25. Határozzuk meg a két test gyorsulását és a köztük fellépő súrlódási erőt, ha tehergépkocsi motorja

a. F_1 = 8000 N,
b. F_2 = 4000 N vízszintes irányú erőt fejt ki.



95. ábra: Vizsgáljuk meg mindkét esetben a ládára ható gyorsítóerő nagyságát!

Megoldás:
Adatok:
M = 2500 kg,
m = 300 kg,
μ = 0,25.
a) a_1 = ?, a_2 = ?, ha F_1 = 8000 N,
b) a_2 = ?, a_2 = ?, ha F_2 = 4000 N.

a) Az ábrán láthatóak a két testre ható erők: a M tömegű tehergépkocsira F húzóerő és az F_s súrlódási erő hat, míg a m tömegű ládára az F_s súrlódási erő.
Az F_s súrlódási erő legnagyobb értéke:

$$F_{s,max} = \mu \cdot mg = 0{,}25 \cdot 300\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 750\ \text{N}.$$

Ha a két láda együtt mozog, akkor a mozgásegyenlet a következő:

$$(M + m) \cdot a = F,$$

amelyből a gyorsulás:

$$a = 2{,}86\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

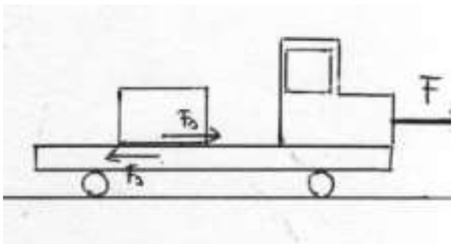
Ahhoz, hogy el tudjuk dönteni, hogy a két láda együtt mozogjon az szükséges, hogy a ládára ható F_e gyorsítóerő nagysága kisebb legyen, mint a súrlódási erő.

$$F_e \le F_{s,max}.$$

Az $F_e = ma$ = 857,1 N, ami nagyobb, mint az $F_{s,max}$.

Ez azt jelenti, hogy a láda megcsúszik a teherautón, így a két test külön mozog.
A két testre felírva a mozgásegyenleteket:

$$\left.\begin{aligned} M \cdot a_1 &= F - F_s \\ m \cdot a_2 &= F_s \end{aligned}\right\}$$



96. ábra: Ha a két test külön mozog, akkor a ládát a csúszási súrlódási erő gyorsítja.

Az egyes egyenleteket megoldva a gyorsulások nagysága:

$$a_1 = 2{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \qquad a_2 = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Megvizsgáljuk, hogy a két test együtt vagy külön mozog. Ha a két test együtt mozog, akkor a mozgásegyenlet:

$$(M+m)\cdot a = F,$$

amelyből

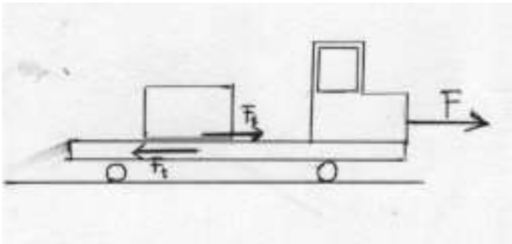
$$a = 1{,}42\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A láda akkor mozog együtt a teherkocsival, ha a ládára ható $F_e = m\cdot a$ gyorsítóerő nagysága kisebb, mint a súrlódási erő maximuma.

$$F_e \leq F_{s,max}.$$

A kapott értékek: $F_e = m\cdot a = 429$ N, $F_{s,max} = 750$ N.

Ez azt jelenti, hogy a láda együtt mozog a tehergépkocsival, vagyis nem csúszik meg a platón.



97. ábra: Ha a két test együtt mozog, akkor a ládát a tapadási súrlódási erő gyorsítja.

28. lecke A munka

1. $F = 200$ N, $s = 3$ m. A gyerek által végzett munka külön-külön:
$W = F \cdot s = 200\ \mathrm{N} \cdot 3\ \mathrm{m} = 600$ J, összesen 1200 J.

2.
a. Igen, ha az erőhatás merőleges az elmozdulásra. Például a kötéllel körpályán forgatott test esetén a kötélerő nem végez munkát.
b. Ha ez erő az elmozdulással ellentétesen hat. Például a súrlódási erő vagy fékező erő munkája.

3. Ábrázoljuk az erőt az elmozdulás függvényében. Az erő-elmozdulás grafikon alatti terület (trapéz) számértéke a végzett munkát adja.

$$W = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot s \Rightarrow F_2 = \frac{2W}{s} - F_1 = 20\ \mathrm{N}$$

A tolóerő maximuma 20 N.

4. Mivel azonos úton azonos erőt fejtettek ki, azonos munkát végeztek.
$F = 38$ N, $s = 8$ m, $W = ?$ Mindkét esetben $W = 38\ \mathrm{N} \cdot 8\ \mathrm{m} = 304$ J a végzett munka.

5. Mivel azonos úton azonos erőt fejtettek ki, azonos munkát végeztek mindkét esetben.
$F = 2$ N, $s = 0{,}5$ m, $W = ?$ Mindkét esetben $W = 2\ \mathrm{N} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} = 1$ J a végzett munka.

6. Nem végez munkát, mert a kötélre fejt ki erőt, de a kötélhez képest nem mozdul el.

7. Mivel azonos úton azonos erőt fejtettek ki, azonos munkát végeztek.
F = 300 N, s = 5 m, $W = ?$ Mindkét esetben W = 300 N · 5 m = 1500 J a végzett munka.

8. $F_1 = 50N \quad F_2 = 120N \quad s = 30m$

a teljes úton végzett munka: $W_1 = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot s = \frac{50N + 120N}{2} \cdot 30m = 2550J$,

az út második részén végzett munka:

félúton az erő nagysága: $F_3 = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{50N + 120N}{2} = 85N$,

a végzett munka: $W_2 = \frac{F_3 + F_2}{2} \cdot \frac{s}{2} = \frac{85N + 120N}{2} \cdot \frac{30m}{2} = 1537{,}5J$

9. Az emelőerő egyenletesen csökken 30N-tól 0-ra. $W = \frac{30N + 0N}{2} \cdot 4m = 60J$

10. Mivel az erő érintő irányba, vagyis az elmozdulás irányába hat, van munkavégzés.
$W = F \cdot s = F \cdot 5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = 6N \cdot 5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0{,}4m = 75{,}4J$

29. lecke A gyorsítási munka, a mozgási és a rugalmas energia

1.
a. Kinetikus energiává.
b. $E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ Nem, mert a tömeg és a sebesség négyzete sem lehet negatív.

2.
$h = 4m$, $s = 8m$
A két távolságadatból elemi geometriai ismeretek alapján megállapítható, hogy a lejtő hajlásszöge 30^0. Ebből merőleges szárú szögek egyenlősége miatt az következik, hogy a testre ható nehézségi erő nagyságának fele a lejtő irányú komponens, ami a testet gyorsítja. $F_{gy} = \frac{mg}{2}$ A gyorsító erő munkája lesz a test kinetikus energiája, amiből a sebessége kiszámítható. $F_{gy} \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, $\frac{m \cdot g}{2} \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot v^2$,

$$v = \sqrt{g \cdot s} = \sqrt{10 \frac{m}{s^2} \cdot 8m} = \sqrt{80} \frac{m}{s} = 8{,}944 \frac{m}{s}$$

3.
$t = 8{,}7\ s$, $m = 1500kg$, $v = 100 \frac{km}{h} = 27{,}7... \frac{m}{s}$. Az autó kinetikus energiája a gyorsító erő munkájából származik. (a veszteségeket nem vesszük figyelembe): $E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} 1500kg \cdot \left(\frac{100}{3{,}6} \frac{m}{s} \right)^2 = 578{,}7kJ$ Az autó által megtett utat kinematikai

meggondolás alapján számítjuk ki. Az autó gyorsulása (nincs kezdősebesség):

$$a = \frac{v}{t} = \frac{\frac{100}{3{,}6}\frac{m}{s}}{8{,}7s} = 3{,}193\frac{m}{s^2}$$, a megtett út: $$s = \frac{a}{2}t^2 = \frac{3{,}19\frac{m}{s}}{2}\cdot(8{,}7s)^2 = 120{,}83m$$

A gyorsító erő munkája ($E_{kin} = W$): $W = F \cdot s$,

A gyorsító erő: $F = \frac{W}{s} = \frac{578{,}7kJ}{120{,}7m} = 4789N$.

4.

$v_0 = 600\ \frac{m}{s}$, $d_1 = 10cm$, $d_2 = 5\ cm$

Megoldás gondolkodással, kevés számolással: Ha a fékezőerő állandó, akkor a fékezési út első felén a golyó kinetikus energiájának fele válik fékezési munkává, vagyis felére csökken a mozgási energia. Fele mozgási energiához $\frac{1}{\sqrt{2}}$-szeres sebesség tartozik, vagyis félúton a golyó sebessége $v_f = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \frac{600}{\sqrt{2}} = 424{,}3\frac{m}{s}$

Megoldás munkatétellel: A fal fékező erejének munkája okozza a golyó mozgási energiájának „eltűnését". (A fékezőerő ellentétes a golyó mozgásával.) A munkatételből tehát a fékezőerő kifejezhető: $-F_{fék} \cdot d_1 = 0 - \frac{1}{2}m \cdot v_0^2$, $F_{fék} = \frac{m \cdot v_0^2}{2 \cdot d_1}$ Ez a fékezőerő d_2 úton $W = \frac{m \cdot v_0^2}{2 \cdot d_1} \cdot d_2$ munkát végez, vagyis ennyivel csökkenti a golyó mozgási energiáját. A maradék mozgási energia tehát 5 cm fékezés után: $E_{mar} = \frac{1}{2}m \cdot v_0^2 - W = \frac{m \cdot v_0^2}{2}\left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right) = \frac{1}{4}m \cdot v_0^2$.

Az új mozgási energia vizsgálatából: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}mv_0^2 \Rightarrow v = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = 424{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

5.

$\mu = 0{,}15$, $v_0 = 3\frac{m}{s}$, $s_1 = 1{,}82m$, $s = ?$ $v = ?$

a. Vízszintesen (az elmozdulás mentén) a testre csak a súrlódási erő hat, a munkatétel ezért így alakul: (A súrlódási erő ellentétes a test mozgásával.) $-F_s \cdot s = 0 - \frac{1}{2}m \cdot v_0^2$,

$$-\mu \cdot m \cdot g = -\frac{1}{2}m \cdot v_0^2,\ s = \frac{v_0^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{\left(3\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 0.15 \cdot 10\frac{m}{s^2}} = 3m$$

b. A test mozgási energiája és abból a sebessége s_1 út megtétele után a munkatétel alapján számítható:: $-F_s \cdot s_1 = \frac{1}{2}m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_0^2$, $\frac{1}{2}m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2}m \cdot v_0^2 - \mu \cdot m \cdot g \cdot s_1$, ebből a sebesség:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot \mu \cdot g \cdot s_1} = \sqrt{\left(3\frac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 0{,}15 \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}82m} = 1{,}88\ \mathrm{m/s}$$

6.
A két rugóban a rugalmas energia:

$E_{D_1} = \frac{1}{2} D_1 \cdot (\Delta l)^2$, $E_{D_2} = \frac{1}{2} D_2 \cdot (\Delta l)^2$ A két energia aránya: $\frac{E_{D_1}}{E_{D_2}} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{3}{2}$

A megnyújtásukhoz szükséges munka: $W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l = \frac{1}{2} \cdot 60N \cdot 0{,}15m = 4{,}5J$

$E_{D_1} = \frac{3}{5} \cdot 4{,}5J = 2{,}7J$, $E_{D_2} = \frac{2}{5} \cdot 4{,}5J = 1{,}8J$.

7.
Mindkét rugót $F = 40N$ erő húzza.

Az egyes rugók megnyúlása: $\Delta l_1 = \frac{F}{D_1}$, $\Delta l_2 = \frac{F}{D_2}$

A rugalmas energiák: $E_{D_1} = \frac{1}{2} D_1 \cdot (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} D_1 \cdot \frac{F^2}{D_1^2} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{D_1} = \frac{1}{2} \frac{(40N)^2}{1000\frac{N}{m}} = 0{,}8J$

$$E_{D_2} = \frac{1}{2} D_2 \cdot (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} D_2 \cdot \frac{F^2}{D_2^2} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{D_2} = \frac{1}{2} \frac{(40N)^2}{1500\frac{N}{m}} = 0{,}533J$$

8.
$d = 5cm$, $\Delta d = 10cm$ $W = ?$

d-re megnyújtott állapotban a rugó energiája: $E_d = \frac{1}{2} D \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot 2000\frac{N}{m} \cdot (0{,}05m)^2 = 2{,}5J$

$d + \Delta d$ megnyúlásnál: $E_{d+\Delta d} = \frac{1}{2} D \cdot (d + \Delta d)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2000\frac{N}{m} (0{,}15m)^2 = 22.5J$

A keresett munka a két energia különbsége: $W = E_{d+\Delta d} - E_d = 22,J - 2{,}5J = 20J$

A számolást egyszerűsíthetjük azzal, a $\frac{N}{cm}$-ben és *cm*-ben számolunk, de fel kell hívni a figyelmet lehetséges veszélyekre.

9.
$\Delta l' = ?$

Számolás nélkül, gondolkozva: A rugalmas energia a megnyúlás négyzetével arányos, vagyis az eredeti megnyúlás $\sqrt{2}$-szeresénél kétszereződik meg. Az eredeti megnyúláshoz képest tehát $\sqrt{2} - 1$szeres további megnyújtást kell végezni, vagyis $\Delta l' = \Delta l(\sqrt{2} - 1)$

Számolós megoldás:

Az eredeti megnyúláshoz tartozó rugalmas energia: $E_r = \frac{1}{2} D \cdot (\Delta l)^2$,

A kétszeres rugalmas energia: $2 \cdot E_r = \frac{1}{2} D \cdot (\Delta l + \Delta l')^2$

A két egyenlet megoldása: $\Delta l' = \Delta l \cdot (\sqrt{2 - 1})$

10.

Az átlagos dobóerő: $F=\frac{W}{s}$

A munkavégzésünk eredménye a gerely mozgási energiájának megváltozása:

$$F=\frac{W}{s}=\frac{\Delta E_{mozg.}}{s}=\frac{\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2}{s}=\frac{m}{2\cdot s}\left(v_2^2-v_1^2\right)=147{,}12\,\text{N}.$$

30. lecke Emelési munka, helyzeti energia és a mechanikai energia megmaradása

1.

a.) Azért, mert az elmozdulás (függőlegesen fel) ellentétes a nehézségi erő irányával (függőlegesen le).

b.) Fel tud emelni vagy mozgásba tud hozni egy másik testet.

2.

a.) A nehézségi erő munkája -1-szeresével nőtt a test helyzeti energiája, vagyis 75 J-lal.

b.) A test mozgási energiája az emelőerő munkája és a helyzet energia növekedésének különbségével egyezik meg, ami egyenlő az eredő erő munkájával is. $E_m=W_{em}-W_{neh}=W_e=120J-75J=45J$.

3.

$l_1=0{,}6\ m$, $l_2=0{,}2\ m$

A kötél tömegközéppontja kezdetben a H magasságú asztal lapjától $h=\frac{l_2}{8}$ távolsággal lejjebb van. Amikor a vége elhagyja az asztalt, akkor $h'=2l_2$ távolsággal van lejjebb. A kötél potenciális energiájának csökkenése: $\Delta E_p=m\cdot g\cdot\frac{15}{8}l_2$ Ez alakul mozgási energiává. Feltesszük, hogy a kötél végig feszes marad, minden pontja azonos sebességgel, a tömegközéppont sebességével halad. $m\cdot g\cdot\frac{15}{8}\cdot l_2=\frac{1}{2}m\cdot v^2$,

$$v=\sqrt{2\cdot g\cdot\frac{15}{8}l_2}=\sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\frac{15}{8}\cdot 0{,}2\ m}=2{,}74\ \frac{m}{s}.$$

4.

$H=3m$, $l=60cm$, $m=3kg$, $h=75cm$, $E_{padló}=?$, $E_{asztal}=?$, $E_{mennyezet}=?$

A padlótól $H-l$ magasságban van, tehát a magassági energiája a padlóhoz képest:

$$E_{padló}=m\cdot g\cdot(H-l)=3kg\cdot 10\frac{m}{s}\cdot(3m-0{,}6m)=72J$$

$$E_{asztal}=m\cdot g\cdot(H-h-l)=3kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot(3m-0{,}75m-0{,}6m)=49{,}5J$$

$$E_{mennyezet}=m\cdot g\cdot(-l)=3kg\cdot 10\frac{m}{s^2}(-0{,}6m)=-18J$$

5.

$h=6m$, $s=20m$, $v_0=1\frac{m}{s}$ $v_1=?$, $v_2=?$

a. Mivel csak konzervatív erő végez munkát, alkalmazható a mechanikai energia megmaradás törvénye. A szánkózó magassági energiája *h*-val csökken, ez alakul át mozgási energiává.

$$m\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}m\cdot v_1^2,\ v_1=\sqrt{2\cdot g\cdot h}=\sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 6m}=10{,}95\frac{m}{s}$$

b. Most a kezdeti mozgási és helyzeti energia együttesen alakul mozgási energiává:

$$\frac{1}{2}m\cdot v_0^2+m\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}m\cdot v_2^2$$

$$v_2=\sqrt{v_0^2+2\cdot g\cdot h}=\sqrt{\left(1\frac{m}{s}\right)^2+2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 6m}=11\frac{m}{s}.$$

6.

$v_0=?,\qquad h=3m, v=5\frac{m}{s}$

A kezdeti mozgási energia egy része magassági energiává alakul:

$$\frac{1}{2}m\cdot v_0^2=\frac{1}{2}m\cdot v^2+m\cdot g\cdot h,\qquad v_0=\sqrt{v^2+2\cdot g\cdot h}=9{,}21\frac{m}{s}$$

7.

$m=2kg,\qquad t=0{,}6s$

A nehézségi erő munkavégzése:

$$W=m\cdot g\cdot\frac{g}{2}\cdot t^2=36J$$

8.

Ott válik el, ahol a nehézségi erő felületre merőleges komponense még éppen megegyezik a körpályán tartáshoz szükséges centripetális erővel. A középponttól a testhez húzott sugár szögét a kiindulási helytől mérve és azt φ -vel jelölve:

$$m\cdot g\cdot\cos\varphi=\frac{m\cdot v^2}{R}$$

A sebesség az energia-megmaradásból számolható:

$$m\cdot g\cdot R(1-\cos\varphi)=\frac{1}{2}m\cdot v^2,\qquad \cos\varphi=\frac{2}{3}$$

Tehát a test *R*/3 magasságot süllyed, amikor elválik a gömb felszínétől.

31. lecke A súrlódási erő munkája

1. A két esetben azonos munkavégzés történik. Mindkét súrlódási erő a munkavégzés folyamán a kezdeti mozgási energiát alakítja hővé.

2. $s = 3\ \text{m}$, W_{1-3}?, W_{2-5}? ΔE_{kin}?

a. A súrlódási erő: $F_s = -\mu \cdot m \cdot g$, munkája az első három méteren:

$$W_{1-3} = -(\mu \cdot m \cdot g) \cdot s = -0{,}1 \cdot 4\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3\ \text{m} = -12\ \text{J}$$

b. Ha a súrlódási erő állandó, akkor a végzett munka nem függ attól, hogy a pálya melyik szakaszát vizsgáljuk. Tehát $W_{1-3} = W_{2-5} = -12\ \text{J}$

(A feladat szövegét úgy is lehet értelmezni, hogy a 2. és az 5. méter között 2 méternyi út van. Ezen a szakaszon a súrlódási erő munkája -8 J.)

c. A súrlódási erő munkája méterenként: $W_1 = -(0{,}1 \cdot 4\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot 1\ \text{m} = -4\ \text{J}$ Ez megegyezik a kinetikus energia csökkenésével, tehát: $\Delta E_{kin} = -4\ \text{J}$

3. $F_f = 40\ \text{N}$ $s = 10\ \text{m}$, $W_s = ?$

A talaj és a láda közötti nyomóerő: $F_{ny} = mg - F_f = 10kg \cdot 10\frac{m}{s^2} - 40N = 60N$

A súrlódási erő: $F_s = \mu \cdot F_{ny} = 0{,}3 \cdot 60\ \text{N} = 18\ \text{N}$

A súrlódási erő munkája *s* úton: $W_s = -F_s \cdot s = 18\ \text{N} \cdot 10\ \text{m} = -180\ \text{J}$

4. $v_0 = 2\frac{m}{s}$, $m_1 = 0{,}5kg$, $m_2 = 2kg$, $\mu = 0{,}2$, $s_1 = ?$, $s_2 = ?$

A kinetikus energia válik súrlódási munkává: $\frac{1}{2} m_1 \cdot v_0^2 = \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot s_1$,

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{\left(2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1\ \text{m}$$

Látható, hogy a fékezési út nem függ a test tömegétől, tehát mindkét test 1 m úton áll meg.

32. lecke Teljesítmény, hatásfok

1. $m = 85\ \text{kg}$, $t = 19\ \text{s}$, (A feladat kitűzésénél az idő hibásan szerepel!) $h' = 3\ \text{m}$, $n = 22$, $P = ?$

A futó tömegközéppontjának emelkedése 21 emelet és a földszint, tehát $h = 66m$

A nehézségi erővel szemben végzett munkája: $W = m \cdot g \cdot h$

A futó átlagteljesítménye: $P=\frac{W}{t}=\frac{m\cdot g\cdot h}{t}=\frac{85\ \text{kg}\cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 66\ \text{m}}{19\ \text{s}}=2{,}95\ \text{kW}$

2. $m_1=2\ \text{kg}$, $m_2=10\ \text{kg}$, $h=15\ \text{m}$, $t=10\ \text{s}$, $P=?$, $\eta=?$

a. A vízzel teli vödör felemeléséhez szükséges munka:

$$W=(m_1+m_2)\cdot g\cdot h=(2\ \text{kg}+10\ \text{kg})\cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 15\,\text{m}=1800\ \text{J}$$

A szükséges motorteljesítmény: $P=\frac{W}{t}=\frac{1800\ \text{J}}{10\ \text{s}}180\ \text{W}$

Mivel a villanymotorok hatásfoka mintegy 90%, a valóságban legalább $200\ \text{W}$-os motorra van szükség.

b. Az emelés hatásfokát úgy értelmezzük, hogy csupán a víz felemelése a hasznos munka, ezért:

$\eta=\frac{W_{víz}}{W}$, ahol $W_{víz}=m_2\cdot g\cdot h=10\ \text{kg}\cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 15\ \text{m}=1500\ \text{J}$, vagyis

$$\eta=\frac{1500\ \text{J}}{1800\ \text{J}}=0.833=83{,}3\%$$

3. $M=85\ \text{kg}$, $m_1=2\ \text{kg}$, $m_2=25\ \text{kg}$, $h=12\ \text{m}$, $\eta_1=?$, $\eta_2=?$

a. Gondolkodós megoldás: A munkavégzés a tömegekkel arányos, tehát a hatásfokot a hasznos és az összes tömeg aránya adja meg: $\eta_1=\frac{m_1}{M+m_1}=\frac{2\ \text{kg}}{85\ \text{kg}+2\ \text{kg}}=0{,}023=2{,}3\%$

Számolósabb megoldás:

A postás és a kis csomag felviteléhez szükséges összes munka:

$$W_ö=(M+m_1)\cdot g\cdot h=(85\ \text{kg}+2\ \text{kg})\cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 12\ \text{m}=10440\ \text{J}$$

A hasznos munka: $W_h=m_1\cdot g\cdot h=2\ \text{kg}\cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 12\ \text{m}=240\ \text{J}$

A hatásfok: $\eta_1=\frac{W_h}{W_ö}=\frac{m_1\cdot g\cdot h}{(M+m_1)\cdot g\cdot h}=\frac{m_1}{M+m_1}=\frac{2\ \text{kg}}{85\ \text{kg}+2\ \text{kg}}=0{,}023=2{,}3\%$

b. A nagyobb csomag esetén a hatásfok: $\eta_2=\frac{m_2}{M+m_2}=\frac{25\ \text{kg}}{85\ \text{kg}+25\ \text{kg}}=0{,}227=22{,}7\%$

4. $m = 10\ \text{kg}$, $a = 2\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $P(t) = ?$, $P_{átlag} = ?$, $P_{t=5} = ?$

a. A testet $F = m \cdot a = 10\ \text{kg} \cdot 2\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 20\ \text{N}$ erő gyorsítja.

Állandó erő teljesítménye: $P = F \cdot v = F \cdot a \cdot t = m \cdot a^2 \cdot t = 40 \dfrac{\text{N}}{\text{s}} \cdot t$

b. Az erő teljesítménye lineárisan nő nulláról. $P_{t=0} = 0\ \text{W}$, $P_{t=10} = 40\ \dfrac{\text{J}}{\text{s}^2} \cdot 10\ \text{s} = 400\ \text{W}$

Az átlagteljesítmény: $P_{átlag:} = \dfrac{P_{t=0} + P_{t=10}}{2} = \dfrac{0\ \text{W} + 400\ \text{W}}{2} = 200\ \text{W}$.

c. A mozgás kezdete után 5 másodperccel a pillanatnyi teljesítmény:

$$P(5\ \text{s}) = 40 \frac{\text{N}}{\text{s}} \cdot t = 200\,\text{W}.$$

5. $m = 1500\ \text{kg}$, $P = 90\ \text{kW}$, $v_0 = 36\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, $v = 90\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ $t = ?$

A felgyorsításhoz szükséges energia a végállapotbeli és a kezdeti kinetikus energiák különbsége: $E = E_{vég} - E_{kezd}$

$v_0 = 36\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 10\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, $v = 90\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 25\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1500\,\text{kg} \cdot \left(25 \frac{m}{s}\right)^2 - \frac{1}{2} 1500\,\text{kg} \cdot \left(10 \frac{m}{s}\right)^2 = 393750\,\text{J}$$

Ennyi munkát a motor $t = \dfrac{W}{P} = \dfrac{393750\,\text{J}}{90000\,\text{W}} = 4{,}375\,\text{s}$ alatt végez.

33. lecke Egyszerű gépek

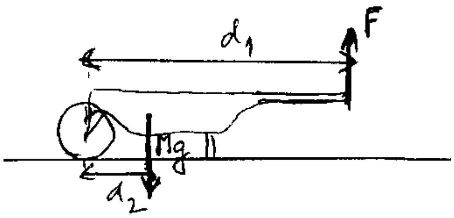
Feladatok:

1. Egy talicskával egyszerre 80 kg földet szeretnénk eltolni. Mekkora erővel kell megemelnünk a talicskát, hogyha a talicska hossza 1,4 m, a teher tömegközéppontja pedig 0,3 m-re van a kerék középpontjától?

Megoldás:

Adatok:

M =80 kg,
d_1 = 1,4 m,
$d_2 = 0{,}3\ \mathrm{m}$.
F = ?



98. ábra: A talicska egy egykarú emelő

A talicska egykarú emelőként működik. A talicska kerekét választjuk forgástengelynek, így a forgatónyomatékok egyenlőségét felírva:

$$F \cdot d_1 = Mg \cdot d_2.$$

A talicskát emelő erő:

$$\mathrm{F} = \mathrm{Mg} \cdot \frac{\mathrm{d}_2}{\mathrm{d}_1}.$$

Behelyettesítve:

$$F = 800\mathrm{N} \cdot \frac{0{,}3\ \mathrm{m}}{1{,}4\ \mathrm{m}} = 171{,}4\ \mathrm{N}.$$

A talicskát 171,4 N nagyságú erővel kell megemelnünk.

2. Egy csípőfogó markolatának végére kezünkkel 20 N nagyságú erőt fejtünk ki. A csípőfogó vágóél felőli hossza 10 mm, míg a markolat hossza 8 cm. Mekkora erő éri elvágás közben a rézdrótot?

Megoldás:

Adatok:

F_1 = 20 N,
d_1 = 8 cm,
$d_2 = 1\ \mathrm{cm}$.
F_2 = ?

A csípőfogó kétkarú emelőként működik. A forgatónyomatékok egyenlőségéből:

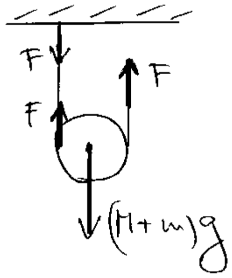
$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2.$$

Behelyettesítve:

$$F_2 = 160 \text{ N}.$$

A rézdrótra vágás közben 160 N nagyságú erő hat.

3. Egy építkezésen a 4 kg tömegű mozgócsigára egy 30 kg össztömegű téglával megrakott vödröt akasztanak. Mekkora erővel húzhatjuk egyenletesen felfelé a vödröt? Mekkora erőt fejt ki egyenletes mozgatáskor a kötél a felfüggesztési pontra?



Megoldás:

Adatok:

m = 4 kg,
M = 30 kg.
F = ?

A mozgócsiga mindkét kötélszárban $F = \frac{(M+m)\cdot g}{2}$ nagyságú erő hat.

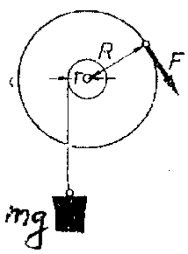
A vödröt felfelé $F = \frac{(M+m)\cdot g}{2}$ nagyságú erővel húzhatjuk. A kötél a felfüggesztési pontra F erővel hat.

99. ábra: A mozgócsigára akasztott teher súlya a kötél két szárában egyenlő arányban oszlik meg?

Behelyettesítve: F = 170 N.
A vödröt 170 N nagyságú erővel húzhatjuk egyenletesen felfelé. A felfüggesztési pontra a kötél 170 N nagyságú erőt fejt ki.

4. Egy működő kerekes kút hengerének sugara 10 cm, míg a hajtókar sugara 60 cm. Mekkora erővel lehet a kútból felhúzni a 20 kg tömegű, vízzel teli vödröt?

Megoldás:



Adatok:

r = 10 cm,
R = 60 cm,
m = 20 kg.
F = ?

A hengerkerék középpontjára felírva a forgatónyomatékok egyenlőségét:

100. ábra: Milyen előjelű az mg és az F erő forgatónyomatéka?

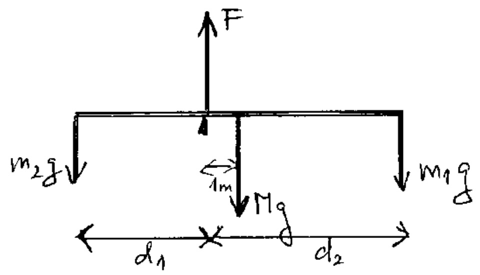
$$0 = F \cdot R - mg \cdot r.$$

Az F értéke:

$$F = 33{,}3 \text{ N}.$$

A kerekes kúttal 33,3 N erővel lehet felhúzni a 20 kg tömegű vödröt.

5. A gémeskút 200 kg-os kútgémének egyik fele 4 m, míg a másik fele 6 m hosszúságú. A kútgém hosszabbik végén vödör lóg, mely vízzel teli tömege 25 kg. Mekkora tömegű fahasábot (koloncot) rögzítettek a gémeskút kútgémének szabad végéhez, hogy a gémeskút vízszintes helyzetben éppen egyensúlyi helyzetben van?



101. ábra: Milyen irányú lesz a kútgémre ható erők forgatónyomatéka?

Megoldás:

Adatok:

$d_1 = 4$ m,
$d_2 = 6$ m,
$m_1 = 25$ kg,
$M = 200$ kg.

$m_2 = ?$

A kútgémre az Mg nehézségi erőn kívül a vödör m_1g súlya, a fahasáb (kolonc) m_2g súlya és a F erő hat.

A testre ható forgatónyomatékok előjeles összege a kútgém bármely pontjára nulla. Írjuk fel a forgatónyomatékokat az F erő támadáspontjára.

$$0 = m_2 g \cdot d_1 - Mg\left(\frac{d_1 + d_2}{2} - d_2\right) - m_1 g \cdot d_2 .$$

Behelyettesítve:

$$m_2 = 75 \text{ kg}.$$

75 kg tömegű fahasábot (koloncot) rögzítettek a gémeskút kútgémének szabad végéhez.

34. lecke Nyugvó folyadékok tulajdonságai

1. A Földön a nyugvó folyadék felszíne alatt h mélységben $p = p_k + \rho g h$ nyomás van. A Holdnak nincs légköre, így ott $p_k = 0$, valamint ott a nehézségi gyorsulás a Föld felszín közelinek kb. a hatoda: $g_H = \frac{g}{6}$. A Holdon: $p = \rho g_H h$.

2. a = 10 cm = 0,1 m.
A hidrosztatikai nyomás a kocka tetején p_k, lefelé haladva a mélységgel arányosan nő, a kocka alján az értéke $p_k + \rho g a$, ezért számolhatunk $\frac{1}{2} \cdot (p_k + \rho g a)$ átlagnyomással.
Az edény egyik függőleges lapjának belső felületére ható erő:

$$F = p \cdot A = \frac{1}{2} \cdot (p_k + \rho g a) \cdot A$$

Behelyettesítve: F = 505 N.

3. d = 16 cm, h_1 = 10 cm, h_2 = 5 cm, $\rho_{olaj} = 910\,\text{kg/m}^3$.
A víz felszínén a nyomás: $p_1 = p_k + \rho_{olaj} \cdot g \cdot h_2 = 100\,455\,\text{Pa}$.
Az edény alján a nyomás: $p_2 = p_1 + \rho_{víz} \cdot g \cdot h_1 = 101\,455\,\text{Pa}$.

4. m = 1500 kg, r_1 = 30 cm, r_2 = 3 cm, h = 20 cm.

Használjuk a Pascal törvény segítségével levezetett, hidraulikus emelőre érvénye összefüggést:

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot F_1 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 mg = 150\,\text{N}.$$

Nem takarítunk meg munkát a hidraulikus emelővel. Kisebb erőt kell kifejtenünk, de hosszabb úton. Mindkét munkavégzés az autó helyzeti energiáját növeli 3000 J-al.

5. A második feladatban tett gondolatmenet alapján, de figyelembe véve, hogy most csak a folyadék nyomását számítjuk:

$(\rho \cdot g \cdot h) \cdot a^2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot h\right) \cdot a \cdot h$, ahol a a hasáb alapéle, ρ pedig a víz sűrűsége.

Az egyenlet megoldása: $h = \frac{a}{2}$

Megjegyzés:
Ha a külső légnyomást is figyelembe vesszük, akkor az alábbi szerint módosul az egyenletünk:

$$(p_k + \rho \cdot g \cdot h) \cdot a^2 = 4 \cdot \left(p_k + \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot h\right) \cdot a \cdot h$$

Ezt az egyenletet rendezve h-ra a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$0 = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot h^2 - (4 p_k - \rho \cdot g \cdot a) \cdot h - p_k \cdot a$$

Ennek megoldása és az eredmény értékelése az oldalél függvényében meghaladja jelenlegi matematikai tudásunkat.

36. lecke Felhajtóerő nyugvó folyadékokban és gázokban

1. A fahasáb úszik a vízen, ezért a rá ható felhajtóerő nagysága egyenlő a rá ható nehézségi erő nagyságával.
$F_{fel} = mg = 20\,\mathrm{N}$.

2. A = 10 m^2, m = 82 kg, $\rho_{jég} = 920\ \mathrm{kg/m^3}$.
A jégtábla egyensúlyban van, ezért a rá ható erők eredője nulla:

$$m_{jég} \cdot g + mg = F_{felh}$$

$$Ad\rho_{jég} \cdot g + mg = Ad\rho_{víz} \cdot g$$

Az egyenletet rendezve:

$$d = \frac{m}{A\left(\rho_{víz} - \rho_{jég}\right)} = 0{,}1025\,\mathrm{m}.$$

A jégtábla legalább 10,25 cm vastag legyen, hogy a 82 kg tömegű ember biztonságban ráálljon.

3. Igen.
Akasszuk a testet a rugóra. Ekkor megmérjük a rugó megnyúlását: Δl_1 (F_1).
Most lógassuk a testet a folyadékba, és ekkor is mérjük meg a rugó megnyúlását: Δl_2 (F_2).

Ha a test elmerül a folyadékban:

$$\frac{F_{felh}}{mg} = \frac{F_1 - F_2}{F_1}$$

$$\frac{\rho_f}{\rho_t} = \frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{\Delta l_1} \Rightarrow \rho_{test} = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_1 - \Delta l_2} \cdot \rho_f$$

Ha a szilárdtest térfogatának x-szerese van a folyadék felszíne alatt:

$$\frac{F_{felh}}{mg} = \frac{\rho_f \cdot xV \cdot g}{\rho_{test} \cdot V \cdot g} = \frac{x \cdot \rho_f}{\rho_t} = \frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{\Delta l_1} \Rightarrow \rho_{test} = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_1 - \Delta l_2} \cdot x\rho_f.$$

4. Felhasználjuk, hogy a csavar sűrűsége nagyobb a vízénél.
Amikor a csavar a vízen úszó edényben van, akkor közvetve a tömegével megegyező tömegű vizet szorít ki, melynek térfogata nagyobb a csavar térfogatánál.
Amikor a csavar van, akkor a térfogatával egyező mennyiségű vizet szorít ki.
Tehát a csavar vízbe ejtése során a vízszint csökken.

5. Az edény alján való nyomás nem változik. Amikor a testet a vízre helyezzük, akkor a fazékból a test tömegével egyező mennyiségű víz folyik ki.

6. A tengervíz sűrűsége 1003 kg/m^3, m = 200 t.
A vízen úszó testre ható felhajtóerő a nehézségi erővel azonos nagyságú. Ezt felhasználva írjunk fel egy-egy egyenletet az édes-, illetve a sósvízre.

$$Mg = \rho_é Vg$$
$$(M+m)g = \rho_s Vg$$
Osszuk el a két egyenletet egymással:
$$\frac{M+m}{M} = \frac{\rho_s}{\rho_é}$$
A hajó tömege: $M = \dfrac{\rho_é}{\rho_s - \rho_é} m = 6{,}67 \cdot 10^7 \text{ kg}$.

7.

F_1 = 30 N, F_2 = 18 N, $\rho_{olaj} = 900 \ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

A vizsgált test mindkét esetben egyensúlyban van, amikor a ráható erők egyensúlya nulla:
$$F_1 = mg = \rho_{test} Vg$$
$$F_2 = mg - F_{felh.} = \rho_{test} Vg - \rho_f Vg$$
A két egyenletet elosztva egymással, majd rendezve:
$$\rho_{test} = \frac{F_1}{F_1 - F_2} \cdot \rho_f = 2250 \ \frac{kg}{m^3}$$
Az ismeretlen tárgy sűrűsége 2250 kg/m^3.

8.

Amikor a fémlemez van felül, a 6 cm-es további vízbe merülésből származó felhajtó erő ellensúlyozza a fémlemezre ható nehézségi erőt:
$$A \cdot (6 \ cm)\rho_{víz} \cdot g = mg$$
Amikor az x vastag fémlemez van alul akkor az (x + 3,8 cm)-es további vízbe merülésből származó felhajtó erő ellensúlyozza a fémlemezre ható nehézségi erőt:
$$A \cdot (x + 3{,}8 \ cm)\rho_{víz} \cdot g = mg$$
A két egyenlet baloldalának egyenlőségét felhasználva: x = 2,2 cm.
Az első egyenletet írjuk fel másképp:
$$A \cdot (6 \ cm)\rho_{víz} \cdot g = A \cdot x \cdot \rho_{fém} \cdot g$$
Az egyenletet rendezve: $\rho_{fém} = \dfrac{6 \ cm}{x} \rho_{víz} = 2728 \ kg / m^2$

A fém alumínium lehet.

9. m_1 = 3 kg, m_2 = 1 kg, $\rho_{olaj} = 800 \ \dfrac{kg}{m^3}$, h = 20 cm.

A testek gyorsulása: $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = 5 \ \dfrac{m}{s^2}$.

Az edény lefelé gyorsul.
Amennyiben a vonatkoztatási rendszerünket az edényhez rögzítenénk, akkor egy „olyan világba” kerülnénk, ahol a nehézségi gyorsulás $a^* = 5 \ \dfrac{m}{s^2}$. Ilyenkor a nyomás az edény alján:

$p = \rho g^* h = 800 \, \text{Pa}$.

Az edény alján a nyomás 800 Pa.
(Amennyiben a légnyomást nem vettük figyelembe, és csak az olajnyomást számoljuk.)

37. lecke Molekuláris erők folyadékokban

1.
Folyadékok felületi energiája arányos a felületével.
Ezért amikor a felülete $6 \cdot 6 = 36\,\text{cm}^2$ -ről $8 \cdot 4 = 32\,\text{cm}^2$ -re csökken, a folyadék felületi energiája csökken.

2.
Az elvékonyodó vízsugár felület/térfogat aránya növekszik, ezért a felületi feszültség szempontjából kisebb energiájú cseppekre szakadozik szét. Az, hogy ez hol következik be, erősen függ a víz áramlási viszonyaitól a kifolyócsőben.

3. d = 3 mm, $\sigma = 0{,}0725\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$.
A felületi energiája a két vízcseppnek kezdetben:

$$E_1 = 2 \cdot \sigma \cdot \left(4 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \right) = 4{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{J}.$$

Határozzuk meg a két cseppből lett nagyobb csepp sugarát:

$$2 \cdot \frac{4 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \pi}{3} = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} \Rightarrow R = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \cdot d = 1{,}89\ \text{mm}.$$

Határozzuk meg a nagy csepp felületi energiáját:

$$E_2 = \sigma \cdot \left(4 \cdot R^2 \cdot \pi\right) = 3{,}25 \cdot 10^{-6}\ \text{J}.$$

A felületi energia változása:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -0{,}85 \cdot 10^{-6}\ \text{J}.$$

4. További mosószer hozzáadásával a jobb oldalon csökken a folyadék felületi feszültsége, így az abból származó erő is, ezért a változatlan felületi feszültségű folyadék húzza a cérnaszálat, így az arra domborodik.

5.
m = 10 g, $\sigma = 0{,}0476\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$, $\rho = 13\ 600\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^2}$.

Határozzuk meg a nagy csepp térfogatát és sugarát:

$$V = \frac{m}{\rho} = 7{,}36 \cdot 10^{-7}\ \text{m}^3,\ R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 5{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Határozzuk meg a nagy csepp felületi energiáját:

$$E_1 = \sigma \cdot \left(4 \cdot R^2 \cdot \pi\right) = 1{,}875 \cdot 10^{-5}\ \text{J}.$$

Most határozzuk meg a kis csepp térfogatát és sugarát:

$$V = \frac{\frac{1}{2}m}{\rho} = 3{,}68 \cdot 10^{-7}\ \text{m}^3,\ r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 4{,}44 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Határozzuk meg a két kis csepp felületi energiáját:

$$E_2 = 2 \cdot \sigma \cdot \left(4 \cdot r^2 \cdot \pi\right) = 2{,}36 \cdot 10^{-5}\ \text{J}$$

A felületi energia változása:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 4{,}85 \cdot 10^{-6}\ \text{J}.$$

$W = 4{,}85 \cdot 10^{-6}$ J munka szükséges.

6. $l = 4$ cm, $\sigma = 0{,}062\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $\Delta A = 10\ \text{cm}^2$,

A munkavégzésünk a folyadék felületi energiáját növeli:

$$W = \Delta E_{felület} = \sigma \cdot \Delta A = 6{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{J}.$$

Az elmozdulás:

$$\Delta A = 2 \cdot l \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta A}{2l} = 1{,}25\ \text{cm}.$$

Az erő nagysága: $F = \frac{W}{\Delta x} = 4{,}96 \cdot 10^{-3}$ N.

7.

A folyadékok igyekeznek minél kisebb felületet alkotni, és ez adott tömeg esetén a gömbfelszín. Tehát az űrállomáson a súlytalanság állapotában a vízcsepp közel gömb alakú.

Kettő, egy picit összeérő vízcseppből egy, nagyobb csepp jön létre, mert a nagyobb gömb felszíne kisebb, mint a két kisebb gömb együttes felszíne.

38. lecke Folyadékok és gázok áramlása

1.

A folytonossági egyenlete szerint az áramlási csőben a kisebb keresztmetszetű részen nagyobb a folyadék áramlási sebessége. Nagyobb sebességű folyadékrészek hajítási pályája messzebbre elér.

2.

A folytonossági egyenlet szerint, ha a keresztmetszet a felére csökken, akkor a folyadék áramlási sebessége a kétszeresére nő. A vízszintes hajítás esési ideje nem változik. Ezért a hajítás távolsága a kétszeresére nő.

(Az indítási magasság felesleges adat a feladatban.)

3.

A levél alatt nyugalomban lévő levegő nyomása p_0. A levél felett áramló levegőben a sztatikai nyomás a torló nyomással kisebb p_0-nál: $p_0 - \frac{1}{2}\rho \cdot v^2$. Ha a két hely közötti nyomás különbségéből származó erő nagyobb a falevélre ható nehézségi erőnél, akkor a falevelet „felkapja” a szél.

$A \cdot \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 > mg.$

4. $p = 5 \cdot 10^5$ Pa, $p_0 = 3 \cdot 10^5$ Pa.

Használjuk a Bernoulli törvényt:

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot (p - p_0)}{\rho}$$

A függőleges hajítás magassága:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{p - p_0}{g \cdot \rho} = 20 \text{ m}.$$

5.
m = 300 kg, A = 20 m^2.

A nyomáskülönbségből származó erő „tartja” a testet.

$$\Delta p \cdot A = mg$$

$$\Delta p = \frac{mg}{A} = 150 \text{ Pa}.$$

150 Pa nyomáskülönbség szükséges a vitorlázórepülő szárnyainál.

39. lecke A közegellenállás

Feladatok:

1. Felgyorsulhat-e akármekkora sebességre egy levegőben eső test?

Megoldás:

Esés közben a közegellenállási erő addig nő, ameddig el nem éri az esőcseppre ható nehézségi erő nagyságát. Innen kezdve az esőcsepp egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

2. Egy focilabdát és egy ugyanakkora méretű léggömböt ugyanolyan magasságból elejtünk.

a) Hasonlítsuk össze a két testre ható közegellenállási erő nagyságát!

b) Melyik ér előbb le a földre? Miért?

Megoldás:

a) A focilabda levegővel szembeni felülete gömb, így közegellenállási tényezője c = 0,4. Hasonlóan a léggömb is közelíthető gömbfelszínnel, így c = 0,4. Ez azt jelenti, ha a két test sebessége egyenlő, akkor a rájuk ható közegellenállási erő is egyenlő.

b) A focilabda előbb ér földet, mert a focilabda szabadeséssel esik, a léggömb pedig egyenletes sebességgel. Ennek az az oka, hogy a léggömbre ható nehézségi erőt már kis sebességnél kiegyenlíti a vele ellentétes irányban fellépő közegellenállási erő.

3. Mekkora közegellenállási erő hat a levegőben egy 25 cm átmérőjű 15 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel ellőtt focilabdára? A levegő sűrűségét vedd a Négyjegyű Függvénytáblázatból!

Megoldás:

Adatok:

r = 0,25 m,

ρ = 1,29 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ (levegő sűrűsége),

$v = 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

F_k = ?

A labda a közegellenállás szempontjából gömbnek tekinthető, így a közegellenállási tényező értéke c = 0,4.

A homlokfelület nagysága: $A = r^2 \cdot \pi$.

A közegellenállási erő:

$$F = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A = 0{,}4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}29\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 225\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}0625 \cdot \pi\ \mathrm{m}^2 = 11{,}4\ \mathrm{N}.$$

A focilabdára ható közegellenállási erő 11,4 N.

4. Mekkora az 1,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulással mozgó 1320 kg tömegű autóra ható közeg-ellenállási erő, ha a motor által kifejtett húzóerő 2050 N?

Megoldás:

Adatok:

F_h = 2100 N,

$a = 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

F_k = ?

Felírjuk a dinamika alapegyenletét:

$$ma = F_h - F_k.$$

A közegellenállási erő:

$$F_\mathrm{k} = 2050\ \mathrm{N} - 1320\ \mathrm{kg} \cdot 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 70\ \mathrm{N}.$$

Az autóra ható közeg-ellenállási erő nagysága 70 N.

40. lecke Az energia előállítása és felhasználása

Az feladatok egyéni adatgyűjtést igényelnek, a számonkérésnél érdemes figyelni, mennyire reális számértékek hoznak a diákok.

3.
Segítség:

Az Európai Unióban az „A” energiaosztályú (energiatakarékos) készülékek piaci részesedésének gyors növekedése miatt az „A” osztályon belül megjelent az „A+” és az „A++” megjelölés, melyek között az „A++” az elérhető leghatékonyabb energiafelhasználású terméket jelöli. Ezek átmeneti jelölések arra az időszakra, amíg meg nem történik az energiafogyasztás címkézési rendszerének teljes felülvizsgálata.

A következő táblázat a különböző energiaosztályba tartozó gépek többletfogyasztását foglalja össze:

Többletfogyasztás az A energiaosztályhoz képest

	B	C	D	E	F	G
Hűtőgép	+30%	+65%	+90%	+110%	+135%	+160%
Mosógép	+23%	+47%	+71%	+94%	+118%	+141%