Dr. Gerőcs László ▪ Számadó László

Heuréka

MATEMATIKA 11.

A tankönyv feladatai és a feladatok megoldásai

A megoldások olvasásához Acrobat Reader program szükséges, amely ingyenesen letölthető az internetről (például: adobe.la.hu weboldalról).
A feladatokat nehézségük szerint jelöltük:
K1 = középszint, könnyebb; **K2** = középszint, nehezebb; **E1** = emelt szint, könnyebb; **E2** = emelt szint, nehezebb feladat.

Lektorok:
PÁLFALVI JÓZSEFNÉ
CSAPODI CSABA

Tipográfia: LŐRINCZ ATTILA

Szakgrafika: DR. FRIED KATALIN

Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet
1143 Budapest, Szobránc u. 6–8.
Tel.: (+36-1) 235-7200
Fax: (+36-1) 460-1822
Vevőszolgálat: vevoszolgalat@ofi.hu

A kiadásért felel: dr. Kaposi József főigazgató
Raktári szám: RE17302
Felelős szerkesztő: Tóthné Szalontay Anna, Szelindiné Galántai Melinda
Műszaki igazgató: Kamp Alfréd
Műszaki szerkesztő: Orlai Márton
Grafikai szerkesztő: Mikes Vivien, Görög Istvánné
Terjedelem: 15,1 (A/5) ív
1. kiadás, 2015
Tördelés: PGL Grafika Bt.

Tartalom

Jelmagyarázat

Az A pont és az e egyenes távolsága: $d(A; e)$ vagy Ae

Az A és B pont távolsága: AB vagy $\overline{AB}$ vagy $d(A; B)$

Az A és B pont összekötő egyenese: $e(A; B)$

Az f_1 és f_2 egyenesek szöge: $\sphericalangle(f_1; f_2)$ vagy $(f_1; f_2)\sphericalangle$

A C csúcspontú szög, melynek egyik szárán az A, másik szárán a B pont található: $ACB\sphericalangle$

A C csúcspontú szög: $C\sphericalangle$

Szög jelölése: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Az A, B és C csúcsokkal rendelkező háromszög: $ABC\triangle$

Az $ABC\triangle$ területe: $T(ABC)$ vagy T_{ABC}

Az a, b és c oldalú háromszög fél kerülete: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

A derékszög jele: $\llcorner$

Az e egyenes merőleges az f egyenesre: $e \perp f$

Az e egyenes párhuzamos az f egyenessel: $e \parallel f$

Egybevágóság: $\cong$; $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$

A hasonlóság aránya: λ

Az A pontból a B pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB}$

Egyenlő, nem egyenlő: $=, \neq$; $a = 2, b \neq 5$

Azonosan egyenlő: $\equiv$; $a + b \equiv 5$

Közelítőleg egyenlő: $\approx$; $a \approx 2{,}3$; $8{,}54 \approx 8{,}5$

Kisebb, kisebb vagy egyenlő: $<, \leq$; $2 < 3$, $5 \leq x$

Nagyobb, nagyobb vagy egyenlő: $>, \geq$; $6 > 4$, $a \geq 2$

A természetes számok halmaza: $\mathbf{N}$; $\{0; 1; 2; \ldots\}$

Az egész számok halmaza: $\mathbf{Z}$; $\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

A pozitív, a negatív egész számok halmaza: $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$; $\{1; 2; 3; \ldots\}$, $\{-1; -2; -3; \ldots\}$

A racionális, az irracionális számok halmaza: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^*$

A pozitív, a negatív racionális számok halmaza: $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$

A valós számok halmaza: $\mathbf{R}$

A pozitív, a negatív valós számok halmaza: $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$

Eleme, nem eleme a halmaznak: $\in, \notin$; $5 \in \mathbf{N}$, $-2 \notin \mathbf{Z}^+$

Részhalmaz, valódi részhalmaz: $\subseteq, \subset$; $A \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$

Zárt intervallum: $[a; b]$

Balról zárt, jobbról nyílt intervallum: $[a; b[$

Balról nyílt, jobbról zárt intervallum: $]a; b]$

Nyílt intervallum: $]a; b[$

Az x szám abszolút értéke: $|x|$; $|-3{,}1| = 3{,}1$

Az f függvény hozzárendelési szabálya: $f\colon x \mapsto f(x)$; $f\colon x \mapsto 2x + 3$ vagy $f(x) = 2x + 3$; $f(x) = y$; $y = 2x + 3$

Az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen: $f(x_0)$; $f(5)$, ha $x_0 = 5$

n faktoriális: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

a alapú logaritmus: $\log_a x$

10-es alapú logaritmus: $\lg x$

e alapú logaritmus: $\ln x$

Binomiális együttható, n alatt a k: $\binom{n}{k}$

Az x szám négyzetgyöke: $\sqrt{x}$

Az x szám n-edik gyöke: $\sqrt[n]{x}$

I Kombinatorika

1. Permutációk

1. K1 Számítsuk ki!

a) $\frac{1000!}{998!}$; *b)* $\frac{150!}{147!\cdot 3!}$; *c)* $\frac{3!+6!+9!}{3!}$; *d)* $\frac{77!\cdot 87!\cdot 97!}{76!\cdot 86!\cdot 96!}$.

---

a) $\frac{1000!}{998!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 998\cdot 999\cdot 1000}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 998} = 999\cdot 1000 = 999\,000.$

b) $\frac{150!}{147!\cdot 3!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 147\cdot 148\cdot 149\cdot 150}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 147\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = \frac{148\cdot 149\cdot 150}{1\cdot 2\cdot 3} = 148\cdot 149\cdot 25 = 551\,300.$

c) $\frac{3!+6!+9!}{3!} = 1 + 4\cdot 5\cdot 6 + 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 1 + 120 + 60\,480 = 60\,601.$

d) $\frac{77!\cdot 87!\cdot 97!}{76!\cdot 86!\cdot 96!} = 77\cdot 87\cdot 97 = 649\,803.$

2. K2 Hozzuk egyszerűbb alakra!

a) $(n-3)!(n-2)(n-1)$; *b)* $(n-1)!(n+1)n$;

c) $\frac{(n+3)!}{(n+3)}$; *d)* $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$;

e) $n! + (n+1)!$; *f)* $(n+1)! - n!$.

---

a) $(n-3)!(n-2)!(n-1) = (n-1)!$.

b) $(n-1)!(n+1)n = (n+1)!$.

c) $\frac{(n+3)!}{(n+3)} = (n+2)!$.

d) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = (n+2)(n+3)$.

e) $n! + (n+1)! = n!(1+n+1) = (n+2)n!$.

f) $(n+1)! - n! = n!(n+1-1) = n\cdot n!$.

3. K1 Hány permutációja van a

a) MISKOLC;

b) BUDAPEST

szó betűinek?

---

a) Mivel 7 különböző betű szerepel a MISKOLC szóban, ezért a megoldás:
$P_7 = 7! = 5040$.

b) Mivel 8 különböző betű szerepel a BUDAPEST szóban, ezért a megoldás:
$P_8 = 8! = 40\,320$.

4. K1 Hány permutációja van az
a) EGER;
b) HATVAN;
c) TATA
szó betűinek?

a) Mivel az EGER szó 4 betűjéből 2 azonos, ezért a megoldás:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 3 \cdot 4 = 12.$$

b) Mivel a HATVAN szó 6 betűjéből 2 azonos, ezért a megoldás:

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360.$$

c) Mivel a TATA szó 4 betűjéből 2-2 azonos, ezért a megoldás:

$$P_4^{2;2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6.$$

5. K2 Hány darab olyan tízjegyű szám van, amelyben minden számjegy pontosan egyszer szerepel?

A 10 különböző számjegy sorba rendezéseinek száma: $P_{10} = 10!$.
A 0-val kezdődőek nem adnak tízjegyű számot. Ezek száma: $P_9 = 9!$.
Ezek alapján a keresett tízjegyű számok száma:
$10! - 9! = 9! \cdot (10 - 1) = 9 \cdot 9! = 3\,265\,920$.

6. K2 Hányféleképpen lehet sorba rakni 5 különböző almát és 6 különböző körtét, ha az almák mindig a sor elején vannak?

Az almák sorba rendezéseinek száma: $P_5 = 5! = 120$.
A körték sorba rendezéseinek száma: $P_6 = 6! = 720$.
Vagyis a 11 gyümölcsöt a feltételeknek megfelelően $120 \cdot 720$, azaz 86 400-féleképpen lehet sorba rendezni.

7. K2 Egy automatába bedobtunk 3 db százas és 7 db kétszázas pénzérmét. Hányféle sorrendben tehettük ezt meg?

A fenti 10 érme sorba rendezéseinek száma: $P_{10}^{3;7} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$

8. K2 A páratlan számjegyek mindegyikének felhasználásával hány darab
a) ötjegyű;
b) ötjegyű, hárommal osztható;
c) ötjegyű, 9-re végződő;
d) ötjegyű, 13-mal kezdődő
szám készíthető?

a) $P_5 = 5! = 120$.
b) Mivel az $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ összeg nem osztható 3-mal, ezért a feladatban szereplő számok egyike sem osztható 3-mal.
c) Az 1, 3, 5, 7 számjegyek minden lehetséges sorba rendezése esetén tegyünk a végére egy 9-est. Vagyis a megfelelő számok száma: $P_4 = 4! = 24$.
d) Az 5, 7, 9 számjegyek minden lehetséges sorba rendezése esetén tegyünk az elejére 13-at. Vagyis a megfelelő számok száma: $P_3 = 3! = 6$.

9. K2 A páros számjegyek mindegyikének felhasználásával hány darab
a) ötjegyű;
b) ötjegyű, kilenccel osztható;
c) ötjegyű 4-gyel osztható;
d) ötjegyű, 10-zel osztható
szám készíthető?

---

a) A 0 nem állhat az első helyen, ezért a keresett számok száma: $5! - 4! = 4! \cdot (5 - 1) = 96$.
b) Mivel az $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ összeg nem osztható 9-cel, ezért a feladatban szereplő számok egyike sem osztható 9-cel.
c) A 4-gyel osztható számok utolsó két számjegyének mint kétjegyű számnak oszthatónak kell lenni 4-gyel. A rendelkezésünkre álló számokból ezek lehetnek a végződések:
04, 08, 20, 24, 28, 40, 48, 60, 64, 68, 80, 84.
Mind a 12 esetben a további 3 számjegyet tetszőleges sorrendben (vagyis 6-féleképpen) írhatjuk eléjük, ezért az összes eset száma: $12 \cdot 6 = 72$.
d) Ebben az esetben a 0 számjegyet a végére kell írnunk. A megoldások száma: $P_4 = 4! = 24$.

10. K2 Hányféle sorrendben rakhatjuk ki a magyar kártyából a nyolc piros és a nyolc makk lapot, ha egymás után különböző színű lapoknak kell következni?

A 8 piros és a 8 makk sorba rendezéseinek a száma is: $P_8 = 8!$. Bármelyik piros sorba rendezés esetén bármelyik makk sorba rendezést választhatjuk, és felváltva lerakjuk a különböző színű lapokat. Mivel kezdésként lehet piros vagy makk, ezért a megoldások száma:
$2 \cdot 8! \cdot 8! = 3\,251\,404\,800$.

11. K2 Egy 8 tagú társaság egy kerek asztalnál foglal helyet. Hányféleképpen ülhetnek le, ha a székek nem számozottak?

Egy embert leültethetünk egy tetszőleges székre, majd tőle például jobbra a többi hetet az összes lehetséges sorrendben. Vagyis a leültetések száma: $P_7 = 7! = 5040$.

12. K2 Hány eleme volt a halmaznak, ha az adott elemszámot 3-mal csökkentve a permutációk száma a 60-adára csökkent?

Legyen az elemszám n. A feladat szövege szerint: $n! = 60 \cdot (n - 3)!$. Oszthatunk $(n - 3)!$-sal: $(n - 2)(n - 1)n = 60$. Azaz három egymást követő pozitív egész szám szorzata 60. Ez csak $3 \cdot 4 \cdot 5$ lehet. Vagyis $n = 5$.

2. Variációk

1. K1 Egy vetélkedőn a döntő szereplői az első és a második helyért versenyeznek. Tudjuk, hogy pontosan 56 lehetőség van a két különböző díj megszerzésére. Egy versenyző maximum egy díjat kaphat. Hányan szerepelnek a döntőben?

A döntő szereplőinek legyen a száma n. Ekkor a feladat szövege szerint: $n \cdot (n - 1) = 56$.
A másodfokú egyenlet egyetlen pozitív egész megoldása az $n = 8$.
Vagyis a döntőben nyolcan szerepeltek.

2. K1 Hány darab háromjegyű szám képezhető a 24 368 szám számjegyeinek a felhasználásával, ha a számjegyek
a) nem ismétlődhetnek; *b)* ismétlődhetnek?

---

a) $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
b) $V_5^3(i) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

3. E1 Hány darab legfeljebb ötjegyű, természetes szám írható fel a hetes számrendszerben?

A hetes számrendszer számjegyei: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Az 1-jegyűek száma: 7.
A továbbiakban vigyáznunk kell, hogy a legmagasabb helyiértéken nem szerepelhet a 0 számjegy.
A 2-jegyűek száma: $6 \cdot 7 = 42$.
A 3-jegyűek száma: $6 \cdot 7^2 = 294$.
A 4-jegyűek száma: $6 \cdot 7^3 = 2058$.
Az 5-jegyűek száma: $6 \cdot 7^4 = 14\,406$.
Vagyis a keresett számok száma: $7 + 42 + 294 + 2058 + 14\,406 = 16\,807$.

Megjegyzés: Ha arra gondolunk, hogy például a 00126 egy háromjegyű természetes szám a hetes számrendszerben, akkor egyszerűbben is számolhattunk volna. Így minden helyiértéken 7 lehetőségünk van, vagyis $7^5 = 16\,807$.

4. K1 Írjuk fel a KERT szó betűiből képezhető hárombetűs (nem feltétlenül értelmes) szavakat, ha minden betű csak egyszer szerepelhet egy szóban!

A következő betűhármasokat használhatjuk:
K, E, R; K, E, T; K, R, T; E, R, T.
Mindegyik esethez hat sorrend tartozik, ezért a következő 24 esetet kapjuk:
KER, KRE, EKR, ERK, RKE, REK,
KET, KTE, EKT, ETK, TKE, TEK,
KRT, KTR, RKT, RTK, TKR, TRK,
ERT, ETR, RET, RTE, TER, TRE.

5. K1 Az iskolai *Ki mit tud?* döntőjébe tizenkét tanuló jutott. Az első öt helyezett kap öt különböző díjat. Hányféle sorrend alakulhat ki?

$V_{12}^5 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$.
Vagyis 95 040 sorrend alakulhat ki a döntőben.

6. K2 Hány ember indulhat azon az úszóversenyen, ahol az arany-, ezüst-, bronzérmek kiosztása 1320-féleképpen történhetne?

Legyen az indulók száma n. Ekkor a szöveg szerint: $n(n - 1)(n - 2) = 1320$.
Három egymást követő pozitív egész szám szorzata 1320 csak úgy lehet, ha a $10 \cdot 11 \cdot 12$-re gondolunk (se kisebbek, se nagyobbak nem jöhetnek szóba). Vagyis $n = 12$.
Az úszóversenyen 12-en indultak.

7. K2 Egy rejtvénypályázatra 62 jó megfejtés érkezett. A helyes megfejtést beküldők között sorsolással kiosztanak 3 különböző díjat. Egy megfejtő maximum egy díjat kaphat. Hányféle eredményt hozhat a sorsolás?

$V_{62}^3 = 62 \cdot 61 \cdot 60 = 226\,920$.
Vagyis 226 920-féle eredményt hozhat a sorsolás.

8. K2 Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben minden számjegy különböző?

Az első helyre 9 lehetőség adódik (a 0 nem jöhet szóba).
A második helyre nem írhatjuk amit az első helyre írtunk, de írhatjuk a 0 számjegyet, így ide is 9 lehetőség adódik.
A harmadik helyre 8 lehetőség van, hiszen az első két helyen használt számjegyek már nem használhatók.
Ezt a gondolatmenetet használva kapjuk a megfelelő számok számát:
$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$.

9. K2 Egy 28 fős osztályban az óra elején a tanár bejelenti, hogy ma hárman fognak felelni. Hányféleképpen alakulhat a felelők sorrendje?

$V_{28}^{3} = 28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$.
Vagyis 19 656 lehet a felelők sorrendje.

10. K2 Egy szakrendelésen 4 orvos rendel párhuzamosan egymás melletti rendelőkben. Az érkező betegek bármelyik orvoshoz bejelentkezhetnek a sorszámuk leadásával. Hányféleképpen jelentkezhet valamely napon az első 12 beteg a 4 orvosnál?

$V_{4}^{12}(i) = 4^{12} = 16\,777\,216$.
A jelentkezések száma 16 777 216.

3. Kombinációk

1. K2 Egy 28 fős osztály tanulói közül 6 tanuló képviseli az osztályt egy rendezvényen.
a) Hányféleképpen választható ki ez a 6 tanuló?
b) Hányféleképpen választható ki az a 22 tanuló, aki nem vesz részt ezen a rendezvényen?

a) $C_{28}^{6} = \binom{28}{6} = 376\,740$.
b) $C_{28}^{22} = \binom{28}{22} = \binom{28}{6} = 376\,740$.
Felhasználtuk az $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ összefüggést.

2. K1 Számítsuk ki!
a) $\binom{10}{3}$; *b)* $\binom{10}{4}$; *c)* $\binom{13}{10}$; *d)* $\binom{30}{28}$.

a) $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$.
b) $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$.
c) $\binom{13}{10} = \binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 286$.
d) $\binom{30}{28} = \binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{1 \cdot 2} = 435$.

3. K2 Az ötös lottó hazánk egyik legrégebbi számsorsjátéka: kilencven számból ötöt kell megjelölni. A játékos akkor nyer, ha a kisorsolt öt szám közül legalább kettőt eltalált, és akkor ér el telitalálatot, ha az általa megjelölt mind az öt szám egyezik a kisorsolt nyerőszámokkal. Ez a klasszikus lottó már 1957 óta játszható ebben a formában.
Hány darab különböző-féleképpen kitöltött lottószelvény képzelhető el egy játékhéten úgy, hogy azon
a) pontosan két találat legyen;
b) ne legyen találat;
c) ne legyen nyeremény?

---

a) Az 5 nyerőszámból valamelyik 2 eltalálásáról van szó. Ez $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen történhet. Minden ilyen számpárhoz a nem nyerő 85 számból bármelyik 3 mellé tehető.
Ez $\binom{85}{3} = 98\,770$-féleképpen történhet.
Vagyis 987 700 különbözőféleképpen kitöltött kettes találatos szelvény képzelhető el egy játékhéten.
b) Ilyenkor a nem nyerő 85 számból jelöltük be mind az ötöt. Ez $\binom{85}{5} = 32\,801\,517$-féleképpen történhet.
Vagyis 32 801 517-féleképpen kitöltött szelvény képzelhető el, amin nincs egyetlen találat sem.
c) Ha nincs találatunk és ha pontosan egy találatunk van, akkor sincs nyereményünk.
Ez utóbbi esetben az 5 nyerőszám valamelyikhez a nem nyerő 85 szám bármelyik 4-e mellé tehető. Ez $\binom{85}{4} = 2\,024\,785$-féleképpen történhet.
Vagyis 10 123 925 szelvény képzelhető el, amelyiken pontosan egy találat van.
Felhasználjuk a b) feladatrész eredményét: 32 801 517 + 10 123 925 = 42 925 442.
Ennyiféleképpen tölthető ki a lottószelvény, hogy ne legyen rajta nyeremény.

4. K2 A hatos lottó játékban negyvenöt számból hatot kell megjelölni. A játékos akkor nyer, ha a kisorsolt hat szám közül legalább hármat eltalált, és akkor ér el telitalálatot, ha az általa megjelölt mind a hat szám egyezik a kisorsolt nyerőszámokkal. A sorsoláson már kihúzták a 11, 23, 40 számokat. Hányféleképpen képzelhető el most a telitalálatos szelvény?

A maradék 42 számból még hármat sorsolnak. Ez $\binom{42}{3} = 11\,480$-féleképpen történhet.

5. K2 A skandináv lottó játékban harmincöt számból hetet kell megjelölni. A sorsoláson hét számot géppel, hét számot kézzel húznak ki. Akkor nyer a játékos, ha bármelyik kisorsolt hét számból legalább négy találata van. Egy szelvény az ikersorsolás mindkét számsorsolásán automatikusan részt vesz, és akár mindkét sorsoláson lehet találata.
a) Ha valaki a 16, 21, 23 és 25 számokat minden szelvényen be szeretné jelölni, akkor összesen hány játékszelvényt tudna különböző módon kitölteni?
b) Egy játékosnak az ötödik nyerőszám kihúzása után öt találata van. Minimum hány szelvénnyel játszhatott, ha már biztosan tudja, hogy lesz telitalálata?

---

a) A játék szabályai szerint a maradék 31 számból még 3 számot kell megjelölnie.
Ez $\binom{31}{3} = 4495$-féleképpen történhet.
b) Akkor lehet biztos a telitalálatban, ha minden szelvényén szerepel az eddig kihúzott öt szám, és a maradék 30 számból pedig az összes lehetséges számpárt megjátszotta minden szelvényén. Ez $\binom{30}{2} = 435$-féleképpen történhet. Vagyis minimum 435 szelvénnyel játszott.

6. E1 A 24 fős osztályban 3 jelölt van az osztálytitkári tisztség betöltésére. Mindenki (a jelöltek is) egy jelöltre szavaznak. Hányféle eredménye lehet a szavazásnak?

A szavazás végén a 32 szavazólap mindegyikén a három jelölt valamelyikének neve szerepel. A szavazólapok sorrendje nem számít. Csak az számít, hogy a jelöltek külön-külön hány szavazatot kaptak. A szavazás minden eredménye a három jelölt egy 32-edosztályú ismétléses kombinációja. Ezek száma:

$$C_3^{32}(i)=\binom{3+32-1}{32}=\binom{34}{32}=\binom{34}{2}=\frac{34\cdot 33}{1\cdot 2}=561.$$

Vagyis 561-féle eredménye lehet a szavazásnak.

7. E1 A 32 lapos magyar kártyából 5 lapot osztunk. Hányféle eset lehetséges, ha csak a színeket vesszük figyelembe?

A négy színből sorrendre való tekintet nélkül ötös csoportokat készítünk, és ezek számát kell meghatároznunk. Ezt 4 elem 5-ödosztályú ismétléses kombinációinak száma adja meg:

$$C_4^5(i)=\binom{4+5-1}{5}=\binom{8}{5}=56.$$

Vagyis 56 lehetőség van.

4. Binomiális tétel

1. K2 Írjuk fel rendezett többtagú kifejezésként a következő hatványokat!

a) $(x+2)^4$; *b)* $(3x-1)^6$; *c)* $(2x+y)^5$; *d)* $(3x-2y)^4$.

a) $(x+2)^4=\binom{4}{0}x^4\cdot 2^0+\binom{4}{1}x^3\cdot 2^1+\binom{4}{2}x^2\cdot 2^2+\binom{4}{3}x^1\cdot 2^3+\binom{4}{4}x^0\cdot 2^4=$

$=x^4+8x^3+24x^2+32x+16.$

b) $(3x-1)^6=\binom{6}{0}\cdot(3x)^6-\binom{6}{1}\cdot(3x)^5+\binom{6}{2}\cdot(3x)^4-\binom{6}{3}\cdot(3x)^3+\binom{6}{4}\cdot(3x)^2-\binom{6}{5}\cdot(3x)+\binom{6}{6}=$

$=729x^6-1458x^5+1215x^4-540x^3+135x^2-18x+1.$

c) $(2x+y)^5=\binom{5}{0}(2x)^5y^0+\binom{5}{1}(2x)^4y^1+\binom{5}{2}(2x)^3y^2+\binom{5}{3}(2x)^2y^3+\binom{5}{4}(2x)^1y^4+\binom{5}{5}(2x)^0y^5=$

$=32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5.$

d) $(3x-2y)^4=81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4.$

2. K2 Írjuk fel a következő hatványok rendezett többtagú alakjában a hatodfokú tag együtthatóját!

a) $(x+5)^6$; *b)* $(2x-1)^9$; *c)* $(x-2)^8$; *d)* $(3x+2)^7$.

A binomiális tétel alapján felírjuk a hatodfokú tagot, ekkor látjuk az együtthatóját is.

a) $\binom{6}{0}x^6=x^6$, vagyis az együttható: 1.

b) $\binom{9}{3}(2x)^6(-1)^3=-5376x^6$, vagyis az együttható: –5376.

c) $\binom{8}{2}x^6\cdot(-2)^2=112x^6$, vagyis az együttható: 112.

d) $\binom{7}{1}(3x)^6\cdot 2^1=10\,206x^6$, vagyis az együttható: 10 206.

3. K2 Adjuk meg egy binomiális együtthatóval a következő összegeket!

a) $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}$;

b) $\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}$.

---

a) Alkalmazzuk az $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$ összefüggést többször egymásután, de előtte a $\binom{3}{3}$ helyére írjunk $\binom{4}{4}$-et:

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}=\underbrace{\binom{4}{4}+\binom{4}{3}}_{\binom{5}{4}}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}=\underbrace{\binom{5}{4}+\binom{5}{3}}_{\binom{6}{4}}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}=$$

$$=\underbrace{\binom{6}{4}+\binom{6}{3}}_{\binom{7}{4}}+\binom{7}{3}=\binom{7}{4}+\binom{7}{3}=\binom{8}{4}.$$

Vagyis az öt binomiális együttható összege: $\binom{8}{4}$.

b) Írjuk át az együtthatókat:

$$\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}=\binom{3}{3}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}.$$

Most már az *a)* feladatban látottak alapján járhatunk el:

$$\binom{3}{3}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}=\binom{8}{3}.$$

4. E1 Igazoljuk, hogy az n elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n lesz!

Az állítás a következő alakban írható:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Ez pedig a binomiális tétel alapján igaz. (Alkalmazzuk a tételt $a=1$, $b=1$ esetén.)

5.E1 Igazoljuk, hogy ha a Pascal-háromszög n-edik sorában a számokat váltakozó előjellel összeadjuk, akkor 0-t kapunk!

Írjuk fel a binomiális tételt $a=1$ és $b=-1$ esetén:

$$(1-1)^n=\binom{n}{0}\cdot 1^n\cdot(-1)^0+\binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot(-1)^1+\ldots+\binom{n}{n}\cdot 1^0\cdot(-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots.$$

Vagyis valóban igaz:

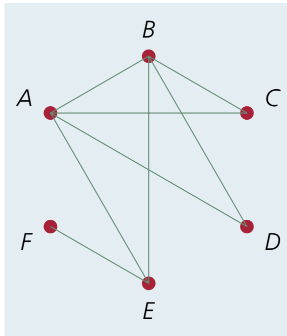
$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots.$$

II Gráfok

5. Vegyes gráfelméleti feladatok (Emelt szint)

1. K1 Rajzoljunk egy olyan 6 pontú összefüggő gráfot, melynek csúcsainak fokszámai: 4, 4, 2, 2, 3, 1, és adjuk meg a gráf egy nyílt Euler-vonalát!

A feltételeknek eleget tevő egyik lehetséges gráf:

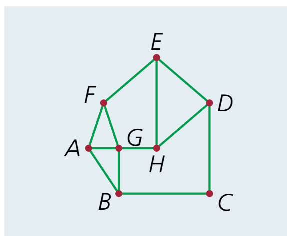


A gráfnak két páratlan fokú pontja van, így biztosan van nyílt Euler-vonala. Mivel az *F* és *E* csúcsok fokszáma páratlan, ezért az Euler-vonal e két pont egyikéből indul, és a másikban végződik. Egy lehetséges Euler-vonal:
$FE - EA - AB - BC - CA - AD - DB - BE$.

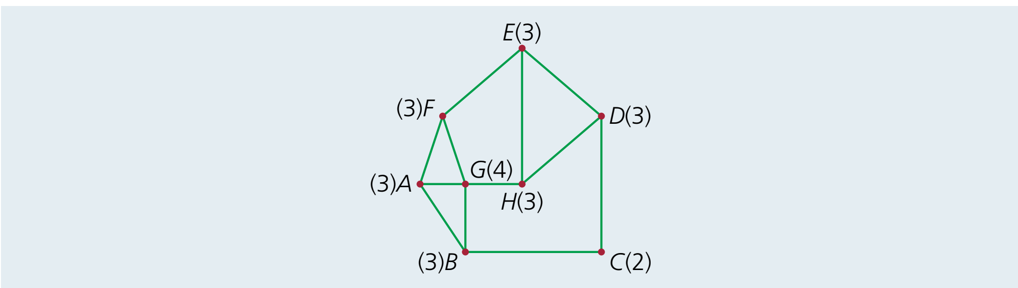
2. K1 Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy *n* pontú teljes gráfnak legyen Euler-vonala?

Az *n* pontú teljes gráf minden csúcsának a fokszáma $n - 1$. Ezek szerint akkor és csak akkor van Euler-vonala egy ilyen gráfnak, ha minden csúcsának a fokszáma páros, vagyis $n - 1 = 2k$, ahonnan $n = 2k + 1$. Ezek szerint egy *n* pontú teljes gráfnak akkor és csak akkor van Euler-vonala (mégpedig zárt), ha a csúcsok száma páratlan.

3. K1 Hány élt kellene behúzni az ábrán látható nyolcpontú gráfba, hogy
a) teljes gráf legyen?
b) legyen Euler-vonala?

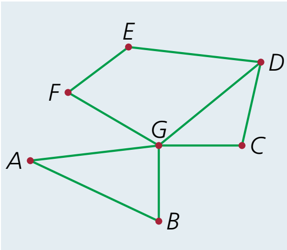


a) Írjuk be a gráfba az egyes csúcsok fokszámát.



A csúcsok fokszámának összege: $6 \cdot 3 + 4 + 2 = 24$, tehát e gráf éleinek a száma 12. Mivel a nyolcpontú teljes gráf éleinek a száma $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, ezért e gráfba még $28 - 12 = 16$ élt kellene behúzni ahhoz, hogy teljes gráf legyen.

b) A gráfnak 6 db páratlan fokú pontja van. Ha ezek közül valamelyik kettőt összekötjük, akkor e két pont fokszáma eggyel növekszik, így már csak 4 db páratlan fokú pontja lesz. Ha e négyből ismét összekötünk kettőt, akkor pontosan két páratlan fokú pontja lesz a gráfnak, így lesz benne nyílt Euler-vonal. Tehát két él behúzásával (pl. *BF* és *AD*) elérhetjük, hogy legyen Euler-vonal. Ekkor az *E* és *H* pontok fokszáma lesz páratlan, így a nyílt Euler-vonal e két pont egyikéből indul, és a másikban végződik.



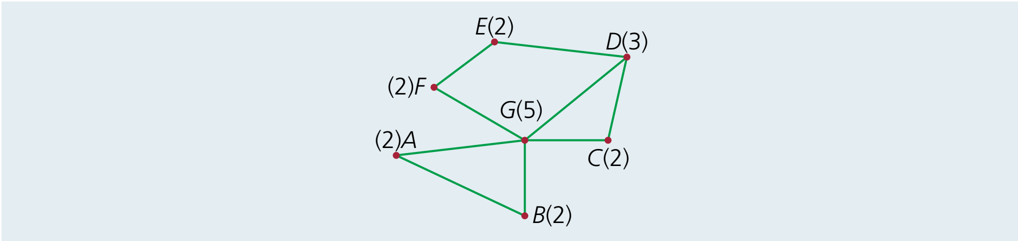
4. K1 Az ábrán egy város 7 nevezetessége és az azokat összekötő úthálózat látható. Egy turistacsoport úgy szeretné megtekinteni a nevezetességeket, hogy minden úton egyszer és csak egyszer haladjanak el.

a) Tervezzük el a sétautat!

b) Sajnos – előre nem látható okok miatt – az F-ből G-be vezető utat felbontották, így járhatatlanná vált. Ekkor hogyan tervezzük a sétautat?

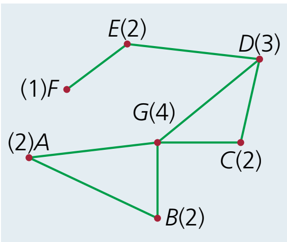
---

a) Írjuk be a gráf csúcsainak a fokszámát.



A *G* és *D* csúcsok fokszáma páratlan, így e két pont valamelyikéből kell elindulnunk. Egy lehetséges útvonal a következő:

GD – DC – CG – GB – BA – AG – GF – FE – ED

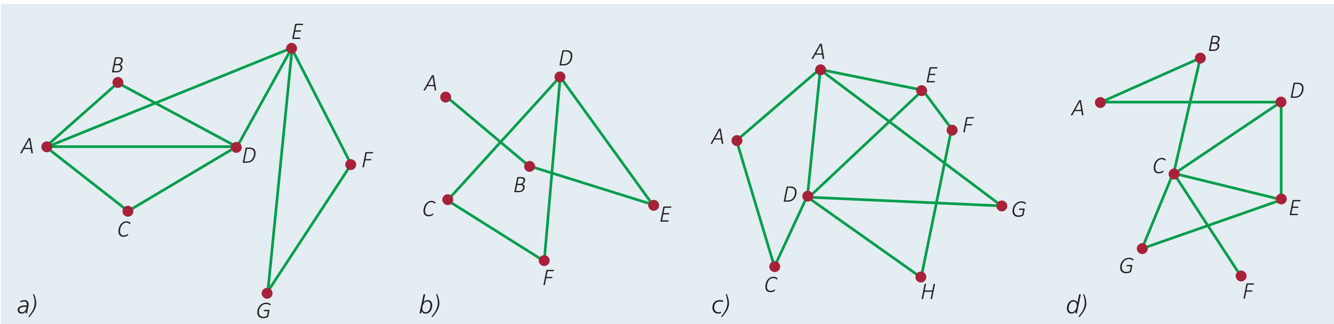


b) Ha az *FG* útvonal megszűnik, akkor *F* és *G* fokszáma eggyel csökken, így *F* fokszáma páratlan, *G* fokszáma páros lesz.

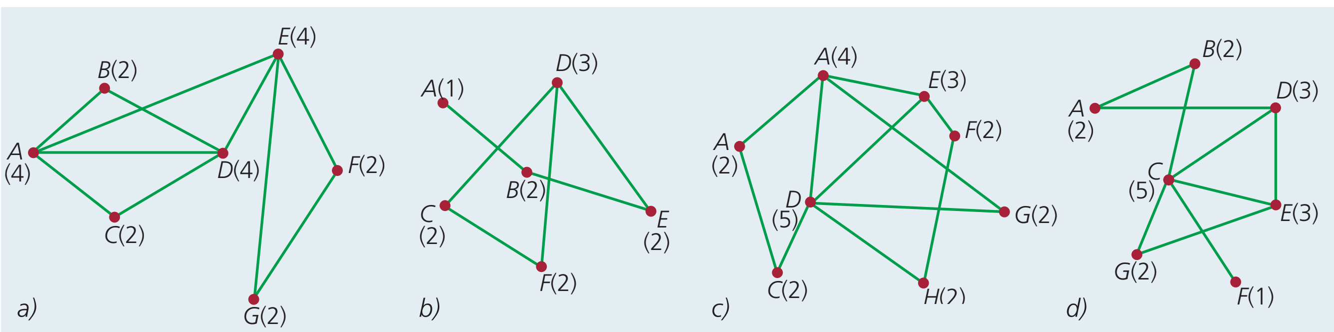
Most *F* és *D* fokszáma páratlan, tehát a sétaút e két pont valamelyikéből indul. Egy lehetséges útvonal:

FE – ED – DG – GA – AB – BG – GC – CD.

5. K1 Az alábbi gráfok közül melyiknek van nyílt vagy zárt Euler-vonala? Amelyiknek van, annak rajzoljuk meg!



Írjuk be az egyes gráfok csúcsainak a fokszámait!



a) esetben minden csúcs fokszáma páros, tehát van zárt Euler-vonal.

b) esetben két páratlan fokú csúcs van, tehát van a gráfnak nyílt Euler-vonala.

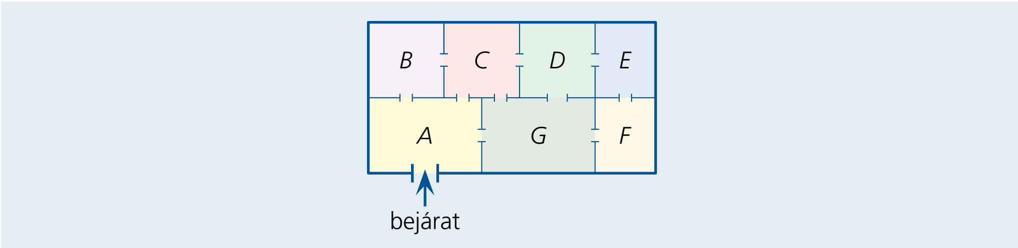
c) esetben ugyancsak két páratlan fokú csúcs van, tehát van a gráfnak nyílt Euler-vonala.

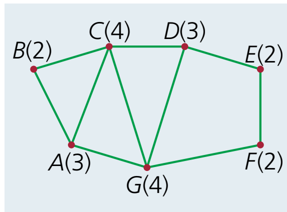
d) esetben 4 páratlan fokú pontja van a gráfnak, tehát sem nyílt, sem zárt Euler-vonala nincs.

6. K1 Egy 8 pontú gráf minden csúcsának a fokszáma páratlan. Legalább hány új élt kell behúznunk, hogy a gráfnak legyen Euler-vonala?

Legyenek a gráf csúcsai A, B, C, D, E, F, G és H. Kössük össze A-t B-vel, majd C-t D-vel, végül E-t F-fel. Ekkor az A, B, C, D, E és F pontok fokszámai párosak lesznek, míg a G és H pontok fokszámai páratlanok, így lesz a gráfnak nyílt Euler-vonala. Tehát 3 él behúzása után elérhetjük, hogy legyen Euler-vonal. Az eljárásból az is következik, hogy 3-nál kevesebb él behúzásával nem érhető el, hogy legyen Euler-vonal.

7. K2 Az ábrán egy kiállítás földszintjének alaprajza látható. Egy látogató éppen kedvenc festménye előtt áll, és eddig minden ajtón pontosan egyszer ment át. Melyik helyiségben van a látogató kedvenc festménye?





Modellezzük a földszint alaprajzát egy olyan gráffal, melynek csúcsai az egyes helyiségek, és két csúcs pontosan akkor van összekötve egy éllel, ha a megfelelő helyiségek között van ajtó. A gráfban a csúcsok fokszámát is feltüntettük.
Ha a látogató minden ajtón pontosan egyszer ment át, (azaz a gráf minden élén pontosan egyszer haladunk keresztül), akkor kell lennie a gráfban nyílt Euler-vonalnak. Mivel két csúcs fokszáma páratlan (A és D), de a látogató csak A-ból indulhatott (hiszen a bejárat után A-ba kerül, és innen indulhat csak), ezért csak a D helyiségben lehet a látogató kedvenc festménye.
Nézzük a látogató egy lehetséges útvonalát:
$AB - BC - CA - AG - GC - CD - DG - GF - FE - ED.$

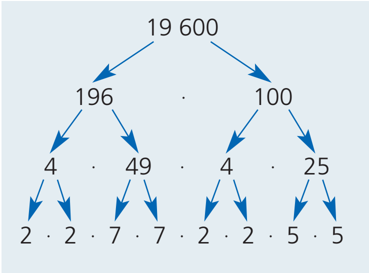
8. K2 Hány db olyan pozitív egész n szám van, melyre teljesül, hogy az n pontú ($10 \le n \le 30$) teljes gráf éleinek a száma osztható 5-tel ?

Ha $\frac{n(n-1)}{2} = 5k$, akkor $n(n-1) = 10k$. Az a kérdés tehát, hogy két szomszédos egész szám szorzata milyen n esetén végződik 0-ra. A II.2.7. feladatában megvizsgáltuk két szomszédos egész szám szorzatának lehetséges végződéseit. Az ottani eredményt felhasználva arra jutunk, hogy $n(n-1)$ akkor végződik 0-ra, ha n utolsó számjegye 1, 5, 6 vagy 0. Ezek szerint a feltételeknek eleget tevő gráf csúcspontjainak száma: 10, 11, 15, 16, 20, 21, 25, 26, 30, vagyis 9 darab a feltételeknek eleget tevő pozitív egész szám van.

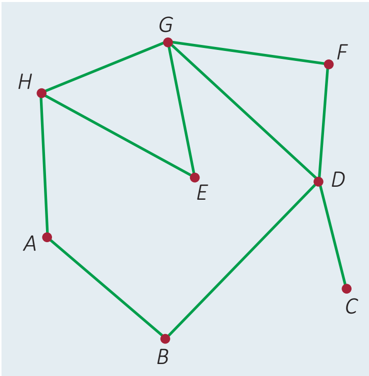
9. K2 Egy n pontú teljes gráfnak nincs Euler-vonala. Ha azonban letöröljük 5 olyan élét, melyek közül semelyik kettőnek nincs közös csúcsa, akkor lesz nyílt Euler-vonala. Hány pontú lehet az eredeti teljes gráf?

Ha letörlünk 5 olyan élt, melyek közül semelyik kettőnek nincs közös csúcsa, akkor 10 csúcs fokszáma változott 1-gyel, azaz 10 db páros fokú pontja lesz a gráfnak. Mivel ekkor lesz nyílt Euler-vonal, ezért 2 db páratlan fokú pont is lesz. Ezek szerint az eredeti gráfnak 12 csúcsa volt.

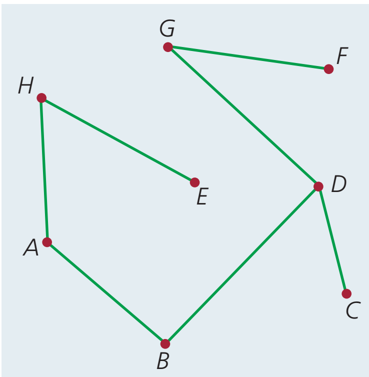
10. K2 Szemléltessük egy fagráffal a 19 600 prímtényezős felbontását!



11. K2 Hány kör található a ábrán látható 8 pontú gráfban? Hány élét kellene letörölnünk e gráfnak, hogy 8 pontú fagráfot kapjunk?



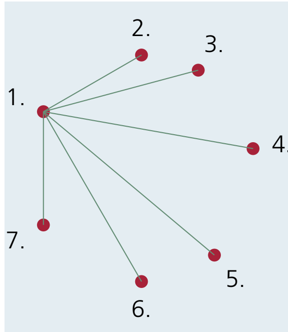
A gráfban 6 kör található:
HEG, HABDG, DFG, HABDFG, HABDGE, HABDFGE.
A gráfnak 10 éle van. A 8 pontú gráfnak 7 éle van. Ezek szerint 3 élt mindenképpen le kell törölnünk, hogy 8 pontú fagráfot kapjunk. Ennyi elegendő is; töröljük le például a HG, EG és FD éleket:



12. E1 Igazoljuk, hogy bármely összefüggő gráf néhány új él behúzásával olyan gráffá alakítható, melynek van Euler-vonala!

Bármely összefüggő gráfban a páratlan fokú pontok száma páros; legyen tehát az ilyen pontok száma $2k$. E pontok közül valamelyik kettőt összekötve e két pont fokszáma eggyel nő, így páros lesz. Ekkor a páratlan fokú pontok száma $(2k-2)$-re csökken. E $2k-2$ páratlan fokú pont közül ismét kettőt összekötve azok száma páros lesz, tehát ekkor a páratlan fokú pontok száma már csak $2k-4$. Az eljárást folytatva (mindig két páratlan fokú pontot összekötve) $k-1$ lépés után elérjük, hogy pontosan két páratlan fokú pontja lesz a gráfnak, így lesz nyílt Euler-vonala. Kimondhatjuk tehát, hogy ha a gráfnak $2k$ db páratlan fokú pontja van, akkor $k-1$ új él behúzásával lesz nyílt Euler-vonala, k db él behúzásával pedig lesz zárt Euler-vonala.

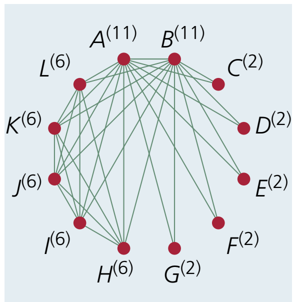
13. E1 Egy iskolák közötti teniszbajnokság döntőjébe 7 játékos jutott be. A döntőben mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Egy néző jegyezte az egyes mérkőzések kimenetelét. Valamikor így szólt a szintén néző barátjához. *„Az 1-es számú versenyző már minden mérkőzését lejátszotta, a 2-es számú már öt mérkőzését lejátszotta, viszont a 4-es és a 7-es számú versenyzők még csak egy-egy mérkőzést játszottak.”* Erre a szomszéd így válaszolt: *„Biztosan tévedsz.”*. Honnan tudta ezt a szomszéd?



Készítsünk egy olyan gráfot, mellyel azt tudjuk szemléltetni, amit már tudunk. Az 1. számú játékos az összes többivel össze van kötve.
A 2. számú játékost a 3., 4., 5., 6., 7. pontok közül 4-gyel össze kell kötnünk, hiszen ő már 5 mérkőzést lejátszott (egyet az elsővel). Ezek szerint a 2. számú játékos a 4-es és a 7-es számú játékosok valamelyikével biztosan össze lesz kötve. Ez viszont azt jelenti, hogy vagy a 4-es, vagy a 7-es játékos (esetleg mindkettő) már legalább két mérkőzést játszott.

14. E1 *a)* Egy pedagógiai konferencia középiskolai szekciójába 12 fő jelentkezett. A 12 fős csoport két tagja (a moderátorok) a csoportból mindenkit ismertek. Öt olyan tagja volt a csoportnak, akik a moderátorokon kívül senkit sem ismertek; a szekció többi tagja közül pedig mindenki mindenkit ismert (az ismeretség minden esetben kölcsönös). Az első szekcióülés előtt, akik nem ismerték egymást, kézfogással bemutatkoztak egymásnak. Hány kézfogás történt?

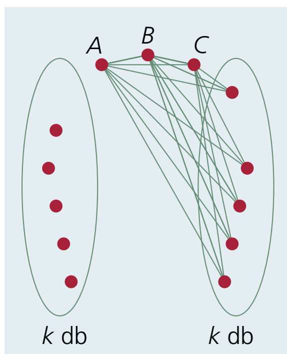
b) Az óvodai szekciónak három moderátora volt; ők szintén mindenkit ismertek a csoportból. A csoport többi tagjának a fele a moderátorokon kívül senkit sem ismert, míg a csoport többi tagja közül itt is mindenki mindenkit ismert (természetesen az ismeretség itt is minden esetben kölcsönös). Ebben a szekcióban is bemutatkoztak egymásnak azok, akik nem ismerték egymást, s így ebben a csoportban 35 kézfogásra került sor. Hány főből áll az óvodai szekció?



a) Készítsük el a 12 fős társaság ismeretségi gráfját. Legyenek A és B a moderátorok, C, D, E, F és G azok a személyek, akik a moderátorokon kívül senki mást nem ismertek; a többiek pedig H, I, J, K és L.
Azt kell meghatároznunk, hogy e gráfba hány élt kellene még berajzolnunk, hogy teljes gráfot kapjunk.
Az A és B pontok fokszáma 11-11, C, D, E, F és G pontok mindegyikének a fokszáma 2, H, I, J, K és L pontok mindegyikének a fokszáma 6. Így a gráf pontjai fokszámainak összege:
$2 \cdot 11 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 62$,
vagyis a gráf jelenleg meglevő éleinek a száma 31.
Mivel a 12 pontú teljes gráf éleinek a száma $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$, és jelenleg 31 éle van, így a hiányzó élek száma $66 - 31 = 35$. Tehát a szekcióülés előtt 35 kézfogásra került sor.

Megjegyzés: Másképpen is kiszámolhattuk volna a meglevő éleket. Az A, B, H, I, J, K és L pontok egy 7 pontú teljes gráfot alkotnak, így ezek éleinek a száma $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$. Ezeken kívül van még C, D, E, F és G pontokból induló 2-2 él, vagyis $5 \cdot 2 = 10$ él. Ezek szerint a meglevő élek száma $21 + 10 = 31$, tehát a hiányzó élek száma $66 - 31 = 35$.

Azt is megtehettük volna, hogy közvetlenül a hiányzó éleket számoljuk össze. A hiányzó élek egyrészt a C, D, E, F és G pontokból az A és B pontokon kívül az összes többi pontba húzott élek; ezek száma tehát $5 \cdot 5 = 25$, továbbá a C, D, E, F és G pontok alkotta ötpontú teljes gráf éleinek a száma, vagyis $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Tehát a hiányzó élek száma $25 + 10 = 35$.



b) Legyen A, B, C a három moderátor. Legyen k db olyan személy, akik a moderátorokon kívül senkit sem ismertek. Ekkor a csoport többi tagjai (ugyancsak k db személy) közül mindenki mindenkit ismert.
Ekkor a gráfnak $2k + 3$ pontja van.
A három moderátor és azok, akik közül mindenki mindenkit ismert együtt egy $k + 3$ pontú teljes gráfot alkotnak, így ezeknek a meglevő éleknek a száma

$$\frac{(k+3)(k+2)}{2}.$$

Azok a személyek, akik csak a moderátorokat ismerik $3k$ élt jelentenek, így a gráf meglevő éleinek a száma

$$\frac{(k+3)(k+2)}{2}+3k.$$

A $2k+3$ pontú teljes gráf éleinek a száma:

$$\frac{(2k+3)(2k+2)}{2},$$

így a meglevő gráf hiányzó éleinek a száma:

$$\frac{(2k+3)(2k+2)}{2}-\frac{(k+3)(k+2)}{2}-3k=35,$$

$$4k^2+10k+6-k^2-5k-6-6k=70,$$

$$3k^2-k-70=0,$$

$$k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+840}}{6}=\frac{1\pm 29}{6}, \qquad k_1=5, \quad k_2=-\frac{28}{6}.$$

A negatív megoldás nyilván érdektelen, így $k=5$.
Tehát az óvodai szekciónak $2k+3=13$ tagja volt.

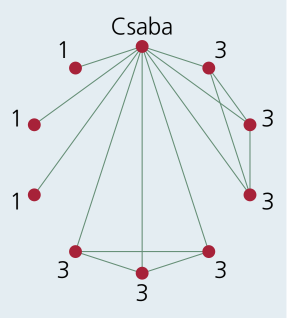
Megjegyzés: Természetesen most is megtehetjük, hogy közvetlenül a hiányzó éleket számoljuk össze. A hiányzó élek abból a k db pontból indulnak, melyek csak az A, B és C pontokkal vannak összekötve. E pontok mindegyikét összeköthetjük a gráf azon k db pontjával, melyek közül mindegyik mindegyikkel össze van kötve: ez összesen $k\cdot k=k^2$ db pont. Továbbá ezen k db pont közül még mindegyiket mindegyikkel összeköthetjük. Ez utóbbi egy k pontú teljes gráfot jelent, tehát $\frac{k(k-1)}{2}$ hiányzó élt. Ezek szerint a hiányzó élekre:

$$k^2+\frac{k(k-1)}{2}=35, \qquad \text{azaz} \qquad 2k^2+k^2-k=70,$$

$$3k^2-k-70=0,$$

s így ugyanahhoz a másodfokú egyenlethez jutottunk, mint az eredeti megoldásnál.

15. E1 Csabi partit rendezett, ahová 9 főt hívott meg. A társaságból Csabi mindenkit ismert. 3 olyan személy volt a társaságban, akik Csabin kívül senki mást nem ismertek. A társaság többi tagjának Csabán kívül még 2-2 ismerőse volt (az ismeretség minden esetben kölcsönös). Azok, akik nem ismerték egymást kézfogással bemutatkoztak egymásnak. Hány kézfogásra került sor?



Készítsünk egy lehetséges gráfot, mellyel a társaságban meglevő ismeretségeket szemléltetjük, és írjuk a gráf csúcsai mellé a csúcs fokszámát. A gráf egy csúcsának (amelyik Csabának felel meg) a fokszáma 9. Három csúcsának a fokszáma 1, a többi csúcs fokszáma 3 (lásd ábra).
Ezek szerint a gráf csúcsai fokszámának összege:

$$9+6\cdot 3+3=30.$$

A gráf éleinek a száma a fokszámok összegének a fele, azaz e gráfnak 15 éle van. Mivel a 10 pontú teljes gráf éleinek a száma

$$\frac{10\cdot 9}{2}=45,$$

így a gráfnak még $45-15=30$ éle hiányzik. Tehát, ha az ismeretlenek kézfogással bemutatkoznak egymásnak, akkor 30 kézfogásra kerül sor.

16. E1 Egy társaságban (ahol a fiúk is és a lányok is egynél többen voltak) a lányok és fiúk először külön váltak; minden lány minden lánnyal, és minden fiú minden fiúval koccintott egyszer. Így a lányok közötti koccintások száma 6-tal volt több, mint a fiúk közötti koccintások száma. Ezután a fiúk és a lányok összevegyültek; ekkor mindenki mindenkivel koccintott egyszer. Hány koccintás hallatszott ekkor?

Legyen f a fiúk, l a lányok száma. Ekkor a feltételek szerint

$$\frac{f(f-1)}{2}+6=\frac{l(l-1)}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad f^2-f+12=l^2-l,$$

$$l^2-f^2+f-l=12, \qquad \text{vagyis} \qquad (l-f)(l+f)-(l-f)=12,$$

$(l-f)(l+f-1)=12.$
Tehát a 12-t kell felbontanunk két pozitív egész szám szorzatára, mivel a szorzat mindkét tényezője pozitív egész szám: $12=1\cdot 12=2\cdot 6=3\cdot 4$. Figyelembe véve, hogy $l-f<l+f-1$, az alábbi esetek lehetségesek:

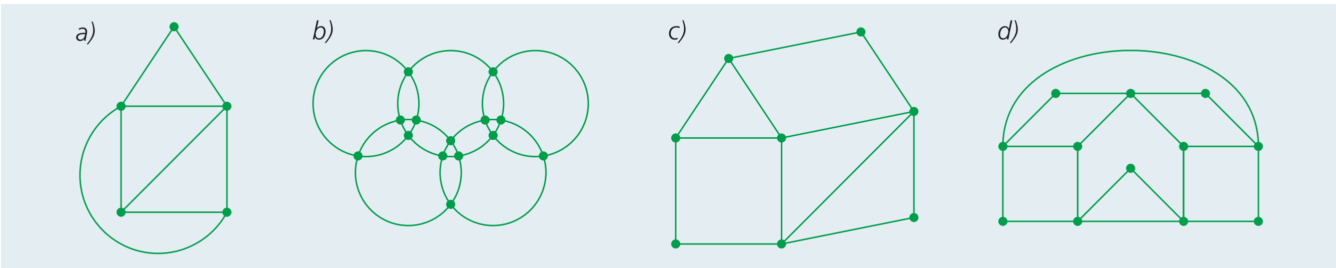
1. $l-f=1$ és $l+f-1=12$. A két egyenletet összeadva
   $2l=14$, azaz $l=7$, és ezzel $f=6$.
2. $l-f=2$ és $l+f-1=6$. Most a két egyenlet összegéből $2l=9$, amiből nem kapunk l-re egész megoldást.
3. $l-f=3$ és $l+f-1=4$. Ekkor $l=4$, és ezzel $f=1$, de ez sem lehetséges, hiszen a feltételek szerint mindkét nemből 1-nél többen voltak a résztvevők.

Ezek szerint csak $l=7$ és $f=6$ lehetséges. Tehát a társaságban összesen 13 személy volt, így – amikor mindenki mindenkivel koccintott – összesen $\frac{13\cdot 12}{2}=78$ koccintás hallatszott.

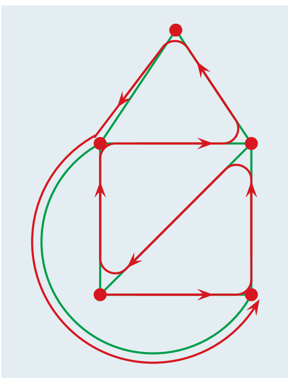
17. E1 Bejárható-e az 5-ször 5-ös sakktábla lóugrással úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépjünk és visszatérjünk a kiinduló mezőre?

A lóugrásnál mindig színt váltunk, világos mezőről sötétre lépünk és fordítva. A 25. lépésben ismét a kiinduló mezőn kellene állnunk, de ez lehetetlen, mert minden páratlan sorszámú lépéssel a kezdő mezővel ellenkező színre lépünk.

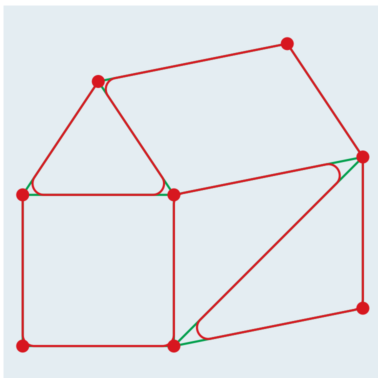
18. E1 Rajzoljuk meg egy vonallal, a ceruzánk felemelése nélkül az ábrán látható gráfokat!



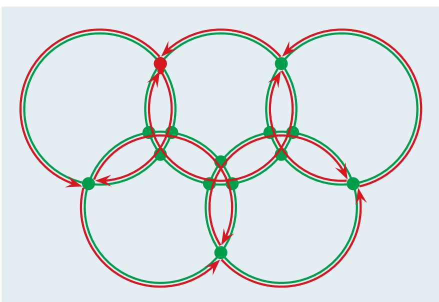
a)



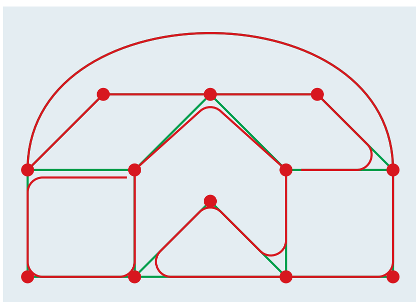
c)



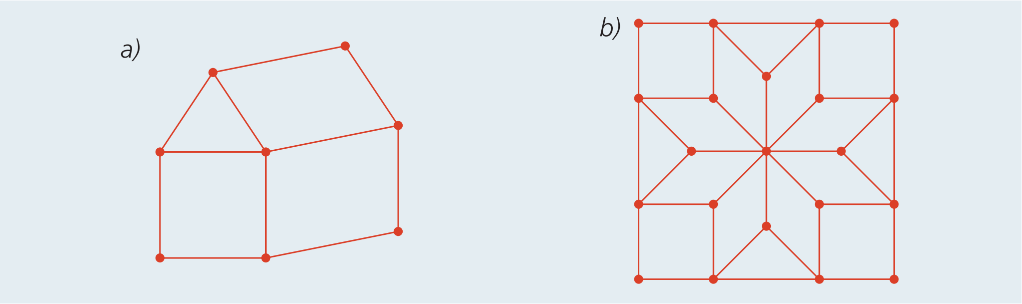
b)



d)

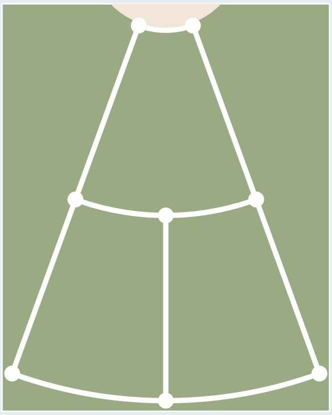


19. E1 Miért nem lehet egy vonallal, a ceruzánk felemelése nélkül az ábrán látható gráfokat megrajzolni?



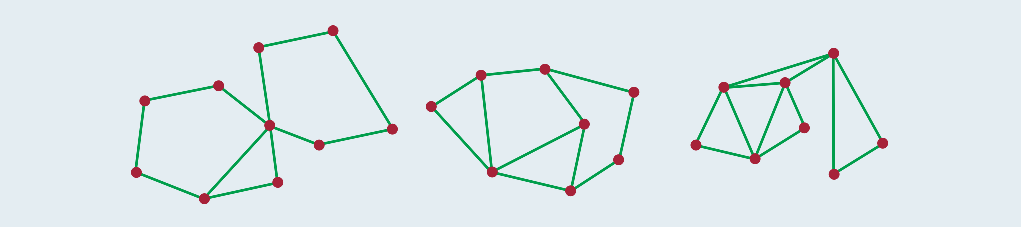
a) Kettőnél több páratlan fokszámú csúcsa van.
b) Kettőnél több páratlan fokszámú csúcsa van.

20. E1 Miért nem lehet a fertődi Esterházy-kastély parkjában *(ábra)* egy olyan sétát tenni, amely során minden úton áthaladunk egyszer és az indulási helyre visszajutunk?

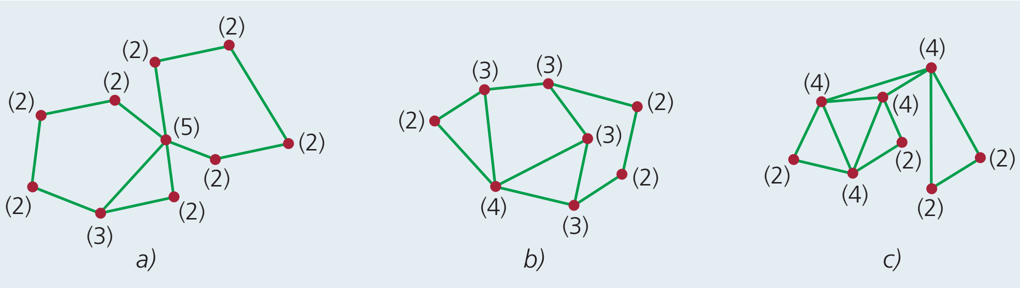


Van páratlan fokszámú csúcs, ezért nem lehet a feltételeknek megfelelően végig járnia a park útjait.

21.E1 Az alábbi gráfok közül melyek azok, amelyek lerajzolhatók a ceruzánk felemelése nélkül úgy, hogy minden szakaszon csak egyszer menjünk át?



Egy gráf akkor és csak akkor rajzolható le úgy, hogy közben nem emeljük fel a ceruzánkat és minden élen egyszer és csak egyszer megyünk át, ha van a gráfnak (nyílt vagy zárt) Euler-vonala. Írjuk be az egyes gráfok csúcsainak a fokszámait!
a) esetben a gráfnak két páratlan fokszámú pontja van, tehát van a gráfnak nyílt Euler-vonala.
b) esetben a gráfnak 4 db páratlan fokszámú pontja van, így sem nyílt, sem zárt Euler-vonala nincs a gráfnak.
c) esetben minden csúcs fokszáma páros, tehát a gráfnak van zárt Euler-vonala.



22. E1 Igazoljuk, hogy bármely fagráfnak van legalább két 1 fokszámú pontja!

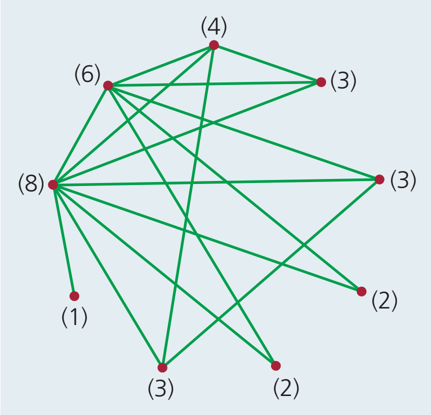
Először azt mutatjuk meg, hogy bármely fagráfnak van legalább egy db 1 fokszámú pontja. Tegyük fel, hogy állításunk nem igaz, vagyis minden pont fokszáma legalább 2 (0 fokszámú pont nem lehet, hiszen minden fagráf összefüggő). Ha az n pontú fagráf minden csúcsának a fokszáma legalább 2, akkor a fokszámok összege legalább $2n$, vagyis az élek száma legalább n. Ez azonban lehetetlen, hiszen az n pontú fagráf éleinek a száma $n-1$.
Tehát a fagráfnak van 1 fokszámú csúcsa. De egy db ilyen nem lehetséges, hiszen a páratlan fokú csúcsok száma páros. Ezek szerint minden fagráfban van legalább két db 2 fokszámú csúcs.

23. E1 Adott egy n pontú fagráf és egy k pontú fagráf, melyeknek nincs közös csúcsuk. Igazoljuk, hogy ha e két gráf egy-egy pontját összekötjük, akkor újabb fagráfot kapunk!

Az n pontú fagráf éleinek a száma $n+1$, a k pontú fagráf éleinek a száma $k+1$. Ha e gráfok egy-egy pontját összekötjük egy éllel, akkor egy összefüggő gráfot kapunk, melynek élei az eredeti gráfok élei és az egy db új összekötő él. Ezek szerint a keletkezett gráf csúcsinak a száma $n+k$, éleinek a száma pedig $n-1+k-1+1=n+k-1$, vagyis eggyel kisebb az csúcsok számánál, tehát ismét fagráfot kaptunk.

24. E1 Egy 9 pontú gráf csúcsainak fokszáma: 8, 6, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1. Hány élét kell letörölnünk a gráfnak, hogy 9 pontú fagráfot kapjunk?

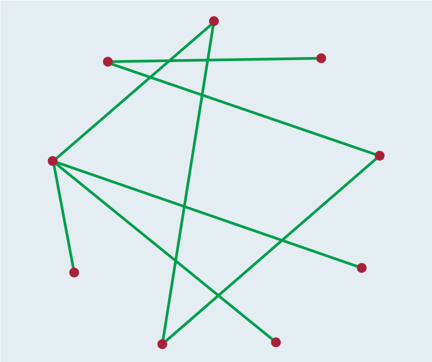
Először készítsük el a kérdéses 9 pontú gráfot (lásd *ábra*)!



A gráf csúcsai fokszámainak összege:

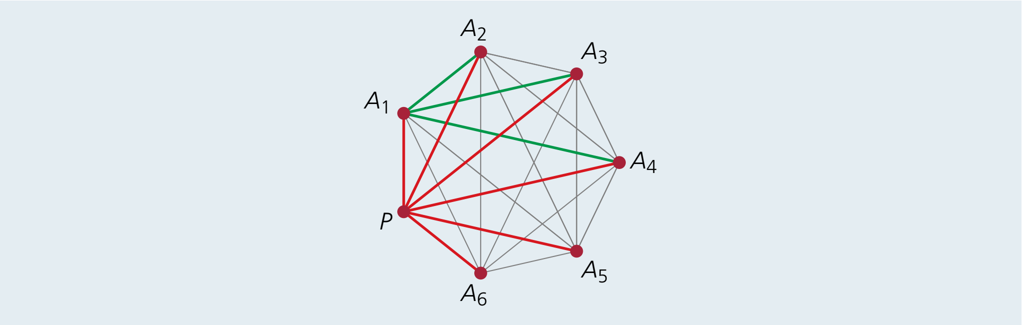
$$\frac{8+6+4+3+3+3+2+2+1}{2}=\frac{32}{2}=16.$$

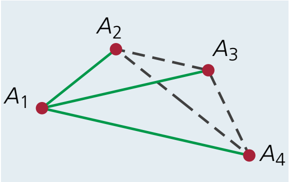
Mivel a 9 pontú fagráfnak 8 éle van, ezért $16-8=8$ élt kell letörölnünk, hogy fagráfot kapjunk. Az ábrán egy lehetséges megoldást látunk:



25. E2 Egy konvex 17-szög minden élét és átlóját pirosra, zöldre vagy sárgára festettünk. Igazoljuk, hogy bárhogyan is színeztünk, lesz olyan háromszög, melynek csúcsai a 17-szög csúcsai, és minden oldala ugyanolyan színű!

A konvex 17-szög valamely P csúcsából (minden csúcsából) 16 szakasz indul ki. Mivel ezeket háromféle színnel festettük be, ezért – a skatulya-elv alapján – kell lenni közöttük 6 db olyannak, melyek azonos színűek (pl. pirosak). Tekintsük ezt a hat db piros szakaszt; legyen ezek másik végpontja: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Ha az $A_1 A_2 \dots A_6$ konvex hatszögnek valamely oldala, vagy valamely átlója piros, akkor készen vagyunk, hiszen e hatszög minden oldala és minden átlója egy olyan háromszögnek oldala, melynek már van két piros oldala. Ha az $A_1 A_2 \dots A_6$ konvex hatszögnek nincs sem piros oldala, sem piros átlója, akkor e hatszög minden oldala és minden átlója zöld vagy sárga.





E hatszög valamely csúcsából (minden csúcsából) pl. A_1-ből 5 db szakasz indul ki. Mivel ezek kétféle színnel vannak kiszínezve, ezért kell lennie ezen 5 db vonal között három azonos színűnek. Legyenek ezek A_1A_2, A_1A_3 és A_1A_4, és legyenek pl. zöldek.

Ha az $A_2A_3A_4$ háromszögnek valamely oldala zöld, akkor készen vagyunk. Ha viszont e háromszög egyik oldala sem zöld, akkor mindhárom oldala sárga kell, hogy legyen, s így ekkor is készen vagyunk.

26. E2 Legyen n egy páros szám. Az n pontú gráf minden csúcsának a fokszáma páratlan. Legalább hány élt kell berajzolnunk a gráfba, hogy legyen

a) nyílt Euler-vonala?

b) zárt Euler-vonala?

a) Az előző feladat gondolatmenetét követve $\frac{n-2}{2}$ él behúzásával elérhetjük, hogy legyen a gráfnak Euler-vonala.

b) Ha az *a)* esetben leírtaknak megfelelően behúzunk $\frac{n-2}{2}$ új élt, akkor pontosan két páratlan fokú csúcs lesz, a többi páros fokú. Ha még a két páratlan fokú csúcsot is összekötjük, akkor már minden csúcs fokszáma páros lesz, vagyis lesz a gráfnak zárt Euler-vonala. Ezek szerint a behúzandó élek száma: $\frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$.

III Hatványozás, logaritmus

1. Mit tudunk a hatványokról, gyökökről (Ismétlés)

1. K1 Végezzük el a kijelölt hatványozást, és írjuk fel az eredményt törtmentes alakban!

a) $\dfrac{(x^{-2})^3\cdot(x^3)^2}{(x^5)^3\cdot(x^{-7})^2}$; *b)* $\left(\dfrac{a^2b^{-4}}{a^{-3}b^5}\right)^{-2}$.

a) $\dfrac{(x^{-2})^3\cdot(x^3)^2}{(x^5)^3\cdot(x^{-7})^2}=\dfrac{x^{-6}\cdot x^6}{x^{15}\cdot x^{-14}}=x^{-6}\cdot x^6\cdot x^{-15}\cdot x^{14}=x^{-1}$, ahol $x\neq 0$.

b) $\left(\dfrac{a^2b^{-4}}{a^{-3}b^5}\right)^{-2}=\dfrac{a^{-4}b^8}{a^6b^{-10}}=a^{-4}b^8a^{-6}b^{10}=a^{-10}b^{18}$, ahol $a\neq 0$, $b\neq 0$.

2. K1 Melyik szám nagyobb: A vagy B?

a) $A=10^{20}$, $B=20^{10}$; *b)* $A=\dfrac{1}{2^8}+\dfrac{1}{2^{12}}$, $B=\dfrac{1}{2^9}$.

a) $A=10^{20}=(10^2)^{10}=100^{10}$, $B=20^{10}$, tehát $A>B$.

b) Írjuk mindkét törtet 2^{12} nevezőjű tört alakban!

$$A=\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{12}}=\frac{2^4+1}{2^{12}}=\frac{17}{2^{12}},\quad B=\frac{1}{2^9}=\frac{2^3}{2^{12}}=\frac{8}{2^{12}},\quad \text{tehát}\quad A>B.$$

3. K1 Mivel egyenlő a megadott kifejezés értéke, ha $a=2$, $b=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{a^{-2}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-1}}$?

$$\frac{a^{-2}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-1}}=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b}}.$$

Bővítsük a kapott törtet a^2b-vel:

$$\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b}}=\frac{b+a^2}{b-a^2}=\frac{\frac{1}{3}+4}{\frac{1}{3}-4}=\frac{1+12}{1-12}=-\frac{13}{11}.$$

4. K1 Állítsuk nagyság szerint növekvő sorrendbe a megadott számokat: $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$!

Először hasonlítsuk össze az első két mennyiséget; írjuk át őket 12. gyökös alakba:

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^4}}=\sqrt[12]{81}$, $\sqrt[4]{4}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{4^3}}=\sqrt[12]{64}$,

tehát $\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}$.

Most hasonlítsuk össze a második és a harmadik mennyiséget; írjuk át őket 20. gyökös alakba:

$\sqrt[4]{4}=\sqrt[20]{4^5}=\sqrt[20]{1024}$, $\sqrt[5]{5}=\sqrt[20]{5^4}=\sqrt[20]{625}$,

tehát $\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}$.

A két eredményt egybevetve azt kapjuk: $\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}$.

5. K2 Végezzük el a kijelölt szorzást, és írjuk fel az eredményt egyetlen gyökjel segítségével!

a) $\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$; *b)* $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$; *c)* $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a^{-4}}$.

a) $\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}=\sqrt[6]{\left(\frac{2}{5}\right)^3}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt[6]{\frac{2^3\cdot5^2}{5^3\cdot2^2}}=\sqrt[6]{\frac{2}{5}}$.

b) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{a}}=\sqrt[12]{\left(\frac{a}{b}\right)^4}\cdot\sqrt[12]{\left(\frac{b}{a}\right)^3}=\sqrt[12]{\frac{a^4b^3}{b^4a^3}}=\sqrt[12]{\frac{a}{b}}$, ahol $a\neq0$, $b\neq0$, és azonos előjelűek.

c) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a^{-4}}=\sqrt[30]{a^{15}}\cdot\sqrt[30]{a^{10}}\cdot\sqrt[30]{a^{-24}}=\sqrt[30]{a}$, ahol $a>0$.

6. E1 Milyen pozitív egész számot írhatunk az n helyébe, hogy az alábbi egyenlőség igaz legyen?
$\sqrt[3]{a^n\cdot\sqrt{a}}=a\cdot\sqrt[6]{a^5}$ (ahol $a>1$).

Emeljük az egyenlet mindkét oldalát 6-dik hatványra!
$(a^n)^2\cdot(\sqrt{a})^2=a^6\cdot a^5$, azaz $a^{2n+1}=a^{11}$.
Innen $2n+1=11$, azaz $2n=10$, tehát $n=5$.

2. Törtkitevőjű hatványok értelmezése

1. K1 Írjuk fel az alábbi kifejezéseket gyökös alakban, és számológép segítségével adjuk meg értéküket három tizedesjegyre kerekítve!

a) $4^{\frac{1}{3}}$; *b)* $10^{\frac{3}{4}}$; *c)* $5^{-\frac{1}{2}}$; *d)* $8^{-\frac{3}{5}}$.

a) $4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{4}\approx1{,}587$.

b) $10^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{10^3}\approx5{,}623$.

c) $5^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\approx0{,}447$.

d) $8^{-\frac{3}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{8^3}}\approx0{,}287$.

2. K1 Írjuk fel a következő kifejezéseket törtkitevő-mentes alakban (y, x, p, k 1-nél nagyobb valós számok)!

a) $y^{\frac{6}{7}}$; *b)* $x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}$; *c)* $p^{\frac{1}{5}}\cdot p^{-\frac{2}{3}}$; *d)* $k^{\frac{1}{2}}\cdot k^{\frac{1}{3}}\cdot k^{-\frac{5}{6}}$.

a) $y^{\frac{6}{7}}=\sqrt[7]{y^6}$.

b) $x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=x^{\frac{7}{6}}=\sqrt[6]{x^7}$.

c) $p^{\frac{1}{5}}\cdot p^{-\frac{2}{3}}=p^{\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}=p^{-\frac{7}{15}}=\frac{1}{p^{\frac{7}{15}}}=\frac{1}{\sqrt[15]{p^7}}$.

d) $k^{\frac{1}{2}}\cdot k^{\frac{1}{3}}\cdot k^{-\frac{5}{6}}=k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=k^0=1$.

3. K1 Végezzük el a következő műveleteket!

a) $(x^{-2})^{\frac{1}{4}}\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$; *b)* $\left(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}:\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{5}}$; *c)* $\left[\left(p^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{6}}\right]^{\frac{2}{3}}$.

a) $(x^{-2})^{\frac{1}{4}}\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}=x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=x^{-1}$.

b) $\left(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}:\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{5}}=a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{8}}a^{\frac{1}{5}}b^{-\frac{1}{10}}=a^{-\frac{2}{15}}b^{-\frac{19}{40}}$.

c) $\left[\left(p^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{6}}\right]^{\frac{2}{3}}=\left(p^{-\frac{1}{10}}\right)^{\frac{2}{3}}=p^{-\frac{1}{15}}$.

4. K2 Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

a) $\dfrac{10^{\frac{1}{2}}-10^{-\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{2}}+10^{-\frac{1}{2}}}$; b) $\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{3}{2}}\right)^2$; c) $\dfrac{64^{\frac{3}{2}}-64^{\frac{2}{3}}}{31}$.

a) $\dfrac{10^{\frac{1}{2}}-10^{-\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{2}}+10^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{10^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{10^{\frac{1}{2}}}}{10^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{10^{\frac{1}{2}}}}$.

Bővítsük a törtet $10^{\frac{1}{2}}$-nel.

$$\frac{10^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{10^{\frac{1}{2}}}}{10^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{10^{\frac{1}{2}}}}=\frac{\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^2-1}{\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^2+1}=\frac{10-1}{10+1}=\frac{9}{11}.$$

b) $\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{3}{2}}\right)^2=a^{\frac{4}{3}}+a^3-2\cdot a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{4}{3}}+a^3-2\cdot a^{\frac{13}{6}}$.

c) $\dfrac{64^{\frac{3}{2}}-64^{\frac{2}{3}}}{31}=\dfrac{\sqrt{64^3}-\sqrt[3]{64^2}}{31}=\dfrac{8^3-4^2}{31}=\dfrac{2^9-2^4}{31}=\dfrac{2^4\cdot(2^5-1)}{31}=\dfrac{2^4\cdot 31}{31}=2^4=16$.

5. K2 Az egyik argentin őserdő 4 évenként 1,8%-kal csökken. Hány százalékára csökken ez az őserdő 30 év elteltével?

Ha az erdő 4 évenként 1,8%-kal csökken, akkor 4 év elteltével a 0,982-ed részére csökken. A 30 év 7,5 ilyen periódust jelent, tehát 30 év elteltével az erdő állománya $0{,}982^{7{,}5}\approx 0{,}8726$-ad részére, vagyis a 87,26%-ára csökken.

6. K2 Egy lengyelországi erdészetben 786 muflont tartanak, melyek éves szaporulata 1,2%. Egy szerződés szerint hat és fél év múlva az akkori állomány harmadát elszállítják egy másik telepre. Hány muflon marad ekkor ebben a gazdaságban?

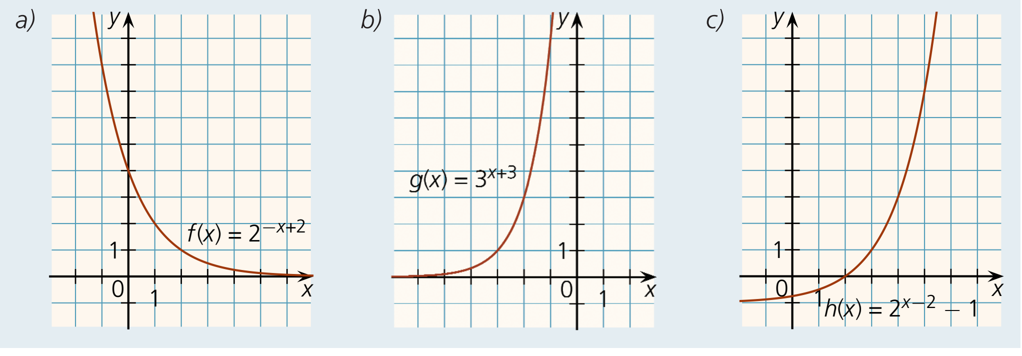
Az állatállomány 6,5 év múlva kb. $786\cdot 1{,}012^{6{,}5}\approx 849$ egyedből áll. Ennek egyharmad részét elszállítják, vagyis a kétharmad része marad helyben:

$\dfrac{2}{3}\cdot 849=566$.

3. Az exponenciális függvény

1. K1 Ábrázoljuk a valós számok halmazán értelmezett alábbi függvényeket!

a) $f(x)=2^{-x+2}$; b) $g(x)=3^{x+3}$; c) $h(x)=2^{x-2}-1$.



2. K2 Hány %-kal csökken a légnyomás, ha a tengerszint feletti 4800 m magasan levő Mount Blanc csúcsra felmászunk a 2200 m magasságú táborhelyről?

A légnyomás 2200 m-en

$p(2{,}2) = 10^5 \cdot e^{-\frac{2{,}2}{8}} = 10^5 \cdot e^{-0{,}275} \approx 10^5 \cdot 0{,}75957 \approx 75\,957$ Pa.

A légnyomás 4811 m magasan

$p(4{,}8) = 10^5 \cdot e^{-\frac{4{,}8}{8}} = 10^5 \cdot e^{-0{,}6} \approx 10^5 \cdot 0{,}54881 \approx 54\,881$ Pa

$\frac{54881}{75957} \approx 0{,}7225.$

Tehát a légnyomás kb. 27,75%-kal csökken,

3. K2 A radioaktív izotópok folyamatosan bomlanak. A bomlási folyamatot az idő függvényében az alábbi exponenciális függvény írja le:

$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$,

ahol N_0 a folyamat kezdetén meglevő bomlásra képes izotópok száma, t az eltelt idő (órákban mérve), N a t idő elteltével megmaradt bomlásra képes atomok száma, k pedig a kérdéses anyagra jellemző bomlási állandó. A bárium egy izotópjának bomlási állandója $k = 0{,}04$. Számítsuk ki, hogy 2000 g mennyiséget véve ebből az izotópból mennyi marad belőle 4 nap múlva?

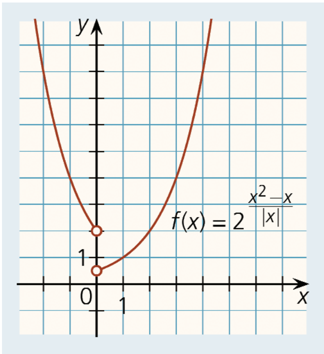
4 nap = 96 óra. Tehát a megmaradt izotópok száma

$N(96) = 2000 \cdot e^{-0{,}04 \cdot 96} = 2000 \cdot e^{-3{,}84} \approx 2000 \cdot 0{,}0215 \approx 43$ g.

4. E1 Ábrázoljuk az alábbi függvényt!

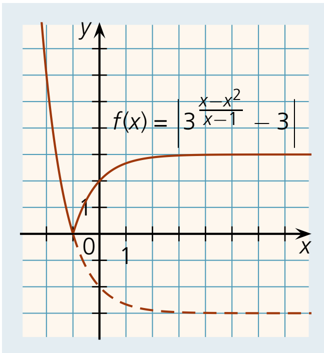
$f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = 2^{\frac{x^2-x}{|x|}}.$

$$2^{\frac{x^2-x}{|x|}} = \begin{cases} 2^{x-1}, & \text{ha } x > 0. \\ 2^{-x+1}, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



5. E1 Ábrázoljuk az $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left|3^{\frac{x-x^2}{x-1}} - 3\right|$ függvény grafikonját!

$$\left|3^{\frac{x-x^2}{x-1}} - 3\right| = \left|3^{\frac{x(1-x)}{x-1}} - 3\right| = \left|3^{-x} - 3\right|.$$



4. Exponenciális egyenletek

1. K1 Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $2^x = 64$; *b)* $5^x = \frac{1}{25}$; *c)* $4^{2x} = 64$;

d) $49^{3x-5} = 7$; *e)* $27^{4-3x} = 9$; *f)* $36^{4x+2} = \frac{1}{6}$.

---

a) $2^x = 64 = 2^6, \quad x = 6$;

b) $5^x = \frac{1}{25} = 5^{-2}, \quad x = -2$;

c) $4^{2x} = 64 = 4^3, \quad 2x = 3, \quad x = \frac{3}{2}$;

d) $49^{3x-5} = 7\left(= 49^{\frac{1}{2}}\right), \quad 3x - 5 = \frac{1}{2}, \quad 6x = 11, \quad x = \frac{11}{6}$.

e) Írjuk fel az egyenlet mindkét oldalát 3 hatványaként.

$(3^3)^{4-3x} = 3^2$, azaz $3^{12-9x} = 3^2$, $12 - 9x = 2$, $x = \frac{10}{9}$.

f) Az egyenlet így írható:

$(6^2)^{4x+2} = 6^{-1}$, azaz $6^{8x+4} = 6^{-1}$, $8x + 4 = -1$, $x = -\frac{5}{8}$.

2. K1 Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $5^{|x|-4} = \frac{1}{125}$; *b)* $\frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{2^{x+1}} = 0{,}5$;

c) $27 \cdot 9^{x-4} = \sqrt[4]{3^{2x+1}}$; *d)* $125 \cdot \sqrt[5]{5^{3x-6}} = (0{,}2)^{3-x}$.

---

a) $5^{|x|-4} = \frac{1}{125}(= 5^{-3}), \quad |x| - 4 = -3, \quad |x| = 1, \quad x = \pm 1$.

b) Az egyenlet mindkét oldala felírható 2 hatványaként:

$2^{-3} \cdot 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{-1}$, azaz $2^{-3+\frac{x+1}{3}} = 2^{-1}$,

$-3 + \frac{x+1}{3} = -1, \quad \frac{x+1}{3} = 2, \quad x = 5$.

c) Az egyenlet mindkét oldala felírható 3 hatványaként:

$3^3 \cdot (3^2)^{x-4} = 3^{\frac{2x+1}{4}}$, azaz $3^3 \cdot 3^{2x-8} = 3^{\frac{2x+1}{4}}$,

$3^{3+2x-8} = 3^{\frac{2x+1}{4}}, \quad 2x - 5 = \frac{2x+1}{4}, \quad 8x - 20 = 2x + 1$,

$6x = 21$, ahonnan $x = \frac{7}{2}$.

d) Az egyenlet mindkét oldala felírható 5 hatványaként:

$5^3 \cdot 5^{\frac{3x-6}{5}} = (5^{-1})^{3-x}$, azaz $5^{3+\frac{3x-6}{5}} = 5^{x-3}, \quad 3 + \frac{3x-6}{5} = x - 3$,

$15 + 3x - 6 = 5x - 15, \quad 2x = 24$, ahonnan $x = 12$.

3. K1 Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $3^x + 2\cdot 3^{x+1} - 3^{x-1} = 20$; *b)* $5^{x+2} + 3\cdot 5^x - 2\cdot 5^{x+1} = 18$;

c) $4^{x+1} + 3\cdot 4^x - 2\cdot 4^{x-1} = 13$; *d)* $8^{\frac{x}{3}+1} - 4^{\frac{x}{2}+1} = 64$.

a) A hatványozás azonosságainak felhasználásával az egyenlet bal oldala így írható:

$$3^x + 2\cdot 3\cdot 3^x - \frac{3^x}{3} = 20, \quad \text{vagyis} \quad 7\cdot 3^x - \frac{3^x}{3} = 20,$$

$$20\cdot 3^x = 60, \quad 3^x = 3, \quad \text{ahonnan} \quad x = 1.$$

b) A hatványozás azonosságainak felhasználásával az egyenlet bal oldala így írható:

$$25\cdot 5^x + 3\cdot 5^x - 10\cdot 5^x = 18, \quad \text{tehát} \quad 18\cdot 5^x = 18,$$

$$5^x = 1 (= 5^0), \quad \text{ahonnan} \quad x = 0.$$

c) A hatványozás azonosságainak felhasználásával az egyenlet bal oldala így írható:

$$4\cdot 4^x + 3\cdot 4^x - 2\cdot\frac{4^x}{4} = 13, \quad \text{azaz} \quad \frac{13}{2}\cdot 4^x = 13,$$

$$4^x = 2 = 4^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ahonnan} \quad x = \frac{1}{2}.$$

d) A hatványozás azonosságainak felhasználásával az egyenlet bal oldala így írható:

$$8\cdot(\sqrt[3]{8})^x - 4\cdot(\sqrt{4})^x = 64, \quad \text{vagyis} \quad 8\cdot 2^x - 4\cdot 2^x = 64,$$

$$4\cdot 2^x = 64, \quad \text{azaz} \quad 2^x = 16 (= 2^4), \quad \text{ahonnan} \quad x = 4.$$

4. K2 Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $4^{2x} + 4^x = 6$; *b)* $4^x + 32 = 2^{x+3} + 2^{x+2}$; *c)* $5\cdot 5^{2x+1} + 1 = 5^{x+2} + 5^x$.

a) Vezessük be a $4^x = a$ új ismeretlent. Ekkor

$$a^2 + a - 6 = 0, \quad a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}, \quad a_1 = -3, \quad a_2 = 2.$$

$4^x = -3$ nem lehetséges, hiszen 4-nek minden hatványa pozitív. Ha

$$4^x = 2\left(= 4^{\frac{1}{2}}\right), \quad \text{akkor} \quad x = \frac{1}{2}.$$

b) Az egyenletet így alakíthatjuk:

$$4^x + 32 = 8\cdot 2^x + 4\cdot 2^x, \quad \text{azaz} \quad 4^x - 12\cdot 2^x + 32 = 0.$$

Most 2^x-ben kaptunk egy másodfokú egyenletet:

$$2^x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-128}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2}, \quad 2^x_1 = 8 (= 2^3), \quad 2^x_2 = 4 (= 2^2).$$

Tehát az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

c) A hatványozás azonosságai alapján az egyenlet így írható:

$$25\cdot 5^{2x} + 1 = 25\cdot 5^x + 5^x, \quad \text{azaz} \quad 25\cdot 5^{2x} - 26\cdot 5^x + 1 = 0.$$

Az 5^x-ben másodfokú egyenlet megoldása:

$$\frac{26 \pm \sqrt{676-100}}{50} = \frac{26 \pm 24}{50}, \quad 5^x_1 = 1 (= 5^0), \quad 5^x_2 = \frac{2}{50}\left(= \frac{1}{25} = 5^{-2}\right).$$

Tehát az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

5. E1 Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $\left(\frac{9}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^{x-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}$; *b)* $\sqrt{4^x - 2^{x+1} + 1} + \sqrt{4^x + 2^{x+1} + 1} = 2$.

a) A hatványalapokban szereplő törtek számlálóit és nevezőt alaposan szemügyre véve észrevehetjük, hogy azok mindegyike 3-nak vagy 5-nek hatványa. Ezzel az észrevétellel az egyenlet így írható:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{3x-6} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}, \quad \text{azaz} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{6-3x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2},$$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+6-3x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}$, ahonnan $6 - x = x^2$, vagyis $x^2 + x - 6 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

b) A könnyebb áttekinthetőség érdekében vezessük be a $2^x = a$ új változót. Ezzel a megoldandó egyenlet így írható:

$\sqrt{a^2 - 2a + 1} + \sqrt{a^2 + 2a + 1} = 2.$

A négyzetgyökök alatt teljes négyzetek szerepelnek, tehát azt kapjuk?

$|a - 1| + |a + 1| = 2.$

Most három esetet kell vizsgálnunk.

1. Ha $a \geq 1$, akkor $a - 1 + a + 1 = 2$, azaz $2a = 2$, tehát $a = 1$.
2. Ha $-1 \leq a < 1$, akkor $-a + 1 + a + 1 = 2$, amiből a $2 = 2$ azonossághoz jutunk.
3. Ha $a < -1$, akkor $-a + 1 - a - 1 = 2$, ahonnan $a = -1$, ami nem megoldás.

Azt kaptuk tehát, hogy az a-ban felírt egyenletet kielégítő valós számok: $-1 \leq a \leq 1$. Ezek szerint $-1 \leq 2^x \leq 1$. Mivel 2^x minden valós x esetén pozitív, így a bal oldali egyenlőtlenség mindig teljesül. Tehát $2^x \leq 1 = 2^0$, vagyis az eredeti egyenletet kielégítő valós számok: $x \leq 0$.

5. Exponenciális egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a) $\left.\begin{aligned} 4^x - 2 \cdot 3^y &= 14 \\ 4^{x+1} + 3^y &= 65 \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} 5^{x+1} - 2^y &= 17 \\ 5^x + 3 \cdot 2^{y-1} &= 17 \end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} 2^{x+1} + 3 \cdot 7^{y-1} &= 11 \\ 2^{x-1} - 2 \cdot 7^y &= -12 \end{aligned}\right\}$.

a) Vezessük be a $4^x = a$ és $3^y = b$ új változókat; ezzel az egyenletrendszer így írható:

$a - 2b = 14$ és $4a + b = 65$.

A kapott kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer megoldása: $a = 16$, $b = 1$, tehát

$4^x = 16 (= 4^2)$ és $3^y = 1 (= 3^0)$,

így az eredeti egyenletrendszer megoldása: $x = 2$, $y = 0$.

b) Legyen most $5^x = a$ és $2^y = b$. A következő elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerhez jutunk:

$5a - b = 17$ és $a + \frac{3b}{2} = 17$.

Ez utóbbi egyenletrendszer megoldása: $a = 5$, $b = 8$. Tehát

$5^x = 5$, ahonnan $x = 1$ és $2^y = 8 (= 2^3)$, ahonnan $y = 3$.

c) Legyen $2^x = a$ és $7^y = b$. Az új egyenletrendszer:

$2a + \frac{3b}{7} = 11$ és $\frac{a}{2} - 2b = -12$.

Az egyenletrendszer megoldása: $a = 4$, $b = 7$. Tehát $2^x = 4 (= 2^2)$ és $7^y = 7$, ahonnan kapjuk az eredeti egyenletrendszer megoldását: $x = 2$, $y = 1$.

2. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a) $\left.\begin{aligned} 4^{2x+1} &= 2^{y-3} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1} &= 27^{y-2} \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} 5^{x+1} &= \left(\frac{1}{5}\right)^y \\ 9^{2x-1} &= 27^{y+1} \end{aligned}\right\}$.

a) Az egyenletrendszerben szereplő egyenletek mindkét oldala felírható azonos alapú hatványként. Az első egyenlet 2-nek, a második pedig 3-nak hatványaként. Tehát az egyenleteket így írhatjuk:

$2^{4x+2} = 2^{y-3}$ és $3^{-3x-1} = 3^{3y-6}$.

Ezzel az alábbi kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerhez jutunk:

és .

Az egyenletrendszer megoldása: $x=-\frac{2}{3}$, $y=\frac{7}{3}$.

b) Az első egyenlet mindkét oldalát 5 hatványaként, a második egyenlet mindkét oldalát 3 hatványaként írhatjuk fel.

$5^{x+1}=5^{-y}$ és $3^{4x-2}=3^{3y+3}$.

A következő egyenletrendszerhez jutunk:

$x+y=-1$ és $4x-3y=5$.

Az egyenletrendszer megoldása: $x=\frac{2}{7}$, $y=-\frac{9}{7}$.

3. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned}(4^x)^{\frac{1}{y}} &= 32\cdot(8^y)^{\frac{1}{x}}\\ 3^{\frac{x}{y}} &= 3\cdot(3^{2-2y})^{\frac{1}{y}}\end{aligned}\right\}.$$

Írjuk fel az első egyenlet mindkét oldalát 2 hatványaként, a második egyenlet mindkét oldalát 3 hatványaként. Az első egyenletből

$2^{\frac{2x}{y}}=2^5\cdot 2^{\frac{3y}{x}}$, ahonnan $\frac{2x}{y}=5+\frac{3y}{x}$.

A második egyenletből

$y=-1$

, ahonnan $\frac{x}{y}=1+\frac{2-2y}{y}$.

A második egyenletből $x=2-y$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$\frac{2(2-y)}{y}=5+\frac{3y}{2-y}$.

A közös nevezővel való szorzás és rendezés után az alábbi másodfokú egyenlethez jutunk:

$2y^2-9y+4=0$,

$y_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\frac{9\pm 7}{4}$, $y_1=4$, $y_2=\frac{1}{2}$.

Felhasználva az $x=2-y$ egyenletet, az eredeti egyenletrendszer megoldásai:

$x_1=-2$, $y_1=4$ és $x_2=\frac{3}{2}$, $y_2=\frac{1}{2}$.

4. K1 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $3^{x-5}\le 27$; *b)* $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+4}>0{,}2$; *c)* $8^{3x-1}<\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}$.

a) $3^{x-5}\le 3^3$, mivel a hatványalap 1-nél nagyobb, ezért innen $x-5\le 3$, tehát az egyenlőtlenséget kielégítő valós számok: $x\le 8$.

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+4}>\frac{1}{5}$. A hatványalap 1-nél kisebb, ezért az alapok elhagyása után az egyenlőtlenség iránya megfordul:

$2x+4<1$, ahonnan $x<-\frac{3}{2}$.

c) Írjuk fel az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2 hatványaként.

$2^{9x-3}<2^{-4+2x}$.

A hatványalap 1-nél nagyobb, ezért írhatjuk

$9x-3<-4+2x$, ahonnan $x<-\frac{1}{7}$.

5. E1 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget az 1-től kölünböző pozitív valós számok halmazán!
$x^{x^2-10x+16} \le 1$.

$x^{x^2-10x+16} \le x^0$. Szeretnénk elhagyni az azonos alapokat, de nem tudjuk, hogy az 1-nél kisebb vagy nagyobb. Ezért két esetet kell vizsgálnunk.
1. Ha $x > 1$, akkor $x^2 - 10x + 16 \le 0$. E másodfokú kifejezés zérushelyei 2 és 8, tehát az egyenlőtlenség megoldása $2 \le x \le 8$, és e valós számokra teljesül az $x > 1$ feltétel.

2. Ha $0 < x < 1$, akkor $x^2 - 10x + 16 \ge 0$. Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása: $x \le 2$ vagy $x \ge 8$. Mivel esetünkben $0 < x < 1$, ezért ez esetben a megoldás $0 < x < 1$.

A két esetet egybevetve az eredeti egyenlőtlenséget kielégítő valós számok:

$0 < x < 1$ vagy $2 \le x \le 8$.

6. A logaritmus fogalma

1. K1 Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét a logaritmus definíciója alapján!

a) $\log_2 8$; *b)* $\log_3 81$; *c)* $\log_5 \frac{1}{5}$; *d)* $\log_{\sqrt{2}} 2$;

e) $\log_4 \frac{1}{16}$; *f)* $\log_{\sqrt{5}} 25$; *g)* $\log_{\frac{1}{3}} 9$; *h)* $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}} 49$.

a) $\log_2 8 = 3$; *b)* $\log_3 81 = 4$; *c)* $\log_5 \frac{1}{5} = -1$; *d)* $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$;

e) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$; *f)* $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$; *g)* $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$; *h)* $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}} 49 = -4$.

2. K1 Határozzuk meg az alábbi kifejezésekben szereplő logaritmusok alapját!

a) $\log_x 16 = 2$; *b)* $\log_x 3 = \frac{1}{2}$; *c)* $\log_x 5 = -1$;

d) $\log_x \frac{1}{4} = -2$; *e)* $\log_x 8 = -\frac{1}{3}$; *f)* $\log_x a^3 = \frac{1}{3}$ $(a > 0)$.

a) $x^2 = 16$, $(x > 0)$, $x = 4$; *b)* $x^{\frac{1}{2}} = 3$, $x = 9$;

c) $x^{-1} = 5$, $x = \frac{1}{5}$; *d)* $x^{-2} = \frac{1}{4}$, $x = 2$;

e) $x^{-\frac{1}{3}} = 8$, $x = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$; *f)* $x^{\frac{1}{3}} = a^3$, $x = a^9$.

3. K1 Számítsuk ki a következő kifejezésekben szereplő ismeretleneket!

a) $\log_4 a = 3$; *b)* $\log_2 b = -4$; *c)* $\log_{\frac{1}{2}} k = -2$;

d) $\log_6 x = -3$; *e)* $\log_{\sqrt{7}} y = 4$; *f)* $\log_9 p = -\frac{1}{2}$.

a) $a = 4^3 = 64$; *b)* $b = 2^{-4} = \frac{1}{16}$; *c)* $k = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$;

d) $x = 6^{-3} = \frac{1}{216}$; *e)* $y = (\sqrt{7})^4 = 49$; *f)* $p = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

4. K2 Adjuk meg a következő kifejezések pontos értékét!

a) $3^{\log_3 15}$; *b)* $10^{\lg 6}$; *c)* $9^{\log_3 5}$;

d) $4^{\log_{16} 81}$; *e)* $7^{1+\log_{49} 8}$; *f)* $25^{\frac{1}{2}-\log_5 3}$.

---

a) $3^{\log_3 15}=15$;

b) $10^{\lg 6}=6$;

c) $9^{\log_3 5}=(3^2)^{\log_3 5}=(3^{\log_3 5})^2=5^2=25$;

d) $4^{\log_{16} 81}=\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{16} 81}=(16^{\log_{16} 81})^{\frac{1}{2}}=81^{\frac{1}{2}}=9$;

e) $7^{1+\log_{49} 8}=7\cdot(49^{\log_{49} 8})^{\frac{1}{2}}=7\cdot 8^{\frac{1}{2}}=7\cdot\sqrt{8}$;

f) $25^{\frac{1}{2}-\log_5 3}=\dfrac{5}{(5^{\log_5 3})^2}=\dfrac{5}{3^2}=\dfrac{5}{9}$.

5. E1 Határozzuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát a *c*, *d*, *e* és *f* esetben ábrázoljuk az értelmezési tartományt egy számegyenesen!

a) $\lg(2x+4)$; *b)* $\log_2(15-3x)$; *c)* $\dfrac{\lg(5x+10)}{x+1}$;

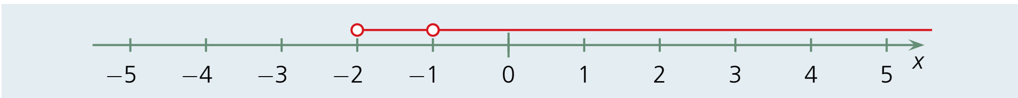
d) $\log_3(x^2-7x)$; *e)* $\dfrac{\lg(-x^2+11x-24)}{x-4}$; *f)* $\log_{x-2}(-x^2+8x)$.

---

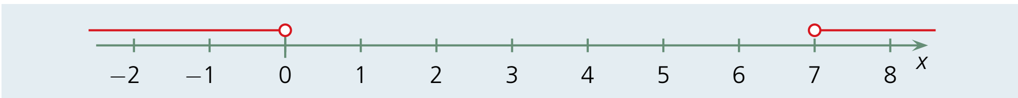
a) $2x+4>0$, $x>-2$.

b) $15-3x>0$, $x<5$.

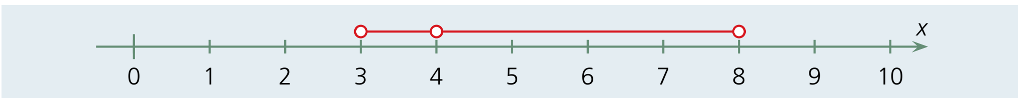
c) $5x+10>0$ és $x+1\neq 0$, tehát $x>-2$ és $x\neq -1$.



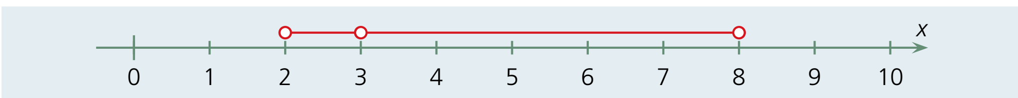
d) $x^2-7x>0$, $x<0$ vagy $x>7$.



e) $-x^2+11x-24>0$ és $x-4\neq 0$.
A másodfokú kifejezés zérushelyei: 3 és 8, tehát $3<x<8$ és $x\neq 4$.



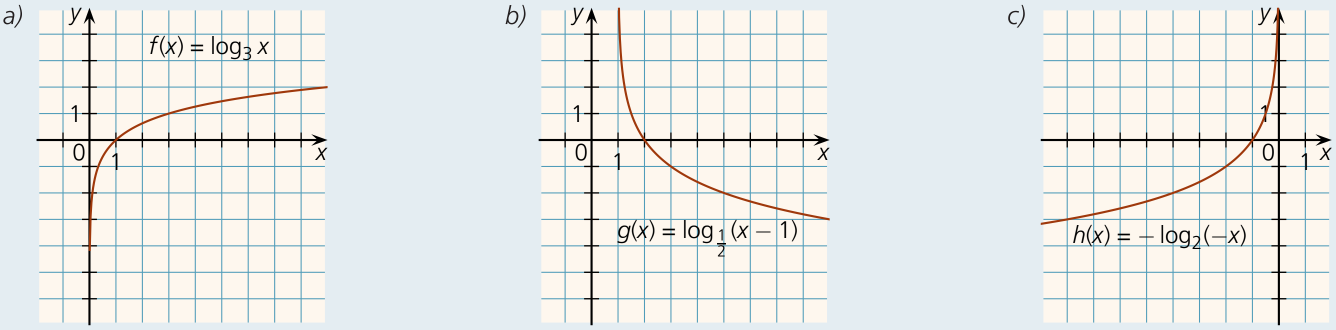
f) $x-2>0$, $x-2\neq 1$ és $-x^2+8x>0$, tehát $x>2$, $x\neq 3$ és $0<x<8$. Az összes feltételnek eleget tevő valós számok: $2<x<8$, $x\neq 3$.



7. A logaritmusfüggvény, a logaritmusfüggvény és az exponenciális függvény kapcsolata

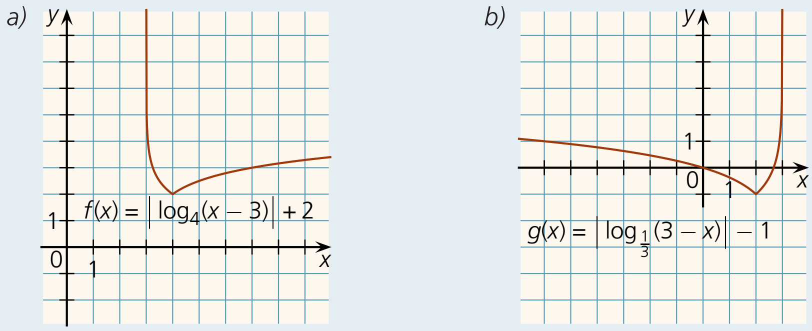
1. K1 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját!

a) $f(x) = \log_3 x$; *b)* $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$; *c)* $h(x) = -\log_2(-x)$.



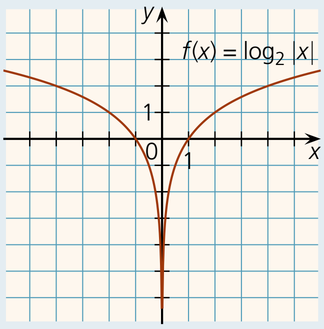
2. K2 Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját!

a) $f(x) = |\log_4(x-3)| + 2$; *b)* $g(x) = \left|\log_{\frac{1}{3}}(3-x)\right| - 1$.

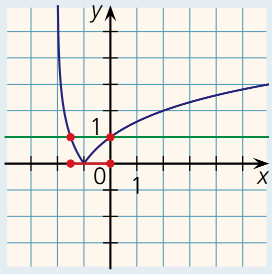


3. E1 Ábrázoljuk a következő függvény grafikonját!

$f(x) = \log_2 |x|$.



4. K2 Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenséget!
$|\log_2(x+2)| \le 1.$



A megoldás: $x \in \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$.

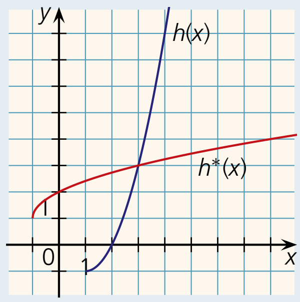
5. E1 Vizsgáljuk meg, hogy az alább megadott függvéyeknek van-e inverzük, s ha igen adjuk meg azokat!

a) $f(x) = x + 4$; *b)* $g(x) = \sqrt{x-2}$ $(x \ge 2)$; *c)* $h(x) = x^2 - 2x$ $(x \ge 1)$.

a) Mivel $f(x)$ kölcsönösen egyértelmű, ezért van inverze. Ha ez az inverz $f^*(x)$, akkor
$x = f^*(x) + 4$, ahonnan $f^*(x) = x - 4$.

b) A $g(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő, az értelmezési tartománya $x \ge 2$. Mivel értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaz, ezért $g^*(x)$ inverzének értelmezési tartománya $x \ge 0$. Ekkor
$x = \sqrt{g^*(x) - 2}$, ahonnan $g^*(x) = x^2 + 2$.

c) A $h(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ függvény $x \ge 1$ esetén szigorúan monoton növekvő. Értékkészlete a -1-nél nem kisebb valós számok halmaza. Ezért a $h^*(x)$ inverz függvényének értelmezési tartománya $x \ge -1$. Ha elkészítjük $h(x)$ grafikus képét, akkor látható, hogy $h^*(x) = \sqrt{x+1} + 1$.



8. A logaritmus azonosságai

1. K1 Írjuk fel az alábbi kifejezések logaritmusát a benne szereplő (pozitív) mennyiségek logaritmusainak segítségével!

a) $x = a \cdot b^2$; *b)* $y = a^2 - b^2$; *c)* $z = \frac{a^3 \cdot \pi}{\sqrt{q}}$.

a) $\lg x = \lg(ab^2) = \lg a + \lg b^2 = \lg a + 2\lg b$;

b) $\lg y = \lg(a^2 - b^2) = \lg(a+b)(a-b) = \lg(a+b) + \lg(a-b)$;

c) $\lg z = \lg\left(\frac{a^3\pi}{\sqrt{q}}\right) = \lg(a^3\pi) - \lg q^{\frac{1}{2}} = \lg a^3 + \lg\pi - \frac{1}{2}\lg q = 3\lg a + \lg\pi - \frac{1}{2}\lg q.$

2. K1 A logaritmus azonosságainak felhasználásával fejezzük ki x-et az alábbi egyenlőségből ($a, k, b, p, q > 0$)!

a) $\lg x = \lg a - \lg k$; b) $\lg x = \frac{1}{2}\lg a + 3\lg b$; c) $\lg x = 2\lg a - \frac{1}{2}(\lg p - \lg q)$.

a) $\lg x = \lg \frac{a}{k}, \quad x = \frac{a}{k}$;

b) $\lg x = \lg a^{\frac{1}{2}} + \lg b^3 = \lg(\sqrt{a} \cdot b^3), \quad x = \sqrt{a} \cdot b^3$;

c) $\lg x = \lg a^2 - \frac{1}{2}\lg p + \frac{1}{2}\lg q = \lg a^2 - \lg\sqrt{p} + \lg\sqrt{q} = \lg\left(\frac{a^2\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\right), \quad x = \frac{a^2\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$.

3. K2 Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\log_{25} 15 + \log_{25} 35 - \log_{25} 21$;

b) $\frac{\lg 9 + 2\lg 2}{\lg 6}$;

c) $\log_{pq}\sqrt{p^2q} + \log_{pq}\sqrt{pq^2}$ $(p > 0, q > 0, pq \neq 1)$.

a) $\log_{25} 15 + \log_{25} 35 - \log_{25} 21 = \log_{25}\frac{15 \cdot 35}{21} = \log_{25} 25 = 1$;

b) $\frac{\lg 9 + 2\lg 2}{\lg 6} = \frac{\lg 9 + \lg 2^2}{\lg 6} = \frac{\lg(9 \cdot 4)}{\lg 6} = \frac{\lg 6^2}{\lg 6} = \frac{2\lg 6}{\lg 6} = 2$;

c) $\log_{pq}\sqrt{p^2q} + \log_{pq}\sqrt{pq^2} = \log_{pq}\sqrt{p^2qpq^2} = \log_{pq}\sqrt{(pq)^3} = \log_{pq}(pq)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$.

4. K2 Mivel egyenlő $\lg 150$, ha $\lg 3 = a$ és $\lg 5 = b$?

$\lg 150 = \lg(3 \cdot 5 \cdot 10) = \lg 3 + \lg 5 + \lg 10 = a + b + 1$.

5. E1 Legyen $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$ és $\lg 7 = c$. Fejezzük ki $\lg(10!)$-t a, b és c segítségével!

$$\begin{aligned}\lg(10!) &= \lg 2 + \lg 3 + \lg 4 + \lg 5 + \lg 6 + \lg 7 + \lg 8 + \lg 9 + \lg 10 = \\ &= \lg 2 + \lg 5 + \lg 3 + 2\lg 2 + \lg 2 + \lg 3 + \lg 7 + 3\lg 2 + 2\lg 3 + \lg 10 = \\ &= \lg 10 + 4\lg 3 + 6\lg 2 + \lg 7 + \lg 10 = 1 + 4b + 6a + c + 1 = 6a + 4b + c + 2.\end{aligned}$$

9. Logaritmikus egyenletek

1. K1 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_3 x = -1$; b) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; c) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2$;

d) $\log_9(x + 3) = 0$; e) $\log_{\frac{1}{4}}(x + 1) = -2$; f) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$.

a) $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$;

b) $x = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;

c) $x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$;

d) $x + 3 = 9^0 = 1, \quad x = -2$;

e) $x + 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16, \quad x = 15$;

f) $x = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$.

A kapott gyökök helyességéről ellenőrzéssel meggyőződhetünk.

2. K1 Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_2(1+\log_3 x)=1$;

b) $\log_{25}[2-\log_2(x+2)]=0$;

c) $\log_4[3+\log_4(2x-1)]=\frac{1}{2}$.

---

a) $1+\log_3 x=2,\quad \log_3 x=1,\quad x=3$;

b) $2-\log_2(x+2)=1,\quad \log_2(x+2)=1,\quad x+2=2,\quad x=0$;

c) $3+\log_4(2x-1)=4^{\frac{1}{2}}=2,\quad \log_4(2x-1)=-1,\quad 2x-1=\frac{1}{4},\quad 2x=\frac{5}{4},\quad x=\frac{5}{8}$.

A kapott gyökök helyességéről ellenőrzéssel meggyőződhetünk.

3. K2 Mely valós számok elégítik ki a következő egyenleteket?

a) $\log_x(2x+4)=1$; *b)* $\log_{x+3}(6x-2)=1$; *c)* $\log_{x-2}(2x-1)=2$.

---

a) $x>0,\quad x\neq 1,\quad 2x+4=x,\quad x=-4$; az egyenletnek nincs valós megoldása.

b) $x>\frac{1}{3};\quad 6x-2=x+3,\quad 5x=5,\quad x=1$.

c) $x>2,\quad x\neq 3;\quad 2x-1=(x-2)^2,\quad x^2-6x+5=0$,

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm 4}{2},\qquad x_1=1,\quad x_2=5.$$

Mivel $x>2$, ezért a megoldás $x=5$.

4. K2 Mely valós számok elégítik ki a következő egyenleteket?

a) $\frac{1}{2}\cdot\log_3(2x+1)+\log_3\sqrt{3x-3}=\lg 100$;

b) $\log_4(x^2-2x+1)+2\cdot\log_4(2x)=2$.

---

a) $x>1$. A logaritmus azonosságait felhasználva az egyenlet így alakítható:

$$\log_3(2x+1)^{\frac{1}{2}}+\log_3\sqrt{3x-3}=2,$$

$$\log_3\sqrt{(2x+1)(3x-3)}=2,\qquad \text{ahonnan}\qquad \sqrt{(2x+1)(3x-3)}=9,$$

$$6x^2-3x-84=0,\qquad \text{azaz}\qquad 2x^2-x-28=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+224}}{4}=\frac{1\pm 15}{4},\qquad x_1=-\frac{7}{2},\qquad x_2=4.$$

A negatív gyök hamis, tehát az egyedüli megoldás: $x=4$.

b) $x>0,\quad x\neq 1$.

$$\log_4(x-1)^2+2\log_4(2x)=2,\qquad \text{azaz}\qquad 2\log_4(x-1)+2\log_4(2x)=2,$$

$$\log_4((x-1)\cdot 2x)=1,\qquad \text{ahonnan}\qquad 2x^2-2x=4,\qquad x^2-x-2=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2},\qquad x_1=-1,\qquad x_2=2.$$

A negatív gyök hamis, tehát az egyedüli megoldás: $x=2$.

5. E1 Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$\log_4(12\cdot 2^x+1)=\log_{25}\left(\frac{1}{5^x}\right)$.

Először alakítsuk át az egyenlet jobb oldalát.

$$\log_{25}\left(\frac{1}{5^x}\right)=\log_{25}5^{-x}=-x\cdot\log_{25}5=-\frac{x}{2}.$$

Ezek szerint a megoldandó egyenlet így írható:

$$\log_4(12\cdot 2^x+1)=-\frac{x}{2},\qquad \text{azaz}\qquad 4^{-\frac{x}{2}}=12\cdot 2^x+1,$$

$$2^{-x} = 12 \cdot 2^x + 1, \qquad \frac{1}{2^x} = 12 \cdot 2^x + 1, \qquad 12 \cdot (2^x)^2 + 2^x - 1 = 0.$$

Egy 2^x-ben másodfokú egyenlethez jutottunk:

$$(2^x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{24} = \frac{-1 \pm 7}{24}, \qquad 2_1^x = -\frac{1}{3}, \qquad 2_2^x = \frac{1}{4}.$$

Mivel 2^x minden valós x esetén pozitív, így a negatív megoldás nem jöhet szóba.

$$2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2},$$

tehát az eredeti egyenlet megoldása: $x = -2$.

6. K2 Fejtsük meg az alábbi keresztrejtvényt!

Vízsz.: 1. Az $\log_n x = n$ egyenlet megoldása, ahol n 1-nél nagyobb egész szám.
2. $(\log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8)^2$.
3. 500-nál kisebb négyzetszám.

Függ.: 1. Első és utolsó számjegye megegyezik.
2. Prímszám.

■	1	
2		■
3		

Vízsz.: 1. Ha $\log_n x = n$, akkor $x = n^n$. Ez a szám csak akkor lesz kétjegyű, ha $n = 3$, tehát a vízsz.1.: 27.

Vízsz.: 2. $(\log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8)^2 = (1+2+3)^2 = 36$.

Függ. 1: 262

Függ. 2.: 31 vagy 37, de vízsz. 3 miatt csak 1 lehet.

Vízsz. 3.: 121

■	1 2	7
2 3	6	■
3 1	2	1

10. Logaritmikus egyenletrendszerek (Emelt szint)

1. K1 Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a) $\left.\begin{aligned} 3\log_4 x + 4\log_9 y &= 8 \\ \log_4 x^2 - \log_9 y &= \frac{7}{2} \end{aligned}\right\}$; b) $\left.\begin{aligned} \log_2(x+2y) &= 3 \\ \log_3(6x+6y) &= 3 \end{aligned}\right\}$; c) $\left.\begin{aligned} \log_2(x+y) - \log_2(x-y) &= 1 \\ x^2 - y^2 &= 2 \end{aligned}\right\}$.

a) Vezessük be a $\log_4 x = a$ és $\log_9 y = b$ új változókat. Ezzel egyenletrendszerünk így alakul

$$3a + 4b = 8, \qquad 2a - b = \frac{7}{2}.$$

Ez utóbbi egyenletrendszer megoldása: $a = 2$ és $b = \frac{1}{2}$. Tehát

$$\log_4 x = 2, \quad \text{ahonnan } x = 16 \quad \text{és} \quad \log_9 y = \frac{1}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad y = 3.$$

b) A logaritmus definíciójából az egyenletrendszer így írható:

$$x + 2y = 8, \qquad 6x + 6y = 27, \quad \text{azaz} \quad 2x + 2y = 9.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1, \quad y = \frac{7}{2}$.

c) Az egyenletrendszer első egyenletéből

$$\log_2 \frac{x+y}{x-y} = 1, \quad \text{azaz} \quad x + y = 2x - 2y, \quad \text{tehát } x = 3y.$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve azt kapjuk:

$$9y^2 - y^2 = 2, \quad y = \pm\frac{1}{2}.$$

A negatív megoldás hamis gyökökhöz vezet; az eredeti egyenletrendszer megoldása:

$$x = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

2. K2 Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} \log_2(2x+y)-\log_2 y=1 \\ 2^x+2^y=20 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer első egyenletéből

$\log_2\dfrac{2x+y}{y}=1$, azaz $2x+y=2y$, ahonnan $y=2x$.

Ezt a második egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$2^x+2^{2x}=20$, tehát $2^{2x}+2^x-20=0$.

A 2^x-ben másodfokú egyenlet megoldásai: $2^x=-5$ és $2^x=4=2^2$. A negatív megoldás nyilván lehetetlen, hiszen 2-nek minden hatványa pozitív, így az eredeti egyenletrendszer megoldása: $x=2$, $y=4$.

3. K2 Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} \log_x(2x+y)=2 \\ \log_2(xy)-\log_2(y-x)=3 \end{aligned}\right\}.$$

Az eredeti egyenletrendszer – a logaritmus megfelelő azonosságainak alkalmazásával – a következő egyenletrendszerre vezet:

$x^2=2x+y$, $\dfrac{xy}{y-x}=8$.

Fejezzük ki mindkét egyenletből y-t.

$y=x^2-2x$, $xy=8y-8x$, tehát $y=\dfrac{8x}{8-x}$.

Innen

$x^2-2x=\dfrac{8x}{8-x}$.

Az eredeti második egyenlet miatt $x\neq 0$, így egyszerűsítés után azt kapjuk:

$x-2=\dfrac{8}{8-x}$, ahonnan $x^2-10x+24=0$.

$x_1=6$, $x_2=4$; a megfelelő y értékek: $y_1=24$, $y_2=8$.

4. E1 Mely valós számpárok elégítik ki az alábbi egyenletrendszert?

$$\left.\begin{aligned} \log_2(xy)\cdot\log_2\frac{x}{y}=\log_2 x^2-\log_2 y^2 \\ xy-4(x+y)=0 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenlet így alakítható:

$(\log_2 x+\log_2 y)(\log_2 x-\log_2 y)=2(\log_2 x-\log_2 y)$.

Innen vagy $x=y$, vagy $\log_2 xy=2$, azaz $xy=4$, ahonnan $y=\dfrac{4}{x}$.

Az 1. esetben $(x=y)$ a második egyenlet így alakul:

$x^2-8x=0$, azaz $x(x-8)=0$.

Az eredeti első egyenlet miatt $x\neq 0$, így ebben az esetben az eredeti egyenletrendszer megoldása: $x=y=8$.

A 2. esetben $\left(y=\dfrac{4}{x}\right)$, az eredeti második egyenlet:

$4-4\left(x+\dfrac{4}{x}\right)=0$, ahonnan $x^2-x+4=0$.

Ez utóbbi másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, így nem kapunk új megoldást. Tehát az eredeti egyenletrendszer megoldása: $x=y=8$.

5. E1 Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{array}{l} x^{\log_{x^2} y}\cdot y^{\log_{y^2} x}=\sqrt{8} \\ \lg(x+2y)=1 \end{array}\right\}.$$

Az első egyenlet bal oldalának egyes tényezői így alakíthatók:

$x^{\log_{x^2} y}=\sqrt{(x^2)^{\log_{x^2} y}}=\sqrt{y}$, illetve $y^{\log_{y^2} x}=\sqrt{(y^2)^{\log_{y^2} x}}=\sqrt{x}$.

Tehát az első egyenletből

$\sqrt{xy}=\sqrt{8}$, azaz $y=\dfrac{8}{x}$.

Helyettesítsük ezt a második egyenletbe:

$x+\dfrac{16}{x}=10$, ahonnan $x^2-10x+16=0$,

$x_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-64}}{2}=\dfrac{10\pm 6}{2}$, $x_1=8$, $x_2=2$.

Ezzel az eredeti egyenletrendszer megoldásai: $x_1=8$, $y_1=1$ és $x_2=2$, $y_2=4$.

11. Logaritmikus egyenlőtlenségek (Emelt szint)

1. K1 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\log_3(4x-1)\le 1$; *b)* $\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)>0$; *c)* $\log_5(6-4x)<2$.

a) $x>\dfrac{1}{4}$; $\log_3(4x-1)\le\log_3 3$.

A logaritmus alapja 1-nél nagyobb, így azt kapjuk:

$4x-1\le 3$,

ahonnan $x\le 1$. Az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $\dfrac{1}{4}<x\le 1$.

b) $x>\dfrac{3}{4}$; $\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)>\log_{\frac{1}{2}}1$.

A logaritmus alapja 1-nél kisebb, ezért

$2x-\dfrac{3}{2}<1$,

ahonnan $x<\dfrac{5}{4}$. Az eredeti egyenlőtlenséget kielégítő valós számok: $\dfrac{3}{4}<x<\dfrac{5}{4}$.

c) $x<\dfrac{3}{2}$; $\log_5(6-4x)<\log_5 25$.

A logaritmus alapja 1-nél nagyobb, tehát

$6-4x<25$,

ahonnan $x>-\dfrac{19}{4}$. Az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $-\dfrac{19}{4}<x<\dfrac{5}{4}$.

2. K2 Ábrázoljuk számegyenesen a következő egyenlőtlenség megoldását!

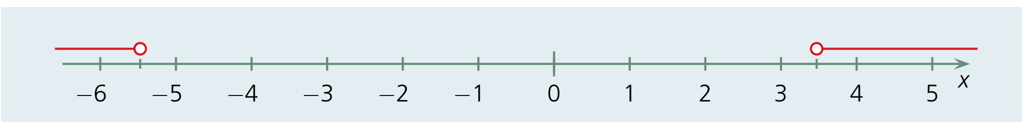
$\log_4(x^2+2x-3)>2$.

$x^2+2x-3>0$, ahonnan $x<-3$ vagy $x>1$.

$\log_4(x^2+2x-3)>\log_4 16$, ahonnan $x^2+2x-19>0$.

$x<-1-2\sqrt{5}$ vagy $x>-1+2\sqrt{5}$.

Az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $x<-1-2\sqrt{5}\approx-5{,}47$ vagy $x>-1+2\sqrt{5}\approx 3{,}47$.



3. K2 Mely valós számok elégítik ki a következő egyenlőtlenségeket?
a) $\log_x(2x+6) > 1$; *b)* $\log_{x^2+1}(7-x) < 1$.

a) $x > 0, \quad x \neq 1. \quad \log_x(2x+6) > \log_x x.$
Most két esetet kell vizsgálnunk aszerint, hogy $x > 1$ vagy $0 < x < 1$.
Ha $x > 1$, akkor
$2x + 6 > x$, azaz $x > -6$.
Tehát ez esetben $x > 1$.
Ha $0 < x < 1$, akkor
$2x + 6 < x$, azaz $x < -6$.
Ekkor tehát nincs megoldás.
A két esetet egybevetve az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $x > 1$.

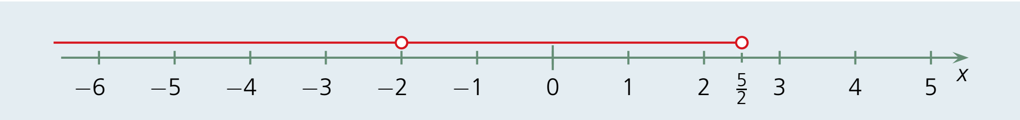
b) $x \neq 0$ és $x < 7. \quad \log_{x^2+1}(7-x) < \log_{x^2+1}(x^2+1).$
A logaritmus alapja minden x-re 1-nél nagyobb, így azt kapjuk:
$7 - x < x^2 + 1$, azaz $x^2 + x - 6 > 0$.
$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}, \qquad x_1 = -3, \quad x_2 = 2.$
Tehát a másodfokú egyenlőtlenség megoldása: $x < -3$ vagy $x > 2$. Egybevetve az egyenlőtlenség értelmezési tartományával, az eredeti egyenlőtlenség megoldása:
$x < -3$ vagy $2 < x < 7$.

4. E1 Ábrázoljuk számegyenesen a következő kifejezés értelmezési tartományát!
$$\frac{\sqrt{1-\log_{\frac{1}{2}}(3-x)}}{x+2}.$$

$x < 3, \quad x \neq -2$ és $1 - \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geq 0. \quad \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \leq 1.$

$\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \leq 1 \left(= \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\right).$
A logaritmus alapja 1-nél kisebb, ezért innen
$3 - x \geq \frac{1}{2}$, ahonnan $x \leq \frac{5}{2}$.

Az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $x \leq \frac{5}{2}$ és $x \neq -2$.



5. E1 Ábrázoljuk számegyenesen a következő kifejezés értelmezési tartományát!
$\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^4 + 4} \geq 1.$

$x > 0.$ Az egyenlőtlenség bal oldala így írható:
$\sqrt{\log_2^2 x - 4 \cdot \log_2 x + 4} \geq 1$, azaz $\sqrt{(\log_2 x - 2)^2} \geq 1$,
$|\log_2 x - 2| \geq 1.$
Innen $\log_2 x - 2 \geq 1$ vagy $\log_2 x - 2 \leq -1.$
Első esetben
$\log_2 x \geq \log_2 8$, azaz $x \geq 8$.
Második esetben
$\log_2 x \leq \log_2 2$, azaz $x \leq 2$.

A két esetet és az értelmezési tartományt egybevetve az eredeti egyenlőtlenség megoldása:
vagy .

12. Áttérés új alapra (emelt szint)

1. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_3 x + \log_9 x = 6$; *b)* $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x = \frac{4}{3}$.

a) $x > 0$. Írjuk át az egyenlet bal oldalának második tagját 3-as alapra.

$$\log_3 x + \frac{\log_3 x}{2} = 6, \quad \text{azaz} \quad 3\log_3 x = 12,$$

$$\log_3 x = 4, \quad \text{ahonnan} \quad x = 81.$$

b) $x > 0$. Írjuk át a bal oldal tényezőit 2-es alapra.

$$\log_2 x \cdot \frac{\log_2 x}{2} \cdot \frac{\log_2 x}{3} = \frac{4}{3}, \quad \text{azaz} \quad \log_2^3 x = 8,$$

$$\log_2 x = 2, \quad \text{ahonnan} \quad x = 4.$$

2. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_2 (x+12) \cdot \log_x 2 = 2$; *b)* $\log_{x+1} (x-3) = \log_{x-3} (x+1)$.

a) $x > 0$, $x \neq 1$. Az egyenlet így alakítható:

$$\log_2(x+12) \cdot \frac{1}{\log_2 x} = 2, \quad \text{vagyis} \quad \log_2(x+12) = 2\log_2 x,$$

$$\log_2(x+12) = \log_2 x^2, \quad \text{ahonnan} \quad x^2 - x - 12 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 4.$$

Mivel $x > 0$, ezért az egyedüli megoldás: $x = 4$.

b) $x > 3$. Az egyenlet így írható:

$$\log_{x+1}(x-3) = \frac{1}{\log_{x+1}(x-3)}, \quad \text{azaz} \quad \log^2_{x+1}(x-3) = 1.$$

Innen

$\log_{x+1}(x-3) = 1$ vagy $\log_{x+1}(x-3) = -1$.

Első esetben $x+1 = x-3$, ami nyilván lehetetlen.

A másik esetben $x - 3 = \frac{1}{x+1}$, vagyis $x^2 - 2x - 4 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}.$$

A negatív érték nem jön számításba, így az eredeti egyenlet megoldása: $x = \sqrt{5} + 1$.

3. E1 Ábrázoljuk számegyenesen a következő egyenlőtlenség megoldását!

$\log_4 x \geq \log_x 4$.

$x > 0$, $x \neq 1$.

$$\log_4 x \geq \frac{1}{\log_4 x}.$$

Most két esetet kell vizsgálnunk aszerint, hogy $\log_4 x > 0$, azaz $x > 1$, vagy $\log_4 x < 0$, azaz $x < 1$.

Ha $x > 1$, akkor az egyenlőtlenség így alakul:

$\log_4^2 x \geq 1$, azaz $|\log_4 x| \geq 1$.

Mivel ebben az esetben $\log_4 x > 0$, ezért azt kapjuk:

$\log_4 x \geq 1 = \log_4 4$, ahonnan $x \geq 4$.

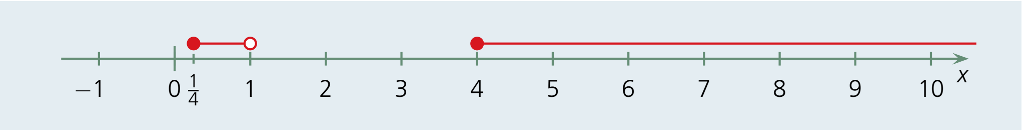
Ha $0 < x < 1$, akkor a fenti egyenlőtlenség nevezője negatív, így ekkor

$\log_4^2 x \leq 1$, azaz $-1 \leq \log_4 x \leq 1$,

$\log_4 \frac{1}{4} \leq \log_4 x \leq \log_4 4$, ahonnan $\frac{1}{4} \leq x \leq 4$.

Ebben az esetben tehát azt kapjuk: $\frac{1}{4} \leq x < 1$.

A két esetet egybevetve, az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $\frac{1}{4} \leq x < 1$ vagy $x \geq 4$.



4. E1 Mivel egyenlő $\log_6 x$, ha $\log_2 x = a$ és $\log_3 x = b$?

$\log_x 2 = \frac{1}{a}$, $\log_x 3 = \frac{1}{b}$.

A két egyenlőség összege:

$\log_x 2 + \log_x 3 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, azaz $\log_x 6 = \frac{a+b}{ab}$.

Innen pedig

$\log_6 x = \frac{ab}{a+b}$.

5. E1 Mit írhatunk az x helyére, hogy az alábbi egyenlőség igaz legyen?

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \frac{1}{\log_{a^4} b} + \frac{1}{\log_{a^5} b} = \frac{x}{\log_a b}.$$

Az eredeti egyenletet így írhatjuk:

$\log_b a + \log_b a^2 + \log_b a^3 + \log_b a^4 + \log_b a^5 = x \cdot \log_b a$,

$\log_b (a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a^5) = x \cdot \log_b a$,

$\log_b a^{15} = x \cdot \log_b a$, azaz $15 \cdot \log_b a = x \cdot \log_b a$,

tehát $x = 15$.

13. Exponenciális folyamatok a társadalomban, a logaritmus gyakorlati alkalmazásai

1. K1 A brazíliai őserdő a fakivágásokat és az új ültetéseket egybevetve – az ottani természetvédők szerint – évente 1,28%-kal csökken. Ha ez a tendencia nem változik, akkor hány év múlva tűnik el ennek az őserdőnek a fele?

Legyen A az őserdő jelenlegi faállománya. Ha n év múlva csökken a felére, akkor

$A \cdot 0{,}9872^n = 0{,}5 \cdot A$, azaz $0{,}9872^n = 0{,}5$.

Vegyük az egyenlet mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát:

$\lg 0{,}9872^n = \lg 0{,}5$, azaz $n \cdot \lg 0{,}9872 = \lg 0{,}5$,

$$n = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}9872} \approx \frac{-0{,}301}{-0{,}0056} \approx 53{,}75.$$

Tehát, ha a tendencia így folytatódik, akkor az erdő kb. 53,75 év múlva a felére csökken.

2. K2 András betett a bankba 1 millió Ft-ot. Ez évenként kamatozik 8,5%-ot. Testvére Béla egy másik bankba tette 1,3 millió Ft-ját, ahol évente 6%-ot kamatozik. Hány év múlva lesz Andrásnak ugyanannyi pénze mint Bélának?

Ha n év múlva lesz a két fiúnak ugyanannyi pénze, akkor

$10^6 \cdot 1{,}085^n = 1{,}3 \cdot 10^6 \cdot 1{,}06^n$, azaz $\left(\frac{1{,}085}{1{,}06}\right)^n = 1{,}3$, vagyis $1{,}0236^n = 1{,}3$,

$n \cdot \lg 1{,}0236 = \lg 1{,}3$, ahonnan $n = \frac{\lg 1{,}3}{\lg 1{,}0236} \approx \frac{0{,}1139}{0{,}0101} \approx 11{,}27$.

Tehát a 11. évet követő időben lesz a két fiúnak ugyanannyi pénze.

3. K1 Magyarország lakossága 2007-ben kb. 10 045 000 fő volt, ami kb. 0,2%-os csökkenést jelentett az előző évhez képest. Ugyanebben az évben Finnország lakossága kb. 5 282 000 fő, ami 0,2%-os emelkedés az előző évhez képest. Ha mindkét országban ez a tendencia folytatódna, akkor kb. hány év múlva érné el Finnország lakosságának létszáma Magyarország lakosságának létszámát?

$1{,}0045 \cdot 10^7 \cdot 0{,}998^n = 5{,}282 \cdot 10^6 \cdot 1{,}002^n$,

$\frac{10 \cdot 1{,}0045}{5{,}282} = \left(\frac{1{,}002}{0{,}998}\right)^n$, vagyis $1{,}90174 \approx 1{,}004^n$,

$\lg(1{,}90174) \approx \lg(1{,}004^n)$, azaz $\lg(1{,}90174) \approx n \cdot \lg(1{,}004)$,

$$n \approx \frac{\lg 1{,}90174}{\lg 1{,}004} \approx \frac{0{,}27915}{0{,}00173} \approx 161{,}3.$$

Tehát, ha a tendencia ilyen ütemben folytatódik, akkor a két ország lélekszáma kb. 161 év múlva lesz egyenlő.

4. K2 1990-ben a Föld lakossága 6 milliárd fő volt. A népességkutatók szerint ez a szám évente 1,8%-kal növekszik. Mikor lesz a Föld lakóinak a száma 10 milliárd?

$6 \cdot 1{,}018^n = 10$, azaz $1{,}018^n \approx 1{,}6666$.

$n \cdot \lg 1{,}018 \approx \lg 1{,}6666$, ahonnan $n \approx \frac{\lg 1{,}6666}{\lg 1{,}018} \approx \frac{0{,}22184}{0{,}00774} \approx 28{,}6$.

Tehát ilyen növekedési ütem mellett a Föld lakóinak a száma kb. 2018. év közepén éri el a 10 milliárd főt.

5. K2 A lehűlési törvény alapján számítsuk ki, hogy a 120 C°-os sütőből kivett piskóta, vagy a 180 C°-os sütőből kivett pogácsa hűl le hamarabb 50 C°-ra, ha a piskóta esetében $k = 8,5$, a pogácsa esetében pedig $k = 9,2$, és a konyha hőmérséklete 24 C°?

Vegyük a lehűlési törvényről szóló egyenlőség mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát.

$$\lg 2{,}7^{\frac{t}{k}} \approx \lg\left(\frac{T_0 - K}{T - K}\right), \qquad \text{azaz} \qquad \frac{t}{k} \cdot \lg 2{,}7 \approx \lg\left(\frac{T_0 - K}{T - K}\right),$$

$$t \approx k \cdot \frac{\lg\left(\frac{T_0 - K}{T - K}\right)}{\lg 2{,}7}.$$

Piskóta esetében

$$t_1 \approx 8{,}5 \cdot \frac{\lg\left(\frac{120 - 24}{50 - 24}\right)}{\lg 2{,}7} \approx 8{,}5 \cdot \frac{\lg\left(\frac{96}{26}\right)}{\lg 2{,}7} \approx 8{,}5 \cdot \frac{\lg 3{,}6923}{\lg 2{,}7} \approx 8{,}5 \cdot \frac{0{,}5673}{0{,}4313} \approx 11{,}2 \text{ perc.}$$

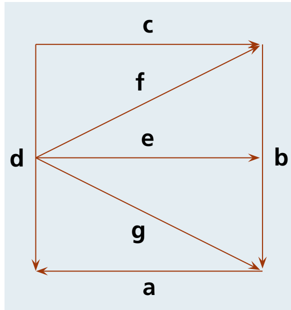
Pogácsa esetében

$$t_2 \approx 9{,}2 \cdot \frac{\lg\left(\frac{180 - 24}{50 - 24}\right)}{\lg 2{,}7} \approx 9{,}2 \cdot \frac{\lg\left(\frac{156}{26}\right)}{\lg 2{,}7} \approx 9{,}2 \cdot \frac{\lg 6}{\lg 2{,}7} \approx 9{,}2 \cdot \frac{0{,}77815}{0{,}4313} \approx 16{,}6 \text{ perc.}$$

IV Trigonometria

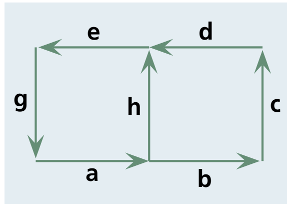
1. A vektorokról tanultak összefoglalása

1. K1 Az ábrán jelölt vektorok közül válasszuk ki
a) az egyenlőket;
b) az ellentetteket!



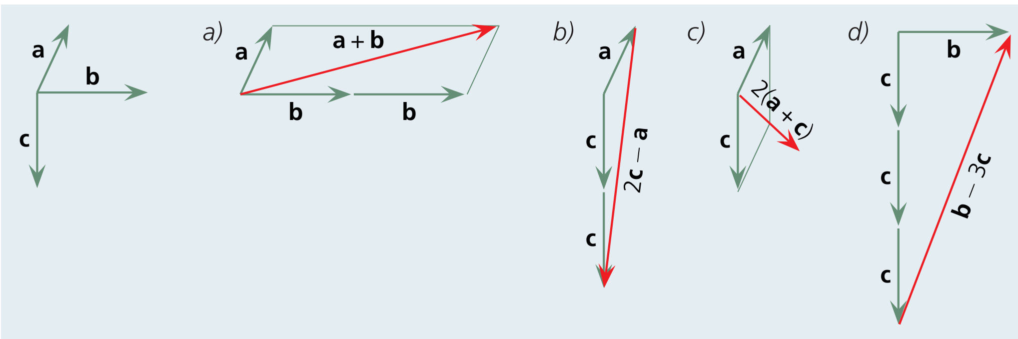
a) $\mathbf{b} = \mathbf{d}$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}$.
b) $\mathbf{a} = -\mathbf{e}$, $\mathbf{a} = -\mathbf{c}$.

2. K1 Két négyzet egymáshoz illesztésével téglalapot rajzolunk. Az így kapott hét szakaszt irányítsuk úgy, hogy a hét vektorból kiválasztható legyen kettő, négy és hat vektor is, amelyek összege nullvektor!

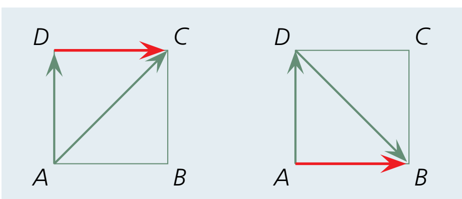


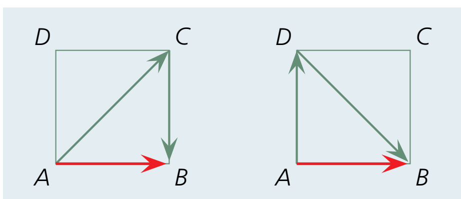
Egy lehetséges megoldást mutat az ábra.
$\mathbf{a} + \mathbf{e} = \mathbf{0}$,
$\mathbf{a} + \mathbf{h} + \mathbf{e} + \mathbf{g} = \mathbf{0}$,
$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{g} = \mathbf{0}$.

3. K1 Adott **a**, **b** és **c** vektor (semelyik kettő nem egyenlő egymással). Szerkesszük meg az
a) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$; *b)* $2\mathbf{c} - \mathbf{a}$; *c)* $2(\mathbf{a} + \mathbf{c})$; *d)* $\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$
vektorokat!



4. K1 Legyen *ABCD* egy négyzet. Mutassuk meg, hogy
a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$; *b)* $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$!

a)


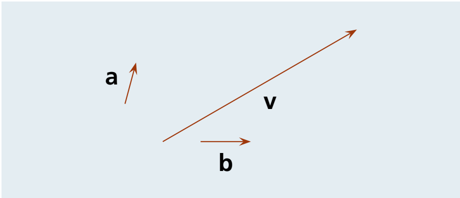
b)


Vagyis $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$.

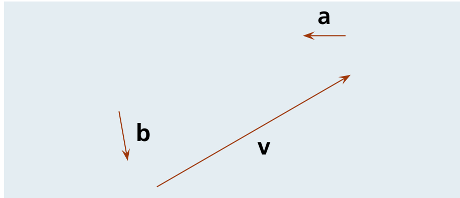
Vagyis $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$.

5. K2 Adjuk meg a **v** vektornak az **a** és **b** vektorokkal egyállású összetevőit! *(ábra)*

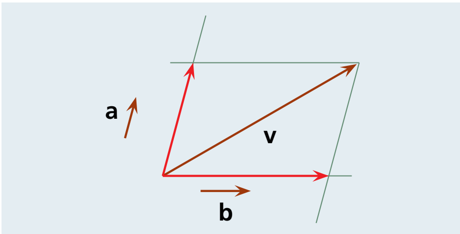
a)



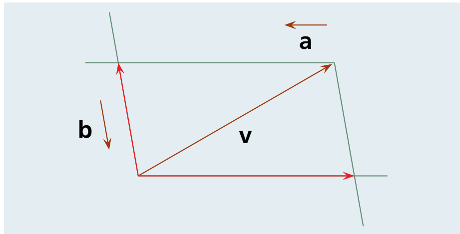
b)



a)



b)



6. K1 Egy téglalap három csúcsa a (–2; 2), (8; 2), (8; 4) koordinátájú pontokban van. Adjuk meg
a) a negyedik csúcshoz;
b) a középpontjához;
c) az oldalak felezőpontjához
tartozó helyvektor koordinátáit!

a) $D(-2; 4)$;
b) $K(3; 3)$;
c) $F_1(3; 2)$; $F_2(8; 3)$; $F_3(3; 4)$; $F_4(-2; 3)$.

2. Két vektor skaláris szorzata

1. K1 Adott két vektor abszolút értéke és hajlásszöge. Számítsuk ki a skaláris szorzatukat!
a) $|\mathbf{a}| = 9$, $|\mathbf{b}| = 10$, $\gamma = 73°$;
b) $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 13$, $\gamma = 103°$;
c) $|\mathbf{a}| = 0{,}8$, $|\mathbf{b}| = 9$, $\gamma = 19°20'$;
d) $|\mathbf{a}| = 18$, $|\mathbf{b}| = 0{,}5$, $\gamma = 117°45'$.

Használjuk fel a skaláris szorzat definícióját: $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\gamma$.
a) $\mathbf{ab} = 9 \cdot 10 \cdot \cos 73° \approx 26{,}31$;
b) $\mathbf{ab} = 4 \cdot 13 \cdot \cos 103° \approx -11{,}70$;
c) $\mathbf{ab} = 0{,}8 \cdot 9 \cdot \cos 19°20' \approx 6{,}80$;
d) $\mathbf{ab} = 18 \cdot 0{,}5 \cdot \cos 117°45' \approx -4{,}19$.

2. K1 Számítsuk ki annak a paralelogrammának a szögeit, amelynek oldalhosszai 10, illetve 20, az egyik csúcsából induló két oldalvektor skaláris szorzata pedig 184,1!

A feladat szövege szerint: $\mathbf{ab} = 10 \cdot 20 \cdot \cos\alpha = 184{,}1$.

Vagyis: $\cos\alpha = \dfrac{184{,}1}{200} = 0{,}9205$.

Ebből kapjuk, hogy $\alpha = 23°$. A paralelogramma szögei: 23°, 157°, 23°, 157°.

3. K1 Számítsuk ki annak a rombusznak a szögeit, amelynek oldalhosszai 24, az egyik csúcsából induló két oldalvektor skaláris szorzata pedig –100,02!

A feladat szövege szerint: $\mathbf{ab} = 24 \cdot 24 \cdot \cos\alpha = -100{,}02$.

Vagyis: $\cos\alpha = -\dfrac{100{,}02}{576} \approx -0{,}1736$.

Ebből kapjuk, hogy $\alpha = 100°$. A rombusz szögei: 100°, 80°, 100°, 80°.

4. K1 Számítsuk ki annak a rombusznak az oldalhosszát, amelynek egyik szöge 70°, és az ebből a csúcsból induló két oldalvektor skaláris szorzata 30,22!

Tudjuk, hogy: $\mathbf{ab} = a \cdot a \cdot \cos 70° = 30{,}22$.

Vagyis: $a^2 = \dfrac{30{,}22}{\cos 70°} \approx 88{,}3574$.

Ebből kapjuk, hogy a rombusz oldalhossza: $a \approx 9{,}4$.

5. K2 *a)* Igazoljuk, hogy **a** és **b** (egyik sem nullvektor) hegyesszöget zár be egymással, ha $4\mathbf{b} - \mathbf{a}$ és $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ merőleges egymásra!
b) Igazoljuk, hogy **a** és **b** (egyik sem nullvektor) tompaszöget zár be egymással, ha $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ és $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ merőleges egymásra!

a) Tudjuk, hogy $4\mathbf{b} - \mathbf{a}$ és $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ merőleges egymásra, ezért $(4\mathbf{b} - \mathbf{a})(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) = 0$.
Végezzük el a szorzást:
$8\mathbf{ab} - 2\mathbf{a}^2 - 12\mathbf{b}^2 + 3\mathbf{ab} = 0$.
Fejezzük ki **ab**-t, és használjuk fel, hogy $\mathbf{a}^2 = a^2$, $\mathbf{b}^2 = b^2$:
$\mathbf{ab} = \dfrac{2}{11} \cdot a^2 + \dfrac{12}{11} \cdot b^2 > 0$.
Mivel $\mathbf{ab} > 0$, ezért **a** és **b** valóban hegyesszöget zár be egymással.

b) Tudjuk, hogy $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ és $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ merőleges egymásra, ezért $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}) = 0$.
Végezzük el a szorzást:
$3\mathbf{a}^2 + 6\mathbf{ab} + 4\mathbf{ab} + 8\mathbf{b}^2 = 0$.
Fejezzük ki **ab**-t, és használjuk fel, hogy $\mathbf{a}^2 = a^2$, $\mathbf{b}^2 = b^2$:
$\mathbf{ab} = -\dfrac{3}{10} \cdot a^2 + \dfrac{8}{10} \cdot b^2 < 0$.
Mivel $\mathbf{ab} < 0$, ezért **a** és **b** valóban tompaszöget zár be egymással.

6. E1 Az adott **a** és **b** vektorok egyike sem nullvektor. Igazoljuk, hogy van olyan k valós szám, amelyre $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - k\mathbf{b}$ merőleges egymásra!

Vizsgáljuk a $(\mathbf{a} + k\mathbf{b})(\mathbf{a} - k\mathbf{b})$ szorzatot:
$(\mathbf{a} + k\mathbf{b})(\mathbf{a} - k\mathbf{b}) = a^2 - k^2b^2$, ahol $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$.

A feladat szövege szerint teljesülni-e kell: $a^2 - k^2b^2 = 0$, azaz $k^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$.

Ezek szerint k lehetséges értékei: $k_1 = \dfrac{a}{b}$, $k_2 = -\dfrac{a}{b}$.

3. A trigonometriáról eddig tanultak összefoglalása

1. K1 Számológép segítségével határozzuk meg a
a) sin 11°; *b)* cos 63°; *c)* tg 71°; *d)* ctg 76°
értékét hat tizedesjegy pontossággal!

a) $\sin 11° \approx 0{,}190809$; *b)* $\cos 63° \approx 0{,}453990$;

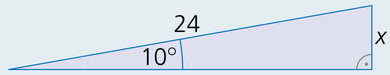
c) $\operatorname{tg} 71° \approx 2{,}904211$; *d)* $\operatorname{ctg} 76° = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 76°} \approx 0{,}249328$.

2. K1 Számológép segítségével határozzuk meg az α hegyesszög nagyságát két tizedesjegy pontossággal, ha
a) $\sin \alpha = 0{,}22$; *b)* $\cos \alpha = 0{,}44$; *c)* $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}11$; *d)* $\operatorname{ctg} \alpha = 2{,}23$!

a) $\alpha \approx 12{,}71°$; *b)* $\alpha \approx 63{,}90°$; *c)* $\alpha \approx 47{,}98°$; *d)* $\alpha \approx 24{,}15°$.

3. K2 Egy 24 méter hosszú emelkedő emelkedési szöge 10°-os. Mennyi a szintkülönbség az emelkedő alja és teteje között?

Készítsünk ábrát! A szintkülönbség legyen *x*.

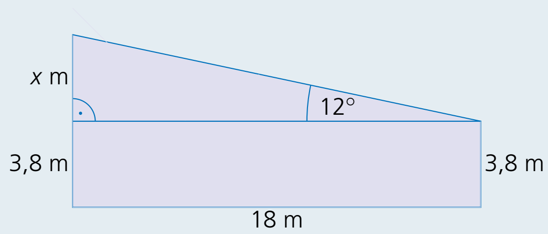


A derékszögű háromszögben: $\sin 10° = \frac{x}{24}$, azaz $x = 24 \cdot \sin 10° \approx 4{,}2$.

Vagyis a szintkülönbség kb. 4,2 méter.

4. K2 Egy 2 méter magas létra tetején álló 180 cm magas ember a szemközti ház tetejét 12°-os emelkedési szögben látja. Az ember és a ház közötti távolság 18 méter. Milyen magas a szemközti ház?

A rendelkezésünkre álló adatok alapján vázlatrajzot készítünk.
A létra és az ember együttes magassága 3,8 méter, a ház magassága (*x* + 3,8)méter.



A derékszögű háromszögben: $\mathrm{tg}\, 12° = \frac{x}{18}$, azaz $x = 18 \cdot \mathrm{tg}\, 12° \approx 3{,}8$.

Vagyis a ház kb. 7,6 méter magas.

5. K1 Adjuk meg mely hegyesszög koszinuszával egyenlő:

a) sin 32°; *b)* sin 3,62°; *c)* sin 56°54′; *d)* sin 18°54′51″!

a) 58°; *b)* 86,38°; *c)* 33°6′; *d)* 71°5′9″.

6. K2 Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét!

a) $(\cos 45° + \mathrm{tg}\, 45°)^2$; *b)* $(\cos 30° + \sin 270°)^2$;

c) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6}} \cdot \sin\frac{\pi}{3}$; *d)* $\dfrac{\cos \pi}{\sin\frac{2\pi}{3}} : \cos\frac{4\pi}{3}$.

a) $(\cos 45° + \mathrm{tg}\, 45°)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + 1 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$;

b) $(\cos 30° + \sin 270°)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 = \frac{3}{4} - \sqrt{3} + 1 = \frac{7}{4} - \sqrt{3}$;

c) $\frac{\mathrm{ctg}\, 45°}{\cos 30°} \cdot \sin 60° = \frac{\mathrm{ctg}\, 45°}{\cos 30°} \cdot \cos 30° = \mathrm{ctg}\, 45° = 1$;

d) $\frac{\cos 180°}{\sin 120°} : \cos 240° = \frac{-1}{\sin 60°} : (-\cos 60°) = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} : \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

7. K2 Milyen forgásszögekre igaz, hogy

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *b)* $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

d) $\sin\alpha = -0{,}2924$; *e)* $\cos\alpha = 0{,}5150$; *f)* $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}6745$?

a) $\alpha_1 = 45° + k_1 \cdot 360°$, $\alpha_2 = 135° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

b) $\alpha_1 = 120° + k_1 \cdot 360°$, $\alpha_2 = 240° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

c) $\alpha = 30° + k \cdot 180°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

d) $\alpha_1 \approx -17° + k_1 \cdot 360°$, $\alpha_2 \approx -163° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

e) $\alpha_1 \approx 59° + k_1 \cdot 360°$, $\alpha_2 \approx -59° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

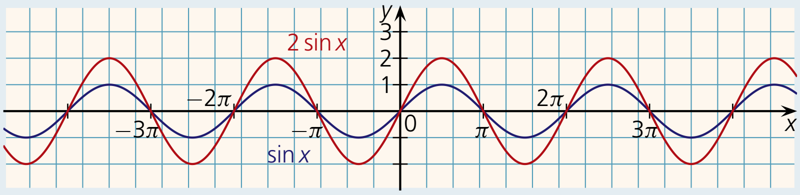
f) $\alpha \approx -34° + k \cdot 180°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

8. K2 A trigonometriai alapfüggvényekből függvénytranszformációk alkalmazásával ábrázoljuk a következő függvényeket!

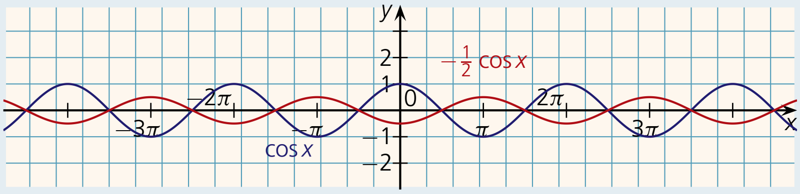
a) $2\sin x$; *b)* $-\frac{1}{2}\cos x$; *c)* $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; *e)* $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; *f)* $1 + \sin x$.

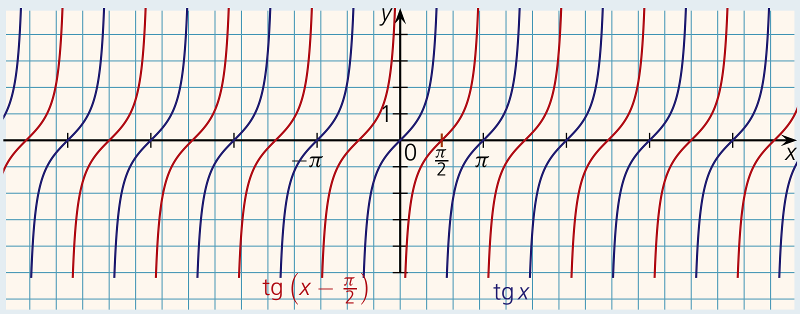
a)



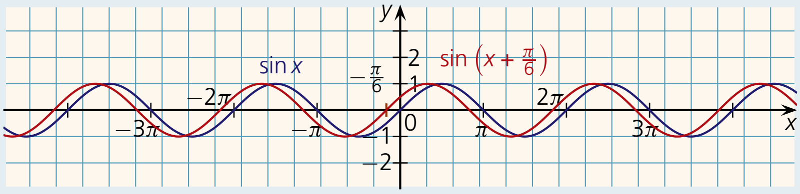
b)



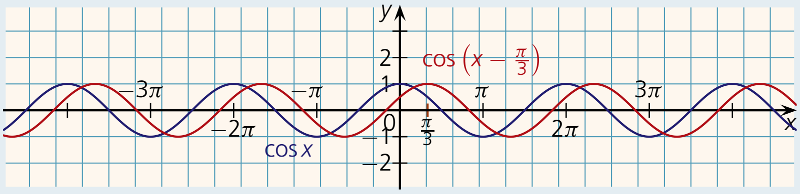
c)



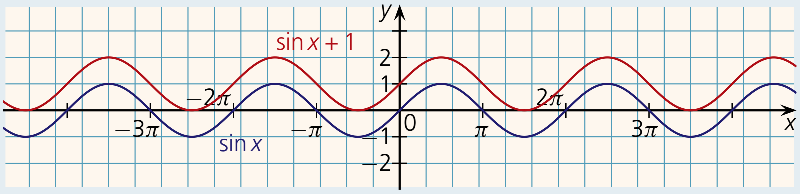
d)



e)



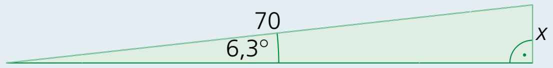
f)



4. Számítások háromszögben

1. K1 Milyen magasra visz az az emelkedő, amely a vízszintessel 6,3°-os szöget zár be, és a hossza 70 méter?

Készítsünk ábrát!

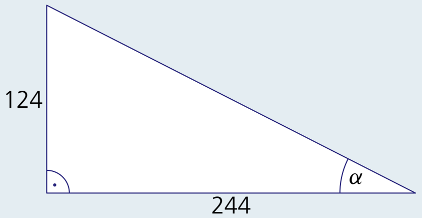


A derékszögű háromszögben: $\sin 6{,}3° = \frac{x}{70}$, azaz $x = 70 \cdot \sin 6{,}3° \approx 7{,}7$ (m).

Vagyis kb. 7,7 méter magasra visz az emelkedő.

2. K1 Egy garázsba vezető lejárat mélysége 124 cm, a lejárat vízszintesre eső merőleges vetülete 244 cm. Mekkora a lejárat hajlásszöge a vízszinteshez képest?

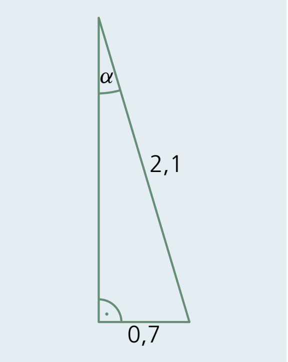
A szöveg alapján vázlatrajzot készítünk.



A derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{124}{244}$, azaz $\alpha \approx 27°$.

Vagyis kb. 27°-os a lejárat hajlásszöge a vízszinteshez képest.

3. K1 A falnak döntve ferdén áll egy 2,1 méteres gerenda. A gerenda alsó vége 70 cm-re van a faltól. Mekkora szöget zár be a fallal a gerenda?



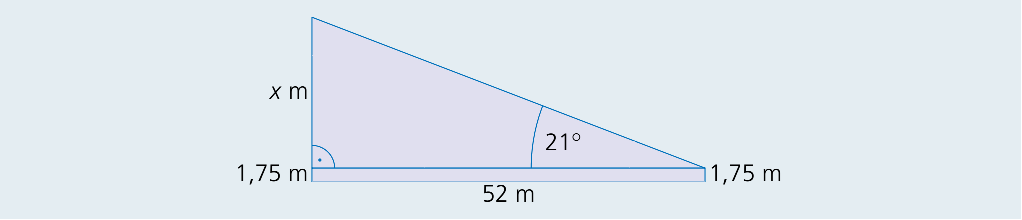
A vázlatrajzunkon α-val jelöltük a keresett szöget.

A derékszögű háromszögben: $\sin\alpha = \frac{0,7}{2,1}$, azaz $\alpha \approx 19,5°$.

Vagyis a keresett szög kb. 19,5°-os.

4. K1 Egy vízszintes talajon álló torony tetejét 52 méter távolságból egy 175 cm magas ember 21°-os szögben látja. Milyen magas a torony?

Vázlatrajzunkon a torony magassága $x + 1,75$.

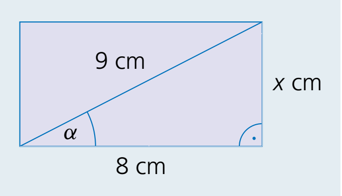


A derékszögű háromszögben: $\mathrm{tg}\,21° = \frac{x}{52}$, azaz $x = 52 \cdot \mathrm{tg}\,21° \approx 19,96$.

Vagyis a torony kb. 21,7 méter magas.

5. K1 Határozzuk meg a téglalap területét, ha az egyik oldala 8 cm, az átlója 9 cm hosszú! Mekkora szöget zár be az átló az oldalakkal?

Az ismeretlen oldal legyen x, a keresett szögek pedig α, illetve $90° - \alpha$.
Az x meghatározható Pitagorasz-tétellel:
$x = \sqrt{81 - 64} = \sqrt{17}$.
Ekkor: $t = 8 \cdot \sqrt{17} \approx 32,98$.
Vagyis a téglalap területe kb. 32,98 cm².

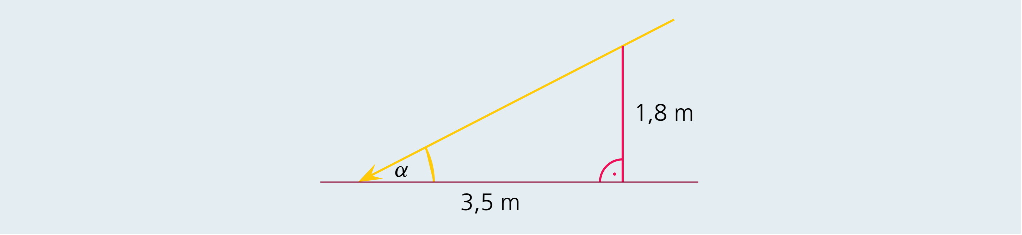


A derékszögű háromszögben: $\cos\alpha = \frac{8}{9}$, azaz $\alpha \approx 27,27°$.

A keresett szögek kb.: 27,27° és 62,73°.

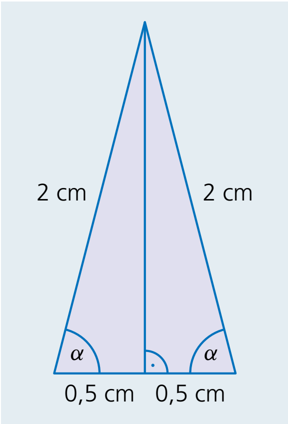
6. K1 Mekkora szöget zárnak be a vízszintessel a fénysugarak akkor, amikor egy 180 cm-es ember árnyéka a vízszintes talajon 3,5 méteres?

Az adatok feltüntetésével vázlatrajzot készítünk:



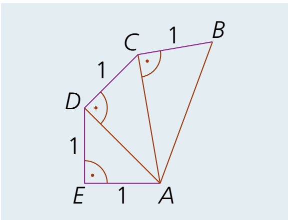
A derékszögű háromszögben: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1,8}{3,5}$, azaz $\alpha \approx 27,22°$.

Vagyis a napsugarak kb. 27,22°-os szöget zárnak be ekkor a vízszintessel.



7. K2 Egy háromszög minden oldalának hossza centiméterben mérve egész szám. Két oldalának hossza 1 cm és 2 cm. Mekkorák a háromszög szögei?

A háromszög-egyenlőtlenségek miatt a hiányzó oldal hossza nem lehet 2 cm-nél rövidebb, de hosszabb sem. A hiányzó harmadik oldal csakis 2 cm-es lehet.
Készítsünk rajzot!
Az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága két egybevágó derékszögű háromszögre bontja a háromszöget. Vagyis: $\cos\alpha = \frac{0{,}5}{2}$, azaz $\alpha \approx 75{,}52°$.
Az eredeti háromszög hiányzó szögét a belső szögek szögösszegére vonatkozó tétellel számoljuk ki: $180° - 2 \cdot 75{,}52° = 28{,}96°$.
Vagyis a háromszög szögei: 75,52°; 75,52°; 28,96°.

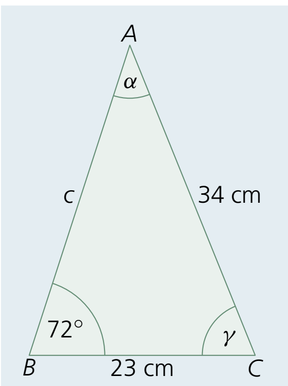


8. K2 Az *ábrán* látható *ABCDE* ötszögnek mekkorák a szögei, mekkora a hiányzó oldala, mekkora a területe?

Az *AED* derékszögű háromszögben a két hegyesszög 45°-os, $AD = \sqrt{2}$.
Ekkor *ADC* derékszögű háromszögben az *A*-nál lévő szögre felírható:
$\operatorname{tg} CAD\sphericalangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$, azaz $CAD\sphericalangle \approx 35{,}26°$.
Ezek alapján az *ADC* derékszögű háromszögben: $ACD\sphericalangle \approx 54{,}74°$, Pitagorasz-tétellel pedig: $AC = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$.
Ekkor *ACB* derékszögű háromszögben az *A*-nál lévő szögre felírható:
$\operatorname{tg} CAB\sphericalangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$, azaz $CAB\sphericalangle = 30°$.
Ezek alapján az *ACB* derékszögű háromszögben: $ABC\sphericalangle = 60°$, Pitagorasz-tétellel pedig: $AB = \sqrt{1+3} = 2$.
Vagyis a hiányzó oldal: $AB = 2$, a hiányzó szögek: $BAE\sphericalangle = 45° + 35{,}26° + 30° = 110{,}26°$, $ABC\sphericalangle = 60°$, $BCD\sphericalangle = 90° + 54{,}74° = 144{,}74°$, $CDE\sphericalangle = 90° + 45° = 135°$.
Az *ABCDE* ötszög területe: $\frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \approx 2{,}57$.

5. Szinusztétel

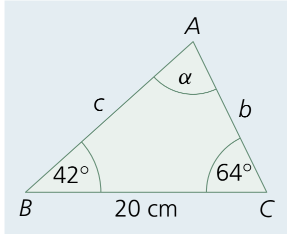
1. K1 Egy háromszög két oldalának hossza 23 cm és 34 cm. Ez utóbbival szemben 72°-os szög van. Határozzuk meg az ismeretlen oldal hosszát! Mekkorák a hiányzó szögek?



Az adatok alapján készítsünk vázlatrajzot!
Írjuk fel a szinusztételt:
$\frac{\sin\alpha}{\sin 72°} = \frac{23}{34}$,
$\sin\alpha = \frac{23}{34} \cdot \sin 72° \approx 0{,}6434$.
Mivel $a < b$, ezért $\alpha < \beta$. Vagyis α csak hegyesszög lehet:
$\alpha \approx 40°$.
A hiányzó harmadik szög:
$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 40° - 72° \approx 68°$.
A harmadik oldalt is szinusztétellel számoljuk ki:
$\frac{c}{34} = \frac{\sin 68°}{\sin 72°}$,
$c = \frac{\sin 68°}{\sin 72°} \cdot 34 \approx 33{,}15$.
Tehát: $c \approx 33{,}15$ cm, $\alpha \approx 40°$, $\gamma \approx 68°$.

2. K1 Egy háromszög 20 cm-es oldalán 42°-os és 64°-os szög található. Határozzuk meg az ismeretlen oldalak hosszát!

Az adatok alapján készítsünk vázlatrajzot!



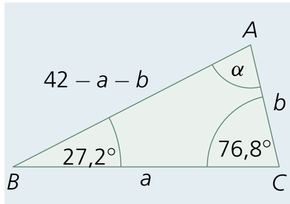
Tudjuk, hogy $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 42° - 64° = 74°$.
Írjuk fel a szinusztételt a c és utána a b oldallal is:

$\frac{c}{20} = \frac{\sin 64°}{\sin 74°}$, $\quad c = \frac{\sin 64°}{\sin 74°} \cdot 20 \approx 18{,}7$.

$\frac{b}{20} = \frac{\sin 42°}{\sin 74°}$, $\quad b = \frac{\sin 42°}{\sin 74°} \cdot 20 \approx 13{,}9$.

Vagyis az ismeretlen oldalak hossza kb. 13,9 cm és 18,7 cm.

3. K2 Mekkorák a háromszög oldalai, ha a kerülete 42 cm, és van egy 27,2°-os és egy 76,8°-os szöge?



Használjuk az ábra jelöléseit!
Tudjuk, hogy $\alpha = 180° - 27{,}2° - 76{,}8° = 76°$.
Írjuk fel a szinusztételt:

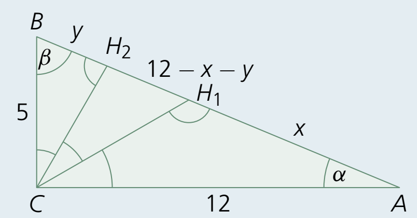
$\frac{a}{b} = \frac{\sin 76°}{\sin 27{,}2°}$, $\quad$ illetve $\quad \frac{a}{42 - a - b} = \frac{\sin 76°}{\sin 76{,}8°}$.

$a \approx 2{,}123 \cdot b$ $\qquad a \approx 0{,}997(42 - a - b)$.

A második egyenletbe behelyettesítünk az a helyére $2{,}123 \cdot b$-t:
$2{,}123 \cdot b \approx 0{,}997(42 - 2{,}123 \cdot b - b)$,
$2{,}123 \cdot b \approx 41{,}874 - 3{,}114b$,
$b \approx 8$.
Ekkor $a \approx 17$, $c \approx 17$.
Tehát az oldalak kb.: 8 cm, 17 cm, 17 cm.

4. K2 Az 5 és 12 befogójú derékszögű háromszögben a derékszöget harmadoló két félegyenes mekkora darabokra vágja az átfogót?

Az ábra jelöléseit használjuk!



Az ABC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt $AB = 13$.
Ezért ha $AH_1 = x$, $BH_2 = y$, akkor $H_1H_2 = 13 - x - y$.

Az ABC derékszögű háromszögben: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, amiből $\alpha \approx 22{,}62°$. Ekkor

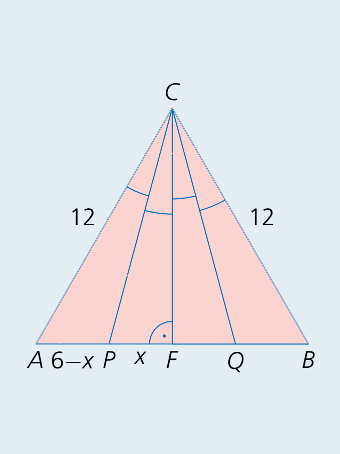
$\beta = 90° - \alpha = 90° - 22{,}62° = 67{,}38°$.
Tudjuk, hogy a kis háromszögek C-nél lévő szöge 30°-os.
A kis háromszögekre a belső szögösszegre vonatkozó tételt felhasználva:
$AH_1C\sphericalangle = 180° - 30° - 22{,}62° = 127{,}38°$.
$BH_2C\sphericalangle = 180° - 30° - 67{,}38° = 82{,}62°$.
A rendelkezésünkre álló szögek és oldalak segítségével a kis háromszögekre alkalmazzuk a szinusztételt:

ACH_1 háromszögben: $\frac{x}{12} = \frac{\sin 30°}{\sin 127{,}38°}$, amiből: $x = \frac{\sin 30°}{\sin 127{,}38°} \cdot 12 \approx 7{,}55$.

BCH_2 háromszögben: $\frac{y}{5} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 82{,}62^\circ}$, amiből: $y = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 82{,}62^\circ} \cdot 5 \approx 2{,}52$.

Ezek alapján: $H_1H_2 = 13 - x - y = 13 - 7{,}55 - 2{,}52 = 2{,}9$.
A keresett darabok hossza sorban két tizedesjegy pontossággal: 7,55; 2,93; 2,52.

5. K2 Egy 12 cm oldalú szabályos háromszög egyik szögét három egyenessel négy egyenlő részre osztjuk. Mekkora darabokra vágják ezek az egyenesek a szöggel szemközti oldalt?



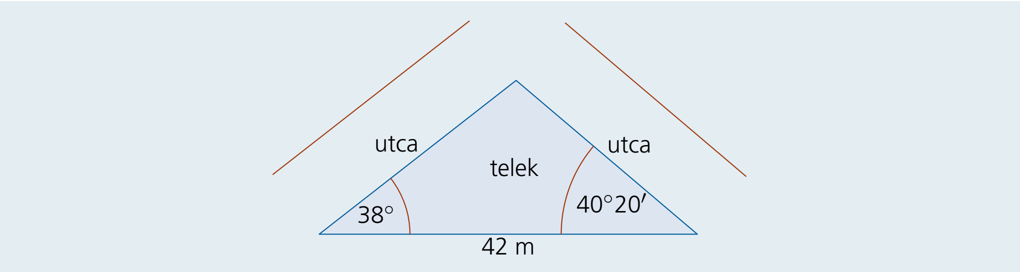
Készítsünk vázlatrajzot!
Tudjuk, hogy a *C*-nél lévő kis szögek 15°-osak. A szabályos háromszög magassága is kifejezhető, hiszen ismerjük az oldalhosszát: $CF = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

CF szögfelező, de szabályos háromszögben oldalfelező is egyben. Ezért *F* az *AB*-n felezőpont: $AF = FB = 6$. Legyen $FP = x$.
A *CFP* derékszögű háromszögben:

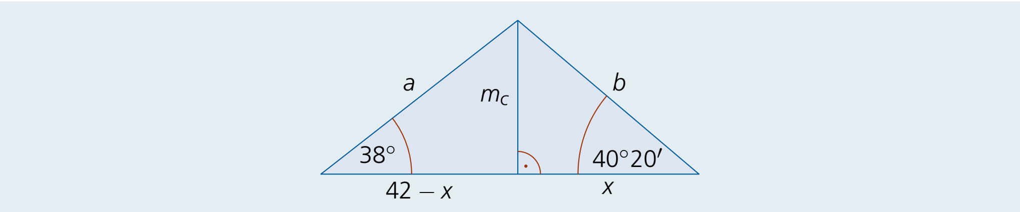
$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{x}{6\sqrt{3}}$, azaz $x = 6\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 15^\circ \approx 2{,}78$.

Ekkor $PA = 6 - x = 6 - 2{,}78 = 3{,}22$.
A szimmetria miatt a négy keresett szakasz hosszának kerekített értéke:
$PF = QF \approx 2{,}78$ cm, $PA = QB \approx 3{,}22$ cm.

6. K2 Egy saroktelekről készített vázlatrajzra *(ábra)* bejelöltük az általunk megmért három adatot. Mekkora a telek területe? Milyen hosszú kerítést kell építeni a két utca felé?



Használjuk a vázlatrajz jelöléseit!



A magasság két derékszögű háromszögre vágja a nagy háromszöget. Ezekre felírhatjuk, hogy $m_c = x \cdot \operatorname{tg} 40^\circ 20'$, illetve $m_c = (42 - x) \cdot \operatorname{tg} 38^\circ$.

Vagyis $x \cdot \operatorname{tg} 40^\circ 20' = (42 - x) \cdot \operatorname{tg} 38^\circ$, amiből $x = \frac{42 \cdot \operatorname{tg} 38^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ 20' + \operatorname{tg} 38^\circ} \approx 20{,}13$.

Ekkor $42 - x = 21{,}87$, és $m_c = x \cdot \operatorname{tg} 40^\circ 20' = 20{,}13 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ 20' \approx 17{,}09$.
Most már minden adat a rendelkezésünkre áll, hogy a kérdéseket megválaszoljuk.

$t = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{42 \cdot 17{,}09}{2} = 358{,}89$.

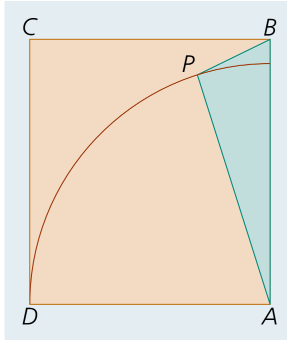
$a = \frac{m_c}{\sin 38^\circ} = \frac{17{,}09}{\sin 38^\circ} \approx 27{,}76$.

$b = \dfrac{m_c}{\sin 40°20'} = \dfrac{17{,}09}{\sin 40°20'} \approx 26{,}40.$

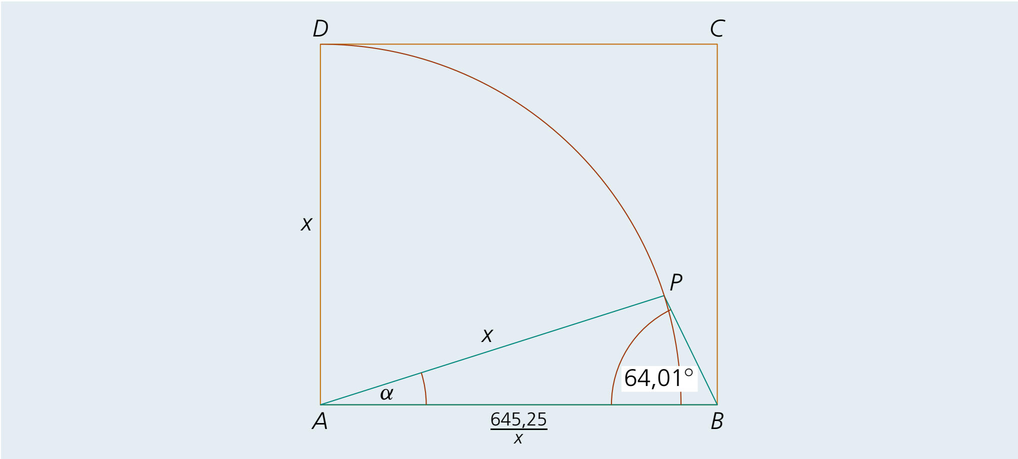
$a + b = 27{,}76 + 26{,}4 = 54{,}16.$

A telek területe kb. 359 m², a két utca felé kb. 54,2 m hosszú kerítést kell építeni.

7. K2 Az ábrán látható egy téglalap vázlatrajza. Területe: 645,25 cm². Az A középpontú AD sugarú negyed körívre illeszkedő P pont az AB oldallal 307,5 cm² területű háromszöget alkot, amelynek a B csúcsnál lévő szöge 64,01°. Határozzuk meg a téglalap kerületét!



Használjuk az ábra jelöléseit!



Tudjuk, hogy $t_{ABP} = \dfrac{x \cdot \dfrac{645{,}25}{x} \cdot \sin\alpha}{2} = 322{,}625 \cdot \sin\alpha = 307{,}5.$

Ebből kapjuk, hogy $\sin\alpha \approx 0{,}9531$, azaz $\alpha \approx 72{,}39°$.

Most már az ABP háromszög P-nél lévő szöge is kiszámolható:

$180° - 72{,}39° - 64{,}01° = 43{,}60°.$

Alkalmazzuk a szinusztételt az ABP háromszögre:

$$\frac{x}{\dfrac{645{,}25}{x}} = \frac{\sin 64{,}01°}{\sin 43{,}6°}.$$

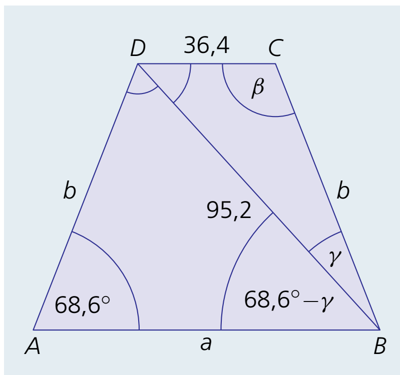
A téglalap oldalainak hossza: $x = \sqrt{645{,}25 \cdot \dfrac{\sin 64{,}01°}{\sin 43{,}6°}} \approx 29$; $\dfrac{645{,}25}{x} = 22{,}25$, azaz

$k_{ABCD} = 2(29 + 22{,}25) = 102{,}5.$

Az $ABCD$ téglalap kerülete kb. 102,5 cm.

8. K2 Egy húrtrapéz egyik szöge 68,6°, rövidebb alapja 36,4 cm, az átlója 95,2 cm. Mekkorák a trapéz hiányzó oldalai?

Helyezzük el az adatokat egy vázlatrajzon!



Húrtrapéz esetén $\beta = 180° - 68{,}6° = 111{,}4°$.

A BCD háromszögben a szinusztételt alkalmazva:

$\dfrac{36{,}4}{95{,}2} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin 111{,}4°}$, amiből $\sin\gamma = \sin 111{,}4° \cdot \dfrac{36{,}4}{95{,}2} \approx 0{,}3560$, vagyis $\gamma \approx 20{,}9°$. Így az ABD háromszög minden szögét meg tudjuk adni:

$ABD\sphericalangle = 68{,}6° - \gamma = 68{,}6° - 20{,}9° = 47{,}7°.$

$ADB\sphericalangle = 180° - 47{,}7° - 68{,}6° = 63{,}7°.$

Az ABD háromszögben a szinusztétellel mindkét hiányzó oldalt kiszámíthatjuk:

$\dfrac{b}{95{,}2} = \dfrac{\sin 47{,}7°}{\sin 68{,}6°}$, amiből $b = \dfrac{\sin 47{,}7°}{\sin 68{,}6°} \cdot 95{,}2 \approx 75{,}6.$

$\frac{a}{95{,}2} = \frac{\sin 63{,}7^\circ}{\sin 68{,}6^\circ}$, amiből $a = \frac{\sin 63{,}7^\circ}{\sin 68{,}6^\circ} \cdot 95{,}2 \approx 91{,}7$.

Tehát a húrtrapéz szárainak hossza kb. 75,6 cm, a hosszabb alapja pedig 91,7 cm.

6. Koszinusztétel

1. K1 Adott a háromszög két oldala és a két adott oldal által közbezárt szöge. Számítsuk ki a hiányzó oldal hosszát!

a) $AC = 29$, $BC = 34$, $ACB\sphericalangle = 81^\circ$;

b) $AC = 24$, $BC = 30$, $ACB\sphericalangle = 126^\circ$.

Alkalmazzuk a koszinusztételt!

a) $AB^2 = 29^2 + 34^2 - 2 \cdot 29 \cdot 34 \cdot \cos 81^\circ \approx 1688{,}5112$,

$AB \approx 41{,}09$.

b) $AB^2 = 24^2 + 30^2 - 2 \cdot 24 \cdot 30 \cdot \cos 126^\circ \approx 2322{,}4108$,

$AB \approx 48{,}19$.

2. K1 Adott a háromszög mindhárom oldalhossza. Számítsuk ki az *AB* oldallal szemközti szögének nagyságát!

a) $AB = 25$, $BC = 28$, $AC = 36$;

b) $AB = 16$, $BC = 18$, $AC = 21$.

Alkalmazzuk a koszinusztételt!

a) $25^2 = 28^2 + 36^2 - 2 \cdot 28 \cdot 36 \cdot \cos\gamma$,

$$\cos\gamma = \frac{28^2 + 36^2 - 25^2}{2 \cdot 28 \cdot 36} \approx 0{,}7217,$$

$\gamma \approx 43{,}8^\circ$.

b) $16^2 = 18^2 + 21^2 - 2 \cdot 18 \cdot 21 \cdot \cos\gamma$,

$$\cos\gamma = \frac{18^2 + 21^2 - 16^2}{2 \cdot 18 \cdot 21} \approx 0{,}6733,$$

$\gamma \approx 47{,}7^\circ$.

3. K2 Egy 14 cm^2 területű hegyesszögű háromszög két oldalának hossza 8 cm és 7 cm. Számítsuk ki a hiányzó oldal hosszát!

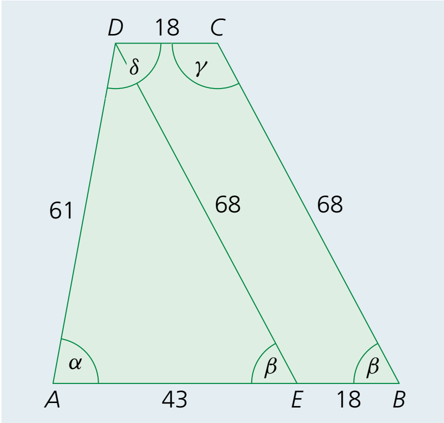
Tudjuk, hogy $t = \frac{ab\sin\gamma}{2}$, vagyis $14 = 28\sin\gamma$.

Ha $\sin\gamma = \frac{1}{2}$, akkor $\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (alkalmaztuk, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$).

A koszinusztétel alapján: $c^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 113 - 56\sqrt{3}$.

A hiányzó oldal hossza: $c = \sqrt{113 - 56\sqrt{3}}$ cm.

4. K2 Egy trapéz alapjai 61 cm, illetve 18 cm, szárai 61 cm, illetve 68 cm hosszúak. Mekkorák a trapéz szögei?



Az ábra jelöléseit használjuk. Az *AED* háromszögben a koszinusztételt alkalmazva kiszámítjuk az α és a β értékét is.

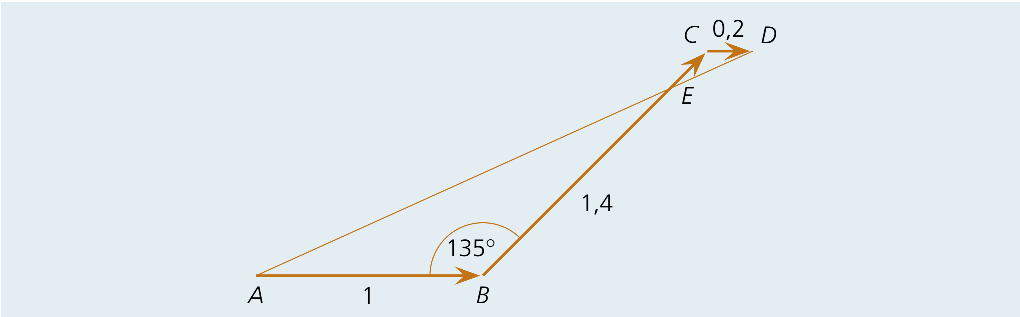
$\cos\alpha = \dfrac{61^2 + 43^2 - 68^2}{2\cdot 61\cdot 43} \approx 0{,}1803$, $\alpha \approx 79{,}6°$. Ekkor $\delta = 180° - 79{,}6° = 100{,}4°$.

$\cos\beta = \dfrac{68^2 + 43^2 - 61^2}{2\cdot 68\cdot 43} \approx 0{,}4706$, $\beta \approx 61{,}9°$. Ekkor $\gamma = 180° - 61{,}9° = 118{,}1°$.

A keresett szögek: 79,6°; 61,9°; 118,1°; 100,4°.

5. K2 Egy turista a pihenőhelyétől keletre haladt 1 km-t, majd északkelet felé haladt 1,4 km-t, végezetül ismét kelet felé sétált 0,2 km-t. Milyen messze van ekkor a pihenőhelytől?

A vázlatrajz szemlélteti a turista útját.



Az $DCE\triangle \sim ABE\triangle$ (a szögeik páronként egyenlők), a hasonlóság aránya: $\dfrac{0{,}2}{1} = \dfrac{1}{5}$.

A *BC* szakaszt is ilyen arányban osztja az *E* pont, így $CE = \dfrac{7}{30}$, $BE = \dfrac{35}{30} = \dfrac{7}{6}$.

Koszinusztétellel számolunk:

$AE^2 = 1^2 + \left(\dfrac{7}{6}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\left(\dfrac{7}{6}\right)\cdot\cos 135° \approx 4{,}0110$,

$AE \approx 2$.

A hasonlósági arányt felhasználva: $ED \approx 0{,}4$.

$AE + ED = 2 + 0{,}4 = 2{,}4$.

Vagyis a turista ekkor kb. 2,4 km-re van a pihenőhelytől.

6. K2 Egy egyenes turistaúton megállunk egy jellegzetes pontnál, amit a térkép is jelöl. Jobbra előre tekintve, az egyenes úttal 32°-os szögben látunk egy kilátót. A térképünk szerint 320 méterre van tőlünk. Balra előre tekintve, az egyenes úttal 40°-os szögben látunk egy templomtornyot. A térképünk szerint ez 1200 méterre van tőlünk. Milyen messze van a kilátótól a templom?

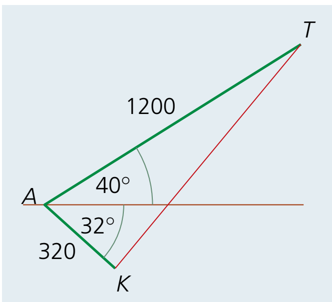
A szöveg alapján vázlatrajzot készítünk.

Alkalmazzuk a koszinusztételt:

$KT^2 = 320^2 + 1200^2 - 2\cdot 320\cdot 1200\cdot\cos 72° \approx 1\,305\,074{,}948$,

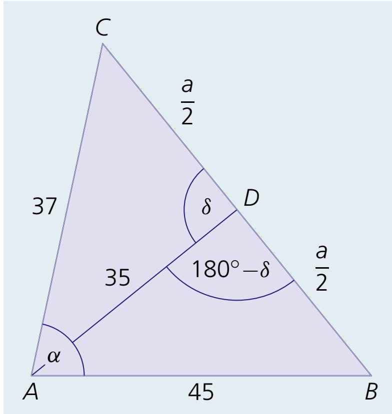
$KT \approx 1142{,}4$.

A kilátótól a templom kb. 1142,4 méterre van.



7. K2 A háromszög egyik csúcsából induló oldalak hossza 45 cm, 37 cm. Az ebből induló súlyvonal hossza 35 cm.
a) Mekkora a harmadik oldal?
b) Mekkora szög van a nem megadott oldallal szemben?

Az ismert adatokat a vázlatrajzon rögzítettük.



a) Az *ACD* háromszögben a koszinusztétel:

$$37^2 = 35^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot 35 \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\delta,$$

$$1369 = 1225 + \frac{a^2}{4} - 35 \cdot a \cdot \cos\delta.$$

Az *ABD* háromszögben a koszinusztétel:

$$45^2 = 35^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot 35 \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(180° - \delta),$$

$$2025 = 1225 + \frac{a^2}{4} + 35 \cdot a \cdot \cos\delta.$$

A két egyenlet összeadásával kapjuk:

$$3394 = 2450 + \frac{a^2}{2},$$

$$a^2 = 1888,$$

$$a \approx 43{,}45.$$

A harmadik oldal kb. 43,45 cm.

b) Az *ABC* háromszögre a koszinusztétel:

$$\cos\alpha = \frac{37^2 + 45^2 - 43{,}45^2}{2 \cdot 37 \cdot 45} \approx 0{,}4523, \qquad \alpha \approx 63{,}1°.$$

A közös csúcsnál kb. 63,1°-os szög van.

8. E1 *a)* Milyen értékeket vehet fel az x, hogy $x^2 - x + 1$, $2x - 1$ és $x^2 - 2x$ egy háromszög oldalhosszainak mérőszáma legyen?
b) Igazoljuk, hogy a fent kapott háromszögek legnagyobb szöge 120°!

a) Mivel a háromszög oldalainak hossza pozitív, ezért teljesülni kell a következő egyenlőtlenségeknek:
$x^2 - x + 1 > 0$, $2x - 1 > 0$, $x^2 - 2x > 0$.
Mindhárom feltételnek eleget tevő x-ek: $x \in \,]2; \infty[$.
Teljesülni kell a háromszög-egyenlőtlenségeknek is:
I. $(x^2 - x + 1) + (2x - 1) > x^2 - 2x$, amiből $x \in \,]0; \infty[$.
II. $(x^2 - x + 1) + (x^2 - 2x) > 2x - 1$, amiből $2x^2 - 5x + 2 > 0$, azaz $x \in \,\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \,]2; \infty[$.
III. $(x^2 - 2x) + (2x - 1) > x^2 - x + 1$, amiből $x \in \,]2; \infty[$.
Mindent egybevetve: $x \in \,]2; \infty[$.

b) Egy alkalmas x behelyettesítésével megsejthető, hogy a legnagyobb szög az $x^2 - x + 1$ oldallal szemben lesz.
(Pl: Ha $x = 3$, akkor $x^2 - x + 1 = 7$, $2x - 1 = 5$, $x^2 - 2x = 3$.)
Ezért erre az oldalra írjuk fel a koszinusztételt:

$$\cos\alpha = \frac{(2x-1)^2 + (x^2 - 2x)^2 - (x^2 - x + 1)^2}{2 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - 2x)} = \frac{-2x^3 + 5x^2 - 2x}{2(2x^3 - 5x^2 + 2x)} = -\frac{1}{2},$$ ami az állítást igazolja.

7. Számítások terepen

1. K1 Egy trapéz alakú telket az egyik átlója mentén egy sétaúttal kettéosztottak. A 4000 m^2-es telket ez a sétány 7:3 arányban szeli ketté. A telek szélességének másfélszeresével egyenlő a rövidebb párhuzamos oldala. Milyen széles a telek?

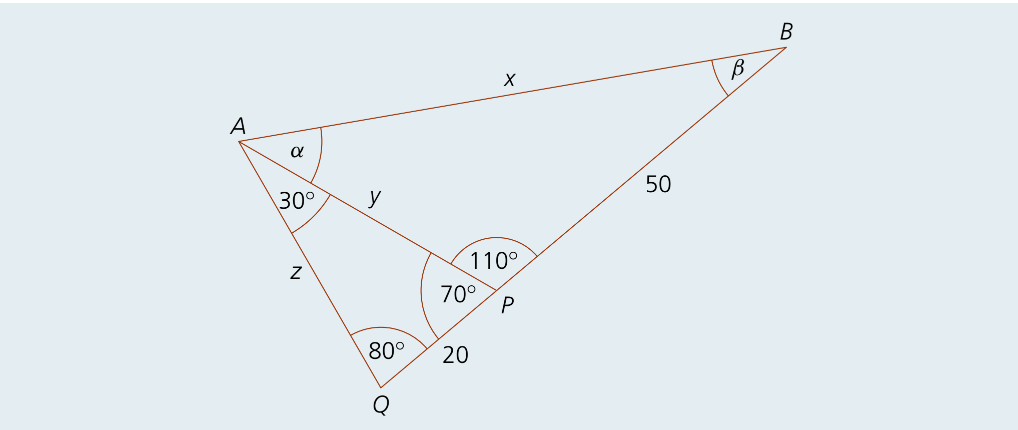
A két háromszög területének arányával egyezik a két párhuzamos oldal aránya is (a két háromszög magassága azonos, ezért az oldallal arányos a területük). Legyen $a = 7x$, $c = 3x$, a szöveg alapján a telek szélessége (vagyis a trapéz magassága): $m = 2x$.

Ezek alapján: $t = \frac{(a+c)m}{2} = \frac{(7x+3x)2x}{2} = 10x^2 = 4000$, amiből $x = 20$.

Vagyis a telek szélessége $m = 40$ méter.

2. K2 Egy réten két fa áll. Szeretnénk megtudni a távolságukat, de egyenes mentén nem lehet az egyik fától a másikig eljutni. Az egyik fától eltávolodunk 50 métert, innen 110°-os szögben látjuk a két fa közötti szakaszt. Tovább távolodunk a fától még 20 métert, és ekkor 80°-os szögben látjuk a két fa közötti szakaszt. Milyen messze van a két fa egymástól?

Készítsünk egy felülnézeti vázlatrajzot!



Az APQ háromszögben a szinusztétel:

$\frac{y}{20} = \frac{\sin 80°}{\sin 30°}$, azaz $y = 20 \cdot \frac{\sin 80°}{\sin 30°} \approx 39{,}4$.

Az APB háromszögben a koszinusztétel:

$x^2 = 50^2 + 39{,}4^2 - 2 \cdot 50 \cdot 39{,}4 \cdot \cos 110° \approx 5399{,}9194$,

$x \approx 73{,}5$.

A két fa kb. 73,5 méterre van egymástól.

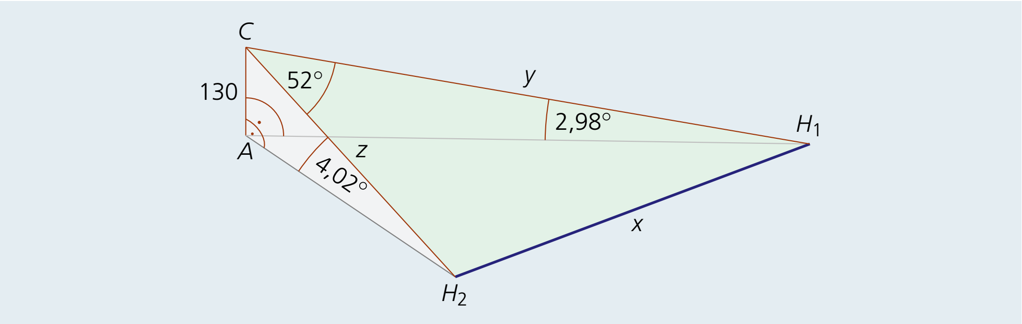
3. K2 A Balaton víztükrének tengerszint feletti magassága 105 méter. A Tihanyi-félsziget legmagasabb pontján, a Csúcs-hegyen állva (tengerszint feletti magassága 235 m) két hajót pillantunk meg. A két hajó közötti szakaszt 52°-os szögben, a hajókat külön-külön 2,98°-os, illetve 4,02°-os depressziószögben látjuk.

a) Milyen messze van tőlünk a két hajó?

b) Milyen messze van egymástól a két hajó?

Készítsünk vázlatrajzot.

A Csúcs-hegy és a Balaton vizének szintkülönbsége (rajzunkon AC szakasz) 130 méter. Bejelöltük a két depressziószöggel azonos nagyságú $CH_1A\sphericalangle$-et és $CH_2A\sphericalangle$-et.



a) Az AH_1C derékszögű háromszögben: $\sin 2{,}98° = \frac{130}{y}$, amiből $y = \frac{130}{\sin 2{,}98°} \approx 2500{,}6$.

Az AH_2C derékszögű háromszögben: $\sin 4{,}02° = \frac{130}{z}$, amiből $z = \frac{130}{\sin 4{,}02°} \approx 1854{,}4$.

Számításaink szerint az egyik hajó kb. 2501 méterre, a másik pedig 1854 méterre van tőlünk.

b) Írjuk fel a koszinusztételt a CH_1H_2 háromszögre:

$x^2 = 2500{,}6^2 + 1854{,}4^2 - 2 \cdot 2500{,}6 \cdot 1854{,}4 \cdot \cos 52° \approx 3\,982\,016{,}502$,

$x \approx 1995{,}5$.

Vagyis a két hajó kb. 1996 méterre van egymástól.

4. K2 Turistatérképen a Dobogókő (699 m), Pilis (756 m), Bölcső-hegy (588 m) csúcsok egy háromszöget alkotnak. A térképen a következőket mértük: Pilis és Dobogókő 10 cm, Pilis és Bölcső-hegy 19,2 cm, Dobogókő és Bölcső-hegy 16,3 cm. A térkép méretaránya 1:40 000.

a) Milyen messze van Dobogókőtől a Bölcső-hegy?

b) Milyen hosszú a Dobogókő és a Bölcső-hegy legmagasabb pontját összekötő képzeletbeli vonal?

c) Hány fokos emelkedési szögben kellene a Bölcső-hegyen állva „felnézni" Dobogókőre?

d) A Bölcső-hegy legmagasabb pontján állva először a Pilis, utána Dobogókő irányába nézünk. Mekkora a szög a két irány között?

a) Mivel Dobogókő és a Bölcső-hegy 16,3 cm-re van a 1:40 000 méretarányú térképen, ezért a valóságban a távolságuk a mérésünk szerint 16,3 · 40 000 cm, azaz 6520 méter, vagyis 6,52 km.

b) Az adatok alapján tudjuk, hogy a szintkülönbségük 111 méter. Az előzőekben meghatároztuk a vízszintes távolságukat, ami 6520 méter. Pitagorasz-tétellel kapjuk az összekötő vonal hosszát: $\sqrt{111^2 + 6520^2} \approx 6521$ méter.

c) Felírhatjuk a keresett szög pl. tangensét: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{111}{6520}$, amiből: $\alpha \approx 0{,}975°$.

Vagyis a keresett szög kb. 1°-os.

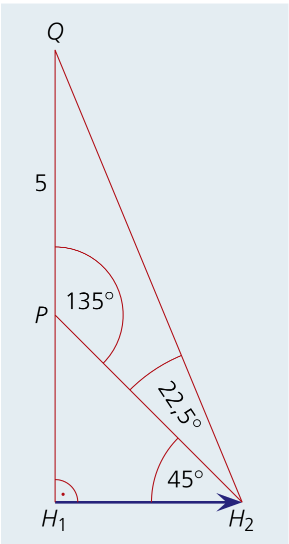
d) Koszinusztétellel számolunk:

$\cos\beta = \frac{16{,}3^2 + 19{,}2^2 - 10^2}{2 \cdot 16{,}3 \cdot 19{,}2} \approx 0{,}8537$.

$\beta \approx 31{,}4$.

A két irány között a szög kb. 31,4°.

5. K2 Egy kelet felé haladó hajóról két magaslat látható az északi parton, amelyek egymástól 5 km-re vannak, és a magaslatokat a hajóval összekötő egyenes észak-dél irányú. Néhány perc hajózás után az egyik magaslat északnyugati, míg a másik észak-északnyugati irányban látható. Mennyit haladt a hajó ez alatt az idő alatt?



Készítsük el a szöveg alapján a vázlatrajzot, felhasználva az égtájak adta szögek nagyságát! A H_1H_2P egyenlő szárú derékszögű háromszögben a P-nél lévő külső szög 135°-os (a nem mellette fekvő két belső szög összege). Így H_2PQ háromszögben a Q-nál 22,5°-os szög van. Vagyis ez a háromszög is egyenlő szárú: $PH_2 = 5$. A H_1H_2P egyenlő szárú derékszögű háromszögben $H_1H_2 = \frac{PH_2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}5$. A hajó kb. 3,5 kilométert haladt.

8. Trigonometrikus egyenletek

1. K1 Határozzuk meg az x lehetséges értékeit, ha

a) $\sin x = 0{,}5$; *b)* $\sin x = -0{,}4226$; *c)* $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *d)* $\cos x = 0{,}2419$;
e) $\operatorname{tg} x = 1$; *f)* $\operatorname{tg} x = 5{,}6713$; *g)* $\operatorname{ctg} x = -1$; *h)* $\operatorname{ctg} x = -17{,}6327$!

a) $x_1 = 30° + k_1 \cdot 360°$ vagy $x_2 = 150° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.
b) $x_1 \approx -25° + k_1 \cdot 360°$ vagy $x_2 = -155° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.
c) $x_1 = 45° + k_1 \cdot 360°$ vagy $x_2 = -45° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.
d) $x_1 \approx 76° + k_1 \cdot 360°$ vagy $x_2 = -76° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.
e) $x = 45° + k \cdot 180°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
f) $x \approx 80° + k \cdot 180°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
g) $x = 135° + k \cdot 180°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
h) $x \approx -3{,}25° + k \cdot 180°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

2. K2 Oldjuk meg a következő egyenleteket!
a) $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$; *b)* $\cos^2 x - 1{,}5\cos x - 1 = 0$;
c) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$; *d)* $2\cos^2 x + \cos x = 0$;
e) $12\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; *f)* $9\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$;
g) $(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - 2) = 0$; *h)* $\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x = 0$.

a) Megoldóképlettel: $\sin x = \frac{1}{2}$ vagy $\sin x = -4$.
Ez utóbbi nyilván nem lehet (minden x-re $-1 \le \sin x \le 1$), így a megoldások:
$x_1 = 30° + k_1 \cdot 360°$ vagy $x_2 = 150° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

b) Megoldóképlettel: $\cos x = 2$ vagy $\cos x = -\frac{1}{2}$.
Az első nyilván nem lehet (minden x-re $-1 \le \cos x \le 1$), így a megoldások:
$x_1 = 120° + k_1 \cdot 360°$ vagy $x_2 = 240° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

c) Kiemeléssel: $\sin x = 0$ vagy $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
A megoldások:
$x_1 = k_1 \cdot 180°$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$.
$x_2 = 60° + k_2 \cdot 360°$ vagy $x_3 = 120° + k_3 \cdot 360°$, ahol $k_2, k_3 \in \mathbf{Z}$.

d) Kiemeléssel: $\cos x = 0$ vagy $\cos x = -\frac{1}{2}$.
A megoldások:
$x_1 = 90° + k_1 \cdot 180°$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$.
$x_2 = 120° + k_2 \cdot 360°$ vagy $x_3 = 240° + k_3 \cdot 360°$, ahol $k_2, k_3 \in \mathbf{Z}$.

e) Megoldóképlettel: $\sin x = \frac{1}{4}$ vagy $\sin x = -\frac{1}{3}$.
A megoldások:
$x_1 \approx 14{,}48° + k_1 \cdot 360°$ vagy $x_2 \approx 165{,}52° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.
$x_3 \approx -19{,}47° + k_3 \cdot 360°$ vagy $x_4 \approx -160{,}53° + k_4 \cdot 360°$, ahol $k_3, k_4 \in \mathbf{Z}$.

f) Megoldóképlettel: $\cos x = \frac{1}{3}$ vagy $\cos x = -\frac{2}{3}$.
A megoldások:
$x_1 \approx 70{,}53° + k_1 \cdot 360°$ vagy $x_2 \approx -70{,}53° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.
$x_3 \approx 131{,}81° + k_3 \cdot 360°$ vagy $x_4 \approx -131{,}81° + k_4 \cdot 360°$, ahol $k_3, k_4 \in \mathbf{Z}$.

g) $\operatorname{tg} x = -1$ vagy $\operatorname{tg} x = 2$.
A megoldások:
$x_1 = -45° + k_1 \cdot 180°$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$.
$x_2 \approx 63{,}43° + k_2 \cdot 180°$, ahol $k_2 \in \mathbf{Z}$.

h) Kiemeléssel: $\operatorname{tg} x = 0$ vagy $\operatorname{tg} x = -3$.
A megoldások:
$x_1 = k_1 \cdot 180°$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$.
$x_2 = -71{,}57° + k_2 \cdot 180°$, ahol $k_2 \in \mathbf{Z}$.

3. K2 Oldjuk meg a következő egyenleteket!
a) $10\sin^2 x - 6\sin x - 8{,}4 = 0$; *b)* $100\cos^2 x - 25\sin x - 79 = 0$.

a) Megoldóképlettel: $\sin x \approx 1{,}2644$ (ami nem ad megoldást, mert minden x-re $-1 \le \sin x \le 1$) vagy $\sin x = -0{,}6644$.
A megoldások:
$x_1 \approx -41{,}63° + k_1 \cdot 360°$ vagy $x_2 \approx -138{,}37° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

b) Alkalmazzuk a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítést:
$100\sin^2 x + 25\sin x - 21 = 0$.
Megoldóképlettel: $\sin x \approx -0{,}6$ vagy $\sin x \approx 0{,}35$.
A megoldások:
$x_1 \approx -36{,}87° + k_1 \cdot 360°$ vagy $x_2 \approx -143{,}13° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.
$x_3 \approx 20{,}49° + k_3 \cdot 360°$ vagy $x_4 \approx 159{,}51° + k_4 \cdot 360°$, ahol $k_3, k_4 \in \mathbf{Z}$.

4. K2 Oldjuk meg a
a) $4\sin x\cos x - 2\cos x + 2\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2} = 0$;
b) $\sin x\cos x - 3\cos x + 2\sin x - 6 = 0$
egyenleteket!

a) Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést szorzattá alakítjuk:
$(2\cos x + \sqrt{2})(2\sin x - 1) = 0$.
$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ vagy $\sin x = \frac{1}{2}$.
A megoldások:
$x_1 = 135° + k_1 \cdot 360°$ vagy $x_2 = -135° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.
$x_3 = 30° + k_3 \cdot 360°$ vagy $x_4 = 150° + k_4 \cdot 360°$, ahol $k_3, k_4 \in \mathbf{Z}$.

b) Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést szorzattá alakítjuk:
$(\sin x - 3)(\cos x + 2) = 0$.
$\sin x = 3$ vagy $\cos x = -2$.
Az egyenletnek nincs megoldása.

5. K2 Oldjuk meg:
a) $\cos\left(6x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; *b)* $\cos\left(8x - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right)$;
c) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$; *d)* $\sin\left(8x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right)$;
e) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; *f)* $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{2\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$!

a) I. eset: $\left(6x - \frac{\pi}{6}\right) - \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = k_1 \cdot 2\pi$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$,
$4x = \frac{\pi}{2} + k_1 \cdot 2\pi$,
$x_1 = \frac{\pi}{8} + k_1 \cdot \frac{\pi}{2}$.

II. eset: $\left(6x-\frac{\pi}{6}\right)+\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=k_2\cdot 2\pi$, ahol $k_2\in\mathbf{Z}$,

$8x=-\frac{\pi}{6}+k_2\cdot 2\pi$,

$x_2=-\frac{\pi}{48}+k_2\cdot\frac{\pi}{4}$.

Az egyenlet gyökeit az x_1, x_2 adja.

b) I. eset: $\left(8x-\frac{\pi}{5}\right)-\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)=k_1\cdot 2\pi$, ahol $k_1\in\mathbf{Z}$,

$x_1=\frac{13\pi}{60}+k_1\cdot\frac{\pi}{2}$.

II. eset: $\left(8x-\frac{\pi}{5}\right)+\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)=k_2\cdot 2\pi$, ahol $k_2\in\mathbf{Z}$,

$x_2=-\frac{7\pi}{180}+k_2\cdot\frac{\pi}{6}$.

Az egyenlet gyökeit az x_1, x_2 adja.

c) I. eset: $\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=k_1\cdot 2\pi$, ahol $k_1\in\mathbf{Z}$,

$x_1=\frac{3\pi}{4}+k_1\cdot 2\pi$.

II. eset: $\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\pi+k_2\cdot 2\pi$, ahol $k_2\in\mathbf{Z}$,

$x_2=\frac{\pi}{4}+k_2\cdot\frac{2}{5}\pi$.

Az egyenlet gyökeit az x_1, x_2 adja.

d) I. eset: $\left(8x+\frac{\pi}{4}\right)-\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)=k_1\cdot 2\pi$, ahol $k_1\in\mathbf{Z}$,

$x_1=-\frac{5\pi}{12}+k_1\cdot 2\pi$.

II. eset: $\left(8x+\frac{\pi}{4}\right)+\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)=\pi+k_2\cdot 2\pi$, ahol $k_2\in\mathbf{Z}$,

$x_2=-\frac{\pi}{180}+k_2\cdot\frac{2}{15}\pi$.

Az egyenlet gyökeit az x_1, x_2 adja.

e) Értelmezési tartomány: $x\neq\frac{3\pi}{16}+l_1\cdot\frac{\pi}{2}$, $x\neq l_2\cdot\pi$, ahol $l_1, l_2\in\mathbf{Z}$.

$\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=k\cdot\pi$, ahol $k\in\mathbf{Z}$,

$x_1=\frac{3\pi}{8}+k\cdot\pi$.

f) $\operatorname{tg}\left(5x+\frac{2\pi}{5}\right)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$.

Értelmezési tartomány: $x\neq\frac{\pi}{50}+l_1\cdot\frac{\pi}{5}$, $x\neq\frac{7}{10}\pi+l_2\cdot\pi$, ahol $l_1, l_2\in\mathbf{Z}$.

$\left(5x+\frac{2\pi}{5}\right)-\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=k\cdot\pi$, ahol $k\in\mathbf{Z}$,

$x=-\frac{3\pi}{20}+k\cdot\frac{\pi}{4}$.

9. Trigonometrikus összefüggések (Emelt szint)

1. E1 A következő kifejezéseket írjuk olyan alakban, hogy α szögfüggvényei szerepeljenek benne:

a) $\sin(\alpha - 45°)$; *b)* $\sin(\alpha + 60°)$; *c)* $\sin(30° - \alpha)$; *d)* $\sin(135° + \alpha)$;
e) $\cos(\alpha + 120°)$; *f)* $\cos(\alpha - 210°)$; *g)* $\cos(60° + \alpha)$; *h)* $\cos(240° - \alpha)$.

a) $\sin(\alpha - 45°) = \sin\alpha\cos 45° - \cos\alpha\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha.$

b) $\sin(\alpha + 60°) = \sin\alpha\cos 60° + \cos\alpha\sin 60° = \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha.$

c) $\sin(30° - \alpha) = \sin 30°\cos\alpha - \cos 30°\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$

d) $\sin(135° + \alpha) = \sin 135°\cos\alpha + \cos 135°\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha.$

e) $\cos(\alpha + 120°) = \cos\alpha\cos 120° - \sin\alpha\sin 120° = -\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$

f) $\cos(\alpha - 210°) = \cos\alpha\cos 210° + \sin\alpha\sin 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha.$

g) $\cos(60° + \alpha) = \cos 60°\cos\alpha - \sin 60°\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$

h) $\cos(240° - \alpha) = \cos 240°\cos\alpha + \sin 240°\sin\alpha = -\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$

2. E1 Adjuk meg a pontos értékét!

a) $\sin 99° \cos 21° + \cos 99° \sin 21°$;
b) $\sin 50° \cos 20° - \cos 50° \sin 20°$;
c) $\cos 48° \cos 12° - \sin 48° \sin 12°$;
d) $\cos 104° \cos 14° + \sin 104° \sin 14°$.

a) $\sin 99° \cos 21° + \cos 99° \sin 21° = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\sin 50° \cos 20° - \cos 50° \sin 20° = \sin 30° = \frac{1}{2}$;

c) $\cos 48° \cos 12° - \sin 48° \sin 12° = \cos 60° = \frac{1}{2}$;

d) $\cos 104° \cos 14° + \sin 104° \sin 14° = \cos 90° = 0$.

3. E1 *a)* Határozzuk meg $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$ értékét, ha $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{4}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{3}{4}$!

b) Határozzuk meg $\mathrm{ctg}(\alpha + \beta)$ értékét, ha $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathrm{ctg}\,\beta = 3$!

a) $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{13}{16}} = \frac{16}{13}.$

b) Mivel $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathrm{ctg}\,\beta = 3$, ezért $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{3}$.

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2 + \frac{1}{3}}{1 - 2\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} = 7, \text{ vagyis } \mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1}{7}.$$

4. E1 Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket a változó lehetséges értékeinél!

a) $\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$; *b)* $\dfrac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}$; *c)* $\dfrac{\cos^2 x - \cos x \sin x}{\cos 2x}$; *d)* $\dfrac{\cos x \sin x}{\sin 2x}$.

---

a) $\dfrac{\sin 2x}{\cos x} = \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos x} = 2\sin x$.

b) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} = \dfrac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} = \cos x - \sin x$.

c) $\dfrac{\cos^2 x - \cos x \sin x}{\cos 2x} = \dfrac{\cos x(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \dfrac{\cos x(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = \dfrac{\cos x}{\cos x + \sin x}$.

d) $\dfrac{\cos x \sin x}{\sin 2x} = \dfrac{\cos x \sin x}{2\sin x \cos x} = \dfrac{1}{2}$.

5. E1 Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $\sin 2x - 2\sin x = 0$; *b)* $\sin 2x + 2\cos x = 0$;
c) $\cos 2x - \sin x - 1 =$; *d)* $\cos 2x + 2\sin x - 1 = 0$.

---

a) $2\sin x \cos x - 2\sin x = 0$,
$2\sin x(\cos x - 1) = 0$,
$\sin x = 0$ vagy $\cos x = 1$.
A megoldások:
$x_1 = k_1 \cdot \pi$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$.
$x_2 = k_2 \cdot 2\pi$, ahol $k_2 \in \mathbf{Z}$,
vagyis $x = k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

b) $2\sin x \cos x + 2\cos x = 0$,
$2\cos x(\sin x + 1) = 0$,
$\cos x = 0$ vagy $\sin x = -1$.
A megoldások:
$x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k_1 \cdot \pi$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$.
$x_2 = -\pi + k_2 \cdot 2\pi$, ahol $k_2 \in \mathbf{Z}$.

c) $\cos^2 x - \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$,
$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$,
$2\sin^2 x + \sin x = 0$,
$\sin x(2\sin x + 1) = 0$,
$\sin x = 0$ vagy $\sin x = -\dfrac{1}{2}$.
A megoldások:
$x_1 = k_1 \cdot \pi$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$.
$x_2 = -\dfrac{\pi}{6} + k_2 \cdot 2\pi$, $x_3 = -\dfrac{5\pi}{6} + k_3 \cdot 2\pi$ ahol $k_2, k_3 \in \mathbf{Z}$.

d) $\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$,
$1 - \sin^2 x - \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$,
$2\sin^2 x - 2\sin x = 0$,
$2\sin x(\sin x - 1) = 0$,
$\sin x = 0$ vagy $\sin x = 1$.
A megoldások:
$x_1 = k_1 \cdot \pi$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$.
$x_2 = \dfrac{\pi}{2} + k_2 \cdot \pi$, ahol $k_2 \in \mathbf{Z}$.

6. E1 Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$; *b)* $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 2x$.

a) Értelmezési tartomány: $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot k$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

Írható a következő alakban is:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x}.$$

Szorozzunk a közös nevezővel:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Ez minden x-re teljesül, ezért a megoldás:

$$x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi}{2} \cdot k,\ \text{ahol } k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

b) Értelmezési tartomány: $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot k$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

Írható a következő alakban is:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x},$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \sin x \cos x}.$$

Szorozzunk a közös nevezővel:

$2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x,$

$3 \sin^2 x + \cos^2 x = 0,$

$3 \sin^2 x + (1 - \sin^2 x) = 0,$

$\sin^2 x = -\frac{1}{2}.$

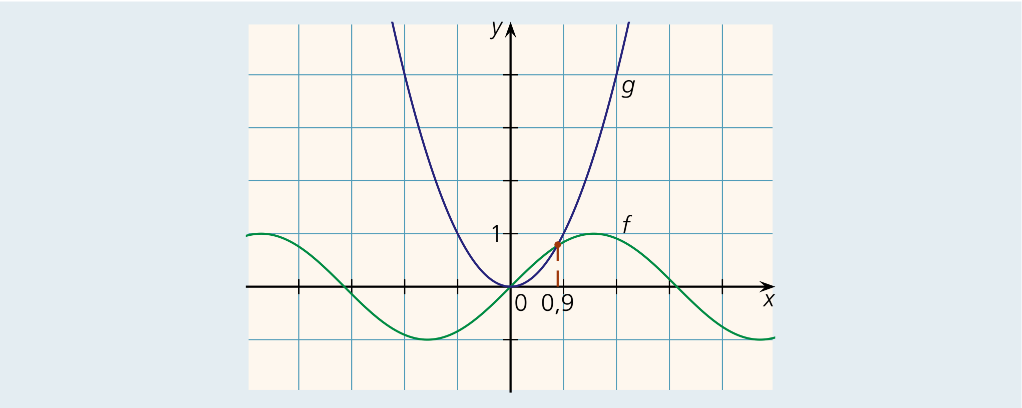
Nincs valós megoldás.

10. Vegyes feladatok

1. K2 Oldjuk meg a következő egyenleteket!

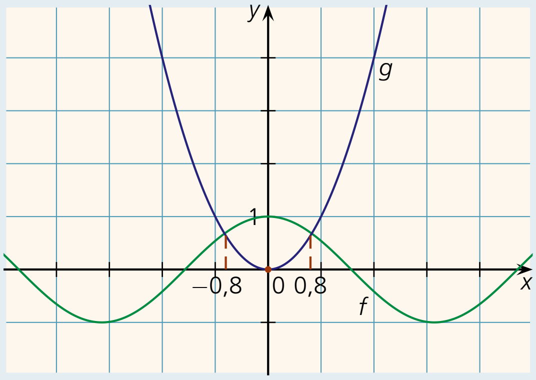
a) $\sin x = x^2$; *b)* $\cos x = x^2$.

a) Ábrázoljuk a koordinátasíkon a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin x$ és $g(x) = x^2$ hozzárendelésű függvények grafikonját.



Az elkészült ábráról a metszéspontok első koordinátájának közelítő értékét leolvassuk radiánban: $x_1 = 0,\ x_2 \approx 0{,}9$.

b) Ábrázoljuk a koordinátasíkon a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \cos x$ és $g(x) = x^2$ hozzárendelésű függvények grafikonját.



Az elkészült ábráról a metszéspontok első koordinátájának közelítő értékét leolvassuk radiánban: $x_1 \approx -0{,}8$, $x_2 \approx 0{,}8$.

2. K2 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\sqrt{3+\sin x} \le 2$;

b) $\sqrt{2-\sin x} \ge 1$.

a) Tudjuk, hogy $-1 \le \sin x \le 1$ minden valós x-re igaz, ezért $2 \le 3+\sin x \le 4$, azaz $\sqrt{2} \le \sqrt{3+\sin x} \le 2$.

Vagyis minden valós x megfelelő lesz.

b) Tudjuk, hogy $-1 \le \sin x \le 1$ minden valós x-re igaz, ezért $1 \le 2-\sin x \le 3$, azaz $1 \le \sqrt{2-\sin x} \le \sqrt{3}$.

Vagyis minden valós x megfelelő lesz.

3. K2 Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned} \sin x + \cos y &= 1 \\ \sin x - \cos y &= 0 \end{aligned}\right\}$;

b) $\left.\begin{aligned} 6\sin x \cdot \cos y &= 1 \\ 6\sin x + 6\cos y &= 5 \end{aligned}\right\}$.

a) Kapjuk, hogy: $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos y = \frac{1}{2}$.

A megoldás:

$x = 30° + n \cdot 360°$ vagy $x = 150° + n \cdot 360°$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

$y = 60° + m \cdot 360°$ vagy $y = -60° + m \cdot 360°$, ahol $m \in \mathbf{Z}$.

b) I. $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos y = \frac{1}{3}$, II. $\sin x = \frac{1}{3}$, $\cos y = \frac{1}{2}$,

A megoldások:

I. eset

$x = 30° + n \cdot 360°$ vagy $x = 150° + n \cdot 360°$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

$y \approx 70{,}5° + m \cdot 360°$ vagy $y \approx -70{,}5° + m \cdot 360°$, ahol $m \in \mathbf{Z}$.

II. eset

$x \approx 19{,}5° + p \cdot 360°$ vagy $x \approx 160{,}5° + p \cdot 360°$, ahol $p \in \mathbf{Z}$.

$y = 60° + q \cdot 360°$ vagy $y = -60° + q \cdot 360°$, ahol $q \in \mathbf{Z}$.

4. K2 Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$; b) $\cos^2 x = \sin 2x - \sin^2 x$.

a) $(\cos^2 x - \sin^2 x)\overbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}^{1} = \frac{1}{2}$,

$\cos 2x = \frac{1}{2}$.

$2x = 60° + k_1 \cdot 360°$ vagy $2x = -60° + k_2 \cdot 360°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, vagyis

$x = 30° + k_1 \cdot 180°$ vagy $x = -30° + k_2 \cdot 180°$, ahol $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

b) $\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1} = \sin 2x$,

$2x = 90° + k \cdot 360°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, vagyis

$x = 45° + k \cdot 180°$.

5. E1 Oldjuk meg a következő egyenleteket!

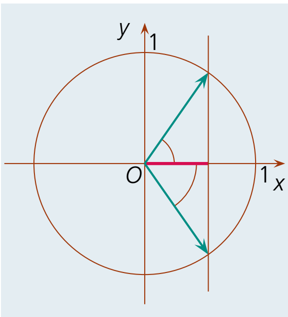
a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$; b) $\sin\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right)$; d) $\sin\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$.

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{2}\right)$, $(\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ és $\cos(-\alpha) = \cos\alpha)$

$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{10}\right)$.

A $3x - \frac{\pi}{3}$ és az $x - \frac{3\pi}{10}$ szögek koszinusza egyenlő.



Készítsünk rajzot az egységkörrel! Vegyünk fel egy koszinuszértéket, és rajzoljuk be a két megfelelő egységvektort!

I. eset: Mindkét szög ugyanahhoz az egységvektorhoz tartozik. Ekkor a két szög különbsége 2π többszöröse:

$\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - \left(x - \frac{3\pi}{10}\right) = k_1 \cdot 2\pi$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$,

$2x = \frac{\pi}{30} + k_1 \cdot 2\pi$,

$x_1 = \frac{\pi}{60} + k_1 \cdot \pi$.

II. eset: A két szög nem egy egységvektorhoz tartozik. Ekkor a két szög összege is 2π többszörösével egyenlő:

$\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \left(x - \frac{3\pi}{10}\right) = k_2 \cdot 2\pi$, ahol $k_2 \in \mathbf{Z}$,

$4x = \frac{19\pi}{30} + k_2 \cdot 2\pi$,

$x_2 = \frac{19\pi}{120} + k_2 \cdot \frac{\pi}{2}$.

Az egyenlet gyökeit az x_1, x_2 adja.

b) $\cos\left(2x - \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

$\cos\left(2x - \frac{9\pi}{10}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. $(\sin\alpha = \cos(90° - \alpha))$

I. eset: $\left(2x - \frac{9\pi}{10}\right) - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = k_1 \cdot 2\pi$, ahol $k_1 \in \mathbf{Z}$,

$x_1 = \frac{23\pi}{20} + k_1 \cdot \pi$.

II. eset: $\left(2x-\frac{9\pi}{10}\right)+\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=k_2\cdot 2\pi$, ahol $k_2\in\mathbf{Z}$,

$x_2=\frac{13\pi}{60}+k_2\cdot\frac{2\pi}{3}$.

Az egyenlet gyökeit az x_1, x_2 adja.

c) $\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)$, azaz $\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{5\pi}{2}-\pi\right)$.

I. eset: $\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=k_1\cdot 2\pi$, ahol $k_1\in\mathbf{Z}$,

$x_1=\frac{4\pi}{3}+k_1\cdot 2\pi$.

II. eset: $\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=k_2\cdot 2\pi$, ahol $k_2\in\mathbf{Z}$,

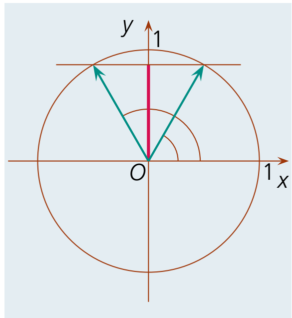
$x_2=-\frac{4\pi}{3}+k_2\cdot\frac{2\pi}{5}$.

Az egyenlet gyökeit az x_1, x_2 adja.

d) $\sin\left(6x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$, azaz $\sin\left(6x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{4\pi}{5}\right)$.

A $6x-\frac{\pi}{3}$ és a $2x+\frac{4\pi}{5}$ szögek szinusza egyenlő.

Készítsünk rajzot az egységkörrel! Vegyünk fel egy szinuszértéket, és rajzoljuk be a két megfelelő egységvektort!



Két esetet tudunk elképzelni.

I. eset: Mindkét szög ugyanahhoz az egységvektorhoz tartozik. Ekkor a két szög különbsége 2π többszöröse:

$\left(6x-\frac{\pi}{3}\right)-\left(2x+\frac{4\pi}{5}\right)=k_1\cdot 2\pi$, ahol $k_1\in\mathbf{Z}$,

$4x=\frac{17\pi}{15}+k_1\cdot 2\pi$,

$x_1=\frac{17\pi}{60}+k_1\cdot\frac{\pi}{2}$.

II. eset: A két szög nem egy egységvektorhoz tartozik:

$\left(6x-\frac{\pi}{3}\right)+\left(2x+\frac{4\pi}{5}\right)=\pi+k_2\cdot 2\pi$, ahol $k_2\in\mathbf{Z}$,

$8x=\frac{-7\pi}{15}+k_2\cdot 2\pi$,

$x_2=-\frac{7\pi}{120}+k_2\cdot\frac{\pi}{4}$.

Az egyenlet gyökeit az x_1, x_2 adja.

11. Háromszögelés régen és ma

1. K2 Egy háromszögelési hálózatban az *A* és *B* alappontok azonos tengerszint feletti magasságban vannak és a távolságuk 12 km.

A számítások előtt a következő szögek nagyságát tudtuk megmérni: $ABC\sphericalangle=58°$, $BAC\sphericalangle=46°$, $CAT\sphericalangle=5°$, ahol *T* pont a *C* merőleges vetülete az *A*-t tartalmazó vízszintes síkra.

a) Határozzuk meg a *C* alappont helyzetét!

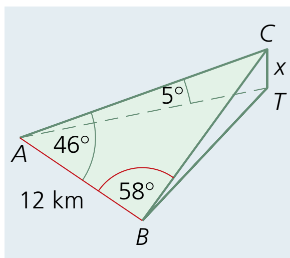
b) Határozzuk meg a *C* pont tengerszint feletti magasságát, ha az *A* ponté 125 m!

A szöveg alapján rajzot készítünk.

a) Az *ABC* háromszögben a *C*-nél lévő szög: 180° – 58° – 46° = 76°.

Alkalmazzuk a szinusztételt erre a háromszögre:

$\frac{AC}{12}=\frac{\sin 58°}{\sin 76°}$,



$AC = 12 \cdot \dfrac{\sin 58^\circ}{\sin 76^\circ} \approx 10{,}5.$

$\dfrac{BC}{12} = \dfrac{\sin 46^\circ}{\sin 76^\circ},$

$BC = 12 \cdot \dfrac{\sin 46^\circ}{\sin 76^\circ} \approx 8{,}9.$

Vagyis a *C* alappont légvonalban *A*-tól 10,5 km-re, *B*-től pedig 8,9 km-re található.

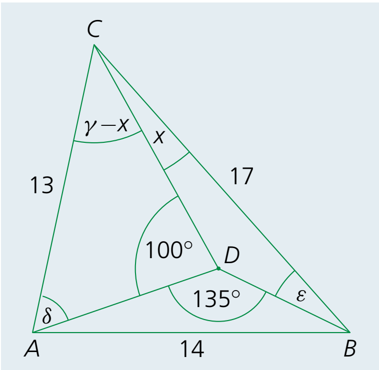
b) Az *ATC* derékszögű háromszögben:

$\sin 5^\circ = \dfrac{x}{AC} = \dfrac{x}{10{,}5},$

$x = 10{,}5 \cdot \sin 5^\circ \approx 0{,}915.$

Azaz 915 méterrel van magasabban, mint az *A* pont, ezért a tengerszint feletti magassága 1040 méter.

2. K2 Az *A*, *B* és *C* azonos tengerszint feletti magasságban lévő háromszögelési pontok által meghatározott háromszögben *AB* = 14 km, *BC* = 17 km, *AC* = 13 km. A sík terepen egy olyan *D* pontban állunk az *ABC* háromszögön belül, ahonnan az *AB* szakasz 135°-os, az *AC* szakasz pedig 100°-os szögben látszik. Milyen messze vagyunk a *C* ponttól?



A *C*-nél lévő γ szög nagyságát koszinusztétellel kiszámítjuk:

$14^2 = 13^2 + 17^2 - 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \cos\gamma,$

$\gamma \approx 53{,}65^\circ.$

Az ábrán látható jelöléseket használva:

$\delta = 180^\circ - 100^\circ - \gamma + x = 180^\circ - 100^\circ - 53{,}65^\circ + x = 26{,}35^\circ + x.$

A *D* pontból a *BC* szakasz 360° – 100° – 135° = 125° alatt látszik. Így

$\varepsilon = 180^\circ - 125^\circ - x = 55^\circ - x.$

Írjuk fel az *ADC* és a *BDC* háromszögekre a szinusztételt, ekkor kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk:

$\dfrac{DC}{17} = \dfrac{\sin\varepsilon}{\sin 125^\circ}$, ahonnan $DC = 17 \cdot \dfrac{\sin(55^\circ - x)}{\sin 125^\circ}.$

$\dfrac{DC}{13} = \dfrac{\sin\delta}{\sin 100^\circ}$, ahonnan $DC = 13 \cdot \dfrac{\sin(26{,}35^\circ + x)}{\sin 100^\circ}.$

Vagyis:

$13 \cdot \dfrac{\sin(26{,}35^\circ + x)}{\sin 100^\circ} = 17 \cdot \dfrac{\sin(55^\circ - x)}{\sin 125^\circ}.$

Számoljunk közelítő értékekkel:

$0{,}6361 \cdot \sin(26{,}35^\circ + x) = \sin(55^\circ - x).$

Alkalmazzuk az addíciós tételeket:

$0{,}6361 \cdot (\sin 26{,}35^\circ \cos x + \cos 26{,}35^\circ \sin x) = \sin 55^\circ \cos x - \cos 55^\circ \sin x,$

$1{,}1436 \sin x = 0{,}5368 \cos x,$

$\operatorname{tg} x = 0{,}4694,$

$x = 25{,}15^\circ.$

Visszahelyettesítve kapjuk a *DC* szakasz hosszát:

$DC = 13 \cdot \dfrac{\sin(26{,}35^\circ + x)}{\sin 100^\circ} = 13 \cdot \dfrac{\sin(26{,}35^\circ + 25{,}15^\circ)}{\sin 100^\circ} = 10{,}33.$

Vagyis a *D* pont kb. 10,33 km-re van a *C* háromszögelési ponttól.

V Koordináta-geometria

1. Vektorok koordináta-rendszerben, műveletek vektorokkal

1. K1 Adottak a következő helyvektorok: **a**(–2; 5), **b**(3; –10), **c**(2; 0), **d**(5; –2,5). Számítsuk ki az alábbi vektorok koordinátáit!

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; *b)* $\mathbf{a}-\mathbf{c}+2\mathbf{d}$; *c)* $2\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{c}+4\mathbf{d}$; *d)* $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d}$.

a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(1;-5)$; *b)* $(\mathbf{a}-\mathbf{c}+2\mathbf{d})(6;0)$;

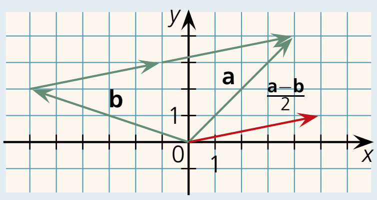
c) $\left(2\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{c}+4\mathbf{d}\right)(15;0)$; *d)* $(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d})(-6;-2{,}5)$.

2. K1 Mely **x** vektort adtuk hozzá az **a**(4; 3) vektorhoz, ha az eredmény a **b**(–2; 7) vektor lett?

Ha $\mathbf{x}(x_1; x_2)$, akkor $4+x_1=-2$ és $3+x_2=7$. Tehát **x**(–6; 4).

3. K1 Adottak az **a**(4; 4) és **b**(–6; 2) vektorok. Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az $\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}$ vektort!

Az $\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}$ vektor koordinátái (5; 1).



4. K2 Legyen k egy pozitív valós szám, és adott két vektor: $\mathbf{a}(\log_2 k; \log_2 2k)$, $\mathbf{b}(-\log_2 k; \log_2 4k)$. Határozzuk meg az **a** + **b** vektor koordinátáit!

Az **a** + **b** vektor első koordinátája 0. A második koordináta:

$\log_2 2k+\log_2 4k=\log_2 8k^2=\log_2 8+\log_2 k^2=3+2\log_2 k$.

Tehát $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,(0; 3+2\log_2 k)$.

5. K2 Bontsuk fel a **v**(6; 3) vektort **a**(2; –1) és **b**(–2; 6) irányú összetevőkre!

Legyen $\mathbf{v}=\alpha\cdot\mathbf{a}+\beta\cdot\mathbf{b}$. Ekkor

$2\alpha-2\beta=6$ és $-\alpha+6\beta=3$.

Az egyenletrendszer megoldása: $\beta=\frac{6}{5}=1{,}2$, $\alpha=4{,}2$. Tehát $\mathbf{v}=4{,}2\mathbf{a}+1{,}2\mathbf{b}$.

6. E1 Adott négy vektor: **a**(1; 2), **b**(–4; 2), **c**(5; 10) és **v**(–11; 8). Tudjuk, hogy
$\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$.
Határozzuk meg az α, β valós számokat!

A feltételekből
$\alpha - 4\beta + 5 = -11$, azaz $\alpha - 4\beta = -16$ és
$2\alpha + 2\beta + 10 = 8$, azaz $\alpha + \beta = -1$.
Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt:
$5\beta = 15$, ahonnan $\beta = 3$ és ezzel $\alpha = -4$.

2. Szakasz felezőpontjának, harmadolópontjának koordinátái

1. K1 Számítsuk ki az *AB* szakasz felezőpontjának a koordinátáit, ha
a) *A*(–2; 7), *B*(4; 11); *b)* *A*(5; 3,5), *B*(–1,2; 4,6); *c)* *A*(*k*; 3*k* + 1), *B*(6 – *k*; 9 – 3*k*)!

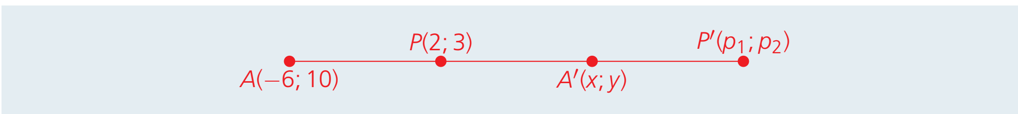
a) *F*(1; 9); *b)* *F*(1,9; 4,05); *c)* *F* (3; 5).

2. K1 Az *AB* szakasz egyik végpontja *A*, felezőpontja *F*. Számítsuk ki a szakasz másik végpontjának a koordinátáit, ha
a) *A*(5; –2), *F*(3; 3); *b)* *A*(–0,6; 1,4), *F*(1,2; –4,2); *c)* *A*(lg 2; lg 5), *F*(lg 5; lg 20)!

Az $\mathbf{f} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$ egyenlőségből $\mathbf{b} = 2\mathbf{f} - \mathbf{a}$.
a) *B*(1; 8); *b)* *B*(3; –9,8); *c)* *B*(lg 12,5; lg 80).

3. K2 Az *A*(–6; 10) pontnak a *P*(2; 3) pontra vonatkozó tükörképe *A*′. Számítsuk ki a *P* pontnak az *A*′ pontra vonatkozó tükörképét!

Készítsünk egy fiktív ábrát.



A *P* pont az *AA*′ szakasz felezőpontja, így *A*′(10; –4). Az *A*′ pont a *PP*′ szakasznak felezőpontja, tehát *P*′(18; –11).

4. K2 Egy háromszög egyik csúcspontja *A*(4; –6). Az *A* csúccsal szemközti oldal felezőpontja *F*(5; 11). Számítsuk ki a háromszög súlypontjának a koordinátáit!

A háromszög *S* súlypontja az *AF* szakasz *F*-hez közelebbi harmadolópontja. Ezek szerint *S* koordinátái:
$S\left(\dfrac{14}{3}; \dfrac{16}{3}\right)$.

5. E1 Az origónak az $A(a_1; a_2)$ pontra vonatkozó tükörképe *A*′, a $B(b_1; b_2)$ pontra vonatkozó tükörképe *B*′. Bizonyítsuk be, hogy az origónak az *AB* szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe az *A*′*B*′ szakasz felezőpontja!

Az *AB* szakasz felezőpontja: $F_{AB}\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}; \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$. Az origónak erre a pontra vonatkozó tükörképe: $F'_{AB} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$)

Az origónak az A és B pontra vonatkozó tükörképei:
$A'(2a_1; 2a_2)$, $B'(2b_1; 2b_2)$,
így az $A'B'$ szakasz felezőpontja: $F_{A'B'}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.
A két eredményt egybevetve a bizonyítandó állításhoz jutunk.

6. E1 Az AB szakasz két végpontja $A(12; 6)$, $B(9; 18)$. Számítsuk ki az AB szakasz A-hoz legközelebbi hatodolópontjának a koordinátáit!

Egy szakasz hatodolópontja a szakaszt 1 : 5 arányban osztja két részre. Ezek szerint a keresett pont koordinátái:
$x = \frac{5 \cdot 12 + 9}{6} = \frac{23}{2}$, $y = \frac{5 \cdot 6 + 18}{6} = 8$.
A keresett osztópont: $P(11{,}5; 8)$.

3. A háromszög súlypontjának, szakasz tetszőleges osztópontjának koordinátái

1. K1 Számítsuk ki az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit, ha
a) $A(3; -3)$, $B(4; 5)$, $C(2; -8)$; *b)* $A(0{,}5; 6)$, $B(4; -4)$, $C(-1{,}5; -7)$!

a) $S(3; -2)$; *b)* $S\left(1; -\frac{5}{3}\right)$.

2. K1 Adott a háromszög két csúcspontja és az S súlypontja. Határozzuk meg a harmadik csúcs koordinátáit!
a) $A(5; 3)$, $B(-2; 4)$, $S(0; 0)$; *b)* $A(4; -7)$, $B(1{,}4; -2{,}6)$, $S(0{,}2; 3{,}6)$.

Az $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$ egyenlőségből $\mathbf{c} = 3\mathbf{s} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$.
a) $C(-3; -7)$; *b)* $C(-4{,}8; 20{,}4)$.

3. K2 Számítsuk ki az AB szakasz azon pontjának koordinátáit, mely P pontra $\frac{PA}{PB} = \frac{2}{7}$, ha $A(-12; 4)$, $B(6; 3)$!

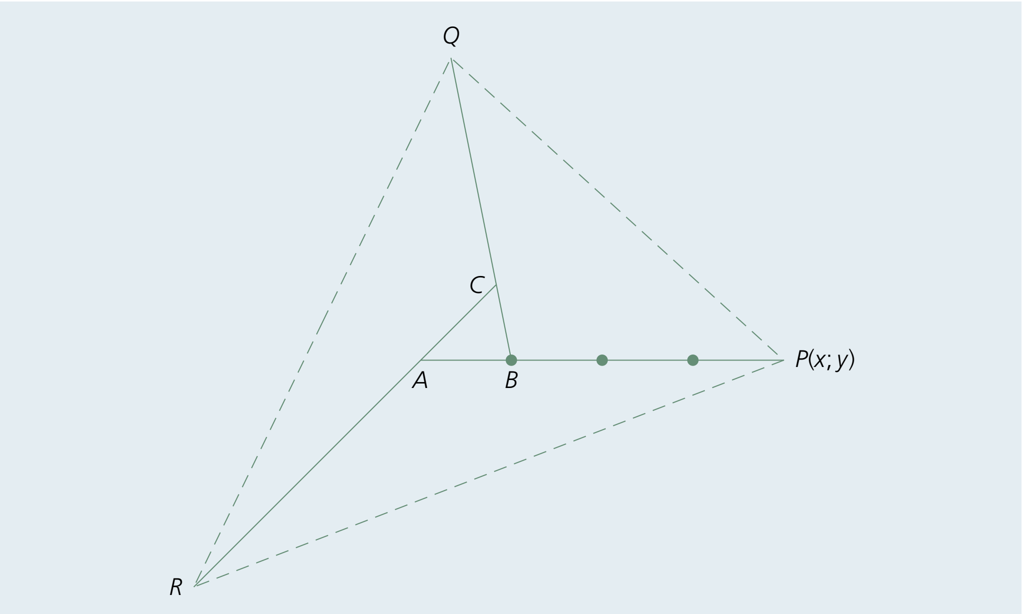
$\mathbf{p} = \frac{7\mathbf{a} + 2\mathbf{b}}{9}$, tehát $P\left(-8; \frac{34}{9}\right)$.

4. K2 Az AB szakasz egyik csúcspontja $A(5; 8)$. A szakasz A-hoz közelebbi ötödölőpontja $P(-4; 2)$. Határozzuk meg a B pont koordinátáit!

Az ötödölőpont 1 : 4 arányban osztja ketté a vizsgált szakaszt. Mivel
$\mathbf{p} = \frac{4\mathbf{a} + \mathbf{b}}{5}$, ezért $\mathbf{b} = 5\mathbf{p} - 4\mathbf{a}$, tehát $P(-40; -22)$.

5. E1 Az ABC háromszög oldalait meghosszabbítjuk az alábbi módon: AB-t B-n túl a $BP = 3AB$, BC-t C-n túl a $CQ = 3BC$, végül a CA-t A-n túl az $AR = 3CA$ szakasszal. Igazoljuk, hogy a PQR háromszög súlypontja egybeesik az ABC háromszög súlypontjával!

Legyenek az eredeti háromszög koordinátái $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$. Ekkor az ABC háromszög S súlypontja:
$S\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.



A B pont az AP szakasz A-hoz közelebbi negyedelőpontja, így a P pont koordinátái:
$x = 5b_1 - 4a_1$ és $y = 5b_2 - 4a_2$.
Hasonlóan kapjuk a Q és R pont koordinátáit:
$P(5b_1 - 4a_1; 5b_2 - 4a_2)$,
$Q(5c_1 - 4b_1; 5c_2 - 4b_2)$,
$R(5a_1 - 4c_1; 5a_2 - 4c_2)$.
A PQR háromszög súlypontjának $S^*(x^*; y^*)$ koordinátái

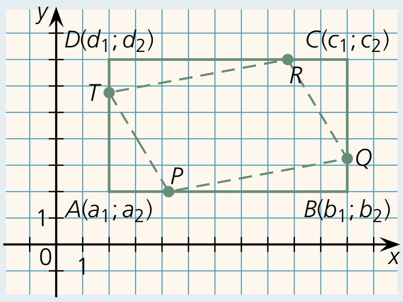
$$x^* = \frac{5b_1 - 4a_1 + 5c_1 - 4b_1 + 5a_1 - 4c_1}{3} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3},$$

$$y^* = \frac{5b_2 - 4a_2 + 5c_2 - 4b_2 + 5a_2 - 4c_2}{3} = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}.$$

Ezt egybevetve ABC háromszög súlypontjával, kapjuk a bizonyítandó állítást.

6. E1 Az $ABCD$ téglalap AB oldalának A-hoz, BC oldalának B-hez, CD oldalának C-hez, DA oldalának D-hez közelebbi negyedelőpontjai rendre P, Q, R, T. Igazoljuk, hogy a $PQRT$ négyszög paralelogramma, és szimmetriacentruma megegyezik az $ABCD$ téglalap szimmetriacentrumával!

Helyezzük el az $ABCD$ téglalapot egy koordináta-rendszerben úgy, hogy oldalai párhuzamosak legyenek a koordinátatengelyekkel. Ekkor két-két pont első koordinátái és két-két pont második koordinátái egyenlők lesznek (lásd ábra).



A P, Q, R, T pontok koordinátái:

$$P\left(\frac{3a_1 + b_1}{4}; a_2\right), \quad Q\left(b_1; \frac{3a_2 + c_2}{4}\right), \quad R\left(\frac{3b_1 + a_1}{4}; c_2\right), \quad T\left(a_1; \frac{3c_2 + a_2}{4}\right).$$

A $PQRT$ négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha átlói felezik egymást. A PR és QT szakaszok felezőpontjai:

$F_{PR}\left(\frac{3a_1+b_1+3b_1+a_1}{8}; \frac{a_2+c_2}{2}\right)$, azaz $F_{PR}\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+c_2}{2}\right)$,

$F_{QT}\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+c_2}{2}\right)$.

Tehát *PQRT* négyszög átlói felezik egymást, így e négyszög valóban paralelogramma.
Mivel a *PQRT* négyszög átlóinak felezőpontja megegyezik az *ABCD* téglalap átlóinak felezőpontjával, ezért a két négyszög szimmetriacentruma egybeesik.

4. Két pont távolsága

1. K1 Számítsuk ki az *AB* szakasz hosszát, ha
a) $A(5; -2)$, $B(4; 8)$; *b)* $A(-3; 1)$, $B(5; 5)$; *c)* $A(2{,}5; 3)$, $B(-4{,}5; -6)$!

a) $AB = \sqrt{(5-4)^2+(-2-8)^2} = \sqrt{101}$;
b) $AB = \sqrt{(-3-5)^2+(1-5)^2} = \sqrt{80}$;
c) $AB = \sqrt{(2{,}5+4{,}5)^2+(3+6)^2} = \sqrt{130}$.

2. K1 Egy háromszög csúcspontjainak a koordinátái $A(5; 2)$, $B(-5; -2)$, $C(4; -11)$. Számítsuk ki a háromszög kerületét!

$AB = \sqrt{116}$, $BC = \sqrt{162}$, $AC = \sqrt{170}$.
Tehát a háromszög *K* kerülete: $K = \sqrt{116} + \sqrt{162} + \sqrt{170} \approx 36{,}55$.

3. K1 Egy kör egy átmérőjének két végpontja $A(-6; 4)$, $B(5; 3)$. Számítsuk ki a kör területét!

A kör *R* sugara az *AB* szakasz fele.
$AB = \sqrt{121+1} = \sqrt{122}$, tehát $R = \frac{\sqrt{122}}{2}$.
A kör *T* területe:
$T = R^2\pi = \frac{122}{4}\pi \approx 95{,}81$.

4. K2 Az origónak az $A(2; 4)$ pontra vonatkozó tükörképe A', a $B(8; 2)$ pontra vonatkozó tükörképe B'. Milyen hosszú az $A'B'$ szakasz?

$A'(4; 8)$, $B'(16; 4)$. Tehát
$A'B' = \sqrt{144+16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

5. E1 Az *AB* szakasz végpontjai $A(-6; 3)$, $B(5; -10)$. Egy *P* pont az *AB* szakaszt 3 : 7 arányban osztja két részre. Számítsuk ki a *P* pont koordinátáit, valamint az *AP* és *BP* szakaszok hosszát!

I. eset:
Ha $AP : PB = 3 : 7$.
A *P* pont koordinátái: $P(-2{,}7; -0{,}9)$. A keresett távolságok:
$PA = \sqrt{10{,}89 + 15{,}21} \approx 5{,}1$, $PB = \sqrt{59{,}29 + 82{,}81} \approx 11{,}9$

II. eset:
Ha $BP : PA = 3 : 7$.
A *P* pont koordinátái: $P(1{,}7; -6{,}1)$. A keresett távolságok:
$PA \approx 11{,}9$, $PB \approx 5{,}1$.

6. E1 Legyen k egy pozitív valós szám. Egy háromszög csúcspontjainak a koordinátái $A(\log_2 k;\ \log_2 4k)$, $B(\log_2 2k;\ \log_2 4k)$, $C(\log_2 k;\ \log_2 8k)$. Számítsuk ki a háromszög területét!

A pontok koordinátáit tüzetesebben megnézve azt vehetjük észre, hogy az AB oldal az x tengellyel, az AC oldal pedig az y tengellyel párhuzamos.

Az AB oldal hossza: $AB = \log_2 2k - \log_2 k = \log_2 \frac{2k}{k} = \log_2 2 = 1.$

Az AC oldal hossza: $AC = \log_2 8k - \log_2 4k = \log_2 \frac{8k}{4k} = \log_2 2 = 1.$

A háromszög egy egységnyi befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Területe: $T = \frac{1}{2}$ területegység.

5. Vektorok skaláris szorzata

1. K1 Számítsuk ki az alábbi **a** és **b** vektorok skaláris szorzatát!
a) **a**(4; –2), **b**(5; –2); *b)* **a**(5; 1), **b**(4; –4); *c)* **a**(3; 11), **b**(–6; 2).

a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 4\cdot 5 + (-2)\cdot(-2) = 24;$

b) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5\cdot 4 + 1\cdot(-4) = 16;$

c) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3\cdot(-6) + 11\cdot 2 = 4.$

2. K1 Számítsuk ki az **a** és **b** vektorok hajlásszögét!
a) **a**(6; –6), **b**(3; 2); *b)* **a**(4; 1), **b**(5; –2); *c)* **a**(10; 3), **b**(4; –2).

Az **a** és **b** vektorok α hajlásszögére: $\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$

a) $\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{72}\cdot\sqrt{13}} = \frac{6}{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \approx 0{,}1961, \quad \alpha \approx 78{,}7°;$

b) $\cos\alpha = \frac{18}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{29}} \approx 0{,}8107, \quad \alpha \approx 35{,}83°;$

c) $\cos\alpha = \frac{34}{\sqrt{109}\cdot\sqrt{20}} \approx 0{,}7282, \quad \alpha \approx 43{,}26°.$

3. K2 Számítsuk ki a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi két vektor merőleges legyen egymásra: **a**(1,4; 6), **b**(2,5; p)!

Ha az **a** és **b** vektorok merőlegesek egymásra, akkor skaláris szorzatuk 0.

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1{,}4\cdot 2{,}5 + 6p = 0,$ azaz $6p = -3{,}5,$ tehát $p = -\frac{7}{12}.$

4. E1 Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az x tengelynek csak egyetlen olyan pontja legyen, melyből az $A(4; 6)$ és $B(10; p)$ pontokat összekötő szakasz derékszögben látszik!

Ha az x tengely $P(x_0; 0)$ pontjából az AB szakasz derékszögben látszik, akkor a $\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorok merőlegesek egymásra, tehát skaláris szorzatuk 0: $PA\cdot PB = 0.$

$\overrightarrow{PA}(4 - x_0; 6), \quad \overrightarrow{PB}(10 - x_0; p).$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = (4 - x_0)(10 - x_0) + 6p = 0,$ azaz

$x_0^2 - 14x_0 + 40 + 6p = 0.$

Ha azt akarjuk, hogy az x tengelynek csak egy olyan pontja legyen, melyből az AB szakasz derékszögben látszik, akkor a kapott x_0-ban másodfokú egyenletnek csak egy megoldása lehet. Ez azt jelenti, hogy diszkriminánsának 0-nak kell lennie.

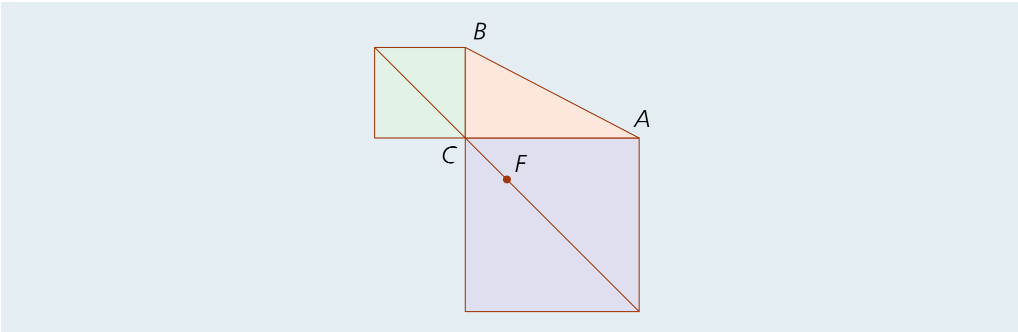
$14^2 - 4(40 + 6p) = 0,$ ahonnan $p = \frac{3}{2}.$

Ezzel

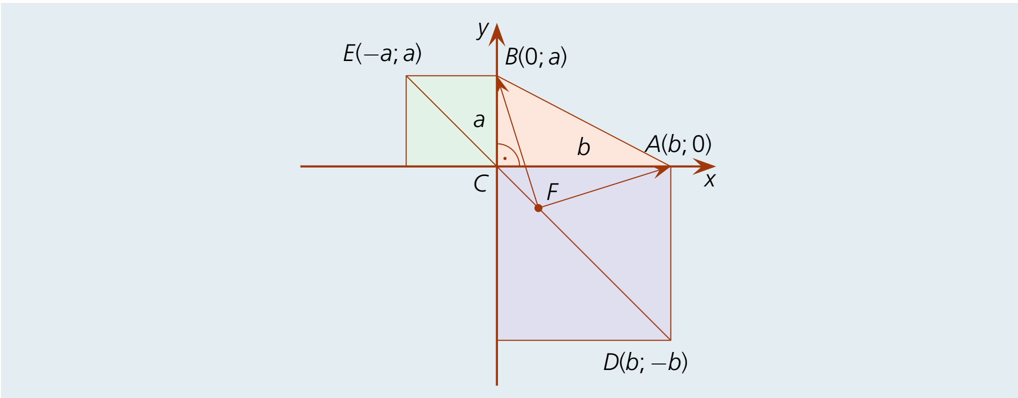
$$x_0^2 - 14x_0 + 49 = 0, \qquad \text{azaz} \qquad (x_0 - 7)^2 = 0.$$

Tehát az x tengely egyedüli pontja, melyből AB derékszögben látszik: $P(7; 0)$.

5. E2 Az ABC derékszögű háromszög befogóira egy-egy négyzetet emeltünk, majd e négyzetek egy-egy csúcsát összekötöttük az ábrán látható módon; legyen az így keletkezett összekötő szakasz felezőpontja F. *(ábra)* Igazoljuk, hogy az $ABCF$ négyszög húrnégyszög!



Helyezzük el az ábrát egy koordináta-rendszerben úgy, hogy a befogók egy-egy tengelyre illeszkedjenek, és legyen a befogók hossza a és b.



Az $ABCF$ négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha $AFB\sphericalangle = 90°$, hiszen az AB szakasz C-ből derékszögben látszik. A megfelelő pontok koordinátáiból az F pont koordinátái: $F\left(\frac{b-a}{2}; \frac{a-b}{2}\right)$. Ekkor

$$\overrightarrow{FB}\left(-\frac{b-a}{2}; a-\frac{a-b}{2}\right), \qquad \text{azaz} \qquad \overrightarrow{FB}\left(-\frac{b-a}{2}; \frac{a+b}{2}\right).$$

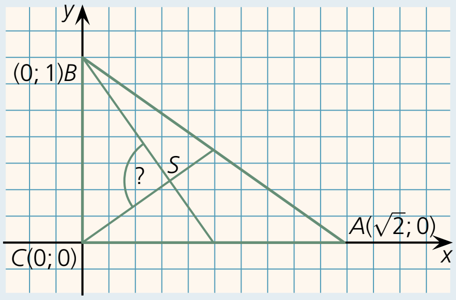
$$\overrightarrow{FA}\left(b-\frac{b-a}{2}; -\frac{a-b}{2}\right), \qquad \text{azaz} \qquad \overrightarrow{FA}\left(\frac{b+a}{2}; -\frac{a-b}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB} = -\frac{(b+a)(b-a)}{2} - \frac{(a+b)(a-b)}{2} = \frac{(b+a)(a-b)}{2} - \frac{(a+b)(a-b)}{2} = 0.$$

Tehát az $\overrightarrow{FA}$ és $\overrightarrow{FB}$ vektorok merőlegesek egymásra, így az $ABCF$ négyszög valóban húrnégyszög.

6. E2 Igazoljuk, hogy a kocka egy éle, egy lapátlója és a testátlója olyan háromszöget határoznak meg, melynek van két merőleges súlyvonala!

A kocka egy éle, lapátlója és testátlója olyan derékszögű háromszöget határoznak meg, melyek oldalainak aránya $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Azt kell megmutatni, hogy az ilyen háromszögnek van két merőleges súlyvonala. Helyezzük el ezt a háromszöget egy olyan koordináta-rendszerben, melynek befogói a tengelyekre illeszkednek. Ha méretarányos ábrát készítünk, akkor észrevehetjük, hogy – valószínűleg – az átfogóhoz és a $\sqrt{2}$ oldalhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra.



A háromszög S súlypontjának a koordinátái: $S\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Írjuk fel az $\overrightarrow{SB}$ és $\overrightarrow{SC}$ vektorokat és számítsuk ki ezek skaláris szorzatát.

$\overrightarrow{SB}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\quad \overrightarrow{SC}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0.$

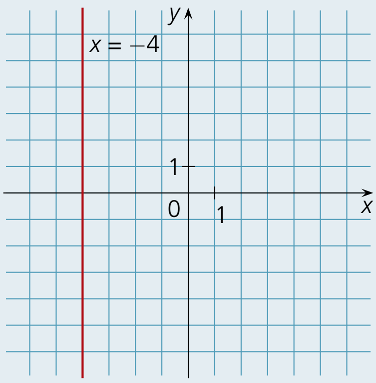
Tehát a két súlyvonal valóban merőleges egymásra.

6. Alakzat és egyenlete

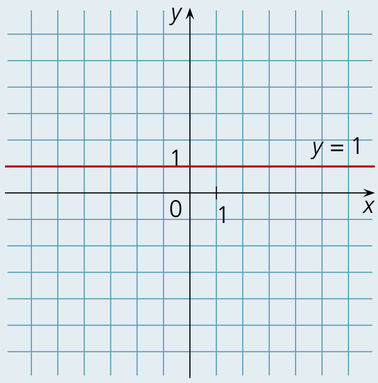
1. K1 Melyek azok a $P(x; y)$ pontok, amelyek koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőségeket?

a) $x = -4$; *b)* $y = 1$; *c)* $|y - 1| = 3$.

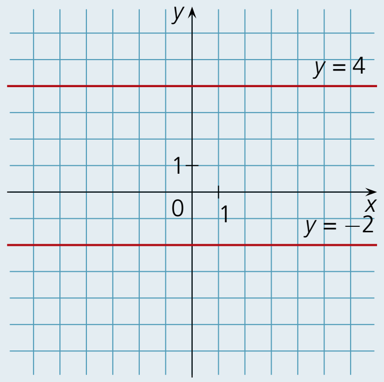
a)



b)



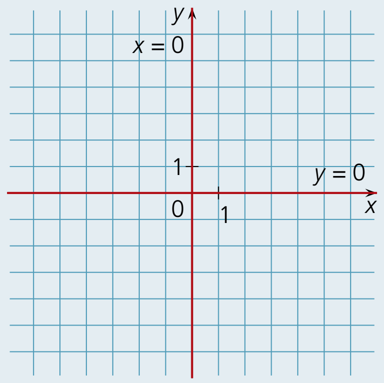
c) $y-1=\pm 3$, azaz $y=4$ vagy $y=-2$.



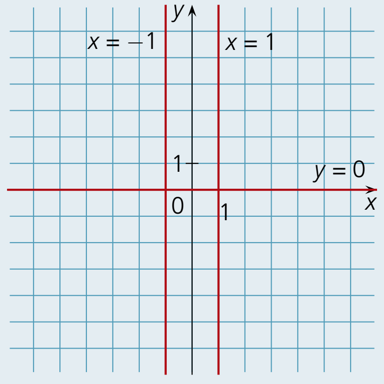
2. K2 Melyek azok a $P(x;\,y)$ pontok, amelyek koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőségeket?

a) $x\cdot y=0$; *b)* $(x^2-1)\cdot y=0$; *c)* $(x^2-4)(|y|-1)=0$.

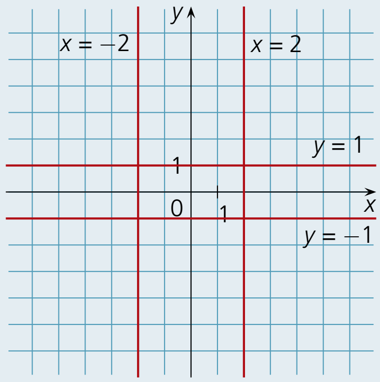
a) $x=0$ vagy $y=0$.



b) $y=0$ vagy $x^2-1=0$, ahonnan $x=1$ vagy $x=-1$.



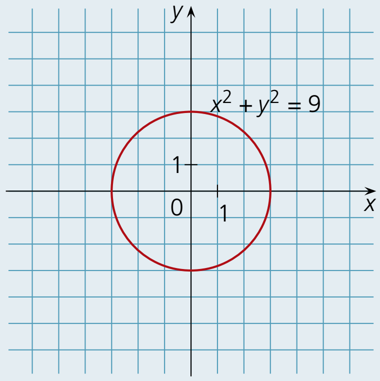
c) $x^2 - 4 = 0$, ahonnan $x = 2$ vagy $x = -2$, vagy $|y| = 1$, ahonnan $y = 1$ vagy $y = -1$.



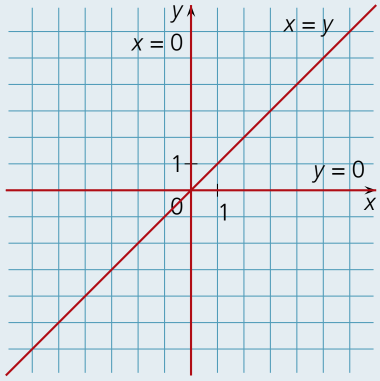
3. K2 Szemléltessük az alábbi egyenletekkel megadott alakzatokat!

a) $x^2 + y^2 = 9$; *b)* $x^2y - xy^2 = 0$.

a) A ponthalmaz egy origó középpontú, 3 egység sugarú kör pontjai.

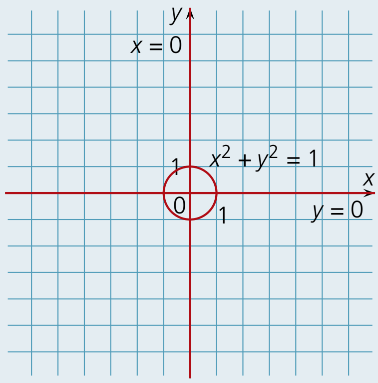


b) $x^2y - xy = xy(x - y) = 0$, ahonnan $x = 0$, vagy $y = 0$, vagy $x = y$. Az $x = y$ egyenletnek eleget tevő pontok halmaza egy, a koordinátatengelyekkel 45°-os szöget bezáró egyenes, mely az első és a harmadik síknegyedben halad.



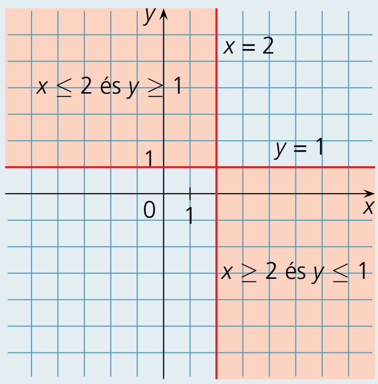
4. E1 Szemléltessük az alábbi egyenletekkel megadott alakzatokat!
$x^3y + y^3x - xy = 0$.

$x^3y + y^3x - xy = xy(x^2 + y^2) - xy = xy(x^2 + y^2 - 1) = 0$.
Tehát $x = 0$ vagy $y = 0$ vagy $x^2 + y^2 = 1$.



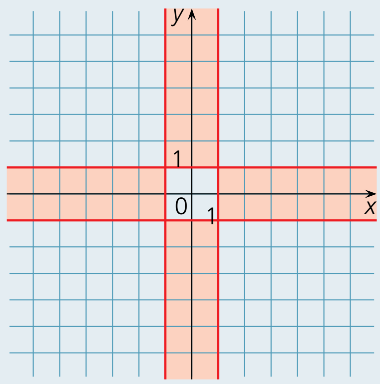
5. E1 Határozzuk meg a sík azon $P(x; y)$ pontjainak a koordinátáit, melyekre $(x - 2)(y - 1) \le 0$!

1. $x - 2 \le 0$ és $y - 1 \ge 0$, azaz $x \le 2$ és $y \ge 1$.
vagy
2. $x - 2 \ge 0$ és $y - 1 \le 0$, azaz $x \ge 2$ és $y \le 1$.



6. E2 Határozzuk meg a sík azon $P(x; y)$ pontjainak a koordinátáit, melyekre $(|x| - 1)(|y| - 1) \le 0$!

1. $|x| \le 1$ és $|y| \ge 1$, azaz $-1 \le x \le 1$ és $y \le -1$ vagy $y \ge 1$,
vagy
2. $|x| \ge 1$ és $|y| \le 1$, azaz $x \ge 1$ és $x \le -1$ vagy $-1 \le y \le 1$,



7. Adott $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő, adott $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektorú egyenes egyenlete; két ponton átmenő egyenes egyenlete

1. K1 Írjuk fel a P_0 ponton átmenő, **v** irányvektorú egyenes egyenletét!
a) $P_0(-3; 4)$, $\mathbf{v}(-2; 5)$; *b)* $P_0(11; 2)$, $\mathbf{v}(3; -1)$; *c)* $P_0(4; -6)$, $\mathbf{v}(0; 4)$.

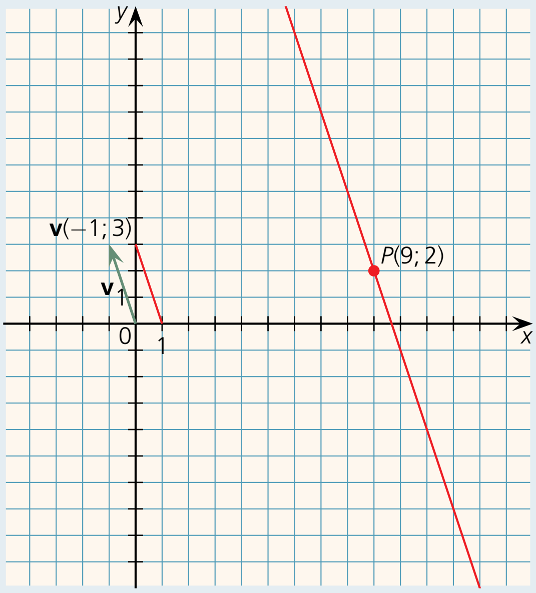
a) $5x + 2y = -15 - (-8) = -7$ vagyis $5x + 2y = -7$;
b) $-x - 3y = -11 - 6$ vagyis $x + 3y = 17$;
c) $4x - 0 \cdot y = 16 - 0 \cdot (-6)$ vagyis $x = 4$.

2. K1 Írjuk fel az egyenes egyenletét, ha áthalad az A ponton és párhuzamos a megadott egyenessel!
a) $A(4; 8)$, $3x - 10y = 2$; *b)* $A(-2; 9)$, $y - 6x = 10$; *c)* $A(0; 6)$, $2x + 13y = 5$.

Ha a keresett egyenes párhuzamos a megadott egyenessel, akkor irányvektoraik megegyeznek.
a) A megadott egyenes egy irányvektora: $\mathbf{v}(10; 3)$. A keresett egyenes egyenlete
$3x - 10y = 12 - 80$, azaz $3x - 10y = -68$;
b) A megadott egyenes egy irányvektora: $\mathbf{v}(-1; -6)$. A keresett egyenes egyenlete
$-6x + y = 12 + 9$, azaz $-6x + y = 21$;
c) $\mathbf{v}(-13; 2)$. A keresett egyenes egyenlete $2x + 13y = 78$.

3. K2 Egy egyenes áthalad a $P(9; 2)$ ponton és az y tengely pozitív feléből háromszor akkora szakaszt metsz ki, mint az x tengely pozitív feléből. Írjuk fel az egyenes egyenletét!

Ha a keresett egyenes az y tengely pozitív feléből háromszor akkora szakaszt metsz ki, mint az x tengely pozitív feléből, akkor egy irányvektora a $\mathbf{v}(-1, 3)$ vektor.



Az egyenes egyenlete: $3x + y = 27 + 2 = 29$ vagyis $3x + y = 29$.

4. K1 Írjuk fel az A és B pontokon átmenő egyenes egyenletét!
a) $A(7; 2)$, $B(4; -2)$, *b)* $A(-1; 0)$, $B(5; -2)$, *c)* $A(0; -10)$, $B(6; 11)$

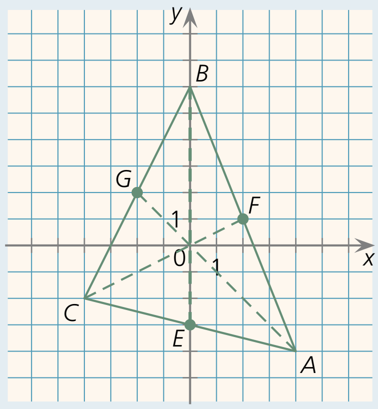
a) Az egyenes egy irányvektora: $\mathbf{v}_{AB}(3; 4)$. Az egyenes egyenlete:
$4x - 3y = 28 - 6$ vagyis $4x - 3y = 22$;

b) Az egyenes egy irányvektora: $\mathbf{v}_{AB}(-6; 2)$ vagy az ezzel párhuzamos $(-3; 1)$. Az egyenes egyenlete:
$x + 3y = -1$;

c) Az egyenes egy irányvektora: $\mathbf{v}_{AB}(-6; -21)$, vagy az ezzel párhuzamos $(2; 7)$. Az egyenes egyenlete:
$7x - 2y = 20$.

5. K2 Egy háromszög csúcspontjai: $A(4; -4)$, $B(0; 6)$, $C(-4; -2)$. Írjuk fel a háromszög súlyvonalaira illeszkedő egyenesek egyenletét!

A háromszög súlyvonala valamely csúcsból a szemközti oldal felezőpontjába húzott szakasz. Legyenek a háromszög oldalfelező pontjai E, F, G (lásd ábra).



Az felezőpontok koordinátái $E(0; -3)$; $F(2; 1)$, $G(-2; 2)$.
Az A csúcson átmenő súlyvonal egy irányvektora $\mathbf{v}_{AG}(6; -6)$, vagy $(1; -1)$. E súlyvonal egyenlete $-x - y = -4 + 4$, vagyis $x + y = 0$.
A C csúcson átmenő súlyvonal egy irányvektora $\mathbf{v}_{CF}(-6; -3)$, vagy $(2; 1)$. A C csúcson átmenő súlyvonal egyenlete: $x - 2y = -4 + 4$, vagyis $x - 2y = 0$.
A B csúcson átmenő súlyvonal E pontja ugyancsak illeszkedik az y tengelyre, így a B csúcson átmenő súlyvonal egyenlete: $x = 0$.

6. E1 Egy egyenes az x tengelyt az $(a; 0)$ pontban, az y tengelyt a $(0; b)$ pontban metszi $(a \neq 0, b \neq 0)$. Igazoljuk, hogy ennek az egyenesnek az egyenlete $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$!

A kérdéses egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(a; -b)$. Az egyenes egyenlete:
$-bx - ay = -ab$, vagyis $bx + ay = ab$.
Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát ab-vel; azt kapjuk, hogy
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

8. Adott $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő, adott $\mathbf{n}(n_1; n_2)$ normálvektorú egyenes egyenlete

1. K1 Írjuk fel a P ponton átmenő, $\mathbf{n}$ normálvektorú egyenes egyenletét!
a) $P(-1; 5)$, $\mathbf{n}(2; 3)$; *b)* $P(10; 13)$, $\mathbf{n}(-2; 7)$; *c)* $P(0; 6)$, $\mathbf{n}(8; -5)$.

a) $2x + 3y = -2 + 15$, azaz $2x + 2y = 13$;
b) $-2x + 7y = -20 + 91$, azaz $-2x + 7y = 71$;
c) $8x - 5y = -30$.

2. K1 Írjuk fel az AB szakasz felezőmerőlegesének az egyenletét!
a) $A(7; -2)$, $B(-3; 4)$; *b)* $A(11; 0)$, $B(-9; 6)$.

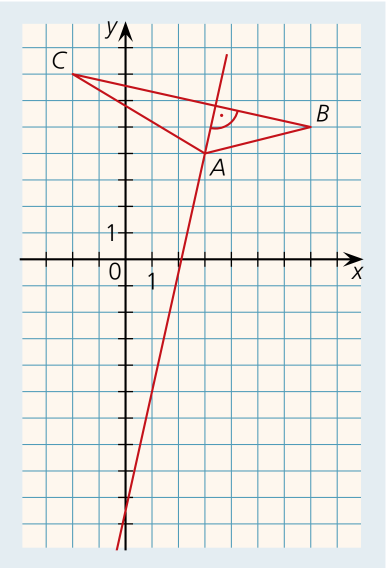
a) Az AB szakasz felezőpontja $F_{AB}(2; 1)$. Az AB szakasz egy irányvektora $\mathbf{v}_{AB}(-10; 6)$, vagy $(-5; 3)$. Ez a vektor a felezőmerőlegesnek normálvektora. Tehát a felezőmerőleges egyenlete: $-5x + 3y = -10 + 3$, azaz $5x - 3y = 7$;
b) Az AB szakasz felezőpontja $F_{AB}(1; 3)$. Az AB szakasz egy irányvektora $\mathbf{v}_{AB}(-20; 6)$, vagy $(-10; 3)$. Ez a vektor a felezőmerőlegesnek normálvektora. Tehát a felezőmerőleges egyenlete: $-10x + 3y = -10 + 9$, azaz $10x - 3y = 1$.

3. K1 Írjuk fel a megadott ponton átmenő, a megadott egyenesre merőleges egyenes egyenletét!
a) $P(6; -1)$, $3x + 5y = -4$; *b)* $P(-6; 3)$, $-4x + 7y = 11$.

a) A megadott egyenes egy normálvektora $\mathbf{n}(3; 5)$. Ez a vektor a keresett egyenesnek egy irányvektora, tehát a kért egyenes egyenlete: $5x - 3y = 30 + 3$, vagyis $5x - 3y = 33$.
b) A megadott egyenes egy normálvektora $(-4; 7)$. Ez a vektor a keresett egyenesnek egy irányvektora, tehát a kért egyenes egyenlete: $7x + 4y = -42 + 12$, vagyis $7x + 4y = -30$.

4. K2 Egy háromszög csúcspontjainak a koordinátái $A(3; 4)$, $B(7; 5)$, $C(-2; 7)$. Hol metszi az A csúcshoz tartozó magasságvonal az x tengelyt?

Készítsünk egy ábrát.

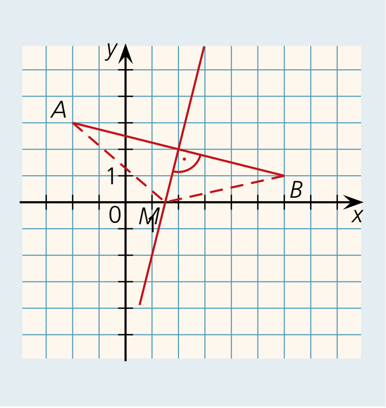


A BC egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}_{BC}(-9; 2)$. Ez a vektor az A csúcshoz tartozó magasság egyenesének egy normálvektora. Tehát a magasságvonal egyenlete:
$-9x + 2y = -27 + 8$, azaz $-9x + 2y = -19$.

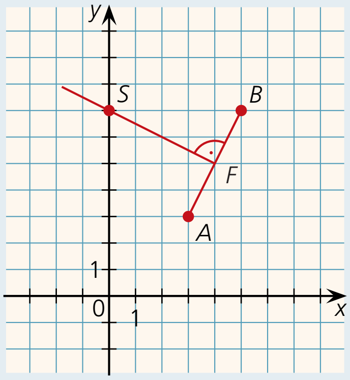
Ez ott metszi az x tengelyt, ahol $y = 0$. Ekkor $x = \frac{19}{9}$.

5. K2 Egy térképhez rögzített koordináta-rendszerben (ahol az egység mindkét tengelyen 160 m), két tanya koordinátái $A(-2; 3)$, $B(6; 1)$. Az országút a térképen az x tengelynek felel meg. Milyen messze van az egyes tanyáktól az országúton az M buszmegálló, ha az mindkét tanyától egyenlő távolságra van?

Az AB szakasz felezőmerőlegesének és az x tengelynek a metszéspontját kell kiszámítani.
Az AB szakasz F felezőpontja $F_{AB}(2; 2)$. Az AB egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}_{AB}(8; -2)$, vagy $(4; -1)$. Ez a vektor a felezőmerőlegesnek egy normálvektora. Tehát a felezőmerőleges egyenlete: $4x - y = 6$. Ez ott metszi az x tengelyt, ahol $y = 0$, vagyis $x = 1{,}5$. Tehát az M pont koordinátái $M(1{,}5; 0)$. Most számítsuk ki az MA (vagy MB) távolságot.
$MA = \sqrt{3{,}5^2 + 3^2} = \sqrt{21{,}25} \approx 4{,}61$.
Tehát az M megállónak az egyes tanyáktól való távolsága kb. $4{,}61 \cdot 160 \approx 737{,}6$ m.



6. K2 Egy egyenlő szárú háromszög alapjának két végpontja $A(3; 3)$, $B(5; 7)$. A háromszög súlypontja az y tengelyre illeszkedik. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit!

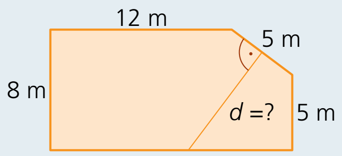


Az egyenlő szárú háromszög súlypontja rajta van az alaphoz tartozó magasságvonalon, vagyis az alap felezőmerőlegesén. Az AB alap felezőpontja $F(4; 5)$. Az AB egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}_{AB}(2; 4)$ vagy $(1; 2)$. Ez a vektor az alaphoz tartozó magasság egyenesének egy normálvektora. Tehát az AB alap felezőmerőlegesének egyenlete: $x + 2y = 14$. Ez az egyenes az y tengelyt $y = 7$-nél metszi, vagyis az S súlypont koordinátái: $S(0; 7)$. A háromszög harmadik $C(c_1; c_2)$ csúcspontjára

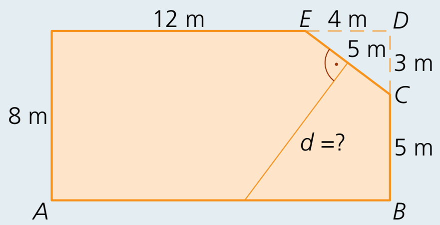
$\frac{3+5+c_1}{3} = 0$, azaz $c_1 = -8$, és $\frac{3+7+c_2}{3} = 7$, azaz $c_2 = 11$.

Tehát a harmadik csúcs koordinátái $C(-8; 11)$.

7. E1 Egy sportcsarnok tetőszerkezetének egy acélszerkezetét látjuk az ábrán. A ferde tetőrészt annak felezőpontjában, rá merőlegesen kell kitámasztani. Mekkora legyen a kitámasztó acélrúd d hossza?

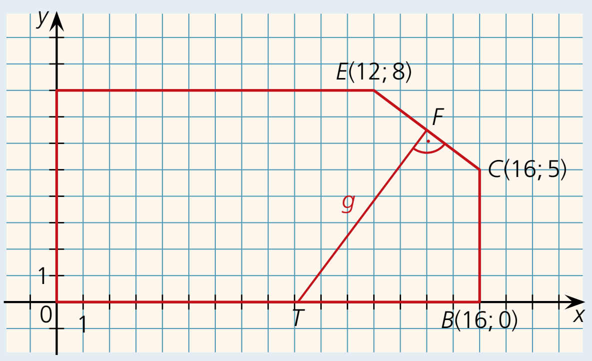


Az adatokból következik, hogy $CD = 3$ és $ED = 4$.



Helyezzük el az ábrát egy jól választott koordináta-rendszerben. Az EC ferde tető F felezőpontjának koordinátái $F\left(14; \frac{13}{2}\right)$. Az EC egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}_{EC}(4; -3)$. Ez a vektor a gerenda egyenesének egy normálvektora. Tehát a gerenda egyenesének egyenlete: $4x - 3y = 56 - 19{,}5 = 36{,}5$. Ez az egyenes az x tengelyt $x = 9{,}125$-ben metszi, tehát a gerenda T talppontja $T(9{,}125; 0)$. A gerenda g hossza:

$g = \sqrt{(14 - 9{,}125)^2 + 6{,}5^2} \approx 8{,}124$ m.



9. Két egyenes metszéspontja, pont és egyenes távolsága

1. K1 Számítsuk ki az egyenletükkel adott alábbi egyenesek metszéspontjának koordinátáit!
a) $2x - y = 5,\ 3x + 5y = 14;$ *b)* $3x - 10y = -46,\ 2x + 7y = 24.$

a) A metszéspont $M(3;\ 1)$. *b)* A metszéspont $M(-2;\ 4)$.

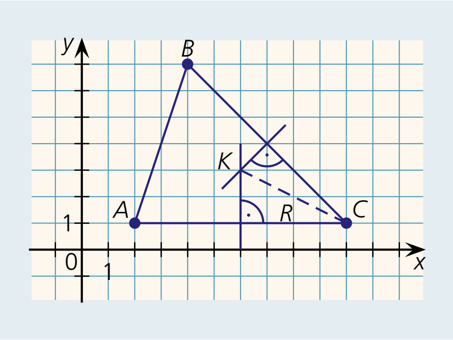
2. K1 Egy háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:
$5x - 3y = 1;\quad 5x + y = 13;\quad 15x - y = 67.$
Számítsuk ki a háromszög kerületét!

Ki kell számítanunk a három egyenes egyenletéből bármely két-két egyenes metszéspontját. Az első két egyenes metszéspontja $M_1(2;\ 3)$. Az első és a harmadik egyenes metszéspontja $M_2(5;\ 8)$. A második és a harmadik egyenes metszéspontja $M_3(4;\ -7)$. A háromszög kerülete:
$K = M_1M_2 + M_1M_3 + M_2M_3 = \sqrt{34} + \sqrt{104} + \sqrt{226} \approx 31{,}06.$

3. K1 Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely áthalad a
$4x + y = 1$ és $3x + 2y = 7$
egyenletű egyenesek metszéspontján és merőleges a $4x - 7y = 11$ egyenletű egyenesre!

A megadott két egyenes M metszéspontja $M(-1;\ 5)$. A $4x - 7y = 11$ egyenes egy normálvektora $\mathbf{n}(4;\ -7)$. Ez a vektor a rá merőleges egyenesnek egy irányvektora, tehát a keresett egyenlet:
$-7x - 4y = 7 - 20,$ azaz $7x + 4y = 13.$

4. K2 Egy háromszög csúcspontjainak a koordinátái $A(2;\ 1)$, $B(4;\ 7)$, $C(10;\ 1)$. Számítsuk ki a háromszög köré írható körének sugarát!



A háromszög köré írható körének K középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Az AC oldal felezőmerőlegesének egyenlete $x = 6$.
A BC oldal felező pontja $F(7;\ 4)$; irányvektora $v_{BC}(1;\ -1)$. A BC oldal felezőmerőlegesének egyenlete $x - y = 3$. A két felezőmerőleges K metszéspontja $K(6;\ 3)$. A háromszög köré írható körének sugara a K pontnak a háromszög valamelyik csúcsától (pl. C-től) való távolsága.
$KC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}.$

5. K2 Számítsuk ki a P pont és a megadott egyenes távolságát!
a) $P(-2;\ 6)$, $x + y = 1$; *b)* $P(-2;\ -4)$, $4x + 2y = 5$.

a) A megadott egyenes egy normálvektora $\mathbf{n}(1;1)$. Ez a rá merőleges egyenesnek irányvektora. Tehát a P ponton átmenő, az egyenesre merőleges egyenes egyenlete $x - y = -8$. Ennek az egyenesnek és az eredeti egyenesnek a metszéspontja $M(-3{,}5;\ 4{,}5)$. Az M és P pontok távolsága $PM = \sqrt{1{,}5^2 + 1{,}5^2} \approx 2{,}121$.
b) A P-ből a megadott egyenesre állított merőleges egyenes egyenlete $x - 2y = 6$. A most kapott egyenes és az eredeti egyenes M metszéspontja $M(2{,}2;\ -1{,}9)$. A PM távolság
$PM = \sqrt{4{,}2^2 + 2{,}1^2} \approx 4{,}69.$

6. K2 Egy háromszög csúcspontjai $A(-4;\ 1)$, $B(2;\ -3)$, $C(1;\ 2)$. Számítsuk ki az A csúcsból induló magasság hosszát!

A BC egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}_{BC}(1;\ -5)$. Ezzel a BC egyenes egyenlete
$-5x - y = -7,$ azaz $5x + y = 7.$

A $\mathbf{v}_{BC}$ vektor az A csúcsból induló magasságvonal egy normálvektora. Tehát az A csúcson átmenő magasság egyenlete: $x-5y=-9$.
Az $5x+y=7$ és $x-5y=-9$ egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása $x=1$, $y=2$, vagyis az A csúcson átmenő magasság talppontja $T(1;\,2)$. Ez a pont azonos a háromszög C csúcsával. Ez azt jelenti, hogy a háromszög derékszögű és az A csúcsból induló magassága éppen az AC befogó. Ennek hossza $AC=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$.

7. E1 Mekkora legyen a b paraméter értéke, hogy a $6x+y=22$ és $2x+5y=-2$ egyenesek metszéspontja rajta legyen a $3x+by=16$ egyenesen?

A két megadott egyenes M metszéspontjának koordinátái $M(4;\,-2)$. Ha ez a pont rajta van a $3x+by=16$ egyenletű egyenesen, akkor $3\cdot 4+b\cdot(-2)=16$, azaz $12-2b=16$, ahonnan $b=-2$.

10. Adott $P_0(x_0;\,y_0)$ ponton átmenő, adott m meredekségű egyenes egyenlete, egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének feltétele

1. K1 Írjuk fel a P ponton átmenő, m meredekségű egyenes egyenletét!

a) $P(5;\,0)$, $m=\frac{1}{2}$; *b)* $P(-4;\,7)$, $m=-\frac{2}{3}$; *c)* $P(1;\,-\sqrt{2})$, $m=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a) $y=\frac{1}{2}\cdot(x-5)$, azaz $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$;

b) $y-7=-\frac{2}{3}\cdot(x+4)$, azaz $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$;

c) $y+\sqrt{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x-1)$, azaz $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. K1 Az alábbi egyenesek közül melyek párhuzamosak egymással és melyek merőlegesek egymásra?
$2x-7y=11$; $3x+4y=-3$; $6x+8y=15$; $7x+2y=13$; $-x+3{,}5y=-4$.

Az egyenesek irányvektorait, vagy normálvektorait, vagy meredekségeit összehasonlítva arra jutunk, hogy
A 2. és a 3. egyenes párhuzamos egymással.
Az 1. és az 5. egyenes párhuzamos egymással.
A 4. egyenes merőleges az 1. és az 5. egyenesre.

3. K1 Határozzuk meg az $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a\neq 0,\, b\neq 0)$ egyenletű egyenes meredekségét!

Az egyenes egyenletét ab-vel megszorozva $bx+ay=ab$. Tehát az egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(-a;\,b)$. Így az egyenes m meredeksége: $m=-\frac{b}{a}$.

4. K2 Egy egyenes meredeksége 3, egy másik egyenes meredeksége 1. Számítsuk ki a két egyenes hajlásszögét!

A $\mathbf{v}(1;\,3)$ és $\mathbf{v}^*(1;\,1)$ vektorok hajlásszögét kell meghatároznunk. A két vektor α hajlásszöge – a skaláris szorzat alapján:

$$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\approx 0{,}8944,\qquad \text{vagyis}\qquad \alpha\approx 26{,}56°.$$

5. K2 Egy háromszög csúcspontjai: $A(5; 4)$, $B(1; 2)$, $C(3; -3)$. Számítsuk ki a háromszög oldalegyeneseinek a meredekségét!

A háromszög oldalegyeneseinek egy-egy irányvektora, és m meredeksége:

$\mathbf{v}_{AB}(-4; -2)$ vagy $(2; 1)$, tehát az AB oldalegyenes meredeksége $m = \frac{1}{2}$,

$\mathbf{v}_{AC}(-2; -7)$, tehát az AC oldalegyenes meredeksége $m = \frac{7}{2}$,

$\mathbf{v}_{BC}(2; -5)$, tehát a BC oldalegyenes meredeksége $m = -\frac{5}{2}$.

6. K2 Az $y = ax + b$ és $y = bx + a$ egyenesek merőlegesek egymásra. Számítsuk ki az egyenesek metszéspontjának a koordinátáit!

Ha e két egyenes merőleges egymásra, akkor meredekségeik szorzata -1, tehát $ab = -1$, ahonnan $b = -\frac{1}{a}$. Ezzel a két egyenes egyenlete

$y = ax - \frac{1}{a}$ és $y = -\frac{1}{a}x + a$.

$ax - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a}x + a$, azaz $a^2x - 1 = -x + a^2$,

$x(a^2 + 1) = a^2 + 1$, ahonnan $x = 1$, és ezzel $y = a - \frac{1}{a}$.

7. E1 A $(p + 1)x + py = p$ és $(2p + 1)x + (p + 1)y = 3p - 1$ $(p \neq -1)$ egyenesek merőlegesek egymásra. Számítsuk ki a két egyenes metszéspontjának koordinátáit!

Dolgozhatunk meredekséggel, de dolgozhatunk irány- vagy normálvektorokkal is. Az egyenesek egy-egy irányvektora rendre:
$\mathbf{v}(-p; p+1)$, $\mathbf{v}^*(-p-1;\ 2p+1)$.
E két vektor merőleges egymásra, tehát skaláris szorzatuk 0.
$p(p + 1) + (p + 1)(2p + 1) = (p + 1)(3p + 1) = 0$.
Mivel $p \neq -1$, ezért csak $p = -\frac{1}{3}$ lehet. Ezzel az eredeti egyenletek:

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = -\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = -2$, azaz $2x - y = -1$ és $x + 2y = -6$.

Az egyenletrendszer megoldása (vagyis a két egyenes M metszéspontjának koordinátái) $M\left(-\frac{8}{5}; -\frac{11}{5}\right)$.

11. A kör egyenlete; a kör és a kétismeretlenes másodfokú egyenlet

1. K1 Írjuk fel a kör egyenletét, ha középpontja és sugara
a) $K(-1; 7)$, $r = 8$; *b)* $K(0; -5)$, $r = \sqrt{2}$; *c)* $K(-7; 3)$, $r = 12$!

a) $(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 64$; *b)* $x^2 + (y + 5)^2 = 2$; *c)* $(x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 144$.

2. K1 Írjuk fel a kör egyenletét, ha adott a K középpontja és egy P pontja!
a) $K(3; -1)$, $P(7; 2)$; *b)* $K(3; 0)$, $P(4; 4)$; *c)* $K(0; 0)$, $P(5; -3)$.

A kör sugara a P és K pontok távolsága.
a) $PK = r = \sqrt{16 + 9} = 5$, a kör egyenlete $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$;
b) $PK = r = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$, a kör egyenlete $(x - 3)^2 + y^2 = 17$;
c) $PK = r = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$, a kör egyenlete $x^2 + y^2 = 34$.

3. K1 Állapítsuk meg a következő kétismeretlenes másodfokú egyenletekről, hogy kör egyenletei-e, és ha igen, adjuk meg a középpontot és a sugarat!

a) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 40 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + x + 2y + 0{,}25 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$.

Alakítsuk teljes négyzetté a kétismeretlenes másodfokú egyenleteket.

a) $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 1$. A kapott egyenlet a $K(5; -4)$ középpontú, $r = 1$ sugarú kör egyenlete.

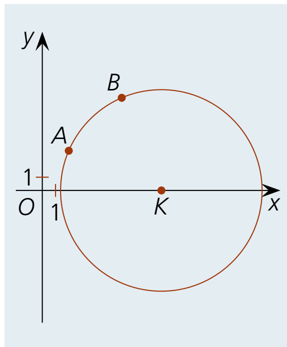
b) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = 1$. A kapott egyenlet a $K\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ középpontú, $r = 1$ sugarú kör egyenlete.

c) $(x+1)^1 + (y-2)^2 = -1$. A kapott egyenlet nem kör egyenlete; nincs olyan $P(x; y)$ pont, melynek koordinátái ezt az egyenletet kielégítenék.

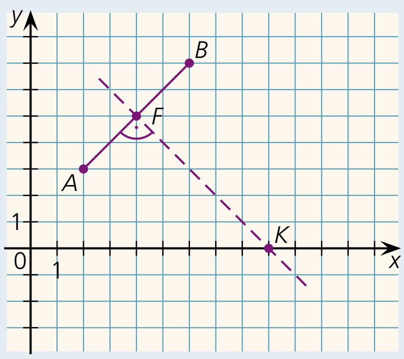
4. K2 Egy kör érinti a koordinátatengelyeket és áthalad a $P(2; 1)$ ponton. Adjuk meg a kör egyenletét!

Ha a kör érinti a koordinátatengelyeket és áthalad a $P(2; 1)$ ponton, akkor az első síknegyedben kell lennie. Ekkor középpontjának a koordinátái egyenlők a kör sugarával, tehát egyenlete
$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$.
A P pont koordinátái kielégítik ezt az egyenletet;
$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$, azaz $r^2 - 6r + 5 = 0$.
A kapott másodfokú egyenlet megoldásai: $r_1 = 1$, $r_2 = 5$. Tehát két, a feltételeknek eleget tevő kör van; ezek egyenlete:
$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ és $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

5. K2 Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, mely áthalad az $A(2; 3)$ és $B(6; 7)$ pontokon és a középpontja az x tengelyen van *(ábra)*!



A kör középpontját az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki az x tengelyből. Az AB szakasz felezőpontja $F(4; 5)$, a felezőmerőleges egy normálvektora $\mathbf{n}(1; 1)$. A felezőmerőleges egyenlete: $x + y = 9$. Ez az egyenes az x tengelyt a $K(9; 0)$ pontban metszi.



A kör sugara a KB (vagy KA) szakasz hossza: $KB = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$. Ezzel a keresett kör egyenlete
$(x-9)^2 + y^2 = 58$.

6. K2 Adott az $x^2 + y^2 - 4x + 8y + k = 0$ egyenlet. Határozzuk meg a k paraméter értékét úgy, hogy
a) ne legyen kör egyenlete;
b) olyan kör egyenlete legyen, mely érinti az $x = -4$ egyenest;
c) olyan kör egyenlete legyen, mely áthalad a $P(-2; 2)$ ponton!

Alakítsuk át a megadott kör egyenletét: $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 20 - k$. Tehát a kör középpontja és sugara: $K(2; -4)$, $r = \sqrt{20-k}$.
a) Ez az egyenlet akkor nem kör egyenlete, ha $20 - k \le 0$, azaz $k \ge 20$.

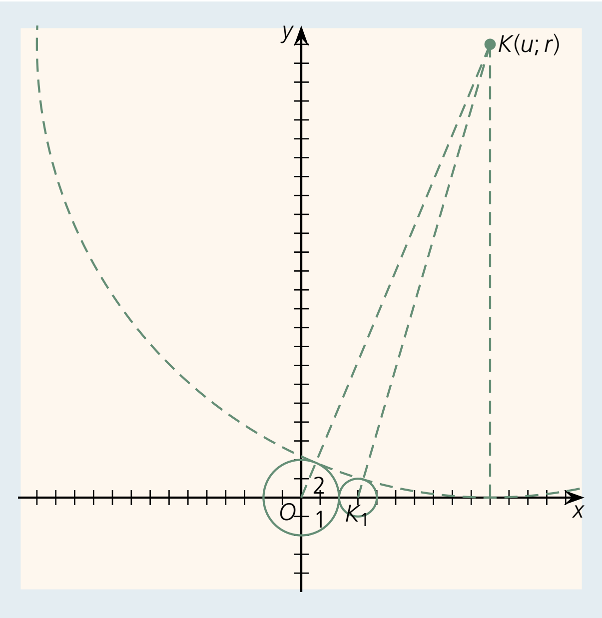
b) A kör középpontja az $x = -4$ egyenestől 6 egység távolságra van. $\sqrt{20-k} = 6$, ahonnan $k = -16$.
c) Ha a $P(-2; 2)$ pont rajta van a körön, akkor koordinátái kielégítik az egyenletét:
$(-4)^2 + 6^2 = 20 - k$, ahonnan $k = -32$.

7. K2 Egy háromszög csúcspontjai $A(2; 1)$, $B(10; 1)$, $C(7; 4)$. Írja fel a háromszög köré írható körének az egyenletét!

A háromszög AB oldala felezőmerőlegesének egyenlete $x = 6$. A BC oldal F felezőpontja $F\left(\frac{17}{2}; \frac{5}{2}\right)$.
A BC oldal irányvektora $\mathbf{v}(1; -1)$. Ez a vektor a felezőmerőlegesnek normálvektora. Tehát a felezőmerőleges egyenlete: $x - y = 6$. A háromszög köréírható köre K középpontja $K(6; 0)$. A kör r sugara: $r = KA = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$. Tehát az ABC háromszög köréírható körének egyenlete: $(x-6)^2 + y^2 = 17$.

8. E1 Adott két kör: $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 4$ és $x^2 + y^2 - 2x - 4y + b = 0$. Mekkora legyen a b értéke, hogy e két kör kívülről érintse egymást?

Ha két kör kívülről érinti egymást, akkor középpontjaik távolsága egyenlő a két kör sugarának összegével. Alakítsuk át a körök egyenletét.
$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 8$, tehát $K_1(-2; -3)$, $r_1 = \sqrt{8}$,
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 - b$, tehát $K_2(1; 2)$, $r_2 = \sqrt{5-b}$.
$K_1K_2 = r_1 + r_2$, vagyis $\sqrt{34} = \sqrt{8} + \sqrt{5-b}$.
$\sqrt{5-b} = \sqrt{34} - \sqrt{8}$,
$5 - b = 42 - 2\sqrt{272}$, ahonnan $b = 2\sqrt{272} - 37$ $(\approx -4{,}02)$.



9. E2 Adott két kör: $x^2 + y^2 = 4$ és $(x-3)^2 + y^2 = 1$. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, mely érinti e két kört és érinti az x tengelyt!

Mivel a keresett kör érinti az x tengelyt, ezért középpontjának második koordinátája r vagy $-r$ (az ábrán látható K középpontú kört az x tengelyre tükrözve szintén a feltételeknek megfelelő kört kapunk).

Írjuk fel Pitagorasz tételét a KTO és a KTK_1 derékszögű háromszögekre.
$(r+1)^2 = r^2 + u^2$ és $(r+2)^2 = r^2 + (|u| + 3)^2$.
Mivel $u < 0$, ezért a második egyenlet: $(r+2)^2 = r^2 + (3-u)^2$.
Az első egyenletből
$r^2 + 2r + 1 = r^2 + u^2$, azaz $2r = u^2 - 1$.
A második egyenletből
$r^2 + 4r + 4 = r^2 + u^2 - 6u + 9$, azaz $4r = u^2 - 6u + 5$.

Helyettesítsük az előbb kapott egyenlet kétszeresét az utóbbi egyenletbe:

$2u^2 - 2 = u^2 - 6u + 5$, vagyis $u^2 + 6u - 7 = 0$,

$u_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2}$, $u_1 = -7$, $u_2 = 1$.

Mivel $u < 0$, ezért csak a negatív megoldás jön számításba. Ha $u = -7$, akkor $r = \frac{u^2 - 1}{2} = 24$.

A feladat feltételeinek eleget tevő körök egyenlete:

$(x+7)^2 + (y+24)^2 = 49$ és $(x+7)^2 + (y-24)^2 = 49$.

Megjegyzés: Érdemes megvizsgálni az $u = 1$ eredményt is. Ekkor $r = 0$. Ebben az esetben az eredmény egy pont: az (1; 0) koordinátájú pont. Mivel ennek a megadott két körrel is és az x tengellyel is egy közös pontja van, ezért koordinátái kielégítik az eredetileg felírt egyenletrendszert. Mivel a 0 sugarú kört nem engedjük meg, ezért ez az eredeti feladatnak nem lehet megoldása.

12. Kör és egyenes kölcsönös helyzete

1. K1 Számítsuk ki a megadott kör és egyenes közös pontjainak koordinátáit!

a) $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $3x - y = 0$; *b)* $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 18 = 0$, $x - y = 2$.

a) Az egyenes egyenletéből $y = 3x$. Ezt a kör egyenletébe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$x^2 + 9x^2 - 2x = 0$, azaz $5x^2 - x = 0$, vagyis $x(5x-1) = 0$,

$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{5}$ és ezekkel $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{3}{5}$.

A kör és az egyenes metszéspontjai: $M_1(0; 0)$, $M_2\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

b) $y = x - 2$. Ezzel a kör egyenlete $x^2 + (x-2)^2 + 4x - 4(x-2) - 18 = 0$,

$x^2 - 2x - 3 = 0$, ahonnan $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

A kör és az egyenes metszéspontjai: $M_1(3; 1)$, $M_2(-1; -3)$.

2. K1 Számítsuk ki az $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ körnek azokat a pontjait, melyek az $A(0; 5)$ és $B(4; -3)$ pontoktól egyenlő távolságra vannak!

Az A és B pontoktól egyenlő távolságra levő pontok halmaza az AB szakasz felezőmerőlegesének a pontjai. A keresett pontokat e szakaszfelezőmerőleges metszi ki a megadott körből. Az AB szakasz F felezőpontja $F(2; 1)$. Az AB egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(4; -8)$ vagy $(1; -2)$. Tehát a szakaszfelezőmerőleges egyenlete: $x - 2y = 0$, ahonnan $x = 2y$. Ezt a kör egyenletébe helyettesítve

$4y^2 + y^2 - 20y - 10y + 25 = 0$, azaz $y^2 - 6y + 5 = 0$, ahonnan $y_1 = 1$, $y_2 = 5$.

A körnek az A és B pontoktól egyenlő távolságra levő pontjai: $M_1(2; 1)$, $M_2(10; 5)$.

3. K2 Egy kör egyenlete $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$. A kör egy belső pontja $P(1; 3)$. Számítsuk ki a P ponton áthaladó legrövidebb húr hosszát!

A kör egyenletéből $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$, tehát a kör K középpontja és r sugara: $K(-1; 1)$, $r = 4$. A P ponton átmenő legrövidebb húrt a P ponton átmenő, PK egyenesre merőleges egyenes metsz ki a körből. A PK egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}_{PK}(2; 2)$, vagy $(1; 1)$. Így a keresett egyenes egyenlete: $x + y = 4$, ahonnan $y = 4 - x$. Ezzel a kör egyenlete:

$x^2 + (4-x)^2 + 2x - 2(4-x) - 14 = 0$, azaz $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

A P ponton átmenő legrövidebb húr végpontjai: $M_1(3; 1)$, $M_2(-1; 5)$. A húr hossza e két pont távolsága:

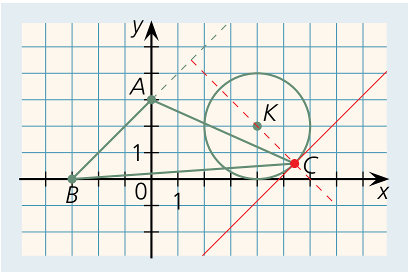
$M_1M_2 = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

4. K2 Az AB szakaszra, mint átmérőre írt kör egyenlete $x^2+y^2+6x-4y-4=0$. Az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenlete $4x-y=-14$. Határozzuk meg az A és B pontok koordinátáit!

A kör egyenletéből $(x+3)^2+(y-2)^2=17$; a kör középpontja $K(-3;\ 2)$. A megadott felezőmerőleges egy normálvektora $\mathbf{n}(4;\ -1)$. Ez a vektor az AB egyenesnek egy irányvektora. Tehát az AB egyenes egyenlete $-x-4y=3-8$, vagyis $x=5-4y$. Ezzel a kör egyenlete

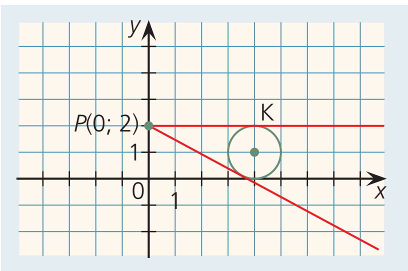
$(5-4y)^2+y^2+6(5-4y)-4y-4=0$, azaz $y^2-4y+3=0$, $y_1=3$, $y_2=1$.
Az A és B pontok: $(-7;\ 3)$ és $(1;\ 1)$.

5. E1 Egy háromszög két csúcspontja $A(0;\ 3)$, $B(-3;\ 0)$. A harmadik csúcs rajta van az $x^2+y^2-8x-4y+16=0$ egyenletű körön. Határozzuk meg a harmadik csúcs koordinátáit úgy, hogy a háromszög területe a lehető legnagyobb legyen!



A megadott kör középpontja és sugara $K(4;\ 2)$, $r=2$. A háromszög területe akkor lesz a legnagyobb, ha a keresett C csúcs a legtávolabb van az AB oldal egyenesétől. A megadott körnek az AB egyenestől legtávolabbi pontja az AB-vel párhuzamos „távolabbi" érintő érintési pontja.
A C pontot a kör középpontján átmenő, AB-re merőleges egyenes metszi ki a körből. A K ponton átmenő, AB-re merőleges egyenes egyenlete $x+y=6$, ahonnan $y=6-x$. Ezt a kör egyenletébe helyettesítve azt kapjuk:
$x^2-8x+14=0$, ahonnan $x_1=4+\sqrt{2}$, $x_2=4-\sqrt{2}$.
A keresett metszéspont első koordinátája biztosan nagyobb 4-nél (azaz a kör első koordinátájánál), így a keresett metszéspont: $M\left(4+\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2}\right)$.
Tehát a háromszög területe akkor lesz a legnagyobb, ha a harmadik csúcsa a kör $\left(4+\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2}\right)$ koordinátájú pontja.

6. E1 Írjuk fel az $x^2+y^2-8x-2y+16=0$ kör azon érintőinek egyenletét, melyek áthaladnak a $P(0;\ 2)$ ponton!

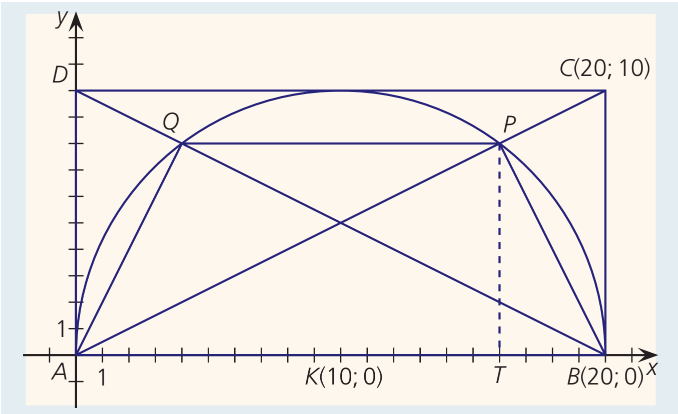


Mindenekelőtt ábrázoljuk a megadott kört! A kör egyenlete
$(x-4)^2+(y-1)^2=1$,
tehát a kör középpontja és sugara: $K(4;\ 1)$, $r=1$.
Mivel a keresett érintő áthalad a $P(0;\ 2)$ ponton, ezért egyenlete $y=mx+2$ alakú, ahol m a meredeksége. A kör egyenletéből világos, hogy az egyik érintő párhuzamos az x tengellyel, vagyis egyenlete $x=2$.
Egy kör és egy egyenes közös pontjainak kiszámításához meg kell oldanunk az egyenleteikből álló kétismeretlenes egyenletrendszert, ezért helyettesítsük a kör egyenletébe az $y=mx+2$ kifejezést! Azt kapjuk, hogy
$x^2+(mx+2)^2-8x-2(mx+2)+16=0$, azaz
$x^2+m^2x^2+4mx+4-8x-2mx-4+16=0$,
$(m^2+1)x^2+(2m-8)x+16=0$.
Mivel azt akarjuk, hogy az egyenes érintő legyen, vagyis a körnek és az egyenesnek csak egy közös pontja legyen, ezért ennek az egyenletnek csak egy megoldása lehet. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0.
$(2m-8)^2-64(m^2+1)=0$,
$4m^2-32m+64-64m^2-64=0$, ahonnan $-4m(8+15m)=0$.
Ez utóbbi egyenlet megoldásai: $m_1=0$, $m_2=-\dfrac{8}{15}$.
Tehát a keresett érintők egyenlete: $y=2$, $y=-\dfrac{8}{15}x+2$.

7. E1 Hány db olyan pozitív egész n szám van, melyre teljesül, hogy az $x^2 + y^2 - 10x + 6y + n = 0$ egyenletű körnek van közös pontja az $y = -1$ egyenessel, de nincs közös pontja az $x = -1$ egyenessel?

Ha a megadott körnek van közös pontja az $y = -1$ egyenessel, akkor ($y = -1$-et a körbe helyettesítve) az
$x^2 - 10x - 5 + n = 0$
egyenletnek van megoldása, tehát D diszkriminánsára $D \geq 0$. Tehát
$100 - 4(-5 + n) \geq 0$, ahonnan $n \leq 30$.
Ha a megadott körnek nincs közös pontja az $x = 1$ egyenessel, akkor az
$y^2 + 6y - 9 + n = 0$
egyenletnek nincs megoldása, tehát diszkriminánsa negatív:
$36 - 4(-9 + n) < 0$, ahonnan $n > 18$.
Ezek szerint n lehetséges értékei: 19, 20, 21, …, 30, vagyis 12 db a feltételeknek eleget tevő n pozitív egész szám van.

8. E1 Az $ABCD$ téglalap oldalai $AB = 20$, $BC = 10$. A téglalap AB oldalára, mint átmérőre egy félkört rajzoltunk a téglalap belseje felé. A téglalap átlói e félkört a P és Q pontokban metszik. Számítsuk ki az $ABPQ$ négyszög területét!



Helyezzük el az ábrát egy jól választott koordináta-rendszerbe. Az $ABPQ$ négyszög egy szimmetrikus trapéz.
Ha ki tudjuk számítani a P pont koordinátáit, akkor ismert lesz a trapéz magassága, és a PQ rövidebb párhuzamos oldala.
A P pontot az AC egyenes és a félkör metszéspontjaként kapjuk meg. Az AC egyenes egyenlete: $y = \frac{1}{2}x$. A félkör K középpontja $K(10; 0)$, sugara $r = 10$. Tehát a félkörre illeszkedő kör egyenlete: $(x - 10)^2 + y^2 = 100$. Helyettesítsük az egyenes egyenletét a kör egyenletébe:
$x^2 - 20x + 100 + \frac{1}{4}x^2 = 100$, ahonnan $x^2 - 16x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 16$.
Az $x = y = 0$ az A pont (ezt eddig is tudtuk). A P pont koordinátái $P(16; 8)$. Ez azt jelenti, hogy a trapéz magassága 8, rövidebb párhuzamos oldala $PQ = 20 - 2 \cdot 4 = 12$. A trapéz területe:
$T_{ABPQ} = \frac{(20 + 12) \cdot 8}{2} = 128$ területegység.

13. Két kör kölcsönös helyzete

1. K1 Számítsuk ki az alábbi körök közös pontjainak a koordinátáit!
a) $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 33 = 0$.

a) A két kör egyenletét kivonjuk egymásból: az $y = 2 - x$ egyenes egyenletéhez jutunk. Ezt valamelyik (pl. az első) egyenletbe visszahelyettesítve
$x^2 + (2 - x)^2 - 8(2 - x) + 12 = 0$, ahonnan $x(x + 2) = 0$, amiből $x = 0$ vagy $x = -2$.
A körök metszéspontjai $M_1(0; 2)$, $M_2(-2; 4)$.

b) A két kör egyenletét kivonjuk egymásból: az $y = 5 - x$ egyenes egyenletéhez jutunk. Ezt az első kör egyenletébe visszahelyettesítve
$x^2 + (5 - x)^2 - 4x - 2(5 - x) + 3 = 0$, ahonnan $x^2 - 6x + 9 = 0$.
Ez utóbbi egyenlet bal oldalán teljes négyzet található: $(x - 3)^2 = 0$, azaz $x = 3$. Ezek szerint a két kör az $M(3; 2)$ pontban érinti egymást.

2. K2 Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, mely áthalad az $x^2+y^2-x=0$ és az $x^2+y^2-2y=0$ egyenletű körök metszéspontjain, és középpontja az $y=x$ egyenesre illeszkedik!

A két kör egyenletének különbségéből az $x=2y$ egyenlet adódik. Ezt valamelyik kör egyenletébe visszahelyettesítve $y(5y-2)=0$, ebből $y=0$ vagy $y=\frac{2}{5}$. Így a két kör metszéspontjai $M_1(0;\,0)$, $M_2\left(\frac{4}{5};\,\frac{2}{5}\right)$. A keresett kör középpontja az M_1M_2 szakasz felezőmerőlegesének és az $y=x$ egyenesnek a metszéspontja.

Az M_1M_2 szakasz F felezőpontja $F\left(\frac{2}{5};\,\frac{1}{5}\right)$. Az M_1M_2 felezőmerőlegesének egy normálvektora $\mathbf{n}(2;\,1)$. A felezőmerőleges egyenlete: $2x+y=1$. Ennek az egyenesnek és az $y=x$ egyenesnek a metszéspontja $K\left(\frac{1}{3};\,\frac{1}{3}\right)$. A kör sugara a KM_1 szakasz hossza:

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

A keresett kör egyenlete: $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$.

3. K2 Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, mely áthalad az $x^2+y^2+x-y-6=0$ és az $x^2+y^2-2x+y-2=0$ egyenletű körök metszéspontjain, és középpontja az x tengelyre illeszkedik!

A két kör egyenletének különbségéből a $3x-2y=4$, azaz $y=\frac{3}{2}x-2$. Innen

$$x^2+\left(\frac{3}{2}x-2\right)^2+x-\frac{3}{2}x+2-6=0,\qquad \text{ahonnan}\qquad x(x-2)=0.$$

A két kör metszéspontjai: $M_1(0;\,-2)$, $M_2(2;\,1)$. Az M_1M_2 szakasz felezőmerőlegesének egyenlete $2x+3y=\frac{1}{2}$. Ez az x tengelyt ott metszi, ahol $y=0$. Ezzel a keresett kör K középpontja $K\left(\frac{1}{4};\,0\right)$. A keresett kör r sugara: $r=\sqrt{\frac{1}{16}+4}=\sqrt{\frac{65}{16}}$. Tehát a keresett kör egyenlete:

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{65}{16}.$$

4. E1 Az $x^2+y^2-2x-4y+a=0$ és $x^2+y^2-14x-4y+b=0$ egyenletű körök kívülről érintik egymást, és területeik összege 26π. Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét!

A megadott körök középpontja és ugara:

$K_1(1;\,2)$, $\quad r_1=\sqrt{5-a}\,$; $\qquad K_2(7;\,2)$, $\quad r_2=\sqrt{53-b}\,$.

Ha két kör kívülről érinti egymást, akkor $r_1+r_2=K_1K_2$. Esetünkben $r_1+r_2=6$.

A feltételek szerint

$$r_1^2\pi+r_2^2\pi=26\pi,\qquad \text{azaz}\qquad r_1^2+r_2^2=26.$$

Az előző egyenletből $r_1=6-r_2$, így írhatjuk

$$(6-r_2)^2+r_2^2=26,\qquad \text{vagyis}\qquad r_2^2-6r_2+5=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldása után azt kapjuk, hogy

$$r_1=5,\quad r_2=1\qquad \text{vagy}\qquad r_1=1,\quad r_2=5.$$

Felhasználva r_1 és r_2 jelentését az a és b paraméterek lehetséges értékei:

$$a=-20\quad \text{és}\quad b=52\qquad \text{vagy}\qquad a=4\quad \text{és}\quad b=28.$$

5. E1 Bizonyítsuk be, hogy ha két kör egyenletét kivonjuk egymásból, akkor olyan egyenes egyenletét kapjuk, mely a két kör középpontjain átmenő egyenesre merőleges!

Legyen a két kör

$$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0\quad \text{és}$$

$$x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0.$$

Ekkor a két kör középpontja $K_1(a_1;\ b_1)$, $K_2(a_2;\ b_2)$. A körök középpontjain átmenő egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}_{K_1K_2}(a_2 - a_1;\ b_2 - b_1)$.
Most vonjuk ki egymásból a két egyenletet; azt kapjuk, hogy
$(2a_2 - 2a_1)x + (2b_2 - 2b_1)y + c_2 - c_1 = 0$.

Egy egyenes egyenletét kaptuk, melynek egy irányvektora $\mathbf{v}(b_1 - b_2;\ a_2 - a_1)$. A kapott vektor és a középpontokon átmenő egyenes irányvektorának skaláris szorzata:
$\mathbf{v}_{K_1K_2} \cdot \mathbf{v} = (a_2 - a_1)(b_1 - b_2) + (b_2 - b_1)(a_2 - a_1) = 0$.
Tehát a körök egyenleteinek különbségéből adódó egyenlet olyan egyenes egyenlete, mely a körök középpontjain átmenő egyenesre merőleges.

14. A kör érintőjének egyenlete

1. K1 Írjuk fel a kör érintőjének egyenletét a kör egy adott P pontjában!
a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$, $P(3;\ 4)$;
b) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 18 = 0$, $P(3;\ 3)$.

A kör egy adott P pontjába húzott érintő merőleges a P pontba húzott sugárra. Ezek szerint az érintő a P ponton átmenő, $\overrightarrow{KP}$ vektorra merőleges egyenes, ahol K a kör középpontja.

a) A kör középpontja $K(-1;\ 1)$. A P pontbeli érintő egy normálvektora $\mathbf{n} = \overrightarrow{KP}(4;\ 3)$. Tehát az érintő egyenlete: $4x + 3y = 24$;

b) A kör K középpontja $K(4;\ 2)$. A keresett érintő egy normálvektora $\overrightarrow{KP}(-1;\ 1)$. Tehát az érintő egyenlete: $-x + y = 0$.

2. K2 Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körnek a $2x + 4y = 5$ egyenesre merőleges érintőjének egyenletét

---

A megadott egyenes egy normálvektora $\mathbf{n}(2;\ 4)$ vagy $(1;\ 2)$. Ez a vektor az érintők egy irányvektora.
Az érintési pontot a megadott egyenessel párhozamos, a kör középpontján átmenő egyenes metszi ki a körből. A kör középpontja az origó $K(0;\ 0)$. A megadott egyenessel párhuzamos, a kör középpontján átmenő egyenes egyenlete $2x + 4y = 0$, azaz $x = -2y$. Ezt a kör egyenletébe helyettesítve azt kapjuk:
$4y^2 + y^2 = 25$, ahonnan $y = \pm\sqrt{5}$.
Tehát a keresett érintők érintési pontjai: $E_1(-2\sqrt{5};\ \sqrt{5})$, $E_2(2\sqrt{5};\ -\sqrt{5})$.
Az érintők egyenlete: $2x - y = -5\sqrt{5}$ és $2x - y = 5\sqrt{5}$.

3. K2 Írjuk fel az $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ egyenletű kör $y = x$ egyenessel párhuzamos érintőinek az egyenletét!

A megadott egyenes (tehát a keresett érintők) meredeksége $m = 1$. Ezek szerint az érintők egyenlete $y = x + b$ alakú egyenes, ahol b az egyenes és az y tengely metszéspontja. Az egyenes és a kör közös pontjainak x koordinátáit az
$x^2 + (x + b)^2 + 4x + 3 = 0$
másodfokú egyenlet megoldásai adják. Ha azt akarjuk, hogy az egyenes érintő legyen, vagyis csak egy közös pontja legyen a körrel, akkor ennek az egyenletnek csak egy megoldása lehet. Ez azt jelenti, hogy diszkriminánsának 0-nak kell lennie.
$x^2 + x^2 + 2bx + b^2 + 4x + 3 = 0$, vagyis $2x^2 + 2(b + 2)x + b^2 + 3 = 0$,
$4(b + 2)^2 - 8(b^2 + 3) = 0$, azaz $b^2 - 4b + 2 = 0$,
$$b_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$
Tehát a keresett érintők egyenlete $y = x + 2 + \sqrt{2}$ és $y = x + 2 - \sqrt{2}$.

4. K2 Milyen hosszú érintő húzható az $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$ egyenletű körhöz a $P(2; 5)$ pontból ?

A kör K középpontja $K(5; -1)$, sugara 4. Legyen az érintési pont E. Ekkor a PEK háromszög derékszögű, átfogója $PK = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$, egyik befogója a kör sugara: $KE = 4$. Pitagorasz tételéből

$45 = PE^2 + 16$, ahonnan $PE = \sqrt{29}$.

5. E1 Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű körnek az $y = mx + b$ egyenes érintője, akkor $m^2 = \dfrac{b^2}{r^2} - 1$!

Ha a megadott egyenes érintője a megadott körnek, akkor az

$x^2 + (mx + b)^2 = r^2$

egyenletnek egy megoldása van, vagyis diszkriminánsa 0.

$x^2 + m^2x^2 + 2mbx + b^2 - r^2 = 0$, azaz $(m^2+1)x^2 + 2mbx + b^2 - r^2 = 0$,

$D = 4m^2b^2 - 4(m^2+1)(b^2 - r^2) = 0$,

$m^2b^2 - m^2b^2 - b^2 + r^2 + m^2r^2 = 0$,

$m^2r^2 = b^2 - r^2$, ahonnan $m^2 = \dfrac{b^2}{r^2} - 1$,

és éppen ezt kellett belátnunk.

15. A parabola, a parabola tengelyponti egyenlete

1. K1 Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, melynek

a) tengelypontja $T(-3; 5)$, vezéregyenesének egyenlete $y = 1$;

b) tengelypontja $T(2; 4)$, fókuszpontja $F(2; 2{,}5)$;

c) fókuszpontja $F(-4; -2)$, felfelé nyíló és paramétere $p = 4$!

a) A tengelypont és a vezéregyenes ismeretében a parabola paramétere $p = 8$. A parabola egyenlete $y = \dfrac{(x+3)^2}{16} + 5$;

b) A parabola lefelé nyitott, paramétere $p = 3$. A parabola egyenlete: $y = -\dfrac{(x-2)^2}{6} + 4$;

c) A fókuszpont és a paraméter ismeretében a parabola T tengelypontja $T(-4; -4)$. A parabola egyenlete: $y = \dfrac{(x+4)^2}{8} - 4$.

2. K1 Határozzuk meg a parabola tengelypontját, fókuszpontját, paraméterét és vezéregyenesének egyenletét!

a) $y = \dfrac{x^2}{4}$; *b)* $y = \dfrac{(x+3)^2}{6} + 1$; *c)* $y = -\dfrac{(x-5)^2}{2} + 3$.

a) Tengelypont: $T(0; 0)$, paraméter: $p = 2$, fókuszpont: $F(0; 1)$, vezéregy.: $y = -1$.

b) Tengelypont: $T(-3; 1)$; paraméter: $p = 3$; fókuszpont: $F(-3; 2{,}5)$, vezéregy.: $y = -0{,}5$.

c) Tengelypont: $T(5; 3)$; paraméter: $p = 1$; fókuszpont: $F(5; 2{,}5)$; vezéregy.: $y = 3{,}5$.

3. K1 Határozzuk meg a parabola tengelypontját, paraméterét, fókuszpontját és vezéregyenesének az egyenletét!

a) $y = x^2 + 8x + 6$; *b)* $y = 2x^2 - 4x + 5$.

a) $y=(x+4)^2-10=\dfrac{(x+4)^2}{2\cdot\frac{1}{2}}-10$. Tengelypont: $T(-4;-10)$, paraméter: $p=\frac{1}{2}$; fókuszpont: $F(-4;-9{,}5)$, vezéregy.: $y=-10{,}5$.

b) $y=2\left[x^2-2x+\frac{5}{2}\right]=2(x-1)^2+3=\dfrac{(x-1)^2}{2\cdot\frac{1}{4}}+3$. Tengelypont: $T(1;\ 3)$; paraméter: $p=\frac{1}{4}$; fókuszpont: $F\left(1;\ \frac{25}{8}\right)$; vezéregyenes: $y=\frac{23}{8}$.

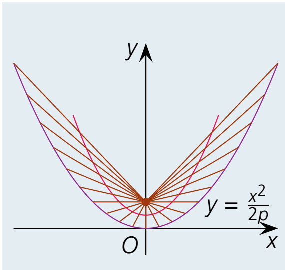
4. K2 Írjuk fel annak a felfelé nyíló parabolának az egyenletét, határozzuk meg tengelypontját és paraméterét, mely áthalad az
$A(0;\ 11)$, $B(1;\ 6)$, $C(-1;\ 18)$ pontokon!

Legyen $y=ax^2+bx+c$. A megadott pontok koordinátáit felhasználva az alábbi egyenleteket írhatjuk fel:
$c=11$, $\quad a+b+c=6$, $\quad a-b+c=18$, $\quad$ azaz $\quad a+b=-5$, $\quad a-b=7$.
Innen $a=1$, $b=-6$. A parabola egyenlete

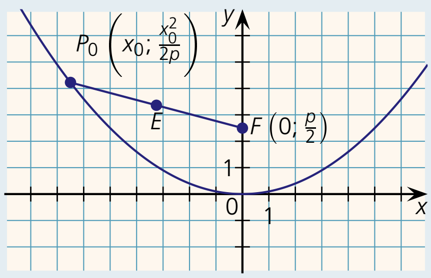
$$y=x^2-6x+11=(x-3)^2+2=\frac{(x-3)^2}{2\cdot\frac{1}{2}}+2.$$

A parabola tengelypontja és paramétere: $T(3;\ 2)$, $p=\frac{1}{2}$.

5. E1 Kössük össze az $y=\dfrac{x^2}{2p}$ parabola minden pontját a fókuszponttal, és vegyük az így keletkező szakaszok felezőpontjainak a halmazát. Milyen ponthalmazt kapunk? *(ábra)*



Legyen az adott parabola egy tetszőleges P_0 pontja $P_0\left(x_0;\ \dfrac{x_0^2}{2p}\right)$.



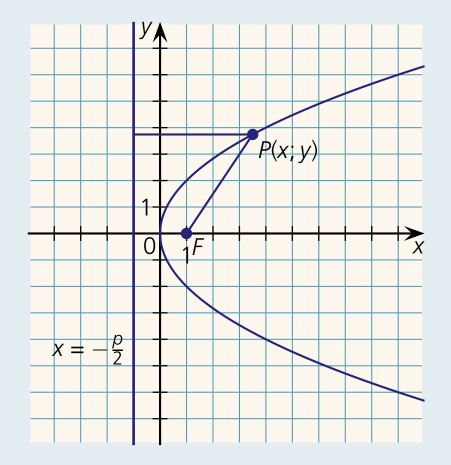
A P_0F szakasz E felezőpontjának a koordinátái $E\left(\dfrac{x_0}{2};\ \dfrac{x_0^2+p^2}{4p}\right)$. Ezek szerint a keresett ponthalmaz pontjainak x és y koordinátái így függenek a P_0 pont x_0 koordinátájától:

$$x=\frac{x_0}{2};\qquad y=\frac{x_0^2+p^2}{4p}.$$

Az első egyenletből $x_0=2x$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$y=\frac{4x^2+p^2}{4p}=\frac{x^2}{p}+\frac{p}{4}=\frac{x^2}{2\cdot\frac{p}{2}}+\frac{p}{4}.$$

Tehát a keresett ponthalmaz egy olyan parabola, melynek tengelypontja $T\left(0;\ \frac{p}{4}\right)$, paramétere pedig az eredeti parabola paraméterének a fele.



6. E1 Egy parabola tengelye az x tengely, tengelypontja az origóban van, paramétere p, fókuszpontja $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Határozzuk meg e parabola egyenletét!

A vezéregyenes egyenlete $x = -\frac{p}{2}$. Egy $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor van rajta a parabolán, ha az F fókuszponttól vett távolsága egyenlő a vezéregyenestől vett távolságával.

$$PF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},$$

$$x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2 = x^2 + \frac{p^2}{4} + px.$$

A parabola egyenlete: $y^2 = 2px$.

16. Parabola és egyenes, a parabola érintője

1. K1 Számítsuk ki a parabola és az egyenes metszéspontjainak a koordinátáit!

a) $y = \frac{x^2}{2}$, $\quad x + y - 3 = 0$;

b) $y = \frac{(x-1)^2}{2} + 1$, $\quad x - y = 0$;

c) $y = -2(x+3)^2 + 1$, $\quad 2x + y = 2$.

a) $y = 3 - x$, $3 - x = \frac{x^2}{2}$, azaz $x^2 + 2x - 6 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = -1 + \sqrt{7}$, $x_2 = -1 - \sqrt{7}$. Tehát az egyenes és a parabola közös pontjai: $M_1(-1 + \sqrt{7}; 4 - \sqrt{7})$, $\quad M_2(-1 - \sqrt{7}; 4 + \sqrt{7})$.

b) Mivel $y = x$, ezért $x = \frac{(x-1)^2}{2} + 1$, ahonnan $x^2 - 4x + 3 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, tehát a parabola és az egyenes közös pontjai: $M_1(3; 3)$, $M_2(1; 1)$.

c) $y = 2 - 2x$, tehát $2 - 2x = -2(x+3)^2 + 1$, ahonnan $2x^2 + 10x + 19 = 0$. A kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa $100 - 8 \cdot 19 < 0$, tehát az egyenletnek nincs valós megoldása, vagyis az egyenesnek és a parabolának nincs közös pontja.

2. K2 Számítsuk ki az $y = \frac{x^2}{4}$ parabolának azokat a pontjait, amelyek az $A(-1; 5)$ és $B(5; -1)$ pontoktól egyenlő távolságra vannak!

A keresett pontok az AB szakasz felezőmerőlegesének és a parabolának a metszéspontjai. Az AB szakasz F felezőpontja $F(2; 2)$. Az AB egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(1; -1)$. Ez a vektor a felezőmerőlegesnek egy normálvektora. Tehát a felezőmerőleges egyenlete. $x - y = 0$, azaz $y = x$. Ekkor $x = \frac{x^2}{4}$, azaz $x^2 - 4x = 0$. A kapott egyenlet megoldásai $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Tehát a parabolának az A és B pontoktól egyenlő távolságra levő pontjai $M_1(0; 0)$, $M_2(4; 4)$.

3. E1 Írjuk fel a parabola érintőjének egyenletét a megadott pontban!

a) $y = \frac{x^2}{4}$, $P(-2; 1)$, $\quad$ *b)* $y = -\frac{x^2}{2}$, $P(2; -2)$, $\quad$ *c)* $y = 2x^2$, $P(2; 8)$

a) A P ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete

$y - 1 = m(x + 2)$, $\quad$ azaz $\quad y = mx + 2m + 1$.

A parabola és az egyenes közös pontjainak x koordinátái az

$mx + 2m + 1 = \frac{x^2}{4}$, $\quad$ azaz $\quad x^2 - 4mx - 8m - 4 = 0$

másodfokú egyenlet megoldásai adják. Mivel az érintőnek csak egy közös pontja van a parabolával, ezért az egyenletnek csak egy megoldása lehet, vagyis a diszkriminánsa 0 kell, hogy legyen.

$D = 16m^2 + 32m + 16 = 0$, azaz $m^2 + 2m + 1 = 0$,

$(m+1)^2 = 0$, ahonnan $m = -1$.

Tehát az érintő egyenlete: $y = -x - 1$.

b) A P ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete

$y + 2 = m(x-2)$, vagyis $y = mx - 2m - 2$.

$mx - 2m - 2 = -\frac{x^2}{2}$, tehát $x^2 + 2mx - 4m - 4 = 0$.

A diszkriminánsnak 0-nak kell lennie, tehát

$D = 4m^2 + 16m + 16 = 0$, azaz $m^2 + 4m + 4 = 0$,

$(m+2)^2 = 0$, ahonnan $m = -2$.

Az érintő egyenlete: $y = -2x + 2$.

c) A P ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete

$y - 8 = m(x-2)$, vagyis $y = mx - 2m + 8$.

$mx - 2m + 8 = 2x^2$, tehát $2x^2 - mx + 2m - 8 = 0$.

A diszkriminánsnak 0-nak kell lennie:

$D = m^2 - 8(2m-8) = 0$, azaz $m^2 - 16m + 64 = 0$,

$(m-8)^2 = 0$, ahonnan $m = 8$.

Az érintő egyenlete: $y = 8x - 8$.

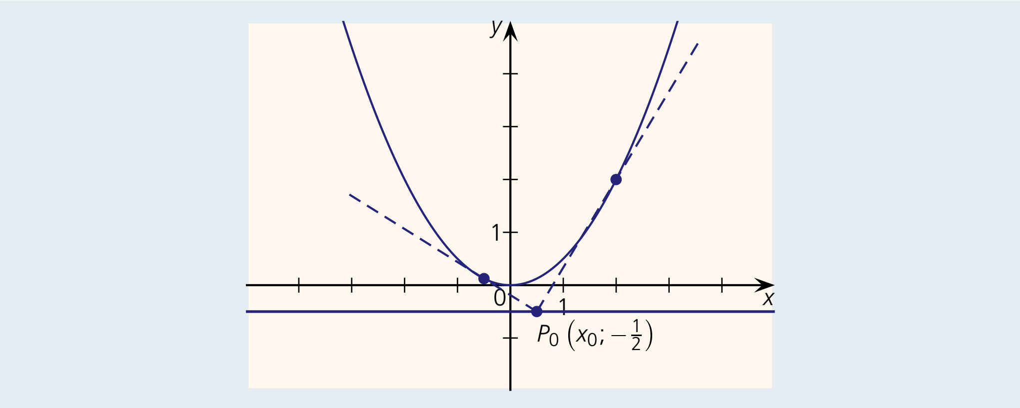
4. E1 Adott az $y = \frac{x^2}{2}$ parabola. Bizonyítsuk be, hogy a vezéregyenes bármely pontjából a parabolához húzott érintők merőlegesek egymásra!

A vezéregyenes egyenlete $y = -\frac{1}{2}$. Legyen $P_0\left(x_0; -\frac{1}{2}\right)$ a vezéregyenes egy tetszőleges pontja, és legyen m egy érintő meredeksége.

A P_0 ponton átmenő, m meredekségű egyenesek egyenlete:

$y + \frac{1}{2} = m(x - x_0)$, azaz $y = mx - mx_0 - \frac{1}{2}$.

Ekkor $mx - mx_0 - \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2}$, azaz $x^2 - 2mx + 2mx_0 + 1 = 0$.



Mivel az érintőnek egy közös pontja van a parabolával, ezért ennek az egyenletnek egy megoldása van, vagyis az egyenlet diszkriminánsa 0.

$D = 4m^2 - 4(2mx_0 + 1) = 0$, vagyis $m^2 - 2mx_0 - 1 = 0$,

$m_{1,2} = \frac{2x_0 \pm \sqrt{4x_0^2 + 4}}{2} = \frac{2x_0 \pm 2\sqrt{x_0^2+1}}{2}$, $m_1 = x_0 + \sqrt{x_0^2+1}$, $m_2 = x_0 - \sqrt{x_0^2+1}$.

Ezzel megkaptuk a P_0 ponton átmenő két érintő meredekségét. E két meredekség akkor merőleges egymásra, ha szorzatuk -1.

$m_1 \cdot m_2 = \left(x_0 + \sqrt{x_0^2+1}\right)\left(x_0 - \sqrt{x_0^2+1}\right) = x_0^2 - (x_0^2+1) = x_0^2 - x_0^2 - 1 = -1$.

Ezzel beláttuk, hogy a vezéregyenes bármely pontjából a parabolához húzott érintők merőlegesek egymásra.

5. E2 Egy parabola két pontja: A és B. Ezek merőleges vetülete a vezéregyenesen: A^* és B^*. Igazolja, hogy a fókuszponton átmenő, AB-re merőleges egyenes felezi az A^*B^* szakaszt!

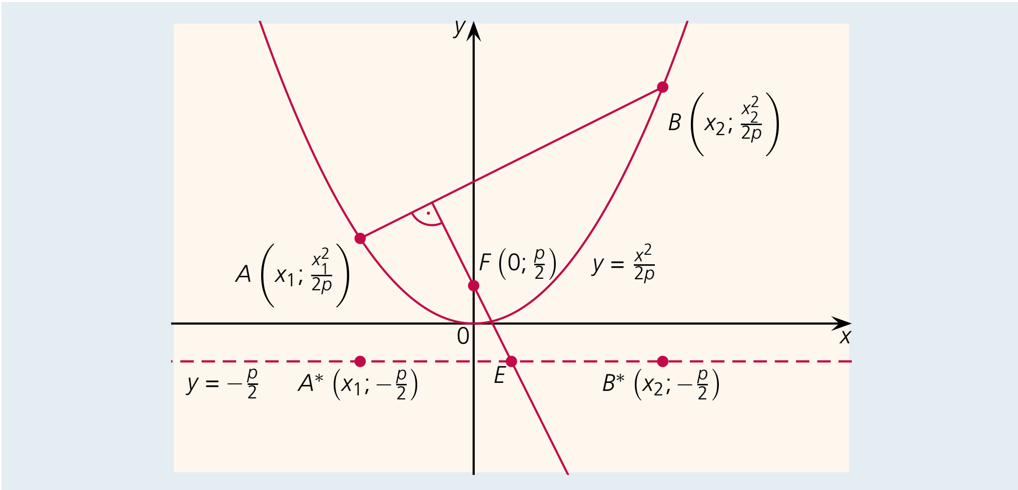
Legyen a parabola két pontja

$$A\left(x_1; \frac{x_1^2}{2p}\right), \quad B\left(x_2; \frac{x_2^2}{2p}\right), \qquad \text{ekkor} \qquad A^*\left(x_1; -\frac{p}{2}\right), \quad B^*\left(x_2; -\frac{p}{2}\right).$$

Az AB egyenes egy irányvektora

$$\mathbf{v}_{AB}\left(x_2 - x_1; \frac{x_2^2 - x_1^2}{2p}\right) \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{v}_{AB}\left(1; \frac{x_2 + x_1}{2p}\right).$$

Ez a vektor a felírandó egyenesnek egy normálvektora. Tehát az F ponton átmenő, AB-re merőleges egyenes egyenlete:



$$x + \frac{x_1 + x_2}{2p} \cdot y = \frac{x_1 + x_2}{2p} \cdot \frac{p}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad x + \frac{x_1 + x_2}{2p} \cdot y = \frac{x_1 + x_2}{4}.$$

Ez az egyenes ott metszi a vezéregyenest, ahol $y = -\frac{p}{2}$. Ezek szerint

$$x + \frac{x_1 + x_2}{2p} \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{x_1 + x_2}{4}, \qquad \text{vagyis} \qquad x - \frac{x_1 + x_2}{4} = \frac{x_1 + x_2}{4},$$

ahonnan

$$x = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{4} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Tehát a vezéregyenes és az AB-re merőleges, F-en átmenő egyenes E metszéspontjának koordinátái: $E\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; -\frac{p}{2}\right)$. Ez a pont pedig éppen az A^*B^* szakasz felezőpontja, amit bizonyítanunk kellett.

VI. Valószínűség-számítás

1. Események

1. K2 Legyen az A esemény, hogy dobókockával páros számot, a B esemény pedig, hogy hárommal osztható számot dobunk.
Milyen dobást jelentenek a következő események?
a) $A+B$; *b)* AB; *c)* $A-B$; *d)* $B-A$; *e)* $\overline{A}$.

a) $A+B=\{2;3;4;6\}$.
b) $AB=\{6\}$.
c) $A-B=\{2;4\}$.
d) $B-A=\{3\}$.
e) $\overline{A}=\{1;3;5\}$.

2. K2 Jelentse A azt az eseményt, hogy dobókockával 6-nál kisebb számot, a B eseményt pedig, hogy prímszámot dobunk.
Milyen dobást jelentenek a következő események?
a) $A+B$; *b)* AB; *c)* $A-B$; *d)* $B-A$; *e)* $\overline{A}$.

a) $A+B=\{1;2;3;4;5\}$.
b) $AB=\{2;3;5\}$.
c) $A-B=\{1;4\}$.
d) $B-A=\{\ \}$.
e) $\overline{A}=\{6\}$.

3. K2 Egy szabályos dobókockával dobunk. Állapítsuk meg, hogy a felsorolt események közül melyek
a) elemi események;
b) összetett események;
c) melyek egyenlők;
d) melyek egymást kizárók?

A: a dobott szám öttel osztható.
B: a dobott szám négynél nagyobb.
C: a dobott szám hatnál kisebb.
D: a dobott szám ötnél nagyobb.
E: a dobott számnak négy osztója van.
F: a dobott szám kettőnél nagyobb, de ötnél nem.

A szöveggel megfogalmazott eseményeket megadhatjuk felsorolással is:
$A=\{5\}$, $B=\{5;6\}$, $C=\{1;2;3;4;5\}$, $D=\{6\}$, $E=\{6\}$, $F=\{3;4;5\}$.
Ezek alapján könnyen tudunk válaszolni a kérdésekre.
a) A, D, E.
b) B, C, F.
c) D és E.
d) Pl.: C és D.

4. K2 A számegyenesen választunk egy x valós számot. Jelentse A azt az eseményt, hogy $3 < x \le 7$, B pedig azt, hogy $5 < x < 9$. Mely intervallumból választhatjuk az x-et, hogy a következő események teljesüljenek?
a) $A + B$; *b)* AB; *c)* $A - B$; *d)* $B - A$; *e)* $\overline{A}$.

a) $x \in]3; 9[$.
b) $x \in]5; 7]$.
c) $x \in]3; 5]$.
d) $x \in]7; 9[$.
e) $x \in]-\infty; 3] \cup]7; \infty[$.

5. E1 A műveleti szabályok segítségével mutassuk meg, hogy $AB + A\overline{B} = A$!

A következő átalakítások elvégezhetők, amivel igazoljuk az állítást:
$AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = AI = A$.

6. E1 Mutassuk meg, hogy két esemény összege mindig felírható
a) két;
b) három
egymást páronként kizáró esemény összegeként!

a) Legyen a két esemény A és B. Ekkor összegük így alakítható át:
$A + B = I(A + B) = (A + \overline{A})(A + B) = A + \overline{A}B$.
Tehát az összeg valóban felbontható két, egymást kizáró esemény összegére.

b) Alkalmazzuk elsőként az előzőekben kapott eredményt, majd folytatjuk az átalakításokat:
$A + B = A + \overline{A}B = IA + \overline{A}B = (B + \overline{B})A + \overline{A}B = AB + A\overline{B} + \overline{A}B$.
Tehát az összeg valóban felbontható három, egymást páronként kizáró esemény összegére.

7. E1 Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést: $(A + B)(\overline{A} + B)(A + \overline{B})$!

Elvégezhetjük a következő átalakításokat:

$(A + B)(\overline{A} + B)(A + \overline{B}) = (A\overline{A} + B)(A + \overline{B}) = (0 + B)(A + \overline{B}) = B(A + \overline{B}) =$
$= AB + \overline{B}B = AB + 0 = AB$.

2. Események valószínűsége

1. K1 Egy dobozban nyolc, tapintásra egyforma dobókocka van: négy piros, három fehér és egy zöld. Bekötött szemmel kiveszünk három darabot. Milyen elemi eseményei vannak ennek a kísérletnek?

Elemi események: három pirosat,
két pirosat és egy fehéret,
két pirosat és egy zöldet,
egy pirosat és két fehéret,
egy pirosat, egy fehéret és egy zöldet,
három fehéret,
két fehéret és egy zöldet húzunk.

2. K2 Egy gimnáziumi évfolyamon a matematikából és a fizikából kapott ötös osztályzatok kapcsolatát vizsgálják. Tetszőlegesen kiválasztott tanulókra legyen A esemény, hogy jeles osztályzata van matematikából, legyen B esemény, hogy jeles osztályzata van fizikából. Tudjuk, hogy $p(B) = 0{,}15$, $p(AB) = 0{,}15$ és $p(A+B) = 0{,}8$.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott tanulónak ötöse van matematikából?

Mivel $p(B) = 0{,}15$ és $p(AB) = 0{,}15$, ezért egy tetszőlegesen kiválasztott tanulónak 0 valószínűséggel lesz jeles osztályzata fizikából úgy, hogy matematikából nincs jelese. Ezek alapján: $p(A+B) = p(A) = 0{,}8$.
Vagyis 0,8 a valószínűsége annak, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott tanulónak ötöse van matematikából.

3. K2 A hét tanulóból álló fakultációs csoportban öt lány van. Az egyik órán a tanár a két felelőt véletlenszerűen választotta ki. Melyik az esélyesebb, hogy két lány fog felelni, vagy pedig egy fiú és egy lány?

Bármelyik két tanuló kiválasztásának ugyanannyi az esélye. Mivel tízféleképpen tudunk lánypárt összeállítani, és tízféleképpen tudunk vegyes párt összeállítani, ezért egyenlő az esély.

4. K2 Kilenc, alakra egyforma sütemény van a tálcán, amelyből hat darabba mazsolás túrót, háromba pedig mazsola nélküli túrót töltöttek. Két süteményt véletlenszerűen megeszünk. Melyik az esélyesebb, hogy két mazsolásat választunk, vagy pedig két különbözőt?

Bármelyik két sütemény kiválasztásának ugyanannyi az esélye. Mivel tizenötféleképpen tudunk mazsolás párt választani, és tizennyolcféleképpen tudunk vegyes párt választani, ezért a két különböző választásának az esélye nagyobb.

3. Klasszikus valószínűségi mező

1. K2 Egy 13 tagú csoport 3 tagja lány. A neveket felírják egy-egy cédulára, majd véletlenszerűen húznak két cédulát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ilyen módon két lányt sorsolnak ki?

Az összes eset száma: $\binom{13}{2} = 78$.

A kedvező esetek száma: $\binom{3}{2} = 3$.

A keresett valószínűség: $p(\text{két lány}) = \frac{3}{78} = \frac{1}{26}$.

2. K2 Egy minden oldalán befestett kockát 125 azonos méretű kis kockára fűrészelünk szét. Az így kapott kis kockákból véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kis kocka
a) egyetlen lapja sem; *b)* egy lapja; *c)* két lapja; *d)* három lapja; *e)* négy lapja
festett?

A kockát 125 azonos méretű kis kockára vágtuk, vagyis a kocka $5 \cdot 5 \cdot 5$ kis kockából áll. Ezért az összes esetek száma 125 lesz. Minden feladatnál meghatározzuk a kedvező esetek számát, így a kérdéses valószínűséget is meg tudjuk mondani.

a) Kedvező esetek száma: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

A keresett valószínűség: $p(\text{egyetlen lap sem festett}) = \frac{27}{125}$.

b) Kedvező esetek száma: $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$.

A keresett valószínűség: $p(\text{egy lap festett}) = \frac{54}{125}$.

c) Kedvező esetek száma: $12 \cdot 3 = 36$.

A keresett valószínűség: $p(\text{kettő lap festett}) = \frac{36}{125}$.

d) Kedvező esetek száma: 8.

A keresett valószínűség: $p(\text{három lap festett}) = \frac{8}{125}$.

e) Kedvező esetek száma: 0.
A keresett valószínűség: $p(\text{négy lap festett}) = 0$.

3. K2 Dobjunk fel két szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege
a) 2; *b)* 3; *c)* 5?

Az egyik kockával is hatfélét és a másik kockával is hatfélét dobhatunk, így az összes esetek száma $6 \cdot 6 = 36$.
a) Kedvező esetek száma: 1. (Az összeg: $2 = 1 + 1$)

A keresett valószínűség: $p(\text{az összeg } 2) = \frac{1}{36}$.

b) Kedvező esetek száma: 2. (Az összeg: $3 = 1 + 2 = 2 + 1$)

A keresett valószínűség: $p(\text{az összeg } 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

c) Kedvező esetek száma: 4. (Az összeg: $5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1$)

A keresett valószínűség: $p(\text{az összeg } 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

4. K2 Dobjunk fel három szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege
a) 3; *b)* 11; *c)* 20?

Mindhárom kockával hatfélét dobhatunk, így az összes esetek száma: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.
a) Kedvező esetek száma: 1. (Az összeg: $3 = 1 + 1 + 1$)

A keresett valószínűség: $p(\text{az összeg } 3) = \frac{1}{216}$.

b) Kedvező esetek száma: 27. ($1 + 4 + 6$ hatféle sorrendben; $1 + 5 + 5$ háromféle sorrendben; $2 + 3 + 6$ hatféle sorrendben; $2 + 4 + 5$ hatféle sorrendben; $3 + 3 + 5$ háromféle sorrendben; $3 + 4 + 4$ háromféle sorrendben)

A keresett valószínűség: $p(\text{az összeg } 11) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

c) Kedvező esetek száma: 0. (A dobott számok összege legfeljebb 18.)
A keresett valószínűség: $p(\text{az összeg } 20) = 0$.

5. K2 A 32 lapos magyar kártyából kiválogatjuk a 7-es, 8-as és 9-es lapokat (mindegyikből négy van). Ezek közül véletlenszerűen háromszor húzunk egy-egy lapot. A húzás után mindig visszakeverjük a húzott lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a húzás sorrendjében leírt számjegyek által alkotott háromjegyű szám osztható
a) hárommal; *b)* kilenccel; *c)* hattal?

Az összes esetek száma: $12^3 = 1728$.
a) A számjegyek összegének oszthatónak kell lenni hárommal. A megfelelő számjegyek:
1. eset: 7, 8, 9.
Bármelyik hetest, bármelyik nyolcast, bármelyik kilencest húzhatjuk, és ezeknek hatféle sorrendje lehet. Vagyis a kedvező esetek száma: $6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 384$.

Vagyis: $p(7; 8; 9) = \frac{384}{1728} = \frac{2}{9}$.

2. eset: 7, 7, 7.
Bármelyik hetest négy közül húzhatjuk, ezért a kedvező esetek száma: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Vagyis: $p(7; 7; 7) = \frac{64}{1728} = \frac{1}{27}$.

3. eset: 8, 8, 8.

Az előzőhöz hasonlóan: $p(8; 8; 8) = \frac{64}{1728} = \frac{1}{27}$.

4. eset: 9, 9, 9.

Az előzőhöz hasonlóan: $p(9; 9; 9) = \frac{64}{1728} = \frac{1}{27}$.

A négy esetben kapott valószínűségek összege adja a keresett valószínűséget:

$p(\text{hárommal osztható}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

b) A számjegyek összegének oszthatónak kell lenni kilenccel.
A megfelelő számjegyek: 9, 9, 9.
Bármelyik kilencest négy közül húzhatjuk, ezért a kedvező esetek száma: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Vagyis a keresett valószínűség: $p(\text{kilenccel osztható}) = \frac{64}{1728} = \frac{1}{27}$.

c) A számjegyek összegének oszthatónak kell lenni hárommal és az utolsó jegynek párosnak kell lenni. A megfelelő számjegyek:
1. eset: 7, 8, 9.
Bármelyik hetest, bármelyik nyolcast, bármelyik kilencest húzhatjuk, és a hetesnek és a kilencesnek két sorrendje lehet (a nyolcas az utolsó helyen áll). Vagyis a kedvező esetek száma: $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 128$.

Vagyis: $p(7; 8; 9) = \frac{128}{1728} = \frac{2}{27}$.

2. eset: 8, 8, 8.
Bármelyik nyolcast négy közül húzhatjuk, ezért a kedvező esetek száma: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Vagyis: $p(8; 8; 8) = \frac{64}{1728} = \frac{1}{27}$.

A két esetben kapott valószínűségek összege adja a keresett valószínűséget:

$p(\text{hattal osztható}) = \frac{2}{27} + \frac{1}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

6. K2 Az ötös lottón az 1, 2, …, 90 számok közül ötöt húznak ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy szelvény kitöltése esetén nem lesz találatunk?

Az összes esetek száma: $\binom{90}{5}$. Az hogy a kihúzott öt szám közül egyik sem szerepel a szelvényünkön $\binom{85}{5}$-féleképpen következhet be.

A keresett valószínűség: $p(\text{nincs találat}) = \frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}746$.

7. K2 A 32 lapos magyar kártyát egy kártyajátékhoz a négy játékos között egyenlően szétosztunk. Mekkora valószínűséggel kerül a négy király egy játékoshoz?

A lehetséges esetek száma: $\binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8}$.

A kedvező esetek száma: $4 \cdot \binom{28}{4} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8}$.

A keresett valószínűség: $p(\text{négy király}) = \frac{4 \cdot \binom{28}{4} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8}}{\binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8}} = \frac{4 \cdot \binom{28}{4}}{\binom{32}{8}} \approx 0{,}0078$.

8. K2 Egy pénzérmét háromszor egymás után feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az érmén
a) sorrendben fej, írás, írás lesz;
b) pontosan kétszer lesz írás?

a) Az összes esetek száma: 8.
A kedvező esetek száma: 1.
A keresett valószínűség: $p(F, I, I) = \frac{1}{8}$.

b) Az összes esetek száma: 8.
A kedvező esetek száma: 3 (1. I, I, F; 2. I, F, I; 3. F, I, I).
A keresett valószínűség: $p(\text{két írás}) = \frac{3}{8}$.

4. Binomiális eloszlás

1. K2 Péter és László sokat asztali fociznak (csocsóznak) egymással. A tapasztalat szerint Péter 0,7, László 0,3 valószínűséggel nyer meg egy meccset. Egy játéksorozatban az a győztes, aki többször nyer.
a) Mekkora László nyerési esélye, ha három meccset játszanak?
b) Mekkora Péter nyerési esélye, ha öt meccset játszanak?

a) László akkor nyeri meg a játéksorozatot, ha a három meccsből hármat vagy kettőt megnyer. Használjuk a binomiális eloszlásra tanult összefüggést:

$$p(\text{László nyer}) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^0 + \binom{3}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^1 = 0{,}216.$$

Vagyis László nyerési esélye 0,216.

b) Péter akkor nyeri meg a játéksorozatot, ha az öt meccsből ötöt, négyet vagy hármat megnyer. Használjuk a binomiális eloszlásra tanult összefüggést:

$$p(\text{Péter nyer}) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^0 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3^1 + \binom{5}{3} \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}83692.$$

Vagyis Péter nyerési esélye kb. 0,84.

2. K2 A tapasztalatok szerint egy középiskolában a tanulók 12%-a nem visz magával számológépet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy 30 véletlenszerűen kiválasztott tanuló közül legalább háromnak nincs számológépe?

Meghatározzuk, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy mindenkinek van, egy tanulónak nincs, kettő tanulónak nincs számológépe. Használjuk a binomiális eloszlásra tanult összefüggést:

$$p(\text{mindenkinek van}) = \binom{30}{0} \cdot 0{,}12^0 \cdot 0{,}88^{30},$$

$$p(\text{egy tanulónak nincs}) = \binom{30}{1} \cdot 0{,}12^1 \cdot 0{,}88^{29},$$

$$p(\text{kettő tanukónak nincs}) = \binom{30}{2} \cdot 0{,}12^2 \cdot 0{,}88^{28}.$$

A keresett valószínűség: $p(\text{legalább háromnak nincs}) =$

$$= 1 - \binom{30}{0} \cdot 0{,}12^0 \cdot 0{,}88^{30} - \binom{30}{1} \cdot 0{,}12^1 \cdot 0{,}88^{29} - \binom{30}{2} \cdot 0{,}12^2 \cdot 0{,}88^{28} \approx 0{,}7153.$$

Vagyis kb. 0,7153 a valószínűsége annak, hogy 30 véletlenszerűen kiválasztott tanuló közül legalább háromnak nincs számológépe.

3. K2 Egy feladatlapon 12 eldöntendő kérdés szerepel. Ha valaki legalább hatra jól válaszol, akkor már nem elégtelen a dolgozata. Mekkora valószínűséggel kap elégtelennél jobb osztályzatot az, aki véletlenszerűen töltötte ki a válaszokat?

Használjuk a binomiális eloszlásra tanult összefüggést:

$$p(\text{elégtelennél jobb}) = \binom{12}{6}\cdot 0{,}5^6\cdot 0{,}5^6 + \binom{12}{7}\cdot 0{,}5^7\cdot 0{,}5^5 + \ldots + \binom{12}{12}\cdot 0{,}5^{12}\cdot 0{,}5^0 =$$

$$= \left[\binom{12}{6} + \binom{12}{7} + \ldots + \binom{12}{12}\right]\cdot 0{,}5^{12} \approx 0{,}61.$$

Vagyis kb. 0,61 valószínűséggel kap elégtelennél jobb osztályzatot az, aki véletlenszerűen tölti ki a kérdéses feladatlapot.

4. K2 Egy kockával háromszor dobunk egymás után. A kísérlet kimenetele a hatos dobások számával egyenlő. Adjuk meg az egyes kimenetelekhez a valószínűségeket!

A hatos dobás valószínűsége: $p(A) = \frac{1}{6}$, a nem hatos dobás valószínűsége: $p(\overline{A}) = \frac{5}{6}$. Használjuk a binomiális eloszlásra tanult összefüggést!

$$p(0\text{ db hatos}) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}.$$

$$p(1\text{ db hatos}) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}.$$

$$p(2\text{ db hatos}) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}.$$

$$p(3\text{ db hatos}) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}.$$

5. K2 Legyen A esemény, hogy egy szabályos pénzérmét négyszer egymásután feldobva háromszor kapunk írást.
Legyen B esemény, hogy egy szabályos pénzérmét nyolcszor egymásután feldobva hatszor kapunk írást.
Legyen C esemény, hogy egy szabályos pénzérmét nyolcszor egymásután feldobva ötször kapunk írást.
Állítsuk növekedő sorrendbe az események valószínűségét!

Használjuk a binomiális eloszlásra tanult összefüggést!

$$p(A) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}.$$

$$p(B) = \binom{8}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{64}.$$

$$p(C) = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}.$$

Hozzuk közös számlálóra a törteket: $\frac{7}{28}, \frac{7}{64}, \frac{7}{32}$.

Vagyis $p(B) < p(C) < p(A)$.

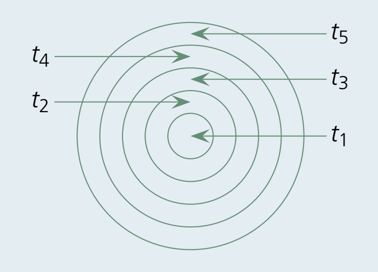
5. Geometriai valószínűség

1. K1 Egy másfél kilométer hosszú vízvezeték halad a 15 méter széles aszfaltozott út mellett, de a vezeték nyomvonala 11-szer keresztezi merőlegesen az utat. Csőtörés esetén mekkora a valószínűsége annak, hogy aszfaltot is kell bontani? (Feltételezésünk szerint a cső minden pontján ugyanolyan valószínűséggel lehet csőtörés.)

Az esemény valószínűségére használjuk a $p(A) = \frac{g}{G}$ képletet, ahol G a vízvezeték hosszát, g pedig a vízvezetéknek az aszfalt alatti hosszát jelenti.
A szöveg szerint: G = 1500 méter, g = 165 méter.
A keresett valószínűség: $p(A) = \frac{165}{1500} = 0{,}11$.
Tehát csőtörés esetén 0,11 a valószínűsége annak, hogy aszfaltot is kell bontani.

2. K1 Egy céltábla koncentrikus körökből áll, ezek sugara 2, 4, 6, 8 és 10 cm. Minden lövéssel eltaláljuk a céltáblát, és minden pontját azonos valószínűséggel. Adjuk meg az öt tartomány eltalálásának valószínűségét!

Készítsünk a céltábláról egy vázlatrajzot!



Kiszámoljuk az öt tartomány területét (mértékegységként cm²-t használunk). Egy kör és négy körgyűrű területét kell meghatároznunk.

$t_1 = 2^2 \cdot \pi = 4\pi$,

$t_2 = 4^2 \cdot \pi - 2^2 \cdot \pi = 12\pi$,

$t_3 = 6^2 \cdot \pi - 4^2 \cdot \pi = 20\pi$,

$t_4 = 8^2 \cdot \pi - 6^2 \cdot \pi = 28\pi$,

$t_5 = 10^2 \cdot \pi - 8^2 \cdot \pi = 36\pi$.

Az egész céltábla területe:
$T = 10^2 \cdot \pi = 100\pi$.

Az esemény valószínűségére használjuk a $p(A_i) = \frac{t_i}{T}$ képletet (i = 1; 2; 3; 4; 5), ahol T a céltábla területét, t_i pedig az egyes tartományok területét jelenti:

$p(A_1) = \frac{4\pi}{100\pi} = \frac{1}{25}$,

$p(A_2) = \frac{12\pi}{100\pi} = \frac{3}{25}$,

$p(A_3) = \frac{20\pi}{100\pi} = \frac{1}{5}$,

$p(A_4) = \frac{28\pi}{100\pi} = \frac{7}{25}$,

$p(A_5) = \frac{36\pi}{100\pi} = \frac{9}{25}$.

3. K1 A hírekben ezt a mondatot halljuk: A Budapest – Miskolc vasútvonalon műszaki hiba miatt megállt a gyorsvonat. Mekkora valószínűséggel érkezett meg késés nélkül ismerősünk Budapestről Hatvanba? (A Budapest – Miskolc távolságot vegyük 200 km-nek, a Budapest – Hatvan távolságot pedig 60 km-nek.)

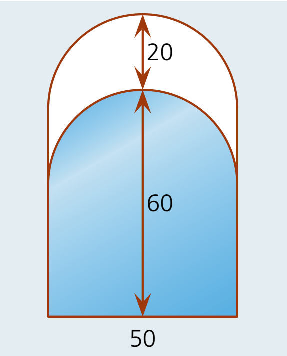
Ha a műszaki hiba a Hatvan – Miskolc szakaszon történt, akkor az illető késés nélkül érkezhetett Hatvanba.
Mivel egyéb értesülésünk nincs, ezért azt feltételezzük, hogy a pálya bármelyik pontján ugyanakkora eséllyel lehet a műszaki hiba.
Az esemény valószínűségére használjuk a $p(A)=\frac{h}{H}$ képletet, ahol H a teljes hosszt, h pedig a Budapest – Hatvan távolságot jelenti:
$p(A)=\frac{60}{200}=0{,}3,$
Vagyis 0,3 valószínűséggel érkezett meg késés nélkül az illető Budapestről Hatvanba.

4. K2 Az ábrán látható táblára rászáll egy légy. Mekkora az esélye annak, hogy piros részre száll? (A táblán látható szürke vízszintes vonalat segítségnek rajzoltuk be!)

A tábla területét vegyük 1-nek. Ekkor a piros rész területe $\frac{3}{8}$.

A keresett valószínűség: $\frac{3}{8}$.

5. E1 Az ábrán látható ablakot 20 cm-rel lejjebb húztuk. Mekkora esélye lesz annak a szúnyognak, amelyik át akar repülni az ablakon? (Az ablak magassága 80 cm, a teteje félkör, alatta téglalap található.)



Az ablaktáblából lent nem látunk egy 20 cm magas, 50 cm széles téglalapot, amelynek a területe 1000 cm². Ezért a fenti nyílás is ekkora. Az ablak területe cm²-ben:

$T=50\cdot 55+\frac{25^2\cdot\pi}{2}\approx 3731{,}75.$

A keresett valószínűség: $p(A)=\frac{1000}{3731{,}75}\approx 0{,}268.$

0,268 eséllyel tud átrepülni a szúnyog az ablakon.