Dr. Gerőcs László ▪ Számadó László

Heuréka

MATEMATIKA 10.

A tankönyv feladatai és a feladatok megoldásai

A megoldások olvasásához Acrobat Reader program szükséges, amely ingyenesen letölthető az internetről (például: adobe.la.hu weboldalról).
A feladatokat nehézségük szerint jelöltük:
K1 = középszint, könnyebb; **K2** = középszint, nehezebb; **E1** = emelt szint, könnyebb; **E2** = emelt szint, nehezebb feladat.

Lektorok:
PÁLFALVI JÓZSEFNÉ
CSAPODI CSABA

Tipográfia: LŐRINCZ ATTILA

Szakgrafika: DR. FRIED KATALIN

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc u. 6-8.
Tel.: (+36-1) 235-7200
Fax: (+36-1) 460-1822
Vevőszolgálat: vevoszolgalat@ofi.hu

A kiadásért felel: dr. Kaposi József főigazgató
Raktári szám: RE17202
Felelős szerkesztő: Szalontay Anna, Szelindiné Galántai Melinda
Műszaki igazgató: Kapf Alfréd
Műszaki szerkesztő: Orlai Márton
Grafikai szerkesztő: Mikes Vivien, Görög Istvánné
Terjedelem: 14,0 (A/5) ív
1. kiadás, 2015

Tartalom

Jelmagyarázat

Az A pont és az e egyenes távolsága: $d(A; e)$ vagy Ae

Az A és B pont távolsága: AB vagy $\overline{AB}$ vagy $d(A; B)$

Az A és B pont összekötő egyenese: $e(A; B)$

Az f_1 és f_2 egyenesek szöge: $\sphericalangle(f_1; f_2)$ vagy $(f_1; f_2)\sphericalangle$

A C csúcspontú szög, melynek egyik szárán az A, másik szárán a B pont található: $ACB\sphericalangle$

A C csúcspontú szög: $C\sphericalangle$

Szög jelölése: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Az A, B és C csúcsokkal rendelkező háromszög: $ABC\triangle$

Az $ABC\triangle$ területe: $T(ABC)$ vagy T_{ABC}

Az a, b és c oldalú háromszög fél kerülete: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

A derékszög jele: $\llcorner$

Az e egyenes merőleges az f egyenesre: $e \perp f$

Az e egyenes párhuzamos az f egyenessel: $e \parallel f$

Egybevágóság: $\cong$; $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$

A hasonlóság aránya: λ

Az A pontból a B pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB}$

Egyenlő, nem egyenlő: $=, \neq$; $a = 2, b \neq 5$

Azonosan egyenlő: $\equiv$; $a + b \equiv 5$

Közelítőleg egyenlő: $\approx$; $a \approx 2{,}3$; $8{,}54 \approx 8{,}5$

Kisebb, kisebb vagy egyenlő: $<, \leq$; $2 < 3$, $5 \leq x$

Nagyobb, nagyobb vagy egyenlő: $>, \geq$; $6 > 4$, $a \geq 2$

A természetes számok halmaza: $\mathbf{N}$; $\{0; 1; 2; \ldots\}$

Az egész számok halmaza: $\mathbf{Z}$; $\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

A pozitív, a negatív egész számok halmaza: $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$; $\{1; 2; 3; \ldots\}$, $\{-1; -2; -3; \ldots\}$

A racionális, az irracionális számok halmaza: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^*$

A pozitív, a negatív racionális számok halmaza: $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$

A valós számok halmaza: $\mathbf{R}$

A pozitív, a negatív valós számok halmaza: $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$

Eleme, nem eleme a halmaznak: $\in, \notin$; $5 \in \mathbf{N}$, $-2 \notin \mathbf{Z}^+$

Részhalmaz, valódi részhalmaz: $\subseteq, \subset$; $A \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$

Zárt intervallum: $[a; b]$

Balról zárt, jobbról nyílt intervallum: $[a; b[$

Balról nyílt, jobbról zárt intervallum: $]a; b]$

Nyílt intervallum: $]a; b[$

Az x szám abszolút értéke: $|x|$; $|-3{,}1| = 3{,}1$

Az f függvény hozzárendelési szabálya: $f\colon x \mapsto f(x)$; $f\colon x \mapsto 2x + 3$ vagy $f(x) = y$; $f(x) = 2x + 3$

Az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen: $f(x_0)$; $f(5)$, ha $x_0 = 5$

n-faktoriális: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

I. Gondolkodási módszerek

1. Tétel és megfordítása, indirekt bizonyítás

1. K1 Az alábbi tételek közül melyek azok, amelyeknek a megfordítása is igaz?

a) Ha egy háromszög derékszögű, akkor köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja.

b) Ha egy síkbeli egyenes áthalad az azonos síkban levő kör középpontján, akkor felezi a kör területét.

c) Ha egy valós szám négyzete 1-nél nagyobb, akkor a valós szám is 1-nél nagyobb.

d) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.

a) Az állítás megfordítása: ha egy háromszög köré írható körének középpontja egy oldalának felezőpontja, akkor a háromszög derékszögű. E megfordítás igaz, hiszen hegyes szögű háromszög köré írható körének középpontja a háromszög belsejében van, tompa szögű háromszög esetében pedig a háromszögön kívül van. Tehát az eredeti állítás megfordítható.

b) Az állítás megfordítása: ha egy egyenes felezi egy kör területét, akkor áthalad a kör középpontján. Ez igaz, tehát az eredeti állítás megfordítható.

c) Az állítás megfordítása: Ha egy valós szám 1-nél nagyobb, akkor négyzete is 1-nél nagyobb. Ez nyilván igaz. Ugyanakkor az eredeti tétel nem igaz, hiszen, ha egy valós szám négyzete 1-nél nagyobb, akkor a valós szám még nem biztos, hogy nagyobb lesz 1-nél. Például: a –2 négyzete 4, vagyis 1-nél nagyobb, de –2 kisebb 1-nél, Most tehát arra láttunk egy példát, hogy az eredeti tétel nem igaz, de a megfordítása igaz.

d) A megfordítás: ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az paralelogramma. Ez igaz, tehát az eredeti állítás megfordítható.

2. K1 Igazoljuk az alábbi állítást! Egy szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha 5-re vagy 0-ra végződik.

Az állításban együtt szerepel egy tétel és annak megfordítása.

1. Ha egy szám osztható 5-tel, akkor 5-re vagy 0-ra végződik,
2. Ha egy szám 5-re vagy 0-ra végződik, akkor osztható 5-tel

1. 5-nek páros számú többszörösei 0-ra, páratlan számú többszörösei pedig 5-re végződnek. Tehát ha egy szám osztható 5-tel (azaz 5-nek többszöröse), akkor 5-re vagy 0-ra végződik.
2. Ha egy szám 5-re vagy 0-ra végződik, akkor $10k + 5$ vagy $10n$ alakú. Mivel mindkét esetben 5-tel osztható számhoz jutottunk, így valóban: az előbbi állítás megfordítása is igaz.

3. K1 Fogalmazzuk meg a következő állítások megfordítását és döntsük el, hogy igazak vagy sem! A megfordítható állításokat fogalmazzuk meg az „akkor és csak akkor” kifejezéssel!

a) Ha egy háromszög hegyes szögű, akkor köré írható körének középpontja a háromszög belsejében van.

b) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.

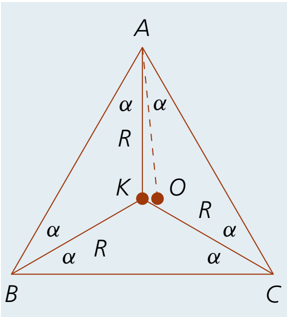
c) Ha néhány pozitív egész szám összege páros, akkor a közöttük levő páratlan számok száma páros.

a) Az állítás megfordítása: ha egy háromszög köré írható körének középpontja a háromszög belsejében van, akkor a háromszög hegyes szögű. Ez igaz, így a tétel és megfordítása együtt: egy háromszög akkor és csak akkor hegyesszögű, ha köré írható körének középpontja a háromszög belsejében van. (Természetesen így is fogalmazhattunk volna: egy háromszög köré írható körének középpontja akkor és csak akkor van a háromszög belsejében, ha a háromszög hegyes szögű.)

b) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor e négyszög paralelogramma. E megfordítás igaz, tehát mondhatjuk: egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha átlói felezik egymást. (Vagy másképpen fogalmazva: egy négyszög átlói akkor és csak akkor felezik egymást, ha e négyszög paralelogramma.)

c) Az állítás megfordítása: ha néhány pozitív egész szám között a páratlanok száma páros, akkor e számok összege páros. E megfordítás is igaz, tehát a két állítás egyben: néhány pozitív egész szám összege akkor és csak akkor páros, ha a közöttük levő páratlan számok száma páros.

4. K2 Igazoljuk indirekt úton, hogy a szabályos háromszög beírható és köré írható köreinek középpontjai egybeesnek!



Tegyük fel – indirekt –, hogy a szabályos háromszög beírható körének O középpontja és köré írható körének K középpontja nem esik egybe. Ekkor valamelyik csúcsból (pl. A-ból) induló AK és AO szakaszok különböző szakaszok. Mivel

$KA = KB = KC = R$

a köré írható kör R sugarai, ezért az ABK, BCK és ACK háromszögek egybevágó háromszögek, vagyis

$BAK\sphericalangle = ABK\sphericalangle = CBK\sphericalangle = BCK\sphericalangle = CAK\sphericalangle = ACK\sphericalangle = \alpha$.

Az O pont a beírható kör középpontja, ezért AO a háromszögnek egy szögfelezője. Mivel AK és AO különböző szakaszok, ezért

$\alpha = BAK\sphericalangle \neq BAO\sphericalangle = 30°$.

De ha

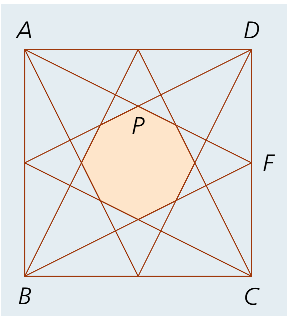
$\alpha \neq 30°$,

akkor a háromszög belső szögeinek összegére

$6\alpha \neq 180°$.

Azt kaptuk tehát, hogy ha K és O nem esik egybe, akkor a háromszög belső szögeinek összege nem 180°. Ez nyilván lehetetlen, így a K és O pontoknak valóban egybe kell esnie.

5. E1 Egy négyzet minden oldalának felezőpontját összekötöttük a szemközti csúcs két végpontjával. Igazoljuk indirekt úton, hogy a négyzet belsejében keletkező nyolcszög nem lehet szabályos nyolcszög!



Készítsük el a szükséges ábrát! Tegyük fel indirekt, hogy a négyzet belsejében keletkező nyolcszög szabályos.

Ha e nyolcszög szabályos, akkor minden szöge

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = \frac{6\cdot 180°}{8} = 135°.$$

Tehát pl. a P pontnál levő szög is 135°. Ekkor az APD egyenlő szárú háromszögben

$APD\sphericalangle = 135°$, tehát

$$ADP\sphericalangle = DAP\sphericalangle = \frac{180° - 135°}{2} = 22{,}5°.$$

Mivel a négyzet AC átlója az AD oldallal 45°-os szöget zár be, és a 22,5° a 45°-nak a fele, ezért az ACD háromszögben az AF szögfelező és – mivel F a CD oldal felező pontja – egyben súlyvonal is. De ha egy háromszögben egy szögfelező egyben súlyvonal is, akkor az egyenlő szárú háromszög, azaz esetünkben $AD = AC$.

Arra jutottunk, hogy ha a négyzet belsejében keletkezett nyolcszög szabályos, akkor a négyzet oldala egyenlő a négyzet átlójával. Ez nyilván lehetetlen, így a nyolcszög nem lehet szabályos.

2. Skatulya-elv

1. K1 Egy osztályban az osztálylétszám 28 fő. Év végén matematikából senki nem bukott meg; hárman kaptak 2-es osztályzatot. Igazoljuk, hogy volt legalább 9 tanuló, akik ugyanolyan osztályzatot kaptak!

Ha hárman kaptak 2-es osztályzatot és senki sem bukott meg, akkor 25 diák 3-as, 4-es vagy 5-ös osztályzattal zárta az évet. Ezek szerint 25 diákot kell három „fakkba" elhelyezni. Mivel $3 \cdot 8 = 24$, így kell lennie egy olyan fakknak, amelybe legalább 9 diák került, vagyis volt legalább 9 olyan tanuló, akik ugyanolyan osztályzatot kaptak.

2. K1 Nagymamánál a kamrában elromlott a világítás. A polcon van 3 üveg körte-, 5 üveg alma- és 11 üveg meggybefőtt.

a) Hány üveg befőttet kell kihoznunk a sötét kamrából, hogy a kihozottak között legyen mindhárom fajtából?

b) Hány üveg befőttet kell kihoznunk a sötét kamrából, hogy a kihozottak között legyen két egyforma befőtt?

a) A legtöbb (11 üveg) meggyből, a második legtöbb (5 üveg) almából van. Ezek szerint, ha (a legrosszabb esetet véve) 11 + 5 üveggel veszünk ki a kamrából, akkor még nem biztos, hogy minden fajtából lesz a kivett üvegek között. Tehát ahhoz, hogy mindegyikből legyen, legkevesebb $11 + 5 + 1 = 17$ üveggel kell kivenni.

b) Ha (ismét a legrosszabb esetet feltéve) mindhárom fajtából kiveszünk egy-egy üveggel, akkor még nem lesz olyan fajta, melyből 2 üveg van. Ha azonban még egyet kiveszünk (teljesen mindegy, hogy milyen fajtát), akkor már biztosan lesz olyan, amelyből van 2 üveggel. Tehát ahhoz, hogy valamelyik fajtából legyen két üveggel, legkevesebb $3 + 1 = 4$ üveggel kell kivennünk.

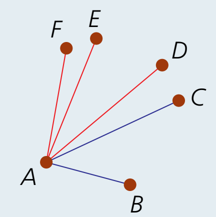
3. K1 Egy osztályban van három olyan diák, akik ugyanabban a hónapban ünneplik a születésnapjukat. Mit mondhatunk az osztálylétszámról?

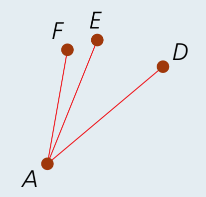
12 hónap van. Ha minden hónapban 2-2 diák ünnepli a születésnapját, akkor $2 \cdot 12 = 24$ diák lenne az osztályban. De ha biztosan tudjuk, hogy van olyan hónap, melyben 3 diák is születésnapot ünnepel, akkor még egy diáknak lennie kell, vagyis az osztálylétszám legalább 25.

4. K2 Egy boltban piros, sárga és fehér sálakat tartanak; mindhárom fajtából 30-30 darabot. Egy anyuka három gyermekének akar venni egy-egy sálat. Becsukott szemmel legalább hány sálat kell kivennie a bolt dobozából, ha azt akarja, hogy mindhárom gyermeke ugyanolyan színű sálat kapjon?

Vegyük a legrosszabb esetet: az első három húzásra három különböző színű sálat vesz ki. Ha a második három húzásra is három különböző sálat vesz ki, akkor eddig $2 \cdot 3 = 6$ sálat vett ki, de még nincs közöttük három egyforma. De a 7. húzásra már bármilyen színűt is választ, abból a színből már van 2 db, így biztosan lesz három egyforma színű sál. Tehát, ha legalább 7 sálat húz ki a dobozból, akkor már biztosan lesz közöttük 3 egyforma.

5. E1 Egy konvex hatszög minden oldalát és minden átlóját kiszíneztük pirosra vagy kékre. Igazoljuk, hogy ekkor lesz a rajzunkon olyan háromszög, melynek minden oldala azonos színű!





A sokszög egy csúcsából (pl. az A csúcsból) 5 db szakasz indul ki, melyek mindegyike piros vagy kék. Így a skatulya-elv alapján biztosan van közöttük három egyforma színű; legyenek ezek az AD, AE és AF szakaszok (lásd ábra).

Ha az EFD háromszög valamelyik oldala ugyanolyan színű, mint az azonos színű AF, AE és AD szakaszok, akkor készen vagyunk, hiszen ekkor vagy az AFE, vagy az AED vagy pedig az AFD háromszög oldalai azonos színűek. Ha viszont az EFD háromszög mindhárom oldala különbözik az AE, AF, AD szakaszok közös színétől, akkor az EFD háromszög oldalai lesznek azonos színűek.

6. E2 A budapesti és a veszprémi állatkertbe érkezett 257 papagáj: pirosak, sárgák, kékek és zöldek. Tudjuk, hogy nincs közöttük 5 azonos színű, különböző korú papagáj. Igazoljuk, hogy valamelyik állatkertben lesz 9 azonos színű és azonos korú papagáj!

Csoportosítsuk a 257 papagájt színek szerint. Mivel négyféle színű papagájunk van, ezért valamelyik színből lesz legalább 65 db. Ha ugyanis minden színből csak legfeljebb 64 db lenne, akkor legfeljebb $4 \cdot 64 = 256$ db papagájunk lenne.

Most vizsgáljuk ezt a 65 db azonos színű papagájt. Mivel – a feltételek szerint – nincs 5 azonos színű, különböző korú papagáj, ezért ezt a 65 papagájt korcsoportjaik szerint csak 4 féle korcsoportba sorolhatjuk. Ha 65 papagájt kell elhelyezni 4 „fakkba" (úgy, hogy az azonos korúak kerüljenek egy fakkba), akkor valamelyik korcsoportba biztosan lesz legalább 17 db. Ha ugyanis minden korcsoportból csak legfeljebb 16 lenne, akkor legfeljebb $4 \cdot 16 = 64$ papagáj lenne.

Arra jutottunk, hogy van az összes papagáj között 17 db azonos színű és azonos korú papagáj. E 17 papagáj közül néhány Veszprémbe, néhány pedig Budapestre kerül. Mivel $2 \cdot 8 = 16$, így valóban igaz, hogy valamelyik állatkertbe legalább 9 azonos színű és azonos korú papagáj kerül.

7. E2 Egy dobozban elhelyeztünk p-féle különböző színű golyót, mind a p színből q darabot, ahol p és q prímszámok. Ha legkevesebb annyi golyót akarunk kivenni a dobozból, hogy minden színből legyen a kivett golyók között, akkor 17-tel kevesebbet kellene kivenni, mint ha legkevesebb annyi golyót akarnánk kivenni a dobozból, hogy valamely színből mind a q darabot kivegyük. Hány golyó van a dobozban?

Ha legkevesebb annyi golyót akarunk kivenni a dobozból, hogy minden színből legyen a kivett golyók között, akkor $[(p-1)\cdot q+1]$ db golyót kell kivennünk.

1. szám	2. szám	3. szám	...	p. szám
q db	q db	q db	...	q db

Ha legkevesebb annyi golyót akarnánk kivenni a dobozból, hogy valamely színből mind a q darabot kivegyük, akkor $[(q-1)\cdot p+1]$ db golyót kell kivennünk a dobozból.

A feltételek szerint

$(p-1)\cdot q+1+17=(q-1)\cdot p+1$, azaz

$pq-q+17=pq-p$, tehát $q-p=17$.

De két prímszám különbsége csak akkor lehet páratlan, ha az egyik prímszám páros. Így nem lehet más, csak $p = 2$ és ekkor $q = 19$.

A dobozban levő golyók száma: $pq = 2\cdot 19 = 38$.

3. Egyszerű kombinatorikai feladatok

1. K1 Egy osztály tanulói közül heten járnak biológia szakkörre. Hányféle sorrendben írhatjuk be a nevüket a szakköri naplóba, ha nem ragaszkodunk az abc sorrendhez?

Az első helyre a hét tanuló bármelyikének nevét beírhatjuk a naplóba, a második helyre már csak a maradék hat valamelyike kerülhet. Ez eddig $7\cdot 6$ lehetőség. Harmadiknak már csak a megmaradt öt, negyediknek a maradék négy, ötödiknek a maradék három, hatodiknak a maradék kettő valamelyikét írhatjuk be, végezetül az egy megmaradt név kerül a hetedik helyre.
Vagyis a hét név sorrendje $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, azaz 5040-féle lehet.

2. K1 Az iskola sportnapján kilenc osztály nevezett a kosárlabdaversenyre. Hányféle sorrend alakulhat ki, ha nem lehet holtverseny?

Az előző feladat megoldásának gondolatmenetét követve: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, azaz 362 880-féle lehet a sorrend.

3. K1 Az ablakban nyolc cserepes növény van, amelyek közül 3 pirosat, 5 pedig fehéret virágzik. Hányféle sorrendben helyezhetők el, ha csak a virágok színét figyeljük?

A nyolc cserepes virág sorrendje: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Mivel csak a színek a fontosak, így osztanunk kell $1 \cdot 2 \cdot 3$-mal és $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$-tel: $\dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56$.
Vagyis 56-féleképpen alakulhat ki a sorrend.

4. K1 A bevásárlókosárba 3 egyforma sárgabaracklevet és 4 egyforma kajszibaracklevet teszünk. Hányféle sorrendben tehetjük ezt meg?

A hét baracklé sorrendje: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Mivel 3, illetve 4 doboz egyforma, ezért osztanunk kell $3 \cdot 2 \cdot 1$-gyel és $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$-gyel: $\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$.
Vagyis 35-féle sorrend lehetséges.

5. K1 Az ebédnél egy kör alakú asztal körül elhelyezett hat széken foglal helyet a hatfős család. Két leülést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a családnak van legalább egy olyan tagja, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.
a) Hányféleképpen lehet ez?
b) Hányféleképpen történhet az elhelyezkedés, ha a két legfiatalabb gyermek mindig egymás mellett ül?

a) Egy embert szabadon leültethetünk egy tetszőleges helyre, a többieket ehhez képest $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, azaz 120-féleképpen ültethetjük le.
b) A két legfiatalabb gyereket leültetjük egymásmellé. A többieket hozzájuk képest $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, azaz 24-féleképpen ültethetjük le. Mivel minden alkalommal a két fiatal gyermek helyet cserélhet, ezért $24 \cdot 2 = 48$ különböző leülés lehetséges.

6. K2 Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fog.
a) Hány kézfogás történt, ha 8 fős a társaság?
b) Hány fős a társaság, ha összesen 45 kézfogás volt?

a) Mindenki 7 emberrel fog kezet, ez így 56 kézfogás, de ekkor minden kézfogást kétszer számoltunk össze. Ezért 28 kézfogás történt.
b) Gondolkodjunk visszafelé! A 2-vel osztás előtt 90-et kaptunk. Ez 9-szer 10. Vagyis 10 fős a társaság.

7. K2 Botond megnézte a lecke kidolgozott példáit, és ezt mondta: – Ezeket a feladatokat ÉRTEM. Mi pedig adjuk meg az É, R, T, E és M betűk mindegyikének egyszeri felhasználásával az értelmes szavakat!

Az öt különböző betűt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, azaz 120-féle sorrendben tudjuk szerepeltetni, de ezek mindegyike nem lesz értelmes szó. A következő sorrendekhez tartoznak értelmes szavak: ÉRTEM, ÉRMET, RÉMET, RÉTEM, MÉTER, MÉRTE, MÉRET, TERMÉ.
Összesen nyolc értelmes szót találtunk.

Egy társaságban 6 férfi és 9 nő van. Férfi a férfival kezet fog. A nők „Szervusz!” köszöntéssel üdvözlik egymást. A férfiak a nőket „Kezét csókolom!”, a nők a férfiakat „Jó napot kívánok!” köszönéssel üdvözlik.

a) Hány kézfogás volt összesen?
b) Hányszor hangzott el a „Jó napot kívánok!” köszönés?
c) Hányszor hangzott el a „Kezét csókolom!”?
d) Hányszor hangzott el a „Szervusz!”?

a) A hat férfi kézfogásainak száma: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.
b) Minden nő minden férfit így köszöntött. Ez $9 \cdot 6$, azaz 54.
c) Minden férfi minden nőt így köszöntött. Ez $6 \cdot 9$, azaz 54.
d) Minden nő minden nőnek így köszönt. Ez $9 \cdot 8$, azaz 72.

4. Sorba rendezések száma

1. K1 Számítsuk ki!

a) $\frac{4001!}{3999!}$; *b)* $\frac{100!}{3! \cdot 97!}$; *c)* $\frac{2! + 4! + 6! + 8!}{2}$; *d)* $\frac{22! \cdot 24! \cdot 26!}{21! \cdot 23! \cdot 25!}$.

a) $\frac{4001!}{3999!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3999 \cdot 4000 \cdot 4001}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3999} = 4000 \cdot 4001 = 16\,004\,000$.

b) $\frac{100!}{3! \cdot 97!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 97)} = \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161\,700$.

c) $\frac{2! + 4! + 6! + 8!}{2} = \frac{2 + 24 + 720 + 40\,320}{2} = 20\,533$.

d) $\frac{22! \cdot 24! \cdot 26!}{21! \cdot 23! \cdot 25!} = 22 \cdot 24 \cdot 26 = 13\,728$.

2. K2 Hozzuk egyszerűbb alakra!

a) $(n-2)! \cdot (n-1)n(n+1)$; *b)* $(n-1)! \cdot n(n+1)(n+2)$;
c) $\frac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)}$; *d)* $\frac{(n+4)!}{(n+1)!}$;
e) $(n+3)! + (n+2)! + (n+1)!$; *f)* $\frac{(n-1)!}{n^2 - 3n + 2}$.

a) $(n-2)! \cdot (n-1)n(n+1) = (n+1)!$.
b) $(n-1)! \cdot n(n+1)(n+2) = (n+2)!$.
c) $\frac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)} = n!$.
d) $\frac{(n+4)!}{(n+1)!} = (n+2)(n+3)(n+4)$.
e) $(n+3)! + (n+2)! + (n+1)! = (n+1)![(n+2)(n+3) + (n+2) + 1] = (n+1)!(n^2 + 6n + 9)$.
f) $\frac{(n-1)!}{n^2 - 3n + 2} = \frac{(n-1)!}{(n-1)(n-2)} = (n-3)!$.

3. K2 Hány permutációja van a
a) FÖLDRAJZ;
b) INFORMATIKA;
c) MATEMATIKA
szó betűinek?

a) Nyolc különböző betűből áll a szó, így permutációinak száma: $P_8 = 8! = 40\,320$.

b) Tizenegy betűből áll a szó, az I betűből 2 db, az A betűből 2 db van, így a permutációk száma: $P_{11}^{2;2} = \frac{11!}{2! \cdot 2!} = 9\,979\,200$.

c) Tíz betűből áll a szó, az A betűből 3 db, az M betűből 2 db, a T betűből 2 db van, így a permutációk száma: $P_{10}^{3;2;2} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151\,200$.

4. K2 A metrón hat ember tud egymás mellett helyet foglalni. A végállomáson felszáll Attila, Brigitta, Dániel, Réka, Vanda és Viktória.

a) Hányféleképpen tudnak leülni erre a hat helyre?
b) Hányféleképpen tudnak leülni erre a hat helyre, ha Réka és Vanda egymás mellett szeretne ülni?
c) Hányféleképpen tudnak leülni erre a hat helyre, ha Attila és Viktória nem szeretne egymás mellett ülni?
d) Hányféleképpen tudnak leülni erre a hat helyre, ha a fiúk és a lányok nem keverednek össze?
e) Hányféleképpen tudnak leülni erre a hat helyre, ha a fiúk és a lányok nem keverednek össze, és Dániel Réka mellett szeretne ülni?
f) Hányféleképpen tudnak leülni erre a hat helyre, ha a fiúk és a lányok nem keverednek össze, és Dániel nem szeretne Réka mellett ülni?

a) Hat ember sorba rendezéséről van szó, így a lehetőségek száma: $P_6 = 6! = 720$.

b) A két lány egymás mellett szeretne ülni, ezért tekintsük őket egynek.
A sorrendek száma: $P_5 = 5! = 120$, de minden ilyen esetet kétszer kell számolnunk, mert Réka és Vanda helycseréjével új sorrendet kapunk. Ezért az összes eset száma 240.

c) Az előző két kérdés alapján tudjuk, hogy összesen 720 eset lehetséges, és 240 olyan eset van, amikor két ember ragaszkodik ahhoz, hogy egymás mellett üljön. Ezen meggondolások alapján $720 - 240 = 480$ olyan eset lehetséges, amikor Attila és Viktória nem ül egymás mellett.

d) Két fiú és négy lány szeretne leülni. A két fiú kétféleképpen foglalhat helyet egymás mellett, a négy lány pedig $4! = 24$-féleképpen ülhet melléjük. Ez eddig 48 lehetőség. Azonban különböző leülést kapunk, ha a fiúk mellé jobbra ülnek a lányok, vagy a lányok mellé jobbra ülnek a fiúk. Ezért az összes eset száma 96.

e) Dánielt és Rékát leültetjük egymás mellé.
Ezután két esetet különböztethetünk meg.
I. eset: Dániel mellé balra leül Attila, Réka mellé jobbra leül a három lány. Ez összesen hat lehetőség.
II. eset: Dániel mellé jobbra leül Attila, Réka mellé balra leül a három lány. Ez összesen hat lehetőség.
Vagyis összesen 12 sorrend képzelhető el.

f) Két eset lehetséges: I. Dániel ül valamelyik szélen. II. Attila ül valamelyik szélen.
I. eset: Dániel a jobb- és a balszélen is ülhet. Elegendő csak az egyikfélét összeszámolnunk, mert az esetek számának kétszerezésével megkapjuk az összes eset számát.
Dániel mellett Attila foglal helyet, majd a négy lány. A négy lány sorrendje $4! = 24$-féleképpen lehetséges.
Vagyis ebben az esetben mindent figyelembe véve $2 \cdot 24 = 48$ megfelelő sorrend van.
II. eset: Attila a jobb- és a balszélen is ülhet. Most is elegendő csak az egyikfélét összeszámolnunk, és utána kétszerezni az esetek számát.
Attila mellett Dániel foglal helyet, majd Réka kivételével bármelyik lány leülhet Attila mellé. Ez három lehetőség. A további három lány sorrendje $3! = 6$-féleképpen lehetséges.
Vagyis ebben az esetben mindent figyelembe véve $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$ megfelelő sorrend van.
Az összes eset száma: $48 + 36 = 84$.

Megjegyzés: A különböző lehetőségeket végiggondolva megkaptuk az összes eset számát. Most is gyors és eredményes az az észrevétel, hogy az összes lehetséges esetből vegyük el a nekünk nem megfelelő esetek számát. Most a *d)* és az *e)* feladatban kapott eredményeink segítségével is megkaphatjuk a kívánt végeredményt: 96 – 12 = 84.

5. K2 Az ebédlőben az asztal körül elhelyezett hét széken szeretne helyet foglalni Anna, Balázs, Bálint, Domonkos, Dóra, Fanni és Simona. Két leülést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy olyan tagja a társaságnak, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.

a) Hányféleképpen foglalhatnak helyet?
b) Hányféleképpen történhet az elhelyezkedés, ha Anna és Fanni egymás mellett szeretne ülni?
c) Hányféleképpen történhet az elhelyezkedés, ha Bálint szomszédjai Domonkos és Balázs?

a) Képzeljük el, hogy egy embert leültetünk egy rögzített helyre. Ezek után tőle pl. jobbra hat embert 6!-féleképpen lehet leültetni.
Vagyis az összes eset száma: 720.

b) Annát és Fannit ültessük le egymás mellé. Ezt kétféleképpen tudjuk megtenni: Annának Fanni lehet a jobb és lehet a bal szomszédja is. Tőlük pl. jobbra haladva az öt embert 5!-féleképpen lehet leültetni.
Vagyis az összes eset száma: $2 \cdot 120 = 240$.

c) Lehetséges, hogy Bálint jobbszomszédja Balázs, és lehetséges, hogy Domonkos. Tőlük pl. jobbra haladva a négy embert 4!-félekeppen lehet leültetni.
Vagyis az összes eset száma: $2 \cdot 24 = 48$.

6. K2 Egy automatába eddig bedobtunk 4 db ötvenes és 6 db százas pénzérmét. Hányféle sorrendben tehettük ezt meg?

A 10 pénzérme ismétléses permutációjáról van szó: $P_{10}^{4;6} = \dfrac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$.

7. K2 Készítsünk hétjegyű telefonszámokat 1 db 0, 1 db 5, 3 db 2 és 2 db 4 számjegy mindegyikének felhasználásával!

a) Hány darab készíthető, ha az első helyre nem rakhatjuk a 0 számjegyet?
b) Hány darab 242 kezdetű telefonszámot tudunk készíteni ezen számjegyek felhasználásával?

a) A hét számjegy ismétléses permutációinak száma: $P_7^{3;2} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$.

Ezek közül a 0-val kezdődő esetek száma: $P_6^{3;2} = \dfrac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$.

Vagyis ezekből a számjegyekből készíthető, nullával nem kezdődő hétjegyű telefonszámok száma: $420 - 60 = 360$.

b) A 242 után írható számjegyek: 1 db 0, 1 db 5, 1 db 2 és 1 db 4. Vagyis 4 különböző számjegy sorbarendezéséről van szó: $P_4 = 4! = 24$.
Azaz 24 megfelelő szám létezik.

8. K2 A tíz számjegy mindegyikének felhasználásával hány darab

a) tízjegyű;
b) tízjegyű, hárommal osztható;
c) tízjegyű, kilenccel osztható;
d) tízjegyű, hattal osztható;
e) tízjegyű, negyvenöttel osztható;
f) tízjegyű, kilencvennel osztható

szám készíthető?

a) A tíz számjegy összes sorbarendezései közül nem megfelelőek a 0-val kezdődők. Vagyis az összes megfelelő eset száma: $10! - 9! = 3\,265\,920$.

b) Mivel a tíz számjegy összege 45 (azaz hárommal osztható), ezért minden ilyen tízjegyű szám hárommal osztható lesz. Vagyis 3 265 920 db megfelelő szám készíthető.

c) Mivel a tíz számjegy összege 45 (azaz kilenccel osztható), ezért minden ilyen tízjegyű szám kilenccel osztható lesz. Vagyis 3 265 920 db megfelelő szám készíthető.

d) Már láttuk, hogy ezek a számok hárommal biztosan oszthatók lesznek. Párosnak is kell lenniük, hogy hattal oszthatók legyenek.
Két esetet különböztetünk meg:
I. eset: Az utolsó jegy 0.
Ekkor a többi kilenc számjegy minden sorrendjéhez megfelelő tízjegyű szám tartozik. Vagyis ebben az esetben 9!, azaz 362 880 darab megfelelő szám van.
II. eset: Az utolsó jegy nem nulla.
Ekkor az utolsó jegy a 2, 4, 6, 8 valamelyike lehet. Az egyik végződés esetén összeszámoljuk a lehetőségeket, majd a kapott eredményt négyszerezzük.
Rögzítsük az utolsó helyen pl. a 2-t. A többi kilenc számjegy sorrendje 9!, de ezek között a 0 kezdetűek is szerepelnek. Ezek száma 8!.
Mindent figyelembe véve ebben az esetben az összes megfelelő szám darabszáma:
$4(9! - 8!) = 1290\,240$.
A két eset összesen: 362 880 + 1 290 240 = 1 653 120.

e) Már láttuk, hogy ezek a számok kilenccel biztosan oszthatók lesznek. Öttel oszthatónak is kell lenniük, hogy negyvenöttel oszthatók legyenek.
Két esetet különböztetünk meg:
I. eset: Az utolsó jegy 0.
Ezek száma: 9!, azaz 362 880 darab.
II. eset: Az utolsó jegy 5.
A többi kilenc számjegy sorrendje 9!, de ezek között a 0 kezdetűek is szerepelnek. Ezek száma 8!. Vagyis 9! – 8! = 322 560 darab ötre végződő megfelelő szám van.
A két eset összesen: 362 880 + 322 560 = 685 440.

f) Már láttuk, hogy ezek a számok kilenccel biztosan oszthatók lesznek. 0-ra végződőeknek is kell lenniük, hogy kilencvennel oszthatók legyenek.
Ha az utolsó jegy 0, akkor a többi kilenc szám sorrendje 9! lehet.
Vagyis 362 880 db megfelelő szám van.

9. E1 Igazoljuk, hogy három egymást követő pozitív egész szám faktoriálisainak összegét úgy is kiszámíthatjuk, hogy a legkisebb szám faktoriálisát megszorozzuk a legnagyobb szám négyzetével!

Legyen a három egymást követő pozitív egész szám: $a-1$, a, $a+1$, ahol $a \geq 2$, a pozitív egész szám.
Ekkor $(a-1)! + a! + (a+1)! = [1 + a + a(a+1)](a-1)! = (a^2 + 2a + 1)(a-1)! = (a+1)^2(a-1)!$.
Ez pedig igazolja a bizonyítandó állítást.

10. E1 A kosárlabda-mérkőzésen 1, 2 és 3 pontos kosár is dobható. A csapat egyik játékosa a mérkőzésen 12 pontot szerzett. Hányféleképpen alakulhatott ki ez a pontszám?

Legyen a 3 pontos dobásainak a száma x, a 2 pontos dobásainak száma y, az 1 pontosoké pedig z.
Ekkor $3x + 2y + z = 12$.
Foglaljuk táblázatba a lehetséges számhármasokat.
A táblázat negyedik sorában a $P_{x+y+z}^{x;y;z}$ szerepel.

x	4	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
y	0	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0
z	0	1	3	0	2	4	6	1	3	5	7	9	0	2	4	6	8	10	12
	1	20	20	10	90	105	28	30	140	168	72	10	1	21	70	84	45	11	1

A negyedik sorban szereplő számok összege adja a feladat megoldását: 927 lehetőség van.

11. E1 A bajnokság hetedik fordulója után az egyik focicsapatnak 11 pontja van. A győzelem 3, a vereség 0, a döntetlen 1 pontot ér. Hányféleképpen alakulhatott ki ez a pontszám?

Legyen a győzelmek száma x, a döntetlenek száma y, a vereségeké pedig z. Ekkor $x+y+z=7$ és $3x+y=11$.
Foglaljuk táblázatba a lehetséges számhármasokat.
A táblázat negyedik sorában a $P_7^{x;y;z}$ szerepel.

x	3	2
y	2	5
z	2	0
	210	21

A negyedik sorban szereplő számok összege adja a feladat megoldását: 231 lehetőség van.

5. Kiválasztás és sorrend

1. K1 Írjuk fel az ERDŐ szó betűiből képezhető három betűs (nem feltétlenül értelmes) szavakat, ha minden betű csak egyszer szerepelhet egy szóban!

A négy betű harmadosztályú variációinak száma: $V_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$. Ez a 24 eset a következő: ERD, EDR, RED, RDE, DER, DRE, ERŐ, EŐR, REŐ, RŐE, ŐER, ŐRE, EDŐ, EŐD, DEŐ, DŐE, ŐED, ŐDE, RDŐ, RŐD, DRŐ, DŐR, ŐRD, ŐDR

2. K1 Az 1, 3, 5, 7 számjegyek felhasználásával háromjegyű, illetve négyjegyű számokat készítünk. Egy számban mindegyik számjegy maximum egyszer szerepelhet. Hasonlítsuk össze az így képezhető háromjegyű és négyjegyű számok számát!

Az első esetben a négy betű harmadosztályú variációinak számát kell meghatároznunk:
$V_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$.
A második esetben a négy betű permutációinak számát kell meghatároznunk:
$P_4 = 4! = 24$.
Az így képezhető háromjegyű és négyjegyű számok száma egyenlő.

Megjegyzés: Számolás nélkül is erre a megállapításra jutottunk volna, hiszen bármelyik háromjegyű számhoz egyértelműen tartozik egy négyjegyű szám (a negyedik számjegyet a háromjegyű végére írjuk).

3. K1 Az iskolai szavalóverseny döntőjébe tíz tanuló jutott. Az első hat helyezett kap hat különböző díjat. Hányféle sorrend alakulhat ki?

A tíz tanuló hatodosztályú variációinak számát kell meghatároznunk:
$V_{10}^6 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 151200$.

4. K2 Hány ember indult azon a sportversenyen, ahol az arany, ezüst, bronz érmek kiosztása 504-féleképpen történhetne?

Az indulók száma legyen n. Az n induló harmadosztályú variációinak száma 504, vagyis:
$V_n^3 = n\cdot(n-1)\cdot(n-2) = 504$.
Megtalálható, hogy $9\cdot 8\cdot 7 = 504$, vagyis az $n = 9$ megoldás.
Ha n helyére 9-nél kisebb pozitív egész számot írunk, akkor a szorzat kisebb lesz, mint 504, ha nagyobbat, akkor pedig a szorzat nagyobb lesz, mint 504. Vagyis egyedüli megoldás a 9.
A sportversenyen 9 ember indult.

5. K2 Egy vetélkedő 9 szereplőjének jutalma három különböző díj lesz. Hányféleképpen vihetik el a játék végén a nyereményeket, ha egy versenyző többet is nyerhet?

Kilenc elem harmadosztályú ismétléses variációinak számát kell meghatároznunk:
$V_9^3(\text{ism}) = 9^3 = 729$.

6. K2 Egy tesztes versenyen 30 kérdés mindegyikére 5 különböző válaszból választhatunk, egy másik versenyen pedig 4 különbözőből (minden kérdésre csak egy jó válasz van). Maximum hány kérdéses lehet ez utóbbi teszt, ha azt szeretnénk, hogy a kitöltési lehetőségek száma kevesebb legyen, mint a 30 kérdésesé?

Legyen a második teszt n kérdéses. Ekkor a feladat feltételeinek megfelelően a következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:
$4^n < 5^{30}$.
Számológéppel kapjuk, hogy $5^{30} \approx 9{,}31 \cdot 10^{20}$. A 4 pozitív egész kitevőjű hatványai növekedő számsorozatot adnak, így gyorsan megtalálható, hogy $2{,}95 \cdot 10^{20} \approx 4^{34} < 5^{30} < 4^{35} \approx 1{,}18 \cdot 10^{21}$, vagyis maximum 34 kérdéses lehet ez a teszt.

7. K2 Hatjegyű számot egy nyolclapú sorsvetővel (dobóoktaéder) állítunk elő.
A test nyolc lapja 1-től 8-ig számozott. A dobott számokat a dobás sorrendjében egymás után írjuk. A hatodik dobás után kialakul egy hatjegyű szám. Hányféle hatjegyű számot nem kaphatunk meg ilyen módon?

A hatjegyű számok száma: $9 \cdot 10^5 = 900\,000$.
A sorsvetővel dobható hatjegyű számok száma: $8^6 = 262\,144$.
Vagyis $900\,000 - 262\,144 = 637\,856$ darab hatjegyű számot nem kaphatunk meg ilyen módon.

6. Kiválasztások számának meghatározása

1. K1 Számítsuk ki!

a) $\binom{7}{3}$; *b)* $\binom{9}{4}$; *c)* $\binom{12}{9}$; *d)* $\binom{21}{19}$.

a) $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$.

b) $\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$.

c) $\binom{12}{9} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$.

d) $\binom{21}{19} = \binom{21}{2} = \frac{21 \cdot 20}{1 \cdot 2} = 210$.

2. K1 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\binom{10}{7}\binom{7}{2}$; *b)* $\binom{10}{9}\binom{9}{2}$; *c)* $\binom{7}{3}:\binom{14}{11}$; *d)* $\binom{9}{8}:\binom{100}{98}$.

a) $\binom{10}{7}\binom{7}{2} = \binom{10}{3}\binom{7}{2} = 120 \cdot 21 = 2520$.

b) $\binom{10}{9}\binom{9}{2} = \binom{10}{1}\binom{9}{2} = 10 \cdot 36 = 360$.

c) $\binom{7}{3}:\binom{14}{11} = \binom{7}{3}:\binom{14}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{14 \cdot 13 \cdot 12} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{14 \cdot 13 \cdot 12} = \frac{5}{52}$.

d) $\binom{9}{8}:\binom{100}{98} = \binom{9}{1}:\binom{100}{2} = 9 \cdot \frac{1}{4950} = \frac{1}{550}$.

3. K1 Végezzük el az összeadásokat, kivonásokat!

a) $\binom{5}{2}+\binom{7}{3}$; *b)* $\binom{9}{7}+\binom{9}{2}$; *c)* $\binom{8}{4}-\binom{14}{13}$; *d)* $\binom{100}{98}-\binom{9}{6}$.

a) $\binom{5}{2}+\binom{7}{3}=10+35=45.$

b) $\binom{9}{7}+\binom{9}{2}=\binom{9}{2}+\binom{9}{2}=36+36=72.$

c) $\binom{8}{4}-\binom{14}{13}=\binom{8}{4}-\binom{14}{1}=70-14=56.$

d) $\binom{100}{98}-\binom{9}{6}=\binom{100}{2}-\binom{9}{3}=4950-84=4866.$

4. K1 Mennyibe került volna 2010-ben megjátszani az összes lehetséges szelvényt az ötös lottón, ha akkor 225 Ft-ba került egy fogadás?
(Az ötös lottó első 50 évében a legnagyobb nyeremény 5 092 890 758 Ft volt, 2003. november 29-én.)

A 90 szám ötödosztályú kombinációinak számát kell megszoroznunk a 225 Ft-os egységárral:
$225\cdot\binom{90}{5}=9\,888\,585\,300$ (Ft).
(Lényegesen többe kerülne, mint a lottótörténelem eddigi legnagyobb nyereménye.)

5. K1 A hatos lottón a hetenként rendezett sorsoláson az 1-től 45-ig terjedő egész számokból húznak ki hat számot. A játékosok 45 számból hat számot játszhatnak meg.
a) Hány darab játékszelvényt kellene kitölteni a biztos telitalálathoz?
b) Hasonlítsuk össze a kapott darabszámot az ötös lottó esetén kapottal!

a) A 45 szám hatodosztályú kombinációinak számát kell meghatároznunk:
$C_{45}^{6}=\binom{45}{6}=8\,145\,060.$

b) $43\,949\,268=\binom{90}{5}>\binom{45}{6}=8\,145\,060.$
Az ötös lottó kitöltési lehetőségeinek száma több mint ötszöröse a hatos lottóénak.

6. K2 Adott n db pont úgy, hogy nincs közöttük három, amely egy egyenesre illeszkedne, és nincs közöttük négy, amely egy síkban lenne. Hány szakaszt, hány háromszöget, hány tetraédert határoznak meg, ha
a) $n=4$; *b)* $n=6$; *c)* $n=8$; *d)* $n=10$?

a) Szakaszok: $\binom{4}{2}=6$ db, háromszögek: $\binom{4}{3}=4$ db, tetraéderek: $\binom{4}{4}=1$ db.

b) Szakaszok: $\binom{6}{2}=15$ db, háromszögek: $\binom{6}{3}=20$ db, tetraéderek: $\binom{6}{4}=15$ db.

c) Szakaszok: $\binom{8}{2}=28$ db, háromszögek: $\binom{8}{3}=56$ db, tetraéderek: $\binom{8}{4}=70$ db.

d) Szakaszok: $\binom{10}{2}=45$ db, háromszögek: $\binom{10}{3}=120$ db, tetraéderek: $\binom{10}{4}=210$ db.

7. K2 Egy kosárban 36 darab pingpong labda van, 9 darab sárga, a többi fehér. Hányféleképpen lehet kiválasztani 6 labdát, hogy a kiválasztottak között
a) 0; *b)* 1; *c)* 3; *d)* 5
sárga legyen?

a) $\binom{9}{0} \cdot \binom{27}{6} = 1 \cdot 296\,010 = 296\,010.$

b) $\binom{9}{1} \cdot \binom{27}{5} = 9 \cdot 80\,730 = 726\,570.$

c) $\binom{9}{3} \cdot \binom{27}{3} = 84 \cdot 2925 = 245\,700.$

d) $\binom{9}{5} \cdot \binom{27}{1} = 126 \cdot 27 = 3402.$

7. A matematikai logika alapfogalmai

1. K1 Döntsük el a következő mondatokról, hogy állítások-e!
A: Vigyázz, a kutya harap!
B: Milyen színű inget vettél?
C: Odatettem.
D: Számítsuk ki a szabályos háromszög területét, ha a magassága 5 cm hosszú!
E: Ez egy barna kabát?
F: Holnap nem fog esni az eső.

A nem kijelentő mondatok nem lehetnek állítások. A *C* egy hiányos mondat, így nem tekinthetjük állításnak. Az *F* esetében pedig még nem tudhatjuk, hogy igaz vagy hamis.
Vagyis egyik mondat sem állítás.

2. K1 Döntsük el a következő mondatokról, hogy állítások-e! Állítás esetén adjuk meg a logikai értékét!
A: Kétszer kettő néha öt.
B: Két út van előttem, melyiken induljak?
C: Száz forintnak ötven a fele.
D: Szabad a madárnak ágról ágra szállni.

Az *A* állítás, $|A| = h$.
A *B* nem állítás (nem kijelentő mondat).
A *C* állítás, $|C| = i$.
A *D* állítás, $|D| = i$.

3. K1 Adjuk meg a logikai értékét a következő állításoknak!
A: A 11 páratlan szám.
B: A 267 osztható 3-mal.
C: A deltoid olyan négyszög, amelynek van derékszöge.
D: A pókoknak hat lába van.
E: A *Talán eltűnök hirtelen* verssort József Attilánál olvashatjuk.
F: A kadmium vegyjele Ca.
G: Edelényen keresztül folyik a Bódva.
H: Wass Albert egyik regényének címe a *Tizenhárom almafa*.
A döntésekhez használhatunk szakirodalmat, világhálót!

$|A| = i,\ |B| = i,\ |C| = h,\ |D| = h,\ |E| = i,\ |F| = h,\ |G| = i,\ |H| = i.$

4. K1 A következő állítások tartalma megegyezik egy-egy közmondásunkkal. Adjuk meg a közmondásokat a szokásos alakban!
A: Sok liba diadalmaskodik a sertés fölött.
B: Az ebet ezen a helyen hantolták el.
C: A valótlant állítót gyorsabban utolérik, mint a járáshibás ebet.
D: Az év ötödik hónapjában hulló cseppfolyós halmazállapotú csapadék értéke az arannyal egyező.

A: Sok lúd disznót győz.
B: Itt van a kutya elásva.
C: Könnyebb utolérni a hazug embert, mint a sánta kutyát.
D: Májusi eső aranyat ér.

5. K1 Írjuk fel a következő szavak tagadását, majd adjuk meg egy-egy ellentétüket is!
a) magas; *b)* buta; *c)* vékony; *d)* szögletes; *e)* kicsi; *f)* csúnya.

a) nem magas;	alacsony.
b) nem buta;	okos.
c) nem vékony;	vastag.
d) nem szögletes;	kerek.
e) nem kicsi;	nagy.
f) nem csúnya;	szép.

6. K2 Írjuk fel a következő állítások tagadását! Döntsük el, hogy melyik igaz: az állítás vagy a tagadása!
A: Minden természetes szám pozitív.
B: Minden paralelogrammában a két átló egyenlő hosszú.
C: Minden 3-mal osztható szám osztható 9-cel.
D: Van olyan háromszög, amelynek csak egy hegyesszöge van.
E: Van olyan háromszög, amelynek pontosan két oldala egyenlő hosszúságú.
F: Öt egymást követő páratlan szám mindegyike lehet prímszám.

$\neg A$: Nem igaz, hogy minden természetes szám pozitív. Azaz van olyan természetes szám, amely nem pozitív.
$|\neg A| = i$.
$\neg B$: Nem igaz, hogy minden paralelogrammában a két átló egyenlő hosszú. Azaz van olyan paralelogramma, amelyben a két átló nem egyenlő hosszú.
$|\neg B| = i$.
$\neg C$: Nem igaz, hogy minden 3-mal osztható szám osztható 9-cel. Azaz van olyan szám, ami 3-mal osztható, és nem osztható 9-cel.
$|C| = i$.
$\neg D$: Nem igaz, hogy van olyan háromszög, amelynek csak egy hegyesszöge van. Azaz nincs olyan háromszög, amelynek csak egy hegyesszöge van.
$|\neg D| = i$.
$\neg E$: Nem igaz, hogy van olyan háromszög, amelynek pontosan két oldala egyenlő hosszúságú. Azaz nincs olyan háromszög, amelynek pontosan két oldala egyenlő hosszúságú.
$|E| = i$.
$\neg F$: Nem igaz, hogy öt egymást követő páratlan szám mindegyike lehet prímszám. Azaz öt egymást követő páratlan szám mindegyike nem lehet prímszám.
$|\neg F| = i$.

8. Logikai műveletek

1. K1 Igazoljuk értéktáblázattal, hogy a
a) konjunkció;
b) diszjunkció
kommutatív művelet!

a)

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$
i	*i*	*i*	***i***
i	*h*	*h*	***h***
h	*i*	*h*	***h***
h	***h***	***h***	***h***

b)

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$
i	*i*	*i*	***i***
i	*h*	*i*	***i***
h	*i*	*i*	***i***
h	***h***	***h***	***h***

2. K2 Igazoljuk értéktáblázattal a következő azonosságokat!
a) $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$;
b) $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.
(A szakirodalom *de Morgan*-azonosságoknak nevezi ezeket az összefüggéseket.)

a)

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
i	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	***h***
i	*h*	*i*	*h*	*h*	*i*	***h***
h	*i*	*i*	*h*	*i*	*h*	***h***
h	***h***	***h***	***i***	***i***	***i***	***i***

A táblázat negyedik és hetedik oszlopa mutatja az állítás helyességét.

b)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
i	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	***h***
i	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	***i***
h	*i*	*h*	*i*	*i*	*h*	***i***
h	***h***	***h***	***i***	***i***	***i***	***i***

A táblázat negyedik és hetedik oszlopa mutatja az állítás helyességét.

3. K2 Tagadjuk a következő állításokat!
A: Bodzaszörpöt iszom, vagy paprikás krumplit eszem.
B: Elmegyek a kutyával sétálni, és levágom a kertben a füvet.
C: Megírom a matematika házi feladatot, és nem kapcsolom be a számítógépet.
D: Nem veszek kenyeret, vagy veszek sajtot.

Alkalmazzuk a $\neg(P \vee Q) = ((\neg P) \wedge (\neg Q))$ azonosságot az *A*, *D* esetben.
Alkalmazzuk a $\neg(P \wedge Q) = ((\neg P) \vee (\neg Q))$ azonosságot a *B*, *C* esetben.

$\neg A$: Nem iszom bodzaszörpöt, és nem eszem paprikás krumplit.
$\neg B$: Nem megyek el a kutyával sétálni, vagy nem vágom le a kertben a füvet.
$\neg C$: Nem írom meg a matematika házi feladatot, vagy bekapcsolom a számítógépet.
$\neg D$: Veszek kenyeret, és nem veszek sajtot.

4. K1 A következő állítások közismert szólásoknak a tagadásai. Adjuk meg az eredeti állításokat!
$\neg A$: Van olyan dolog, ami nem jó, és mégis jó a vége.
$\neg B$: Nem fújja a szél, és mégis zörög a haraszt.

A: Minden jó, ha jó a vége.
B: Nem zörög a haraszt, ha a szél nem fújja.

5. K2 A felsorolt állítások között vannak-e azonosak?
$A \wedge B$, $A \wedge (\neg B)$, $(\neg A) \wedge B$, $(\neg A) \wedge (\neg B)$, $A \vee B$, $A \vee (\neg B)$, $(\neg A) \vee B$, $(\neg A) \vee (\neg B)$.

Készítsünk értéktáblázatot!

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \wedge (\neg B)$	$(\neg A) \wedge B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$A \vee B$	$A \vee (\neg B)$	$(\neg A) \vee B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
i	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	***h***
i	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*	***i***
h	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	***i***
h	***h***	***i***	***i***	***h***	***h***	***h***	***i***	***h***	***i***	***i***	***i***

A táblázat alapján látjuk, hogy a felsorolt állítások között nincsenek azonosak.

6. K2 A felsorolt állítások között keressük meg az azonosakat!
$A \wedge B$, $A \wedge (\neg B)$, $(\neg A) \wedge B$, $(\neg A) \wedge (\neg B)$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(A \vee (\neg B))$, $\neg((\neg A) \vee B)$, $\neg((\neg A) \vee (\neg B))$.

Alkalmazzuk a következő azonosságokat:
$\neg(P \vee Q) = (\neg P \wedge \neg Q)$;
$\neg(\neg P) = P$.
Ezek alapján a következő párosításokat kapjuk:
$\neg((\neg A) \vee (\neg B)) = A \wedge B$;
$\neg((\neg A) \vee B) = A \wedge (\neg B)$;
$\neg(A \vee (\neg B)) = (\neg A) \wedge B$;
$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$.

7. K2 A felsorolt állítások között keressük meg az azonosakat!
$\neg(A \wedge B)$, $\neg(A \wedge (\neg B))$, $\neg((\neg A) \wedge B)$, $\neg((\neg A) \wedge (\neg B))$, $A \vee B$, $A \vee (\neg B)$, $(\neg A) \vee B$, $(\neg A) \vee (\neg B)$.

Alkalmazzuk a következő azonosságokat:
$\neg(P \wedge Q) = ((\neg P) \vee (\neg Q))$;
$\neg(\neg P) = P$.
Ezek alapján a következő párosításokat kapjuk:
$\neg((\neg A) \wedge (\neg B)) = A \vee B$;
$\neg((\neg A) \wedge B) = A \vee (\neg B)$;
$\neg(A \wedge (\neg B)) = (\neg A) \vee B$;
$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.

9. Műveleti tulajdonságok

1. K1 Igazoljuk a következő négy azonosságot!
a) $A \wedge A = A$;
b) $A \vee A = A$;
c) $A \wedge (A \vee B) = A$;
d) $A \vee (A \wedge B) = A$.

Készítsünk értéktáblázatot!

a)

A	$A \wedge A$
i	***i***
h	***h***

b)

A	$A \vee A$
i	***i***
h	***h***

c)

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$
i	*i*	*i*	***i***
i	*h*	*i*	***i***
h	*i*	*i*	***h***
h	***h***	***h***	***h***

d)

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$
i	*i*	*i*	***i***
i	*h*	*h*	***i***
h	*i*	*h*	***h***
h	***h***	***h***	***h***

2. K1 Legyen $|P| = p$ (ahol p lehetséges értéke i vagy h). Igazoljuk, hogy
a) $p \wedge i = p$;
b) $p \vee h = p$!

a)

p	i	$p \wedge i$
i	*i*	***i***
h	***i***	***h***

Vagyis az állítás igaz.

b)

p	h	$p \vee h$
i	*h*	***i***
h	***h***	***h***

Vagyis az állítás igaz.

3. K2 Igazoljuk a következő azonosságot!
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Készítsük el a megfelelő értéktáblázatot!

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
i	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	***i***
i	*i*	*h*	*i*	*i*	*i*	*h*	***i***
i	*h*	*i*	*i*	*i*	*h*	*i*	***i***
h	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	***h***
i	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*	***h***
h	*i*	*h*	*i*	*h*	*h*	*h*	***h***
h	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	***h***
h	***h***	***h***	***h***	***h***	***h***	***h***	***h***

A táblázat ötödik és nyolcadik oszlopa mutatja, hogy azonos minden esetben a logikai értéke a két összetett állításnak, vagyis a konjunkció valóban disztributív a diszjunkció felett.

4. K2 A disztributív tulajdonságok felhasználásával mondjuk rövidebben a következő állításokat!
a) Holnapra elolvasom ezt a novellát és sakkozom Ágnessel, vagy holnapra elolvasom ezt a novellát és pingpongozom Ágnessel.
b) Elmegyek röplabdázni vagy készítek egy csésze teát, és elmegyek röplabdázni vagy készítek egy melegszendvicset.

a) Holnapra elolvasom ezt a novellát és sakkozom vagy pingpongozom Ágnessel.
b) Elmegyek röplabdázni, vagy készítek egy csésze teát és egy melegszendvicset.

10. Gráfok

1. K1 Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, melynek
a) éleinek a száma a csúcsok számának 11-szerese?
b) éleinek a száma a csúcsai számának háromszorosánál 9-cel nagyobb?

a) Ha a gráf csúcsainak a száma n, akkor a feltételek szerint
$$\frac{n(n-1)}{2} = 11n, \quad \text{azaz } (n \neq 0) \quad n-1 = 22, \quad \text{tehát} \quad n = 23.$$

b) A feltételek szerint
$$\frac{n(n-1)}{2} = 3n+9, \quad \text{azaz} \quad n^2 - n = 6n+18, \quad \text{ahonnan} \quad n^2 - 7n - 18 = 0.$$
$$n_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{2} = \frac{7 \pm 11}{2}, \quad n_1 = 9, \quad n_2 = -2.$$
A negatív gyök nyilván nem jöhet számításba, így a feltételeknek eleget tevő gráf csúcsainak a száma $n = 9$.

2. K1 Egy bajnokságban 8 csapat játszik körmérkőzést. Eddig 9 meccs zajlott le. Igazoljuk, hogy van olyan csapat, amely legalább háromszor játszott már!

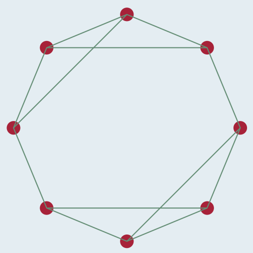
Tegyük fel – indirekt –, hogy nincs olyan csapat, mely legalább három meccset már lejátszott, azaz mind a 8 csapat legfeljebb 2 meccset játszott eddig. Ez azt jelenti, hogy az eddig lejátszott mérkőzések száma legfeljebb $\frac{8 \cdot 2}{2} = 8$. Mivel eddig már 9 mérkőzés lezajlott, így nem lehet az eddigi meccsek száma legfeljebb 8, tehát valóban kell lennie olyan csapatnak, amely legalább 3 mérkőzést játszott már.

3. K1 Egy konferencián 8 tudós vett részt. Úgy döntöttek, hogy a konferencia végén mindenki mindenkivel névjegykártyát fog cserélni. Eddig mind a 8 résztvevő 3 másikkal cserélt névjegykártyát.

a) Szemléltessük egy gráffal az eddigi kártyacseréket!

b) Hány kártyacserére fog még sor kerülni?

a) A névjegykártyacserét szemléltető egy lehetséges gráf:



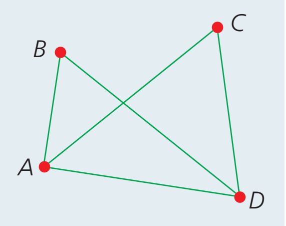
b) A gráf minden csúcsának a fokszáma 3, így a fokszámok összege $3 \cdot 8 = 24$. Ez azt jelenti, hogy e gráfnak 12 éle van. Az a kérdés, hogy hány élt kell még berajzolnunk, hogy teljes gráfot kapjunk. Mivel a 8 pontú teljes gráf éleinek a száma $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, és eddig 12 élt rajzoltunk be, így még 28 – 12 = 16 él hiányzik. Tehát még 16 kártyacserére kerül sor.

4. K1 Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy teljes gráf éleinek a száma páros legyen?

Ha $\frac{n(n-1)}{2} = 2k$, akkor $n(n-1) = 4k$.

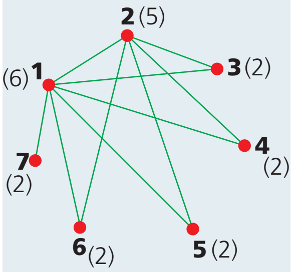
Ez azt jelenti, hogy vagy n, vagy pedig n – 1 osztható 4-gyel. Tehát annak feltétele, hogy egy n pontú teljes gráf éleinek a száma páros legyen az, hogy n osztható legyen 4-gyel, vagy 4-gyel osztva 1 maradékot adjon.

5. K1 Egy sakkbajnokság döntőjébe – ahol mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik – négyen jutottak: *A*, *B*, *C* és *D*. A döntőben *A* már mindhárom ellenfelével játszott, *B* és *C* pontosan két mérkőzést játszott le, de egymással még nem játszottak. Hány mérkőzést játszott eddig a döntőben *D*?



Szemléltessük a feladatot egy gráffal. Az *A* csúcs az összes többi csúccsal össze van kötve. Mivel *B*-t és *C*-t még egy-egy csúccsal kell összekötni, de egymással nem lehetnek összekötve, így mindkét csúcsot csak *D*-vel köthetjük össze. Ezzel már meg is kaptuk a választ a feladatban feltett kérdésre: *D* eddig három mérkőzést játszott (vagyis minden mérkőzését lejátszotta már).

6. K1 Egy iskolák közötti teniszbajnokság döntőjébe 7 játékos jutott be. A döntőben mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Egy néző jegyezte az egyes mérkőzések kimenetelét. Valamikor így szólt a szintén néző barátjához: *„Az 1-es számú versenyző már minden mérkőzését lejátszotta, a 2-es számú már öt mérkőzését lejátszotta, viszont a 4-es és a 7-es számú versenyzők még csak egy-egy mérkőzést játszottak."* Erre a szomszéd így válaszolt: *„Biztosan tévedsz."* Honnan tudta ezt a szomszéd?



A 7 pontú gráf csúcsait megszámoztuk az egyes játékosoknak megfelelően (lásd ábra). Az 1-es számú játékos (pont-) fokszáma 6, a 2-es számúé pedig 5. Ezt ábrázolva már csak egyetlen olyan csúcs marad, melynek fokszáma 1. Ez azt jelenti, hogy nem lehet két olyan versenyző, akik eddig csak egy-egy mérkőzést játszottak.

7. K2 Egy teljes gráfnak letöröltük 40 élét, így a megmaradt élek száma az eredeti teljes gráf csúcsai számának ötszöröse. Hány pontú az eredeti gráf?

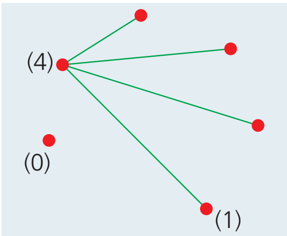
Az $\frac{n(n-1)}{2} - 40 = 5n$ egyenletet kell megoldanunk a pozitív egész számok halmazán. 2-vel szorozva mindkét oldalt:

$n^2 - n - 80 = 10n$, ahonnan $n^2 - 11n = 80$ $\rightarrow$ $n(n-1) = 80$.

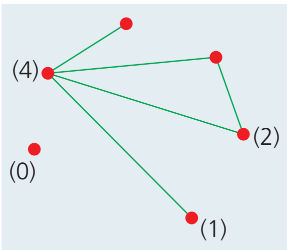
A 80-at kell két olyan egész szám szorzatára bontanunk, melyek különbsége 11. A 80 két tényezős szorzatokra bontása után hamar adódik, hogy $n = 16$, $n - 11 = 5$. Tehát az eredeti gráfnak 16 csúcsa van.

8. K2 Egy 6 pontú gráf 5 csúcsának a fokszáma: 0, 1, 2, 3, 4. Mekkora a hatodik csúcs fokszáma?

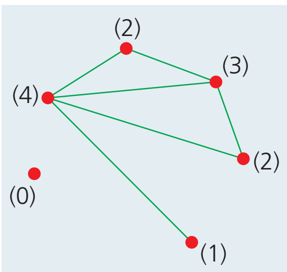
Induljunk ki a 6 pontú gráfból: először rajzoljuk be a 4 fokszámú pont éleit; ekkor a 0 fokú és az 1 fokú pontot is megkapjuk:



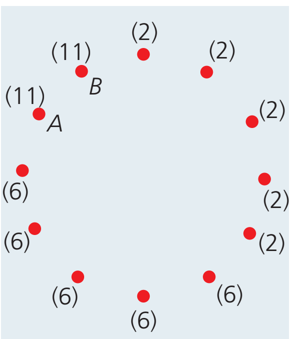
Ha maradék három csúcs közül bármely kettőt összekötjük, megkapjuk a 2 fokszámú pontot:



Ez után már csak a hiányzó fokszámú két pont köthető össze, hogy a 3 fokszámú pontot is megkapjuk, így a hiányzó fokszám 2 lehet csak.



9. K2 Egy 12 fős társaság tagjai egy hosszabb túrán vettek részt. András és Béla, a túra két vezetője, a csoport minden tagját ismerték. Öt olyan tagja volt a csoportnak, akik a két vezetőn kívül senki mást nem ismertek, a többiek ezen az öt személyen kívül mindenki mást ismertek. Amikor a csoport tagjai találkoztak, azok, akik nem ismerték egymást, kézfogással bemutatkoztak egymásnak. Hány kézfogás történt?



Vegyük fel a 12 pontú gráf csúcsait, és írjuk mindegyik csúcs mellé a fokszámát (Legyen *A* és *B* a két túravezető). *A* és *B* fokszáma 11. Öt olyan tagja van a csapatnak, akik *A*-n és *B*-n kívül senkit sem ismernek, így 5 db pont fokszáma 2. A maradék 5 db csúcs mindegyikének a fokszáma 6, hiszen ők egymást ismerik, valamint a két vezetőt is ismerik.

Ezek szerint a gráf éleinek a száma (a fokszámainak összegének a fele):

$$\frac{2\cdot 11+5\cdot 2+5\cdot 6}{2}=31.$$

A kézfogások száma a teljes gráffá való kiegészítéshez szükséges élek száma. A 12 pontú teljes gráf éleinek a száma: $\frac{12\cdot 11}{2}=66$. Tehát a hiányzó élek száma: $66-31=35$, vagyis 35 kézfogás történt.

10. E1 Egy sakkbajnokság 16 résztvevőjét két csoportba osztották. Az egyes csoportokban a csoport tagjai körmérkőzést játszottak egymással. Az egyik csoportban így 3-szor annyi meccs zajlott le, mint a másikban. Hány résztvevője volt az egyes csoportoknak?

Legyen az egyik csoport résztvevőinek a száma k; ekkor a másik csoportnak $16-k$ résztvevője van. Az egyes csoportokban lejátszott mérkőzések száma

$$\frac{k(k-1)}{2}, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{(16-k)(16-k-1)}{2}.$$

A feltételek szerint az egyik csoportban háromszor annyi meccset játszottak, mint a másikban, tehát

$$3\cdot\frac{k(k-1)}{2}=\frac{(16-k)(15-k)}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad 3k^2-3k=240-31k+k^2,$$

$$2k^2+28k-240=0, \qquad \text{tehát} \qquad k^2+14k-120=0,$$

$$k_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{196+480}}{2}=\frac{-14\pm 26}{2}, \qquad k_1=6, \quad k_2=-20.$$

A negatív megoldás érdektelen számunkra, így azt kaptuk, hogy az egyik csoportban 6, a másikban pedig 10 résztvevő volt.

11. E1 Egy bajnokságon, ahol a résztvevők körmérkőzést játszanak egymással, még 7 mérkőzés van hátra a bajnokság végéig. Igazoljuk, hogy az eddig lejátszott mérkőzések száma nem lehet 10-zel osztható!

Legyen n a bajnokságban résztvevők száma. Ha még 7 mérkőzés van hátra, akkor az eddig lejátszott mérkőzések száma

$$\frac{n(n-1)}{2}-7.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy ez a szám nem lehet 10-zel osztható. Ha ez a szám 10-zel osztható lenne, vagyis 0-ra végződne, akkor (hozzáadva 7-et) $\frac{n(n-1)}{2}$-nek 7-re kell végződnie, azaz $n(n-1)$ utolsó számjegye 4 kell, hogy legyen. A számlálóban két szomszédos egész szám szorzata szerepel, ezért vizsgáljuk meg, hogy két szomszédos egész szám szorzatának mi lehet az utolsó számjegye.

0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		0
	0		2		6		2		0		0		2		6		2		0	

Azt látjuk, hogy két szomszédos egész szám szorzatának utolsó számjegye csak 0, 2 vagy 6 lehet, tehát e szorzat nem végződhet 4-re. Ez viszont azt jelenti, hogy az eddig lejátszott mérkőzések száma valóban nem lehet 10-zel osztható.

II Gyökvonás

1. Racionális számok, irracionális számok

1. K1 Igazoljuk, hogy $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{12}$ irracionális számok!

Tegyük fel, hogy $\sqrt{3}$ felírható két egész szám hányadosaként:

$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, ahol $(p, q) = 1$.

Mindkét oldalt négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$3 = \frac{p^2}{q^2}$, azaz $3q^2 = p^2$.

A kapott egyenlőség jobb oldala osztható 3-mal, így p is osztható 3-mal: legyen $p = 3k$. Ekkor

$3q^2 = (3k)^2 = 9k^2$, azaz $q^2 = 3k^2$.

A kapott egyenlőség bal oldala osztható 3-mal, tehát q is osztható 3-mal.

Azt kaptuk, hogy ha $\sqrt{3}$ racionális szám, akkor p is és q is osztható 3-mal, vagyis nem lehet $(p, q) = 1$. Ebből következik, hogy $\sqrt{3}$ valóban irracionális szám.

$\sqrt{5}$ esetében ugyanúgy járhatunk el, mint $\sqrt{3}$ esetében.

Ha $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ racionális szám, akkor

$2\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, azaz $\sqrt{3} = \frac{p}{2q}$.

Arra jutottunk, hogy ha $\sqrt{12}$ racionális szám, akkor $\sqrt{3}$ is racionális szám. Ez nyilván ellentmondás, tehát $\sqrt{12}$ irracionális szám.

2. K1 Igazoljuk, hogy két racionális szám szorzata és hányadosa is racionális szám!

Legyen a két racionális szám $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$, ahol a, b, c és d egész számok (természetesen b, d és c egyike sem lehet 0).

A két racionális szám szorzata:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

A kapott tört számlálója és nevezője is egész, tehát a két racionális szám szorzata is racionális.

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

A kapott tört számlálója és nevezője is egész, tehát a két racionális szám hányadosa is racionális.

3. K1 Írjuk fel az alábbi tizedes tört alakban megadott számokat két egész szám hányadosaként:

a) 0,32; *b)* 3,122; *c)* 0,1313… .

a) $0{,}32 = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$;

b) $3{,}122 = 3\frac{122}{1000} = \frac{3122}{1000} = \frac{1561}{500}$;

c) Legyen $0{,}1313\ldots = a$. A végtelen szakaszos tizedes törtben a szakaszok 2 jegyből állnak, ezért szorozzuk meg e számot 100-zal.

$100a = 13{,}13\ldots$

Ezzel

$100a - a = 13$, azaz $99a = 13$, ahonnan $a = \frac{13}{99}$.

4. K1 Írjuk fel az alábbi törteket tizedestört alakban:

a) $\frac{2}{7}$; *b)* $\frac{11}{13}$.

a) $\frac{2}{7} = 0{,}285714\ldots$; *b)* $\frac{11}{13} = 0{,}846153\ldots$.

5. K2 Adjunk meg két olyan racionális számot, mely nagyobb, mint 0,6666, de kisebb, mint 0,6667!

Ha n olyan szám, melyre

$0{,}6666 < n < 0{,}6667$, akkor $\frac{6666}{10\,000} < n < \frac{6667}{10\,000}$.

Bővítsük a törteket pl. 2-vel:

$\frac{13\,332}{20\,000} < n < \frac{13\,334}{20\,000}$.

Ezek szerint n lehet pl.

$n = \frac{13\,333}{20\,000}$.

Bővítsük a törteket pl. 3-mal:

$\frac{19\,998}{30\,000} < n < \frac{20\,001}{30\,000}$

Ezek szerint n lehet pl.

$\frac{20\,000}{30\,000} = \frac{2}{3}$

A két eljárásból világos, hogy végtelen sok, a feltételnek megfelelő racionális szám létezik.

6. K2 Lehet-e két irracionális szám szorzata, illetve hányadosa racionális szám?

Igen. Legyen pl. a két irracionális szám $\sqrt{8}$ és $\sqrt{2}$. Ezek szorzata, ill. hányadosa:

$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ és $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

7. K2 Lehet-e egy racionális és egy irracionális szám összege racionális szám?

Nem. Legyen ugyanis a racionális szám $\frac{p}{q}$ és jelöljük i-vel az irracionális számot. Ha ezek összege racionális szám, akkor valamely a és b egészekre

$\frac{p}{q} + i = \frac{a}{b}$, azaz $i = \frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{aq - bp}{bq}$.

A kapott egyenlőség jobb oldalán a számlálóban és a nevezőben is egész szám szerepel, így nem lehet irracionális.

8. E1 Lehet-e két irracionális összege racionális szám?

Igen. Tekintsük az alábbi két számot: $\sqrt{3+\sqrt{8}}$, $\sqrt{3-\sqrt{8}}$. E két szám irracionális. Ha ugyanis pl. $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ racionális lenne, azaz valamely p, q egészekre

$\sqrt{3+\sqrt{8}} = \frac{p}{q}$, akkor $3 + \sqrt{8} = \frac{p^2}{q^2}$

is racionális lenne. De ekkor

$\sqrt{8} = \frac{p^2}{q^2} - 3$

is racionális lenne. Mivel $\sqrt{8}$ irracionális, ezért valóban $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ is irracionális szám.

Tekintsük a megadott két szám különbségének négyzetét.

$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^2 = 3 + \sqrt{8} + 3 - \sqrt{8} - 2\sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})} = 6 - 2\sqrt{9-8} = 4$.

Mivel a két szám különbségének négyzete 4, és a két szám különbsége pozitív, ezért a két szám különbsége 2, vagyis racionális szám.

2. A négyzetgyökvonás és azonosságai

1. K1 Végezzük el a gyökvonást, illetve a kijelölt műveletet!

a) $\sqrt{a^4b^{10}}$; b) $\sqrt{x^2y^4z^6q^8}$; c) $\sqrt{\frac{p^{12}q^{16}}{r^{10}s^8}}$; d) $\sqrt{\frac{a^4b^6}{c^2d^4}} : \sqrt{\frac{c^8d^{10}}{a^6b^2}}$.

a) $\sqrt{a^4b^{10}} = a^2|b^5|$;

b) $\sqrt{x^2y^4z^6q^8} = |x|y^2|z^3|q^4$;

c) $\sqrt{\frac{p^{12}q^{16}}{r^{10}s^8}} = \frac{p^6q^8}{|r^5|s^4}$;

d) $\sqrt{\frac{a^4b^6}{c^2d^4}} : \sqrt{\frac{c^8d^{10}}{a^6b^2}} = \sqrt{\frac{a^4b^6}{c^2d^4} \cdot \frac{a^6b^2}{c^8d^{10}}} = \sqrt{\frac{a^{10}b^8}{c^{10}d^{14}}} = \frac{|a^5|b^4}{|c^5||d^7|}$.

2. K1 Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$; b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$; c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$;

d) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}$; e) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; f) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$;

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125} = \sqrt{625} = 25$;

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{64} = 8$;

d) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{63}{7}} = \sqrt{9} = 3$;

e) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$;

f) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$.

3. K1 Melyik szám nagyobb?

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$ vagy 6; b) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{5}$ vagy $\sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$;

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ vagy 10; d) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$ vagy $(\sqrt{2}+1)^2$.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{35} < \sqrt{36} = 6$.

b) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{40}$, $\sqrt{6} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{42}$, tehát $\sqrt{8} \cdot \sqrt{5} < \sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$,

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2 + 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6}$. Melyik nagyobb $5 + 2\sqrt{6}$ vagy $10 \Rightarrow 2\sqrt{6}$ vagy 5. Mivel $2\sqrt{6}$ négyzete 24, az 5 négyzete 25, ezért $2\sqrt{6} < 5$, tehát $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 < 10$.

d) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1) = 5 - 1 = 4$, $(\sqrt{2}+1)^2 = 2 + 1 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$. Mivel $2\sqrt{2} > 1$, ezért $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1) < (\sqrt{2}+1)^2$.

4. K1 Határozzuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{2x-5}$; b) $\sqrt{\frac{x^2}{1-x}}$; c) $\sqrt{\frac{x-6}{3-2x}}$; d) $\frac{\sqrt{5x+4}}{x-2}$.

a) $2x - 5 \geq 0$, $x \geq \frac{5}{2}$.

b) A négyzetgyök alatti tört számlálója minden x-re nemnegatív, így annak kell teljesülnie, hogy $1 - x > 0$, azaz $x < 1$.

c) $\frac{x-6}{3-2x} \ge 0$. Két eset lehetséges:

1. $x-6 \ge 0$ és $3-2x > 0$, azaz $x \ge 6$ és $x < \frac{3}{2}$. Ilyen valós szám nincs.

2. $x-6 \le 0$ és $3-2x < 0$, azaz $x \le 6$ és $x > \frac{3}{2}$.

Tehát a kifejezés értelmezési tartománya: $\frac{3}{2} < x \le 6$.

d) $5x+4 \ge 0$ és $x-2 \ne 0$. A kifejezés értelmezési tartománya: $x \ge -\frac{4}{5}$ és $x \ne 2$.

5. K2 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $(3\sqrt{2}-1)(4+2\sqrt{2})$; *b)* $(\sqrt{8}+3\sqrt{2}-\sqrt{18})\cdot 4\sqrt{2}$; *c)* $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2+12\sqrt{6}$.

a) $(3\sqrt{2}-1)(4+2\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}+6\cdot 2-4-2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}+8$.

b) $(\sqrt{8}+3\sqrt{2}-\sqrt{18})\cdot 4\sqrt{2} = 4\sqrt{16}+12\cdot 2-4\sqrt{36} = 4\cdot 4+24-4\cdot 6 = 16+24-24 = 16$.

c) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2+12\sqrt{6} = 18+12-12\sqrt{6}+12\sqrt{6} = 30$.

6. K2-E1 Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

a) $\sqrt{8+3\sqrt{7}}\cdot\sqrt{8-3\sqrt{7}}$;

b) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$;

c) $\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}}\right)^2$;

d) $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^2$.

a) $\sqrt{8+3\sqrt{7}}\cdot\sqrt{8-3\sqrt{7}} = \sqrt{(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7})} = \sqrt{64-63} = 1$.

b) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}} = \sqrt{(9+\sqrt{17})(9-\sqrt{17})} = \sqrt{81-17} = \sqrt{64} = 8$.

c) $\left(\sqrt{8+3\sqrt{7}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}}\right)^2 = 8+3\sqrt{7}+8-3\sqrt{7}-2\sqrt{(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7})} =$

$= 16-2\sqrt{64-63} = 16-2 = 14$.

d) $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^2 = a+\sqrt{a^2-1}+a-\sqrt{a^2-1}-2\sqrt{(a+\sqrt{a^2-1})\cdot(a-\sqrt{a^2-1})} =$

$= 2a-2\sqrt{a^2-(a^2-1)} = 2a-2$.

3. A négyzetgyökvonás alkalmazásai

1. K1 A következő feladatokban a négyzetgyökök alatt szereplő betűk mindegyike pozitív. Végezzük el a négyzetgyökvonást (amit lehet, vigyünk ki a négyzetgyökjel alól)!

a) $\sqrt{75a^7b^8c^{19}}$; *b)* $\sqrt{\frac{18x^{13}y^6}{50p^9q^{11}}}$; *c)* $\sqrt{a^4b^2-b^4a^2}$.

a) $\sqrt{75a^7b^8c^{19}} = \sqrt{25\cdot 3\cdot a^6\cdot a\cdot b^8\cdot c^{18}\cdot c} = 5a^3b^4c^9\cdot\sqrt{3ac}$.

b) $\sqrt{\frac{18x^{13}y^6}{50p^9q^{11}}} = \sqrt{\frac{9x^{13}y^6}{25p^9q^{11}}} = \frac{3x^6y^3\sqrt{x}}{5p^4q^5\sqrt{pq}}$.

c) $\sqrt{a^4b^2-b^4a^2} = \sqrt{a^2b^2(a^2-b^2)} = ab\sqrt{a^2-b^2}$.

2. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenletet a nemnegatív valós számok halmazán!

$6\sqrt{9x}+5\sqrt{x}-2\sqrt{25x} = 26$.

Az egyenlet bal oldala így alakítható:

$6\sqrt{9x}+5\sqrt{x}-2\sqrt{25x} = 6\cdot 3\cdot\sqrt{x}+5\sqrt{x}-2\cdot 5\cdot\sqrt{x} = 18\sqrt{x}+5\sqrt{x}-10\sqrt{x} = 13\sqrt{x}$.

Tehát

$13\sqrt{x} = 26$, azaz $\sqrt{x} = 2$, ahonnan $x = 4$.

3. K1 Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $(\sqrt{3}+4\sqrt{27}-\sqrt{75})\cdot 2\sqrt{12}$;

b) $(\sqrt{5}+\sqrt{20})(2\sqrt{5}-\sqrt{45})$;

c) $(\sqrt{500}+\sqrt{125})(2\sqrt{75}-5\sqrt{3})$.

a) $(\sqrt{3}+4\sqrt{27}-\sqrt{75})\cdot 2\sqrt{12}=(\sqrt{3}+4\cdot 3\sqrt{3}-5\sqrt{3})\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}=32\cdot 3=96$.

b) $(\sqrt{5}+\sqrt{20})(2\sqrt{5}-\sqrt{45})=(\sqrt{5}+2\sqrt{5})(2\sqrt{5}-3\sqrt{5})=3\sqrt{5}\cdot(-\sqrt{5})=-15$.

c) $(\sqrt{500}+\sqrt{125})(2\sqrt{75}-5\sqrt{3})=(10\sqrt{5}+5\sqrt{5})(10\sqrt{3}-5\sqrt{3})=15\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{3}=75\sqrt{15}$.

4. K1 Melyik szám nagyobb: *A* vagy *B*?

a) $A=5\sqrt{2}$, $B=2\sqrt{5}$;

b) $A=\sqrt{54-6\sqrt{24}}$, $B=3\sqrt{6}-2$;

c) $A=\sqrt{49+4\sqrt{12}}$, $B=4\sqrt{3}+1$.

a) $A=5\sqrt{2}=\sqrt{50}$, $B=2\sqrt{5}=\sqrt{20}$, tehát $A>B$.

b) Mindkét szám pozitív, így az a nagyobb, amelyiknek a négyzete nagyobb.

$A^2=54-6\sqrt{24}=54-12\sqrt{6}$,

$B^2=(3\sqrt{6}-2)^2=54+4-12\sqrt{6}=58-12\sqrt{6}$.

Mivel $B^2>A^2$, ezért $B>A$.

c) Most is a két szám négyzetét hasonlítjuk össze.

$A^2=49+4\sqrt{12}=49+8\sqrt{3}$,

$B^2=(4\sqrt{3}+1)^2=48+1+8\sqrt{3}=49+8\sqrt{3}$.

Tehát $A=B$.

5. K2 Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét ($a>0$, $b>0$)!

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{15}{\sqrt{5}}$; c) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; d) $\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}$;

e) $\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$; f) $\frac{4}{\sqrt{7}-1}$; g) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$; h) $\frac{a-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}$.

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.

b) $\frac{15}{\sqrt{5}}=\frac{15\sqrt{5}}{5}=3\sqrt{5}$.

c) $\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{a}}{a}=\sqrt{a}$.

d) $\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}}{b\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\frac{a\sqrt{ab}}{ab}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$.

e) $\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{12}}{2}\quad\left(=\frac{5\cdot 2\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\right)$.

f) $\frac{4}{\sqrt{7}-1}=\frac{4(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}=\frac{4(\sqrt{7}+1)}{7-1}=\frac{4(\sqrt{7}+1)}{6}=\frac{2(\sqrt{7}+1)}{3}$.

g) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}=\frac{5+1+2\sqrt{5}}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

h) $\frac{a-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}=\frac{(a-\sqrt{a})^2}{(a+\sqrt{a})(a-\sqrt{a})}=\frac{a^2+a-2a\sqrt{a}}{a^2-a}=\frac{a+1-2\sqrt{a}}{a-1}$.

6. E1 Döntsük el, hogy az alábbi kifejezés milyen előjelű!
$\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}-2\sqrt{3}$.

Legyen
$A=\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}>0$ és $B=2\sqrt{3}>0$.
Ha $A>B$, akkor a kifejezés pozitív, ellenkező esetben negatív. A két szám négyzetét hasonlítjuk össze:
$A^2=7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}-2\sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}=14-2\sqrt{49-48}=14-2=12$,
$B^2=(2\sqrt{3})^2=4\cdot 3=12$.
Tehát a megadott kifejezés értéke 0.

4. Az n-edik gyök fogalma és azonosságai

1. K1 Végezzük el az alábbi gyökvonásokat:
a) $\sqrt[3]{64}$; *b)* $\sqrt[4]{625}$; *c)* $\sqrt[5]{\frac{1}{-32}}$; *d)* $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$; *e)* $\sqrt[10]{1024}$; *f)* $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$.

a) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$.
b) $\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5$.
c) $\sqrt[5]{\frac{1}{-32}}=\sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}=-\frac{1}{2}$.
d) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{10}\right)^3}=\frac{3}{10}$.
e) $\sqrt[10]{1024}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$.
f) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}=\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^6}=\frac{1}{2}$.

2. K1 Végezzük el az alábbi gyökvonásokat (a feladatokban szereplő paraméterek mindegyike pozitív)!
a) $\sqrt[3]{a^6b^{12}}$; *b)* $\sqrt[7]{x^{21}y^{42}z^{14}}$; *c)* $\sqrt[4]{\frac{p^8q^{12}}{r^{20}s^4}}$; *d)* $\sqrt[5]{\frac{k^{25}m^{20}}{32l^{40}}}$.

a) $\sqrt[3]{a^6b^{12}}=\sqrt{(a^2)^3(b^4)^3}=a^2b^4$.
b) $\sqrt[7]{x^{21}y^{42}z^{14}}=\sqrt[7]{(x^3)^7(y^6)^7(z^2)^7}=x^3y^6z^2$.
c) $\sqrt[4]{\frac{p^8q^{12}}{r^{20}s^4}}=\frac{p^2q^3}{r^5s}$.
d) $\sqrt[5]{\frac{k^{25}m^{20}}{32l^{40}}}=\frac{k^5m^4}{2l^8}$.

3. K1 Végezzük el az alábbi műveleteket (a feladatokban szereplő paraméterek mindegyike pozitív)!
a) $\sqrt[3]{4^4\cdot 5^{10}}\cdot\sqrt[3]{4^2\cdot 5^5}$; *b)* $\sqrt[5]{a^3b^8c^{12}}\cdot\sqrt[5]{a^7b^{12}c^3}$; *c)* $\sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5}}:\sqrt[4]{\frac{y^3}{x}}$.

a) $\sqrt[3]{4^4\cdot 5^{10}}\cdot\sqrt[3]{4^2\cdot 5^5}=\sqrt[3]{4^4\cdot 5^{10}\cdot 4^2\cdot 5^5}=\sqrt[3]{4^6\cdot 5^{15}}=4^2\cdot 5^5$.
b) $\sqrt[5]{a^3b^8c^{12}}\cdot\sqrt[5]{a^7b^{12}c^3}=\sqrt[5]{a^{10}b^{20}c^{15}}=a^2b^4c^3$.
c) $\sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5}}:\sqrt[4]{\frac{y^3}{x}}=\sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5}\cdot\frac{x}{y^3}}=\sqrt[4]{\frac{x^8}{y^8}}=\frac{x^2}{y^2}$.

4. K2 Végezzük el az alábbi műveleteket (a feladatokban szereplő paraméterek mindegyike pozitív)!

a) $\sqrt[6]{\sqrt[6]{2^{14}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[12]{2^{22}}}$; *b)* $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^{10}}}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt[6]{3^{38}}}}$; *c)* $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\frac{a^{12}}{b^{14}}}}\cdot\sqrt{\sqrt[10]{\frac{a^8}{b^6}}}$.

a) $\sqrt[6]{\sqrt[6]{2^{14}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[12]{2^{22}}}=\sqrt[36]{2^{14}}\cdot\sqrt[36]{2^{22}}=\sqrt[36]{2^{36}}=2.$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^{10}}}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt[6]{3^{38}}}}=\sqrt[24]{3^{10}}\cdot\sqrt[24]{3^{38}}=\sqrt[24]{3^{48}}=3^2=9.$

c) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\frac{a^{12}}{b^{14}}}}\cdot\sqrt{\sqrt[10]{\frac{a^8}{b^6}}}=\sqrt[20]{\frac{a^{12}}{b^{14}}}\cdot\sqrt[20]{\frac{a^8}{b^6}}=\sqrt[20]{\frac{a^{20}}{b^{20}}}=\frac{a}{b}.$

5. E1 A Neptunusz bolygó keringési ideje kb.165,5 év. Kb. hányszor távolabb kering a Neptunusz a Nap körül, mint a Föld?

Kepler III. törvénye alapján

$$\frac{T_{Föld}^2}{T_{Neptunusz}^2}=\frac{R_{Föld}^3}{R_{Neptunusz}^3}.$$

Ha a Föld Naptól való átlagos távolságát 1-nek vesszük, akkor

$$\frac{1^2}{165{,}5^2}=\frac{1^3}{R_{Neptunusz}^3},\quad \text{ahonnan}\quad R_{Neptunusz}^3=165{,}5^2=27\,390{,}25.$$

Innen

$$R_{Neptunusz}=\sqrt[3]{27\,390{,}25}\approx 30{,}14.$$

Tehát a Neptunusz kb. 30,14-szer olyan távol van a Naptól, mint a Föld.

5. Az n-edik gyökvonás alkalmazásai

1. K1 Vigyük ki a gyökjel elé a lehetséges szorzótényezőket!

a) $\sqrt[3]{40}$; *b)* $\sqrt[3]{54}$; *c)* $\sqrt[4]{a^{19}}$ $(a\ge 0)$.

a) $\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{8\cdot 5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=2\cdot\sqrt[3]{5}.$

b) $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=3\cdot\sqrt[3]{2}.$

c) $\sqrt[4]{a^{19}}=\sqrt[4]{a^{16}\cdot a^3}=a^4\cdot\sqrt[4]{a^3}.$

2. K1 Vigyük be a gyökjel alá a gyökjel előtti szorzótényezőt!

a) $3\cdot\sqrt[3]{4}$; *b)* $2\cdot\sqrt[5]{3}$; *c)* $a^2\cdot\sqrt[4]{a^3}$ $(a\ge 0)$.

a) $3\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{27\cdot 4}=\sqrt[3]{108}.$

b) $2\cdot\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{32\cdot 3}=\sqrt[5]{96}.$

c) $a^2\cdot\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[4]{a^8}\cdot\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[4]{a^{11}}.$

3. K1 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}$ $(a\ge 0)$; *c)* $\sqrt{a^2b}\cdot\sqrt[4]{ab^2}$ $(a\ge 0,\ b\ge 0)$.

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3^3}}=\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{4\cdot 27}=\sqrt[6]{108}.$

b) $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[3]{(a^2)^4}}=\sqrt[12]{a^3}\cdot\sqrt[12]{a^8}=\sqrt[12]{a^{11}}.$

c) $\sqrt{a^2b}\cdot\sqrt[4]{ab^2}=\sqrt{\sqrt{(a^2b)^2}}\cdot\sqrt[4]{ab^2}=\sqrt[4]{a^4b^2}\cdot\sqrt[4]{ab^2}=\sqrt[4]{a^5b^4}.$

4. K2 Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a megadott kifejezéseket!

a) $\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{3}}$; *b)* $\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^3}}$; *c)* $\sqrt[5]{x^2y\cdot\sqrt[3]{y^2x}}$.

a) $\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2\cdot 3}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$.

b) $\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3\cdot a^3}} = \sqrt[12]{a^6}$.

c) $\sqrt[5]{x^2y\cdot\sqrt[3]{y^2x}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{(x^2y)^3y^2x}} = \sqrt[15]{x^6y^3y^2x} = \sqrt[15]{x^7y^5}$.

5. E1 Milyen pozitív egész számot írjunk n helyébe, hogy az alábbi egyenlőség igaz legyen, ahol $a \geq 0$:

.

Az egyenlőség így alakítható:

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{3n}\cdot a^5}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{(a^5)^4}}$, azaz $\sqrt[12]{a^{3n+5}} = \sqrt[12]{a^{20}}$.

Innen

$a^{3n+5} = a^{20}$, azaz $3n + 5 = 20$,

$3n = 15$, tehát $n = 5$.

III Másodfokú függvények, másodfokú egyenletek

1. Másodfokú függvények

1. K1 Ábrázoljuk és elemezzük az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $f(x)=(x+6)^2+2$;

b) $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$;

c) $f(x)=-(x+3)^2+2$;

d) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+3$;

e) $f(x)=(x+0{,}5)^2-0{,}25$.

a) ÉT: minden valós szám. ÉK: $f(x)\geq 2$, a függvénynek nincs zérushelye.
A függvény menete: $-\infty$-től –6-ig szig. mon. csökkenő, –6-tól $+\infty$-ig szig. mon. növekvő. A függvénynek –6-ban minimuma van, értéke $f(-6)=2$.

b) ÉT: minden valós szám, ÉK: $f(x)\geq -\frac{3}{4}$. Zérushelyek: $x_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

A függvény menete: $-\infty$-től $\frac{1}{2}$-ig szig. mon. csökkenő, $\frac{1}{2}$-től $+\infty$-ig szig. mon. növekvő.

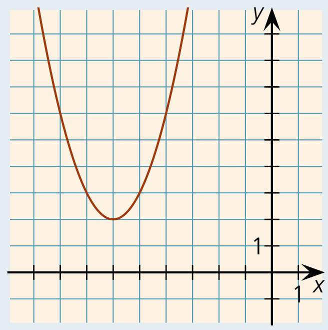
A függvénynek $x=\frac{1}{2}$-ben minimuma van, értéke $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$.

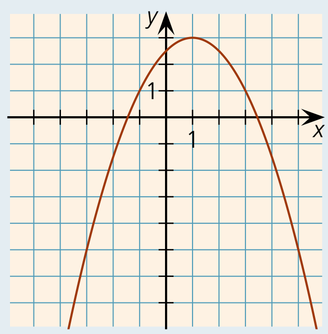
c) ÉT: minden valós szám, ÉK: $f(x)\leq 2$. Zérushelyek: $x_1=-3+\sqrt{2}$, $x_2=-3-\sqrt{2}$.
A függvény menete: $-\infty$-től –3-ig szig. mon. növekvő, –3-tól $+\infty$-ig szig. mon. csökkenő.
A függvénynek $x=-3$-ban maximuma van; $f(-3)=2$.

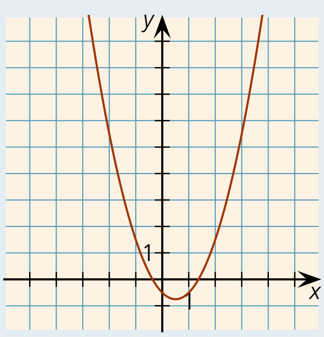
d) ÉT: minden valós szám, ÉK: $f(x)\leq 3$. Zérushelyek: $x_1=1+\sqrt{6}$, $x_2=1-\sqrt{6}$.
A függvény menete: $-\infty$-től 1-ig szig. mon. növekvő, 1-től $+\infty$-ig szig. mon. csökkenő.
A függvénynek $x=1$-ben maximuma van: $f(1)=3$.

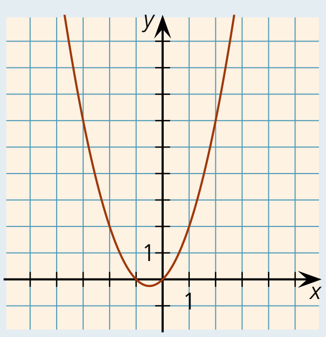
e) ÉT: minden valós szám, ÉK: $f(x)\geq -\frac{1}{4}$. Zérushelyek: $x_1=1$, $x_2=0$.

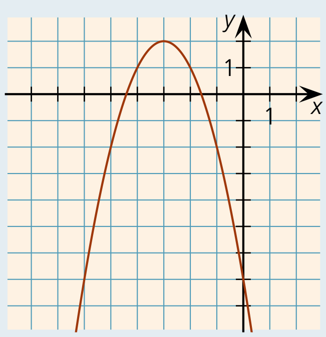
A függvény menete: $-\infty$-től $-\frac{1}{2}$-ig szig. mon. csökkenő, $-\frac{1}{2}$-től $+\infty$-ig szig. mon. növekvő. A függvénynek $x=-\frac{1}{2}$-ben minimuma van, értéke $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

a)


b)


c)


d)


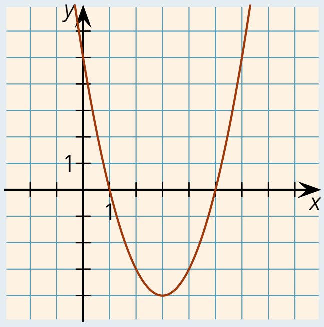
e)


2. K1 Az $f(x) = (x - u)^2 + v$ függvény grafikonjának tengelypontja $T(3; -4)$. Oldjuk meg az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenséget!

Ha a függvény tengelypontja $T(3; -4)$, akkor $f(x) = (x - 3)^2 - 4$. A függvény zérushelyeit az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai adják.

$(x - 3)^2 - 4 = 0$, azaz $(x - 3)^2 = 4$.

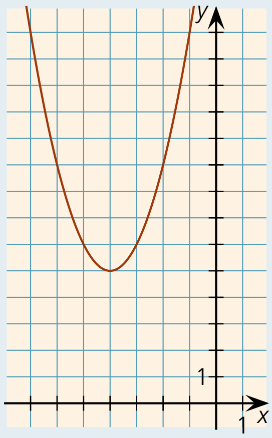
Innen $x - 3 = 2$, vagy $x - 3 = -2$. Tehát a függvény zérushelyei: $x_1 = 5$, $x_2 = 1$.



Az ábra alapján az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenséget kielégítő valós számok: $x \leq 1$ vagy $5 \leq x$.

3. K1 Az $f(x) = (x - u)^2 + v$ függvény értékkészlete: $f(x) \geq 5$. A függvény $x \leq -4$ esetén csökken, $x > -4$ esetén növekszik. Határozzuk meg az u és v értékét!

A feltételek alapján a függvény grafikonja az alábbi:



Ennek megfelelően $u = -4$, $v = 5$.

4. K2 Ábrázoljuk és elemezzük az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

a) $f(x) = |x^2 - 1|$; *b)* $f(x) = |(x - 1)^2 - 4|$; *c)* $f(x) = \left|\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 4{,}5\right|$.

Egy $f(x)$ függvény grafikonjából az $|f(x)|$ függvény grafikonját úgy kapjuk meg, hogy az $f(x)$ függvény grafikonjának x tengely „alatti” részét tengelyesen tükrözzük az x tengelyre, az x tengely „fölötti” részt pedig megtartjuk.

Mindhárom függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlet pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

a) Zérushelyek: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

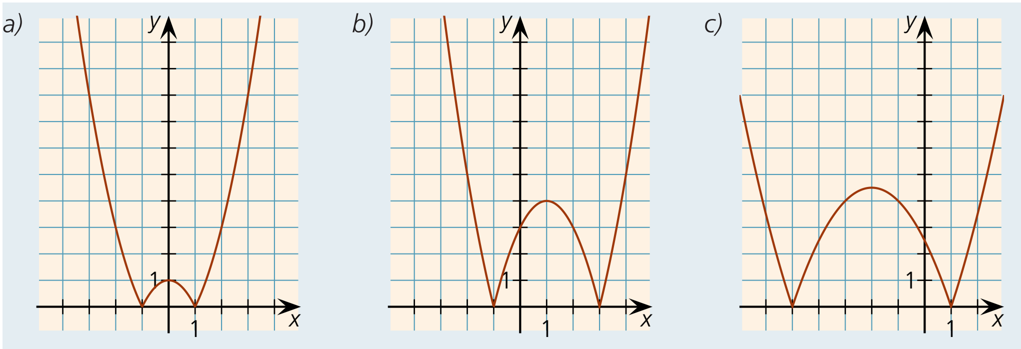
A függvény menete:

$-\infty$-től -1-ig szig. mon. csökkenő, -1-től 0-ig szig. mon. növekvő, 0-tól 1-ig szig. mon. csökkenő, 1-től $+\infty$-ig szig. mon. növekvő.

A függvénynek $x = -1$-ben és $x = 1$-ben minimuma van, értékük $f(-1) = f(1) = 0$, $x = 0$-ban pedig helyi maximuma van, értéke $f(0) = 1$.

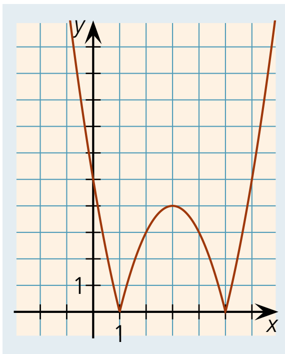
b) Zérushelyek: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.
A függvény menete:
$-\infty$-től -1-ig szig. mon. csökkenő, -1-től 1-ig szig. mon. növekvő, 1-től 3-ig szig. mon. csökkenő, 3-tól $+\infty$-ig szig. mon. növekvő.
A függvénynek $x = -1$-ben és $x = 3$-ban minimuma van, értékük $f(-1) = f(3) = 0$, $x = 1$-ben pedig helyi maximuma van, értéke $f(1) = 4$.

c) Zérushelyek: $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.
A függvény menete:
$-\infty$-től -5-ig szig. mon. csökkenő, -5-től -2-ig szig. mon. növekvő, -2-től 1-ig szig. mon. csökkenő, 1-től $+\infty$-ig szig. mon. növekvő.
A függvénynek $x = -5$-ben és $x = 1$-ben minimuma van, értékük $f(-5) = f(1) = 0$, $x = -2$-ben pedig helyi maximuma van, értéke $f(-2) = 4{,}5$.



5. E1 Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \left|(x-3)^2 - 4\right|$ függvény, és legyen k egy valós szám. Hány megoldása van az $f(x) = k$ egyenletnek?

Először ábrázoljuk az $f(x)$ függvény grafikonját.



A $g(x) = k$ függvény grafikus képe egy x tengellyel párhuzamos egyenes, mely az y tengelyt k-ban metszi. Az $f(x) = k$ egyenlet megoldásainak a száma a két függvény grafikonjának metszéspontjainak a számával egyenlő. Ezek szerint, ha

$k < 0$,	akkor nincs megoldás,
$k = 0$,	akkor 2 megoldás van,
$0 < k < 4$,	akkor 4 megoldás van,
$k = 4$,	akkor 3 megoldás van,
$4 < k$,	akkor 2 megoldás van.

6. E1 Egy másodfokú függvény grafikonja illeszkedik az $A(0;\ 3)$, $B(1;\ 2)$, $C(3;\ 6)$ pontokra. Melyik ez a másodfokú függvény?

A másodfokú függvény általános alakja: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ha a függvény grafikonja áthalad a megadott A, B, C pontokon, akkor e függvény 0-hoz 3-at, 1-hez 2-t, 3-hoz 6-t rendel. Ezek szerint az alábbi háromismeretlenes első fokú egyenletrendszert kell megoldanunk:

$3 = c, \quad 2 = a + b + c, \quad 6 = 9a + 3b + c.$

Az első egyenletet felhasználva azt kapjuk:

$a + b = -1, \quad 9a + 3b = 3,$ azaz

$a + b = -1,$

$3a + b = 1.$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt: $2a = 2$, azaz $a = 1$; innen pedig $b = -2$. Tehát a keresett függvény: $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

2. Másodfokú függvények általános alakja, ábrázolása

1. K1 Alakítsuk teljes négyzetté az alábbi másodfokú kifejezéseket!

a) $x^2 - 8x + 12$; *b)* $x^2 + 10x + 16$; *c)* $x^2 + 3x + 2$;

d) $-x^2 - 6x + 11$; *e)* $3x^2 - 12x + 7$; *f)* $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$.

a) $x^2 - 8x + 12 = (x-4)^2 - 16 + 12 = (x-4)^2 - 4$.

b) $x^2 + 10x + 16 = (x+5)^2 - 25 + 16 = (x+5)^2 - 9$.

c) $x^2 + 3x + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

d) $-x^2 - 6x + 11 = -[x^2 + 6x - 11] = -\left[(x+3)^2 - 9 - 11\right] = -(x+3)^2 + 20$.

e) $3x^2 - 12x + 7 = 3\left[x^2 - 4x + \frac{7}{3}\right] = 3\left[(x-2)^2 - 4 + \frac{7}{3}\right] = 3(x-2)^2 - 5$.

f) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5 = -\frac{1}{2}[x^2 - 6x + 10] = -\frac{1}{2}[(x-3)^2 - 9 + 10] = -\frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2}$.

2. K1-K2 Ábrázoljuk az alábbi, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket!

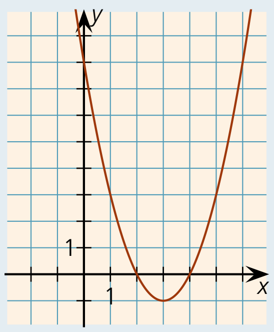
a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; *b)* $f(x) = x^2 + 4x + 7$; *c)* $f(x) = -x^2 + 8x - 9$;

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$; *e)* $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$; *f)* $f(x) = |x^2 - 3|x||$.

Az egyes függvényeket megadó másodfokú kifejezéseket először teljes négyzetté kiegészítjük.

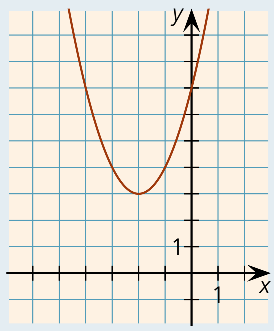
a) $f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 9 + 8 = (x-3)^2 - 1$.

a)



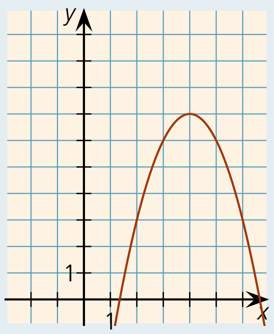
b) $f(x) = x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 - 4 + 7 = (x+2)^2 + 3$.

b)



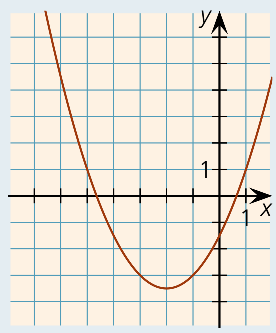
c) $f(x) = -x^2 + 8x - 9 = -[x^2 - 8x + 9] = -\left[(x-4)^2 - 7\right] = -(x-4)^2 + 7$.

c)



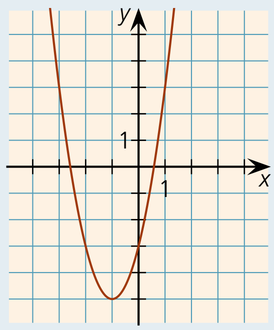
d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}[x^2 + 4x - 3] = \frac{1}{2}\left[(x+2)^2 - 7\right] = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{7}{2}$.

d)



e) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3 = 2\left[x^2 + 2x - \frac{3}{2}\right] = 2\left[(x+1)^2 - \frac{5}{2}\right] = 2(x+1)^2 - 5.$

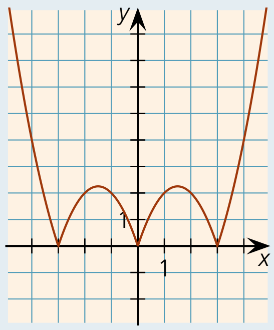
e)



f) Az $f(x) = \left|x^2 - 3|x|\right|$ függvény páros függvény, így elegendő a grafikonját csak $x \geq 0$-ra elkészítenünk, majd a kapott grafikont tükröznünk kell az y tengelyre.

Ha $x \geq 0$, akkor $f(x) = \left|x^2 - 3x\right|$. A $g(x) = x^2 - 3x$ függvény grafikonja egy felfelé nyíló parabola; zérushelyei: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Ennek x tengely „alatti" részét tengelyesen tükrözzük az x tengelyre, így megkapjuk az $f(x) = \left|x^2 - 3x\right|$ függvény grafikus képét, majd ezt kiegészítve az y tengelyre vonatkozó tükörképével, adódik az eredeti függvény grafikus képe.

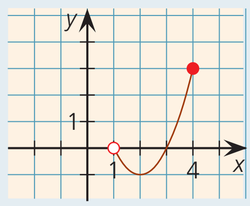
f)



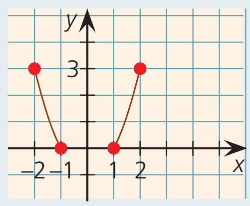
3. K1 Ábrázoljuk a megadott függvényeket a megadott számhalmazon és állapítsuk meg a függvények értékkészletét!

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad x \in (1; 4]$; *b)* $f(x) = x^2 - 1, \quad 1 \leq |x| \leq 2.$

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$



b) Az $f(x) = x^2 - 1$ függvény értelmezési tartománya a feltételek szerint:
$-2 \leq x \leq -1 \cup 1 \leq x \leq 2.$



4. K1 Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 + 4x + c$ függvény. Határozzuk meg a c értékét úgy, hogy a függvény értékkészlete $f(x) \geq -2$ legyen!

$f(x) = x^2 + 4x + c = (x+2)^2 - 4 + c$. Ha a függvény értékkészlete a –2-nél nem kisebb valós számok halmaza, akkor $-4 + c = -2$, ahonnan $c = 2$.

5. K2 Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 + bx + 4$ függvény. A függvény minimuma $x = -2$-ben van. Adjuk meg a függvény értékkészletét!

$f(x) = x^2 + bx + 4 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + 4$. Ha a függvény minimuma $x = -2$-ben van, akkor $\frac{b}{2} = -2$, ahonnan $b = -4$. Ekkor $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Tehát a függvény értékkészlete: $f(x) \geq 0$.

6. E1 Az alábbi függvényekről tudjuk, hogy minden x-hez pozitív számot rendelnek. Határozzuk meg a függvények képletében szereplő c paraméter értékét!

a) $f(x) = x^2 + 6x + c$; *b)* $f(x) = 2x^2 - 10x + c$; *c)* $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + c$.

a) $f(x) = x^2 + 6x + c = (x+3)^2 - 9 + c$. Ha ez minden x-re nagyobb 0-nál, akkor $-9 + c > 0$, tehát $c > 9$.

b) $f(x) = 2x^2 - 10x + c = 2\left[x^2 - 5x + \frac{c}{2}\right] = 2\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{c}{2}\right] = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} + c$.

Ha ez minden x-re pozitív, akkor $-\frac{25}{2} + c > 0$, azaz $c > \frac{25}{2}$.

c) Az $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + c$ függvény grafikus képe egy lefelé nyíló parabola, így nincs olyan c, melyre teljesülne, hogy a függvény minden x-re pozitív.

7. E1 Az $f(x) = x^2 + 2(c+1)x + 5c^2 + 10c + 5$ $(c > 0)$ függvény értékkészlete $f(x) \geq 9$. Hol van a függvény minimuma?

$f(x) = x^2 + 2(c+1)x + 5c^2 + 10c + 5 = (x + c + 1)^2 - (c+1)^2 + 5c^2 + 10c + 5 =$
$= (x + c + 1)^2 - c^2 - 2c - 1 + 5c^2 + 10c + 5 = (x + c + 1)^2 + 4c^2 + 8c + 4.$

Ha a függvény értékkészlete $f(x) \geq 9$, akkor $4c^2 + 8c + 4 = 9$, azaz $4(c+1)^2 = 9$. Innen $2(c+1) = 3$, vagy $2(c+1) = -3$. Első esetben $c = \frac{1}{2}$, második esetben $c = -\frac{5}{2}$. De $c > 0$, így csak $c = \frac{1}{2}$ lehetséges. A függvény minimuma $x = -(c+1)$-ben van, tehát a minimum hely: $x = -\frac{3}{2}$.

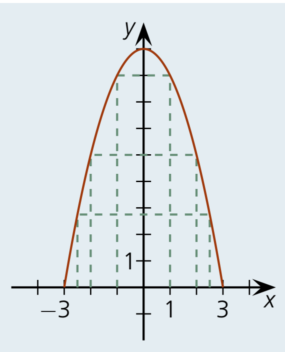
3. *Szélsőérték problémák megoldása a másodfokú függvények segítségével (Emelt szint)*

1. E1 Két szám összege 26. Hogyan válasszuk meg ezt a két számot, hogy szorzatuk a lehető legnagyobb legyen?

Legyen az egyik szám x; ekkor a másik szám $26 - x$. E két szám S szorzata az x függvényében: $x(26 - x) = -x^2 + 26x$.

A kapott másodfokú függvény grafikus képe egy lefelé nyíló parabola. Ennek szélsőértéke az $x = -\frac{b}{2a}$ helyen van. Tehát a szorzat értéke akkor lesz a legnagyobb, ha $x = -\frac{26}{-2} = 13$, vagyis, ha a két szám egyenlő. A maximális szorzat értéke: $13^2 = 169$.

2. E1 Az $f(x) = -x^2 + 9$ függvény görbéje és az x tengely által közbezárt tartományba olyan téglalapokat írunk, melyek két csúcsa az x tengelyre, egy-egy csúcsa pedig a függvény görbéjére illeszkedik. E téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a kerülete?



Készítsünk ábrát a feladat szövege alapján! Az $f(x) = -x^2 + 9$ függvény zérushelyei: 3 és –3. Legyen x_0 a téglalapnak az x tengely pozitív felére illeszkedő pontja. Nyilván $0 < x_0 < 3$.

A téglalap x tengelyre illeszkedő oldalának a hossza $2x_0$, az y tengellyel párhuzamos oldalának a hossza az x_0 helyen vett függvényérték: $-x_0^2 + 9$. Ezek szerint a téglalap K kerülete az x_0 függvényében:

$K(x_0) = 2 \cdot 2x_0 + 2 \cdot (-x_0^2 + 9) = -2x_0^2 + 4x_0 + 18.$

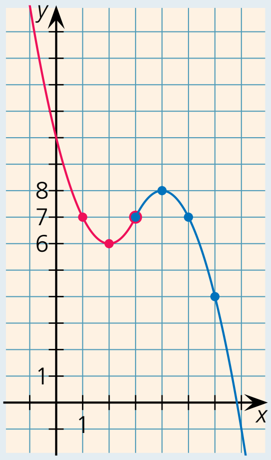
A kapott függvény grafikus képe egy lefelé nyíló parabola. Maximuma az $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-4} = 1$ helyen van. Tehát a téglalap kerülete akkor lesz a legnagyobb, ha $x_0 = 1$, és a legnagyobb kerület: $K = -2 + 4 + 18 = 20$.

3. E1 Egy meghibásodott katonai műhold mozgását egy órán keresztül készültek figyelni a szakemberek. A műhold Földtől való távolságát a megfigyelés kezdetétől az alábbi $f(x)$ függvény írja le (az egység az x tengelyen 6 perc, az y tengelyen 1500 méter):

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+10, & \text{ha } x\le 3 \\ -x^2+8x-8, & \text{ha } x>3 \end{cases}$$

a) Milyen magasan volt a műhold a megfigyelés kezdetekor?

b) Egy radarállomáson minden olyan tárgyat észlelni tudnak, amely a földtől legfeljebb 10,5 km magasan van. Mikor észlelte a radarállomás a megfigyelés idejében a műholdat?



Először ábrázoljuk a megadott f függvényt! A megfigyelés kezdetét jelölje $x = 0$. Ha a műholdat egy órán keresztül akarták megfigyelni, és az egység az x tengelyen 6 perc, akkor az x tengelyen $x = 10$-ig célszerű a skálázást jelölni.

Ha $x \le 3$, akkor $f(x)=x^2-4x+10=(x-2)^2-4+10=(x-2)^2+6$.

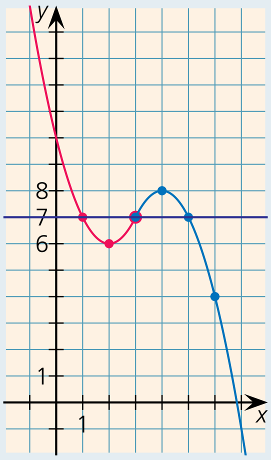
Ha $3<x$, akkor $f(x)=-x^2+8x-8=-\left[(x-4)^2-16+8\right]=-(x-4)^2+8$.

A kapott kifejezésekhez tartozó parabolák jellegzetes pontjait felvéve az $f(x)$ függvény grafikonját már könnyen ábrázolhatjuk.

a) A megfigyelés kezdetén a műhold földtől való távolságát a függvény $x = 0$ helyen vett értéke adja meg. A 0-t nyilván az $x \le 3$ intervallumon értelmezett függvény képletébe kell helyettesítenünk; ekkor $f(0)=2^2+6=10$. Mivel az y tengelyen az egység 1500 m, ezért a műhold magassága ekkor 10 · 1500 m = 15 km.

b) Az y tengelyen az egység 1500 m. Így a 10 500 m magasság az y tengelyen $\dfrac{10\,500}{1500}=7$ egységnek felel meg. Ezek szerint érdemes megrajzolnunk a $g(x)=7$ egyenest (ami az x tengellyel párhuzamos egyenes), és leolvasni az $f(x)\le 7$ egyenlőtlenség megoldását.

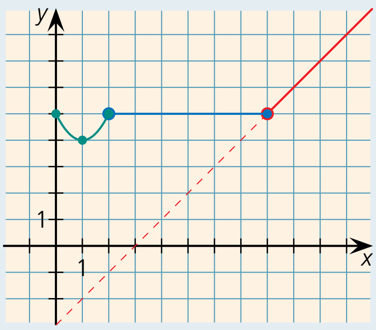
Az ábra alapján az $f(x)\le 7$ egyenlőtlenség megoldása: $1\le x\le 3$ vagy $5\le x$. Figyelembe véve az x tengelyen az egységet: a radar a műholdat a megfigyelés kezdetétől számított 6. perctől a 18. percig, majd a 30. perc után észlelte.



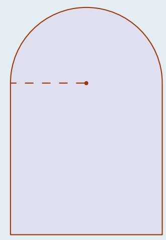
4. E1 Ábrázoljuk az alábbi f függvényt, melynek értelmezési tartománya az $x \ge 0$ valós számok halmaza!

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+5, & \text{ha } 0\le x\le 2 \\ 5, & \text{ha } 2<x\le 8 \\ x-3, & \text{ha } 8<x \end{cases}$$

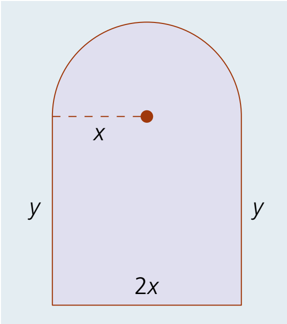
Ha $0\le x\le 2$, akkor $f(x)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$. A függvény grafikonja:



5. E1 Az ábrán egy gótikus ablakot látunk. Ez egy téglalap, melynek egyik oldalához illesztünk egy félkört. Az ablak kerülete 6 m. Hogyan méretezzék az ablakot, hogy az a lehető legtöbb fényt beengedje (azaz a lehető legnagyobb legyen a területe?



Legyen x a félkör sugara, y az ablak téglalap részének a magassága.



Ekkor az ablak K kerülete:

$K = 2x + 2y + x\pi = 6;$ innen $y = 3 - x - \frac{x\pi}{2}.$

Az ablak T területe:

$T = 2xy + \frac{x^2\pi}{2}.$

Helyettesítsük be a T területképletbe az előbb y-ra kapott értéket, így megkapjuk a területet x függvényében:

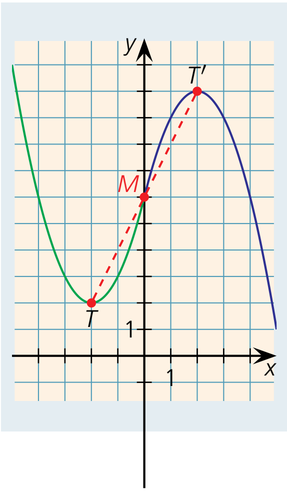
$$T(x) = 2x\left(3 - x - \frac{x\pi}{2}\right) + \frac{x^2\pi}{2} = -(2+\pi)x^2 + 6x + \frac{x^2\pi}{2} = x^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \pi - 2\right) + 6x.$$

A kapott függvény egy másodfokú függvény, melynek grafikus képe egy lefelé nyíló parabola. Ennek maximuma $x = -\frac{b}{2a}$-ban van, tehát a maximumhely

$$x = \frac{-6}{2\left(\frac{\pi}{2} - \pi - 2\right)} = \frac{-6}{-4-\pi} \approx 0{,}84 \quad \text{és ezzel} \quad y = 3 - x - \frac{x\pi}{2} \approx 0{,}84.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az ablak területe akkor lesz maximális, ha a téglalapjának vízszintes része $2x \approx 1{,}68$ m, függőleges része pedig $y \approx 0{,}84$ m.

6. E1 Legyen az $f(x) = x^2 + 4x + 6$ függvény értelmezési tartománya a nempozitív valós számok halmaza. Legyen M a függvénygörbe és az y tengely metszéspontja. Tükrözzük az $f(x)$ függvény grafikonját az M pontra, és adjuk meg azt a függvényt, melynek grafikus képe a tükörképként adódó grafikon!



$f(x) = x^2 + 4x + 6 = (x+2)^2 + 2 \quad (x \le 0)$. A függvény grafikonjának tengelypontja a $T(-2;\ 2)$ pont. Az $f(x)$ függvény az y tengelyt az $M(0;\ 6)$ pontban metszi. A T pontnak az M pontra vonatkozó tükörképe $T'(2;\ 10)$. Mivel $f(x)$ grafikonja felfelé nyíló parabola volt, ezért a tükörképének grafikonja lefelé nyíló parabola. Ezek szerint a keresett függvény

$f^*(x) = -(x-2)^2 + 10 = -x^2 + 4x + 6 \quad (x \ge 0)$.

7. E1 Egy labdát h = 1,5 m magasságból függőlegesen fölfelé hajítunk $v = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel. Milyen magasra repül a labda? (A levegő közegellenállásától eltekintünk.)

A fizikából ismert, hogy ha egy testet a földtől h magasságból v_0 kezdősebességgel függőlegesen felhajítunk, akkor a földtől való s távolsága a t idő függvényében

$s(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$

(ahol g a nehézségi gyorsulás (≈ 10 m/s²)). Esetünkben tehát

$s(t) = 1{,}5 + 8t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2 = -5t^2 + 8t + 1{,}5.$

E függvény maximumát keressük. A maximum helye: $t = -\frac{8}{-10} = 0{,}8$ sec, vagyis a labda 0,8 sec ideig repült fölfelé. Ezek szerint a labda által elért magasság (vagyis a függvény maximum értéke):

$s = 1{,}5 + 8 \cdot 0{,}8 - 5 \cdot 0{,}8^2 = 4{,}7.$

Tehát a labda 4,7 méter magasra repült.

4. Másodfokú egyenletre vezető feladatok

1. K1 Két szám szorzata 143, különbségük 2. Melyik ez a két szám?

Legyen a két szám x és $x + 2$. Ekkor

$x(x+2) = 143,$ azaz $x^2 + 2x - 143 = 0.$

Az egyenlet bal oldalát így alakíthatjuk:

$x^2 + 2x - 143 = (x+1)^2 - 1 - 143 = (x+1)^2 - 144 = 0,$

$(x+1)^2 = 144,$ ahonnan $x + 1 = 12$ vagy $x + 1 = -12.$

A feladat feltételeinek eleget tevő valós szám: $x_1 = 11$ vagy $x_2 = -13$.

2. K1 Oldjuk meg szorzattá alakítással az alábbi másodfokú egyenleteket!

a) $x^2 + 4x - 77 = 0$;

b) $x^2 - 8x + 15 = 0$;

c) $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$.

a) $x^2 + 4x - 77 = (x+2)^2 - 4 - 77 = (x+2)^2 - 81 = (x+2)^2 - 9^2 =$
$= (x+2+9)(x+2-9) = 0$,
$(x+11)(x-7) = 0$.
Innen $x_1 = -11$, $x_2 = 7$.

b) $(x-4)^2 - 16 + 15 = (x-4)^2 - 1 = (x-4+1)(x-4-1) = (x-3)(x-5) = 0$.
$x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

c) $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64} - \frac{24}{64} = \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{8} + \frac{5}{8}\right)\left(x + \frac{1}{8} - \frac{5}{8}\right) = 0$,
$\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$.
Innen $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

3. K1 Oldjuk meg a teljes négyzetté kiegészítés módszerével az alábbi másodfokú egyenleteket!

a) $x^2 + 16x + 55 = 0$;

b) $x^2 - 9x - 36 = 0$;

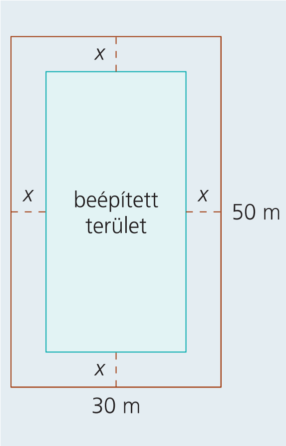
c) $3x^2 + 10x + 3 = 0$.

a) $(x+8)^2 - 64 + 55 = (x+8)^2 - 9 = 0$, azaz $(x+8)^2 = 9$. Innen $|x+8| = 3$, tehát $x + 8 = 3$ vagy $x + 8 = -3$. Az egyenlet gyökei: $x_1 = -5$, $x_2 = -11$.

b) $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} - \frac{144}{4} = 0$, azaz $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2$. Innen $\left|x - \frac{9}{2}\right| = \frac{15}{2}$, tehát $x - \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$ vagy $x - \frac{9}{2} = -\frac{15}{2}$; $x_1 = 12$, $x_2 = -3$.

c) $3 \cdot \left(x^2 + \frac{10}{3}x + 1\right) = 3 \cdot \left[\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + 1\right] = 3\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} = 0$, tehát
$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, azaz $\left|x + \frac{5}{3}\right| = \frac{4}{3}$. Innen $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -3$.

4. K2 Az ábrán egy téglalap alakú parkot és a szélén körbe vezető sétautat látjuk. A park oldalai 30 m és 50 m. A körbevezető sétaút szélessége mindenütt ugyanannyi. Mekkora legyen a sétaút szélessége, ha a beültetett kert a teljes park területének 80%-a?



A park területenek 80%-a $0{,}8 \cdot 30 \cdot 50$. A beültetett kert területe: $(30 - 2x)(50 - 2x)$.
Ezek szerint felírhatjuk a következö egyenletet:
$0{,}8 \cdot 30 \cdot 50 = (30 - 2x)(50 - 2x)$.
A műveletek elvégzése után azt kapjuk:
$x^2 - 40x + 75 = 0$,
$$x_{1,2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 300}}{2} = 20 \pm 5\sqrt{13}.$$
A feladat jellegéből adódóan $0 < x < 15$, így csak $x = 20 - 5\sqrt{13}$ lehetséges. Tehát a sétaút keresett szélessége: $x = 20 - 5\sqrt{13} \approx 1{,}97$ m.

5. E1 Adott $(2n + 1)$ db egymást követő egész szám, melyek közül az első $(n + 1)$ db négyzetének összege egyenlő az utolsó n db négyzetének összegével. Melyek ezek a számok?

Jelöljük x-szel a $(2n + 1)$ db egymást követő egész szám közül a közepsőt. Ekkor az első $(n + 1)$ db szám:

$x,\ x-1,\ x-2,\ x-3,\ \ldots,\ x-n,$
az utolsó n db szám pedig
$x+1,\ x+2,\ x+3,\ \ldots,\ x+n.$
Ezek szerint felírhatjuk az alábbi egyenletet:
$(x-n)^2+(x-(n-1))^2+\ldots+(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+n)^2.$
A műveletek elvégzése után az egyenlet bal oldalán
$(n+1)x^2-2x(n+n-1+n-2+\ldots+3+2+1)+1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2,$
a jobb oldalon pedig
$nx^2+2x(1+2+3+\ldots+n)+1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2.$
Ezek szerint a következő egyenletet kaptuk:
$x^2-4x(1+2+3+\ldots+n)=0,$ azaz
$x(x-4(1+2+3+\ldots+n))=0.$
Innen az egyik gyök $x_1=0$, a másik pedig
$$x_2=4(1+2+3+\ldots+n)=4\cdot\frac{(1+n)n}{2}=2n(n+1).$$

6. E1 Két munkás együttesen 6 nap alatt végez el egy munkát. Ha külön-külön végeznék el a feladatot, akkor az egyik 8 nappal hamarabb végezne a munkával, mint a másik. Hány nap alatt végzik el külön-külön a munkát?

Ha a gyorsabban dolgozó munkás x nap alatt végezné el egyedül a munkát, akkor a másik $(x+8)$ nap alatt végezne egyedül. Ekkor a gyorsabb munkás egy nap alatt a munka $\frac{1}{x}$-ed részét, a másik munkás egy nap alatt a munka $\frac{1}{x+8}$-ad részét végezné el. Mivel együtt dolgozva 6 nap alatt végeznek, ezért írhatjuk a következő egyenletet:
$$\frac{6}{x}+\frac{6}{x+8}=1.$$
A közös nevezővel szorozva
$6(x+8)+6x=x(x+8),$ azaz $x^2-4x-48=0.$
Az egyenletet így alakíthatjuk:
$(x-2)^2-4-48=(x-2)^2-52=0,$ azaz $(x-2)^2=52.$
Innen
$x-2=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ vagy $x-2=-2\sqrt{13},$
tehát az egyenlet megoldásai: $x_1=2+2\sqrt{13}\approx 9{,}2,\ x_2=2-2\sqrt{13}\approx -5{,}2$. A negatív megoldás nyilván érdektelen, így azt kaptuk: $x\approx 9{,}2$. Tehát a kérdéses munkát az egyik munkás egyedül kb. 9,2 nap alatt, a másik pedig kb. 17,2 nap alatt végezné el.

5. Speciális másodfokú egyenletek megoldása

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $x^2-6x=0;$ *b)* $x^2+12{,}6x=0;$ *c)* $2x^2+13x=0;$
d) $6x^2=\frac{2}{3}x;$ *e)* $-\frac{1}{2}x^2=\frac{5}{3}x;$ *f)* $\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}.$

a) $x^2-6x=x(x-6)=0;$ $x_1=0,\ x_2=6.$
b) $x^2+12{,}6x=x(x+12{,}6)=0;$ $x_1=0,\ x_2=-12{,}6.$
c) $2x^2+13x=x(2x+13)=0;$ $x_1=0,\ x_2=-\frac{13}{2}.$
d) $6x^2=\frac{2}{3}x$, innen $18x^2-2x=x(18x-2)=0,$ $x_1=0,\ x_2=\frac{1}{9}.$
e) $-\frac{1}{2}x^2=\frac{5}{3}x,$ innen $-3x^2-10x=-x(3x+10)=0,$ $x_1=0,\ x_2=-\frac{10}{3}.$

f) $x \neq -1$; $(x+1)^2 - 2(x+1) = (x+1)(x+1-2) = (x+1)(x-1) = 0$. Az $x = -1$ az eredeti egyenletnek nem megoldása, így az egyedüli megoldás: $x = 1$.

2. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^2 - 9 = 0$; *b)* $x^2 + 16 = 0$; *c)* $5x^2 - 20 = 0$;

d) $4x^2 = 18$; *e)* $\frac{1}{3}x^2 = \frac{7}{9}$; *f)* $7x^2 + \frac{14}{7} = 0$.

a) $x^2 = 9$, azaz $|x| = 3$; $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

b) $x^2 = -16$; az egyenletnek nincs való gyöke.

c) $5x^2 = 20$, tehát $x^2 = 4$, azaz $|x| = 2$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

d) $x^2 = \frac{9}{2}$, $|x| = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$.

e) $x^2 = \frac{7}{3}$, $|x| = \sqrt{\frac{7}{3}}$; $x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$.

f) $x^2 = -\frac{2}{7}$; az egyenletnek nincs valós gyöke.

3. E1 Az $ax^2 + b = 0$ és $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ egyenleteknek van egy közös valós gyöke. Mi ez a közös gyök?

Ha a két egyenletnek x_0 egy közös gyöke, akkor $ax_0^2 + b = ax_0^2 + bx_0$, azaz $b = bx_0$, ahonnan $b \neq 0$ miatt csak $x_0 = 1$ lehet. (Fontos megjegyezni, hogy az első egyenletnek akkor és csak akkor lehetnek valós gyökei, ha *a* és *b* előjele különböző, hiszen az első egyenlet gyökei: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$.)

4. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$(a^2 - b^2)x^2 + ax = bx$ $(|a| \neq |b|)$

Az egyenletet így alakíthatjuk:

$(a^2 - b^2)x^2 + ax - bx = 0$,

$(a - b)(a + b)x^2 + (a - b)x = 0$.

Mivel $|a| \neq |b|$, ezért innen $(a + b)x^2 + x = 0$, $x[(a + b)x + 1] = 0$. Az egyenlet gyökei:

$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{a+b}$.

5. E1 Adott az $(a + 1)x^2 + (a^2 - 1)x = 0$ $(|a| \neq 1)$ másodfokú egyenlet. Mekkora legyen az *a* paraméter értéke, ha azt akarjuk, hogy az egyenlet 0-tól különböző gyöke legalább 6 legyen?

A megadott egyenletet átalakítva azt kapjuk:

$x[(a + 1)x + (a + 1)(a - 1)] = 0$.

Mivel $|a| \neq 1$, ezért írhatjuk:

$x(x + a - 1) = 0$.

$x_1 = 0$, $x_2 = 1 - a$. Ha a 0-tól különböző gyök legalább 6, akkor $1 - a \geq 6$, azaz $a \leq -5$.

6. A másodfokú egyenlet megoldóképlete

1. K1 Oldjuk meg a következő egyenleteket a megoldóképlet segítségével!

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$; *b)* $a^2 - 3a - 4 = 0$; *c)* $t^2 + 2t + 3 = 0$;

d) $2k^2 - 3k - 9 = 0$; *e)* $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 20 = 0$; *f)* $-3b^2 + 7b - 4 = 0$.

a) $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$; $x_1 = -5$, $x_2 = 3$.

b) $a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$; $a_1 = 4$, $a_2 = -1$.

c) $t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$. Mivel a négyzetgyök alatt negatív szám szerepel, ezért az egyenletnek nincs valós gyöke.

d) $k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4}$; $k_1 = -\frac{3}{2}$, $k_2 = 3$.

e) Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 2-vel (természetesen ezt a lépést nem muszáj megtennünk, csupán az egyszerűbb számolás kedvéért tesszük): $x^2 + 6x - 40 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+160}}{2} = \frac{-6 \pm 14}{2}$; $x_1 = -10$, $x_2 = 4$.

f) $b_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{-6} = \frac{-7 \pm 1}{-6}$; $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{4}{3}$.

2. K2 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2 - \frac{x}{x+1} = x + \frac{1}{2}$; *b)* $2 - \frac{1}{x-2} = x - 2$; *c)* $(x+3)^2 = 4(2x+3)$;

d) $\frac{x(x-1) + 2x^2}{1-3x} = 1 + 3x$; *e)* $\frac{3}{x^2-4} + \frac{2x}{2x+4} = \frac{4}{x+2}$.

a) $x \neq -1$. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $2(x+1)$-gyel:

$4(x+1) - 2x = 2x(x+1) + x + 1$, ahonnan $2x^2 + x - 3 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$; $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 1$.

b) $x \neq 2$. $2(x-2) - 1 = (x-2)^2$, azaz $x^2 - 6x + 9 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3$. Az egyenletnek csak egy valós gyöke van.

c) $x^2 + 6x + 9 = 8x + 12$, azaz $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$; $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

d) $x \neq \frac{1}{3}$. $x^2 - x + 2x^2 = 1 - 9x^2$, azaz $12x^2 - x - 1 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{24} = \frac{1 \pm 7}{24}$; $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$. De az $x = \frac{1}{3}$ az eredeti egyenletnek nem megoldása, így az eredeti egyenletnek egy valós gyöke van csak: $x = -\frac{1}{4}$.

e) $x \neq \pm 2$. Először a nevezőket alakítsuk szorzattá, majd szorozzuk meg mindkét oldalt a közös nevezővel:

$\frac{3}{(x-2)(x+2)} + \frac{2x}{2(x+2)} = \frac{4}{x+2}$,

$6 + 2x(x-2) = 8(x-2)$,

$x^2 - 6x + 11 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-44}}{2}$; mivel a négyzetgyök alatti mennyiség negatív, ezért az egyenletnek nincs valós gyöke.

3. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, ahol p, m, k 0-tól különböző valós számok!

a) $\frac{x}{p} + \frac{p}{x} = \frac{10}{3}$; *b)* $\frac{x^2 + k^2}{kx} = \frac{x^2 + m^2}{mx}$; *c)* $x(x-2a) = b^2 - a^2$.

a) Szorozzuk meg mindkét oldalt 3px-szel! Azt kapjuk, hogy

$3x^2 + 3p^2 = 10px$, azaz $3x^2 - 10px + 3p^2 = 0$.

Innen a megoldóképlet segítségével:

$$x_{1,2} = \frac{10p \pm \sqrt{100p^2 - 36p^2}}{6} = \frac{10p \pm 8p}{6}.$$

Az egyenlet gyökei: $x_1 = 3p$, $x_2 = \frac{1}{3}p$.

b) A közös nevezővel megszorozva az egyenlet mindkét oldalát, a következő egyenlethez jutunk:

$mx^2 + mk^2 = kx^2 + km^2$, azaz $mx^2 - kx^2 = km^2 - mk^2$.

A bal oldalon x^2-t, a jobb oldalon mk-t kiemelhetünk:

$x^2(m-k) = mk(m-k)$.

Most két esetet kell vizsgálnunk:

1. Ha $m = k$, akkor – az eredeti egyenletet vizsgálva – azonosságot kapunk, melynek minden $x \neq 0$ valós szám megoldása.
2. Ha $m \neq k$, akkor $m - k$-val elosztva mindkét oldalt:
   $x^2 = mk$, ahonnan az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = \sqrt{mk}$, $x_2 = -\sqrt{mk}$.

c) A bal oldali zárójelet felbontjuk, majd az egyenletet 0-ra rendezzük:

$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$.

Innen a megoldóképlettel:

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4b^2}}{2} = \frac{2a \pm 2b}{2}.$$

Az egyenlet gyökei: $x_1 = a + b$, $x_2 = a - b$.

4. E1 Mely valós számok elégítik ki a alábbi egyenleteket?

a) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$; *b)* $x|x-3| - 10 = 0$; *c)* $x^2 = |x-6|$.

a) Ha $x \geq 0$, akkor $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}; \qquad x_1 = 3,\ x_2 = -1.$$

De $x \geq 0$ miatt az $x = -1$ nem megoldása az egyenletnek, tehát $x = 3$.

Ha $x < 0$, akkor $x^2 + 2x - 3 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}; \qquad x_1 = -3,\ x_2 = 1.$$

De $x < 0$ miatt az $x = 1$ nem megoldása az egyenletnek, tehát $x = -3$.

Az eredeti egyenlet gyökei: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

b) Ha $x \geq 3$, akkor $x^2 - 3x - 10 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}, \qquad x_1 = -2,\ x_2 = 5.$$

De $x \geq 3$ miatt a –2 nem megoldás.

Ha $x < 3$, akkor $-x^2 + 3x - 10 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-40}}{-2}$; ekkor a négyzetgyök alatt negatív szám szerepel, tehát ez esetben az egyenletnek nincs valós megoldása. Az eredeti egyenlet egyedüli megoldása: $x = 5$.

c) Ha $x \geq 6$, akkor $x^2 - x + 6 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-24}}{2}$; ekkor a négyzetgyök alatt negatív szám szerepel, tehát ez esetben az egyenletnek nincs valós megoldása.

Ha $x < 6$, akkor $x^2 + x - 6 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}; \qquad x_1 = -3,\ x_2 = 2.$$

Ezek teljesítik az $x < 6$ feltételt, így az eredeti egyenlet gyökei: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

5. E1 Az $f(x) = 2x^2 - 5x + k$ másodfokú függvény egyik zérushelye $x = 4$. Hol van a függvény másik zérushelye?

Ha $x = 4$ zérushelye a megadott függvénynek, akkor
$2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + k = 0, \qquad$ ahonnan $\qquad k = -12.$
Tehát az eredeti függvény $f(x) = 2x^2 - 5x - 12$. E függvény zérushelyei:
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}; \qquad x_1 = 4, \quad x_2 = -\frac{3}{2}.$$
Tehát a függvény másik zérushelye: $x = -\frac{3}{2}$.

6. E2 Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!
$\left| x^2 - 2|x| \right| = 24$

Tekintsük az egyenlet bal oldalán szereplő kifejezést; legyen $g(x) = \left| x^2 - 2|x| \right|$. Ez a függvény páros függvény, hiszen minden x-re $f(x) = f(-x)$. Ezek szerint elegendő az egyenlet pozitív megoldását megtalálnunk; ennek (–1)-szerese is megoldás. Ha $x \geq 0$, akkor
$x^2 - 2x - 24 = 0 \qquad$ vagy $\qquad x^2 - 2x + 24 = 0$.

Második esetben a megoldóképletben a négyzetgyök alatt $4 - 96 < 0$ negatív szám szerepel, tehát nem lehet megoldása. Első esetben
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2}; \qquad x_1 = -4, \quad x_2 = 6.$$
Mivel $x \geq 0$, ezért az eredeti egyenlet megoldásai: $x_{1,2} = \pm 6$.

7. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

1. K1 Határozzuk meg a következő egyenletekben szereplő paraméterek értékét úgy, hogy az egyenleteknek két egyenlő valós gyöke legyen!
a) $2x^2 - 7x + p = 0$; *b)* $x^2 - 11x - k = 0$; *c)* $3x^2 + 4x - r^2 = 0$;
d) $ax^2 + 5x + a = 0$; *e)* $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + b = 0$; *f)* $-6x^2 + 5x + 2c = 0$.

Ha a megadott egyenleteknek egy valós gyöke van, akkor az egyenletek diszkriminánsa 0.
a) $49 - 8p = 0$, azaz $p = \frac{49}{8}$.
b) $121 + 4k = 0$, azaz $k = -\frac{121}{4}$.
c) $16 + 12r^2 = 0$; mivel ennek az egyenletnek nincs valós megoldása, ezért nincs olyan r, melyre az eredeti egyenletnek csak egy megoldása lenne. (Esetünkben a diszkrimináns minden r-re pozitív, tehát az eredeti egyenletnek minden r-re két különböző valós megoldás van.)
d) $25 - 4a^2 = 0$, azaz $a_{1,2} = \pm\frac{5}{2}$.
e) $\frac{1}{4} - 2b = 0$, azaz $b = \frac{1}{8}$.
f) $25 + 48c = 0$, azaz $c = -\frac{25}{48}$.

2. K2 Hogyan válasszuk meg az alábbi egyenletekben szereplő paraméterek értékét, hogy az egyenletek mindegyikének két különböző valós gyöke legyen?
a) $ax^2 - 4x + 2a = 0$; *b)* $2x^2 - 11x + b = 0$; *c)* $5x^2 + 2px - 1 = 0$.

Ha a megadott egyenleteknek két különböző valós gyöke van, akkor az egyenletek diszkriminánsa pozitív.
a) $16 - 8a^2 > 0$, azaz $a^2 < 2$, ahonnan $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.
b) $121 - 8b > 0$, azaz $b < \frac{121}{8}$.

c) $4p^2 + 20 > 0$. Ez utóbbi egyenlőtlenség minden valós p-re teljesül, így az eredeti egyenletnek bármely valós p-re két különböző valós megoldása van.

3. E2 Mekkora legyen a $k \neq 0$ paraméter értéke, hogy csak egyetlen olyan m valós szám legyen, melyre az alábbi egyenletnek két egyenlő valós megoldása van?
$kx^2 - 2(m - k)x + mk = 0.$

Ha a megadott egyenletnek csak egy valós megoldása van, akkor diszkriminánsa 0, azaz
$4(m - k)^2 - 4k^2m = 0,$
$m^2 - 2mk + k^2 - k^2m = 0,$
$m^2 - (2k + k^2)m + k^2 = 0.$

Ha csak egyetlen olyan m valós szám van, melyre ez utóbbi teljesül, akkor ennek az m-ben másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa szintén 0 kell, hogy legyen:
$(2k + k^2)^2 - 4k^2 = 0,$
$4k^2 + 4k^3 + k^4 - 4k^2 = 0,$
$k^3(k + 4) = 0.$

Mivel $k \neq 0$, így $k = -4$. Tehát akkor lesz csak egyetlen m valós szám, melyre az eredeti egyenletnek egy valós gyöke van, ha $k = -4$. Ekkor $m^2 - 8m + 16 = (m - 4)^2 = 0$, azaz $m = 4$. Ezzel az eredeti egyenlet
$-4x^2 - 16x - 16 = 0,$ azaz $x^2 + 4x + 4 = 0.$

Innen $(x + 2)^2 = 0$, vagyis $x = -2$.

4. E1 Mekkora legyen az alábbi egyenletben szereplő $a \neq 0$ paraméter értéke, hogy az egyenletnek ne legyen valós megoldása?
$ax^2 + (a + 1)x + \frac{1}{a} = 0.$

Ha a megadott egyenletnek nincs valós megoldása, akkor diszkriminánsa negatív:
$(a + 1)^2 - 4 < 0,$ azaz $|a + 1| < 2,$
$-2 < a + 1 < 2,$ ahonnan $-3 < a < 1.$

5. E2 Az $\overline{ab} \cdot x^2 + 2 \cdot \overline{ba} \cdot x + \overline{ab} = 0$ $a \neq b$ másodfokú egyenlet gyökei racionális számok ($\overline{ab}$ a 10-es számrendszerben felírt kétjegyű számot jelöl). Melyek ezek a gyökök?

Az egész együtthatós másodfokú egyenlet gyökei akkor és csak akkor lesznek racionálisak, ha az egyenlet diszkriminánsa négyzetszám.
$4 \cdot \overline{ba}^2 - 4 \cdot \overline{ab}^2 = n^2.$

Mivel a 4 négyzetszám, ezért ez akkor és csak akkor teljesül, ha
$(10b + a)^2 - (10a + b)^2 = k^2,$
$100b^2 + 20ab + a^2 - 100a^2 - 20ab - b^2 = k^2,$
$99b^2 - 99a^2 = k^2,$
$9 \cdot 11 \cdot (b - a)(b + a) = k^2.$

A 9 négyzetszám, így annak kell teljesülnie, hogy
$11 \cdot (b - a)(b + a) = r^2.$

A kapott egyenlőségből következik, hogy $(b - a)$ vagy $(b + a)$-nak 11-gyel oszthatónak kell lennie. De $b - a$ (két különböző egyjegyű szám) különbsége nem lehet osztható 11-gyel, így $b + a$ osztható 11-gyel. De a $b + a$ összeg értéke legfeljebb 18 lehet, így $b + a = 11$. Ekkor $(b - a)$-nak négyzetszámnak kell lennie. Tehát $b - a = 4$ vagy $b - a = 1$.

Ha $b + a = 11$ és $b - a = 4$, akkor $2b = 15$, ami nyilván nem lehetséges.
Ha $b + a = 11$ és $b - a = 1$, akkor $b = 6$ és $a = 5$.

Tehát az eredeti másodfokú egyenlet: $56x^2 + 130x + 56 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-130 \pm \sqrt{130^2 - 4 \cdot 56^2}}{112} = \frac{-130 \pm 66}{112}; \qquad x_1 = -\frac{7}{4}, \quad x_2 = -\frac{4}{7}.$$

8. Viète-formulák (Emelt szint)

1. E1 Ellenőrizzük, hogy az alábbi másodfokú egyenletek gyökei valósak, és állítsuk elő a gyökök köbének összegét az egyenletek megoldása nélkül!

a) $x^2+13x-2=0$; *b)* $3x^2+13x-2=0$; *c)* $\frac{1}{2}x^2-4x+6=0$.

Ha az $ax^2+bx+c=0$ gyökei valósak, akkor a D diszkriminánsa nemnegatív, azaz $D=b^2-4ac\geq 0$. A Viète-formulákat, valamint a két tag összegének köbéről szóló azonosságot használva

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_2^2x_1=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2),$$

$$x_1^3+x_2^3=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\cdot\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=\frac{-b^3+3abc}{a^3}.$$

a) Az egyenlet diszkriminánsa: $D=13^2+8>0$.

$$x_1^3+x_2^3=\frac{-13^3-78}{1}=-2275.$$

b) Az egyenlet diszkriminánsa: $D=13^2+24>0$.

$$x_1^3+x_2^3=\frac{-13^3-234}{27}=-\frac{2431}{27}.$$

c) Az egyenlet diszkriminánsa: $D=16-12>0$.

$$x_1^3+x_2^3=\frac{4^3-36}{\frac{1}{8}}=224.$$

2. E1 Az $x^2-(p+10)x+16p=0$ másodfokú egyenlet egyik gyöke a másik kétszerese. Határozzuk meg a p paraméter értékét!

$x_1=2x_2$. Írjuk fel az egyenletre a Viète-formulákat!

$x_1+x_2=3x_2$, $3x_2=p+10$ és $x_1\cdot x_2=2x_2^2$, $2x_2^2=16p$.

Az első egyenletből $p=3x_2-10$; ezt a második egyenletbe helyettesítve azt kapjuk:

$2x_2^2=48x_2-160$, azaz $x_2^2-24x_2+80=0$.

Az x_2-re kapott másodfokú egyenlet gyökei: 4 és 20. Tehát a feltételeknek eleget tevő p értékek:

$p=3x_2-10$, azaz $p_1=2$, $p_2=50$.

A megfelelő másodfokú egyenletek: $x^2-12x+32=0$ és $x^2-60x+800=0$.

3. E1 Az $ax^2+bx+c=0$ másodfokú egyenlet valós gyökei x_1 és x_2. Fejezzük ki az együtthatókkal a következő összeget: $x_1^3x_2+x_1x_2^3$!

$x_1^3x_2+x_1x_2^3=x_1x_2(x_1^2+x_2^2)$. A gyökök négyzetének összegéhez emeljük négyzetre a gyökök összegéről szóló összefüggést!

$(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$, tehát

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}.$$

Ezzel

$$x_1^3x_2+x_1x_2^3=\frac{c}{a}\cdot\frac{b^2-2ac}{a^2}=\frac{b^2c-2ac^2}{a^3}.$$

4. E1 Az $ax^2+bx+c=0$ másodfokú egyenlet valós gyökei x_1 és x_2. Határozzuk meg az egyenlet gyökei négyzetének reciprokának összegét!

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2-2ac}{c^2}.$$

5. E1 Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenlet 0-tól különböző együtthatóiról tudjuk, a következőket: a egyenlő az egyenlet valós gyökei négyzetének összegével; b egyenlő a gyökök reciprokának összegével; c pedig egyenlő a gyökök összegének reciprokával. Oldjuk meg az egyenletet!

A feltételekből az alábbi egyenletek következnek:

$$a = x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}, \qquad b = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}, \qquad c = \frac{1}{x_1 + x_2} = -\frac{a}{b}.$$

A második egyenletből $c = -1$. Ezt a harmadik egyenletbe helyettesítve $a = b$ adódik. Ezekkel az első egyenlet: $a^3 = a^2 + 2a$, ahonnan $a^2 - a - 2 = 0$.

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}; \qquad a_1 = -1, \ a_2 = 2.$$

Ha $a = -1$, akkor az eredeti egyenlet: $-x^2 - x - 1 = 0$. Ennek az egyenletnek diszkriminánsa: $1 - 4 < 0$, tehát nincsenek valós gyökei.

Ha $a = 2$, akkor $2x^2 + 2x - 1 = 0$; ekkor

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4}; \qquad x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; \ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

6. E2 Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenlet együtthatóiról a következőket tudjuk: a egyenlő a gyökök szorzatával, c egyenlő a gyökök összegével, b pedig egyenlő az egyenlet diszkriminánsával. Határozzuk meg az a, b, c együtthatókat!

A feltételek alapján az alábbi egyenleteket írhatjuk fel:

$$a = x_1 x_2 = \frac{c}{a}; \qquad c = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \qquad b = b^2 - 4ac.$$

Az első egyenletből $c = a^2$. Ezzel a második és a harmadik egyenlet így alakul:

$b = -a^3 \qquad b = b^2 - 4a^3.$

Tehát $-a^3 = a^6 - 4a^3$, azaz $3a^3 = a^6$.

$a^3 = 3$, vagyis $a = \sqrt[3]{3}$.

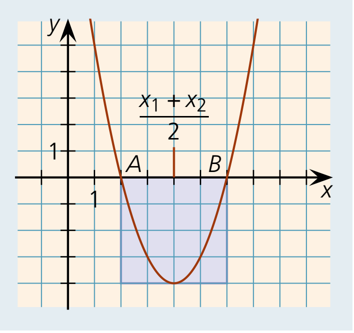
Ezzel $b = -3$ és $c = \sqrt[3]{9}$.

Az eredeti egyenlet:

$\sqrt[3]{3}x^2 - 3x + \sqrt[3]{9} = 0.$

7. E2 Az $f(x) = x^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonja az x tengelyt az A és B pontokban metszi. Ha tudjuk, hogy az AB szakaszra emelt négyzet érinti a parabolát, akkor mekkora e négyzet területe?

Készítsünk egy fiktív ábrát! A függvény zérushelyei: $A = x_1$, $B = x_2$. (Legyen $x_2 > x_1$). Jelöljük D-vel a diszkriminánst.



A négyzet oldala:

$$x_2 - x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2} = \sqrt{D}.$$

A négyzet oldalát úgy is meghatározhatjuk, hogy kiszámítjuk a függvényértéket a gyökök számtani közepénél. A megfelelő Viète-formula alapján $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2}$.

Ezek szerint a négyzet oldala

$$\left|f\left(-\frac{b}{2}\right)\right| = \left|\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + c\right| = \left|\frac{-b^2 + 4c}{4}\right| = \frac{D}{4}.$$

Ezek szerint $\sqrt{D} = \frac{D}{4}$, ahonnan $D = 16$.

A négyzet területe: $(x_2 - x_1)^2 = D = 16$.

9. A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja

1. K1 Adjunk meg olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei:

a) $x_1 = 3,\ x_2 = -8$; *b)* $x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{3}{2}$; *c)* $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{18}$.

A másodfokú egyenletek gyöktényezős alakját használjuk.

a) $(x-3)(x+8) = x^2 + 5x - 24 = 0$.

b) $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) = x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0$.

c) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{18}) = x^2 - 2\sqrt{2}\cdot x - 6 = 0$.

2. K1 Alakítsuk szorzattá a következő másodfokú kifejezéseket!

a) $x^2 - 3x - 18$;

b) $x^2 - 14x + 49$;

c) $x^2 + 2x + 8$;

d) $9x^2 - 12x + 4$.

Először meghatározzuk a másodfokú kifejezések gyökeit, majd alkalmazzuk a gyöktényezős felbontásról tanultakat.

a) Ha $x^2 - 3x - 18 = 0$, akkor $x_1 = -3,\ x_2 = 6$, tehát $x^2 - 3x - 18 = (x+3)(x-6)$.

b) Az $x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$.

c) Az $x^2 + 2x + 8 = 0$ egyenlet diszkriminánsa negatív, tehát az egyenletnek nincs valós gyöke, így a másodfokú kifejezés nem bontható fel két elsőfokú szorzatára.

d) $9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$.

3. K2 Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

a) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-6x+5}$; *b)* $\frac{x^2-6x+9}{x^2+8x-33}$; *c)* $\frac{3x^2-17x-6}{3x^2+13x+4}$.

A tört számlálóját és nevezőjét is felbontjuk elsőfokú tényezők szorzatára, majd – ha lehetséges – a megfelelő szorzótényezővel egyszerűsítünk.

a) $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$; $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$. Tehát

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-6x+5} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-5)} = \frac{x+3}{x-5} \qquad (x \neq 1,\ x \neq 5).$$

b) $$\frac{x^2-6x+9}{x^2+8x-33} = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+11)} = \frac{x-3}{x+11} \qquad (x \neq 3,\ x \neq -11).$$

c) $$\frac{3x^2-17x-6}{3x^2+13x+4} = \frac{3(x-6)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{3(x+4)\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \frac{x-6}{x+4} \qquad \left(x \neq -4,\ x \neq -\frac{1}{3}\right).$$

4. E1 Egyszerűsítsük a következő törtet!

$$\frac{x^2+(2-a)x-2a}{x^2-3ax+2a^2}.$$

A számláló zérushelyei:

$$x_{1,2} = \frac{a-2\pm\sqrt{(2-a)^2+8a}}{2} = \frac{a-2\pm\sqrt{a^2+4a+4}}{2} = \frac{a-2\pm(a+2)}{2}; \qquad x_1 = a,\ x_2 = -2.$$

A nevező zérushelyei:

$$x_{1,2} = \frac{3a\pm\sqrt{9a^2-8a^2}}{2} = \frac{3a\pm a}{2}; \qquad x_1 = 2a,\ x_2 = a.$$

Tehát

$$\frac{x^2+(2-a)x-2a}{x^2-3ax+2a^2} = \frac{(x-a)(x+2)}{(x-2a)(x-a)} = \frac{x+2}{x-2a} \qquad (x \neq a,\ x \neq 2a).$$

5. E1 Egyszerűsítsük a következő törtet!

$$\frac{x^3+2x^2-24x}{2x^3+28x^2+96x}.$$

Emeljünk ki a számlálóból x-et, a nevezőből $2x$-et!

$$\frac{x^3+2x^2-24x}{2x^3+28x^2+96x}=\frac{x(x^2+2x-24)}{2x(x^2+14x+48)}=\frac{x(x+6)(x-4)}{2x(x+6)(x+8)}=\frac{x-4}{2(x+8)}$$

$(x\neq 0,\ x\neq -6,\ x\neq -8)$.

10. Másodfokú egyenletrendszerek

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a) $x-y=3$ és $xy=10$;

b) $x^2+y^2=5$ és $y-x=1$;

c) $x+y=9$ és $xy=20$;

d) $x-y=7$ és $x^2-y^2=19+xy$;

e) $y-2x=3$ és $y^2-x^2=3(xy+1)$.

Először az elsőfokú egyenletből fejezzük ki valamelyik ismeretlent, majd helyettesítsük a kapott kifejezést a másik egyenletbe!

a) Az első egyenletből $x=y+3$. Ezzel a második egyenlet: $y^2+3y-10=0$, ahonnan $y_1=-5$, $y_2=2$. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=-2$, $y_1=-5$; $x_2=5$, $y_2=2$.

b) A második egyenletből $y=x+1$; így az első egyenlet: $x^2+x-2=0$. Ennek gyökei és ezzel az eredeti egyenletrendszer megoldásai: $x_1=1$, $y_1=2$; $x_2=-2$, $y_2=-1$.

c) $y=9-x$; ezzel $x^2-9x+20=0$, ahonnan az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=5$, $y_1=4$; $x_2=4$, $y_2=5$.

d) $y=x-7$; ezzel $x^2-(x-7)^2=19+x(x-7)$, azaz $x^2-21x+68=0$. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=17$, $y_1=10$; $x_2=4$, $y_2=-3$.

e) $y=2x+3$, tehát $(2x+3)^2-x^2=3\cdot[x(2x+3)+1]$, azaz $x^2-x-2=0$. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=-1$, $y_1=1$; $x_2=2$, $y_2=7$.

2. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a) $x^2+xy=35$ és $y^2+xy=14$;

b) $x^2+y^2+x+y=18$ és $x^2-y^2+x-y=6$;

c) $x^2y-xy^2=48$ és $xy+3x-3y=30$.

a) Adjuk össze a két egyenletet: $x^2+y^2+2xy=49$, $(x+y)^2=49$, tehát $x+y=7$ vagy $x+y=-7$.
Első esetben $y=7-x$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve: $x^2+x(7-x)=35$, ahonnan $x=5$ és így $y=2$.
A második esetben $y=-7-x$, így $x^2+x(-7-x)=35$, ahonnan $x=-5$, $y=-2$.
Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=5$, $y_1=2$; $x_2=-5$, $y_2=-2$.

b) A két egyenletet összeadva az $x^2+x-12=0$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei: $x_1=-4$, $x_2=3$. A kapott értékeket rendre valamelyik eredeti egyenletbe (pl. az elsőbe) visszahelyettesítve $y^2+y-6=0$ adódik, ahonnan $y_1=-3$, $y_2=2$. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=-4$, $y_1=-3$; $x_2=-4$, $y_2=2$; $x_3=3$, $y_3=-3$; $x_4=3$, $y_4=2$.

c) Az eredeti egyenletrendszer így írható: $xy(x-y)=48$, $xy+3(x-y)=30$.
Vezessük be az $xy=a$ és $x-y=b$ új ismeretleneket. Ekkor $ab=48$ és $a+3b=30$. Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai: $a_1=24$, $b_1=2$ és $a_2=6$, $b_2=8$.
Az első megoldással $xy=24$ és $x-y=2$; innen $x_1=-4$, $y_1=-6$; $x_2=6$, $y_2=4$.

A második megoldással: $xy = 6$, $x - y = 8$; innen $x_3 = 4 + \sqrt{22}$, $y_3 = -4 + \sqrt{22}$; $x_4 = 4 - \sqrt{22}$, $y_4 = -4 - \sqrt{22}$.

3. E1 Oldjuk meg a következő háromismeretlenes egyenletrendszert!
$a^2 + b^2 + c^2 = 29$, $ab + bc + ac = -10$, $a + b = -1$.

A második egyenlet kétszeresét az első egyenlethez hozzáadva azt kapjuk:
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2 = 9$. Tehát
$a + b + c = 3$ vagy $a + b + c = -3$.
Felhasználva a harmadik egyenletet: $c = 4$ vagy $c = -2$.
Ha $c = 4$, akkor (az első egyenletet használva): $a^2 + b^2 = 13$. A harmadik egyenletből $b = -1 - a$, így $a^2 + (a + 1)^2 = 13$, ahonnan
$a_1 = 2$, $b_1 = -3$, $c_1 = 4$; $a_2 = -3$, $b_2 = 2$, $c_2 = 4$.
Ha $c = -2$, akkor $a^2 + (a + 1)^2 = 25$, ahonnan
$a_3 = -4$, $b_3 = 3$, $c_3 = -2$; $a_4 = 3$, $b_4 = -4$, $c_4 = -2$.

4. E2 Oldjuk meg a következő egyenletrendszert (*a* egy valós paraméter), tudva azt, hogy annak csak egyetlen valós (számpár) megoldása van!
$\sqrt{y^2 - 4x + 2} = y^2 - 4x - 4$ és $x + y = 2a$.

Alakítsuk át az első egyenletet úgy, hogy a jobb oldalon megjelenjen a bal oldali négyzetgyök alatti kifejezés!
$\sqrt{y^2 - 4x + 2} = y^2 - 4x + 2 - 6$.

Ha most bevezetjük az $\sqrt{y^2 - 4x + 2} = b \geq 0$ új ismeretlent, akkor $b = b^2 - 6$, azaz $b^2 - b - 6 = 0$, ahonnan $b = -2$ vagy $b = 3$ adódik. Mivel $b \geq 0$, így azt kapjuk:
$b = \sqrt{y^2 - 4x + 2} = 3$, azaz $y^2 - 4x - 7 = 0$.

A második egyenletből $x = 2a - y$; ezt felhasználva
$y^2 - 4(2a - y) - 7 = 0$, vagyis $y^2 + 4y - 8a - 7 = 0$.

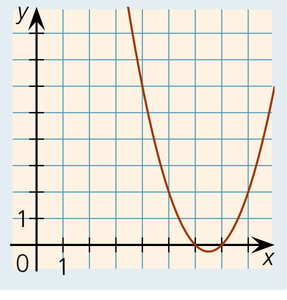
Ha az eredeti egyenletrendszernek csak egy valós számpár megoldása van, akkor ez utóbbi másodfokú egyenletnek csak egy megoldása lehet, vagyis diszkriminánsa 0.
$16 + 4(8a + 7) = 0$, ahonnan $a = -\frac{11}{8}$.

Ekkor $y^2 + 4y + 4 = (y + 2)^2$, azaz $y = -2$, és $x = 2a - y = -\frac{11}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{3}{4}$.

11. Másodfokú egyenlőtlenségek

1. K1 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!
a) $x^2 - 13x + 42 \geq 0$; *b)* $x^2 + 6x - 16 < 0$; *c)* $2x^2 + 5x - 3 > 0$.

Vázoljuk fel az egyenlőtlenségekben szereplő másodfokú kifejezésekhez tartozó függvények grafikonját (elsősorban arra figyeljünk, hogy hol vannak a zérushelyek, illetve hogy a parabola felfelé vagy lefelé nyitott). Ezt követően olvassuk ki a grafikonból az egyenlőtlenség megoldását!



a) A zérushelyek: $x_1 = 6$, $x_2 = 7$. Az $f(x) = x^2 - 13x + 42$ függvény grafikonja egy felfelé nyíló parabola.
Az egyenlőtlenséget kielégítő valós számok: $x \leq 6$ vagy $7 \leq x$.

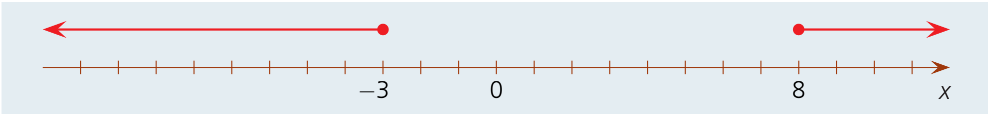
b) Az $f(x) = x^2 + 6x - 16$ függvény grafikus képe egy felfelé nyíló parabola; zérushelyei: $x_1 = -8$, $x_2 = 2$. Az egyenlőtlenség megoldása: $-8 < x < 2$.

c) Az $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ függvény grafikus képe egy felfelé nyíló parabola; zérushelyei: $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Az egyenlőtlenség megoldása: $x < -3$ vagy $\frac{1}{2} < x$.

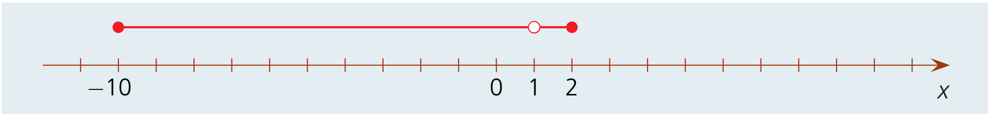
2. K2 Ábrázoljuk számegyenesen az alábbi kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{x^2-5x-24}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{-x^2-8x+20}}{x-1}$; *c)* $\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2-6x}}$.

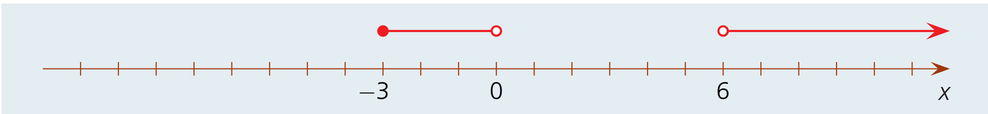
a) A kifejezés akkor értelmezhető, ha $x^2-5x-24\geq 0$. A másodfokú kifejezés zérushelyei: $x_1=-3$, $x_2=8$. Az egyenlőtlenség megoldása (vagyis a kifejezés értelmezési tartománya): $x\leq -3$ vagy $8\leq x$.



b) $-x^2-8x+20\geq 0$ és $x-1\neq 0$. A másodfokú kifejezés zérushelyei: $x_1=-10$, $x_2=2$. A feltételeknek eleget tevő valós számok: $-10\leq x\leq 2$ és $x\neq 1$.



c) $x+3\geq 0$, $x^2-6x>0$. Tehát $x\geq -3$ és $x<0$ vagy $6<x$.



3. K2 Melyek azok a konvex sokszögek, amelyek átlóinak a száma 100-nál nagyobb, de 200-nál kisebb?

Az n oldalú konvex sokszög átlóinak a száma: $\dfrac{n(n-3)}{2}$. A következő egyenlőtlenségláncolat megoldásait keressük:

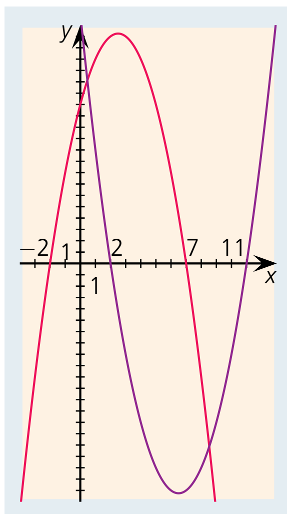
$100<\dfrac{n(n-3)}{2}<200$, ahonnan

$0<n^2-3n-200$ és $n^2-3n-400<0$.

A mindkét egyenlőtlenséget kielégítő pozitív egész számok: 16, 17, 18, 19, 20 és 21.

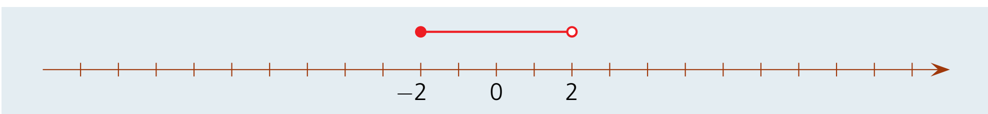
4. E1 Határozzuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\dfrac{\sqrt{-x^2+5x+14}}{\sqrt{x^2-13x+22}}$; *b)* $\sqrt{\dfrac{-x^2+5x+14}{x^2-13x+22}}$.

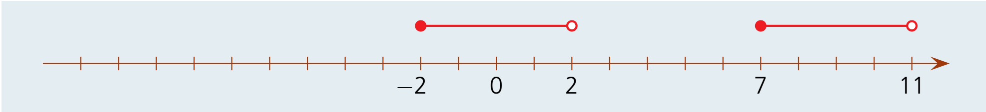


Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a számlálóban, illetve a nevezőben szereplő másodfokú kifejezéseknek megfelelő grafikonokat! A számláló és a nevező zérushelyei az *a)* és *b)* esetben: számláló: $x_1=-2$, $x_2=7$; nevező: $x_1=2$, $x_2=11$.

a) A $-x^2+5x+14\geq 0$ és $x^2-13x+22>0$ egyenlőtlenségeknek kell teljesülniük. A kifejezés értelmezési tartománya: $-2\leq x<2$.



b) Most a $\dfrac{-x^2+5x+14}{x^2-13x+22}$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Egy tört akkor és csak akkor pozitív, ha a számláló és a nevező előjele megegyezik. Az egyenlőtlenség megoldása (vagyis a kifejezés értelmezési tartománya): $-2 \le x < 2$ vagy $7 \le x < 11$.



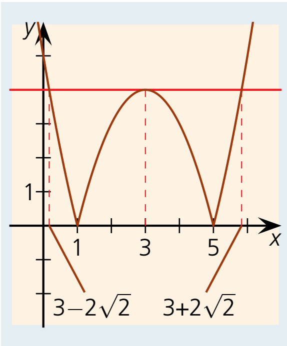
5. E1 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2+|x-1|>5$; *b)* $|x^2-6x+5| \ge 4$.

a) Ha $x \ge 1$, akkor $x^2+x-6>0$. A másodfokú kifejezés zérushelyei: $x_1=-3$, $x_2=2$. De $x \ge 1$, így ez esetben a megoldás: $x>2$.

Ha $x<1$, akkor $x^2-x-4>0$. Ez esetben a zérushelyek: $x_{1,2}=\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Mivel most $x<1$, ezért $x<\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $x<\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$ vagy $2<x$.



b) Oldjuk meg grafikusan az egyenlőtlenséget!

Az $x^2-6x+5=4$ egyenlet megoldásai: $3 \pm 2\sqrt{2}$, így az egyenlőtlenség megoldása:

$x \le 3-2\sqrt{2}$ vagy $x=3$ vagy $3+2\sqrt{2} \le x$.

6. E1 Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségekben szereplő paraméterek értékét úgy, hogy az egyenlőtlenség minden valós x-re teljesüljön!

a) $x^2+6x+2m-1>0$;

b) $mx^2-2(m+1)x+m-3<0$;

c) $(k+1)x^2-2kx+k+6 \ge 0$.

a) Az egyenlőtlenségben szereplő másodfokú kifejezés grafikus képe egy felfelé nyíló parabola. Ha a kifejezés minden x-re pozitív, akkor e parabolának nincs közös pontja az x tengellyel, azaz nincs zérushelye, tehát a kifejezés diszkriminánsa negatív.

$36-4(2m-1)<0$, ahonnan $m>5$.

b) Ha az egyenlőtlenség minden x-re teljesül, akkor a másodfokú kifejezés grafikus képe olyan parabola kell, hogy legyen, mely lefelé nyílik és nincs zérushelye. Ez azt jelenti, hogy $m<0$ és a diszkriminánsnak is negatívnak kell lennie.

$4(m+1)^2-4m(m-3)<0$, azaz $m^2+2m+1-m^2+3m<0$.

Tehát $m<0$ és $m<-\dfrac{1}{5}$. Az egyenlőtlenség akkor teljesül minden x-re, ha $m<-\dfrac{1}{5}$.

c) Az egyenlőtlenségben szereplő másodfokú kifejezés grafikus képének olyan parabolának kell lennie, mely felfelé nyitott és legfeljebb egy közös pontja lehet az x tengellyel. Tehát

$k+1>0$ és $4k^2-4(k+1)(k+6) \le 0$.

Innen $k>-1$ és $k>-\dfrac{6}{7}$.

Az egyenlőtlenség akkor teljesül minden x-re, ha $k>-\dfrac{6}{7}$.

7. E2 Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenlőtlenség minden x-re teljesüljön!

$$\frac{px^2-(p+1)x+2p-1}{x^2-2px+p^2-1} \ge 1.$$

Nincs olyan p, melyre a megadott egyenlőtlenség minden valós x-re teljesül. Tegyük fel ugyanis – indirekt –, hogy valamely p_1 valós szám esetében az egyenlőtlenség minden x-re teljesül, és vizsgáljuk meg a tört nevezőjét!

$x^2 - 2px + p^2 - 1 = (x-p)^2 - p^2 + p^2 - 1 = (x-p)^2 - 1.$

Legyen $x = p_1 + 1$. Ezzel a nevező

$(p_1 + 1 - p_1)^2 - 1 = 0,$

vagyis a tört nem értelmezhető. Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges p_1-hez található olyan x valós szám, melyre az egyenlőtlenség nem teljesül. Ellentmondásra jutottunk, így valóban nincs olyan p, melyre az egyenlőtlenség minden x valós számra teljesülne.

12. A szöveges másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek

1. K1 Három egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege 75-tel nagyobb, mint a legkisebb és legnagyobb szám szorzata. Melyek ezek a számok?

Legyen a három szám $x-1$, x, $x+1$. Ekkor a feltételek szerint

$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 - 75 = (x-1)(x+1),$

$3x^2 - 73 = x^2 - 1, \qquad \text{ahonnan} \qquad x = 6.$

Tehát a keresett számok: 5, 6, 7.

2. K2 Egy derékszögű háromszög területe 120 cm². A háromszög köré írható körének a sugara 13 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

Legyenek a derékszögű háromszög befogói a és b. A derékszögű háromszög köré írható körének a sugara – Thalesz tétele miatt – az átfogó felével egyenlő. Így a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$\frac{ab}{2} = 120 \qquad \text{és} \qquad \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = 13, \quad \text{azaz}$

$ab = 240 \qquad \text{és} \qquad a^2 + b^2 = 676.$

Adjuk hozzá az első egyenlet kétszeresét a második egyenlethez!

$a^2 + b^2 + 2ab = 1156, \qquad \text{vagyis} \qquad (a+b)^2 = 1156.$

Mivel a és b pozitív valós számok, ezért

$a + b = 34.$

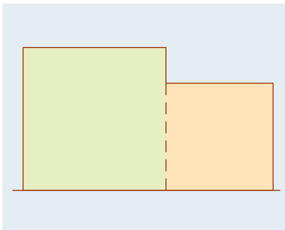
Innen $b = 34 - a$, tehát $a^2 + (34-a)^2 = 676$, $a^2 - 34a + 240 = 0$.

$a_{1,2} = \frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 960}}{2} = \frac{34 \pm 14}{2}; \qquad a_1 = 24, \; a_2 = 10.$

A háromszög oldalai: $a_1 = 24$, $b_1 = 10$, $c_1 = 26$; $\quad a_2 = 10$, $b_2 = 24$, $c_2 = 26$.

Természetesen a két megoldás egybevágó háromszögeket jelent.

3. K2 Az ábrán egy olyan kertet látunk, melynek alakja: két négyzet egymás mellé helyezve az ábrán látható módon. A kert területe 2500 m². A bekerítéséhez összesen 220 m kerítésre volt szükség. Mekkorák az egyes négyzetek oldalai?



Legyen a nagyobbik négyzet oldala b, a kisebbik négyzet oldala a. Ekkor a terület:

$a^2 + b^2 = 2500.$

A kert kerülete:

$3b + 3a + b - a = 4b + 2a = 220, \qquad \text{ahonnan} \qquad a = 110 - 2b.$

Ezt az első egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$(110 - 2b)^2 + b^2 = 2500.$

A műveletek elvégzése után a

$b^2 - 88b + 1920 = 0$

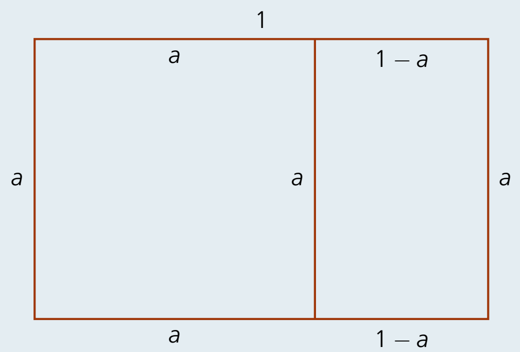
másodfokú egyenlethez jutunk.

$$b_{1,2} = \frac{88 \pm \sqrt{88^2 - 4 \cdot 1920}}{2} = \frac{88 \pm 8}{2}, \qquad b_1 = 40, \ b_2 = 48.$$

Ha $b = 40$, akkor $a^2 = 2500 - 1600 = 900$, tehát $a = 30$.
Ha $b = 48$, akkor $a^2 = 2500 - 48^2 = 196$, tehát $a = 14$.
A kertet alkotó négyzetek oldalai: 40 m és 30 m, vagy 48 m és 14 m.

4. K2 Egy téglalapot egy, a rövidebb oldalával párhuzamos szakasszal két részre bontottunk: az egyik rész egy négyzet, a másik pedig egy olyan téglalap, melynek oldalainak aránya egyenlő az eredeti téglalap oldalainak arányával. Számítsuk ki az eredeti téglalap oldalainak az arányát!

Legyen a téglalap hosszabbik oldala 1, a rövidebb oldala *a*.



A feltételek szerint $\frac{1-a}{a} = a$, ahonnan $a^2 + a - 1 = 0$. Innen $a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. A negatív gyök nyilván érdektelen, így a téglalap oldalainak aránya $\frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$.

5. K2 Egy alkalommal elutaztunk Budapestről a 720 km távolságra levő Münchenbe. Visszafelé az utat 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val nagyobb sebességgel tettük meg, és így 1 órával rövidebb idő alatt, mint odafelé. Mekkora volt az odafelé úton a sebességünk?

Legyen az odafelé vezető úton a sebesség *v*. Ekkor

$$t_o = \frac{720}{v}, \quad t_v = \frac{720}{v+15} \qquad \text{és} \qquad t_o - 1 = t_v.$$

$$\frac{720}{v} - 1 = \frac{720}{v+15},$$

$$720(v+15) - v(v+15) = 720v, \qquad \text{ahonnan} \qquad v^2 + 15v - 10\,800 = 0,$$

$$v_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 43\,200}}{2}.$$

A negatív gyök érdektelen számunkra, így az odafelé úton az átlagsebességünk:

$$v \approx \frac{-15 + 208{,}4}{2} = 96{,}7\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

6. E1 András kerékpárral ugyanazon az úton mindig ugyanakkora sebességgel szokott elmenni a távoli iskolába. Egy alkalommal a távolság p%-át szokásos sebességénél p%-kal kisebb sebességgel tette meg. Ekkor úgy érezte, hogy késésben van, ezért a hátra levő utat szokásos sebességénél $2p$%-kal nagyobb sebességgel tette meg. Így szokásos menetideje $\frac{5}{6}$ részére csökkent. Határozzuk meg p értékét!

Legyen S a szokásos út, v a szokásos sebesség. Ha az út p%-át szokásos sebességénél p%-kal kisebb sebességgel tette meg, akkor az erre az útszakaszra eső t_1 menetideje:

$$t_1 = \frac{\frac{Sp}{100}}{v\left(1 - \frac{p}{100}\right)}.$$

A második útszakaszra eső t_2 menetideje:

$$t_2 = \frac{S - \frac{Sp}{100}}{v\left(1 + \frac{2p}{100}\right)}.$$

A feltételek szerint

$$\frac{\frac{Sp}{100}}{v\left(1 - \frac{p}{100}\right)} + \frac{S - \frac{Sp}{100}}{v\left(1 + \frac{2p}{100}\right)} = \frac{5}{6} \cdot \frac{S}{v}.$$

A megfelelő átalakítások után azt kapjuk:

$$\frac{p}{100 - p} + \frac{100 - p}{100 + 2p} = \frac{5}{6}, \qquad \text{ahonnan} \qquad 7p^2 - 275p + 2500 = 0.$$

$$p_{1,2} = \frac{275 \pm \sqrt{75\,625 - 70\,000}}{14} = \frac{275 \pm 75}{14}.$$

Innen p keresett értéke: $p_1 = 25\%$, $p_2 = \frac{100}{7} \approx 14{,}29\%$.

7. E2 Egy vázában minden szál virágon annyi bimbó volt, ahány szál virág volt a vázában. Egy napon kinyílt az összes bimbó ötödrésze. Másnap kinyílt a még meglevő bimbók negyede, majd a következő napon kinyílt a még ki nem nyílt bimbók harmada. Így összesen 5-tel több ki nem nyílt bimbó maradt, mint ahány szál virág volt a vázában. Hány szál virág volt a vázában?

Legyen n a virágok száma; ekkor a bimbók száma n^2. Az első napon megmaradt a bimbók $\frac{4}{5}$-e, azaz $\frac{4}{5} \cdot n^2$ bimbó. A második napon megmaradt a bimbók $\frac{3}{4}$-e, azaz $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot n^2$. A harmadik napon megmaradt a bimbók $\frac{2}{3}$-a, azaz $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot n^2 = \frac{2}{5} \cdot n^2$. A feltételek szerint ez az összes virágok számánál 5-tel több, vagyis $\frac{2}{5}n^2 = n + 5$, azaz

$$2n^2 - 5n - 25 = 0,$$

$$n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 200}}{4} = \frac{5 \pm 15}{4}, \qquad n_1 = -\frac{5}{2}, \quad n_2 = 5.$$

Mivel n pozitív egész szám, így azt kaptuk, hogy a vázában 5 szál virág volt.

13. Másodfokú egyenletre vezető gyökös egyenletek

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x + 7} = x - 5$;

b) $\sqrt{2x - 3} = 11$;

c) $\sqrt{2x^2 - 9} = x - 3$.

a) $x \geq -7$ és $x \geq 5$, tehát $x \geq 5$. Mindkét oldalt négyzetre emelve azt kapjuk:

$$x + 7 = x^2 - 10x + 25, \qquad \text{azaz} \qquad x^2 - 11x + 18 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{2} = \frac{11 \pm 7}{2}, \qquad x_1 = 2, \quad x_2 = 9.$$

De $x \geq 5$ miatt $x = 2$ nem megoldás; az $x = 9$ kielégíti az eredeti egyenletet.

b) $x \geq \frac{3}{2}$. $2x - 3 = 121$, ahonnan $x = 62$.

c) $x \geq 3$. $2x^2 - 9 = x^2 - 6x + 9$, azaz $x^2 + 6x - 18 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+72}}{2} = \frac{-6 \pm 6\sqrt{3}}{2}$; $x_1 = -3 - 3\sqrt{3}$, $x_2 = -3 + 3\sqrt{3}$.

Az egyenletnek nincs valós megoldása.

2. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{2x+8} - \sqrt{x+5} = 7$;

b) $\sqrt{x+13} - \frac{10}{\sqrt{x+13}} = \sqrt{5x-51}$;

c) $2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{1-x} = 5$.

a) $x \geq -4$. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve

$2x+8+x+5-2\sqrt{(2x+8)(x+5)} = 49$,

$3x-36 = 2\sqrt{2x^2+18x+40}$.

Most ismét négyzetre emeljük mindkét oldalt, így a bal oldal nem lehet negatív: $3x-36 \geq 0$, azaz $x \geq 12$ kell, hogy legyen.

$9x^2+1296-216x = 8x^2+72x+160$,

$x^2-288x+1136 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{288 \pm \sqrt{82\,944 - 4544}}{2} = \frac{288 \pm 280}{2}$; $x_1 = 4$, $x_2 = 284$.

Az $x = 4$ nem megoldás, az $x = 284$ kielégíti az eredeti egyenletet.

b) $x \geq \frac{51}{5} = 10{,}2$. Szorozzuk meg mindkét oldalt $\sqrt{x+13}$-mal.

$x+13-10 = \sqrt{(5x-51)(x+13)}$,

$x+3 = \sqrt{5x^2+14x-663}$,

$x^2+2x-168 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+672}}{2} = \frac{-2 \pm 26}{2}$; $x_1 = -14$, $x_2 = 12$.

Az $x = -14$ hamis gyök, az $x = 12$ kielégíti az eredeti egyenletet.

c) $-1 \leq x \leq 1$.

$4(x+1)+9(1-x)+12\sqrt{1-x^2} = 25$,

$12\sqrt{1-x^2} = 5x+12$,

$144-144x^2 = 25x^2+144+120x$,

$169x^2+120x = x(169x+120) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{120}{169}$.

Mindkét érték kielégíti az eredeti egyenletet.

3. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x^2-2x+1} = 4$;

b) $\sqrt{4x^2+4x+1} = \frac{1}{2}$;

c) $\sqrt{x^2-6x+9} = 3-x$.

a) $\sqrt{(x-1)^2} = 4$, azaz $|x-1| = 4$. Tehát $x-1 = 4$ vagy $x-1 = -4$, ahonnan $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.

b) $\sqrt{(2x+1)^2} = \frac{1}{2}$, azaz $|2x+1| = \frac{1}{2}$. Tehát $2x+1 = \frac{1}{2}$ vagy $2x+1 = -\frac{1}{2}$. Innen $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = -\frac{3}{4}$.

c) $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$, azaz $|x-3| = 3-x$. Ha egy valós szám abszolút értéke egyenlő a szám -1-szeresével, akkor a kérdéses valós szám nem pozitív tehát $x-3 \leq 0$, azaz $x \leq 3$.

4. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x^2+x+2} = x^2+x$;

b) $\sqrt{ax+b} = ax+b \quad (a \neq 0)$.

a) Vezessük be az $x^2+x=y$ új ismeretlent. Ezzel a következő egyenletet kapjuk:

$\sqrt{y+2} = y$, azaz $y^2-y-2=0$.

A kapott másodfokú egyenlet gyökei: $y_1=-1$, $y_2=2$.

Első esetben $x^2+x+1=0$. Mivel ennek az egyenletnek a diszkriminánsa negatív, ezért ez esetben nem kapunk valós megoldást.

Ha $x^2+x-2=0$, akkor $x_1=1$, $x_2=-2$. Ezek az értékek kielégítik az eredeti egyenletet.

b) $ax+b \geq 0$, azaz $x \geq -\frac{b}{a}$. Legyen $ax+b=y$. Ekkor $\sqrt{y}=y$, ahonnan $y_1=0$, $y_2=1$. Első esetben $ax+b=0$, azaz $x_1=-\frac{b}{a}$; második esetben $ax+b=1$, ahonnan $x_2=\frac{1-b}{a}$.

5. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

Vezessük be a $\sqrt{x-1}=a$ új ismeretlent. Ekkor $x-1=a^2$, azaz $x=a^2+1$. Ezzel a következő egyenlethez jutunk:

$\sqrt{a^2+1+3-4a} + \sqrt{a^2+1+8-6a} = 1$, azaz $\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2} = 1$,

$|a-2|+|a-3|=1$.

Most három esetet kell vizsgálnunk.

1. Ha $a \geq 3$, akkor $a-2+a-3=1$, azaz $a=3$.
2. Ha $2 \leq a < 3$, akkor $a-2-a+3=1$; azonossághoz jutottunk.
3. Ha $a < 2$, akkor $-a+2-a+3=1$, azaz $a=2$, tehát ekkor nincs megoldás.

Arra jutottunk, hogy $2 \leq a \leq 3$, vagyis $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$. Innen $4 \leq x-1 \leq 9$, tehát az eredeti egyenletet kielégítő valós számok: $5 \leq x \leq 10$.

6. E2 Mely x, y valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőséget?

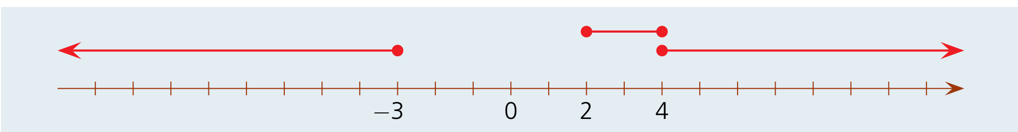
$\sqrt{x^2-x-12} + \sqrt{-x^2+6x-8} + y^2 - xy = 2x+y-2$.

Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x^2-x-12 \geq 0$ és $-x^2+6x-8 \geq 0$.

Ábrázoljuk mindkét egyenlőtlenség megoldását egy számegyenesen.

Az $x^2-x-12=0$ egyenlet gyökei: $x_1=-3$, $x_2=4$, tehát az első egyenlőtlenség megoldása: $x \leq -3$ vagy $x \geq 4$.

A $-x^2+6x-8=0$ egyenlet gyökei: $x_1=2$, $x_2=4$, tehát a második egyenlőtlenség megoldása: $2 \leq x \leq 4$.



Az eredeti egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x=4$. Helyettesítsük ezt vissza az eredeti egyenletbe:

$y^2-4y=8+y-2$, azaz $y^2-5y-6=0$,

$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$; $y_1=6$, $y_2=-1$.

Tehát az eredeti egyenletet kielégítő valós számpárok: $x_1=4$, $y_1=-1$, $x_2=4$, $y_2=6$.

14. Másodfokú egyenletre vezető magasabb fokú egyenletek

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$;

b) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;

c) $(x-2)^4 - 25(x-2)^2 + 144 = 0$.

a) Legyen $x^2 = y$. Ekkor $y^2 - 20y + 64 = 0$, ahonnan

$$y_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-256}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2}; \qquad y_1 = 16,\ y_2 = 4.$$

Tehát $|x| = 4$, illetve $|x| = 2$. Az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = -4$, $x_2 = 4$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.

b) Legyen $x^3 = y$. Ekkor $y^2 - 9y + 8 = 0$. Ez utóbbi másodfokú egyenlet megoldásai: $y_1 = 8$, $y_2 = 1$, tehát az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

c) Legyen $(x-2)^2 = a$. Ekkor $a^2 - 25a + 144 = 0$, ahonnan $a_1 = 16$, $a_2 = 9$. Tehát $|x-2| = 4$ vagy $|x-2| = 3$. Az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = 6$, $x_2 = -2$, $x_3 = 5$, $x_4 = -1$.

2. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^3 - 7x + 6 = 0$;

b) $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$;

c) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

a) Az egyenletet szemlélve azonnal feltűnik, hogy az $x = 1$ megoldása az egyenletnek. Ezek szerint az egyenlet bal oldalán szereplő harmadfokú kifejezés így írható:

$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + ax + b) = 0$.

Végezzük el a szorzást és hasonítsuk össze a megfelelő együtthatókat!

$x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b = x^3 + (a-1)x^2 + (b-a)x - b = 0$.

Tehát $a - 1 = 0$, $b - a = -7$, $-b = 6$, vagyis $a = 1$, $b = -6$. Ezek szerint

$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6) = 0$.

A másodfokú tényezőre $x^2 + x - 6 = 0$, ennek gyökei 2 és –3. Ahonnan az eredeti egyenlet gyökei: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

b) Az $x = 1$ megoldása az egyenletnek, tehát

$x^3 + x^2 - 17x + 15 = (x-1)(x^2 + bx + c) = x^3 + (b-1)x^2 + (c-b)x - c = 0$.

A megfelelő együtthatók összehasonlításából: $b = 2$, $c = -15$, vagyis

$x^3 + x^2 - 17x + 15 = (x-1)(x^2 + 2x - 15) = 0$.

Az $x^2 + 2x - 15 = 0$ egyenlet gyökei: 3 és –5, így az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -5$.

c) Észrevehetjük, hogy az $x = -1$ megoldása az egyenletnek. Ezzel

$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c = 0$.

Az együtthatók összehasonlításából: $a = 2$, $b = 5$, $c = 2$. Ezek szerint

$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = (x+1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$.

A $2x^2 + 5x + 2 = 0$ egyenlet gyökei: –2 és $-\frac{1}{2}$, így az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$.

3. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$;

b) $8x^4 - 14x^3 - 69x^2 - 14x + 8 = 0$.

a) $x \neq 0$. Osszuk el mindkét oldalt x^2-tel:

$$2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0,$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

Ha $x + \frac{1}{x} = a$, akkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$, tehát azt kapjuk, hogy

$2(a^2 - 2) - 9a + 14 = 0$, azaz $2a^2 - 9a + 10 = 0$.

$a_1 = 2$, $a_2 = \frac{5}{2}$, vagyis az alábbi egyenleteket kell megoldanunk:

$x + \frac{1}{x} = 2$ és $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$.

Első esetben $x^2 - 2x + 1 = 0$, ahonnan $x = 1$, második esetben pedig $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Ez utóbbi másodfokú egyenlet gyökei: 2 és $\frac{1}{2}$. Tehát az eredeti egyenlet gyökei: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

b) Ugyanúgy járunk el, mint az *a)* esetben.

$$8x^2 - 14x - 69 - \frac{14}{x} + \frac{8}{x^2} = 0,$$

$$8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 14\left(x + \frac{1}{x}\right) - 69 = 0.$$

Ha $x + \frac{1}{x} = a$, akkor $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$, tehát

$8(a^2 - 2) - 14a - 69 = 0$, azaz $8a^2 - 14a - 85 = 0$.

$a_1 = \frac{17}{4}$, $a_2 = -\frac{5}{2}$. A megoldandó egyenletek:

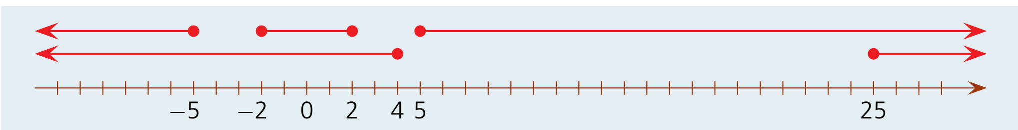
$x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4}$, azaz $4x^2 - 17x + 4 = 0$ és $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$, azaz $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

Az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$.

4. E2 Ábrázoljuk a számegyenesen az alábbi kifejezés értelmezési tartományát!

$\sqrt{x^4 - 29x^2 + 100} + \sqrt{x^2 - 29x + 100}$.

Az $x^4 - 29x^2 + 100 \geq 0$ és $x^2 - 29x + 100 \geq 0$ egyenlőtlenségeknek kell teljesülniük.
Az $x^2 - 29x + 100 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = 25$, $x_2 = 4$. Tehát $x \leq 4$ vagy $25 \leq x$.
Az $x^4 - 29x^2 + 100 \geq 0$-ból következik: $x^2 \leq 4$ vagy $25 \leq x^2$, ahonnan
$x \leq 4$ vagy $25 \leq x$ és $|x| \leq 2$ vagy $5 \leq |x|$.
Ábrázoljuk mindkét számhalmazt egy számegyenesen!

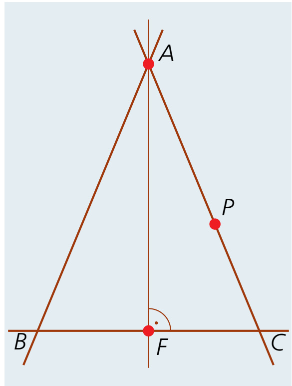


Az eredeti kifejezés értelmezési tartománya e két számhalmaz metszete:
$x \leq -5 \;\cup\; -2 \leq x \leq 2 \;\cup\; 25 \leq x$

IV Geometria

1. Távolságtartó transzformációk

1. K1 Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szárak *A* metszéspontja, az alap *F* felezőpontja, valamint az egyik szár egyenesének egy *P* pontja, amely nem azonos az *A*-val!



Készítsünk vázlatrajzot!

Az *F* pontból merőlegest állítunk az *AF* egyenesre. Az így kapott egyenesre illeszkedik a *B* és a *C* csúcs.

Az *A* és a *P* pontok összeköthetők, az így kapott egyenes az egyenlő szárú háromszög egyik szára lesz. Erre az egyenesre illeszkedik a háromszög *C* csúcsa.

Az *AF*-re *F*-ben merőleges egyenesnek és az *AP* egyenesnek a metszéspontja lesz a háromszög *C* csúcsa.

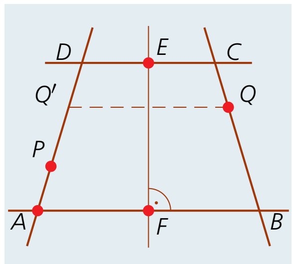
A *C* tükörképe *AF*-re adja a *B* csúcsot.

Ha *AP* merőleges *AF*-re, akkor nem kapunk *C* pontot, vagyis nincs háromszög.

Ha *P* illeszkedik az *AF* egyenesre, akkor *C*, *F* és *B* pontok egybeesnek, vagyis nincs háromszög.

Egyébként egy megoldást kapunk.

2. K1 Szerkesszünk húrtrapézt, ha adott mindkét alapjának felezőpontja, továbbá a szárakra illeszkedő egy-egy pont!

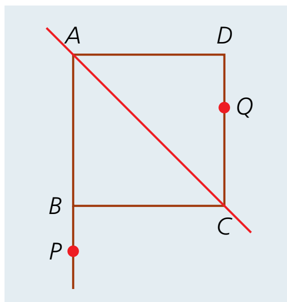


Készítsünk vázlatrajzot!

Az *F* és az *E* pontokban merőlegest állítunk az *EF* egyenesre. Az *EF* egyenes a trapéz szimmetriatengelye lesz. A *Q* pontot tükrözzük erre a tengelyre. Az így kapott *Q′* pont illeszkedik a trapéz másik szárára, ezért *PQ′* egyenes kimetszi az *F* és az *E* pontokban az *EF* egyenesre állított merőlegesekből az *A* és a *D* pontot. Ezeket tükrözve az *EF* tengelyre megkapjuk a *B* és a *C* csúcsokat is.

Általában egy megoldás van. A *P* és a *Q* helyzete alapján, a kivitelezés során láthatóvá válnak azok az esetek, amikor nincs trapéz.

3. K2 Szerkesszünk négyzetet, ha adott az egyik átlójának egyenese, továbbá két szemközti oldal egyeneséről egy-egy pont!



Készítsünk vázlatrajzot!

Az adott *AC* egyenesre a *P* ponton át 45°-os szögben hajló egyenest szerkesztünk, ami kimetszi belőle az *A* pontot. A *Q* ponton át a vele párhuzamos egyenes kimetszi az *AC* egyenesből a *C* pontot. Ekkor ismert lett a keresett négyzet *AC* átlója. Innen a szerkesztés például az *AC* felezőmerőlegesének megszerkesztésével befejezhető. Ez kimetszi a két párhuzamos egyenesből a hiányzó két csúcsot.

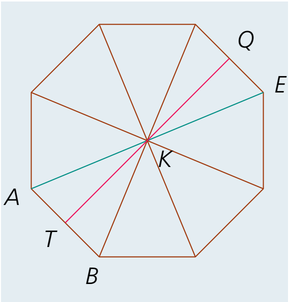
Mivel a *P* ponton át két 45°-os egyenes is szerkeszthető, ezért általában két megoldás van. Az egyedi eseteket nem részletezzük.

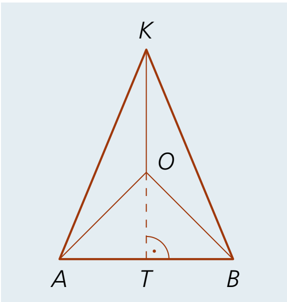
4. K2 Egy szabályos hatszög leghosszabb átlójának hossza *d*. Igazoljuk, hogy a kerülete 3*d*!

Az *ABCDEF* szabályos hatszög két szomszédos csúcsa és a *K* középpontja szabályos háromszöget alkot. Vagyis a *K* pontra illeszkedő átlók hossza kétszerese a hatszög *a* oldalának, azaz $a = \frac{d}{2}$.

A szabályos hatszög kerülete 6*a*, így valóban 3*d*.

5. E1 Az 5 cm oldalú szabályos nyolcszög
a) csúcsokra;
b) oldalfelező pontokra
illeszkedő szimmetriatengelyéből mekkora hosszúságú darab esik a nyolcszög belsejébe?





Használjuk az ábra jelöléseit!

Az *a)* kérdésben az AE szakasz hosszát, a *b)* kérdésben pedig a TQ szakasz hosszát kell meghatároznunk. Az ábra szimmetriáit felhasználva elegendő az AK, illetve a TK szakaszok hosszát kiszámítanunk, ezért nézzük az ABK egyenlő szárú háromszöget. A szabályos nyolcszög miatt a szárak által bezárt szög 45°, az alapon fekvő szögek pedig 67,5°-osak.

Az ABK háromszög köré írt körének középpontja legyen O.

Ekkor $KAO\sphericalangle = AKO\sphericalangle = KBO\sphericalangle = BKO\sphericalangle = 22{,}5°$, valamint $OAB\sphericalangle = OBA\sphericalangle = 45°$. Az OAK és az OBK két egybevágó, egyenlő szárú háromszög. Az ABO pedig egyenlő szárú derékszögű háromszög. Mivel $AB = 5$, ezért $OT = 2{,}5$. Ekkor $AO = BO = 2{,}5 \cdot \sqrt{2}$. De a leírtak alapján ezzel egyenlő a KO is, vagyis $KO = 2{,}5 \cdot \sqrt{2}$.

Azaz: $TK = 2{,}5 + 2{,}5 \cdot \sqrt{2} \approx 6{,}036$.

Pitagorasz-tétellel az AK hossza kiszámolható:

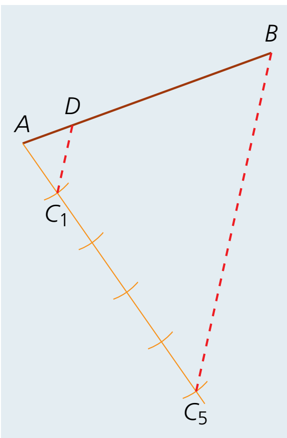
$$AK = \sqrt{2{,}5^2 + (2{,}5 + 2{,}5 \cdot \sqrt{2})^2} = \sqrt{25 + 12{,}5 \cdot \sqrt{2}} \approx 6{,}533.$$

a) $AE = 2 \cdot AK = 2 \cdot \sqrt{25 + 12{,}5 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{100 + 50 \cdot \sqrt{2}} \approx 13{,}066$.
Az 5 cm oldalú szabályos nyolcszög csúcsaira illeszkedő szimmetriatengelyéből kb. 13,066 cm hosszúságú darab esik a nyolcszög belsejébe.

b) $TQ = 2 \cdot TK = 2 \cdot (2{,}5 + 2{,}5 \cdot \sqrt{2}) = 5 + 5 \cdot \sqrt{2} \approx 12{,}071$.
Az 5 cm oldalú szabályos nyolcszög oldalfelező pontjaira illeszkedő szimmetriatengelyéből kb. 12,071 cm hosszúságú darab esik a nyolcszög belsejébe.

2. Párhuzamos szelők tétele

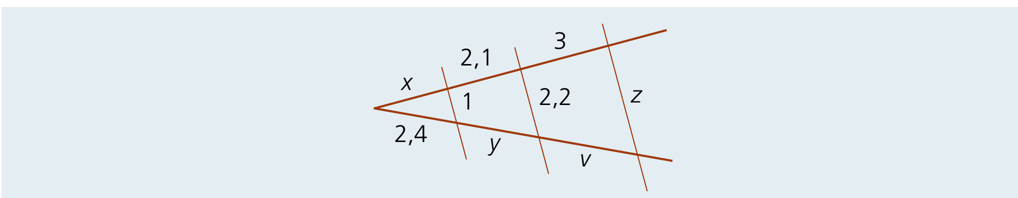
1. K1 Szerkesszük meg az AB szakasznak azt a pontját, amely a szakaszt 1:4 arányban osztja!



Húzzunk az A pontból kiindulva egy tetszőleges félegyenest. Erre a félegyenesre szintén A-ból indulva mérjünk fel ötször egy tetszőleges szakaszt. Az ötödiknek felmért szakasz C_5 végpontját kössük össze B-vel. C_5B-vel húzzunk párhuzamost C_1 ponton át. Ez az egyenes az AB szakaszt a megfelelő D pontban fogja metszeni.

A szerkesztés helyességét a párhuzamos szelők tétele biztosítja.

2. K2 Az ábrán látható szögszárakat három párhuzamos egyenessel metszettük. Az adatok ismeretében számoljuk ki az x, y, z és v szakaszok hosszát!



A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján: $\dfrac{x}{x + 2{,}1} = \dfrac{1}{2{,}2}$, amiből $x = 1{,}75$.

A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján: $\dfrac{1{,}75 + 2{,}1 + 3}{1{,}75} = \dfrac{z}{1}$, vagyis $z = \dfrac{137}{35} \approx 3{,}914$.

A párhuzamos szelők tétele alapján:

$\dfrac{y}{2{,}4} = \dfrac{2{,}1}{1{,}75}$, amiből $y = 2{,}88$.

$\dfrac{v}{2{,}4} = \dfrac{3}{1{,}75}$, amiből $v = \dfrac{144}{35} \approx 4{,}114$.

3. K2 Szerkesszünk a szabályos ötszög oldalával egyenlő hosszú szakaszt, ha adott az ötszög kerülete!

Az adott kerülettel adott lesz a számunkra egy AB szakasz, amelynek a hossza egyenlő az ötszög kerületével. Ezt a szakaszt vágjuk szét 1:4 arányban, ekkor a kisebb szakasz hossza egyenlő lesz az ötszög oldalának hosszával.

A szerkesztést a tanult módon (ahogyan az 1. feladatban láttuk) végezzük el.

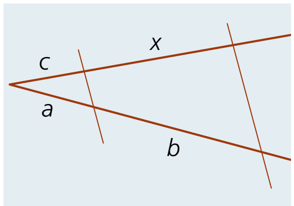
4. K2 Szerkesszük meg *a*, *b* és *c* szakaszok ismeretében a

a) $\frac{bc}{a}$; *b)* $\frac{a^2}{b}$; *c)* $\frac{ac}{b}$; *d)* $\frac{b^2}{c}$.

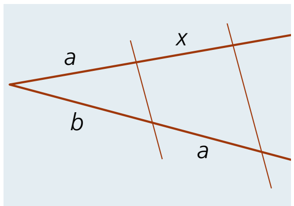
hosszúságú szakaszt!

Egy tetszőleges szög két szárára a megfelelő módon (ahogyan az ábrákon látjuk) felmérjük az adott szakaszokat. A párhuzamos szelők tételét használva az x mindig a keresett szakasz lesz.

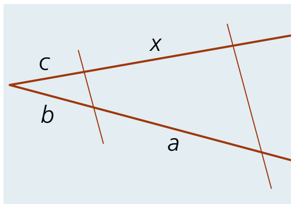
a) Mivel $\frac{x}{c} = \frac{b}{a}$, ezért $x = \frac{bc}{a}$.



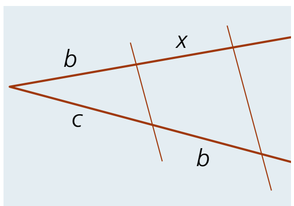
b) Mivel $\frac{x}{a} = \frac{a}{b}$, ezért $x = \frac{a^2}{b}$.



c) Mivel $\frac{x}{c} = \frac{a}{b}$, ezért $x = \frac{ac}{b}$.



d) Mivel $\frac{x}{b} = \frac{b}{c}$, ezért $x = \frac{b^2}{c}$.



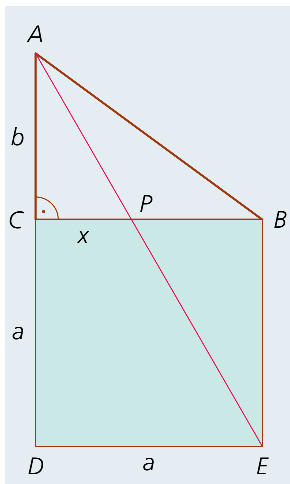
5. K2 Az ABC derékszögű háromszög BC befogójára kifelé megrajzoljuk a $BCDE$ négyzetet. A BC és AE egyenesek metszéspontja legyen P. Adjuk meg a CP szakasz hosszát a derékszögű háromszög befogóinak ismeretében!

Készítsünk ábrát a szöveg alapján!

Legyen $CP = x$, a befogók a szokásos módon $BC = a$, $AC = b$. Ekkor $CD = DE = a$. Használjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a CP és a DE párhuzamos szakaszokra:

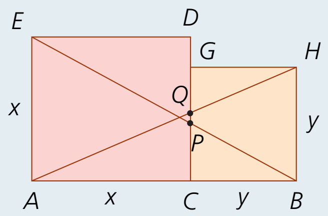
$$\frac{x}{a} = \frac{b}{a+b}.$$

Vagyis a keresett szakasz hossza a derékszögű háromszög befogóinak ismeretében: $x = \frac{ab}{a+b}$.



6. K2 Az AB szakaszon vegyünk fel egy C pontot, amelyre $AC = x$, $BC = y$. Az AB szakasz ugyanazon oldalára megrajzoljuk az $ACDE$ és a $BCGH$ négyzetet. A DC egyenest a BE egyenes a P pontban, az AH egyenes pedig a Q pontban metszi. Adjuk meg x és y ismeretében a CQ és a CP szakasz hosszát!

Készítsünk ábrát a szöveg alapján!



Használjuk kétszer a párhuzamos szelőszakaszok tételét, először a CP és az AE, majd a CQ és a BH párhuzamos szakaszokra:

$\frac{CP}{x} = \frac{y}{x+y}$, amiből $CP = \frac{xy}{x+y}$.

$\frac{CQ}{y} = \frac{x}{x+y}$, amiből $CQ = \frac{xy}{x+y}$.

A kapott eredmény szerint P és Q pontok egybeesnek.

3. Középpontos hasonlóság

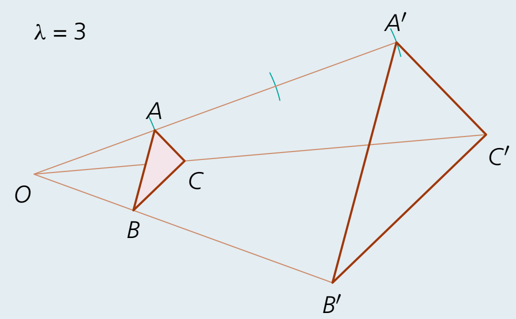
1. K1 Megadtunk egy középpontos hasonlóságot az O középpontjával és a

a) $\lambda = 3$; *b)* $\lambda = -2$; *c)* $\lambda = \frac{2}{3}$;

d) $\lambda = \frac{7}{4}$; *e)* $\lambda = -\frac{5}{2}$; *f)* $\lambda = -\frac{3}{5}$

arányával. Szerkesszük meg egy adott ABC háromszögnek a transzformációval kapott képét!

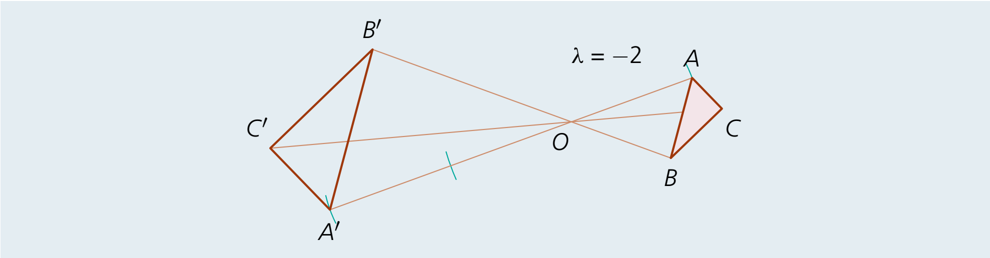
a) Az A pont A' képének megszerkesztéséhez felhasználjuk az O ponttól való távolságokra fennálló $OA' = 3 \cdot OA$ összefüggést.
Az OA szakaszt az OA egyenesre az O középpontból, az A ponttal megegyező irányban háromszor felmérjük. Így kapjuk az A' pontot.
Ugyanígy járunk el a B', C' pontok megszerkesztésénél is.



A középpontos hasonlóság egyenestartó, ezért a három képpontot összekötjük. Ekkor kapjuk az ABC háromszög $A'B'C'$ képét.

b) Az A pont A' képének megszerkesztéséhez felhasználjuk az O ponttól való távolságokra fennálló $OA' = 2 \cdot OA$ összefüggést.
Az OA szakaszt az OA egyenesre az O középpontból, az A ponttal ellenkező irányban kétszer felmérjük. Így kapjuk az A' pontot.

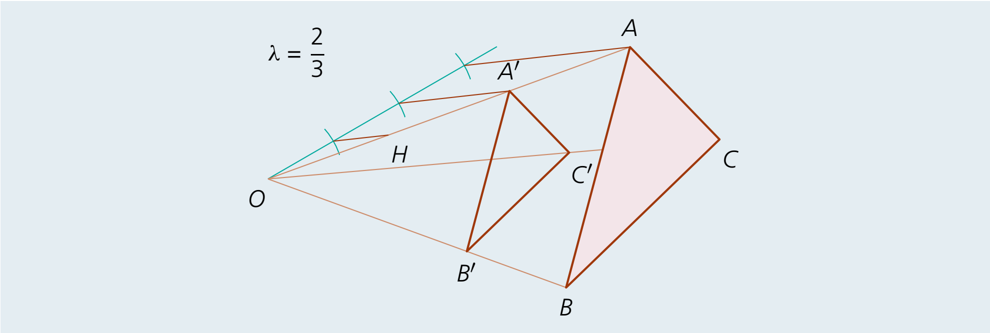
Ugyanígy járunk el a B', C' pontok megszerkesztésénél is.



A középpontos hasonlóság egyenestartó, ezért a három képpontot összekötjük. Ekkor kapjuk az ABC háromszög $A'B'C'$ képét.

c) Az A pont A' képének megszerkesztéséhez felhasználjuk az O ponttól való távolságokra fennálló $OA' = \frac{2}{3}OA$ összefüggést.

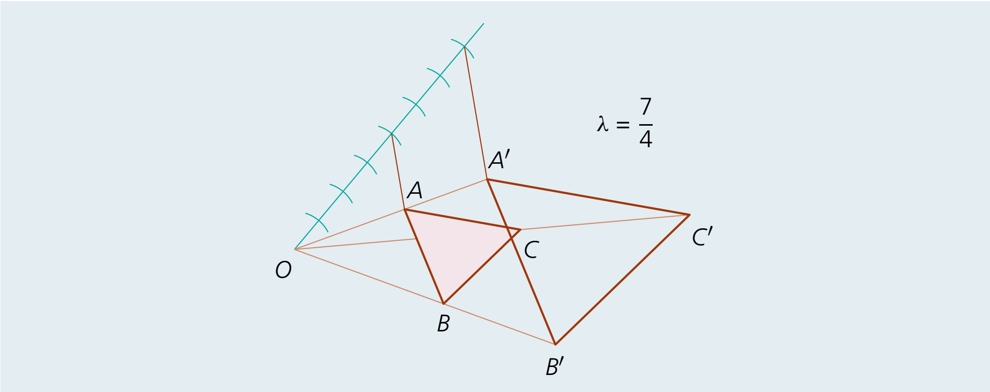
Az OA szakaszt elharmadoljuk a tanult módon, felhasználva a párhuzamos szelők tételét.
A H harmadoló pont megszerkesztése után az OH távolságot az OA egyenesre az O középpontból, az A ponttal megegyező irányban kétszer felmérjük. Így kapjuk az A' pontot.
Ugyanígy járunk el a B', C' pontok megszerkesztésénél is.



A középpontos hasonlóság egyenestartó, ezért a három képpontot összekötjük. Ekkor kapjuk az ABC háromszög $A'B'C'$ képét.

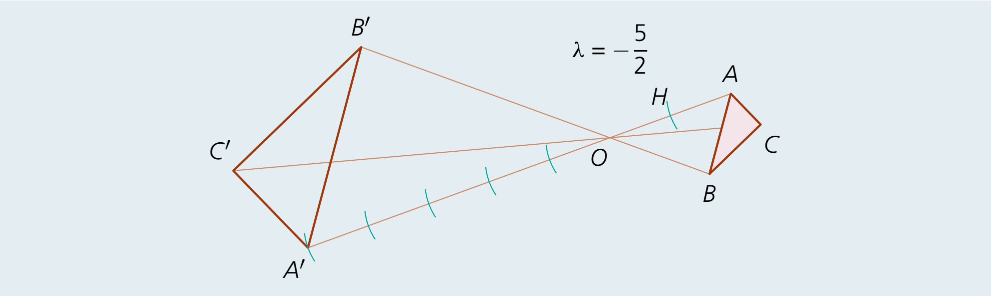
d) Használjuk fel az O ponttól való távolságokra fennálló $OA' = \frac{7}{4}OA$ összefüggést.

A *c)* feladatnál leírtakat alapul véve elkészítjük az ábrát.



e) Az A pont A' képének megszerkesztéséhez felhasználjuk az O ponttól való távolságokra fennálló $OA' = \frac{5}{2}OA$ összefüggést.

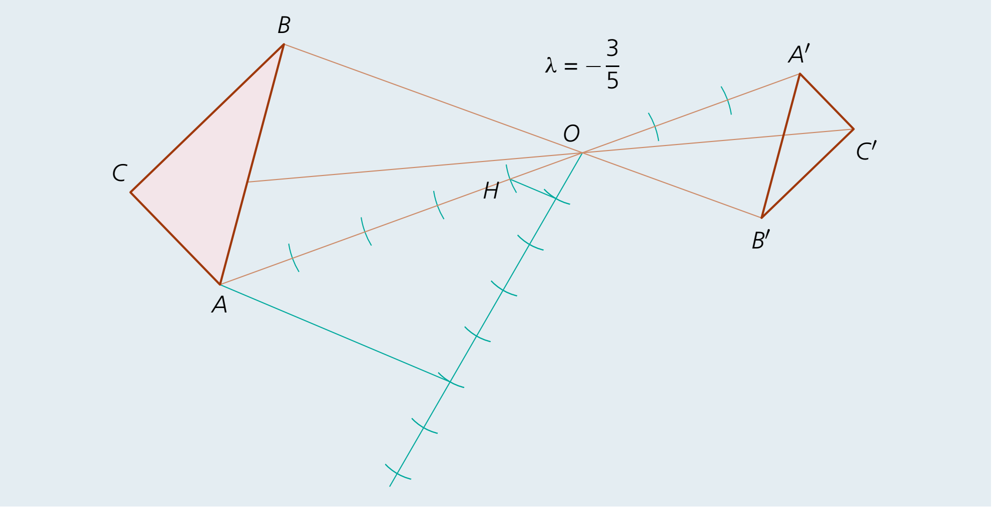
Az OA szakaszt elfelezzük, ekkor kapjuk a H pontot. Az OH távolságot az OA egyenesre az O középpontból, az A ponttal ellenkező irányban ötször felmérjük. Így kapjuk az A' pontot.
Ugyanígy járunk el a B', C' pontok megszerkesztésénél is.



A középpontos hasonlóság egyenestartó, ezért a három képpontot összekötjük. Ekkor kapjuk az ABC háromszög $A'B'C'$ képét.

f) Használjuk fel az O ponttól való távolságokra fennálló $OA' = \frac{3}{5}OA$ összefüggést.

Az *e)* feladatnál leírtakat alapul véve elkészítjük az ábrát.

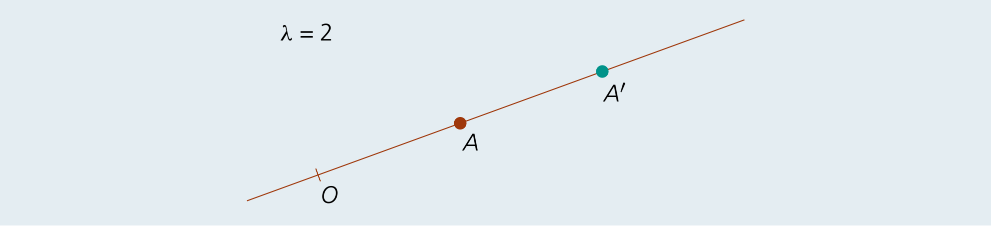


2. K1 Tudjuk, hogy egy középpontos hasonlóság az A pontot az A' pontba transzformálja. Legyen adva az A és az A'. Szerkesszük meg az O pontot, ha

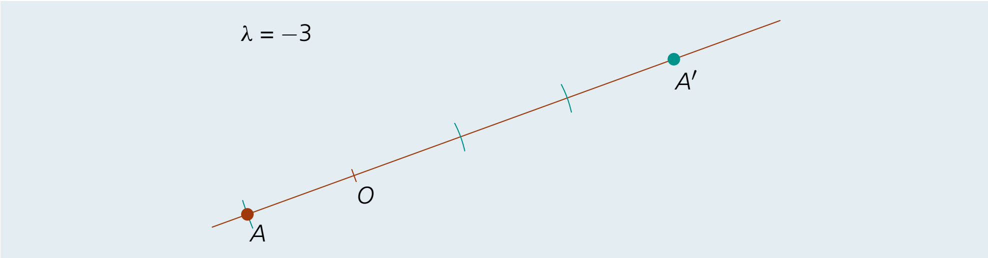
a) $\lambda = 2$; *b)* $\lambda = -3$; *c)* $\lambda = \frac{4}{3}$;

d) $\lambda = \frac{3}{4}$; *e)* $\lambda = -\frac{3}{2}$; *f)* $\lambda = -\frac{2}{5}$.

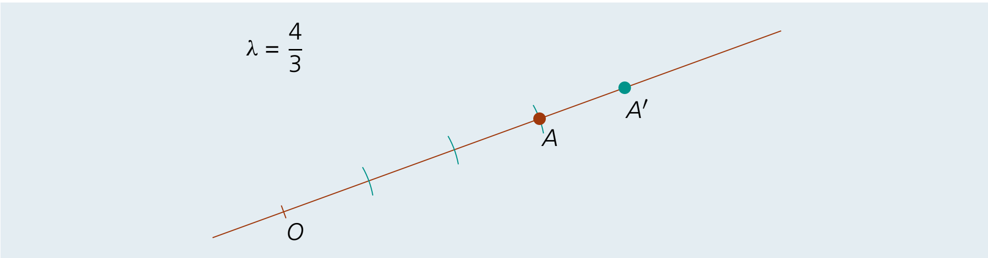
a) Tudjuk az O ponttól való távolságokra fennálló $OA' = 2 \cdot OA$ összefüggést és tudjuk, hogy az O pont nem választja el egymástól az A és az A' pontot. Ezért AA' szakasz hosszát felmérjük az AA' egyenes A-n túli meghosszabbítására, így kapjuk az O pontot.



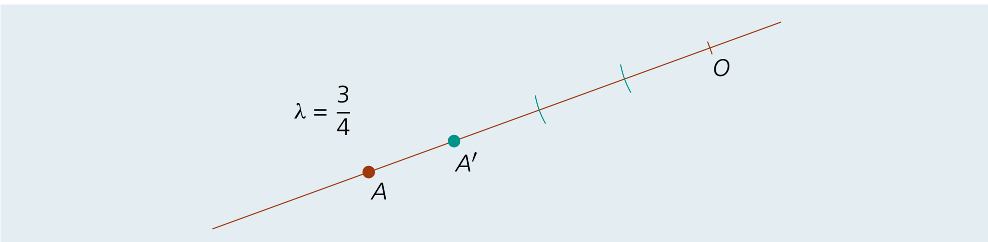
b) Tudjuk az O ponttól való távolságokra fennálló $OA' = 3 \cdot OA$ összefüggést és tudjuk, hogy az O pont elválasztja egymástól az A és az A' pontot. Ezért AA' szakasz hosszát elnegyedeljük. Az A-hoz közelebbi negyedelőpont lesz az O.



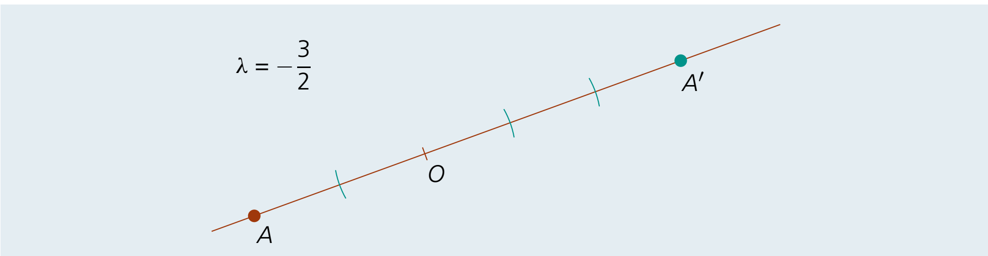
c) Tudjuk az O ponttól való távolságokra fennálló $OA' = \frac{4}{3} \cdot OA$ összefüggést és tudjuk, hogy az O pont nem választja el egymástól az A és az A' pontot. Ezért AA' szakasz hosszát felmérjük az AA' egyenes A-n túli meghosszabbítására háromszor, így kapjuk az O pontot.



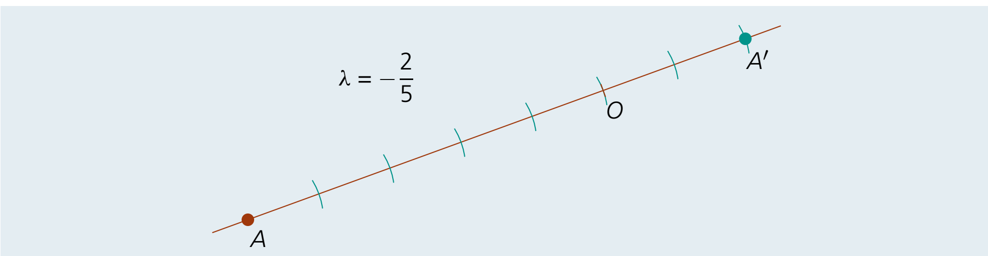
d) Tudjuk az O ponttól való távolságokra fennálló $OA' = \frac{3}{4} \cdot OA$ összefüggést és tudjuk, hogy az O pont nem választja el egymástól az A és az A' pontot. Ezért AA' szakasz hosszát felmérjük az AA' egyenes A'-n túli meghosszabbítására háromszor, így kapjuk az O pontot.



e) Tudjuk az O ponttól való távolságokra fennálló $OA' = \frac{3}{2} \cdot OA$ összefüggést és tudjuk, hogy az O pont elválasztja egymástól az A és az A' pontot. Ezért AA' szakasz hosszát ötödöljük (a párhuzamos szelők tételét felhasználva). Az A-hoz közelebbi második ötödölőpont lesz az O.

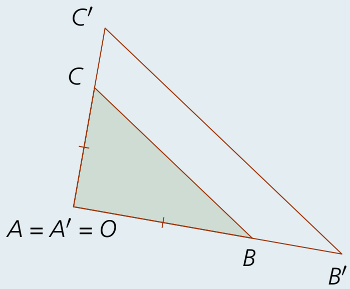


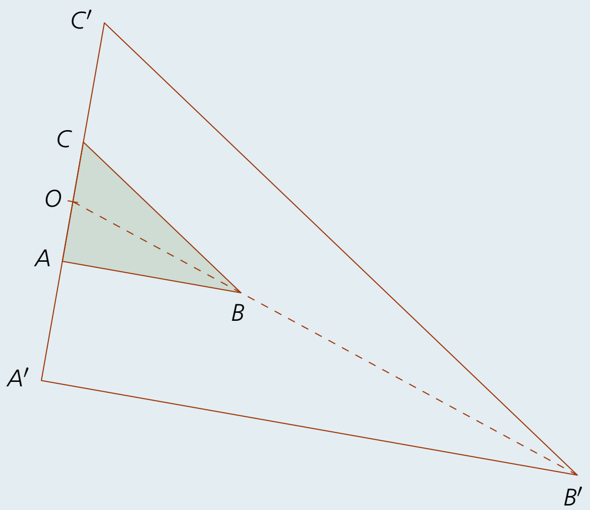
f) Tudjuk az O ponttól való távolságokra fennálló $OA' = \frac{2}{5} \cdot OA$ összefüggést és tudjuk, hogy az O pont elválasztja egymástól az A és az A' pontot. Ezért AA' szakasz hosszát hetedeljük (a párhuzamos szelők tételét felhasználva). Az A-tól távolabbi ötödik hetedelőpont lesz az O.

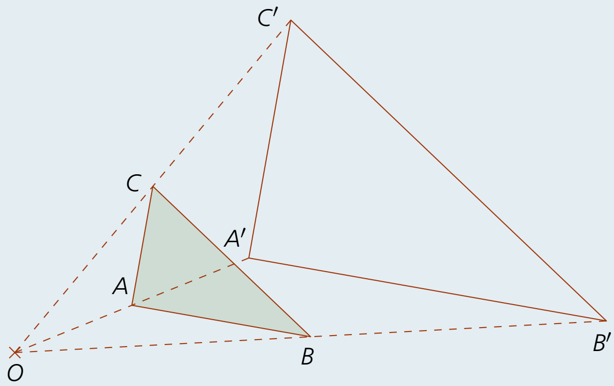


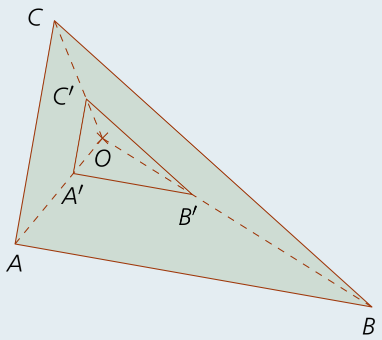
3. K1 Rajzoljunk egy háromszöget és
a) nagyítsuk az egyik csúcsából 1,5-szeresére;
b) nagyítsuk az egyik oldalának felezőpontjából 3-szorosára;
c) nagyítsuk egy külső pontból 2-szeresére;
d) kicsinyítsük egy belső pontból $\frac{1}{3}$-szorosára.

A szerkesztéseket már nem részletezzük, csak a kész ábrákat adjuk meg.

a)


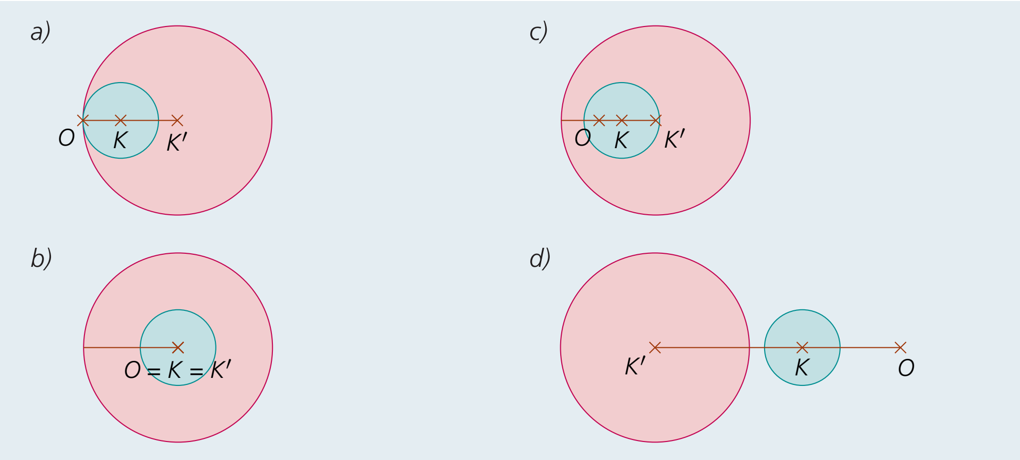
b)


c)


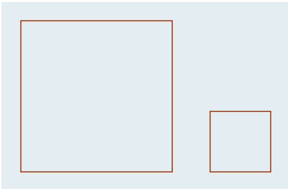
d)


4. K1 Nagyítsunk egy kört 2,5-szeresére a sík egy adott pontjából. Az adott pont
a) illeszkedjen a körvonalra;
b) legyen a kör középpontja;
c) legyen a kör belsejében egy tetszőleges pont;
d) legyen a körön kívül!

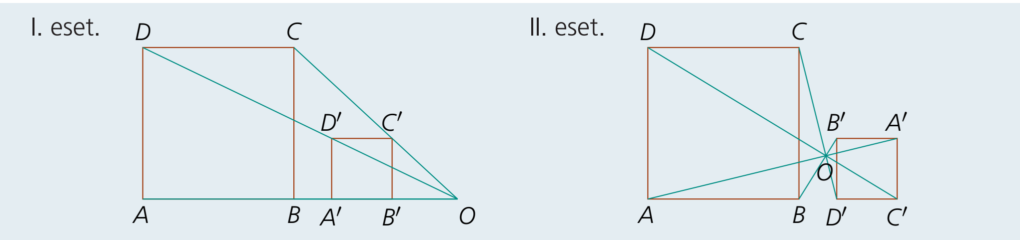
A szerkesztéseket nem részletezzük, a kész ábrákat megadjuk. Az ábrák a $\lambda = 2,5$ arányhoz készültek. Ha az adott középpontra tükrözzük a kapott képeket, akkor a $\lambda = -2,5$ arányhoz kapnánk a képet.



5. K2 Az ábrán látható négyzetek középpontosan hasonlók. Szerkesszük meg a középpontos hasonlóság középpontját! Hány középpontot kaphatunk?

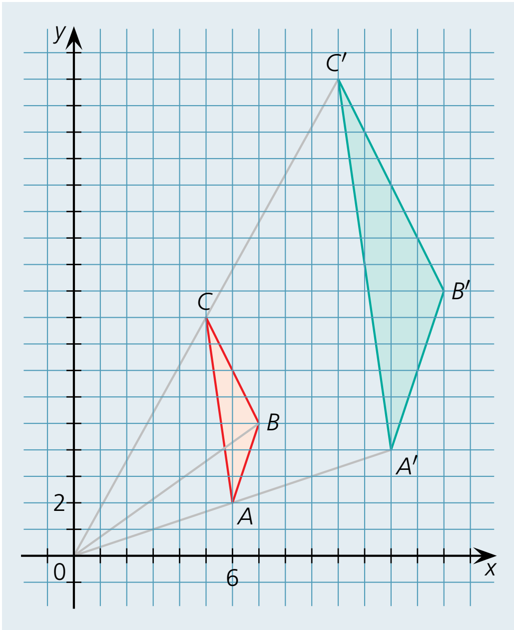


Két eset van.

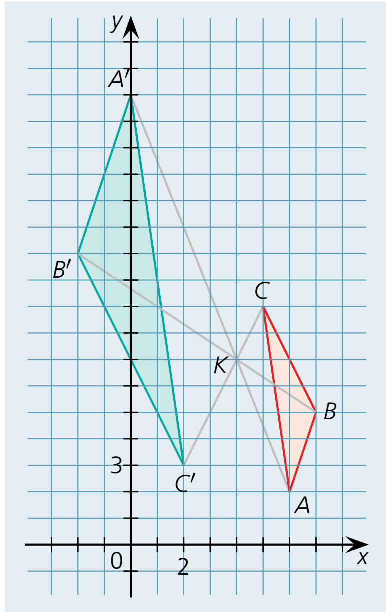


6. K2 A koordináta-rendszerben adott az *ABC* háromszög: *A*(6; 2), *B*(7; 5), *C*(5; 9). Adjuk meg az *A′B′C′* háromszög koordinátáit, ha az *ABC* háromszögből
a) 2-szeres nagyítással kapjuk, és a nagyítás középpontja az origó;
b) –2-szeres nagyítással kapjuk, és a nagyítás középpontja a *K*(4; 7).

a) Ábrázoljuk az *ABC* háromszöget, majd az origóból 2-szeres nagyítással kapott *A′B′C′* háromszöget.
A′(12; 4), *B′*(14; 10), *C′*(10; 18).



b) Ábrázoljuk az ABC háromszöget, majd a $K(4; 7)$ pontból -2-szeres nagyítással kapott $A'B'C'$ háromszöget. $A'(0; 17)$, $B'(-2; 11)$, $C'(2; 3)$.



4. Hasonlósági transzformáció

1. K1 A füzetlapra rajzolt ABC háromszög oldalai: $AB = 12$ cm, $BC = 14$ cm, $AC = 10$ cm. Egy ehhez hasonló háromszöget szeretnénk szerkeszteni, amelynek a
a) leghosszabb oldala 3,2 cm;
b) legrövidebb oldala 4,8 cm.
Számítsuk ki a további oldalak hosszúságát!

Ha két háromszög hasonló, akkor a megfelelő oldalpárok aránya egyenlő.
a) Tudjuk, hogy $B'C' = 3{,}2$ cm.

Felírhatjuk, hogy $\frac{A'C'}{10} = \frac{3{,}2}{14}$, vagyis $A'C' = \frac{16}{7} \approx 2{,}286$ cm.

Felírhatjuk, hogy $\frac{A'B'}{12} = \frac{3{,}2}{14}$, azaz $A'B' = \frac{3{,}2 \cdot 12}{14}$, vagyis $A'B' = \frac{96}{35} \approx 2{,}743$ cm.

b) Tudjuk, hogy $A'C' = 4{,}8$ cm.

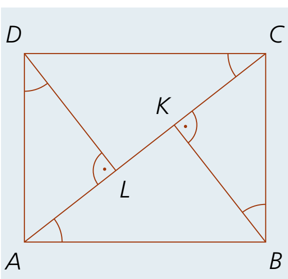
Felírhatjuk, hogy $\frac{B'C'}{14} = \frac{4{,}8}{10}$, azaz $B'C' = \frac{4{,}8 \cdot 14}{10}$, vagyis $B'C' = 6{,}72$ cm.

Felírhatjuk, hogy $\frac{A'B'}{12} = \frac{4{,}8}{10}$, azaz $A'B' = \frac{4{,}8 \cdot 12}{10}$, vagyis $A'B' = 5{,}76$ cm.

2. K2 Mutassuk meg, hogy bármely két különböző sugarú kör hasonló!

Két, K középpontú, r és R sugarú kör egymásba átvihető a K középpontú, $\frac{r}{R}$, illetve $\frac{R}{r}$ arányú középpontos hasonlósággal.

Ha a két kör középpontja nem esik egybe, akkor egy eltolással elérhetjük, hogy a körök koncentrikusak legyenek.



3. K1 Az $ABCD$ téglalapban megrajzoltuk az AC átlót. Erre az átlóra merőlegest állítottunk a B és a D csúcsból. A merőlegesek talppontja K, illetve L pont lett. Igazoljuk, hogy az így kapott rajzon valamennyi háromszög hasonló!

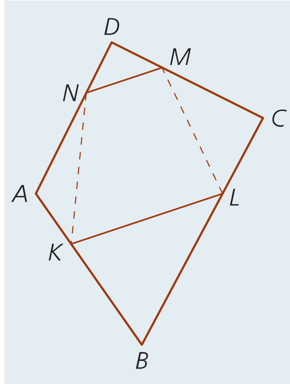
Elkészítjük a vázlatrajzot és használjuk az ábra jelöléseit!

Az ábrán látható hat háromszög (ABC, ACD, ABK, BCK, ADL, CDL) mindegyike derékszögű. A D és a B csúcsnál bejelölt szögek egyenlők, mert váltószögek. Hasonlóan az A és a C csúcsnál bejelölt szögek is egyenlők. De a D és az A csúcsnál bejelölt szögek is egyenlők, hiszen merőleges szárú szögek és mindkettő hegyesszög.

Vagyis az ábrán látható hat derékszögű háromszög mindegyikének van ugyanolyan hegyesszöge.

Mivel a hat háromszög megfelelő szögei páronként egyenlők, ezért ezek valamennyien hasonlók.

4. K2 Egy négyszög oldalait három-három egyenlő részre osztottuk. Az osztópontok közül négyet az ábrán látható módon összekötöttünk. Igazoljuk, hogy az így kapott *KLMN* négyszög trapéz!



A *DNM* és a *DAC* háromszögek középpontosan hasonlók, a hasonlóság aránya a $\frac{1}{3}$ (hiszen *N* és *M* harmadolópont a megfelelő szakaszon). Ezért $NM \parallel AC$.

Hasonlóan mutatható meg, hogy $KL \parallel AC$.

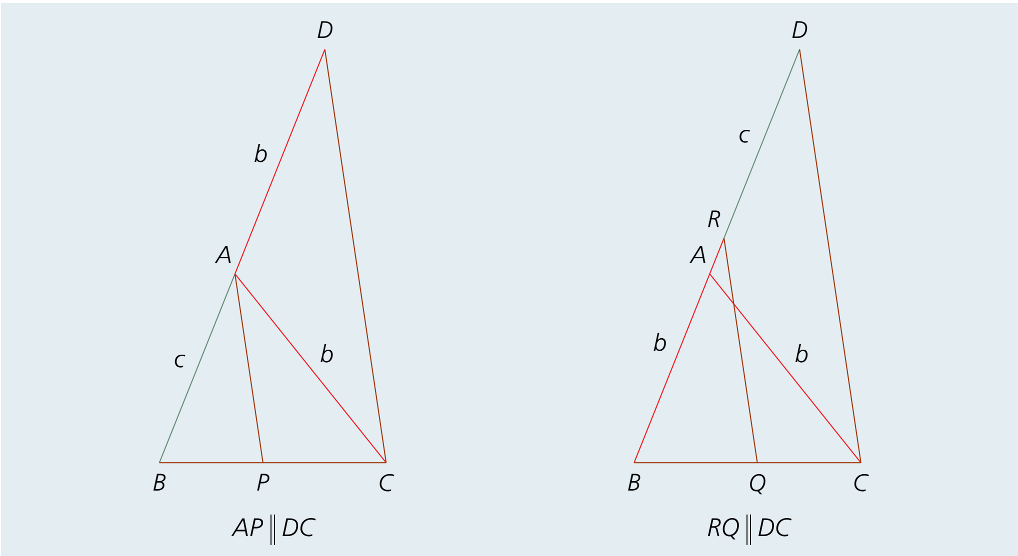
Vagyis $NM \parallel KL$, ami igazolja, hogy *KLMN* négyszög trapéz.

5. K2 Egy háromszög egyik oldalát osszuk fel két részre úgy, hogy a keletkezett részek aránya megegyezzen a másik két oldal arányával!

Az *ABC* háromszög $BC = a$ oldalát fogjuk $\frac{b}{c}$ arányban kettéosztani.

Megszerkesztjük a *BC* szakaszon azt a *P* pontot, amelyre $\frac{BP}{PC} = \frac{c}{b}$, és azt a *Q* pontot, amelyre $\frac{BQ}{QC} = \frac{b}{c}$.

A szerkesztés az ábrákról leolvasható.

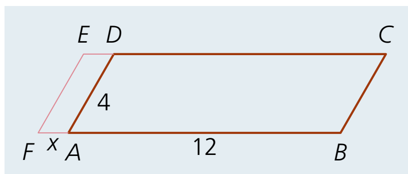


6. K2 Egy paralelogramma egyik oldalára az eredeti paralelogrammához hasonló paralelogrammát szerkesztettünk. A két síkidom együtt egy új paralelogrammát hoz létre. Adjuk meg az így kapott új paralelogramma oldalainak hosszát, ha a kiinduló paralelogramma oldalai 12 cm és 4 cm hosszúak voltak!

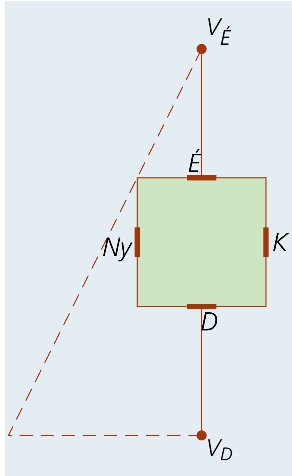
Az *ABCD* paralelogramma hasonló az *ADEF* paralelogrammához, ezért

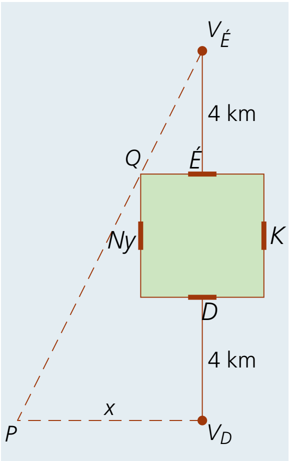
$\frac{x}{4} = \frac{4}{12}$, vagyis $x = \frac{4}{3}$ cm.

Vagyis az új paralelogramma oldalai 4 cm és $13\frac{1}{3}$ cm hosszúak.



7. K2 Egy ókori várost négyzet alakú kőfallal vették körül, melynek oldalai 4 km hosszúak. A négyzet oldalai az egyes égtájak felé néztek, és minden oldal közepénél volt egy-egy kapu. Az északi kaputól északra 4 km-re, valamint a déli kaputól délre 4 km-re volt egy-egy világítótorony. Egy alkalommal egy vándor a déli világítótoronytól nyugati irányba haladt. Hány km-t kellett gyalogolnia, hogy megpillanthassa az északi világítótornyot?





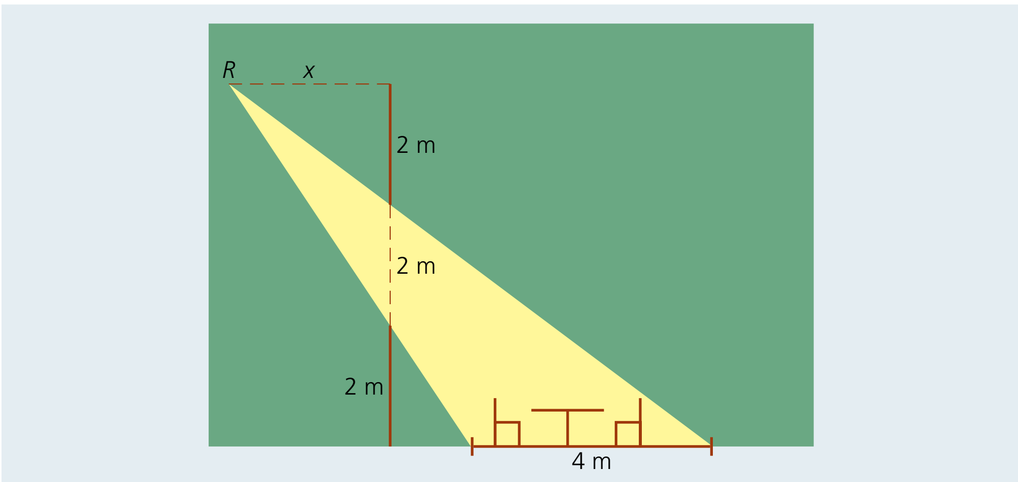
Használjuk az ábra jelöléseit.

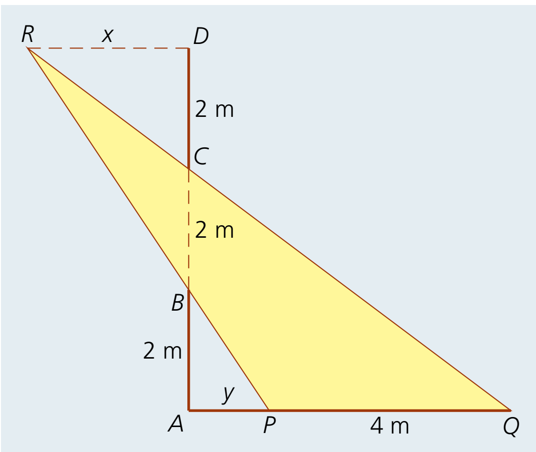
A $QÉV_É$ és $PV_DV_É$ háromszögek hasonlók, hiszen mindkettő derékszögű és pl. a $V_É$ csúcsnál közös szögük van. Ezek szerint felírhatjuk a következő aránypárt:

$$\frac{V_É É}{ÉQ} = \frac{V_É V_D}{V_D P}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{4}{2} = \frac{4+4+4}{x}, \qquad \text{ahonnan} \qquad x = 6.$$

Tehát a vándornak a déli kaputól nyugati irányban 6 km-t kell haladnia, hogy megpillantsa az északi világítótornyot.

8. K2 Az ábrán egy színpad világítását látjuk. A 6 m magas díszletelem közepén van egy 2 m magas ablak. A díszletelem mögött, a tetejével azonos magasságban helyeztek el egy R reflektort, mely az ablakon keresztül világítja meg a színpadot. Milyen távol legyen a reflektor a díszlettől, hogy a színpadot pontosan 4 m mélységben világítsa meg?





Használjuk az ábra jelöléseit!

Az RDB és BAP háromszögek hasonlók, hiszen mindkettő derékszögű és a B csúcsnál csúcsszögek vannak. Írhatjuk tehát az alábbi aránypárt:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad y = \frac{1}{2}x.$$

De az RDC és CAQ háromszögek is hasonlók, tehát

$$\frac{x}{2} = \frac{4+y}{4}, \qquad \text{ahonnan} \qquad 2x = 4 + y.$$

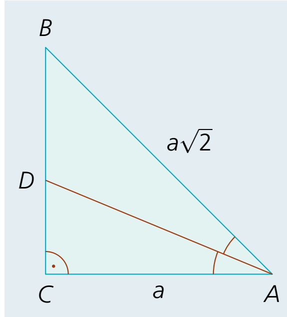
Felhasználva az előbb y-ra kapott értéket:

$$2x = 4 + \frac{1}{2}x, \qquad \text{azaz} \qquad 4x = 8 + x, \qquad \text{vagyis} \qquad x = \frac{8}{3}.$$

Tehát a reflektort a díszlettől $\frac{8}{3} \approx 2{,}66$ m távolságra kell elhelyezni, hogy a színpadot pontosan 4 m mélységben világítsa meg.

5. Tétel a háromszög szögfelezőjéről (Emelt szint)

1. K2 Milyen arányban vágja ketté egy derékszögű háromszög 45°-os szögének szögfelezője a szemközti oldalt?

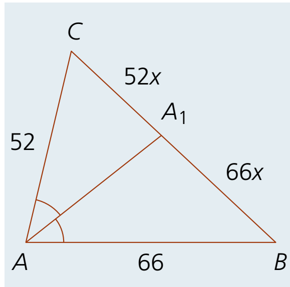


Alkalmazzuk a háromszög szögfelezőjének osztásarányáról szóló tételt.

Ha $BC = AC = a$, akkor $AB = a\sqrt{2}$.

A keresett arány: $\frac{CD}{DB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. E1 Mekkora szakaszokra vágják egy háromszög 52 cm, 66 cm, 74 cm hosszúságú oldalait a szemközti szögek belső szögfelezői?



Készítsünk ábrát!

A háromszög szögfelezőjének osztásarányáról szóló tétel szerint: $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{66}{52}$.

Vagyis $BA_1 = 66 \cdot x$, $A_1C = 52 \cdot x$, ahol az x egy ismeretlen pozitív számot jelent. A két szakasz összegére felírható, hogy $66x + 52x = 74$. Ebből $x = \frac{37}{59}$.

Tehát $BA_1 = 66 \cdot \frac{37}{59} = \frac{2442}{59} \approx 41{,}39$, $A_1C = 52 \cdot \frac{37}{59} = \frac{1924}{59} \approx 32{,}61$.

A BC oldal két szakasza kb. 41,39 cm és kb. 32,61 cm.

Hasonlóan kapjuk a másik két oldalon is a két-két szakasz hosszát.

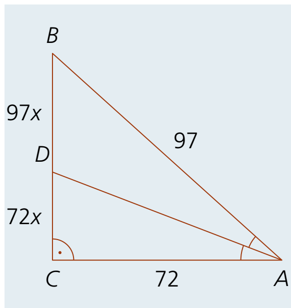
Tehát $AC_1 = 52 \cdot \frac{11}{21} = \frac{572}{21} \approx 27{,}24$, $C_1B = 74 \cdot \frac{11}{21} = \frac{814}{21} \approx 38{,}76$.

Az AB oldal két szakasza kb. 27,24 cm és kb. 38,76 cm.

Tehát $CB_1 = 74 \cdot \frac{13}{35} = \frac{962}{35} \approx 27{,}49$, $B_1A = 66 \cdot \frac{13}{35} = \frac{858}{35} \approx 24{,}51$.

A BC oldal két szakasza kb. 27,49 cm és kb. 24,51 cm.

3. E1 Derékszögű háromszög egyik befogója 65 cm, az átfogója 97 cm hosszúságú. Milyen hosszú a legkisebb szög szögfelezője?



A hiányzó befogó Pitagorasz-tétellel: $\sqrt{97^2 - 65^2} = 72$.

Vagyis a 65 cm-es oldallal szemben van a legkisebb szög.

A háromszög szögfelezőjének osztásarányáról szóló tétel szerint: $\frac{BD}{DC} = \frac{97}{72}$.

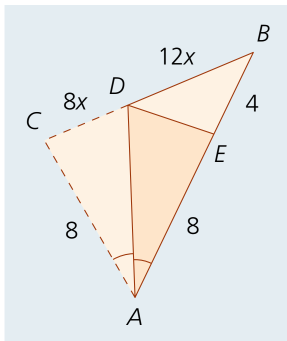
Vagyis $97x + 72x = 65$, amiből $x = \frac{5}{13}$. Így $CD = 72 \cdot \frac{5}{13} = \frac{360}{13}$.

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az ACD derékszögű háromszögre:

$AD = \sqrt{\left(\frac{360}{13}\right)^2 + 72^2} = \frac{72}{13} \cdot \sqrt{194} \approx 77{,}14$.

A legkisebb szög szögfelezője kb. 77,14 cm hosszú.

4. E1 Egy papírból kivágott háromszög oldalainak hossza 8 cm, 10 cm és 12 cm. A közös csúcsból induló hajtásvonal mentén a legrövidebb oldalt ráhajtjuk a leghosszabb oldalra. Ekkor a papírlapnak lesz kétrétegű és egyrétegű része. Igazoljuk, hogy az egyrétegű rész egyenlő szárú háromszög alakú!



Készítsünk vázlatrajzot!

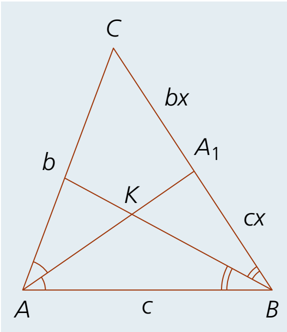
Az A-ból induló hajtásvonal a szögfelező lesz.

A háromszög szögfelezőjének osztásarányáról szóló tétel szerint: $\frac{BD}{DC} = \frac{12}{8}$.

Vagyis $12x + 8x = 10$, amiből $x = \frac{1}{2}$. Így $CD = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$, amivel egyenlő a DE is.

Ezzel azt is beláttuk, hogy $DE = EB = 4$, azaz EDB háromszög (az egyrétegű rész) valóban egyenlő szárú háromszög.

5. E2 Milyen arányú részekre vágja a háromszög egyik szögfelezőjét egy másik szögfelezője. Adjuk meg az arányt a háromszög oldalainak ismeretében!



Elkészítjük az ábrát!

Az ábra jelölése szerint az $AK : KA_1$ arány meghatározása a feladatunk.

Az ABA_1 háromszögben az AA_1 oldalon a K pontot a B csúcsból induló szögfelező határozza meg, ezért a BA_1 oldal hosszát kell kiszámítanunk. Ezt viszont az ABC háromszögben az A-ból induló szögfelező vágja le a BC oldalból. Így alkalmazzuk a háromszög szögfelezőjének osztásarányáról szóló tételt: $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}$.

Vagyis $cx + bx = a$, amiből $x = \frac{a}{b+c}$. Így $BA_1 = \frac{ac}{b+c}$.

Az ABA_1 háromszögből a keresett arányt is felírhatjuk most már:

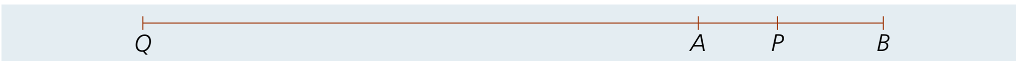
$AK : KA_1 = c : \frac{ac}{b+c}$.

Rendezett alakban a keresett arány: $\frac{AK}{KA_1} = \frac{b+c}{a}$.

6. A háromszög külső szögfelezője (Olvasmány)

1. E1 Egy háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt 3 és 4 hosszú darabokra vágja. Hol metszi a szemközti oldalegyenest ugyanezen csúcsból induló külső szögfelező?

A megadott adatok alapján tudjuk a háromszög egyik oldalának hosszát: $AB = 7$, és tudjuk a másik két megfelelő oldal arányát is: $AC : CB = 3 : 4$. Azt is tudjuk, hogy a külső szögfelező a szemközti oldalegyenest az A-n túli meghosszabbításán egy olyan Q pontban metszi, amelyre $AQ : QB = 3 : 4$, azza $AQ = 3x$, $QB = 4x$.

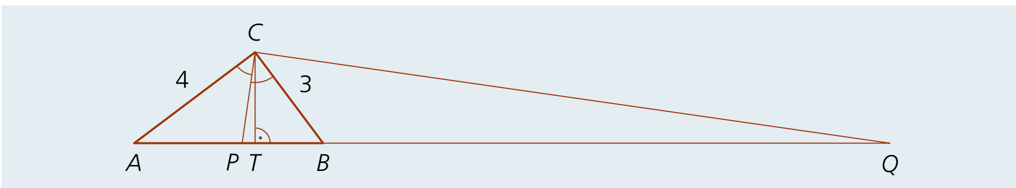


Vagyis $4x - 3x = 7$, mivel $AB = 7$.

A külső szögfelező a szemközti oldalegyenest az A-n túli meghosszabbításán metszi úgy, hogy $AQ = 21$.

2. E2 A 3 és 4 befogójú derékszögű háromszög derékszögű C csúcsából induló külső szögfelező a szemközti oldalegyenest Q pontban, a belső szögfelező pedig P pontban metszi. Számítsuk ki a PQC háromszög területét!

A PQC háromszög PQ oldalához tartozó magassága azonos az ABC háromszög AB átfogójához tartozó magasságával. A PQC háromszög területének kiszámításához ezt a magasságot és a PQ oldal hosszát fogjuk meghatározni.



Az ABC háromszög átfogója: $AB = 5$. Területének kétszeresét kétféleképpen is felírjuk: $2t = 3 \cdot 4 = 5 \cdot CT$, vagyis $CT = \frac{12}{5}$.

A PQ szakasz PB részének hosszát a háromszög belső szögfelezőjének osztásarányáról szóló tétellel, a BQ részének hosszát pedig a háromszög külső szögfelezőjének osztásarányáról szóló tétellel számítjuk ki.

Mivel $AP : PB = 4 : 3$, ezért $3x + 4x = 5$, amiből $x = \frac{5}{7}$. Vagyis $PB = \frac{15}{7}$.

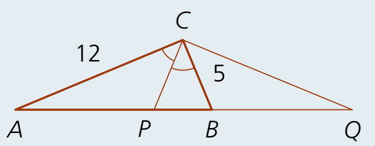
Mivel $AQ : QB = 4 : 3$, ezért $4x - 3x = 5$, amiből $x = 5$. Vagyis $QB = 15$.

$PQ = PB + BQ = \frac{15}{7} + 15 = \frac{120}{7}$.

A PQC háromszög területe: $T = \frac{PQ \cdot CT}{2} = \frac{\frac{120}{7} \cdot \frac{12}{5}}{2} = \frac{144}{7} \approx 20{,}57$.

3. E2 Az 5 és 12 befogójú derékszögű háromszög derékszögű C csúcsából induló külső szögfelező a szemközti oldalegyenest Q pontban, a belső szögfelező pedig P pontban metszi. Számítsuk ki a $PC^2 + QC^2$ összeget!

Tudjuk, hogy a háromszög egy csúcsához tartozó belső és a külső szögfelező merőleges egymásra. Vagyis PQC háromszög derékszögű, így $PC^2 + QC^2 = PQ^2$. Elegendő a PQ hosszát meghatároznunk. Pitagorasz-tétellel: $AB = 13$.



A PQ szakasz PB részének hosszát a háromszög belső szögfelezőjének osztásarányáról szóló tétellel, a BQ részének hosszát pedig a háromszög külső szögfelezőjének osztásarányáról szóló tétellel számítjuk ki.

Mivel $AP:PB = 12:5$, ezért $12x + 5x = 13$, amiből $x = \frac{13}{17}$. Vagyis $PB = \frac{65}{17}$.

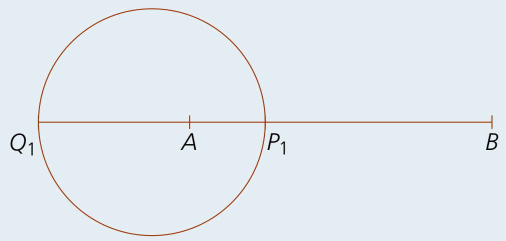
Mivel $AQ:QB = 12:5$, ezért $12x - 5x = 13$, amiből $x = \frac{13}{7}$. Vagyis $QB = \frac{65}{7}$.

$PQ = PB + BQ = \frac{65}{17} + \frac{65}{7} = \frac{65 \cdot 7 + 65 \cdot 17}{17 \cdot 7} = \frac{1560}{119}$.

Vagyis $PC^2 + QC^2 = PQ^2 = \left(\frac{1560}{119}\right)^2 \approx 171{,}85$.

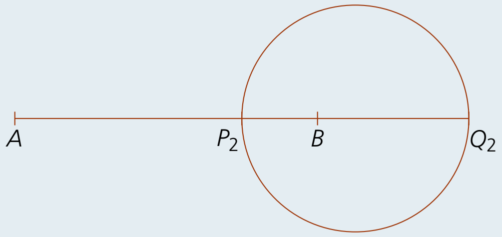
4. E1 Az adott AB szakaszhoz szerkesszük meg az 1:3 és a 3:1 arányú Apollóniosz-köröket!

Az AB szakaszon megszerkesztjük azt a P_1 pontot, amelyre $AP_1:P_1B = 1:3$, és az AB szakasz meghosszabbításán azt a Q_1 pontot, amelyre $AQ_1:Q_1B = 1:3$.



A Q_1P_1 Thalész-köre lesz a keresett kör.

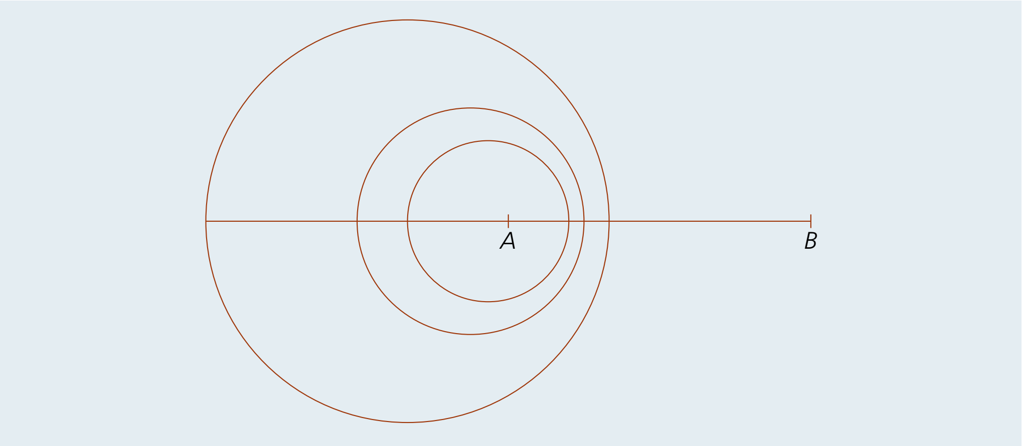
Az AB szakaszon megszerkesztjük azt a P_2 pontot, amelyre $AP_2:P_2B = 3:1$, és az AB szakasz meghosszabbításán azt a Q_2 pontot, amelyre $AQ_2:Q_2B = 3:1$.



A Q_2P_2 Thalész-köre lesz a keresett kör.

5. E1 Az adott *AB* szakaszhoz szerkesszük meg az 1:2, 1:3, 1:4 arányú Apollóniosz-köröket!

Az előző feladatban az 1:3 arányú Apollóniosz-kört már láttuk, ennek mintájára szerkesztjük meg a másik kettőt is.



6. E1 Az adott *AB* szakaszhoz rajzolt két Apollóniosz-kör érintheti-e egymást?

Egy arányhoz kölcsönösen egyértelműen tartozik egy átmérő, így nem érinthetik egymást az *AB* szakaszhoz rajzolt Apollóniosz-körök.

7. E1 Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldala és az ezen az oldalon fekvő nagyobb szög 60°-os, tudjuk továbbá, hogy a másik két oldal aránya 1:2.

Az adott oldalt felvesszük, legyen ez a háromszög *AB* oldala. Megszerkesztjük az *AB* szakaszhoz az 1:2 arányú Apollóniosz-kört. Ebből metsszük ki a *C* csúcsot az *A*-ból induló, *AB*-vel 60°-os szöget bezáró egyenessel.

7. Közepek

1. K1 Számoljuk ki a következő számok számtani és mértani közepét:
a) 4 és 16; *b)* 4 és 25; *c)* 10 és 20; *d)* 20 és 30.

a) $S(4; 16) = \dfrac{4+16}{2} = 10,\ M(4; 16) = \sqrt{4\cdot 16} = 8.$

b) $S(4; 25) = \dfrac{4+25}{2} = 14{,}5,\ M(4; 25) = \sqrt{4\cdot 25} = 10.$

c) $S(10; 20) = \dfrac{10+20}{2} = 15,\ M(10; 20) = \sqrt{10\cdot 20} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14.$

d) $S(20; 30) = \dfrac{20+30}{2} = 25,\ M(20; 30) = \sqrt{20\cdot 30} = 10\sqrt{6} \approx 24{,}49.$

2. K1 Ágnes egyik nap 45 oldalt, a következő napon pedig 63 oldalt olvasott el egy könyvből. Mennyit olvasott átlagosan naponta?

Itt az átlag a számtani közepet jelenti: $S(45; 63) = \dfrac{45+63}{2} = 54.$

Átlagosan 54 oldalt olvasott naponta.

3. K1 Egy termék ára eredetileg 98 ezer Ft volt. Kétszer ugyanolyan mértékben emelték az árát, így most 128 ezer Ft-ba kerül. Mennyibe került az első áremelés után?

Az első emelés utáni ár legyen x. A szöveg szerint:
$\frac{128\,000}{x} = \frac{x}{98\,000}$.
Ebből következik: $x = \sqrt{128\,000 \cdot 98\,000} = 112\,000$.
Az első áremelés után 112 000 Ft volt az ára.

4. K2 Két pozitív a és b szám közül csak az egyiket ismerjük. Határozzuk meg a másikat, ha tudjuk, hogy
a) $a = 9$, $S(a; b) = 30$;
b) $a = 7$, $M(a; b) = 14$;
c) $a = 2$, $H(a; b) = 3$;
d) $a = 9$, $N(a; b) = \sqrt{65}$.

a) Mivel $\frac{9+b}{2} = 30$, ezért $b = 51$.
b) Mivel $\sqrt{7b} = 14$, ezért $b = 28$.
c) Mivel $\frac{2 \cdot 2 \cdot b}{2+b} = 3$, ezért $b = 6$.
d) Mivel $\sqrt{\frac{9^2+b^2}{2}} = \sqrt{65}$, ezért $b = 7$.

5. K2 Egy kerékpáros útjának első felét $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másik felét $18\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel tette meg. Visszafelé szeretne egyenletes sebességgel haladni, és ugyanannyi idő alatt megtenni az utat, mint odafelé. Mekkora legyen a sebessége?

Legyen a sebessége: v, a megtett út oda: $2s$.
Ekkor az út első felét $\frac{s}{12}$, a másik felét $\frac{s}{18}$ idő alatt teszi meg. A vissza utat pedig $\frac{2s}{v}$ ideig fogja megtenni. A szöveg szerint:
$\frac{s}{12} + \frac{s}{18} = \frac{2s}{v}$, azaz $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{2}{v}$.
Vagyis $v = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{18}} = 14{,}4$.
Visszafelé 14,4 km/h legyen a sebessége.

6. E1 Számoljuk ki néhány esetben két pozitív szám számtani és harmonikus közepének szorzatát! Hasonlítsuk össze a kapott értéket a két szám mértani közepével! Fogalmazzuk meg a sejtésünket és bizonyítsuk be!

A számítások utáni sejtés: $S(a; b) \cdot H(a; b) = M^2(a; b)$.
$$S(a; b) \cdot H(a; b) = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab = M^2(a; b).$$

7. K2 Az azonos területű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

Legyen a téglalap két oldal a és b hosszúságú. Tudjuk, hogy az ab szorzat konstans, hiszen azonos területű téglalapokat vizsgálunk. A téglalapok kerülete, a $2(a + b)$ pontosan akkor a legkisebb, amikor az $\frac{a+b}{2}$ a legkisebb.
Tudjuk a számtani és a mértani közép közötti összefüggés alapján, hogy $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Vagyis az $\frac{a+b}{2}$ akkor a legkisebb, ha a $\sqrt{ab}$ konstanssal egyenlő. Ez azonban akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b$.
Vagyis a keresett téglalap a négyzet.

8. K2 Egy adott hosszúságú szakaszt hogyan kell kettévágnunk, ha azt szeretnénk, hogy a két szakasz hosszának szorzata maximális legyen?

A kettévágás utáni két szakasz hossza legyen x és y.
Tudjuk, hogy az $x+y$ konstans, így az $\frac{x+y}{2}$ is az.
A számtani és a mértani közép közötti összefüggés alapján: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. A két szakasz hosszának szorzata pontosan akkor maximális, amikor a $\sqrt{xy}$ maximális. Ez pedig akkor a legnagyobb, ha az $\frac{x+y}{2}$-vel egyenlő. Tudjuk, hogy ez akkor és csak akkor áll fenn, ha $x=y$.
Vagyis a szakaszt pontosan felezve kell kettévágni.

9. K2 Mutassuk meg, hogy két pozitív szám összegének és a reciprokaik összegének szorzata nem lehet négynél kisebb!

Legyen a két pozitív szám a és b. Ekkor a bizonyítandó állítás: $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$.

Alakítsuk át az egyenlőtlenséget: $(a+b)\frac{b+a}{ab} \geq 4$.

Tudjuk, hogy a, b pozitív szám, ezért szorozhatunk ab-vel, majd írhatjuk az egyenlőtlenséget a következő alakban is:

$$(a+b)^2 - 4ab \geq 0,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$
$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Mivel a kapott egyenlőtlenség minden a, b esetén igaz, és ekvivalens lépéseket végeztünk, ezért ezzel az eredeti állítást igazoltuk.

Megjegyzés: Egy másik bizonyítást is mutatunk.
Végezzük el a szorzást az egyenlőtlenség bal oldalán:

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \geq 4,$$
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Tudjuk, hogy bármely pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, így készen vagyunk.

10. E1 Igazoljuk algebrai úton, hogy két pozitív valós szám
a) mértani közepe legalább akkora, mint harmonikus közepük;
b) számtani közepe legfeljebb akkora, mint négyzetes közepük.

a) A bizonyítandó állítás: $H(a;b) = \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} = S(a;b)$.

Szorozzuk mindkét oldalt a pozitív $2(a+b)$-vel:

$4ab \leq (a+b)^2$, ami $0 \leq (a-b)^2$ alakban is írható.

Ez utóbbi egyenlőtlenség nyilván igaz, hiszen a jobb oldalon egy valós szám négyzete szerepel. Mivel lépéseink megfordíthatók voltak, ezért a kiindulási egyenlőtlenség is igaz. A kapott eredményből az is következik, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a=b$.

b) A bizonyítandó állítás: $S(a;b) = \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = N(a;b)$.

Emeljük mindkét oldalt négyzetre (megtehetjük, mert pozitív): $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Néggyel szorozva és rendezve: $a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$,

azaz: $0 \leq a^2 - 2ab + b^2$, vagyis $0 \leq (a-b)^2$.

Ez utóbbi egyenlőtlenség nyilván igaz, hiszen a jobb oldalon egy valós szám négyzete szerepel. Mivel lépéseink megfordíthatók voltak, ezért a kiindulási egyenlőtlenség is igaz. A kapott eredményből az is következik, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a=b$.

11. E2 Adjuk meg azt a legszűkebb intervallumot, ahová három pozitív szám összegének és a reciprokaik összegének szorzata eshet!

Legyen a három pozitív szám a, b és c. Néhány próba után a sejtésünk:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Végezzük el a szorzást az egyenlőtlenség bal oldalán:

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1 \geq 9,$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq 6.$$

Tudjuk, hogy bármely pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, így ezzel készen vagyunk.

Megmutatjuk, hogy ez az érték tetszőlegesen nagy lehet.

Legyen K egy tetszőleges 9-nél nagyobb páros szám. Megmutatjuk, hogy alkalmas a, b és c esetén $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) > K$.

Legyen pl. $a=\frac{K}{2}$, $b=\frac{K}{2}$, $c=1$, ekkor így alakul az egyenlőtlenség:

$$\left(\frac{K}{2}+\frac{K}{2}+1\right)\left(\frac{2}{K}+\frac{2}{K}+1\right) > \left(\frac{K}{2}+\frac{K}{2}+1\right)\cdot 1 = K+1 > K.$$

Mivel K tetszőlegesen nagy lehet, ezért a keresett legszűkebb intervallum: $[9; \infty[$.

8. Közepek több szám esetén (Emelt szint)

1. E1 Egy gyalogostúra 4 db 4 km-es szakaszból áll. Az első 4 km-es szakaszát $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ állandó sebességgel tettük meg. A második 4 km-es szakaszt $6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ állandó sebességgel, a harmadik 4 km-es szakaszt pedig $4{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ állandó sebességgel tettük meg. Mekkora (állandó) sebességgel tettük meg a negyedik 4 km-es szakaszt, ha átlagsebességünk az egész úton $5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.

Az átlagsebesség az egyes sebességek harmonikus közepe.

$$\frac{4}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4{,}5}+\frac{1}{x}} = 5, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{4}{\frac{9x+6x+8x+36}{36x}} = 5,$$

$$\frac{144x}{23x+36} = 5, \qquad \text{ahonnan} \qquad x = \frac{180}{29} \approx 6{,}2.$$

Tehát az utolsó szakaszon kb. $6{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladtunk.

2. E1 Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszög köré írható köre sugarának a $\sqrt{2}$-szöröse egyenlő a befogók négyzetes közepével!

A Thalész-tételből adódik, hogy a derékszögű háromszög köré írható körének a sugara az átfogó felével egyenlő. Így azt kell belátni, hogy

$$\frac{c}{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Ez pedig a Pitagorasz-tétel miatt igaz.

3. E1 Igazoljuk, hogy ha *a, b* és *c* pozitív valós számok, akkor $(ab+1)(ac+1)(bc+1) \ge 8abc$.

Először végezzük el a szorzást, majd osszuk el mindkét oldalt *abc*-vel.

$$(ab+1)(ac+1)(bc+1) = (a^2bc + ac + ab + 1)(bc+1) =$$
$$= a^2b^2c^2 + abc^2 + ab^2c + bc + a^2bc + ac + ab + 1 \ge 8abc,$$
$$abc + c + b + \frac{1}{a} + a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \ge 8,$$
$$abc + \frac{1}{abc} + a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \ge 8.$$

Mivel bármely pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2, így

$$abc + \frac{1}{abc} \ge 2, \quad a + \frac{1}{a} \ge 2, \quad b + \frac{1}{b} \ge 2, \quad c + \frac{1}{c} \ge 2.$$

Tehát valóban

$$abc + \frac{1}{abc} + a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \ge 8.$$

4. E2 Mely *x, y, z* valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőséget:
$3^{x+y} + 3^{x-y} + \sqrt{4x - x^2 - 4} = 9 + 6z - z^2$.

A négyzetgyök alatti mennyiség egy teljes négyzet (–1)-szerese: $4x - x^2 - 4 = -(x-2)^2$, így a bal oldal harmadik tagja: $\sqrt{-(x-2)^2}$.

Ennek csak akkor van értelme, ha $x = 2$.

Ezzel az eredeti egyenlet:

$$3^{2+y} + 3^{2-y} = 9 + 6z - z^2,$$
$$9 \cdot 3^y + 9 \cdot 3^{-y} = 9 - (z^2 - 6z),$$
$$9 \cdot \left(3^y + \frac{1}{3^y}\right) = 9 - \left[(z-3)^2 - 9\right],$$
$$9 \cdot \left(3^y + \frac{1}{3^y}\right) = 18 - (z-3)^2.$$

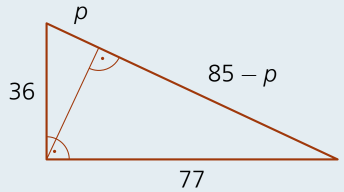
A kapott egyenlet bal oldalán a zárójelben egy pozitív számnak és reciprokának összege szerepel, ami legalább 2, és pontosan akkor 2, ha a kérdéses szám 1. Ezek szerint az egyenlet bal oldala legalább 18. A jobb oldal értéke nyilván legfeljebb 18, így az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha mindkét oldal 18. Ekkor $3^y = 1$, tehát $y = 0$ és $z - 3 = 0$, azaz $z = 3$.

Az eredeti egyenlet megoldása: $x = 2$, $y = 0$, $z = 3$.

9. Befogótétel, magasságtétel

1. K1 Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 36 és 77. Az átfogóhoz tartozó magasság mekkora darabokra vágja az átfogót?

Az átfogó Pitagorasz-tétellel: $c = 85$.



Befogótétellel: $p \cdot 85 = 36^2$, amiből $p \approx 15{,}25$.
Az átfogóhoz tartozó magasság kb. 15,25 és kb. 69,75 hosszúságú darabokra vágja az átfogót.

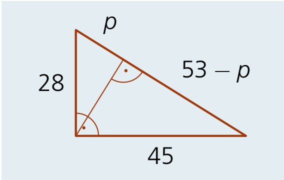
2. K2 Egy derékszögű háromszögben a hosszabb befogó 17-tel hosszabb a rövidebbnél és 8-cal rövidebb az átfogónál. Az átfogóhoz tartozó magasság mekkora darabokra vágja az átfogót?

A szokásos jelöléssel az oldalak: a, $a+17$, $a+25$.

A Pitagorasz-tétel szerint: $a^2+(a+17)^2=(a+25)^2$.

Rendezve: $a^2-16a-336=0$.

Az egyetlen pozitív gyöke: $a=28$, vagyis a háromszög oldalai: 28; 45; 53.



Befogótétellel: $p\cdot 53=28^2$, amiből $p=\frac{784}{53}\approx 14{,}8$ és $53-p=\frac{2025}{53}\approx 38{,}2$.

Az átfogóhoz tartozó magasság $\frac{784}{53}$ és $\frac{2025}{53}$ hosszúságú darabokra vágja az átfogót.

3. K2 Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság az átfogót 5 és 12 hosszúságú darabra vágja. Mekkorák a befogók és az átfogó?

Az átfogó: $c=5+12=17$.

Magasságtétellel az átfogóhoz tartozó magasság: $m=\sqrt{5\cdot 12}=\sqrt{60}$.

Ez a magasság két derékszögű háromszögre vágja az eredeti háromszöget. Ezekre felírjuk a Pitagorasz-tételt és megkapjuk a keresett befogók hosszát is:

$a=\sqrt{60+5^2}=\sqrt{85}\approx 9{,}22$.

$b=\sqrt{60+12^2}=\sqrt{204}\approx 14{,}28$.

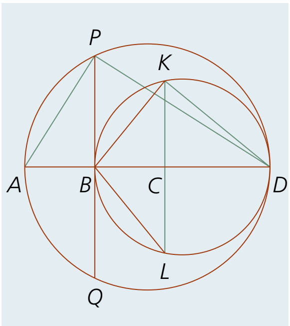
4. K2 Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság 4, az egyik befogója pedig 5. Mekkora az átfogó és a másik befogó?

Pitagorasz-tétellel megkapjuk a befogó átfogóra eső merőleges vetületének hosszát: $p=3$.

Befogótétellel kapjuk az átfogó hosszát: $5^2=3\cdot c$, azaz $c=\frac{25}{3}$.

Pitagorasz-tétellel megkapjuk a hiányzó befogót: $b=\sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2-5^2}=\frac{20}{3}$.

5. E1 Az A, B, C és D pontok ebben a sorrendben illeszkednek egy egyenesre. Tudjuk, hogy $AB=BC$. Az AD átmérőjű kört az AD-re B-ben merőleges egyenes a P és a Q pontban metszi. A BD átmérőjű kört a BD-re C-ben merőleges egyenes a K és az L pontban metszi. Igazoljuk, hogy $PKLQ$ négyszög köré írt körének B a középpontja.



A Thalész-tétel alapján APD és BKD háromszögek (valamint az AQD és BLD háromszögek) derékszögűek.

Az ADP és AQD háromszögben alkalmazzuk a magasságtételt, a BKD és a BLD háromszögben a befogótételt, továbbá tudjuk, hogy $AB=BC$, így kapjuk, hogy $BP=BQ=BK=BL$.

Vagyis a $PKLQ$ négyszög köré írt körének valóban B a középpontja.

6. E2 Az A, B, C és D pontok ebben a sorrendben illeszkednek egy egyenesre. Tudjuk, hogy $AB=BC$. Az AD átmérőjű kört az AD-re B-ben merőleges egyenes a P és a Q pontban metszi. A BD átmérőjű kört a BD-re C-ben merőleges egyenes a K és az L pontban metszi. Határozzuk meg a $PKQ\sphericalangle$ nagyságát!

Az előző feladat állítása szerint $PKLQ$ négyszög köré írt körének B a középpontja. Mivel B pont a PQ szakasz felezőpontja, ezért a Thalész-tétel alapján $PKQ\sphericalangle=90^\circ$.

10. Sokszögek

1. K1 Hány átlója van a
a) 6; *b)* 8; *c)* 11; *d)* 103
oldalú konvex sokszögnek?

Felhasználjuk az $\frac{n(n-3)}{2}$ képletet az átlók számára.
a) 9; *b)* 20; *c)* 44; *d)* 5150.

2. K2 Egy konvex sokszögben megrajzoltunk 60 darab átlót. Tudjuk, hogy ekkor több mint a felét megrajzoltuk. Hány oldalú lehet a sokszög?

Legyen az oldalak száma n. A szöveg szerint: $60 \leq \frac{n(n-3)}{2} < 120$, azaz $120 \leq n(n-3) < 240$.
Vagyis az n lehetséges értékei: 13, 14, 15, 16, 17.

3. K2 Egy konvex sokszögben az átlók száma
a) 44; *b)* 170; *c)* 230; *d)* 527.
Hány oldalú a sokszög?

Felhasználjuk az $\frac{n(n-3)}{2}$ képletet az átlók számára.
a)11; *b)* 20; *c)* 23; *d)* 34.

4. K2 Hány oldala van annak a konvex sokszögnek, amelyben az átlók száma egyenlő az oldalak számával?

A szöveg szerint: $\frac{n(n-3)}{2} = n$, azaz $n^2 - 5n = 0$.
Az egyenlet két gyöke közül csak az $n = 5$ pozitív, így 5 oldala van annak a konvex sokszögnek, amelyben az átlók száma egyenlő az oldalak számával.

5. K1 Mekkora az
a) 5; *b)* 7; *c)* 15; *d)* 102.
oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege?

Felhasználjuk az $(n-2)\cdot 180°$ képletet a belső szögek összegére.
a) 540°; *b)* 900°; *c)* 2340°; *d)* 18 000°.

6. K1 Hány oldala van annak a konvex sokszögnek, melyben
a) 3420°; *b)* 3960°; *c)* 8460°; *d)* 18 000°
a belső szögek összege?

Felhasználjuk az $(n-2)\cdot 180°$ képletet a belső szögek összegére.
a) 21; *b)* 24; *c)* 49; *d)* 102.

7. K2 Mekkora a szabályos sokszög egy szöge, ha oldalainak száma
a) 8; *b)* 9; *c)* 12; *d)*15?

Felhasználjuk az $(n-2)\cdot 180°$ képletet a belső szögek összegére, valamint tudjuk, hogy a szabályos sokszög minden szöge egyenlő. Vagyis egy szög: $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.
a) 135°; *b)* 140°; *c)* 150°; *d)* 156°.

8. K1 Lehet-e egy sokszögben a belső szögek összege 4590°?

Felhasználjuk az $(n-2)\cdot 180°$ képletet a belső szögek összegére:
$(n-2)\cdot 180° = 4590°$, amiből $n = 27{,}5$.
Vagyis nem lehet egy sokszögben a belső szögek összege 4590°.

9. E1 Lehet-e egy sokszögben négy olyan belső szöget választani, amelyeknek összege 321°?

A kiválasztott négy belső szög és a hozzájuk tartozó négy külső szög összege $4\cdot 180° = 720°$, vagyis a négy külső szög összege: $720° - 321° = 399°$ lenne. Ez azonban lehetetlen, mert az összes külső szög összege 360°.

10. E2 Egy konvex hatszög belsejében vegyünk fel hat pontot úgy, hogy a csúcsokkal együtt kapott 12 pont közül semelyik három nincs egy egyenesen. Kössük össze páronként a pontokat szakaszokkal! Az összekötő szakaszok nem metszhetik egymást! Az összekötéseket addig végezzük, amíg az eredeti hatszöget csak háromszögekre vágják szét ezek a szakaszok. Igazoljuk, hogy ilyen módon a hatszög mindig ugyanannyi háromszögre vágható!

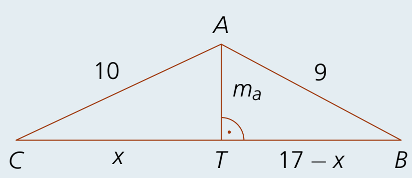
Összeszámoljuk az így kapott háromszögek belső szögeinek összegét!
Ezek a háromszögek tartalmazzák a hatszög összes belső szögét, valamint a belső pontok körüli 360°-os teljes szögeket. Így a szögösszeg: $720° + 6\cdot 360° = 2880°$. Mivel $\frac{2880°}{180°} = 16$, így minden esetben 16 háromszög alakul ki.

11. Háromszögek, négyszögek, sokszögek területe

1. K2 Számítsuk ki az
a) $a = 17$, $b = 10$, $c = 9$;
b) $a = 15$, $b = 14$, $c = 13$
oldalhosszúságokkal megadott háromszög területét!

a) Ismerjük a háromszög területképletét: $t = \frac{a\cdot m_a}{2}$. Ahhoz, hogy kiszámíthassuk a területet, először valamelyik oldalhoz tartozó magasságot kell meghatároznunk.

A vizsgált háromszögben az a oldal a leghosszabb, ezért a magasság T talppontja az oldalszakaszra esik. A T pont két részre vágja az oldalt, legyen az egyik szakasz x, a másik $17 - x$ hosszúságú. Az így kapott két derékszögű háromszögre (ABT-re és ACT-re) felírjuk a Pitagorasz-tételt:



$$\left.\begin{aligned} m_a^2 + x^2 &= 100 \\ m_a^2 + (17-x)^2 &= 81 \end{aligned}\right\}$$

Az így kapott kétismeretlenes másodfokú egyenletrendszer megoldásához vegyük az első és a második egyenlet különbségét: $-289 + 34x = 19$.

Ebből: $x = \frac{154}{17}$.

Az m_a magasságot az első egyenletből számítjuk ki: .

Vagyis: $t = \dfrac{17 \cdot \dfrac{72}{17}}{2} = 36$.

b) Az előző megoldás gondolatmenetét követve: $t = 84$.

2. K2 Számítsuk ki az
a) $a = 20$, $b = 15$, $c = 7$;
b) $a = 50$, $b = 41$, $c = 39$
oldalhosszúságokkal megadott háromszög beírt körének sugarát!

a) A háromszög területét a tanult módszerrel kiszámítjuk a három oldal ismeretében: $t = 42$.
Tudjuk, hogy $t = \rho s$, ahol ρ a beírt kör sugara, s pedig a kerület fele.
Ebben a feladatban: $s = 21$.
Vagyis $42 = \rho \cdot 21$.
A háromszög beírt körének sugara: $\rho = 2$.

b) Az előző megoldás gondolatmenetét követjük.
$t = 780$, $s = 65$, ami alapján: $\rho = 12$.

3. E1 Számítsuk ki az
a) $a = 40$, $b = 30$, $c = 14$;
b) $a = 100$, $b = 82$, $c = 78$
oldalhosszúságokkal megadott háromszög hozzáírt köreinek sugarát!

A $t = \rho_a(s - a) = \rho_b(s - b) = \rho_c(s - c)$ területképleteket fogjuk használni, ahol ρ_x az x oldalhoz hozzáírt kör sugara, s pedig a kerület fele. A területet a tanult módszerrel kiszámítjuk a három oldal ismeretében.
a) $t = 168$, $s = 42$, ami alapján: $\rho_a = 84$, $\rho_b = 14$, $\rho_c = 6$.
b) $t = 3120$, $s = 130$, ami alapján: $\rho_a = 104$, $\rho_b = 65$, $\rho_c = 60$.

4. E1 Igazoljuk, hogy a pitagoraszi számhármasokkal megadott háromszögek is Heron-félék!

Ezen háromszögek oldalainak hossza egész mérőszámú, ezért csak azt kell igazolni, hogy a terület mérőszáma is egész szám.

A derékszögű háromszögek területe az a és b befogó ismeretében a $t = \dfrac{ab}{2}$ képlettel kiszámítható. Ez csak akkor nem egész, ha a és b egyike sem páros. Megmutatjuk, hogy nincs olyan pitagoraszi számhármas, amelyben a két befogó hossza páratlan.

Tegyük fel, hogy van ilyen! Legyen $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, ahol $m, n \in \mathbf{N}$.

Ekkor $c^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4\underbrace{(m^2 + m + n^2 + n)}_{\in \mathbf{N}} + 2$.

Tudjuk, hogy c egész, és láthatóan c^2 4-es maradéka 2. Ez lehetetlen.
Vagyis a pitagoraszi számhármasokkal megadott háromszögek valóban Heron-félék.

5. K2 Számítsuk ki az $ABCD$ konvex négyszög területét, ha az oldalak hossza:
a) $AB = 8$, $BC = 6$, $CD = 9$, $AD = 17$ és a B csúcsnál lévő szög 90°-os;
b) $AB = 7\sqrt{3}$, $BC = 7$, $CD = 15$, $AD = 13$ és az AC átló hossza 14!

a) Az ABC derékszögű háromszög átfogója (ami az $ABCD$ négyszög egyik átlója) Pitagorasz-tétellel kiszámítható: $AC = 10$.
Az ABC derékszögű háromszög területe: $t_1 = 24$
Az ACD háromszög minden oldala ismert, a tanult módszerrel a területe: $t_2 = 36$.
Vagyis az $ABCD$ négyszög területe: $t = t_1 + t_2 = 60$.

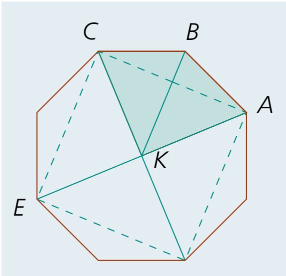
b) Mivel az *ABC* háromszög oldalaira: $(7\sqrt{3})^2 + 7^2 = 14^2$, ezért ez derékszögű.

Az *ABC* derékszögű háromszög területe: $t_1 = 24{,}5\sqrt{3}$.
Az *ACD* háromszög minden oldala ismert, a tanult módszerrel a területe: $t_2 = 84$.
Vagyis az *ABCD* négyszög területe: $t = t_1 + t_2 = 24{,}5\sqrt{3} + 84 \approx 126{,}44$.

6. K2 Határozzuk meg az *r* sugarú körbe írt és a kör köré írt szabályos
a) hatszög;
b) nyolcszög
területét!

a) Az *r* sugarú körbe írt szabályos hatszög feldarabolható 6 db *r* oldalú szabályos háromszögre, ezért a területe: $t = 6 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$.

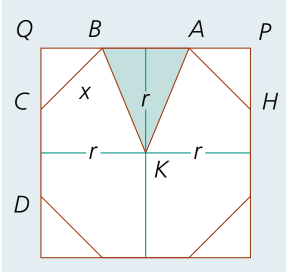
Az *r* sugarú kör köré írt szabályos hatszög feldarabolható 6 db olyan szabályos hatszögre, amelyekben a magasság *r*. Pitagorasz-tétellel kapjuk az oldalt: $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, ezért a hatszög területe: $T = 6 \cdot \frac{\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 2r^2\sqrt{3}$.



b) Az *r* sugarú körbe írt szabályos nyolcszöget négy egybevágó deltoidra tudjuk szétvágni. Az egyik deltoid a rajzunkon az *ABCK*. A deltoid átlóinak hosszát meg tudjuk határozni. $KB = r$, $CA = r\sqrt{2}$, mert *AKC* egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Vagyis az *r* sugarú körbe írt nyolcszög területe: $t = 4 \cdot \frac{r \cdot r\sqrt{2}}{2} = 2r^2\sqrt{2}$.

Az *r* sugarú kör köré írt szabályos nyolcszög felvágható nyolc olyan egyenlő szárú háromszögre, amelyeknek az alaphoz tartozó magassága *r*, a szárszöge pedig 45°. Egy ilyen háromszögnek még az alapját kell meghatároznunk, hogy ki tudjuk számítani a területet.

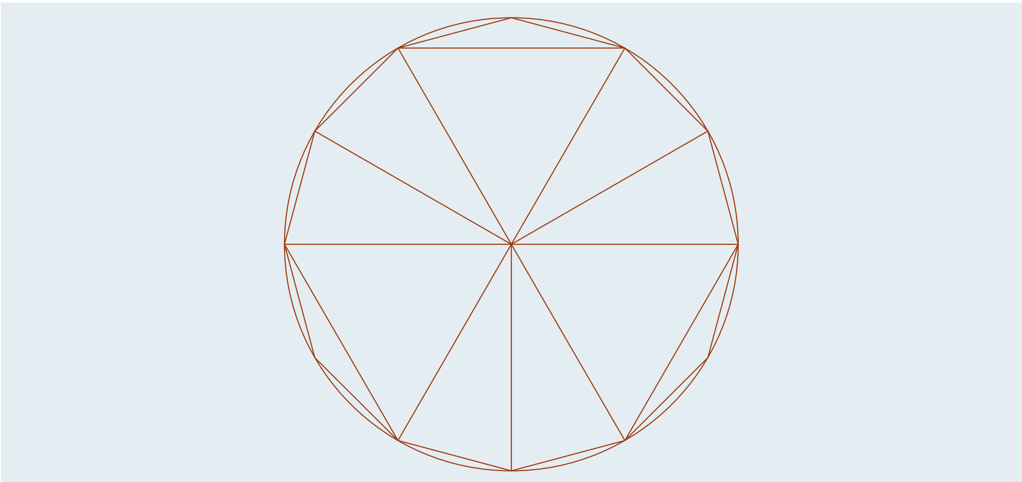


Legyen a nyolcszög oldala *x*, ekkor $PA = QB = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Vagyis: $\frac{x}{\sqrt{2}} + x + \frac{x}{\sqrt{2}} = 2r$, amiből $x = \frac{2}{\sqrt{2}+1}r$.

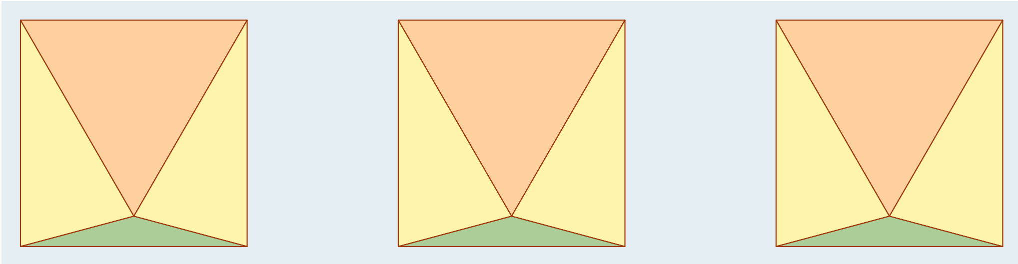
Az *ABK* háromszög területe: $\frac{1}{\sqrt{2}+1}r^2$.

Vagyis az *r* sugarú kör köré írt nyolcszög területe: $T = \frac{8}{\sqrt{2}+1}r^2$.

7. K2 A tizenkétszöget az ábrán látható módon tizenkét egyenlő szárú háromszögre vágtuk. A tizenkét síkidom felhasználásával rakjunk ki három négyzetet!



A megoldást láthatjuk az alábbi ábrán. A háromszögek szögei és oldalai segítségével belátható, hogy ezek valóban négyzetek.



8. E2 Egy háromszög beírt körének sugara 2, a hozzáírt köreinek sugara pedig 3, 10 és 15. Mekkora a háromszög területe?

Használjuk a következő területképleteket: $t = \rho_a(s-a) = \rho_b(s-b) = \rho_c(s-c) = \rho s$.
Szorozzuk össze a megfelelő oldalakat: $t^4 = s(s-a)(s-b)(s-c)\rho_a\rho_b\rho_c\rho$.
Felhasználjuk a Heron-képletet: $t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, így kapjuk a következő összefüggést: $t^2 = \rho_a\rho_b\rho_c\rho$.
A megadott adatokkal: $t^2 = 3 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 2$, vagyis $t = 30$.

9. E2 Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszög beírt körének és a befogókhoz hozzáírt köreinek sugara együtt annyi, mint az átfogóhoz hozzáírt kör sugara.

Használjuk a következő területképleteket: $t = \rho_a(s-a) = \rho_b(s-b) = \rho_c(s-c) = \rho s$, ahol ρ_a az a oldalhoz, ρ_b a b oldalhoz, ρ_c a c oldalhoz hozzáírt kör sugara, s pedig a háromszög kerületének a fele.
Ekkor a bizonyítandó állítás a következő alakban írható:

$$\frac{1}{s-c} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b}.$$

Mivel $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, ezért: $\dfrac{2}{a+b-c} = \dfrac{2}{a+b+c} + \dfrac{2}{-a+b+c} + \dfrac{2}{a-b+c}$.

Rendezve: $\dfrac{1}{a+b-c} - \dfrac{1}{a+b+c} = \dfrac{1}{c-(a-b)} + \dfrac{1}{c+(a-b)}$,

$$\frac{2c}{(a+b)^2-c^2} = \frac{2c}{c^2-(a-b)^2}.$$

A két tört pedig egyenlő, mert a nevezőjük is egyenlő. Felhasználjuk, hogy derékszögű háromszögek esetén $a^2+b^2-c^2=0$.
Ezzel az állítást igazoltuk.

12. Kerületi szögek, látószögkörív (Emelt szint)

1. K1 Adjuk meg az adott középponti szöghöz tartozó kerületi szög nagyságát!

a) 73°; *b)* 85°; *c)* 101°41′; *d)* 105°39′.

a) 36,5°; *b)* 42,5°; *c)* 50°50′30″; *d)* 52°49′30″.

2. K1 Adjuk meg radiánban azokat a kerületi szögeket, amelyek egy kör kerületének

a) $\frac{1}{4}$; *b)* $\frac{2}{5}$; *c)* $\frac{1}{9}$; *d)* $\frac{3}{5}$

részéhez tartoznak!

a) $\frac{\pi}{4}$; *b)* $\frac{2\pi}{5}$; *c)* $\frac{\pi}{9}$; *d)* $\frac{3\pi}{5}$.

3. K2 Mekkora szöget zárhat be egymással a szabályos
a) ötszög; *b)* hétszög; *c)* kilencszög *d)* tizenkétszög
egy csúcsból húzott két átlója?

A szabályos sokszögek köré írt körét a sokszög csúcsai azonos ívhosszakra darabolják. Ebből adódóan az egy csúcsból kiinduló átlók a sokszög egy szögét egyenlő részekre bontják.

a) A szabályos ötszög egy szöge $\frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. Egy csúcsból két átló indul, és ezek három részre osztják ezt a szöget, tehát az egy csúcsból kiinduló két átló által bezárt szög 36°.

b) A szabályos hétszög egy szöge $\frac{5 \cdot 180^\circ}{7} = \frac{900^\circ}{7}$. Egy csúcsból négy átló indul, és ezek öt részre osztják ezt a szöget, tehát az egy csúcsból kiinduló szomszédos átlók által bezárt szög $\frac{180^\circ}{7}$. Az azonos csúcsból induló két átló hajlásszöge $m \cdot \frac{180^\circ}{7}$ lehet, ahol m lehetséges értékei: 1, 2, 3.

c) A szabályos kilencszög egy szöge $\frac{7 \cdot 180^\circ}{9} = 140^\circ$. Egy csúcsból hat átló indul, és ezek hét részre osztják ezt a szöget, tehát az egy csúcsból kiinduló szomszédos átlók által bezárt szög 20°. Az azonos csúcsból induló két átló hajlásszöge $m \cdot 20^\circ$ lehet, ahol m lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4, 5.

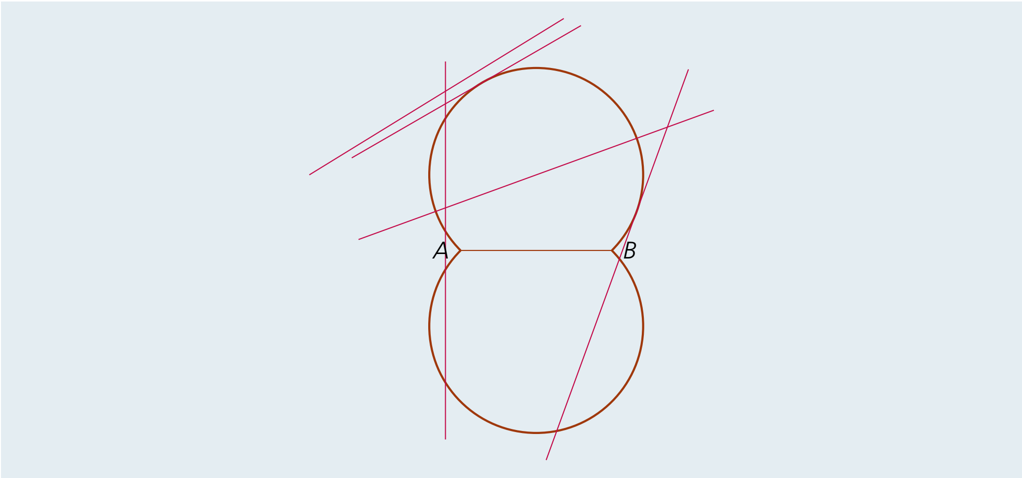
d) A szabályos tizenkétszög egy szöge $\frac{10 \cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$. Egy csúcsból kilenc átló indul, és ezek tíz részre osztják ezt a szöget, tehát az egy csúcsból kiinduló szomszédos átlók által bezárt szög 15°. Az azonos csúcsból induló két átló hajlásszöge $m \cdot 15^\circ$ lehet, ahol m lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

4. K2 Megrajzoltunk egy háromszöget a köré írt körével. A háromszög csúcsai a kör kerületét 4:5:6 arányban osztják három részre. Számítsuk ki a háromszög belső szögeinek nagyságát!

A középponti szögek: $4x$, $5x$, $6x$. Ezekre: $4x + 5x + 6x = 360^\circ$, azaz $x = 24^\circ$. Mivel a középponti szögek: 96°, 120°, 144°, ezért a háromszög szögei (amik ezekhez tartozó kerületi szögek): 48°, 60°, 72°.

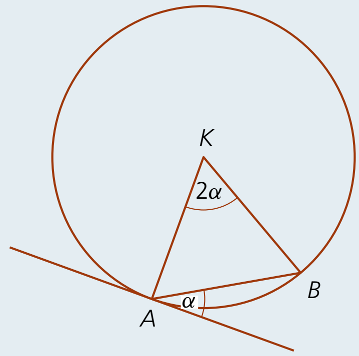
5. K2 Hány közös pontja lehet egy egyenes és egy AB szakasz γ szögű látószögkörívének?

Lehet: 0, 1, 2, 3, 4, az ábra mutat egy-egy példát.



6. E1 Igazoljuk, hogy egy körben az azonos ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög az ugyanehhez az ívhez tartozó középponti szög felével egyenlő.

Mivel $KAB\sphericalangle = KBA\sphericalangle = 90° - \alpha$, ezért valóban az A csúcsnál lévő érintőszárú kerületi szög az ugyanehhez az ívhez tartozó középponti szög felével egyenlő.



13. Húrnégyszögek

1. K1 Soroljuk fel azokat a négyszögeket, amelyek húrnégyszögek is!

Négyzet, téglalap, húrtrapéz, derékszögű deltoid.

2. K1 Igazoljuk, hogy a rombuszok közül csak a négyzet lehet húrnégyszög!

Tudjuk, hogy egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha két szemközti szögének összege 180°. Ha a rombusz két szemközti szöge hegyes, akkor a másik kettő tompa. Ezért csak akkor teljesül a tételben megfogalmazott feltétel, ha a két-két szemközti szög 90°-os. Vagyis a négyszög négyzet.

3. K2 Egy húrnégyszögben valamely három szög aránya
a) 3:4:5; *b)* 4:5:6.
Mekkorák lehetnek a négyszög szögei?

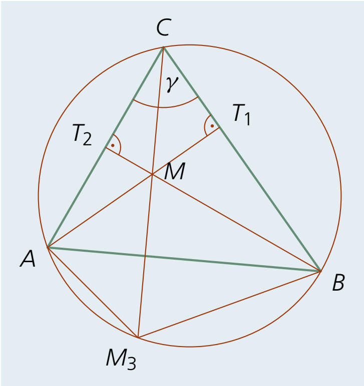
a) A húrnégyszög szemben fekvő szögeinek összege 180°. A kiválasztott szögek háromféleképpen helyezkedhetnek el egymáshoz képest.

I. eset: 3φ és 4φ fekszik egymással szemben. Ekkor $\varphi = \frac{180°}{7}$.

A húrnégyszög szögei: $3\varphi = 3 \cdot \frac{180°}{7} \approx 77{,}14°$, $4\varphi = 4 \cdot \frac{180°}{7} \approx 102{,}86°$, $5\varphi = 5 \cdot \frac{180°}{7} \approx$
$\approx 128{,}57°$ és a negyedik szög $180° - 128{,}57° = 51{,}43°$.
II. eset: 3φ és 5φ fekszik egymással szemben. Ekkor $\varphi = 22{,}5°$.
A húrnégyszög szögei: $3\varphi = 3 \cdot 22{,}5° = 67{,}5°$, $5\varphi = 5 \cdot 22{,}5° = 112{,}5°$, $4\varphi = 4 \cdot 22{,}5° =$
$= 90°$ és a negyedik szög $180° - 90° = 90°$.
III. eset: 4φ és 5φ fekszik egymással szemben. Ekkor $\varphi = 20°$.
A húrnégyszög szögei: $4\varphi = 4 \cdot 20° = 80°$, $5\varphi = 5 \cdot 20° = 100°$, $3\varphi = 3 \cdot 20° = 60°$ és a negyedik szög 180° – 60° = 120°.

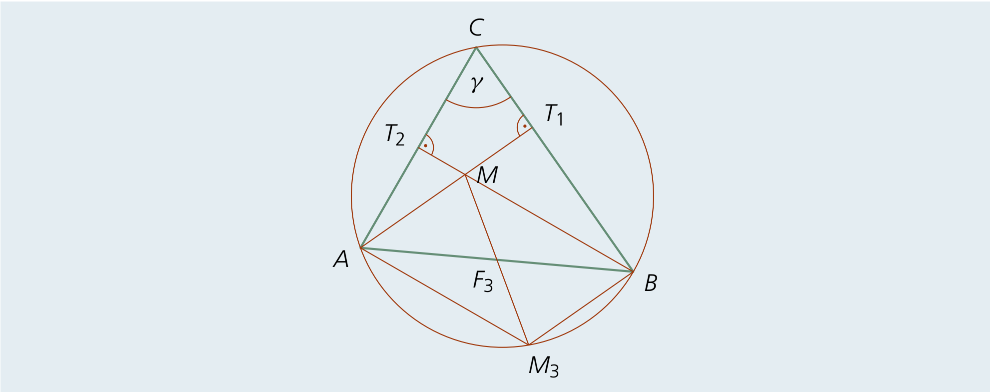
b) Ez előző feladat gondolatmenetét követjük.
I. eset: 4φ és 5φ fekszik egymással szemben.
A húrnégyszög szögei: 80°, 100°, 60°, 120°.
II. eset: 4φ és 6φ fekszik egymással szemben.
A húrnégyszög szögei: 72°, 108°, 90°, 90°.
III. eset: 5φ és 6φ fekszik egymással szemben.
A húrnégyszög szögei: kb. 81,82°, kb. 98,18°, kb. 65,45°, 114,55°.

4. K2 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontjának az
a) oldalakra;
b) oldalfelező pontokra
vonatkozó tükörképei a háromszög köré írt körén vannak.



a) Készítsünk ábrát és használjuk az ábra jelöléseit!
A CT_1MT_2 négyszög húrnégyszög mert két szemközti szögének összege 180°. Ezért a másik két szemközti szögének összege is 180°, vagyis $T_1MT_2\sphericalangle = 180° - \gamma$. $T_1MT_2\sphericalangle = AMB\sphericalangle$, mert csúcsszögek. Az AB egyenesre M pontot tükrözve kapjuk az M_3 pontot. A tükrözés miatt $AMB\sphericalangle = AM_3B\sphericalangle$, vagyis $AM_3B\sphericalangle = 180° - \gamma$. Beláttuk, hogy $ACBM_3$ négyszögben a C csúcsnál és az M_3 csúcsnál lévő két szög összege 180°. Vagyis ez húrnégyszög. Ez azt jelenti, hogy M_3 rajta van az ABC háromszög köré írt körén.

b) Készítsünk ábrát! A bizonyítást az előzőhöz hasonlóan végezzük el.

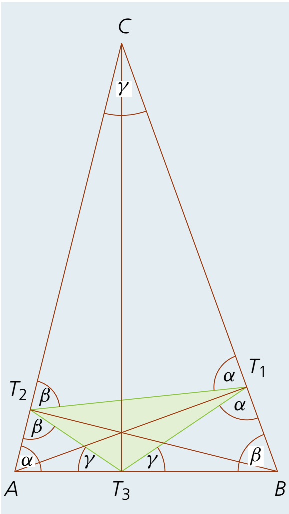


5. E1 Az ABC hegyesszögű háromszög A csúcsból induló magasság talppontja T_1, B csúcsból induló magasság talppontja T_2. Bizonyítsuk be, hogy a T_1T_2C háromszög hasonló az ABC háromszöghöz!

Az AB szakasz Thálesz-körére illeszkedik a két talppont, ezért ABT_1T_2 húrnégyszög. Vagyis a T_2-nél lévő külső szög nagysága egyenlő a B-nél lévő belső szögével. (Hasonlóan a T_1-nél lévő külső szög nagysága egyenlő az A-nál lévő belső szögével.) A megfelelő szögek egyenlősége miatt: $ABC_\triangle \sim T_1T_2C_\triangle$.

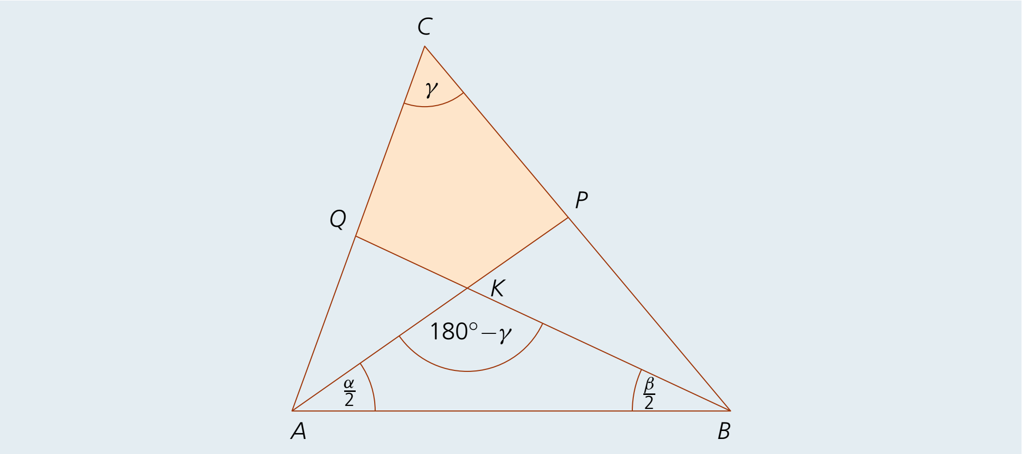
6. E1 Egy háromszög szögei: 34°, 70°, 76°. Számítsuk ki a három magasságtalppontja által meghatározott háromszög (a talpponti háromszög) szögeinek nagyságát!

Az ABC háromszögben az A-ból és B-ből induló magasságok talppontja T_1, illetve T_2. Az ABT_1T_2 húrnégyszög, mert T_1 és T_2 rajta van az AB Thálesz-körén. Mivel húrnégyszög, ezért T_1-nél α, T_2-nél β külső szög található. Ezt alkalmazzuk a BCT_2T_3 és a CAT_3T_1 húrnégyszögekre is. A kapott szögeket az ábrán láthatjuk.
Vagyis a talpponti háromszög belső szögei: $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$, $180° - 2\gamma$.
A megadott adatokkal: 112°, 40°, 28°.



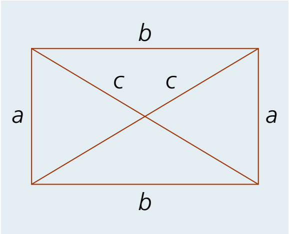
7. E2 Az ABC háromszögben megrajzoltuk az A és a B csúcsból induló két szögfelezőt. Ha a beírt kör középpontja, a két szögfelező szemközti oldallal alkotott metszéspontja, valamint a C csúcs húrnégyszöget alkot, akkor mekkora a háromszög C csúcsánál lévő szög nagysága?

Az ABC háromszögben az A és a B csúcsból induló két szögfelező a szemközti oldalt a P és a Q pontokban metszi. A beírt kör középpontja legyen K.



Tudjuk a feladat szövege szerint, hogy most a $CQKP$ húrnégyszöget alkot, ezért $QKP\sphericalangle = 180° - \gamma$. Az $AKB\sphericalangle = 180° - \gamma$, mert $QKP\sphericalangle$ és $AKB\sphericalangle$ csúcsszögek. Az AKB háromszögben a belső szögek összege: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 180° - \gamma = 180°$, azaz $\alpha + \beta = 2\gamma$. Ebből következik, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 3\gamma$, ami szerint $3\gamma = 180°$. Ezek alapján a háromszög C csúcsánál lévő szöge 60°.

8. E1 Alkalmazzuk téglalapra a Ptolemaiosz-tételt! Milyen összefüggést kapunk?



A Ptolemaiosz-tétel alapján tudjuk, hogy a húrnégyszögek átlóinak szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatának összegével.
Téglalap esetén: $c^2 = a^2 + b^2$. Ez a Pitagorasz-tétel.

9. E1 Egy húrtrapéz alapjai a és c, a szára b, az átlója e hosszúságú. Igazoljuk, hogy az a és c oldallal megadott téglalap területe egyenlő az $e - b$ és $e + b$ oldallal megadott téglalap területével!

Alkalmazzuk a Ptolemaiosz-tételt: $e^2 = ac + b^2$, amit $e^2 - b^2 = ac$, azaz $(e - b)(e + b) = ac$ alakban is írhatunk. Ez pedig a bizonyítandó állítást jelenti.

14. Érintőnégyszögek

1. K1 Soroljuk fel azokat a négyszögeket, amelyek érintőnégyszögek is!

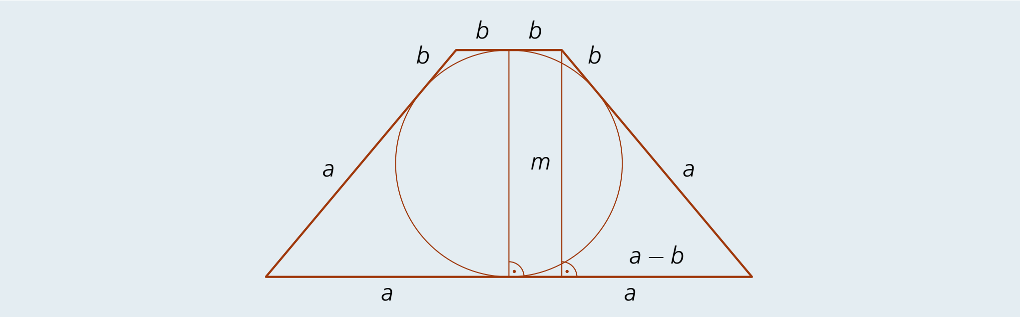
Négyzet, rombusz, konvex deltoid.

2. K1 Egy érintőnégyszög három oldala ebben a sorrendben: a, b, c. Mekkora a negyedik oldala?

A negyedik oldal legyen x. Ekkor $a + c = b + x$, vagyis $x = a + c - b$.

3. K2 Bizonyítsuk be, hogy ha egy húrtrapéz érintőnégyszög, akkor a magassága a két párhuzamos oldalának a mértani közepe!

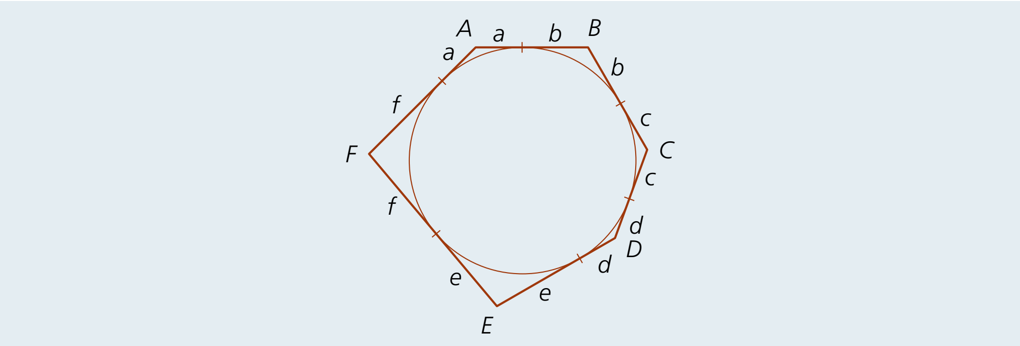
Készítsünk ábrát és használjuk az ábra jelöléseit!



A Pitagorasz-tétel szerint: $m^2 + (a - b)^2 = (a + b)^2$, amiből $m = \sqrt{2a \cdot 2b}$.
Valóban, ha egy húrtrapéz érintőnégyszög, akkor a magassága a két párhuzamos oldalának a mértani közepe.

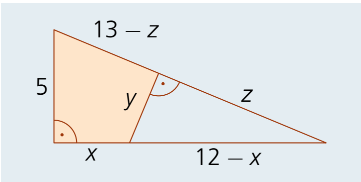
4. K2 Az *ABCDEF* hatszögnek van beírt köre. Igazoljuk, hogy ekkor:
$AB + CD + EF = BC + DE + FA$.

Tudjuk, hogy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. Ábránkon az egyenlő szakaszokat bejelöltük.



$AB + CD + EF = a + b + c + d + e + f$, $\quad BC + DE + FA = b + c + d + e + f + a$.
Ezzel igazoltuk az állítást.

5. E1 Az 5, 12, 13 oldalhosszúsággal adott derékszögű háromszöget az átfogójára merőleges egyenessel szétvágjuk egy érintőnégyszögre és egy derékszögű háromszögre. Határozzuk meg a négyszög oldalainak hosszát!



I. eset:
A két derékszögű háromszög hasonlóságából:

$$\frac{y}{5} = \frac{12 - x}{13}, \qquad \text{azaz} \qquad y = \frac{5(12 - x)}{13}.$$

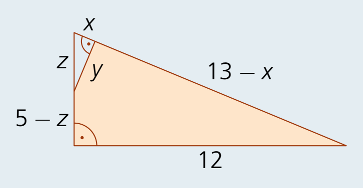
$$\frac{z}{12} = \frac{12 - x}{13}, \qquad \text{azaz} \qquad z = \frac{12(12 - x)}{13}.$$

A húrnégyszögben az oldalakra:

$$5 + y = x + (13 - z), \qquad \text{azaz} \qquad 5 + \frac{5(12 - x)}{13} = x + \left(13 - \frac{12(12 - x)}{13}\right).$$

Ebből $x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{10}{3}$, $z = 8$.

A négyszög oldalainak hossza: $\frac{10}{3}$, $\frac{10}{3}$, 5 és 5.



II. eset:

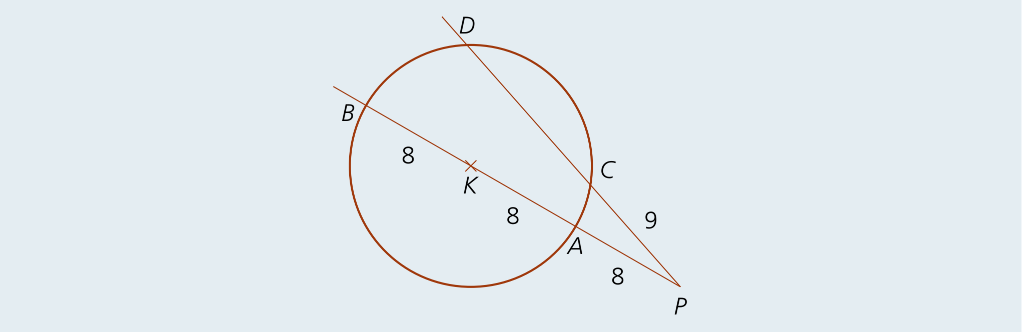
Az előzőekhez hasonlóan járunk el. Kapjuk, hogy $x = 1$, $y = \frac{12}{5}$, $z = \frac{13}{5}$.

A négyszög oldalainak hossza: 12, 12, $\frac{12}{5}$, $\frac{12}{5}$.

15. Körhöz húzott szelők és érintők

1. K2 A 8 cm sugarú körhöz a középpontjától 16 cm távolságban lévő *P* pontból olyan szelőt húzunk, amelyen a rövidebb szelőszakasz 9 cm hosszú. Milyen hosszú a másik szelőszakasz?

Tudjuk, hogy a körhöz egy külső pontból húzott szelőkön a szelőszakaszok szorzata állandó.

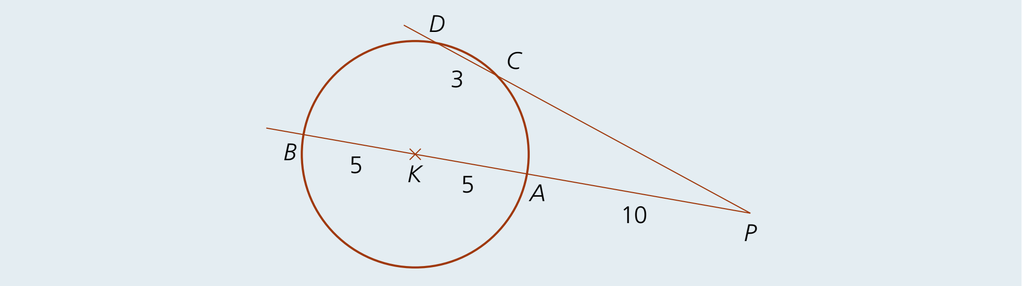


Vagyis: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, a mostani adatokkal: $8 \cdot 24 = 9 \cdot PD$.

A keresett szelőszakasz hossza: $PD = \frac{64}{3}$ cm.

2. K2 Az 5 cm sugarú körhöz a középpontjától 15 cm távolságban lévő *P* pontból olyan szelőt húzunk, amelyből a kör 3 cm hosszúságú húrt vág ki. Milyen hosszú a rövidebb szelőszakasz?

Tudjuk, hogy a körhöz egy külső pontból húzott szelőkön a szelőszakaszok szorzata állandó.



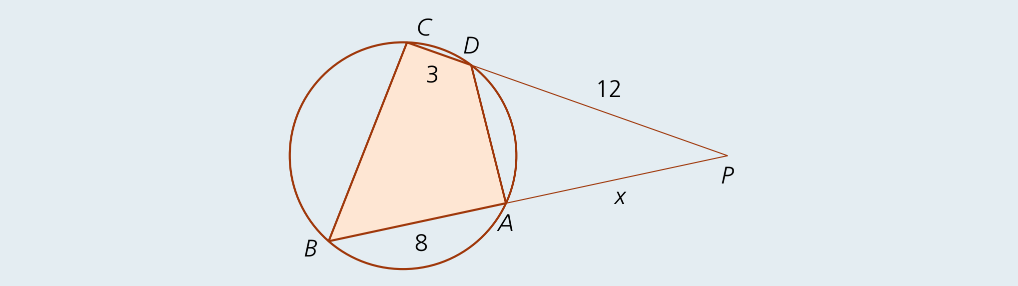
Vagyis: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, a feladatban szereplő adatokkal: $10 \cdot 20 = PC \cdot (PC + 3)$.

Az így kapott másodfokú egyenlet pozitív megoldása: $PC = \frac{-3 + \sqrt{809}}{2}$.

A keresett szelőszakasz hossza kb. 12,72 cm.

3. K2 Egy húrnégyszög 3 cm és 8 cm hosszú oldalának meghosszabbítása a köré írt körén kívül metszi egymást. A metszésponttól 15 cm-re van a rövidebb oldal távolabbi csúcsa. Milyen messze van a metszésponttól a hosszabb oldal távolabbi csúcsa?

A szöveg alapján a következő ábrát készíthetjük el:

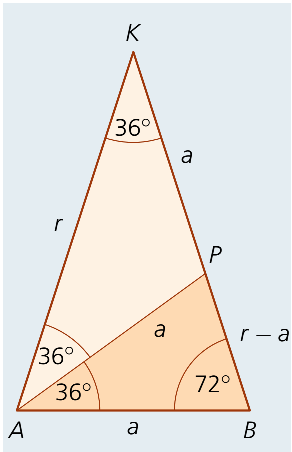


Tudjuk, hogy $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, azaz: $x \cdot (x+8) = 12 \cdot 15$.
Egyedüli pozitív gyök az $x = 10$.
Vagyis 18 cm-re van a metszésponttól a hosszabb oldal távolabbi csúcsa

4. E1 Az *ABCD* húrnégyszögben az átlók metszéspontja legyen *M*. Tudjuk, hogy $AM = 3$, $BM = 4$, $CM = 8$. Adjuk meg az átlók hosszát!

Tudjuk, hogy $AM \cdot CM = BM \cdot DM$, azaz $3 \cdot 8 = 4 \cdot DM$. Ezek alapján: $DM = 6$.
Az átlók hossza: 11 cm és 10 cm.

5. E1 Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tízszög oldala a köré írt kör sugarának aranymetszetével egyenlő!



A szabályos tízszög a köré írt kör *K* középpontjából tíz egybevágó egyenlő szárú háromszögre vágható. Egy ilyen háromszög alapja lesz a szabályos tízszög oldala, a szára lesz a szabályos tízszög köré írt körének sugara, a szárak által bezárt szög pedig 36°.

Az *A*-ból induló szögfelezőt berajzoltuk, megállapításainkat rögzítettük az ábrán. A szögek alapján megállapítható, hogy $ABK_\triangle \sim BPA_\triangle$.

Vagyis: $\frac{a}{r} = \frac{r-a}{a}$.

Ez pedig a bizonyítandó állítást jelenti.

16. Hasonló síkidomok területe

1. K1 Hogyan változtatja meg a síkidomok területét a

a) $\lambda = 4$; *b)* $\lambda = \frac{1}{3}$; *c)* $\lambda = 1{,}1$; *d)* $\lambda = \frac{2}{5}$

arányú hasonlósági transzformáció?

a) 16-szorosára; *b)* kilencedére; *c)* 1,21-szorosára; *d)* $\frac{4}{25}$-szörösére.

2. K1 Milyen pozitív arányú hasonlósági transzformáció változtatja egy síkidom területét az

a) ötszörösére; *b)* negyedére; *c)* $\frac{2}{9}$-ére; *d)* $\frac{7}{3}$-szorosára?

a) $\lambda = \sqrt{5}$; *b)* $\lambda = \frac{1}{2}$; *c)* $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}$; *d)* $\lambda = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

3. K2 Egy termet terveink szerint 480 darab burkolólappal lehetne burkolni.

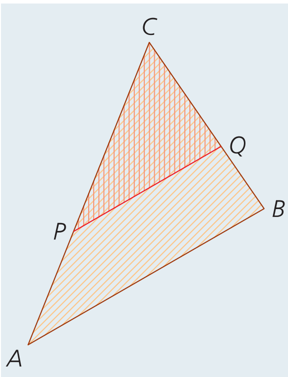
a) A tervezett lapokhoz hasonló lapokból 214 darabbal megoldható a burkolás. A tervezett és a felhasznált burkolólapok között milyen arányú a hasonlóság?

b) Hány darabot vásároljunk a tervezetthez hasonló, és 0,8-szer kisebb hosszméretű lapokból? (Az esetleges hulladékkal most ne számoljunk!)

a) Ha a terem területe x, akkor az eredetileg tervezett burkolólap területe $\frac{x}{480}$, a lerakott lapok közül egynek a területe $\frac{x}{214}$.

A területek arányának négyzetgyöke adja a hasonlóság arányát: $\sqrt{\frac{x}{214} : \frac{x}{480}} \approx 1{,}5$.

b) A burkolólapok megfelelő oldalainak aránya $\frac{4}{5}$, emiatt az új lapok darabonként az eredeti lapok területének $\frac{16}{25}$-ét fedik, tehát az eredeti 480 db helyett $480 : \frac{16}{25} = 750$ darabot kell vásárolnunk.



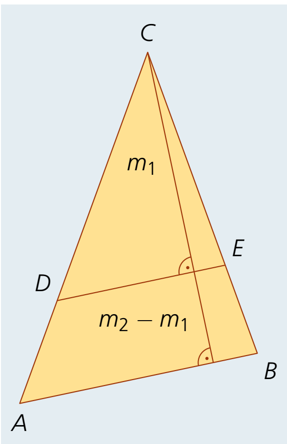
4. K2 Az ábrán látható háromszöget az $AB = 24$ cm hosszú oldalával párhuzamos $PQ = 15$ cm-es szakasz egy trapézra és egy háromszögre vágja.
Hogyan aránylik egymáshoz a két síkidom területe?

A megfelelő szögek egyenlősége miatt $ABC_\triangle \sim PQC_\triangle$.

Tudjuk a megadott adatok alapján, hogy a hasonlóság aránya: $\frac{PQ}{AB} = \frac{15}{24}$, azaz $\frac{PQ}{AB} = \frac{5}{8}$.

A két hasonló háromszög területének aránya: $\frac{t}{T} = \frac{25}{64}$. Azaz $t = 25q$, $T = 64q$, ahol q az arányossági tényező. Ezek szerint $T - t = 64q - 25q = 39q$.

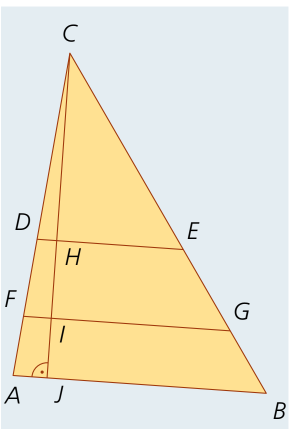
A két síkidom területének aránya: $\frac{25}{39}$.



5. K2 Egy háromszög alakú virágágyást az egyik oldalával párhuzamos egyenessel két egyenlő területű részre szeretnénk osztani. Milyen arányban osztja ez a párhuzamos az oldalhoz tartozó magasságot?

Tudjuk, hogy $\frac{t_{CDE}}{t_{CAB}} = \frac{1}{2}$. Ekkor a hasonlóság aránya: $\frac{1}{\sqrt{2}}$. A megfelelő háromszögek magasságainak is ez az aránya: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vagyis $\frac{m_1}{m_2 - m_1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.



6. K2 Egy háromszöget a 24 cm hosszú magasságára merőleges egyenesekkel három egyenlő területű részre vágtunk. Milyen darabokra vágják ezek az egyenesek a magasságot?

A párhuzamos oldalak miatt $DEC_\triangle \sim ABC_\triangle$, $FGC_\triangle \sim ABC_\triangle$ (a szögek páronként egyenlők).
A hasonlóság aránya $\sqrt{\frac{1}{3}}$, illetve $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

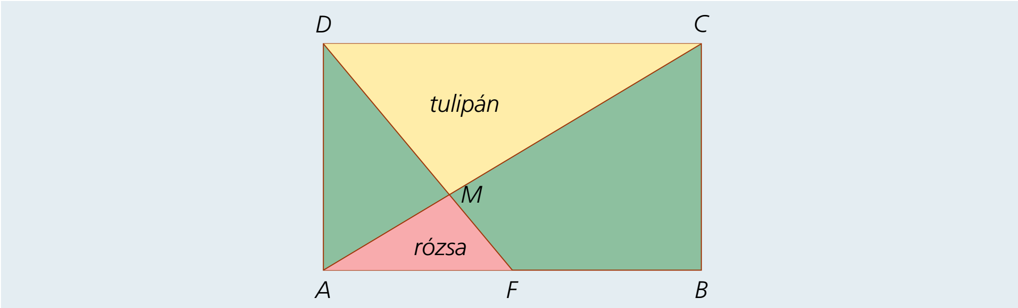
Így $CH = CJ\sqrt{\frac{1}{3}} = 24 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 8 \cdot \sqrt{3}$, $CI = CJ\sqrt{\frac{2}{3}} = 24 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 8 \cdot \sqrt{6}$.

Vagyis $CH = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86$ (cm), $HI = 8(\sqrt{6} - \sqrt{3}) \approx 5{,}74$ (cm), $IJ = 24 - 8\sqrt{6} \approx 4{,}40$ (cm).

7. K2 Az $ABCD$ téglalap alakú virágültetvény AB oldalának felezőpontja F. Az AC és FD szakaszok metszéspontja M. Az AFM háromszög alakú területet rózsával ültették be; ennek területe 400 m². Az MCD háromszög alakú területet pedig tulipánnal ültették be.

a) Mekkora a területe a tulipánnal beültetett résznek?

b) Mekkora a téglalap alakú virágültetvény területe?



a) Látható, hogy $AFM_{\triangle} \sim CDM_{\triangle}$, mert a szögeik páronként egyenlők. A hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, hiszen F az AB oldal felezőpontja, így $AF:CD = 1:2$.
A hasonló síkidomok területe a hasonlóság arányának négyzetével arányos, ezért az $AFM_{\triangle}$ területe negyede a $CDM_{\triangle}$ területének.
Ezért a tulipánnal beültetett rész területe $4 \cdot 400$, azaz 1600 m².

b) Az AMD és az MCD háromszögek D-ből induló magassága megegyezik. Az előző részben leírt hasonlóság miatt $AM:MC = 1:2$, vagyis $MC = 2 \cdot AM$. Ezek alapján az AMD háromszög területe fele az MCD háromszög területének. Mivel MCD háromszög területét 1600 m²-nek számoltuk, ezért AMD háromszög területe 800 m². Ezek szerint az ACD háromszög területe (azaz a téglalap felének a területe) 2400 m².
Vagyis a téglalap alakú virágültetvény területe 4800 m².

17. Hasonló testek térfogata

1. K1 Hogyan változtatja meg a testek térfogatát a

a) $\lambda = 2$; *b)* $\lambda = \frac{1}{3}$; *c)* $\lambda = \frac{4}{3}$; *d)* $\lambda = \frac{3}{5}$

arányú hasonlósági transzformáció?

a) 8-szorosára; *b)* 27-ederé; *c)* $\frac{64}{27}$-ére; *d)* $\frac{27}{125}$-ére.

2. K1 Milyen pozitív arányú hasonlósági transzformáció változtatja a testek térfogatát a

a) kétszeresére; *b)* huszonhetedére; *c)* $\frac{27}{8}$-ára; *d)* felére?

a) $\lambda = \sqrt[3]{2}$; *b)* $\lambda = \frac{1}{3}$; *c)* $\lambda = \frac{3}{2}$; *d)* $\lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

3. K2 Egy üdítőitalt 34 cm magas 2 literes palackokban árusítanak. Milyen magasságúak a 0,5 literes és az 1 literes palackok, ha a háromféle palack hasonló egymáshoz?

Legyen a 0,5 literes palack m_1, az 1 literes pedig m_2 magasságú. Ekkor a hasonló testek térfogatára tanult tétel alapján:

$\left(\frac{m_1}{34}\right)^3 = \frac{0,5}{2}$, ebből $m_1 \approx 21,4$ (cm).

A másik magasság esetén:

$\left(\frac{m_2}{34}\right)^3 = \frac{1}{2}$, ebből $m_2 \approx 27,0$ (cm).

4. K2 Egy m magasságú gúlát a magasságának felezőpontjára illeszkedő és az alaplappal párhuzamos síkkal két részre vágtuk. Milyen arányú lesz a két rész térfogata?

A két hasonló gúla esetén a hasonlóság aránya: $\frac{1}{2}$, a térfogatok aránya: $\frac{1}{8}$.

Azaz a két rész térfogatának aránya: $\frac{1}{7}$.

5. K2 Egy téglatest minden élhosszának a $\frac{8}{27}$-szeresét vesszük. Hányszorosa lesz az új élekkel kapott téglatest felszíne, térfogata, testátlója az eredetihez képest?

A hasonlóság aránya: $\frac{8}{27}$.

A felszínek aránya: $\frac{A'}{A} = \frac{64}{729}$, mert a hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével arányos.

A térfogatok aránya: $\frac{V'}{V} = \frac{512}{19\,683}$, mert a hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével arányos.

A testátlók aránya: $\frac{d'}{d} = \frac{8}{27}$, mert a megfelelő szakaszok hosszának aránya a hasonlóság arányával arányos.

V Trigonometria

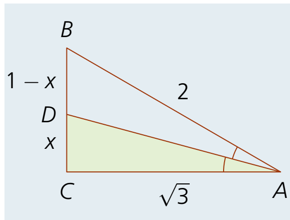
1. Távolságok meghatározása arányokkal

1. K1 Határozzuk meg a
a) 30°-os; *b)* 45°-os
derékszögű háromszögben az oldalak arányát!

a) Legyen a rövid befogó hossza a, ekkor tudjuk, hogy az átfogó $2a$, a hosszabb befogó pedig a Pitagorasz-tétel alapján $\sqrt{3}a$.
Vagyis az oldalak aránya: $a:b:c = 1:\sqrt{3}:2$.
b) Legyen a befogó hossza a, ekkor tudjuk, hogy az átfogó a Pitagorasz-tétel alapján $\sqrt{2}a$.
Vagyis az oldalak aránya: $a:b:c = 1:1:\sqrt{2}$.

2. E1 Határozzuk meg a 15°-os derékszögű háromszögben az oldalak arányát!

Nézzünk egy 30°-os derékszögű háromszöget, amelyben az oldalak hossza: 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$.
A 30°-os szög szögfelezője a szemközti oldalt x és $1 - x$ hosszúságú darabra vágja.
A szögfelező osztásarányára vonatkozó tétel szerint: $\frac{x}{1-x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $2x = \sqrt{3} - \sqrt{3}x$, azaz
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{1} = 2\sqrt{3} - 3.$$
Az ACD derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:
$$AD = \sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{24 - 12\sqrt{3}}.$$
Vagyis az oldalak aránya: $AC:CD:DA = \sqrt{3}:(2\sqrt{3}-3):\sqrt{24-12\sqrt{3}}$.



3. K1 Szögmérő és vonalzó segítségével rajzoljunk
a) 25°-os; *b)* 40°-os; *c)* 70°-os
derékszögű háromszöget. Méréssel és számítással határozzuk meg a szöggel szemközti befogó és az átfogó arányának közelítő értékét!

A rajzok elkészítése után a megfelelő szakaszok hosszát megmérve a kapott értékek:
a) kb. 0,4;
b) kb. 0,6;
c) kb. 0,9.

4. K2 Egy vízszintes réten áll egy magas fa. A fától 30 méterre egy 1,8 m magas férfi 18°-os emelkedési szögben látja a fa tetejét. Rajz és mérés segítségével adjuk meg a fa magasságát!

Az elkészített rajzon méréssel kapjuk, hogy a fa magassága kb. 11,5 méter.
(A rajz méretaránya lehet 1:100, vagyis ami a valóságban 1 méter az a rajzon 1 cm.)

2. Hegyesszögek szögfüggvényei

1. K1 Számológép segítségével határozzuk meg a
a) sin 16°; *b)* cos 72°; *c)* tg 87°; *d)* ctg 67°
értékét öt tizedesjegy pontossággal!

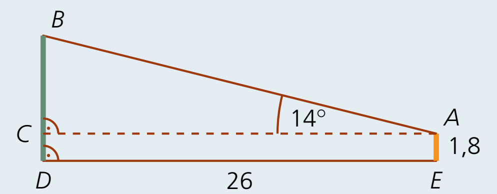
a) $\sin 16° \approx 0{,}27564$; *c)* $\operatorname{tg} 87° \approx 19{,}08114$;
b) $\cos 72° \approx 0{,}30902$; *d)* $\operatorname{ctg} 67° \approx 0{,}42447$.

2. K1 Számológép segítségével határozzuk meg az α hegyesszög nagyságát négy tizedesjegy pontossággal, ha
a) $\sin \alpha = 0{,}42$; *b)* $\cos \alpha = 0{,}75$; *c)* $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}4$; *d)* $\operatorname{ctg} \alpha = 1{,}25$.

a) $\alpha \approx 24{,}8346°$; *c)* $\alpha \approx 54{,}4623°$;
b) $\alpha \approx 41{,}4096°$; *d)* Ha $\operatorname{ctg} \alpha = 1{,}25$, akkor $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}8$, vagyis $\alpha \approx 38{,}6598°$.

3. K2 Egy ház falától egy 180 cm magas ember a szemközti ház tetejét 14°-os emelkedési szögben látja. A két ház között a távolság 26 méter. Milyen magas a szemközti ház?

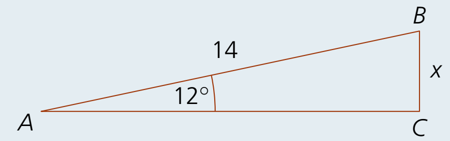
A feladat szövege alapján vázlatrajzot készítünk, és használjuk az ábra jelöléseit!



Az ABC derékszögű háromszögben felírhatjuk, hogy $\operatorname{tg} 14° = \frac{BC}{26}$,
azaz $BC = 26 \cdot \operatorname{tg} 14° \approx 6{,}5$.
Vagyis $DB = DC + CB = 6{,}5 + 1{,}8 = 8{,}3$.
A ház magassága kb. 8,3 méter.

4. K2 Egy garázshoz vezető emelkedő hossza 14 méter, az emelkedési szöge 12°-os. Milyen magason van a garázs az emelkedő aljához képest?

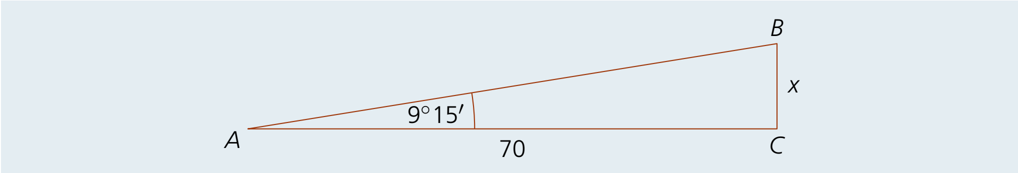
A vázlatrajz jelöléseit használjuk!



Felírhatjuk, hogy $\sin 12° = \frac{x}{14}$, azaz $x = 14 \cdot \sin 12° \approx 2{,}9$.
A garázs az emelkedő aljához képest kb 2,9 méter magasan van.

5. K2 Milyen magasra visz az a lejtő, amelynek emelkedési szöge 9°15′, és a vízszintes síkon lévő vetülete 70 méter?

A vázlatrajz jelöléseit használjuk!

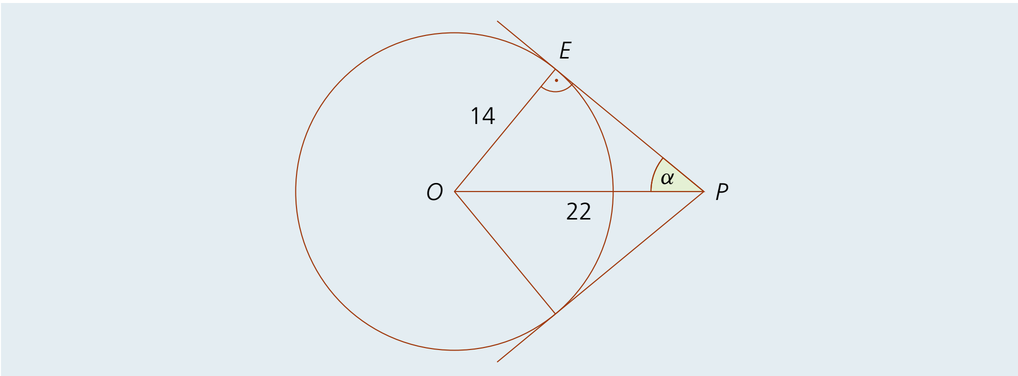


Tudjuk, hogy 9°15′ = 9,25°. Felírhatjuk, hogy $\mathrm{tg}\, 9{,}25° = \frac{x}{70}$, azaz $x = 70 \cdot \mathrm{tg}\, 9{,}25° \approx 11{,}4$.

A lejtő kb 11,4 méter magasra visz.

6. K2 A 14 cm sugarú kör középpontjától 22 cm távolságra lévő pontból két érintőt húzunk a körhöz. Mekkora a két érintő hajlásszöge?

Készítsünk vázlatrajzot!



Az *OPE* derékszögű háromszögben: $\sin \alpha = \frac{14}{22}$, amiből $\alpha \approx 39{,}5°$.

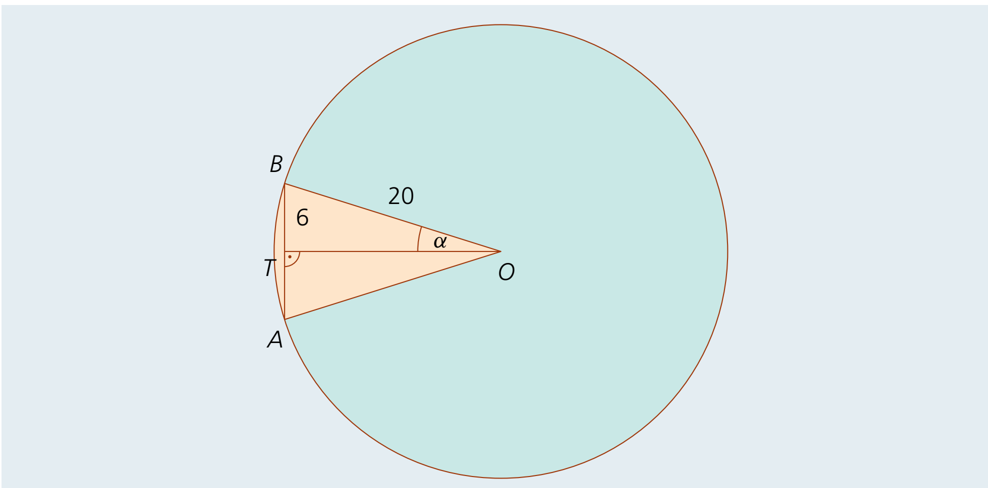
A két érintő hajlásszöge ennek kétszerese, vagyis kb. 79°.

7. K2 A 20 cm sugarú kört 12 cm hosszúságú húrral két körszeletre vágtuk. Számítsuk ki a körszeletek

a) kerületét;

b) területét!

a) A körívek hossza a középpontban lévő szögek nagyságával egyenesen arányos.
Kiszámítjuk az *AOB* szög nagyságát!



Az *OTB* derékszögű háromszögben: $\sin\alpha = \frac{6}{20}$, amiből $\alpha \approx 17{,}46°$, azaz $AOB\sphericalangle \approx 35°$.
Ezek szerint a kör kerületét az *AB* húr 35:325 arányban osztja ketté.
A kör kerülete: $k = 2 \cdot 20 \cdot \pi = 40\pi \approx 125{,}7$.

A kisebb ív hossza: $35 \cdot \frac{125{,}7}{360} \approx 12{,}2$. Vagyis a kis körszelet kerülete: kb. 24,2 cm.

A nagyobb ív hossza: $325 \cdot \frac{125{,}7}{360} \approx 113{,}5$. Vagyis a nagy körszelet kerülete: kb. 125,5 cm.

b) A körcikkek területe a középpontban lévő szögek nagyságával egyenesen arányos.
Mivel $AOB\sphericalangle \approx 35°$, ezért a kör területét az *AO* és *BO* sugár 35:325 arányban osztja ketté.
A kör területe: $t = 20^2 \cdot \pi = 400\pi \approx 1256{,}6$.

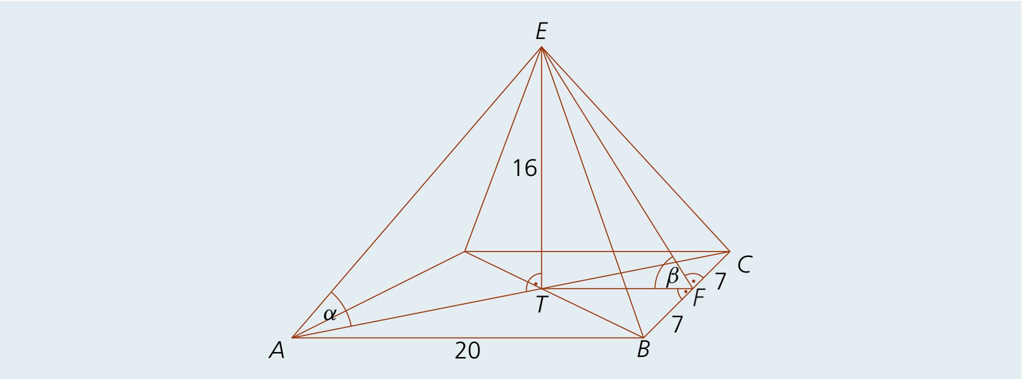
A kisebb körcikk területe: $35 \cdot \frac{1256{,}6}{360} \approx 122{,}2$.

Ha ebből kivonjuk az *AOB* háromszög területét, akkor megkapjuk a kisebb körszelet területét.
Az *AOB* háromszög *AB*-hez tartozó magassága Pitagorasz-tétellel: $OT = \sqrt{20^2 - 6^2} \approx 19{,}1$,
vagyis a háromszög területe: $t = \frac{12 \cdot 19{,}1}{2} \approx 114{,}6$.

A kisebb körszelet területe: 122,2 – 114,6 = 7,6 (cm^2).
A nagyobb körszelet területe: 1256,6 – 7,6 = 1249 (cm^2).

8. K2 Egy téglalap alapú gúla alapéleinek hosszúsága 20 cm és 14 cm, magassága 16 cm, és minden oldaléle egyenlő hosszú. Mekkora szöget zárnak be
a) az oldalélek az alaplappal;
b) az oldallapok az alaplappal?

Készítsünk rajzot!



a) A kérdéses szöget α-val jelöltük.
Az *ATE* derékszögű háromszög *AT* befogója pontosan a fele az *ABC* derékszögű háromszög *AC* átfogójának, amit Pitagorasz-tétellel kiszámítunk: $AT = \frac{\sqrt{20^2 + 14^2}}{2} = \frac{\sqrt{596}}{2} = \sqrt{149}$.

Az *ATE* derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{16}{\sqrt{149}}$, amiből $\alpha \approx 52{,}66°$.

b) A kérdéses szöget β-val jelöltük.
Az *FTE* derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg}\beta = \frac{16}{10}$, amiből $\beta \approx 57{,}99°$.

3. Összefüggések hegyesszögek szögfüggvényei között

1. K1 Adjuk meg, mely hegyesszög koszinuszával egyenlő:
a) sin 43°; *b)* sin 23,6°; *c)* sin 76°45′; *d)* sin 71°12′44″.

a) 47°; *b)* 66,4°; *c)* 13°15′; *d)* 18°47′16″.

2. K1 Adjuk meg, mely hegyesszög kotangensével egyenlő:
a) tg 33°; *b)* tg 42°23′; *c)* tg 63°31′; *d)* tg 22°34′39″.

a) 57°; *b)* 47°37′; *c)* 26°29′; *d)* 67°25′21″.

3. K2 Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\cos 30^\circ + \sin 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$;

b) $\dfrac{\operatorname{ctg} 30^\circ \sin 45^\circ}{\cos 60^\circ}$;

c) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$;

d) $\sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ$.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \sqrt{3} + 1$;

b) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{6}$;

c) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$;

d) 1.

4. K2 Számítsuk ki az

a) $a = 1$, $b = 2$ és $\gamma = 60°$;

b) $a = 3$, $b = 4$ és $\gamma = 45°$;

c) $a = 1$, $b = 2$ és $\gamma = 120°$;

d) $a = 3$, $b = 4$ és $\gamma = 135°$

adatokkal megadott háromszög területét!

Használjuk hegyesszög esetén a $t = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$, tompaszög esetén a $t = \dfrac{ab\sin(180^\circ - \gamma)}{2}$ képletet.

a) $t = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $t = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ}{2} = 3\sqrt{2}$;

c) $t = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot \sin(180^\circ - 120^\circ)}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $t = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot \sin(180^\circ - 135^\circ)}{2} = 3\sqrt{2}$.

5. K2 Egy hegyesszögnek ismerjük az egyik szögfüggvényértékét. Számítsuk ki a hegyesszög többi szögfüggvényének pontos értékét!

a) $\sin\alpha = 0{,}6$; *b)* $\cos\beta = 0{,}75$; *c)* $\operatorname{tg}\gamma = 1{,}5$; *d)* $\operatorname{ctg}\delta = \dfrac{5}{3}$.

a) Tudjuk, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ezért $\cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$.

Tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = \dfrac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{4}{3}$.

b) Az előzőekhez hasonlóan: $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-0{,}75^2} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3},\ \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

c) $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.

Tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{3}{2}$, azaz $\sin\gamma = \frac{3}{2}\cdot\cos\gamma$, és $\sin^2\gamma = 1-\cos^2\gamma$.

Ezek alapján: $\left(\frac{3}{2}\cdot\cos\gamma\right)^2 = 1-\cos^2\gamma$, amiből: $\cos^2\gamma = \frac{4}{13}$.

Mivel a hegyesszögek szögfüggvényei pozitív valós számok, ezért $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy $\sin\gamma = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

d) $\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\delta} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$.

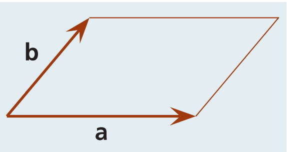
Tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{3}{5}$, azaz $\sin\delta = \frac{3}{5}\cdot\cos\delta$, és $\sin^2\delta = 1-\cos^2\delta$.

Ezek alapján: $\left(\frac{3}{5}\cdot\cos\delta\right)^2 = 1-\cos^2\delta$, amiből: $\cos^2\delta = \frac{25}{34}$.

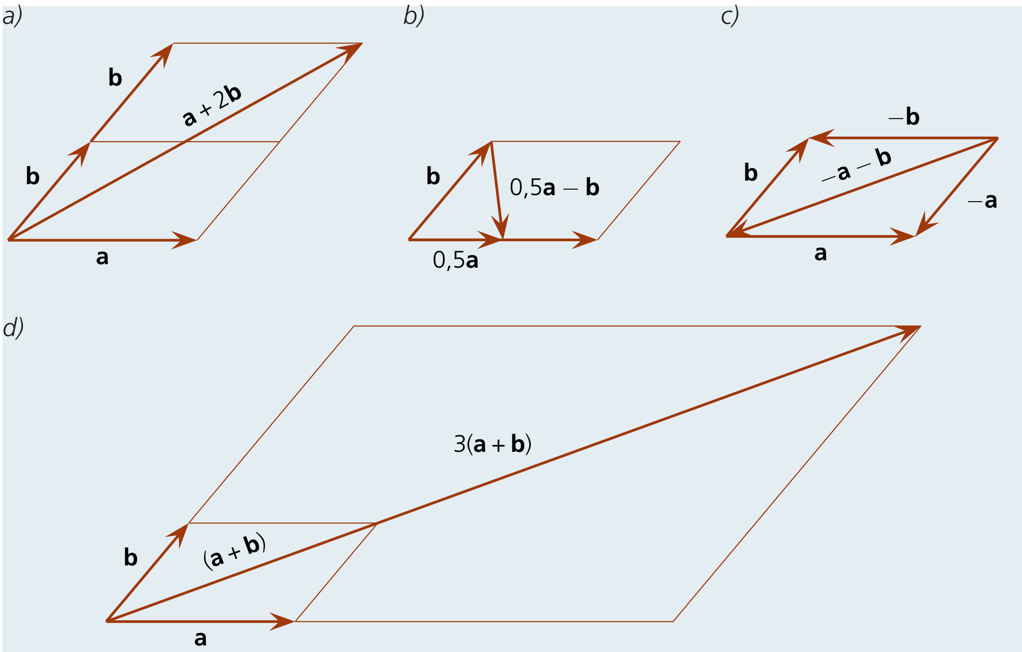
Mivel a hegyesszögek szögfüggvényei pozitív valós számok, ezért $\cos\delta = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$.

Visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy $\sin\delta = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$.

4. Vektorok



1. K1 Az ábrán látható ***a*** és ***b*** vektor segítségével adjuk meg az
a) ***a*** + 2***b***; *b)* 0,5***a*** – ***b***; *c)* –***a*** – ***b***; *d)* 3(***a*** + ***b***)
vektorokat.

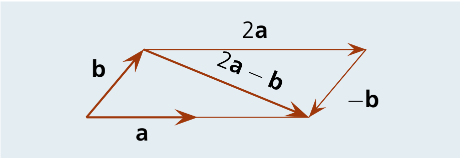


2. K2 Adjuk meg az adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációját a λ_1 és λ_2 valós számokkal, ha

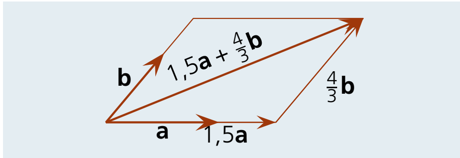
a) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$; *b)* $\lambda_1 = 1{,}5$, $\lambda_2 = \frac{4}{3}$.

Vegyük fel az adott két vektort! Az ábra mutatja a $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$ vektort.

a)

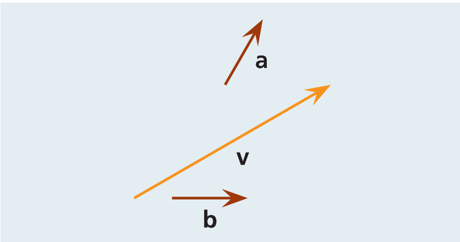


b)

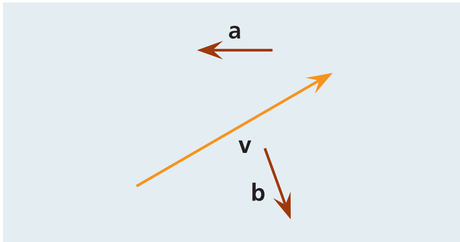


3. K2 Adjuk meg a $\mathbf{v}$ vektornak az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokkal egyállású összetevőit!

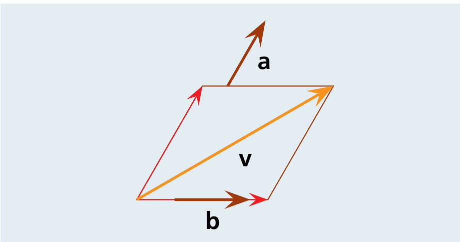
a)



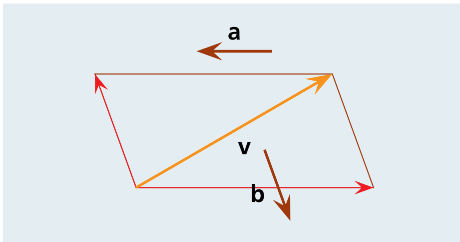
b)



a)

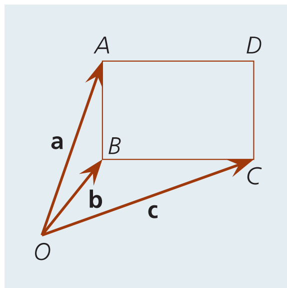


b)



4. K2 Az ábrán látható $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ helyvektorok segítségével adjuk meg a következő vektorokat.

a) $\overrightarrow{BA}$; *b)* $\overrightarrow{AD}$; *c)* $\overrightarrow{DC}$; *d)* $\overrightarrow{OD}$.



a) $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$;

b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$;

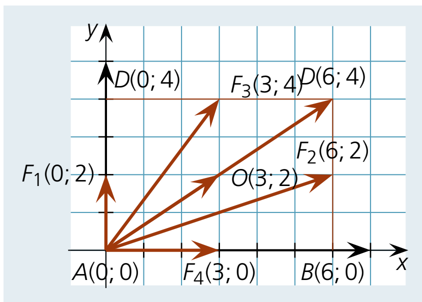
c) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$;

d) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$.

5. K1 Egy téglalap három csúcsa az origóban, továbbá a (6; 0) és a (0; 4) koordinátájú pontokban van. Adjuk meg

a) a negyedik csúcshoz *b)* a középpontjához *c)* az oldalak felezőpontjához

tartozó helyvektor koordinátáit!



Készítsünk ábrát!

a) (6; 4); *b)* (3; 2); *c)* (3; 0), (6; 2), (3; 4), (0; 2).

6. K1 Adjuk meg a hosszát a következő vektoroknak!

a) $\overrightarrow{OA}(5; 12)$; *b)* $\overrightarrow{OB}(-3; -4)$; *c)* $\overrightarrow{OC}(-2; 2)$; *d)* $\overrightarrow{OD}\left(\frac{2}{3}; 3\right)$.

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

a) $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

b) $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

c) $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

d) $|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{85}}{3}$.

5. A szögfüggvények általánosítása

1. K1 Számológép segítségével adjuk meg négy tizedesjegy pontossággal:
a) sin 110°; *b)* sin (–1327°) *c)* cos 200°; *d)* cos 1020°;
e) tg 226°; *f)* tg (–2028°); *g)* ctg 340° *h)* ctg (–6000°).

a) sin 110° ≈ 0,9397; *b)* sin (–1327°) ≈ 0,9205;
c) cos 200° ≈ –0,9397; *d)* cos 1020° = 0,5;
e) tg 226° ≈ 1,0355; *f)* tg (–2028°) ≈ –1,1106;
g) ctg 340° ≈ –2,7475; *h)* ctg (–6000°) ≈ –0,5774.

2. K1 A következő szögfüggvényértékeket vezessük vissza hegyesszögek szögfüggvényeire:
a) sin 202°; *b)* sin (–2387°) *c)* cos 352°; *d)* cos 2026°;
e) tg 238°; *f)* tg 2790°; *g)* ctg 260° *h)* ctg 2970°.

a) sin 202° = –sin 22°; *b)* sin (–2387°) = sin 47°;
c) cos 352° = cos 8°; *d)* cos 2026° = –cos 46°;
e) tg 238° = tg 58°; *f)* tg 2790° = tg 90°; (ami nincs értelmezve),
g) ctg 260° = ctg 80°; *h)* ctg 2970° = ctg 90°, (de a 90° nem hegyesszög).

3. K1 Számítsuk ki a háromszög területét, ha
a) $a = 10$, $b = 7$, $\gamma = 124°$;
b) $a = 9$, $b = 6$, $\gamma = 170°10'$.

Használjuk a $t = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$ területképletet!

a) $t = \dfrac{10 \cdot 7 \cdot \sin 124°}{2} \approx 29{,}02$;

b) $t = \dfrac{9 \cdot 6 \cdot \sin 170°10'}{2} \approx 4{,}61$.

4. K2 Milyen forgásszögekre igaz, hogy
a) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$; *b)* $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$;
d) $\sin\alpha = -0{,}7880$; *e)* $\cos\alpha = 0{,}8290$; *f)* $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}1763$.

a) $\alpha = \begin{cases} 30° + k_1 \cdot 360° \\ 150° + k_2 \cdot 360° \end{cases}$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$, $k_2 \in \mathbf{Z}$.

b) $\alpha = \begin{cases} 135° + k_1 \cdot 360° \\ 225° + k_2 \cdot 360° \end{cases}$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$, $k_2 \in \mathbf{Z}$.

c) $\alpha = 60° + k \cdot 180°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

d) $\alpha = \begin{cases} 232° + k_1 \cdot 360° \\ -52° + k_2 \cdot 360° \end{cases}$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$, $k_2 \in \mathbf{Z}$.

e) $\alpha = \begin{cases} 34° + k_1 \cdot 360° \\ 326° + k_2 \cdot 360° \end{cases}$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$, $k_2 \in \mathbf{Z}$.

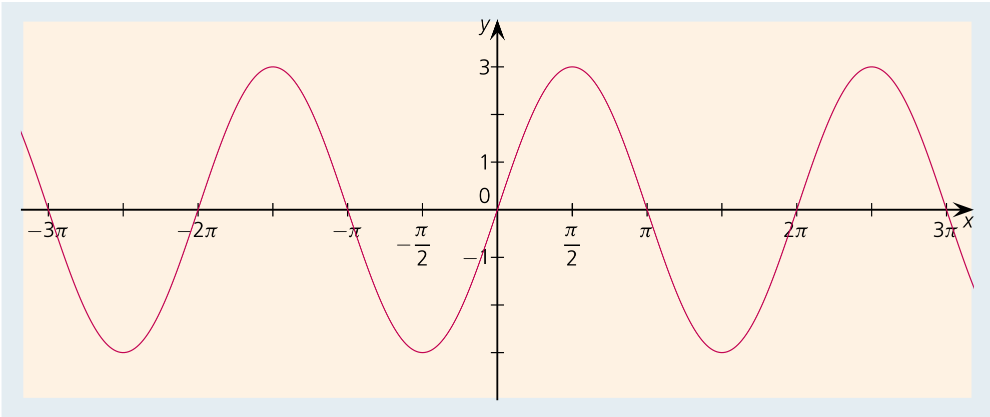
f) $\alpha = -10° + k \cdot 180°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

6. Szögfüggvények ábrázolása

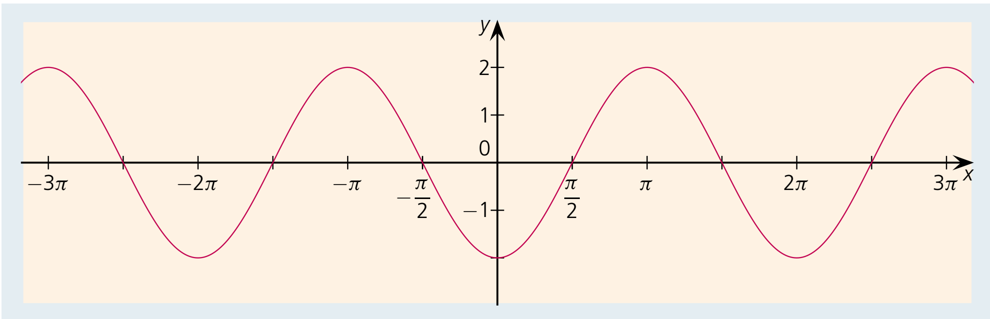
1. K2 A trigonometriai alapfüggvényekből függvénytranszformációk alkalmazásával ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $3 \sin x$; *b)* $-2 \cos x$; *c)* $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x$.

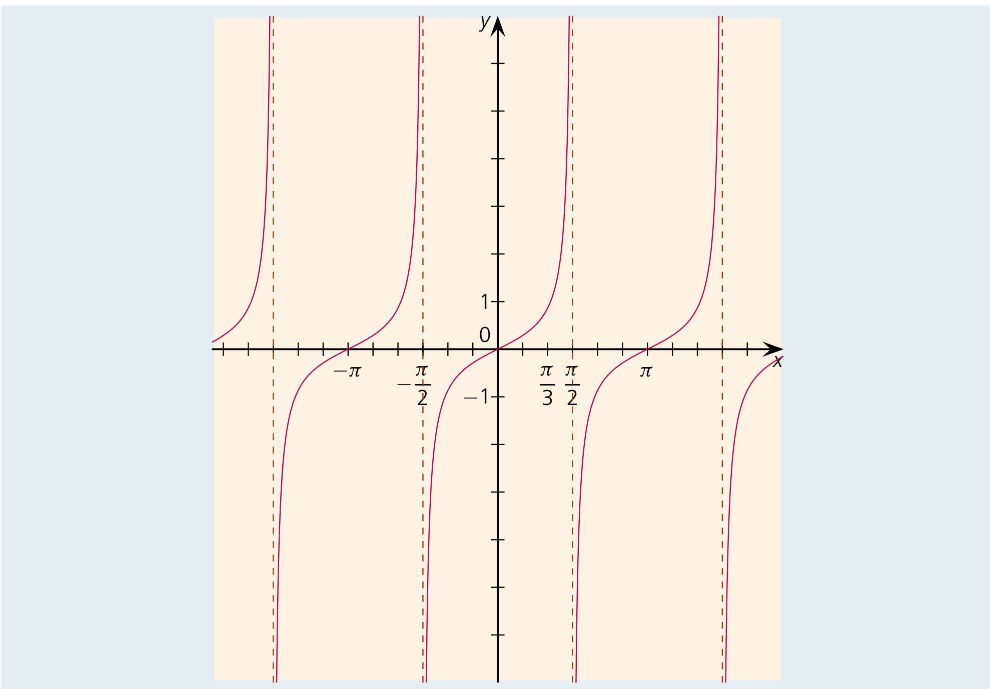
a) $3 \sin x$;



b) $-2 \cos x$;



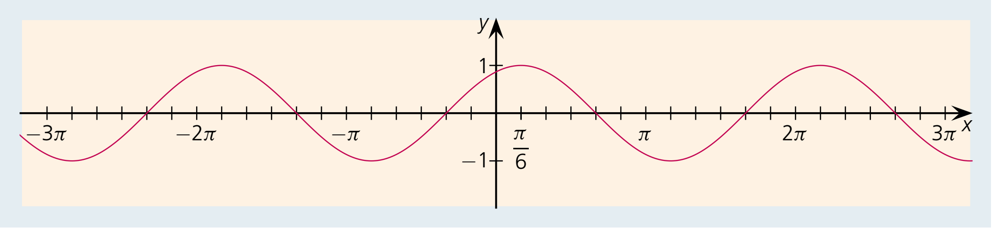
c) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x$.



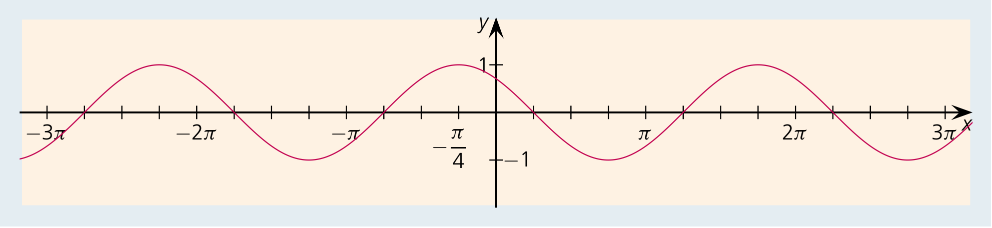
2. K2 A trigonometriai alapfüggvények segítségével ábrázoljuk a következő függvényeket a $[0;\,2\pi[$ intervallumon:

a) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; *b)* $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; *c)* $\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

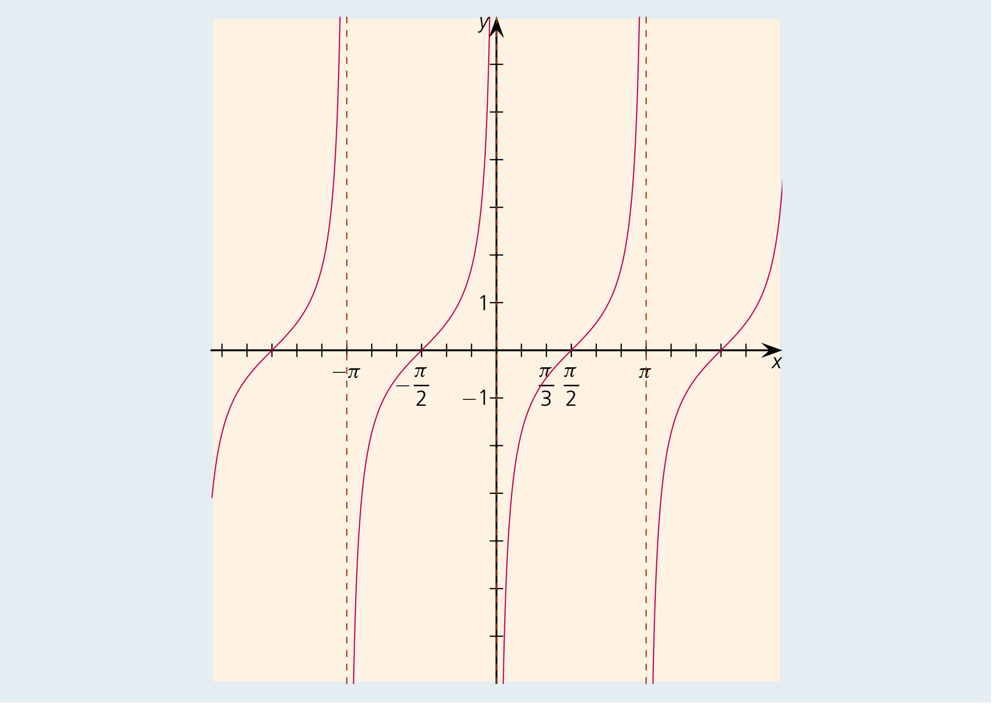
a) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$



b) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$



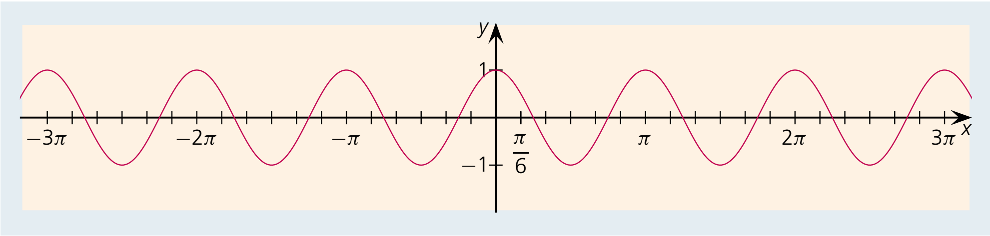
c) $\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$



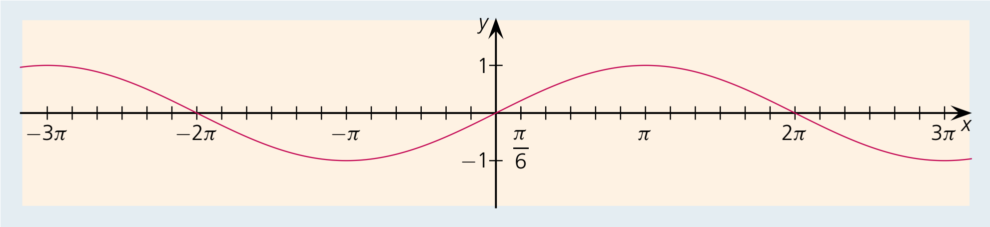
3. K2 A trigonometriai alapfüggvények segítségével ábrázoljuk a következő függvényeket a $[-2\pi;\ 2\pi[$ intervallumon:

a) $\cos 2x$; *b)* $\sin\frac{x}{2}$; *c)* $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

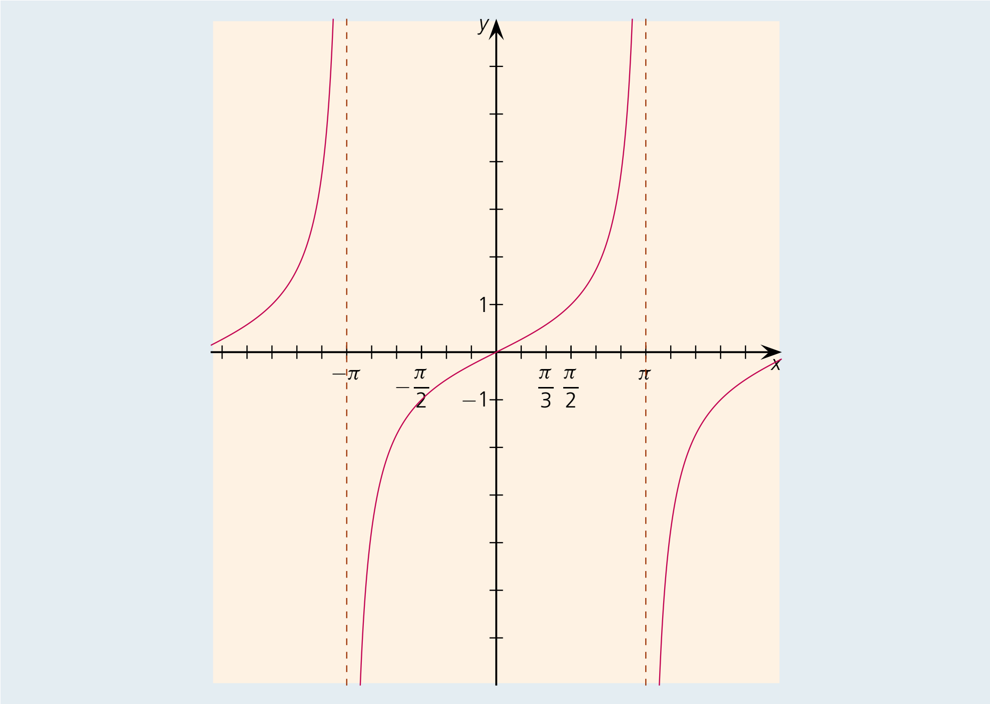
a) $\cos 2x$



b) $\sin\frac{x}{2}$



c) $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$



4. K2 Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $2\sin 3x = -1$; *b)* $-2\cos 2x = \sqrt{2}$; *c)* $3\sin 4x = \sqrt{3}$; *d)* $5\cos 3x = 1{,}5$.

a) A $\sin 3x = -0{,}5$ egyenletet kell megoldanunk.
Két eset van:
I. $3x = -30° + k_1 \cdot 360°$.
Azaz $x = -10° + k_1 \cdot 120°$, ahol k_1 tetszőleges egész szám.
II. $3x = -150° + k_2 \cdot 360°$.
Azaz $x = -50° + k_2 \cdot 120°$, ahol k_2 tetszőleges egész szám.

b) A $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenletet kell megoldanunk.
Két eset van:
I. $2x = 135° + k_1$ v $360°$.
Azaz $x = 67{,}5° + k_1 \cdot 180°$, ahol k_1 tetszőleges egész szám.
II. $2x = -135° + k_2 \cdot 360°$.
Azaz $x = -67{,}5° + k_2 \cdot 180°$, ahol k_2 tetszőleges egész szám.

c) A $\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774$ egyenletet kell megoldanunk. A $\frac{\sqrt{3}}{3}$ nem nevezetes szög szinusza, ezért számolunk közelítő értékkel.
Két eset van:
I. $4x \approx 35{,}26° + k_1 \cdot 360°$.
Azaz $x \approx 8{,}8° + k_1 \cdot 90°$, ahol k_1 tetszőleges egész szám.
II. $4x \approx 144{,}74° + k_2 \cdot 360°$.
Azaz $x \approx 36{,}2° + k_2 \cdot 90°$, ahol k_2 tetszőleges egész szám.

VI. Statisztika és valószínűség

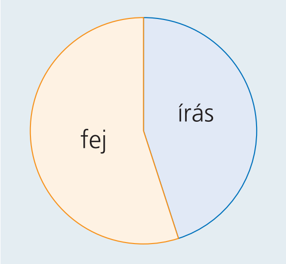
1. Statisztikai alapismeretek

1. K1 *a)* Dobjunk egy pénzérmével 20-szor. Készítsünk a dobásokról gyakorisági eloszlást. Ábrázoljuk kördiagramon az adatokat.
b) Dobjunk két pénzérmével 20-szor. Készítsünk a dobások összegéről gyakorisági eloszlást. Ábrázoljuk oszlopdiagramon az adatokat.

a) A következő gyakorisági eloszlást kaphattuk:

A dobás	fej	írás
A dobás gyakorisága	11	9

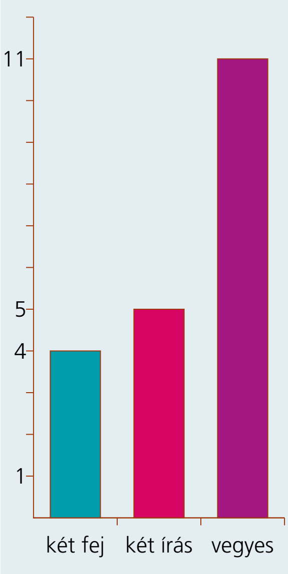
Ábrázolás:



b) A következő gyakorisági eloszlást kaphattuk:

A dobás	két fej	két írás	vegyes
A dobás gyakorisága	4	5	11

Ábrázolás: (lásd: alsó ábra)



2. K1 Gyűjtsünk (pl. napilapokból, folyóiratokból) grafikonokat, táblázatokat! Elemezzük, értelmezzük a látottakat!

A gyűjtött grafikonokról, táblázatokból főleg az adatok nagyságát, az egymáshoz való viszonyukat próbáljuk leolvasni.

3. K2 Gyűjtsünk adatokat arról, hogy a személygépkocsikban hányan utaznak. Statisztikai mutatók felhasználásával készítsünk rövid elemzést a rendelkezésünkre álló adatok alapján a személygépkocsik kihasználtságáról.

Megnéztünk 50 személygépkocsit, a következő gyakorisági eloszlást kaptuk:

Utazók száma	1	2	3	4	5
Gyakorisága	26	13	8	2	1

A számsokaság átlaga: $(1 \cdot 26 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1)/50 \approx 1{,}78$.

A számsokaság módusza: 1, hiszen a gyakorisági táblázatban az 1 szerepel a legtöbbször.

A számsokaság mediánja: 1, mert az adatok nagyság szerinti rendezésekor középen, vagyis a 25. és a 26. helyen is az 1 áll.

Ezek alapján elmondható, hogy a személygépkocsik kihasználtsága nagyon alacsony. Látható, hogy az átlag 1,78. Azonban 1,78 utas nem lehet a személygépkocsiban, ezért kerekíthetnénk 2-re, de ez nem mutatná azt, amit a felmérésnél tapasztaltunk. Nevezetesen, hogy lényegében minden második autóban csak a vezető ül.

Természetesen ebben a példában is látható, hogy milyen fontos szerepe van az adatgyűjtés mikéntjének. Nem mindegy, hogy a nap melyik szakában, milyen helyen végezzük az adatok gyűjtését. Ha nem tudjuk, hogy mikor és hol gyűjtötték az adatokat, akkor csak nagyon óvatos vélemény fogalmazható meg. Jól megfigyelhető az adatok számának fontossága is. Ha biztonságosabb elemzést, véleményt szeretnénk megfogalmazni, akkor nagyobb mintát kell gyűjtenünk, és a feltételeket, a körülményeket is illik közölni.

4. K2 Valaki szeretne elhelyezkedni egy cégnél, de nem tudja milyen fizetésre számíthat. Az ott dolgozó emberek fizetéseinek melyik középértéket érdemes megkérdezni?

Az átlag nagyon félrevezetheti az illetőt. Gondoljuk meg, hogy ha a cég vezetője nagyon sokat keres, az alkalmazottak pedig nagyon keveset, akkor az átlag nem ad igazán hasznos információt. Érdemesebb a mediánt, esetleg a móduszt megkérdezni.

5. K2 Egy osztályban a lányok testmagasságának átlaga 166 cm, a fiúké pedig 172 cm. Az osztályban 14 lány és 18 fiú van. Számítsuk ki az osztály testmagasságának átlagát.

Mivel a 14 lány testmagasságának átlaga 166 cm, ezért a lányok testmagasságának összege: $14 \cdot 166 = 2324$ cm.
Mivel a 18 fiú testmagasságának átlaga 172 cm, ezért a fiúk testmagasságának összege: $18 \cdot 172 = 3096$ cm.
A 32 fős osztály testmagasságának összege: $2324 + 3096 = 5420$ cm.
Az osztály testmagasságának átlaga: $\frac{5420}{32} = 169{,}375$ cm.

6. E1 *a)* Három tanulónak három tantárgyból elért félévi eredményeit vizsgáltuk. Először kiszámoltuk mindegyikük átlagát, majd az átlagok átlagát vettük. Másodszor kiszámoltuk a három tantárgy átlagát, majd ezen átlagok átlagát is meghatároztuk. A kapott két érték milyen viszonyban lehet egymással?
b) Válaszoljunk az előző kérdésre n tanuló és k db tantárgy esetén.

a) A három tanuló: A, B és C, a három tantárgy: x, y és z. A megfelelő félévi jegyet a következő táblázatból megtudhatjuk ($a, b, \ldots, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$):

	x	y	z
A	a	b	c
B	d	e	f
C	g	h	i

Az A tanuló átlaga: $\frac{a+b+c}{3}$, a B tanuló átlaga: $\frac{d+e+f}{3}$, a C tanuló átlaga: $\frac{g+h+i}{3}$.
A tanulók átlagainak az átlaga:
$$\frac{\frac{a+b+c}{3}+\frac{d+e+f}{3}+\frac{g+h+i}{3}}{3}=\frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}.$$
Az x tantárgy átlaga: $\frac{a+d+g}{3}$, az y tantárgy átlaga: $\frac{b+e+h}{3}$, a z tantárgy átlaga: $\frac{c+f+i}{3}$.
A tantárgyak átlagainak az átlaga:
$$\frac{\frac{a+d+g}{3}+\frac{b+e+h}{3}+\frac{c+f+i}{3}}{3}=\frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}.$$
Láthatjuk, hogy a tanulók átlagainak az átlaga és a tantárgyak átlagainak az átlaga egyenlő (feltéve, hogy a részeredményeket nem kerekítettük).

b) Az n tanuló: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a k tantárgy: $x_1, x_2, \ldots, x_k$. A megfelelő félévi jegyet a következő táblázatból megtudhatjuk ($a_{1;1}, \ldots, a_{n;k} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$):

	x_1	…	x_k
A_1	$a_{1;1}$	…	$a_{1;k}$
A_2	$a_{2;1}$	…	$a_{2;k}$
…	…		…
A_n	$a_{n;1}$	…	$a_{n;k}$

Az A_1 tanuló átlaga: $\frac{a_{1;1}+\ldots+a_{1;k}}{k}$, az A_2 tanuló átlaga: $\frac{a_{2;1}+\ldots+a_{2;k}}{k}$, …, az A_n tanuló átlaga: $\frac{a_{n;1}+\ldots+a_{n;k}}{k}$.

A tanulók átlagainak az átlaga: $\dfrac{\frac{a_{1;1}+\ldots+a_{1;k}}{k}+\ldots+\frac{a_{n;1}+\ldots+a_{n;k}}{k}}{n}=\dfrac{a_{1;1}+\ldots+a_{n;k}}{nk}$.

Az x_1 tantárgy átlaga: $\frac{a_{1;1}+\ldots+a_{n;1}}{n}$, az x_2 tantárgy átlaga: $\frac{a_{1;2}+\ldots+a_{n;2}}{n}$, …, az x_k tantárgy átlaga: $\frac{a_{1;k}+\ldots+a_{n;k}}{n}$.

A tantárgyak átlagainak az átlaga: $\dfrac{\frac{a_{1;1}+\ldots+a_{n;1}}{n}+\ldots+\frac{a_{1;k}+\ldots+a_{n;k}}{n}}{k}=\dfrac{a_{1;1}+\ldots+a_{n;k}}{nk}$.

Láthatjuk, hogy a tanulók átlagainak az átlaga és a tantárgyak átlagainak az átlaga egyenlő. (Eltérést csak az okozhat, ha a számolás során a részeredményeket kerekítettük.)

7. K2 Tudjuk, hogy hat számnak a mediánja 10. Mit mondhatunk a mediánról, ha a hat számhoz hozzávesszük a 12-t is?

Legyen a hat szám: $a \le b \le c \le d \le e \le f$. Mivel a medián 10, ezért $c \le 10$ és $10 \le d$.

Három eset lehetséges:

Ha $10 \le d < 12$, akkor a sorrend: $a, b, c, d, \ldots$. Vagyis a medián: d (azaz 12-nél kisebb).

Ha $d = 12$, akkor a sorrend: $a, b, c, d, 12, e, f$. Vagyis a medián: d (ami 12-vel egyenlő).

Ha $12 < d$, akkor a sorrend: $a, b, c, 12, d, e, f$. Vagyis a medián: 12 (ami d-nél kisebb).

Ha a hat számhoz hozzávesszük a 12-t is, akkor a hét számnak a mediánja [10;12] intervallumban lesz.

8. E1 Három tanuló jegyeit jegyeztük fel.
Katié: 2, 4, 3; Lorándé: 3, 2, 3, 2, 5; Mártoné: 4, 1, 3, 5, 2.
Számítsuk ki a szórást mind a három adatsor esetén!

A szórás kiszámításához szükségünk van az átlagra.
Kati átlaga: 3, Loránd átlaga: 3, Márton átlaga: 3.

Kati jegyeinek szórása:

$$\sqrt{\frac{(2-3)^2+(4-3)^2+(3-3)^2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}82.$$

Loránd jegyeinek szórása:

$$\sqrt{\frac{(3-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(2-3)^2+(5-3)^2}{5}}=\sqrt{\frac{6}{5}}\approx 1{,}10.$$

Márton jegyeinek szórása:

$$\sqrt{\frac{(4-3)^2+(1-3)^2+(3-3)^2+(5-3)^2+(2-3)^2}{5}}=\sqrt{2}\approx 1{,}41.$$

Részletesen leírtuk a behelyettesítést a képletbe. Nagyobb minta esetén ezt nem tennénk meg, csak az eredményt közölnénk.

Egyes zsebszámológépek statisztikai funkciói között megtalálható a szórás kiszámítása is. Ez lényegesen gyorsítja a számításainkat.

9. E1 Két adatsor a következő: 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, illetve 5, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Melyik adatsornak nagyobb az (átlagtól vett) átlagos abszolút eltérése?

Az első adatsor átlaga: 4, a másodiké pedig: 8.
Használjuk az átlagos abszolút eltérésre megismert képletet!
Az első:

$$\frac{|1-4|+|2-4|+|2-4|+|2-4|+|3-4|+|4-4|+|5-4|+|6-4|+|7-4|+|8-4|}{10}=$$

$$=\frac{3+2+2+2+1+0+1+2+3+4}{10}=\frac{20}{10}=2.$$

A második:

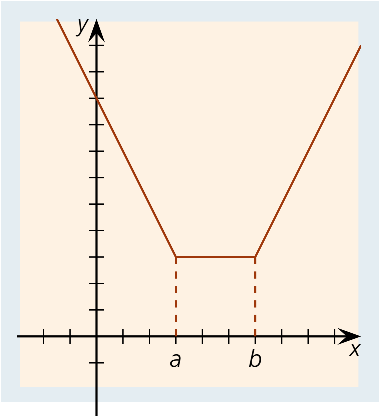
$$\frac{|5-8|+3\cdot|6-8|+|7-8|+|8-8|+|9-8|+|10-8|+|11-8|+|12-8|}{10}=$$

$$=\frac{3+3\cdot 2+1+0+1+2+3+4}{10}=\frac{20}{10}=2.$$

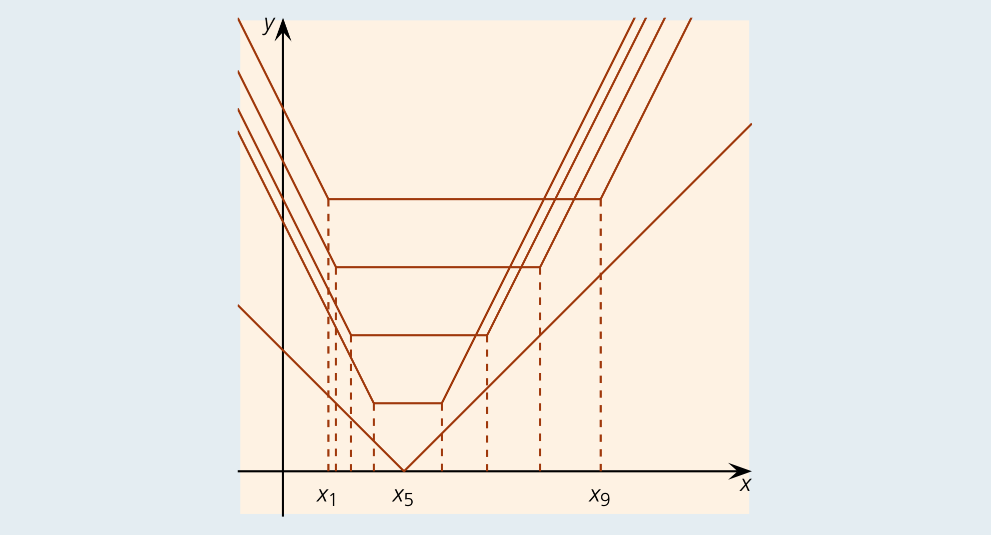
A két adatsornak egyenlő az (átlagtól vett) átlagos abszolút eltérése.
(Bizonyítható lenne, hogy ha az adatsor minden elemét ugyanannyival növeljük, akkor az átlaga is ugyanannyival nő, az átlagtól vett átlagos abszolút eltérése viszont nem változik.)

10. E1 *a)* Egy szakkör 9 tanulójának magasságát x_1; x_2; ...; x_9 jelölje. Határozzuk meg az $f(x) = |x_1 - x| + |x_2 - x| + ... + |x_9 - x|$ hozzárendelésű függvény minimumhelyét!
b) Jelölje egy 7 fős társaság tagjainak testtömegét x_1; x_2; ...; x_7. Határozzuk meg az $f(x) = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + ... + (x_7 - x)^2$ hozzárendelésű függvény minimumhelyét!

a) Az abszolútérték-függvények ábrázolásánál tanultak alapján a $g(x) = |a - x| + |b - x|$ hozzárendelésű függvény képe a következő alakú lesz ($a < b$):



A 9 tanuló magassága legyen nagyság szerint sorba rendezve: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_8 \le x_9$. Vázlatosan megrajzolhatjuk a
$g_1(x) = |x_1 - x| + |x_9 - x|$,
$g_2(x) = |x_2 - x| + |x_8 - x|$,
$g_3(x) = |x_3 - x| + |x_7 - x|$,
$g_4(x) = |x_4 - x| + |x_6 - x|$,
$g_5(x) = |x_5 - x|$ hozzárendelésű függvények képét egy koordináta-rendszerben.



Leolvasható az ábráról, hogy az x_5-nél lesz az f függvény minimumhelye.

Megjegyzés: Észrevehető, hogy az x_5 pontosan az x_1; x_2; …; x_8; x_9 számsokaság mediánja. Általánosságban is megmutatható, hogy az átlagos abszolút eltérés a mediántól lesz a legkisebb.

b) Végezzük el az $f(x)$ következő átalakítását:

$$f(x) = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \ldots + (x_7 - x)^2 =$$
$$= 7x^2 - 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_7)x + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_7^2 =$$
$$= 7\left[x - \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_7}{7}\right)\right]^2 - \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_7}{7}\right)^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_7^2.$$

Ennek a függvénynek a minimumhelye: $x_{min} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_7}{7}$.

Megjegyzés: Észrevehető, hogy ez pontosan az x_1; x_2; …; x_7 számsokaságnak a számtani közepe. Hasonló módon mutathatnánk meg általánosságban is, egy számsokaság esetén minimális négyzetes eltérést akkor kapunk, ha az eltéréseket a számsokaság átlagához képest számítjuk.

2. A véletlen

1. K2 Kétféle kísérletet is leírunk. Az elsőben 20-szor feldobunk öt pénzérmét. Ebben a kísérletben a valószínűségi változó a leesett pénzötösökben a fejek száma. A kísérlet során feljegyezzük ezeket a számokat. A második kísérletben 20-szor feldobunk egy dobókockát. Ekkor a dobott számnál eggyel kisebb érték lesz a valószínűségi változó. A kísérlet során itt is feljegyezzük ezeket a számokat. A két kísérlet egyikét kiválasztjuk, majd elvégezzük, és ezt kapjuk:
1, 2, 3, 3, 2, 1, 1, 4, 1, 3, 2, 3, 3, 1, 3, 3, 3, 2, 3, 3.

Hajtsuk végre mindkét kísérletet többször is. Ezek alapján tippeljünk, hogy a fenti számsor melyik kísérletből eredhet!

Az általunk elvégzett pénzérmés kísérlet kimenetelei:
2 1 2 2 3 1 3 4 4 3 4 2 3 4 3 2 3 5 2 3
1 3 4 1 4 2 4 2 2 5 2 3 2 2 1 5 1 2 1 2
2 3 4 4 2 1 3 3 2 2 1 4 2 3 1 1 4 3 3 2
3 1 1 3 3 2 3 1 3 3 4 2 4 4 4 1 4 2 3 3
5 1 2 4 2 4 3 4 4 0 2 1 2 2 3 0 3 4 2 1

A dobókockás kísérlet kimenetelei:
4 2 3 4 5 5 5 5 1 4 5 5 1 2 1 3 5 5 1 1
3 1 5 2 1 3 5 4 3 0 0 3 3 0 1 5 0 3 3 1
4 3 1 5 4 3 4 5 4 1 4 2 0 1 1 2 4 3 5 5
4 0 5 4 2 4 0 0 2 2 0 4 0 1 2 4 1 4 3 3
5 4 1 5 1 5 0 1 3 5 3 1 0 4 1 5 2 4 2 2

Mivel a feladatban lejegyzett kísérletsorozatban legritkábban a 0, 4, 5 számjegyek szerepelnek, így feltételezhető, hogy a pénzérmés kísérlet kimeneteleit láthatjuk. Megfigyelhetjük, hogy a dobókockás kísérlet esetén szinte mindig, akár többször is előfordul mindhárom kérdéses szám.

2. K2 Nagyon sok társasjátékban az első lépést csak hatos dobás után tehetjük meg. Végezzük el a következő kísérletet: addig dobjunk egy dobókockával, amíg hatost nem kapunk. Jegyezzük fel az ehhez szükséges dobások számát. Legalább 10-szer végezzük el ezt a kísérletet. Számoljuk ki az eredményeink átlagát, azaz azt, hogy átlagosan hányadik dobásra jött ki az első hatos!

Az általunk elvégzett kísérlet kimenetelei: 2, 6, 1, 1, 3, 6, 1, 5, 4, 3, 8, 2, 4, 25, 6, 5, 20.
Átlagosan hatodik dobásra kaptuk az első hatost.

3. K1 A lottószelvényünket véletlenszerűen szeretnénk kitölteni. Adjunk meg ilyen módszereket!

Például írjuk fel 90 darab egyforma papírlapra 1-től 90-ig az egész számokat, majd keverés után, véletlenszerűen húzzunk ki ötöt.

4. K1 Totószelvényt szeretnénk véletlenszerűen kitölteni. Adjunk módszert a kitöltéshez!

Például dobókockával dobunk.
Ha a dobásunk 1 vagy 2, akkor legyen 1.
Ha a dobásunk 3 vagy 4, akkor legyen 2.
Ha a dobásunk 5 vagy 6, akkor legyen X.

5. K2 A 32 lapos kártyánk segítségével adjunk meg egy igazságos módszert, amellyel öt ember közül kiválasztunk négyet!

Válasszunk ki öt lapot, legyen pl. a négy király és a zöld hetes. Ezeket a lapokat megkeverjük és kiosztjuk az öt embernek. A kiválasztottak legyenek azok, akik a király lapokat kapták.

6. K2 A 64 fős évfolyamról szeretnénk kiválasztani egy tanulót. Tervezzünk meg egy módszert, amely 1 darab pénzérme segítségével véletlenszerű és igazságos választást eredményez!

A 64 embert tegyük például ábécérendbe! A pénzérme fej dobása jelentse a névsor első felét, az írás dobás pedig a második felét. Az így kiválasztottakkal járjunk el ugyanígy. Folytassuk az eljárást addig, amíg egy ember marad.

7. K1 Egy dobókockát egymás után négyszer feldobunk. Az alábbiakban erre a kísérletre vonatkozó állításokat fogalmazunk meg. Állapítsuk meg, hogy közülük melyek a biztos, melyek a lehetetlen események.
a) A dobott számok összege 25.
b) A dobott páros számok száma páros.
c) A legnagyobb dobott szám páros.
d) Dobott számok között van hatos.
e) A dobott számok összege legalább három.

Biztos: *e)*
Lehetetlen: *a)*

3. A valószínűség

1. K1 Húzzunk ki egy csomag 32 lapos magyar kártyából találomra egy lapot. Határozzuk meg a következő valószínűségeket! A kihúzott lap
a) király;
b) nem zöld;
c) nem számozott;
d) tök vagy felső.

a) $p(\text{király}) = \frac{4}{32} = 0{,}125$;

b) $p(\text{nem zöld}) = \frac{24}{32} = 0{,}75$;

c) $p(\text{nem számozott}) = \frac{16}{32} = 0{,}5$;

d) $p(\text{tök vagy felső}) = \frac{11}{32} = 0{,}34375$.

2. K2 Dobókockával kétszer dobunk, a sorrendet tartva leírjuk a két számjegyet egymás mellé. Mekkora valószínűséggel lesz az így kapott kétjegyű szám
a) páratlan;
b) tízzel osztható;
c) kilenccel osztható;
d) húsznál nagyobb.

a) $p(\text{páratlan}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$;
b) $p(\text{tízzel osztható}) = 0$;
c) $p(\text{kilenccel osztható}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$;
d) $p(\text{húsznál nagyobb}) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

3. K2 Egy dobozban 16 piros és 16 zöld kupak van. Véletlenszerűen kiveszünk kettőt. Mekkora a valószínűsége, hogy két különböző színűt veszünk ki?

A 32 kupak közül bármelyik kettőt választhatjuk. Az összes esetek száma: $\frac{32 \cdot 31}{2} = 496$.
Bármelyik piroshoz bármelyik zöldet választhatjuk. A kedvező esetek száma: $16 \cdot 16 = 256$.
A keresett valószínűség: $\frac{256}{496} = \frac{16}{31} \approx 0{,}516$.

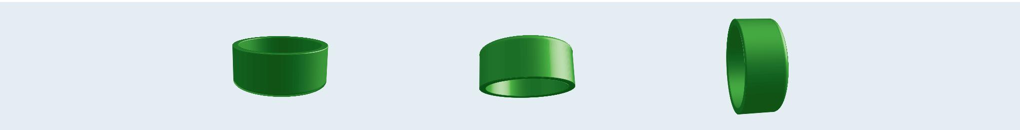
4. K2 Egy dobozban 14 zöld és 18 fehér golyó van. Véletlenszerűen kiveszünk kettőt. Mekkora a valószínűsége, hogy
a) két különböző színűt veszünk ki;
b) két zöldet veszünk ki?

a) A 32 golyó közül bármelyik kettőt választhatjuk. Az összes esetek száma: $\frac{32 \cdot 31}{2} = 496$.
Bármelyik zöldhöz bármelyik fehéret választhatjuk. A kedvező esetek száma: $14 \cdot 18 = 252$.
A keresett valószínűség: $\frac{252}{496} = \frac{63}{124} \approx 0{,}508$.

b) Az összes esetek száma: $\frac{32 \cdot 31}{2} = 496$.
Bármelyik két zöldet választhatjuk. A kedvező esetek száma: $\frac{14 \cdot 13}{2} = 91$.
A keresett valószínűség: $\frac{91}{496} \approx 0{,}183$.

5. K2 Egy műanyag kupak feldobása esetén milyen kimenetelek várhatók? Végezzük el a kísérletet 20-szor és határozzuk meg ezek relatív gyakoriságait!

Háromféle kimenetel várható:



Gyakoriság:	10	9	1
Relatív gyakoriság:	0,5	0,45	0,05

6. K2 Egy áruház születésnapi játékának reklámszövegében ezt olvashatjuk:

Ha 20 000 Ft felett vásárol, akár 20 000 Ft készpénzt is nyerhet!

A játékban a feltételnek eleget tevő vásárlók egy zárt dobozból nyereményként egy papírpénzt húzhatnak ki. A doboz 500 Ft-os, 1000 Ft-os 2000 Ft-os, 5000 Ft-os, 10 000 Ft-os és 20 000 Ft-os pénzeket tartalmaz, mindegyikből pontosan 20 000 Ft-ot. Mekkora eséllyel nyer a vásárló

a) csak 500 Ft-ot;

b) valóban 20 000 Ft-ot?

A dobozban a szöveg szerint 40 db 500 Ft-os, 20 db 1000 Ft-os, 10 db 2000 Ft-os, 4 db 5000 Ft-os, 2 db 10 000 Ft-os és 1 db 20 000 Ft-os van. Ez összesen 77 db pénz, amelyekről feltételezhetjük, hogy a zárt dobozból bármelyiket ugyanolyan eséllyel húz ki a szerencsés vásárló. Ezért alkalmazhatjuk, hogy $p(A) = \frac{\text{kedvező kimenetelek száma}}{\text{összes kimenetel száma}}$.

a) $p(\text{500 Ft a nyeremény}) = \frac{40}{77} \approx 0{,}519$.

Vagyis kb. 51,9% eséllyel csak 500 Ft lesz a nyereménye a vásárlónak.

b) $p(\text{20 000 Ft a nyeremény}) = \frac{1}{77} \approx 0{,}013$.

Vagyis csak kb. 1,3% eséllyel lesz 20 000 Ft a nyereménye a vásárlónak.

7. K2 Egy televíziós rejtvényműsorban a nyertes biztos nyereménye 10 000 Ft, de fődíjként akár 2 000 000 Ft-ot is kaphat. A műsorba emeltdíjas telefonálással lehet bekerülni. A telefonálók közül számítógép sorsolja ki a válaszadót. Jó válasz esetén a játékos megkapja a biztos nyereményt, és ha a műsorvezető három dobókockával három hatost dob, akkor a 2 000 000 Ft is az övé lesz. Mekkora eséllyel nyer 2 010 000 Ft-ot egy jó választ adó betelefonáló?

Három dobókockával dobva az összes kimenetel száma: $6^3 = 216$.

A kedvező kimenetelek száma pedig csak 1.

A keresett valószínűség: $p = \frac{1}{216} \approx 0{,}0046$.

Vagyis a főnyeremény megszerzésére 0,46% esélye van annak a játékosnak, akit a számítógép kisorsolt válaszadónak és jól is válaszolt.

8. K2 Az előző feladatban leírt nyereményjátékban mit mondhatunk, mennyi az átlagos nyeremény?

A játékban nyerhetünk 10 000 Ft-ot, és ha nagyon szerencsések vagyunk, akkor 2 010 000 Ft-ot is. Érezzük, hogy a két szám összegének fele nem mondható átlagos nyereménynek. A játék szabálya szerint három hatos dobás esetén lesz a nyeremény 2 010 000 Ft. Három különböző dobókockával $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$-féle dobás képzelhető el. Ezek közül 1 esetben 2 010 000 Ft, 215 esetben pedig 10 000 Ft lesz a nyeremény.

A leírtak alapján az átlagos nyeremény: $\frac{215 \cdot 10\,000 + 2\,010\,000}{216} \approx 19\,260$.

Vagyis az átlagos nyeremény ebben a játékban 19 260 Ft-nak mondható.

9. K2 Egy dobozban 3 piros golyó van. Legalább hány darab zöld golyót kell a dobozba rakni, hogy ezután kihúzva egy golyót, az 0,15-nál kisebb valószínűséggel legyen piros?

Legyen a zöld golyók száma x. Ekkor: $\frac{3}{x+3} < 0{,}15$, amiből $17 < x$.

Vagyis legalább 18 zöld golyót kell betenni a dobozba.

10. E1 Egy minden oldalán befestett kockát 64 azonos méretű kis kockára fűrészelnek szét. A kis kockákból véletlenszerűen választunk egyet. Mekkora a valószínűsége, annak, hogy a választott kis kocka
a) 3; *b)* 2; *c)* 1; *d)* 0
oldala festett?

A 64 kis kockából 8 db lesz festetlen, 24 db-nak lesz egy oldala, 24 db-nak lesz két oldala és 8 db-nak lesz három oldala festett.
a) $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$; *b)* $\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$; *c)* $\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$; *d)* $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

11. E1 Egy minden oldalán befestett kockát azonos méretű kis kockára fűrészelnek szét. Ha ezek közül a kis kockák közül $\frac{27}{64}$ valószínűséggel húzunk egy festett oldalú kis kockát, akkor mekkora valószínűséggel húzhatunk festetlen kis kockát?

Legyen a kocka éle x, így a kis kockák száma x^3.
Az egy festett oldalú kis kockák száma: $6(x-2)^2$.
Vagyis: $\frac{6(x-2)^2}{x^3} = \frac{27}{64}$.
Ebből kapjuk: $9x^3 - 128x^2 + 512x - 512 = 0$.
Ez szorzat alakban: $(x-8)(9x^2 - 56x + 64) = 0$.
Ennek az egyenletnek egyedüli egész gyöke az $x = 8$.
Vagyis a kis kockák száma: $8^3 = 512$.
A festetlen kis kockák száma: $6^3 = 216$.
A keresett valószínűség: $\frac{216}{512} = \frac{27}{64}$.