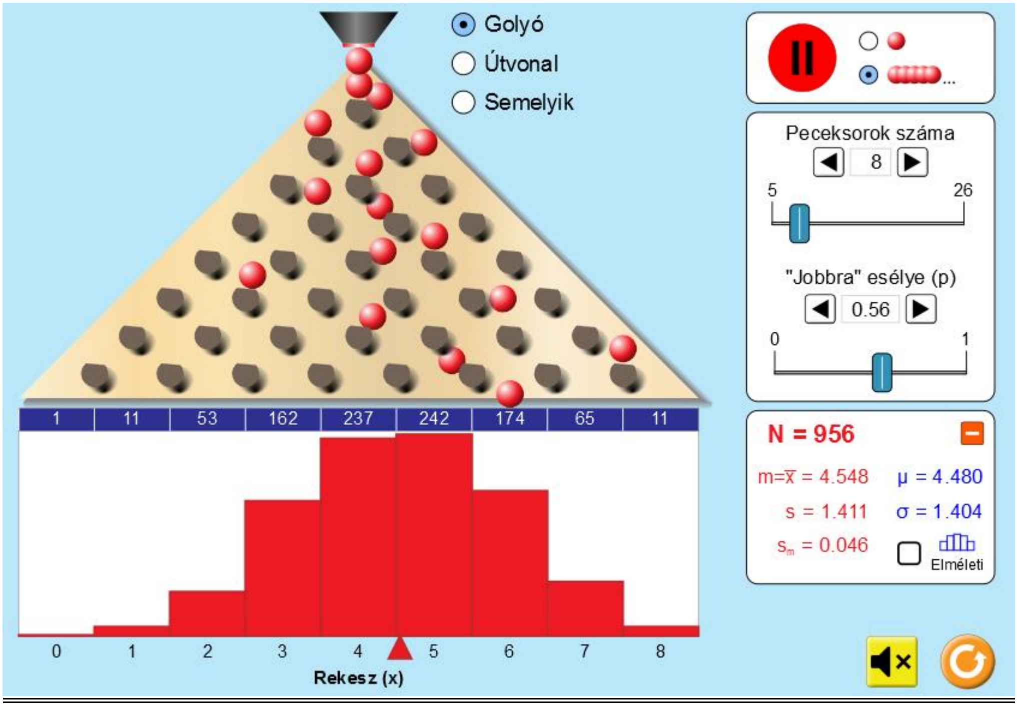
Valószínűségszámítási feladatok középszinten



RÉSZLETES MEGOLDÁSOKKAL

Klement András

2015-2016

Utolsó módosítás: 2016. december 20.

Tartalomjegyzék

FELADATOK

I. Műveletek eseményekkel

Adjuk meg az alábbi eseményeket a kísérletekhez tartozó klasszikus valószínűségi mező elemi eseményeinek segítségével! Ahol az eseménytér számossága 10-nél kisebb, adjuk meg az események összegét, szorzatát, komplementerét, és ellenőrizzük a De Morgan-azonosságokat!

1) Egy pénzérme, két dobás:

A: Először fejet, másodszor írást dobok

B: Különbözőket dobok

2) Egy pénzérme, 3 dobás:

A: Harmadszorra dobok először fejet

B: Háromból legalább egy fejet dobok

3) Két pénzérme, egy dobás:

A: Dobok fejet

B: Dobok írást

4) Két pénzérme, 3 dobás:

A: Harmadszorra dobok először azonosakat

B: Mindháromszor azonosakat dobok

5) Egy szabályos kocka, egy dobás:

A: Prímszámot dobok

B: Legalább 5-öst dobok

6) Egy szabályos kocka, 3 dobás:

A: Harmadszorra dobok először hatost

B: Háromból legalább egyszer hatost dobok

7) Két szabályos kocka, egy dobás:

A: A dobott számok összege 10

B: A dobott számok azonosak

8) Két szabályos kocka, 3 dobás:

A: Harmadszorra dobok először dupla hatost

B: Háromból legalább egyszer dupla hatost dobok

II. Események valószínűsége

Az 1) és 2) feladatokat adjuk meg az események összegének és szorzatának valószínűségét is!

1) Egy családban egymás után 2 gyermek születik

a) Független események:

A: Az első gyermek lány

B: A második gyermek lány

b) Nem független események:

A: Lesz lány

B: 1 fiú és 1 lány lesz

2) Kockadobás egy kockával egymás után kétszer

a) Független események:

A: Az első dobás hatos lesz

B: A második dobás hatos lesz

b) Nem független események:

A: Dobok hatost

B: Két hatost dobok

3) Mennyi a valószínűsége, hogy egy szabályos dobókockával egyet dobva

a) a dobott szám hatos lesz,

b) a dobott szám páros lesz,

c) a dobott szám legalább 5 lesz,

d) a dobott szám 3-mal osztható lesz,

e) a dobott szám prím lesz?

4) Egy **gyufásdoboz** legnagyobb lapjaira írtuk az egyest és a hatost, a középsőkre a kettest és az ötöst és a legkisebbekre a hármast és a négyest. 500 dobás alapján **az egyes és a hatos relatív gyakorisága 0,3, a kettesé és az ötösé 0,15, a hármasé és a négyesé 0,05**.

Mennyi a valószínűsége, hogy a gyufásdobozzal egyet dobva

a) a dobott szám hatos lesz,

b) a dobott szám páros lesz,

c) a dobott szám legalább 5 lesz,

d) a dobott szám 3-mal osztható lesz,

e) a dobott szám prím lesz?

5) Mennyi a valószínűsége, hogy egy szabályos dobókockával kétszer dobva a dobott számok

a) szorzata prímszám lesz,

b) összege nagyobb lesz 10-nél,

c) különbözőek lesznek,

d) összege és szorzata is páros lesz,

e) különbsége 4,

f) hányadosa 3?

6) Egy **gyufásdoboz** legnagyobb lapjaira írtuk az egyest és a hatost, a középsőkre a kettest és az ötöst és a legkisebbekre a hármast és a négyest. 500 dobás alapján **az egyes és a hatos relatív gyakorisága 0,3, a kettesé és az ötösé 0,15, a hármasé és a négyesé 0,05**.

Mennyi a valószínűsége, hogy a gyufásdobozzal kétszer dobva a dobott számok

a) szorzata prímszám lesz,

b) összege nagyobb lesz 10-nél,

c) különbözőek lesznek,

d) összege és szorzata is páros lesz,

e) különbsége 4,

f) hányadosa 3?

7) A **virágüzletben** 2 fajta virág van: rózsa és szegfű. Határozzuk meg a 2 fajta virág harmadosztályú ismétléses kombinációit, ill. variációit!

Mennyi a valószínűsége, hogy egy 3 szál virágból álló véletlenszerűen kiválasztott csokorban

a) csak rózsa lesz,

b) legalább 2 szál rózsa lesz,

c) kétfajta virág lesz?

8) A **cukrászdában** 3 fajta fagylalt van: csoki, vanília és eper. Határozzuk meg a 3 fajta fagylalt másodosztályú ismétléses kombinációit, ill. variációit!

Mennyi a valószínűsége, hogy egy 2 gombócos véletlenszerűen kiválasztott fagylaltban

a) csak csoki lesz,

b) csoki és eper lesz,

c) csoki lesz a tölcsérben alul?

9) Mennyi a valószínűsége, hogy egy **13+1 találatos totószelvényt** véletlenszerűen kitöltve

a) telitalálatunk lesz,

b) az első 10 mérkőzést eltaláljuk, a többit nem,

c) 9 mérkőzést találunk el az első 10-ből?

10) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy családban **már két fiú van, akkor a születendő harmadik gyerek lány** lesz?

11) Mennyi a valószínűsége, hogy egy négygyermekes családban **először 2 fiú, majd 2 lány születik**?

12) Mennyi a valószínűsége, hogy egy négygyermekes családban az előző után **mindig ellentétes nemű** gyermek születik?

13) Mennyi a valószínűsége, hogy egy négygyermekes családban **egynél több lány** van?

14) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy **kétgyerekes** családról **tudjuk, hogy van fiú, akkor lány is van** a 2 gyermek között?

15) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy **háromgyerekes** családról **tudjuk, hogy van fiú, akkor lány is van** a 3 gyermek között?

16) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy **háromgyerekes** családról **tudjuk, hogy van két fiú, akkor lány is van** a 3 gyermek között?

17) Fogalmazzuk meg a 10) – 16) feladatokat **pénzérmékkel**, és oldjuk meg azokat is!

III. Bejárási feladatok, a binomiális tétel

1) a) Hányféleképpen tudjuk kiolvasni az alábbi szóháromszögből a **KOMBINATORIKA** szót?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a piros (felső) A betűnél fejezzük be a kiolvasást, azaz **végig a piros téglalapban haladunk** a kiolvasás során?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a kék A betűnél fejezzük be a kiolvasást, azaz **végig a kéktéglalapban haladunk** a kiolvasás során?

d) Adjuk meg az összes téglalapra annak valószínűségét, hogy végig abban haladunk a véletlenszerű kiolvasás során!

e) Adjuk meg az összes **T betűre** annak valószínűségét, hogy áthaladunk rajta a véletlenszerű kiolvasás során!

f) Adjuk meg az összes T betűre annak valószínűségét, hogy áthaladunk rajta a véletlenszerű kiolvasás során azzal a feltétellel, hogy végig

α) a piros

β) a kék téglalapban kell haladnunk!

K	O	M	B	I	N	A	T	O	R	I	K	A
O	M	B	I	N	A	T	O	R	I	K	A	
M	B	I	N	A	T	O	R	I	K	A		
B	I	N	A	T	O	R	I	K	A			
I	N	A	T	O	R	I	K	A				
N	A	T	O	R	I	K	A					
A	T	O	R	I	K	A						
T	O	R	I	K	A							
O	R	I	K	A								
R	I	K	A									
I	K	A										
K	A											
A												

2) A 2. mellékletben szerepel egy 20 lépéses szóháromszög értéktáblázata.

Határozd meg a segítségével C_{17}^{8}, C_{18}^{12}, C_{18}^{16}, C_{19}^{11}, C_{20}^{7} értékét:

Készítsük el **Excellel** egy 25 karakteres szó szóháromszögének értéktáblázatát!

3) Egy 6, 8, ill. 10 szögsorból álló **Galton-deszka** egyes vályúiba mekkora valószínűséggel érkeznek a golyók?

4) Készítsük el a 3. mellékletben található **Pascal-háromszög** 16-18. sorát!

5) Csak jobbra fel és jobbra lefelé haladva, feltételezve, hogy sohasem lépünk ki a szórombuszból, mennyi a valószínűsége, hogy **KÖLCSEY FERENC** nevének véletlenszerű kiolvasása közben áthaladunk

a) a piros (középső) Y betűn,

b) a kék vagy a zöld Y betűn,

c) a sárga E betűn,

d) a piros Y és a sárga E betűn,

e) a piros Y vagy a sárga E betűn?

						Y						
					E		F					
				S		Y		E				
			C		E		F		R			
		L		S		Y		E		E		
	Ö		C		E		F		R		N	
K		L		S		Y		E		E		C
	Ö		C		E		F		R		N	
		L		S		Y		E		E		
			C		E		F		R			
				S		Y		E				
					E		F					
						Y						

6) Írjuk le szóháromszögbe a **teljes nevünket**.

a) Mekkora valószínűséggel fejezhetjük be a kiolvasást az egyes utolsó betűkön?

b) Mekkora valószínűséggel haladunk át a kiolvasás során keresztnevünk egyes első betűin?

7) Határozzuk meg a **Pascal-háromszög segítségével**

a) $(a+b)^6$ kifejezését,

b) $(1+0,1)^5$ értékét 0,1 pontossággal,

c) $(1+0,02)^{10}$ értékét 0,001 pontossággal!

8) Igazoljuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget:

Ha n tetszőleges pozitív egész és α tetszőleges pozitív szám, akkor $(1+\alpha)^n \geq 1 + n \cdot \alpha$

IV. A binomiális eloszlás

1) Mennyi a valószínűsége, hogy **egy pénzérmét egymás után tízszer feldobva**

a) 8 fej lesz,

b) legalább 8 fej lesz,

c) legalább 1 fej lesz?

2)Mennyi a valószínűsége, hogy **egy 8 gyermekes családban** a gyermekek között

a) 5 lány van,

b) a három legidősebb gyermek lány, és még pontosan 2 lány van,

c) legalább két lány van,

d) A három legidősebb gyermek között 2 fiú van, a két középső között 1 fiú van és a három legfiatalabb között 2 fiú van?

3) Egy **teszt** 10 kérdésből áll, és minden kérdésre 4 válaszlehetőség van. Mennyi a valószínűsége, hogy a tesztet véletlenszerűen kitöltve

a) 8 jó válaszunk lesz,

b) legalább 8 jó válaszunk lesz,

c) legalább 1 jó válaszunk lesz,

d) 0, 1, 2, 3, … , 10 jó válaszunk lesz?

4) Hat soros **klasszikus Galton-deszkánál**, ahol minden szögnél 0,5 valószínűséggel megy jobbra, ill. balra a golyó, mennyi lesz a valószínűsége, hogy a golyó végül az 0., 1., 2., 3., …, 6. vályúba érkezik?

5) Hat soros **módosított Galton-deszkánál**, ahol minden szögnél 0,8 a valószínűsége, hogy a golyó jobbra megy, mennyi lesz a valószínűsége, hogy a golyó végül az 0., 1., 2., 3., …, 6. vályúba érkezik?

6) Mennyi a valószínűsége, hogy egy **13+1 találatos totószelvényt** véletlenszerűen kitöltve, a +1 mérkőzést figyelmen kívül hagyva

a) 13 találatunk lesz,

b) pontosan 10 találatunk lesz

c) 12-nél kevesebb találatunk lesz,

d) 1-nél több találatunk lesz,

e) 0, 1, 2, 3, …, 13 találatunk lesz?

7) Mennyi a valószínűsége, hogy **egy szabályos dobókockát 15-ször feldobva**

a) 10-szer dobunk négyest,

b) 10-szer dobunk ötöst,

c) 10-szer dobunk hatost,

d) 10-szer dobunk 4-nél nagyobbat,

e) legalább 14-szer hatost dobunk,

f) legalább 2-szer hatost dobunk,

g) 0, 1, 2, …., 15-ször dobunk prímszámot?

8) Egy **gyufásdoboz** legnagyobb lapjaira írtuk az egyest és a hatost, a középsőkre a kettest és az ötöst és a legkisebbekre a hármast és a négyest. 500 dobás alapján **az egyes és a hatos relatív gyakorisága 0,3, a kettesé és az ötösé 0,15, a hármasé és a négyesé 0,05**. Mennyi a valószínűsége, hogy egymás után 15-ször feldobva

a) 10-szer dobunk négyest,

b) 10-szer dobunk ötöst,

c) 10-szer dobunk hatost,

d) 10-szer dobunk 4-nél nagyobbat,

e) legalább 14-szer hatost dobunk,

f) legalább 2-szer hatost dobunk,

g) 0, 1, 2, …., 15-ször dobunk prímszámot?

9) a) Mennyi a valószínűsége, hogy három szabályos dobókockával egyszerre dobva 16-nál nagyobbat dobunk?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy ezeket adobásokat 12-szer megismételve

α) egyszer sem dobunk 16-nál nagyobbat,

β) legfeljebb 1-szer dobunk 16-nál nagyobbat,

γ) legalább 10-szer 16-nál nagyobbat dobunk,

δ) legfeljebb 9-szer dobunk 16-nál nagyobbat?

V. Permutációk

1) **6 lány és 6 fiú moziba megy**, és a 8. sorban az1, 2, 3, …, 12 székekre kaptak jegyet.

a) Hányféleképpen foglalhatnak helyet a székeken?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a jegyek véletlenszerű kiosztása során

α) Anna és Bea egymás mellett fog ülni,

β) Anna, Bea és Cili egymás mellett fog ülni,

γ) Anna és Bea, illetve Cili és Dóra egymás mellett fog ülni,

δ) Anna, Bea és Cili, illetve Dóra és Edit egymás mellett fog ülni,

ε) Anna és Bea nem fog egymás mellett ülni,

φ) a 6 lány, ill. a 6 fiú külön fog ülni,

ι) a 6 lány és a hat fiú váltakozva fog ülni,

κ) Anna és Bea szélen fognak ülni,

λ) Anna és Bea nem fognak szélen ülni,

μ) lányok fognak szélen ülni,

ν) Az első három helyen fiú ül, a következő 3helyen lány, utána megint 3 fiú, majd 3 lány,

o) a lányok és a fiúk is ábécé rendben ülnek?

2) a) A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány darab **hét jegyű számot** tudunk készíteni, **ha minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel**?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy az így kapott szám

α) 0-ra fog végződni,

β) 3-mal osztható lesz,

γ) 5-tel osztható lesz,

δ) 4-gyel osztható lesz,

ε) tartalmazni fogja az „12” részletet,

φ) tartalmazni fogja az „123” részletet,

ι) nem fogja tartalmazni az „123” részletet,

κ) a páros és páratlan számjegyeket váltakozva fogja tartalmazni,

λ) elöl lesz a 3 páratlan számjegy,

μ) páratlan számjegyek lesznek a két szélén,

ν) Az első két számjegy páratlan lesz, a következő kettő páros,

o) a páros és a páratlan számjegyeket is növekvő sorrendben fogja tartalmazni?

3) A 3 éves Pistike elé teszi iskolás nővére az A, A, A, A, A, B, B, D, K, R, R betűkockákat. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen egymás mellé helyezve a kockákat, Pistike az **ABRAKADABRA** szót rakja ki?

4) Oldjuk meg a III. 3) feladatot az ismétléses permutáció felhasználásával!

VI. Műveletek faktoriálisokkal

1) Számítsuk ki az alábbi műveletek eredményét!

a) $11!\cdot 12\cdot 13$

b) $\frac{12!}{10!}$

c) (n-2)! (n-1)

d) $(n+1)!\cdot(n+2)\cdot(n+3)$

e) $\frac{(n+2)!}{n!}$

f) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$

g) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

h) $\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}$

i) $\frac{1}{(n-2)!}-\frac{n}{(n-1)!}$

j) $\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+1)!}$

k) $\frac{1}{(n-1)!}-\frac{n+1}{(n+1)!}$

l) $\frac{n!-1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}$

m) $\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}$

2)Definíció szerint 0!:=1 és 1!:=1

Határozzuk meg az Excel programmal az $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}!}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!}+\ \ldots+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}!}$ összeg értékét n=20 esetén!

VII. Variációk

1) a) Az**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** számjegyekből **hány darab hét jegyű számot** tudunk készíteni, ha **minden számjegyet egyszer használhatunk fel**?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szám

α) 0-ra fog végződni,

β) 3-mal osztható lesz,

γ) 5-tel osztható lesz,

δ) 4-gyel osztható lesz,

ε) tartalmazni fogja az „12” részletet,

φ) tartalmazni fogja az „123” részletet,

ι) nem fogja tartalmazni az „123” részletet,

κ) váltakozva fog páros és páratlan számjegyeket tartalmazni,

λ) 3 páratlan számjegy lesz elöl,

μ) páratlan számjegyek lesznek a két szélén,

ν) az első két számjegy páratlan lesz, a következő kettő páros,

o) mind az 5 páratlan számot fogja tartalmazni?

2) a) A **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** számjegyekből **hány darab hét jegyű számot** tudunk készíteni**, ha minden számjegyet egyszer használhatunk fel**?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szám

α) 0-ra fog végződni,

β) 9-cel osztható lesz,

γ) 5-tel osztható lesz,

δ) 4-gyel osztható lesz,

ε) tartalmazni fogja az „12” részletet,

φ) tartalmazni fogja az „123” részletet,

ι) nem fogja tartalmazni az „123” részletet,

κ) váltakozva fog páros és páratlan számjegyeket tartalmazni,

λ) 3 páratlan számjegy lesz elöl,

μ) páratlan számjegyek lesznek a két szélén,

ν) az első két számjegy páratlan lesz, a következő kettő páros,

o) mind az 5 páratlan számot fogja tartalmazni?

3) a) Az **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** számjegyekből **hány darab hét jegyű számot** tudunk készíteni, **ha minden számjegyet többször felhasználhatunk**?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szám

α) 0-ra fog végződni,

β) csupa 3-mal osztható számjegyből áll,

γ) 5-tel osztható lesz,

δ) 4-gyel osztható lesz,

ε) tartalmazni fogja az „12” részletet,

φ) tartalmazni fogja az „123” részletet,

ι) nem fogja tartalmazni az „123” részletet,

κ) váltakozva fog páros és páratlan számjegyeket tartalmazni,

λ) 3 páratlan számjegy lesz elöl,

μ) páratlan számjegyek lesznek a két szélén,

ν) az első két számjegy páratlan lesz, a következő kettő páros,

o) a 9-est ötször fogja tartalmazni?

4) a) A **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** számjegyekből **hány darab hét jegyű** számot tudunk készíteni, **ha minden számjegyet többször felhasználhatunk**?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szám

α) 0-ra fog végződni,

β) csupa 3-mal osztható számjegyből áll,

γ) 5-tel osztható lesz,

δ) 4-gyel osztható lesz,

ε) tartalmazni fogja az „12” részletet,

φ) tartalmazni fogja az „123” részletet,

ι) nem fogja tartalmazni az „123” részletet,

κ) váltakozva fog páros és páratlan számjegyeket tartalmazni,

λ) 3 páratlan számjegy lesz elöl,

μ) páratlan számjegyek lesznek a két szélén,

ν) Az első két számjegy páratlan lesz, a következő kettő páros,

o) a 9-est ötször fogja tartalmazni?

5) Kombinábiában az **autók rendszámai** T-ABC-KLM alakúak, ahol T a tartomány számjele, 1-től 8-ig változhat, A,B,C a 26 betűs angol abc betűi, azonosak is lehetnek, K,L,M pedig 0 és 9 közötti számjegyek, de nem lehetnek azonosak. *Pl. 3-XXY-056*

a) Hány különböző rendszám lehetséges?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a rendszámban 3 azonos betű lesz?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a betűk vagy a számok nagyság szerint közvetlenül követni fogják egymást?

VIII. Kombinációk

1) Számítsuk ki az alábbi műveletek eredményét **faktoriálisok segítségével**!

a) $\binom{10}{8}$

b) $\binom{16}{12}$

c) $\binom{20}{16}$

d) $\binom{100}{98}$

e) $\binom{100}{95}$

f) $\binom{99}{94} + \binom{99}{95}$

g) $\frac{\binom{10}{6}}{\binom{100}{6}}$

h) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10}$

i) $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}$

j) $\binom{100}{5} \cdot \binom{95}{2} \cdot \binom{93}{3} \cdot \binom{90}{3} \cdot \binom{87}{2}$

k) $\frac{\binom{80}{10} \cdot \binom{20}{5}}{\binom{100}{15}}$

l) $\frac{\binom{80}{13} \cdot \binom{20}{2} + \binom{80}{14} \cdot \binom{20}{1} + \binom{80}{15} \cdot \binom{20}{0}}{\binom{100}{15}}$

2) Az **ötöslottón** 90 számból ötöt kell eltalálni. Mennyi a valószínűsége a 0, 1, 2, 3, 4 és 5 találatnak?

3) A **hatoslottón** 45 számból hatot kell eltalálni. Mennyi a valószínűsége a 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 találatnak?

4) Egy üzemben **500 termékből 40 selejtes**.

Mennyi a valószínűsége, hogy ha **visszatevés nélkül** véletlenszerűen kiválasztunk 20 terméket, akkor a kiválasztottak között

a) nem lesz selejtes,

b) 5 selejtes lesz,

c) 3-nál kevesebb selejtes lesz,

d) 2-nél több selejtes lesz?

5) Egy üzemben **500 termékből 40 selejtes**.

Mennyi a valószínűsége, hogy ha **visszatevéssel** véletlenszerűen kiválasztunk 20 terméket, akkor a kiválasztottak között

a) nem lesz selejtes,

b) 5 selejtes lesz,

c) 3-nál kevesebb selejtes lesz,

d) 2-nél több selejtes lesz?

6) Egy üzemben **a termékek 10 %-a selejtes**. Mennyi a valószínűsége, hogy ha nagyon sok termékből (azaz lényegtelen lesz, hogy viszatevéssel vagy viszatevés nélkül) véletlenszerűen kiválasztunk 20-at, akkor azok között

a) nem lesz selejtes,

b) 5 selejtes lesz,

c) 3-nál kevesebb selejtes lesz,

d) 2-nél több selejtes lesz?

7) Egy üzemben egy vizsgálat szerint **minden nyolcadik termék selejtes**. Mennyi a valószínűsége, hogy ha nagyon sok termékből véletlenszerűen kiválasztunk 20-at, akkor azok között

a) nem lesz selejtes,

b) 5 selejtes lesz,

c) 3-nál kevesebb selejtes lesz,

d) 2-nél több selejtes lesz?

8) A **Magyar kártyában** 32 lap van, 4 szín (piros, zöld, makk és tök), és minden színből 8 figura.

Ha véletlenszerűen kiosztunk 5 lapot, mennyi a valószínűsége, hogy

a) pontosan 3 piros lesz köztük,

b) legfeljebb 2 piros lesz köztük,

c) legalább 3 piros lesz köztük,

d) pontosan 2 piros, 1 zöld és 2 makk lesz,

e) pontosan 2 piros és 2 zöld lesz köztük,

f) pontosan 2 ász lesz köztük,

g) pontosan 2 piros lesz köztük,

h) pontosan 2 ász és 2 piros lesz köztük:

i) pontosan 2 ász vagy pontosan 2 piros lesz köztük,

j) ha mind az öt lap piros lesz, akkor benne lesz a piros ász és a piros hetes is?

9) A **Magyar kártyában** a figurák sorrendje: 7, 8, 9, 10, alsó, fölső, király, ász.

Ha véletlenszerűen kiosztunk 5 lapot, mennyi a valószínűsége, hogy

a) pontosan két azonos figura (pár) lesz köztük,

b) pontosan két-két azonos figura (2 pár) lesz köztük,

c) pontosan (három azonos figura) (drill) lesz köztük,

d) pontosan 1 drill és 1 pár lesz köztük (full),

e) pontosan négy azonos figura (póker) lesz közöttük,

f) a figurák sorban követik egymást (sor),

g) mindegyik lap azonos színű (szín),

h) mindegyik lap azonos színű és a figurák sorban követik egymást (színsor)?

10) A **Francia kártyában** 52 lap van, 4 szín (treff, káró, kőr és pikk), és minden színből 13 figura.

A figurák sorrendje: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, bubi, dáma, király, ász

Ha véletlenszerűen kiosztunk 5 lapot, mennyi a valószínűsége, hogy

a) pontosan két azonos figura (pár) lesz köztük,

b) pontosan két-két azonos figura (2 pár) lesz köztük,

c) pontosan (három azonos figura) (drill) lesz köztük,

d) pontosan 1 drill és 1 pár lesz köztük (full),

e) pontosan négy azonos figura (póker) lesz közöttük,

f) a figurák sorban követik egymást (sor),

g) mindegyik lap azonos színű (szín),

h) mindegyik lap azonos színű és a figurák sorban követik egymást (színsor)?

11) A 8 -10) feladatok során egymás után teljesen azonos körülmények között 15 osztást végezve, mennyi a valószínűsége, hogy az említett események

a) pontosan hétszer fognak bekövetkezni,

b) legfeljebb kétszer következnek be,

c) legalább háromszor következnek be?

12) **Kombinábiában 30 lapos kártyával játszanak. 5 szín van: piros, sárga, zöld, kék és ibolya. Minden színből 6 figura: perec, persely, varangy, varázsló, kombájn és komputer.**

a) Hányféleképpen tudunk kiosztani 5 lapot, ha a sorrendre nem vagyunk tekintettel?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan2 piros és 2 komputer lesz köztük?

Pl. jó osztás: piros komputer, piros perec, ibolya komputer, kék varangy és sárga kombájn.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy 15 leosztás esetén éppen 10-szer fordul elő, hogy pontosan 2 piros és 2 komputer lesz a lapok közt?

IX. Gráfelmélet

1) Rajzoljunk 6 pontú egyszerű gráfot, ahol a fokszámok

a) 5, 4, 3, 3, 2, 1,

b) 5, 5, 3, 3, 2, 2,

c) 4, 3, 3, 3, 2, 2,

d) 3, 3, 3, 3, 1, 1.

2) Rajzoljunk 9 pontú egyszerű gráfot a **Havel-Hakimi algoritmus segítségével**, ahol a fokszámok

a) 6, 5, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 1,

b) 6, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2,

c) 6, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 1,

d) 6, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 1, 1.

3) Hány pontja van a 28 élt tartalmazó fának?

4) Határozzuk meg **fával** a 12600 **prímtényezős felbontását**!

5) Hány pontú az a **teljes gráf**, amelyben 210 él van?

6) Egy 30 fős társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Eddig 300 kézfogás történt. **Mennyi van még hátra**?

7) Egy 25 fős társaságban eddig 150 kézfogás történt. Maximum hány olyan ember van a társaságban, **aki még senkivel sem fogott kezet**?

8) Kombinábia legnagyobb folyóján, a **Gráffolyón** sorban egymás mellett három sziget van. A középső szigetet egy-egy híd köti össze a két szélsővel. **Tervezzünk hidakat** a partok és a szigetek között, hogy az egyik partról indulva be tudjuk járni mindhárom szigetet és a túlsó partot is, úgy, hogy minden hídon pontosan egyszer haladjunk át, és

a) a kiindulási helyünkre térjünk vissza,

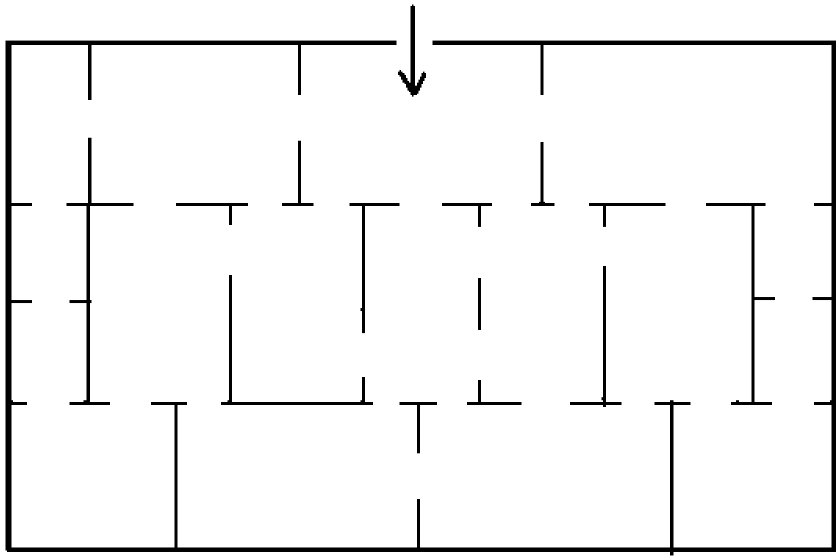
b) a túlsó parton fejezzük be a sétát,

c) a középső szigeten fejezzük be a sétát!

Rajzoljuk le mindegyik esetben a bejárási útvonalakat is!

9) Maximus Kombinatoris úgy terveztette meg az **új Főkombinátori Székházat**, hogy minden reggel belépve a nyíllal jelölt kapun, az épületet bejárva minden ajtót kinyithasson, majd azokon pontosan egyszer áthaladva, végül a saját irodájába érkezzen. (Tehát korábban kinyitott ajtón már nem halad át újra, viszont néhány helyiségbe többször betérhet.)

a) Létezik-e ilyen útvonal, s ha igen, rajzoljuk be az alaprajzba is!



b) Meg lehet-e oldani egyetlen ajtó befalazásával vagy egy új nyitásával, hogy a palotát a kívánt módon bejárva az utolsó helyiség a középen lévő legyen?

X. Összefoglalás

1) Kombinábia **cukrászdájában** 6-féle fagylalt van: csoki, vanília, puncs, málna, eper és citrom.

a) Hányféle sorrendben helyezhetik ki a hat fagylaltos tartályt?

b) Hányféle sorrend lehet, ha csokiból 3, puncsból és eperből 2 tartályt helyeznek ki, a többiből pedig egyet?

c) Hányféleképpen kaphatunk 3 gombócosfagylaltot

α) tölcsérbe kérve, ahol a sorrend is számít, ha egy fajtából csak egy gombócot kaphatunk,

β) tölcsérbe kérve, ahol a sorrend is számít, ha egy fajtából több gombócot is kaphatunk,

γ) kehelybe kérve, ahol a sorrend nem számít, ha egy fajtából csak egy gombócot kaphatunk,

δ) kehelybe kérve, ahol a sorrend nem számít, ha egy fajtából több gombócot is kaphatunk?

d) Mennyi a valószínűsége az egyes esetekben, hogy **mindhárom gombóc gyümölcsfagylalt** lesz?

2) 6 barátnő és gyermekeik, 4 fiú és 8 lány közösen megnézik a színházban az **Egy csodálatos kombinátor története** című színmű gyermekelőadását, melyre a 2. sorban az 1, 2, 3, …, 18 székekre kaptak jegyet.

a) Hányféleképpen foglalhatnak helyet a székeken?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a jegyek véletlenszerű kiosztása során

α) egy felnőtt sem ül felnőtt mellett,

β) egy leány sem ül leány mellett,

γ) egy fiú sem ül fiú mellett,

δ) egy gyermek sem ül gyermek mellett?

3) Kombinábiában minden évben versenyt rendeznek, melynek győztese nyeri el egy évre a főkombinátori címet. A versenyen **hétféle feladattípus közül válogatnak**, és egy féléből mindig csak egyet választanak: *ismétlés nélküli- és ismétléses permutáció, ismétlés nélküli- és ismétléses variáció, ismétlés nélküli- és ismétléses kombináció, ill. gráfelmélet.* Hányféleképpen válogathatnak be a feladattípusokból öt feladatot a versenyre, ha a sorrendre nem vagyunk tekintettel?

Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerű kiválasztás esetén a kiválasztott feladatok között

a) nem szerepel gráfelmélet,

b) szerepel ismétléses kombináció?

c) egymás utáni 10 évben mindig szerepel ismétléses kombináció?

MEGOLDÁSOK

I. Műveletek eseményekkel

Adjuk meg az alábbi eseményeket a kísérletekhez tartozó klasszikus valószínűségi mező elemi eseményeinek segítségével! Ahol az eseménytér számossága 10-nél kisebb, adjuk meg az események összegét, szorzatát, komplementerét, és ellenőrizzük a De Morgan-azonosságokat!

1) Egy pénzérme, két dobás:

A: Először fejet, másodszor írást dobok

B: Különbözőket dobok

Eseménytér: H={FF, FI, IF, II}, Biztos esemény: H, lehetetlen esemény: $\emptyset$

A={FI}, B={FI, IF}, A maga után vonja B-t: $A \subseteq B$

$A+B=\{FI, IF\}$, $A \cdot B=\{FI\}$, $\overline{A} = \{FF, IF, II\}$, , $\overline{B} = \{FF, II\}$,

$\overline{A+B} = \{FF, II\}$, $\overline{A} \cdot \overline{B} = \{FF, II\}$, $\overline{A \cdot B} = \{FF, IF, II\}$, $\overline{A} + \overline{B} = \{FF, IF, II\}$

$\mathbf{A \subseteq B \Longrightarrow A+B=B,\ A \cdot B=A, \overline{A+B} = \overline{B},\ \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{B},\ \overline{A \cdot B} = \overline{A},\ \overline{A} + \overline{B} = \overline{A}}$

2) Egy pénzérme, 3 dobás:

A: Harmadszorra dobok először fejet

B: Háromból legalább egy fejet dobok

Eseménytér: $\{FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII, III\}$

$A=\{IIF\}$, $B=\{FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII\}$, $A \subseteq B$

$A+B=B$, $A \cdot B=A$, $\overline{A} = \{FFF, FFI, FIF, IFF, IFI, FII, III\}$, $\overline{B} = \{III\}$, $\overline{A+B} = \{III\}$, $\overline{A} \cdot \overline{B} = \{III\}$,

$\overline{A \cdot B} = \{FFF, FFI, FIF, IFF, IFI, FII, III\}$, $\overline{A} + \overline{B} = \{FFF, FFI, FIF, IFF, IFI, FII, III\}$

3) Két pénzérme, egy dobás:

A: Egy fejet és egy írást dobok

B: Dobok írást

Eseménytér: {FF, FI, IF, II}, $A=\{FI, IF\}$, $B=\{FI, IF, II\}$, $A \subseteq B$, $A+B=B$, $A \cdot B=A$,

$\overline{A} = \{FF, II\}$, $\overline{B} = \{FF\}$, $\overline{A+B} = \{FF\}$, $\overline{A} \cdot \overline{B} = \{FF\}$, $\overline{A \cdot B} = \{II, FF\}$, $\overline{A} + \overline{B} = \{II, FF\}$

4) Két pénzérme, 3 dobás:

A: Harmadszorra dobok először azonosakat

B: Mindháromszor azonosakat dobok

Eseménytér: {FF FF FF, FF FF FI, FF FF IF, FF FF II, FF FI FF, FF FI FI, FF FI IF, FF FI II, ... , II II II },

összesen $4^3=64$ elemi esemény alkotja az eseményteret.

A={FI FI FF, FI FI II, FI IF FF, FI IF II, IF FI FF, IF FI II, IF IF FF, IF IF II}, 8 elemi esemény,

B={FF FF FF, FF FF II, FF II FF, II FF FF, II II FF, II FF II, FF II II, II II II}, szintén, $A \cdot B=\emptyset$

5) Egy szabályos kocka, egy dobás:

A: Prímszámot dobok

B: Legalább 5-öst dobok

Eseménytér: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A={2, 3, 5}, B={5, 6}, A+B={2, 3, 5, 6}, A·B={5}, $\overline{A} = \{1, 4\ 6\}$, $\overline{B} = \{1, 2, 3, 4\}$,

$\overline{A+B}$ ={1, 4}, $\overline{A} \cdot \overline{B}$ ={1, 4}, $\overline{A \cdot B}$ ={1, 2, 3, 4, 6}, $\overline{A} + \overline{B}$ ={1, 2, 3, 4, 6}

6) Egy szabályos kocka, 3 dobás:

A: Harmadszorra dobok először hatost

B: Háromból legalább egyszer hatost dobok

Eseménytér: {111, 112, 113, 114, 115, 116, 121, 122, 123, 124, 125, 126, … , 666}

Összesen 6^3=216 elemi esemény alkotja az eseményteret. Könnyen láthatjuk, hogy három egyest csak egyféleképpen dobhatunk, két egyest és egy kettest háromféleképpen, de pl. egy egyest, egy kettest és egy hármast hatféleképpen is dobhatunk. Ezért az elemi események meghatározásánál az azonos esély érdekében a sorrendet is figyelembe kell vennünk.

A={116, 126, 136, 146, 156, 216,…, 556}, összesen 5·5·1=25 elemi esemény

B={116, 126, 136, 146, 156, 161, 162, 163, 164, 165, 166, … , 666}, könnyebb a $\overline{B}$ elemi eseményeit összeszámolni: $|\overline{B}|=5^3$=125, így összesen |B|=216-125=91 elemi esemény.

$A \subseteq B \Longrightarrow A+B=B,\ A \cdot B=A,\ \overline{A+B} = \overline{B},\ \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{B},\ \overline{A \cdot B} = \overline{A},\ \overline{A} + \overline{B} = \overline{A}$

7) Két szabályos kocka, egy dobás:

A: A dobott számok összege 10

B: A dobott számok azonosak

Eseménytér: {11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, …, 66}, össz. 36 elemi esemény

A={46, 55, 64}, B={11, 22, 33, 44, 55, 66}, A+B={11, 22, 33, 44, 46, 55, 64, 66}, A·B={55},

$\overline{A}$: 33, $\overline{B}$: 30, $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$: 28, $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$: 35 elemi esemény

8) Két szabályos kocka, 3 dobás:

A: Harmadszorra dobok először dupla hatost

B: Háromból legalább egyszer dupla hatost dobok

Eseménytér: {11 11 11, 11 11 12, 11 11 13, 11 11 14, 11 11 15, 11 11 16, … , 66 66 66}, összesen 36^3 =46656 elemi esemény

A={11 11 66, 11 12 66, … ,65 65 66}, összesen 35·35·1=1225 elemi esemény

B={11 11 66, 11 12 66, … , 66 66 66}, összesen 36^3-35^3=3781 elemi esemény,

ugyanis $\overline{B}$ az az esemény, hogy egyszer sem dobok dupla hatost, amire 35^3 lehetőség van.

$A \subseteq B \Longrightarrow A+B=B,\ A \cdot B=A,\ \overline{A+B} = \overline{B},\ \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{B},\ \overline{A \cdot B} = \overline{A},\ \overline{A} + \overline{B} = \overline{A}$

II. Események valószínűsége

Az 1) és 2) feladatokat adjuk meg az események összegének és szorzatának valószínűségét is!

1) Egy családban egymás után 2 gyermek születik

a) Független események:

A: Az első gyermek lány

B: A második gyermek lány

H={FF, FL, LF, LL}, A={LF, LL}, B={FL, LL}, A+B={LF, FL, LL}, A·B={LL}

P(A)=k/n=2/4, P(B)=2/4, P(A+B)=3/4, P(A·B)=1/4,

P(A)·P(B) = P(A·B), P(A+B)=P(A) + P(B) - P(A·B)

b) Nem független események:

A: Lesz lány

B: 1 fiú és 1 lány lesz

H={FF, FL, LF, LL}, A={FL, LF, LL}, B={FL, LF}, A+B={LF, FL, LL}, A·B={FL, LF}, $B \subseteq A$

P(A)=3/4, P(B)=2/4, P(A+B)=3/4, P(A·B)=2/4,

P(A)·P(B) $\neq$ P(A·B), P(A+B)=P(A) + P(B) - P(A·B)

2) Kockadobás egy kockával egymás után kétszer

a) Független események:

A: Az első dobás hatos lesz

B: A második dobás hatos lesz

H={11, 12, 13, … , 66}, A={61, 62, 63, 64, 65, 66}, B={16, 26, 36, 46, 56, 66},

A+B={61, 62, 63, 64, 65, 66, 16, 26, 36, 46, 56}, A·B={66}

P(A)=6/36, P(B)=6/36, P(A+B)=11/36, P(A·B)=1/36,

P(A)·P(B) = P(A·B), P(A+B)=P(A) + P(B) - P(A·B)

b) Nem független események:

A: Dobok hatost

B: Két hatost dobok

H={11, 12, 13, … , 66}, A={16, 26, 36, 46, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66}, B={66}, $B \subseteq A$

A+B={16, 26, 36, 46, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66}, A·B={66}

P(A)=11/36, P(B)=1/36, P(A+B)=11/36, P(A·B)=1/36,

P(A)·P(B) $\neq$ P(A·B), P(A+B)=P(A) + P(B) - P(A·B)

3) Mennyi a valószínűsége, hogy egy szabályos dobókockával egyet dobva

Szabályos dobókocka esetén klasszikus valószínűségi mezőt alkotnak az elemi események, mindegyik azonos valószínűségű, így P=k/n.

a) a dobott szám hatos lesz: P(A) = 1/6, mert H={1, 2, 3, 4, 5, 6}, azaz n=6 és A={6}, azaz k=1

b) a dobott szám páros lesz: P(B) = 3/6, mert B={2, 4, 6}

c) a dobott szám legalább 5 lesz: P(C) = 2/6 mert C={5, 6}

d) a dobott szám 3-mal osztható lesz: P(D) = 2/6, mert D={3, 6}

e) a dobott szám prím lesz: P(E) = 3/6 mert E={2, 3, 5}

4) Egy **gyufásdoboz** legnagyobb lapjaira írtuk az egyest és a hatost, a középsőkre a kettest és az ötöst és a legkisebbekre a hármast és a négyest. 500 dobás alapján **az egyes és a hatos relatív gyakorisága 0,3, a kettesé és az ötösé 0,15, a hármasé és a négyesé 0,05**.

Mennyi a valószínűsége, hogy a gyufásdobozzal egyet dobva

A gyufásdoboz esetén az elemi események valószínűsége nem azonos, nem alkotnak klasszikus valószínűségi mezőt, így a P=k/n képlet nem használható!

a) a dobott szám hatos lesz: P(A) = 0,3, mert a dobott számok relatív gyakorisága határozza meg a valószínűségüket: P(1)=P(6)=0,3, P(2)=P(5)=0,15 és P(3)=P(4)=0,05

b) a dobott szám páros lesz: P(B) = P(2) + P(4) + P(6) = 0,15 + 0,05 + 0,3 = 0,5, mert az egyes dobásértékek egymást kizáró események, egyszerre pl. nem dobhatok kettest és négyest.

c) a dobott szám legalább 5 lesz: P(C) = P(5) + P(6) = 0,15 + 0,3 = 0, 45

d) a dobott szám 3-mal osztható lesz: P(D) = P(3) + P(6) = 0,05 + 0,3 = 0,35

e) a dobott szám prím lesz: P(E) = P(2) + P(3) + P(5) = 0,15 + 0,05 + 0,15 = 0,35

5) Mennyi a valószínűsége, hogy egy szabályos dobókockával kétszer dobva a dobott számok

a) szorzata prímszám lesz: H={11, 12, 13, …, 66}, n=36 és A={12, 13, 15, 21, 31, 51}, k=6, tehát P(A) = 6/36

b) összege nagyobb lesz 10-nél: B={56, 65, 66}, k=3, tehát P(B) = 3/36

c) különbözőek lesznek: $\overline{C}$={11, 22, 33, 44, 55, 66}, k'=6, P($\overline{C}$)=6/36, tehát P(C)=1 – 6/36 = 5/6

d) összege és szorzata is páros lesz: D={22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66}, k=9, tehát P(D) = 9/36

e) különbsége 4: E={15, 26, 51, 62}, k=4, tehát P(E)=4/36

f) hányadosa 3: F={13, 26, 31, 62}, k=4, tehát P(F)=4/36

6) Egy **gyufásdoboz** legnagyobb lapjaira írtuk az egyest és a hatost, a középsőkre a kettest és az ötöst és a legkisebbekre a hármast és a négyest. 500 dobás alapján **az egyes és a hatos relatív gyakorisága 0,3, a kettesé és az ötösé 0,15, a hármasé és a négyesé 0,05**.

Mennyi a valószínűsége, hogy a gyufásdobozzal kétszer dobva a dobott számok

a) szorzata prímszám lesz: A={12, 13, 15, 21, 31, 51}, P(A) = P(12) + P(13) + P(15) + P(21) + P(31) + P(51) = 0,3·0,15 + 0,3·0,05 + 0,3·0,15 + 0,15·0,3 + 0,05·0,3 + 0,15·0,3 = 0,21, mert az egymás utáni dobások függetlenek, az elemi események pedig egymást kizárják.

b) összege nagyobb lesz 10-nél: B={56, 65, 66}, k=3, P(B) = 0,15·0,3 + 0,3·0,15 + 0,3·0,3 = 0,18

c) különbözőek lesznek: $\overline{C}$={11, 22, 33, 44, 55, 66}, P($\overline{C}$) = 0,3·0,3 + 0,15·0,15 + 0,05·0,05 + 0,05·0,05 + 0,15·0,15 + 0,3·0,3 = 0,23, tehát P(C) = 1 – 0,23 = 0,77

d) összege és szorzata is páros lesz: D={22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66}, P(D) = 0,15·0,15 + 0,15·0,05 + 0,15·0,3 + 0,05·0,15 + 0,05·0,05 + 0,15·0,3 + 0,3·0,15 + 0,3·0,05 + 0,3·0,3 = 0,28

e) különbsége 4: E={15, 26, 51, 62}, P(E) = 0,3·0,15 + 0,15·0,3 + 0,15·0,3 + 0,3·0,15 = 0,18

f) hányadosa 3: F={13, 26, 31, 62}, P(F) = 0,3·0,05 + 0,15·0,3 + 0,05·0,3 + 0,3·0,15 = 0,12

7) A **virágüzletben** 2 fajta virág van: rózsa és szegfű. Határozzuk meg a 2 fajta virág harmadosztályú ismétléses kombinációit, ill. variációit!

Ismétléses kombinációk: {RRR, RRS, RSS, SSS}, $C_2^{3,i} = 4$

Ismétléses variációk: {RRR, RRS, RSR, SRR, SSR, SRS, RSS, SSS}, $V_2^{3,i} = 2^3 = 8$

A klasszikus valószínűségi mezőben az elemi eseményeket az **ismétléses variációk** alkotják.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy 3 szál virágból álló véletlenszerűen kiválasztott csokorban

a) csak rózsa lesz: A={RRR}, k=1, n=8, tehát P(A) = 1/8

b) legalább 2 szál rózsa lesz: B={RRR, RRS, RSR, SRR}, k=4, tehát P(B) = 4/8

c) kétfajta virág lesz: $\overline{C}$={RRR, SSS}, k'=2, P($\overline{C}$) = 2/8, tehát P(C) = 1 – 2/8 =3/4

8) A **cukrászdában** 3 fajta fagylalt van: csoki, vanília és eper. Határozzuk meg a 3 fajta fagylalt másodosztályú ismétléses kombinációit, ill. variációit!

Ismétléses kombinációk: {CC, VV, EE, CV, CE, VE }, $C_3^{2,i} = 6$

Ismétléses variációk: {CC, VV, EE, CV, VC, CE, EC, VE, EV }, $V_3^{2,i} = 3^2 = 9$

Mennyi a valószínűsége, hogy egy 2 gombócos véletlenszerűen kiválasztott fagylaltban

a) csak csoki lesz: A={CC}, k=1, n=9, tehát P(A) = 1/9

b) csoki és eper lesz: B={CE, EC}, k=2, tehát P(B) = 2/9

c) csoki lesz a tölcsérben alul: C={CC, CV, CE}, k=3, tehát P(C) = 3/9

9) Mennyi a valószínűsége, hogy egy **13+1 találatos totószelvényt** véletlenszerűen kitöltve

a) telitalálatunk lesz: Az egyes mérkőzések eredménye **független** egymástól, így P(A) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{14}$

b) az első 10 mérkőzést eltaláljuk, a többit nem: P(B) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$

c) 9 mérkőzést találunk el az első 10-ből: P(C) = 10· $\left(\frac{1}{3}\right)^{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{1}$

10) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy családban **már két fiú van, akkor a születendő harmadik gyerek lány** lesz:

Minden születés **független** a korábbiaktól, így P(A)=1/2

Ugyanez jön ki **feltételes valószínűséggel** számolva is. H={FFF, FFL, ~~FLF, LFF, LLF, LFL, FLL, LLL~~}.

a feltételnek megfelelő korlátozott eseménytér, ugyanis csak itt teljesül, hogy az első két gyermek fiú. A csak ennek részhalmaza lehet: A={FFL}, tehát n=2, k=1, azaz P(A) = 1/2

Megjegyzés: a feltételes valószínűségnek ez a szemléletes értelmezése megfelel a formális definíciónak.

11) Mennyi a valószínűsége, hogy egy négygyermekes családban **először 2 fiú, majd 2 lány születik**:

A függetlenség alapján: P(A)=$\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$

12) Mennyi a valószínűsége, hogy egy négygyermekes családban az előző után **mindig ellentétes nemű** gyermek születik: Három gyermekre vonatkozik a feltétel: P(A)=$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$

13) Mennyi a valószínűsége, hogy egy négygyermekes családban **egynél több lány** van:

Először a komplementer eseményt tekintjük.

A függetlenség alapján: P($\overline{A}$)=P(nincs lány) + P(1 lány van) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{4} + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{5}{16}$

Az eseménytér vizsgálata alapján: H={FFFF, FFFL, FFLF, FLFF, LFFF, FFLL, ..., LLLL},

n= $V_2^{4,i} = 2^4 = 16$, $\overline{A}$={FFFF, FFFL, FFLF, FLFF, LFFF}, k'=5, P($\overline{A}$)=5/16.

Tehát P(A) = 1- 5/16 =11/16

14) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy **kétgyerekes** családról **tudjuk, hogy van fiú, akkor lány is van** a 2 gyermek között:

A **feltételes valószínűség** alapján: H={FF, FL, LF, ~~LL~~}, A={FL, LF}, azaz n=3, k=2, tehát P(A) =2/3

15) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy **háromgyerekes** családról **tudjuk, hogy van fiú, akkor lány is van** a 3 gyermek között:

A **feltételes valószínűség** alapján: H={FFF, FFL, FLF, LFF, LLF, LFL, FLL, ~~LLL~~},
A={FFL, FLF, LFF, LLF, LFL, FLL }, azaz n=7, k=6, tehát P(A) =6/7

16) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy **háromgyerekes** családról **tudjuk, hogy van két fiú, akkor lány is van** a 3 gyermek között:

A **feltételes valószínűség** alapján: H={FFF, FFL, FLF, LFF, ~~LLF, LFL, FLL, LLL~~},
A={FFL, FLF, LFF}, azaz n=4, k=3, tehát P(A) =3/4

17) Fogalmazzuk meg a 10) – 16) feladatokat **pénzérmékkel**, és oldjuk meg azokat is!

Fiú helyett fej, lány helyett írás, születés helyett dobás. Pl. ha tudjuk, hogy két dobásból az egyik fej lett, annak a valószínűsége, hogy írást is dobtunk: 2/3

III. Bejárási feladatok, a binomiális tétel

1) a) Hányféleképpen tudjuk kiolvasni az alábbi szóháromszögből a **KOMBINATORIKA** szót:

K	O	M	B	I	N	A	T	O	R	I	K	A
O	M	B	I	N	A	T	O	R	I	K	A	
M	B	I	N	A	T	O	R	I	K	A		
B	I	N	A	T	O	R	I	K	A			
I	N	A	T	O	R	I	K	A				
N	A	T	O	R	I	K	A					
A	T	O	R	I	K	A						
T	O	R	I	K	A							
O	R	I	K	A								
R	I	K	A									
I	K	A										
K	A											
A												

1. megoldás: A bal felső csúcsban lévő K betűről indulunk, minden lépést jobbra vagy lefelé is megtehetünk, azaz mindvégig 2 lehetőségünk van minden lépésre. Mivel 12 lépést kell tennünk, összesen 2^{12}=4096 kiolvasási útvonal van.

2. megoldás: A feladat ismétléses variáció, két elemünk van: J és L, ezekből kell 14 hosszúságú sorozatot készítenünk, úgy, hogy bármelyik elem akárhányszor szerepelhet: $V_2^{12,i} = 2^{12} = 4096$

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a piros (felső) A betűnél fejezzük be a kiolvasást, azaz **végig a piros téglalapban haladunk** a kiolvasás során:

1. megoldás: Itt már nincs mindvégig 2 lehetőségünk, ha elérjük a jobboldali vagy az alsó határvonalat, akkor kényszerpályára jutunk. Mivel a kiolvasás során ötször kell lefelé lépnünk és 7-szer jobbra, a rekurzív összeszámlálási módszert alkalmazva a 2. melléklet táblázatában az L=5 sor és a J=7 oszlop metszetében lévő cellában találjuk a kiolvasások számát: 792

2. megoldás: Ismétléses permutációval: Az 5 db L és 7 db J betűnek összesen $P_{12}^{5,7,i} = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = 792$ különböző sorrendje van.

3. megoldás: Ismétlés nélküli kombinációval: A 12 lépésből kell kiválasztanunk azt az 5-öt, amikor lefelé haladunk. Ez $C_{12}^{5} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{7!\cdot 5!} = 792$ Az eredmény kiolvasható a 3. melléklet Pascal-háromszögének 12. sorából is, vagy meghatározható számológéppel: 12 nCr 5 = 792

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a kék A betűnél fejezzük be a kiolvasást, azaz **végig a kéktéglalapban haladunk** a kiolvasás során:

L=10, J=2, tehát 66

d) Adjuk meg az összes téglalapra annak valószínűségét, hogy végig abban haladunk a véletlenszerű kiolvasás során: A 2. melléklet alapján: L=12, J=0: 1; L=11, J=1: 12; átlósan felfelé haladva a táblázatban, sorra: 66, 220, 495, 792, 924, 792, 495, 220, 66, 12, 1.

Ezek összege 4096, a szóháromszög összes kiolvasásainak száma.

e) Adjuk meg az összes **T betűre** annak valószínűségét, hogy áthaladunk rajta a véletlenszerű kiolvasás során:

Hányféle út vezet egy adott T betűn keresztül? Először megnézzük, hogy hányféleképpen juthatunk el oda, utána azt, hogy hányféleképpen mehetünk tovább. Mivel a két részfeladat egymástól független, az összes áthaladások száma a tekintett T betűn ezek szorzata lesz. Az első kérdésre a 2. melléklet ad választ, a 8 betűs KOMBINAT alszó kiolvasásainak számait kell megnéznünk az egyes téglalapokra. Viszont bármelyik T betűről indulva már ugyanazt a teljes TORIKA szóháromszöget kell vizsgálnunk, azaz minden T betűről 2^5=32-féleképpen haladhatunk tovább. A keresett valószínűségeket a kedvező esetek (az adott T betűn való áthaladások száma: X$\cdot 2^5$= X$\cdot$32) és az összes esetek számának 2^{12}=4096-nak a hányadosa adja. Vegyük észre, hogy 2^5=32-vel egyszerűsíthetünk, azaz az egész feladat arra egyszerűsödik, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy a KOMBINAT alszó kiolvasását az egyes T betűkön fejezzük be. Ez pedig a 2. melléklet alapján rendre:

L=7, J=0, k=1, n=2^7=128, tehát $P_1=\frac{1}{128}$

L=6, J=1, k=7, n=2^7=128, tehát $P_2=\frac{7}{128}$

L=5, J=2, k=21, n=2^7=128, tehát $P_3=\frac{21}{128}$

L=4, J=3, k=35, n=2^7=128, tehát $P_4=\frac{35}{128}$

L=3, J=4, k=35, n=2^7=128, tehát $P_5=\frac{35}{128}$

L=2, J=5, k=21, n=2^7=128, tehát $P_6=\frac{21}{128}$

L=1, J=6, k=7, n=2^7=128, tehát $P_7=\frac{7}{128}$

L=0, J=7, k=1, n=2^7=128, tehát $P_8=\frac{1}{128}$

$$\sum P_i = \frac{128}{128} = 1$$

f) Adjuk meg az összes T betűre annak valószínűségét, hogy áthaladunk rajta a véletlenszerű kiolvasás során azzal a feltétellel, hogy végig

α) a piros:

Most nem egyszerűsíthetünk a TORIKA alszó kiolvasásával, mert azt is téglalapokban kell megtennünk, így azokra is különböző értékeket kapunk. Ezeket az értékeket kiolvashatjuk a 2. mellékletből vagy beírhatjuk az éppen aktuális téglalapokba a rekurzív összegzések eredményeit.

Az összes esetek száma a piros téglalapban: L=5, J=7, n=792

Nézzük meg a kedvező esetek számát először a kiemelt T betűre:

$L_1=3$, $J_1=4$, $k_1=35$; $L_2=2$, $J_2=3$, $k_2=10$, így $k=k_1 \cdot k_2=350$. Tehát $P=k/n=350/792$

A kedvező esetek száma rendre a piros téglalap összes T betűjére:

$L_1=5$, $J_1=2$, $k_1=21$; $L_2=0$, $J_2=5$, $k_2=1$, így $k=k_1 \cdot k_2=21$; $P_1=\frac{21}{792}$

$L_1=4$, $J_1=3$, $k_1=35$; $L_2=1$, $J_2=4$, $k_2=5$, így $k=k_1 \cdot k_2=175$; $P_2=\frac{175}{792}$

$L_1=3$, $J_1=4$, $k_1=35$; $L_2=2$, $J_2=3$, $k_2=10$, így $k=k_1 \cdot k_2=350$; $P_3=\frac{350}{792}$

$L_1=2$, $J_1=5$, $k_1=21$; $L_2=3$, $J_2=2$, $k_2=10$, így $k=k_1 \cdot k_2=210$; $P_4=\frac{210}{792}$

$L_1=1$, $J_1=6$, $k_1=7$; $L_2=4$, $J_2=1$, $k_2=5$, így $k=k_1 \cdot k_2=35$; $P_5=\frac{35}{792}$

$L_1=0$, $J_1=7$, $k_1=1$; $L_2=5$, $J_2=0$, $k_2=1$, így $k=k_1 \cdot k_2=1$; $P_6=\frac{1}{792}$

$$\sum P_i = \frac{792}{792} = 1$$

β) a kék téglalapban kell haladnunk:

Az összes esetek száma a kék téglalapban: L=10, J=2, n=66

A kék téglalapban csak 3 T betű található:

L_1=7, J_1=0, k_1=1; L_2=3, J_2=2, k_2=10, így k=$k_1 \cdot k_2$=10; $P_1=\frac{10}{66}$

L_1=6, J_1=1, k_1=7; L_2=4, J_2=1, k_2=5, így k=$k_1 \cdot k_2$=35; $P_2=\frac{35}{66}$

L_1=5, J_1=2, k_1=21; L_2=5, J_2=0, k_2=1, így k=$k_1 \cdot k_2$=21; $P_2=\frac{21}{66}$

$$\sum P_i = \frac{66}{66} = 1$$

2) A 2. mellékletben szerepel egy 20 lépéses szóháromszög értéktáblázata.

Határozd meg a segítségével C_{17}^{8}, C_{18}^{12}, C_{18}^{16}, C_{19}^{11}, C_{20}^{7} értékét:

C_{17}^{8} a szóháromszögek nyelvére lefordítva azt jelenti, hogy 17 lépésből 8-at teszek meg jobbra, azaz L=9, J=8, tehát C_{17}^{8}=24310

Ez alapján C_{18}^{12} =18564, C_{18}^{16} =153, C_{19}^{11} =75582, C_{20}^{7}=77520

Készítsük el **Excellel** egy 25 karakteres szó szóháromszögének értéktáblázatát!

A táblázatot a 4. melléklet tartalmazza.

3) Egy 6, 8, ill. 10 szögsorból álló **Galton-deszka** egyes vályúiba mekkora valószínűséggel érkeznek a golyók?

s szögsor esetén a golyó n-szer indulhat az egyes szögekről jobbra vagy balra, így az ös-szes útvonal száma: $n=2^s$

A vályúk száma s+1, sorszámozásuk: 0, 1, 2, ..., s. A golyó akkor érkezik a k-adik vályúba, ha az s ütközés után k-szor fordul jobbra. Ha k=0, akkor érkezik az első, azaz 0 sorszámú vályúba, ha k=s, akkor az utolsóba. Az s db lépésből éppen annyi féleképpen lehet kiválasztani azokat a lépéseket, amikor a golyó jobbra fordul, ahány k elemű részhalmaza van az s elemű halmaznak, azaz $C_s^k = \binom{s}{k}$-féleképpen. Ezeket az értékeket a Pascal-háromszög s-edik sora tartalmazza vagy kiszámíthatjuk számológéppel (s nCr k =).

6 szögsor: $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{15}{64}, \frac{20}{64}, \frac{15}{64}, \frac{6}{64}, \frac{1}{64}$

8 szögsor: $\frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}, \frac{8}{256}, \frac{28}{256}, \frac{56}{256}, \frac{70}{256}, \frac{56}{256}, \frac{28}{256}, \frac{8}{256}, \frac{1}{256}$

10 szögsor: $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}, \frac{10}{1024}, \frac{45}{1024}, \frac{120}{1024}, \frac{210}{1024}, \frac{252}{1024}, \frac{210}{1024}, \frac{120}{1024}, \frac{45}{1024}, \frac{10}{1024}, \frac{1}{1024},$

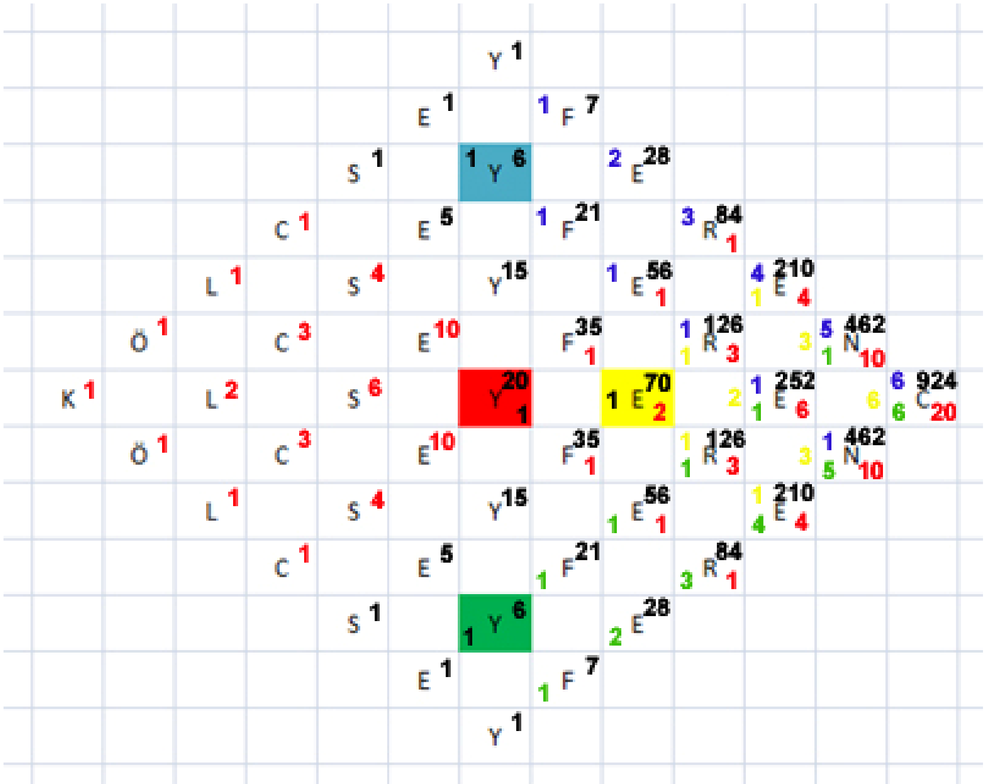
A valószínűségek összege mindegyik esetben 1.

4) Készítsük el a 3. mellékletben található **Pascal-háromszög** 16-18. sorát!

A táblázatot az 5. melléklet tartalmazza.

5) Csak jobbra fel és jobbra lefelé haladva, feltételezve, hogy sohasem lépünk ki a szórombuszból, mennyi a valószínűsége, hogy **KÖLCSEY FERENC** nevének véletlenszerű kiolvasása közben áthaladunk

a) a piros (középső) Y betűn:



Összesen n=924 db 12 lépésből álló kiolvasási útvonal lehetséges a rekurzív összeadási módszer szerint. Láthatjuk, hogy a kapott érték éppen a Pascal-háromszög 12 sorának középső eleme, ahogy a teljes táblázat is része a 12 soros Pascal-háromszög 90°-os elforgatottjának, egy abból kiemelt rombusz.

A piros Y betűhöz 20-féleképpen juthatunk el, onnan kiindulva szintén 20-féle befejező útvonal található, így a kedvező útvonalak száma k=20·20=400. P=k/n=400/924 ≈ 0,43

b) a kék vagy a zöld Y betűn:

A kék Y-hoz 6 út vezet, onnan tovább szintén 6, ez 6·6=36 lehetőség. Ugyanennyi van a zöld Y esetén is, így k=72, tehát P=72/924 ≈ 0,08

Megjegyzés: A szélső Y-okon keresztül csak 1-1 út vezet, így annak valószínűsége, hogy ezeken haladunk át, csak 2/924 ≈ 0,002.

Így pl. a piros és a kék közötti Y esélye: P= $\frac{1}{2}\cdot\frac{924-400-72-2}{924}=\frac{225}{924}$ ≈ 0,24

c) a sárga E betűn:

Az ábráról leolvasható, hogy k=70·6=420, tehát P=420/924 ≈ 0,45

d) a piros Y **és** a sárga E betűn:

A piros Y-hoz 20 út vezet. Onnan kiindulva a sárga E-hez 2, így a sárga E-hez a piros Y-on át vezető utak száma 40. (A maradék 30 út a piros melletti Y-okon át vezet, melyekhez az ábra szerint 15-15 út vezetett, s azokról csak egyféleképpen lehet a sárga E-hez jutni.) A sárga E-ből kiindulva 6 befejező út van. így a feltételeknek eleget tevő utak száma k=40·6=240, tehát P=240/924 ≈ 0,26

e) a piros Y **vagy** a sárga E betűn:

Két események összegének valószínűsége: P(A+B)=P(A) + P(B) – P(A·B)

Tehát P = $\frac{400}{924} + \frac{420}{924} - \frac{240}{924} = \frac{580}{924}$ ≈ 0,63

6) Írjuk le szóháromszögbe a **teljes nevünket**.

a) Mekkora valószínűséggel fejezhetjük be a kiolvasást az egyes utolsó betűkön:

Használjuk fel segítségül a 2. melléklet értéktáblázatát!

b) Mekkora valószínűséggel haladunk át a kiolvasás során keresztnevünk egyes első betűin:

Vegyük észre az egyszerűsítési lehetőséget!

7) Határozzuk meg a **Pascal-háromszög segítségével**

a) $(a+b)^6$ kifejezését:

$(a+b)^6 = C_6^0 \cdot a^6 \cdot b^0 + C_6^1 \cdot a^5 \cdot b^1 + C_6^2 \cdot a^4 \cdot b^2 + C_6^3 \cdot a^3 \cdot b^3 + C_6^4 \cdot a^2 \cdot b^4 + C_6^5 \cdot a^1 \cdot b^5 + C_6^6 \cdot a^0 \cdot b^6 =$

$1 \cdot a^6 \cdot b^0 + 6 \cdot a^5 \cdot b^1 + 15 \cdot a^4 \cdot b^2 + 20 \cdot a^3 \cdot b^3 + 15 \cdot a^2 \cdot b^4 + 6 \cdot a^1 \cdot b^5 + 1 \cdot a^0 \cdot b^6$

b) $(1+0{,}1)^5$ értékét 0,1 pontossággal:

A Pascal-háromszög 5. sora: 1 5 10 10 5 1

$(1+0{,}1)^5 = \underline{1^5 \cdot 0{,}1^0 + 5 \cdot 1^4 \cdot 0{,}1^1 + 10 \cdot 1^3 \cdot 0{,}1^2} + 10 \cdot 1^2 \cdot 0{,}1^3 + 5 \cdot 1^1 \cdot 0{,}1^4 + 1 \cdot 1^0 \cdot 0{,}1^5 =$

$\underline{1 + 0{,}5 + 0{,}1} + \cancel{0{,}01 + 0{,}0005 + 0{,}00001} \approx 1{,}6$

Csak addig kell néznünk a tagokat, ameddig a nagyságrendjük befolyásolja az eredményt a megadott pontosságon belül!

c) $(1+0{,}02)^{10}$ értékét 0,001 pontossággal:

A Pascal-háromszög 10. sora: 1 10 45 120 210, 252, ...

$(1+0{,}02)^{10} = 1^{10} \cdot 0{,}02^0 + 10 \cdot 1^9 \cdot 0{,}02^1 + 45 \cdot 1^8 \cdot 0{,}02^2 + 120 \cdot 1^7 \cdot 0{,}02^3 + \ldots$

$= 1 + 0{,}2 + 0{,}018 + 0{,}00096 + \ldots \approx 1{,}219$

Ell. $1{,}02^{10} \approx 1{,}219$

8) Igazoljuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget:

Ha n tetszőleges pozitív egész és α tetszőleges pozitív szám, akkor $(1+\alpha)^n \geq 1 + n \cdot \alpha$

A binomiális tétel szerint $(1+\alpha)^n = 1^n \cdot \alpha^0 + n \cdot 1^{n-1} \cdot \alpha^1 + \ldots \geq 1 + n \cdot \alpha$

IV. A binomiális eloszlás

1) Mennyi a valószínűsége, hogy **egy pénzérmét egymás után tízszer feldobva**

a) 8 fej lesz:

Annak a valószínűsége, hogy egy dobás fej lesz: p=0,5.

Annak a valószínűsége, hogy nem lesz fej: 1-p = 0,5.

A dobások egymástól függetlenek, így pl. annak a valószínűsége, hogy az első 8 dobás fej lesz, az utolsó 2 pedig nem: $P_1 = 0{,}5^8 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}5^{10}$

Az, hogy melyik 8 dobás lesz fej, C_{10}^8-féleképpen alakulhat. A 3. mellékletben szereplő Pascal-háromszög alapján $C_{10}^8 = 45$. Mivel ezek a kimenetelek egymást kizárják, nem következhet be pl. egy dobássorozatnál, hogy az első 8 dobás lesz fej, meg az is, hogy az utolsó 8, ezért az egyes kimenetelek valószínűségei összeadódnak, azaz $P = 45 \cdot 0{,}5^{10}$

Formálisan tehát $P = P(8) = C_{10}^8 \cdot p^8 \cdot (1-p)^2 = 45 \cdot 0{,}5^8 \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}044$

b) legalább 8 fej lesz:

$P = P(\geq 8) = P(8) + P(9) + P(10) = C_{10}^8 \cdot p^8 \cdot (1-p)^2 + C_{10}^9 \cdot p^9 \cdot (1-p)^1 + C_{10}^{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^0 =$

$45 \cdot 0{,}5^8 \cdot 0{,}5^2 + 10 \cdot 0{,}5^9 \cdot 0{,}5^1 + 1 \cdot 0{,}5^{10} \cdot 0{,}5^0 \approx 0{,}044 + 0{,}01 + 0{,}001 = 0{,}055$

c) legalább 1 fej lesz:

Egyszerűbb a komplementer eseményt vizsgálni. Mennyi a valószínűsége, hogy a 10 dobás között egy fej sem lesz. Ezután felhasználjuk, hogy $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

$P = P(\geq 1) = 1 - P(0) = 1 - C_{10}^0 \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10} = 1 - 1 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}999$

2)Mennyi a valószínűsége, hogy **egy 8 gyermekes családban** a gyermekek között

a) 5 lány van:

Annak a valószínűsége, hogy egy gyermek lány lesz p = 0,5

$P = P(5) = C_8^5 \cdot p^5 \cdot (1-p)^3 = 56 \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^3 \approx 0{,}22$

b) a három legidősebb gyermek lány, és még pontosan 2 lány van:

$P = P(3 + 2) = 0{,}5^3 \cdot C_5^2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^3 = 0{,}5^3 \cdot 10 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^3 \approx 0{,}04$

c) legalább két lány van:

Komplementer esemény: 0 vagy 1 lány van.

$P = P(\geq 2) = 1 - P(<2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - C_8^0 \cdot p^0 \cdot (1-p)^8 + C_8^1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^7 =$

$1 - 1 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^8 - 8 \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^7 \approx 0{,}965$

d) A három legidősebb gyermek között 2 fiú van, a két középső között 1 fiú van és a három legfiatalabb között 2 fiú van:

A dobássorozat három része független egymástól, ezért

$P = P(2 + 1 + 2) = C_3^2\, p^2 \cdot (1-p)^1 \cdot C_2^1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^1 \cdot C_3^2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^1 =$

$3 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^1 \cdot 2 \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^1 \cdot 3 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^1 \approx 0{,}07$

3) Egy **teszt** 10 kérdésből áll, és minden kérdésre 4 válaszlehetőség van. Mennyi a valószínűsége, hogy a tesztet véletlenszerűen kitöltve

a) 8 jó válaszunk lesz:

Egy kérdés esetén a helyes válasz valószínűsége p=0,25, a hibás válaszé 0,75.

$P = P(8) = C_{10}^8 \cdot p^8 \cdot (1-p)^2 = 45 \cdot 0{,}25^8 \cdot 0{,}75^2 \approx 0{,}0004$, azaz 0,04%

b) legalább 8 jó válaszunk lesz:

$P = P(\geq 8) = P(8) + P(9) + P(10) = C_{10}^8 \cdot p^8 \cdot (1-p)^2 + C_{10}^9 \cdot p^9 \cdot (1-p)^1 + C_{10}^{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^0 =$
$45 \cdot 0{,}25^8 \cdot 0{,}75^2 + 10 \cdot 0{,}25^9 \cdot 0{,}75^1 + 1 \cdot 0{,}25^{10} \cdot 0{,}75^0 \approx 0{,}0004 + 0{,}00003 + 0{,}000001 \approx 0{,}00043$

c) legalább 1 jó válaszunk lesz:

$P = P(\geq 1) = 1 - P(0) = 1 - C_{10}^0 \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10} = 1 - 1 \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} \approx 0{,}94$

d) 0, 1, 2, 3, … , 10 jó válaszunk lesz:

$P(0) = C_{10}^0 \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10} = 1 \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} \approx 0{,}056$

$P(1) = C_{10}^1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^9 = 10 \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^9 \approx 0{,}188$

$P(2) = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^8 = 45 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^8 \approx 0{,}282$

$P(3) = C_{10}^3 \cdot p^3 \cdot (1-p)^7 = 120 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^7 \approx 0{,}250$

$P(4) = C_{10}^4 \cdot p^4 \cdot (1-p)^6 = 210 \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^6 \approx 0{,}146$

$P(5) = C_{10}^5 \cdot p^5 \cdot (1-p)^5 = 252 \cdot 0{,}25^5 \cdot 0{,}75^5 \approx 0{,}058$

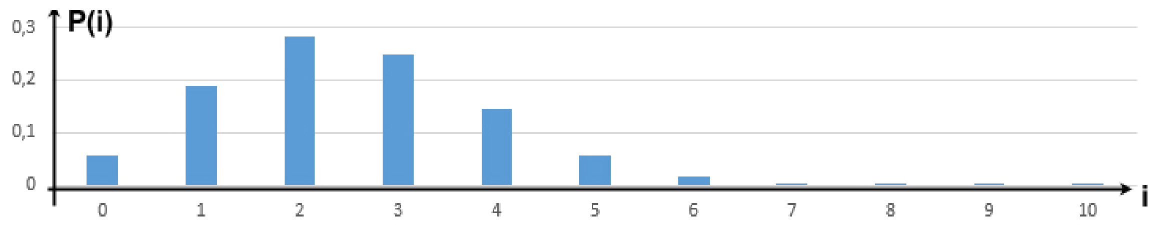
$P(6) = C_{10}^6 \cdot p^6 \cdot (1-p)^4 = 210 \cdot 0{,}25^6 \cdot 0{,}75^4 \approx 0{,}016$

$P(7) = C_{10}^7 \cdot p^7 \cdot (1-p)^3 = 120 \cdot 0{,}25^7 \cdot 0{,}75^3 \approx 0{,}003$

$P(8) = C_{10}^8 \cdot p^8 \cdot (1-p)^2 = 45 \cdot 0{,}25^8 \cdot 0{,}75^2 \approx 0{,}0004$

$P(9) = C_{10}^9 \cdot p^9 \cdot (1-p)^1 = 10 \cdot 0{,}25^9 \cdot 0{,}75^1 \approx 0{,}00003$

$P(10) = C_{10}^{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^0 = 1 \cdot 0{,}25^{10} \cdot 0{,}75^0 \approx 0{,}000001$



4) Hat soros **klasszikus Galton-deszkánál**, ahol minden szögnél 0,5 valószínűséggel megy jobbra, ill. balra a golyó, mennyi lesz a valószínűsége, hogy a golyó végül az 0., 1., 2., 3., …, 6. vályúba érkezik:

1. megoldás: Az összes útvonal száma: $2^6=64$

A Pascal-háromszög 6. sora szerint a kedvező esetek száma az egyes vályúk esetén:

1 6 15 20 15 6 1

A valószínűségek tehát:

$\frac{1}{64}$ $\frac{6}{64}$ $\frac{15}{64}$ $\frac{20}{64}$ $\frac{15}{64}$ $\frac{6}{64}$ $\frac{1}{64}$

2. megoldás: Annak a valószínűsége, hogy egy szögről a golyó jobbra indul tovább: p=0,5. Az egyes szögekről történő továbbhaladások iránya független egymástól. A golyó akkor érkezik az k-adik vályúba, ha a 6 ütközés során éppen k-szor indul jobbra. Így a binomiális eloszlás szerint:

$P(0) = C_6^0 \cdot p^0 \cdot (1-p)^6 = 1 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^6 \approx 0{,}016$

$P(1) = C_6^1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^5 = 6 \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^5 \approx 0{,}094$

$P(2) = C_6^2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^4 = 15 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^4 \approx 0{,}23$

$P(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot (1-p)^3 = 20 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^3 \approx 0{,}31$

$P(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot (1-p)^2 = 15 \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}23$

$P(5) = C_6^5 \cdot p^5 \cdot (1-p)^1 = 6 \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^1 \approx 0{,}094$

$P(6) = C_6^6 \cdot p^6 \cdot (1-p)^0 = 1 \cdot 0{,}5^6 \cdot 0{,}5^0 \approx 0{,}016$

5) Hat soros **módosított Galton-deszkánál**, ahol minden szögnél 0,8 a valószínűsége, hogy a golyó jobbra megy, mennyi lesz a valószínűsége, hogy a golyó végül az 0., 1., 2., 3., …, 6. vályúba érkezik:

A módosított Galton-deszkánál az egyes útvonalak nem azonos valószínűségűek, nem tekinthetők elemi eseményeknek, így csak a binomiális eloszlást alkalmazhatjuk. Annak a valószínűsége, hogy egy szögről a golyó jobbra indul tovább: p=0,8, annak, hogy balra: 1-p=0,2.

$P(0) = C_6^0 \cdot p^0 \cdot (1-p)^6 = 1 \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^6 \approx 0{,}000064$

$P(1) = C_6^1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^5 = 6 \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^5 \approx 0{,}0015$

$P(2) = C_6^2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^4 = 15 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^4 \approx 0{,}015$

$P(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot (1-p)^3 = 20 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^3 \approx 0{,}082$

$P(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot (1-p)^2 = 15 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}246$

$P(5) = C_6^5 \cdot p^5 \cdot (1-p)^1 = 6 \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^1 \approx 0{,}393$

$P(6) = C_6^6 \cdot p^6 \cdot (1-p)^0 = 1 \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2^0 \approx 0{,}262$

6) Mennyi a valószínűsége, hogy egy **13+1 találatos totószelvényt** véletlenszerűen kitöltve, a +1 mérkőzést figyelmen kívül hagyva

a) 13 találatunk lesz:

1. megoldás: Minden mérkőzés eredménye 1, 2 vagy x lehet, ebből kell 13 hosszúságú sorozatot készíteni, így az összes esetek száma: $n=V_3^{13,i}=3^{13}$, k=1, így $P(13) = \frac{1}{3^{13}}$

2. megoldás: Annak a valószínűsége, hogy egy konkrét mérkőzést eltalálunk: p=1/3, annak a valószínűsége, hogy nem találjuk el: 2/3

A binomiális eloszlás szerint $P(13) = C_{13}^{13} \cdot p^{13} \cdot (1-p)^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \approx 6{,}27 \cdot 10^{-7}$

b) pontosan 10 találatunk lesz:

A binomiális eloszlás szerint $P(10) = C_{13}^{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^3 = 286 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0{,}0014$

c) 12-nél kevesebb találatunk lesz:

$P(<12) = 1 - P(\geq 12) = 1 - P(12) - P(13) = 1 - C_{13}^{12} \cdot p^{12} \cdot (1-p)^1 - C_{13}^{13} \cdot p^{13} \cdot (1-p)^0 =$

$1 - 13 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \approx 1 - 1{,}63 \cdot 10^{-5} - 6{,}27 \cdot 10^{-7} \approx 1$

d) 1-nél több találatunk lesz:

$P(>1) = 1 - P(\leq 1) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - C_{13}^{0} \cdot p^{0} \cdot (1-p)^{13} - C_{13}^{1} \cdot p^{1} \cdot (1-p)^{12} =$

$1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{13} - 13 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \approx 1 - 0{,}0051 - 0{,}033 \approx 0{,}962$

e) 0, 1, 2, 3, …, 13 találatunk lesz:

$P(0) = C_{13}^{0} \cdot p^{0} \cdot (1-p)^{13} = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{13} \approx 0{,}0051$

$P(1) = C_{13}^{1} \cdot p^{1} \cdot (1-p)^{12} = 13 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \approx 0{,}033$

$P(2) = C_{13}^{2} \cdot p^{2} \cdot (1-p)^{11} = 78 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \approx 0{,}1$

$P(3) = C_{13}^{3} \cdot p^{3} \cdot (1-p)^{10} = 286 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0{,}184$

$P(4) = C_{13}^{4} \cdot p^{4} \cdot (1-p)^{9} = 715 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{9} \approx 0{,}23$

…

$P(12) = C_{13}^{12} \cdot p^{12} \cdot (1-p)^{1} = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{1} \approx 1{,}63 \cdot 10^{-5}$

$P(13) = C_{13}^{13} \cdot p^{13} \cdot (1-p)^{0} = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0} \approx 6{,}27 \cdot 10^{-7}$

7) Mennyi a valószínűsége, hogy **egy szabályos dobókockát 15-ször feldobva**

a) 10-szer dobunk négyest:

A négyes dobásának valószínűsége: p=1/6, a nem négyesé 5/6

Arra, hogy a 15-ből melyik 10 dobásunk legyen négyes, C_{15}^{10} =3003 lehetőség van, amit a Pascal-háromszög 15. sorából olvashatunk le vagy alkalmas számológépen is megkaphatjuk az nCr funkcióval.

P(10-szer 4) = $C_{15}^{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^5 = 3003 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5} \approx 2 \cdot 10^{-5}$

b) 10-szer dobunk ötöst:

Nyilván ugyanannyi, mint az előbbi, hiszen az ötös dobásának ugyanannyi a valószínűsége, mint a négyesnek.

c) 10-szer dobunk hatost:

Hasonlóan P(10-szer 6) = P(10-szer 4)

d) 10-szer dobunk 4-nél nagyobbat:

Ha egy 15 dobásból álló dobássorozatban 10-szer ötöst dobok, akkor az kizája, hogy 10-szer 6-ost dobjak ugyanabban a sorozatban, ezért

P(10-szer > 4) = P(10-szer 5) + P(10-szer 6) $\approx 4 \cdot 10^{-5}$

e) legalább 14-szer hatost dobunk:

P= P(14-szer 6) + P(15-ször 6) = $C_{15}^{14} \cdot p^{14} \cdot (1-p)^1 + C_{15}^{15} \cdot p^{15} \cdot (1-p)^0$ =

$15 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{14} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1} + 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{0} \approx 1{,}595 \cdot 10^{-10} + 2{,}13 \cdot 10^{-12} \approx 1{,}62 \cdot 10^{-10}$

f) legalább 2-szer hatost dobunk:

A komplementer esemény: maximum egyszer dobunk hatost.

P= 1- P(0-szor 6) + P(1-szer 6) = $1 - C_{15}^{0} \cdot p^{0} \cdot (1-p)^{15} - C_{15}^{1} \cdot p^{1} \cdot (1-p)^{14}$ =

$1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{0} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{15} - 15 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{14} \approx 1 - 0{,}065 - 0{,}195 = 0{,}74$

g) 0, 1, 2, …., 15-ször dobunk prímszámot:

Annak a valószínűsége, hogy prímszámot dobunk: p=3/6=1/2, mivel a 2, 3 és az 5 a prímek a dobókockán lévő számok közül.

P(i) = = $C_{15}^{i} \cdot p^{i} \cdot (1-p)^{15-i} = \binom{15}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15-i}$

8) Egy **gyufásdoboz** legnagyobb lapjaira írtuk az egyest és a hatost, a középsőkre a kettest és az ötöst és a legkisebbekre a hármast és a négyest. 500 dobás alapján **az egyes és a hatos relatív gyakorisága 0,3, a kettesé és az ötösé 0,15, a hármasé és a négyesé 0,05**. Mennyi a valószínűsége, hogy egymás után 15-ször feldobva

a) 10-szer dobunk négyest:

A négyes dobásának valószínűsége: p=0,05, a nem négyesé 0,95

Arra, hogy a 15-ből melyik 10 dobásunk legyen négyes, C_{15}^{10} =3003 lehetőség van.

P(10-szer 4) = $C_{15}^{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^5 = 3003 \cdot 0{,}05^{10} \cdot 0{,}95^5 \approx 2{,}27 \cdot 10^{-10}$

b) 10-szer dobunk ötöst:

Az ötös dobásának valószínűsége: p=0,15, a nem ötösé 0,85

Arra, hogy a 15-ből melyik 10 dobásunk legyen négyes, C_{15}^{10} =3003 lehetőség van.

P(10-szer 5) = $C_{15}^{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^5 = 3003 \cdot 0{,}15^{10} \cdot 0{,}85^5 \approx 7{,}68 \cdot 10^{-6}$

c) 10-szer dobunk hatost:

A hatos dobásának valószínűsége: p=0,3, a nem négyesé 0,7

Arra, hogy a 15-ből melyik 10 dobásunk legyen négyes, C_{15}^{10} =3003 lehetőség van.

P(10-szer 6) = $C_{15}^{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^5 = 3003 \cdot 0{,}3^{10} \cdot 0{,}7^5 \approx 0{,}003$

d) 10-szer dobunk 4-nél nagyobbat:

P(10-szer > 4) = P(10-szer 5) + P(10-szer 6) $\approx$ 0,003

e) legalább 14-szer hatost dobunk:

P= P(14-szer 6) + P(15-ször 6) = $C_{15}^{14} \cdot p^{14} \cdot (1-p)^1 + C_{15}^{15} \cdot p^{15} \cdot (1-p)^0 =$

$15 \cdot 0{,}3^{14} \cdot 0{,}7^1 + 1 \cdot 0{,}3^{15} \cdot 0{,}7^0 \approx 5{,}022 \cdot 10^{-7} + 1{,}44 \cdot 10^{-8} \approx 5{,}166 \cdot 10^{-7}$

f) legalább 2-szer hatost dobunk:

A komplementer esemény: maximum egyszer dobunk hatost.

P= 1- P(0-szor 6) + P(1-szer 6) = $1 - C_{15}^{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{15} - C_{15}^{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{14} =$

$1 - 1 \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{15} - 15 \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^{14} \approx 1 - 0{,}005 - 0{,}03 = 0{,}965$

g) 0, 1, 2, …., 15-ször dobunk prímszámot:

A dobókockán lévő számok közül a prímszámok: 2, 3 és 5. Ezek dobásának valószínűsége 0,15, 0,05 és 0,15, így annak a valószínűsége, hogy prímszámot dobunk: p=0,35, mivel a dobások értéke egymást kizáró esemény. Annak a valószínűsége tehát, hogy nem prímszámot dobunk: 1-0,35=0,65.

P(i) = = $C_{15}^{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{15-i} = \binom{15}{i} \cdot 0{,}35^i \cdot 0{,}65^{15-i}$

9) a) Mennyi a valószínűsége, hogy három szabályos dobókockával egyszerre dobva 16-nál nagyobbat dobunk:

Az elemi eseményeknek az ismétléses variációkat kell tekintenünk, hogy azonos legyen az esélyük. Az összes esetek száma $6^3 = 216$.

P(>16) = P(17) + P(18)

17 = 5+6+6 = 6+5+6 = 6+6+5, ez 3 elemi eseményt jelent.

18 = 6+6+6, ez csak 1 elemi eseményt jelent.

Vagyis P(>16) = 4/216 = 1/54 ≈ 0,0185

b) Mennyi a valószínűsége, hogy ezeket adobásokat 12-szer megismételve

α) egyszer sem dobunk 16-nál nagyobbat:

Annak a valószínűsége, hogy 16-nál nagyobbat dobunk: p= 0,0185

Annak, hogy nem: 1 - 0,0185 = 0,9815

$P(0) = C_{12}^{0} \cdot p^{0} \cdot (1-p)^{12} = 1 \cdot 0{,}0185^{0} \cdot 0{,}9815^{12} \approx 0{,}8$

β) legfeljebb 1-szer dobunk 16-nál nagyobbat:

$P(\leq 1) = P(0) + P(1) = C_{12}^{0} \cdot p^{0} \cdot (1-p)^{12} + C_{12}^{1} \cdot p^{1} \cdot (1-p)^{11} =$

$1 \cdot 0{,}0185^{0} \cdot 0{,}9815^{12} + 12 \cdot 0{,}0185^{1} \cdot 0{,}9815^{11} \approx 0{,}8 + 0{,}18 = 0{,}98$

γ) legalább 10-szer 16-nál nagyobbat dobunk:

$P(\geq 10) = P(10) + P(11) + P(12) =$

$C_{12}^{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^{2} + C_{12}^{11} \cdot p^{11} \cdot (1-p)^{1} + C_{12}^{12} \cdot p^{12} \cdot (1-p)^{0} =$

$66 \cdot 0{,}0185^{10} \cdot 0{,}9815^{2} + 12 \cdot 0{,}0185^{11} \cdot 0{,}9815^{1} + 1 \cdot 0{,}0185^{12} \cdot 0{,}9815^{0} \approx$

$3 \cdot 10^{-16} + 1 \cdot 10^{-18} + 1{,}6 \cdot 10^{-21} \approx 3 \cdot 10^{-16}$

δ) legfeljebb 9-szer dobunk 16-nál nagyobbat:

Ez éppen az előző esemény komplementere, azaz

$P(\leq 9) = 1 - P(\geq 10) \approx 1$

V. Permutációk

1) **6 lány és 6 fiú moziba megy**, és a 8. sorban az1, 2, 3, …, 12 székekre kaptak jegyet.

a) Hányféleképpen foglalhatnak helyet a székeken:

Ez lesz az összes esetek száma: n = $P_{12} = 12!$

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a jegyek véletlenszerű kiosztása során

α) Anna és Bea egymás mellett fog ülni:

Anna és Bea egy egységet alkotnak, az egységen belül 2!=2-féle sorrend lehetséges. Így a kedvező esetek száma k=11!·2

P=$\frac{k}{n} = \frac{11!\cdot 2}{12!} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$ vagy másképpen 17% a keresett valószínűség.

β) Anna, Bea és Cili egymás mellett fog ülni:

k=10!·3!

P=$\frac{k}{n} = \frac{10!\cdot 3!}{12!} = \frac{6}{11\cdot 12} = \frac{1}{22} \approx 0{,}045$, azaz 4,5% a keresett valószínűség.

γ) Anna és Bea, illetve Cili és Dóra egymás mellett fog ülni:

Most egy egységet alkot Anna és Bea, ill. Cili és Dóra.

k=10!·2!·2!

P=$\frac{k}{n} = \frac{10!\cdot 2!\cdot 2!}{12!} = \frac{4}{11\cdot 12} = \frac{1}{33} \approx 0{,}03$, azaz 3% a keresett valószínűség.

δ) Anna, Bea és Cili, illetve Dóra és Edit egymás mellett fog ülni:

k=9!·3!·2!

P=$\frac{k}{n} = \frac{9!\cdot 3!\cdot 2!}{12!} = \frac{6\cdot 2}{10\cdot 11\cdot 12} = \frac{1}{110} \approx 0{,}009$, azaz 0,9% a keresett valószínűség.

ε) Anna és Bea nem fog egymás mellett ülni:

A komplementer eseményt érdemes vizsgálni. Ennek valószínűsége 0,17.

P=1-0,17=0,83

φ) a 6 lány, ill. a 6 fiú külön fog ülni:

Ülhetnek elöl a fiúk és a lányok is, így k=2·6!·6!

P=$\frac{k}{n} = \frac{2\cdot 6!\cdot 6!}{12!} \approx 0{,}002$, azaz 0,2% a keresett valószínűség.

ι) a 6 lány és a hat fiú váltakozva fog ülni:

A sor kezdődhet fiúval és lánnyal is, ezután 6-6 fix hely van a fiúknak és a lányoknak is, így ugyanaz lesz, mint az előző: P≈ 0,002, azaz 0,2%.

κ) Anna és Bea szélen fognak ülni:

k=2·10!

P=$\frac{k}{n}=\frac{2\cdot 10!}{12!}=\frac{2}{11\cdot 12}=\frac{1}{66}\approx 0{,}015$, azaz 1,5% a keresett valószínűség.

λ) Anna és Bea nem fognak szélen ülni:

P=1-0,015=0,985, azaz 98,5%.

μ) lányok fognak szélen ülni:

Helyek	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lehetőségek	6	10!										5

k=6·5·10!

P=$\frac{k}{n}=\frac{30\cdot 10!}{12!}=\frac{30}{11\cdot 12}=\frac{5}{22}\approx 0{,}23$, azaz 23% a keresett valószínűség.

ν) Az első három helyen fiú ül, a következő 3helyen lány, utána megint 3 fiú, majd 3 lány:

k=6·5·4·6·5·4·3·2·1·3·2·1·=$(6!)^2$

P=$\frac{k}{n}=\frac{(6!)^2}{12!}\approx 0{,}001$, azaz 0,1% a keresett valószínűség.

o) a lányok és a fiúk is ábécé rendben ülnek?

A fúk és a lányok is ülhetnek elöl, egyébként meghatározott a sorrend, azaz k=2

P=$\frac{k}{n}=\frac{2}{12!}\approx 4{,}18\cdot 10^{-9}$, azaz $4{,}18\cdot 10^{-7}$% a keresett valószínűség.

2) a) A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány darab **hét jegyű számot** tudunk készíteni, **ha minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel**:

Az első helyen nem állhat 0, a második helyen viszont már beléphet!

Helyek	1	2	3	4	5	6	7
Lehetőségek	6	6	5	4	3	2	1

n=6·6!=4320

b) Mennyi a valószínűsége, hogy az így kapott szám

α) 0-ra fog végződni:

Ekkor nem lesz gond az első számjeggyel. A maradék 6 szám tetszőleges sorrendben állhat előtte, azaz k=6!

P=$\frac{k}{n}=\frac{6!}{6\cdot 6!}=\frac{1}{6}\approx 0{,}17$, azaz 17% a keresett valószínűség.

β) 3-mal osztható lesz:

A számjegyek összege 21, ami osztható hárommal, így minden esetben teljesül a feltétel, azaz P=1, azaz 100%

γ) 5-tel osztható lesz:

Két eset lehetséges a kedvező esetek szempontjából aszerint, hogy az utolsó jegy 5 vagy 0 lesz. Első esetben figyelni kell a kezdő 0 tilalmára is!

Helyek	1	2	3	4	5	6	7
Lehetőségek	5	5	4	3	2	1	„5”

$k_1=5\cdot 5!$

Helyek	1	2	3	4	5	6	7
Lehetőségek	6	5	4	3	2	1	„0”

$k_2=6!$

A két lehetőség egyszerre nem valósulhat meg, tehát $k=k_1+k_2=5\cdot 5!+6\cdot 5!=11\cdot 5!$

$P=\frac{k}{n}=\frac{11\cdot 5!}{6\cdot 6!}=\frac{11\cdot 5!}{36\cdot 5!}=\frac{11}{36}\approx 0{,}31$, azaz 31% a keresett valószínűség.

δ) 4-gyel osztható lesz:

Egy szám akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből álló szám osztható 4-gyel. Most is meg kell különböztetnünk azokat az esetekt, amikor ezekben nem szerepel a 0, ill. amikor szerepel:

Helyek	1	2	3	4	5	6-7
Lehetőségek	4	4	3	2	1	„12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64”

$k_1=4\cdot 4!\cdot 8$

Helyek	1	2	3	4	5	6-7
Lehetőségek	5	4	3	2	1	„04, 20, 40, 60”

$k_2=4\cdot 5!$

A két lehetőség most is összeadódik, tehát $k=k_1+k_2=4\cdot 4!\cdot 8+5!\cdot 4=(32+20)\cdot 4!=52\cdot 4!$

$P=\frac{k}{n}=\frac{52\cdot 4!}{6\cdot 6!}=\frac{52\cdot 4!}{180\cdot 4!}=\frac{52}{180}\approx 0{,}29$, azaz 29% a keresett valószínűség.

ε) tartalmazni fogja az „12” részletet:

Most 6 egység lesz: a 0, 12, 3, 4, 5 és 6, így a 0-ra is ügyelve $k=5\cdot 5!$

$P=\frac{k}{n}=\frac{5\cdot 5!}{6\cdot 6!}=\frac{5\cdot 5!}{36\cdot 5!}=\frac{5}{36}\approx 0{,}14$, azaz 14% a keresett valószínűség.

φ) tartalmazni fogja az „123” részletet:

Most 5 egység lesz: a 0, 123, 4, 5 és 6, így a 0-ra is ügyelve $k=4\cdot 4!$

$P=\frac{k}{n}=\frac{4\cdot 4!}{6\cdot 6!}=\frac{4\cdot 4!}{180\cdot 4!}=\frac{4}{180}\approx 0{,}022$, azaz 2,2% a keresett valószínűség.

ι) nem fogja tartalmazni az „123” részletet:

P=1-0,022=0,978, azaz 97,8%

κ) a páros és páratlan számjegyeket váltakozva fogja tartalmazni:

Csak páros számmal kezdődhet, mivel 4 páros és 3 páratlan számunk van, viszont a 0 nem állhat elöl, így k=3·3! ·3! =108.

P=$\frac{k}{n}=\frac{108}{6\cdot 6!}\approx 0{,}025$, azaz 2,5% a keresett valószínűség.

λ) elöl lesz a 3 páratlan számjegy:

n=3!·4!

P=$\frac{k}{n}=\frac{3!\cdot 4!}{6\cdot 6!}=\frac{6\cdot 4!}{180\cdot 4!}=\frac{6}{180}\approx 0{,}033$, azaz 3,3% a keresett valószínűség.

μ) páratlan számjegyek lesznek a két szélén:

Helyek	1	2	3	4	5	6	7
Lehetőségek	3			5!			2

k=3·2·5!=6·5!

P=$\frac{k}{n}=\frac{6\cdot 5!}{6\cdot 6!}=\frac{1}{6}\approx 0{,}17$, azaz 17% a keresett valószínűség.

ν) Az első két számjegy páratlan lesz, a következő kettő páros:

k=3·2·4·3·3!=432

P=$\frac{k}{n}=\frac{432}{6\cdot 6!}\approx 0{,}1$, azaz 10% a keresett valószínűség.

o) a páros és a páratlan számjegyeket is növekvő sorrendben fogja tartalmazni:

Az első helyen csak az 1 állhat. A maradék 2 páratlan számot $\binom{6}{2}=15$-féleképpen tudjuk elhelyezni, így k=15.

P=$\frac{k}{n}=\frac{15}{6\cdot 6!}\approx 0{,}0035$, azaz 0,35% a keresett valószínűség.

3) A 3 éves Pistike elé teszi iskolás nővére az A, A, A, A, A, B, B, D, K, R, R betűkockákat. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen egymás mellé helyezve a kockákat, Pistike az **ABRAKADABRA** szót rakja ki?

Ismétléses permutációval: n=$P_{11}^{5,2,2,i}=\frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!}=83160$, k=1,

P=$\frac{k}{n}=\frac{1}{83160}\approx 0{,}000012$, azaz 0,0012%

4) Oldjuk meg a III. 3) feladatot az ismétléses permutáció felhasználásával:

Pl. a 10 szögsorból álló **Galton-deszka** esetén n=2^{10} útvonal lehetséges.

Akkor érkezik a golyó az x-edik vályúba (x=0,1,2, … ,10), ha x-szer halad jobbra és (10-x)-szer balra.

A lehetőségek száma egyenlő x db j betű és 10-x db b betű sorrendjeinek számával, azaz

k=$P_{10}^{x,10-x,i}=\frac{10!}{x!\cdot(10-x)!}=\binom{10}{x}=C_{10}^{x}$, tehát P(x-edik vályú) = $\frac{\binom{10}{x}}{2^{10}}$

VI. Műveletek faktoriálisokkal

1) Számítsuk ki az alábbi műveletek eredményét!

a) $11! \cdot 12 \cdot 13 = 13!$

b) $\frac{12!}{10!} = 11 \cdot 12$

c) $(n-2)!\ \ (n-1) = (n-1)!$

d) $(n+1)! \cdot (n+2) \cdot (n+3) = (n+3)!$

e) $\frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2)$

f) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = (n+2)(n+3)$

g) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$

h) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1+1}{(n+1)!} = \frac{n+2}{(n+1)!}$

i) $\frac{1}{(n-2)!} - \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n-1-n}{(n-1)!} = \frac{-1}{(n-1)!}$

j) $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{n^2+n-1}{(n+1)!}$

k) $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{n(n+1)-n-1}{(n+1)!} = \frac{n^2-1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n-1)}{(n+1)!} = \frac{n-1}{n!}$

l) $\frac{n!-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n!-1)(n+1)+n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! \cdot -(n+1)+n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$

m) $\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{[(n+1)!-1](n+2)+n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)!-(n+2)+n+1}{(n+1)!} = \frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}$

2)Definíció szerint 0!:=1 és 1!:=1

Határozzuk meg az Excel programmal az $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}!}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!}+\ \ldots+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}!}$ összeg értékét n=20 esetén:

=B5/A6

A	B	C
0	1,000000000000000	1,000000000000000
1	1,000000000000000	2,000000000000000
2	0,500000000000000	2,500000000000000
3	0,166666666666667	2,666666666666670
4	0,041666666666667	2,708333333333330
5	0,008333333333333	2,716666666666670
6	0,001388888888889	2,718055555555560
7	0,000198412698413	2,718253968253970
8	0,000024801587302	2,718278769841270
9	0,000002755731922	2,718281525573190
10	0,000000275573192	2,718281801146380
11	0,000000025052108	2,718281826198490
12	0,000000002087676	2,718281828286170
13	0,000000000160590	2,718281828446760
14	0,000000000011471	2,718281828458230
15	0,000000000000765	2,718281828458990
16	0,000000000000048	2,718281828459040
17	0,000000000000003	2,718281828459050
18	0,000000000000000	2,718281828459050
19	0,000000000000000	2,718281828459050
20	0,000000000000000	2,718281828459050

Az első oszlopban szerepel az n, a másodikban az $\frac{1}{n!}$ rekurzív módon, a harmadik oszlopban pedig az aktuális összeg szintén rekurzióval. Látható, hogy az összeg nagyon gyorsan tart az Euler-féle e számhoz n=20 után gyakorlatilag már érzékelhetetlenné válik a növekedése.

VII. Variációk

1) a) Az **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** számjegyekből **hány darab hét jegyű számot** tudunk készíteni, ha **minden számjegyet egyszer használhatunk fel**?

9 különböző elem hetedosztályú ismétlés nélküli variációinak számát kell meghatároznunk: $n = V_9^7 = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!}$ =181440

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szám

α) 0-ra fog végződni:

P=0, hiszen a 0 nem szerepel a számjegyek között.

β) 3-mal osztható lesz:

A számjegyek összegének oszhatónak kell lenni 3-mal. Mivel a 9 számjegy összege is osztható 3-mal, azé a kettőé is osztható kell legyen, amit kiveszünk közülük. Ezek lehetnek az 1,2; 1,5; 1,8; 2,4; 2,7; 3,6; 3,9; 4,5; 4,8; 5,7 és 6,9 párok, összesen 11. Ugyanennyi alkalmas 7 elemű részhalmaz lesz.

(Összesen $\binom{9}{7} = 36$ db 7 elemű részhalmaz van, ezek közül 11-ben osztható a számjegyek összege 3-mal, 25-ben pedig nem.) A 11 megfelelő részhalmaz összesen k=11·7! = 55440 hétjegyű számot határoz meg. Tehát P=$\frac{55440}{171440}$ =0,3056 , ami éppen $\frac{11}{36}$, a megfelelő és az összes 7 elemű részhalmaz számának hányadosa.

γ) 5-tel osztható lesz:

Az utolsó helyre az 5-nek kell kerülni, a maradék 8 számból választunk ki elé 6-ot:

k=$V_8^6 = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!} = 20160$

P=$\frac{k}{n} = \frac{20160}{181440} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$

δ) 4-gyel osztható lesz:

Az utolsó két helyen állhat a 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92 és 96, ez 16 lehetőség. A a maradék 7 számból választunk ki elé 5-öt:

k=$16 \cdot V_7^5 = 16 \cdot \frac{7!}{(7-5)!} = 16 \cdot \frac{7!}{2!} = 40320$

P=$\frac{k}{n} = \frac{40320}{181440} \approx 0{,}22$

ε) tartalmazni fogja az „12” részletet:

A „12” mellé a maradék 7 számból $\binom{7}{5}$ =21 db 5 elemű részhalmazt választhatunk. Így tehát 21 db hatos egységünk lesz, és mindegyiknek 6! különböző sorrendje van. Tehát k=21·6! = 15120.

P=$\frac{k}{n} = \frac{15120}{181440} \approx 0{,}083$

φ) tartalmazni fogja az „123” részletet:

A „123” mellé a maradék 6 számból $\binom{6}{4}$ =15 db 4 elemű részhalmazt választhatunk. Így tehát 15 db ötös egységünk lesz, és mindegyiknek 5! különböző sorrendje van. Tehát k=15·5! = 1800.

P=$\frac{k}{n} = \frac{1800}{181440} \approx 0{,}01$

ι) nem fogja tartalmazni az „123” részletet:

P=1-0,01=0,99

κ) váltakozva fog páros és páratlan számjegyeket tartalmazni:

1. Páratlan szám lesz elöl: k_1=(5·4 3·2)·(4·3·2)=2880
2. Páros szám lesz elöl: k_2=(4·3·2·1)·(5·4·3)=1440

k=4320

P=$\frac{k}{n} = \frac{4320}{181440} \approx 0{,}024$

λ) 3 páratlan számjegy lesz elöl:

k=(5·4 3)·6·5·4·3=21600

P=$\frac{k}{n} = \frac{21600}{181440} \approx 0{,}12$

μ) páratlan számjegyek lesznek a két szélén:

k=(5·4)·7·6·5·4·3=50400

P=$\frac{k}{n} = \frac{50400}{181440} \approx 0{,}278$

ν) az első két számjegy páratlan lesz, a következő kettő páros:

k=(5·4)·(4·3)·5·4·3=14400

P=$\frac{k}{n} = \frac{14400}{181440} \approx 0{,}079$

ο) mind az 5 páratlan számot fogja tartalmazni:

Az 5 db páratlan szám mellé a maradék 4 számból $\binom{4}{2}$ =6 db 2 elemű részhalmazt választhatunk a páros számok 4 elemű halmazából.

A sorrendeket figyelembe véve k=6·7!=30240

P=$\frac{k}{n} = \frac{30240}{181440} \approx 0{,}167$

2) a) A **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** számjegyekből **hány darab hét jegyű számot** tudunk készíteni**, ha minden számjegyet egyszer használhatunk fel**:

Most 10 számjegy van, de az első helyre nem kerülhet a 0! Az első helyre 9 lehetőségünk van, utána a maradék 9 számból kell még 6-ot kiválasztanunk.

Így n=9·9·8·...·4, vagy $9\cdot V_9^6 = 9\cdot\frac{9!}{3!} = 544320$

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szám

α) 0-ra fog végződni:

A 0 elé kell még 6 számot választanunk, így $k=V_9^6 = \frac{9!}{3!} = 60480$

$P=\frac{k}{n} = \frac{60480}{544320} \approx 0{,}11$

β) 9-cel osztható lesz:

Most 3 számot kell elhagynunk úgy, hogy az összegük 9-cel osztható legyen.

Összesen $\binom{10}{3}$=120 db 3 elemű részhalmazból a következő számhármasok összege lesz 9 vagy 18: 018, 027, 036, 045, 126, 135, 189, 234, 279, 369, 378, 459, 468 és 567. Ez összesen 14, és 4 db tartalmazza a 0-t. A megfelelő 7 elemű komplementer részhalmazok száma is 14, azok közül viszont 10 tartalmazza a 0-t.

1. A 0 szerepel a kiválasztott számok között: $k_1=10\cdot 6\cdot 6!=43200$
2. A 0 nem szerepel a kiválasztott számok között: $k_2=4\cdot 7!=20160$

Tehát k=63360

$P=\frac{k}{n} = \frac{63360}{544320} \approx 0{,}116$

γ) 5-tel osztható lesz:

1. 0-ra végződik: $k_1=V_9^6 = \frac{9!}{3!} = 60480$
2. 5-re végződik: $k_2=8\cdot V_8^5 = 8\cdot\frac{8!}{3!} = 53760$

Tehát k=114240

$P=\frac{k}{n} = \frac{114240}{544320} \approx 0{,}21$

δ) 4-gyel osztható lesz:

Az utolsó 2 jegyből álló szám: 04, 08, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 92 és 96 lehet. Ez összesen 22 db.

1. Tartalmazza a 0-t: 6db. $k_1=6\cdot V_8^5 = 6\cdot\frac{8!}{3!} = 40320$
2. Nem tartalmazza a 0-t: 16db. $k_2=16\cdot 7\cdot V_7^4 = 112\cdot\frac{7!}{3!} = 94080$

Tehát k=134400

$P=\frac{k}{n} = \frac{134400}{544320} \approx 0{,}247$

ε) tartalmazni fogja az „12” részletet:

1. Tartalmazza a 0-t is: A „12” és a 0 mellé a maradék 7 számból $\binom{7}{4}$ =35 db 4 elemű részhalmazt választhatunk. Ekkor 6 egységünk lesz: k_1=35·5·5! = 21000.
2. Nem tartalmazza a 0-t: A „12” mellé a maradék 7 (hiszen a 0 sem szerepelhet) számból $\binom{7}{5}$ =21 db 5 elemű részhalmazt választhatunk. Ekkor szintén 6 egységünk lesz: k_2=21·6! = 15120.

Tehát k=36120

$P=\frac{k}{n}=\frac{36120}{544320}\approx 0{,}066$

φ) tartalmazni fogja az „123” részletet:

1. Tartalmazza a 0-t is: A „123” és a 0 mellé a maradék 6 számból $\binom{6}{3}$ =20 db 3 elemű részhalmazt választhatunk. Ekkor 5 egységünk lesz: k_1=20·4·4! = 1920.
2. Nem tartalmazza a 0-t: A „123” mellé a maradék 6 (hiszen a 0 sem szerepelhet) számból $\binom{6}{4}$ =15 db 4 elemű részhalmazt választhatunk. Ekkor szintén 5 egységünk lesz: k_2=15·5! = 1800.

Tehát k=3720

$P=\frac{k}{n}=\frac{3720}{544320}\approx 0{,}0068$

ι) nem fogja tartalmazni az „123” részletet:

P= 1- 0,0068=0,9932

κ) váltakozva fog páros és páratlan számjegyeket tartalmazni:

1. Páratlan szám lesz elöl: k_1=(5·4 3·2)·(5·4·3)=7200
2. Páros szám lesz elöl: k_2=(4·4·3·2)·(5·4·3)=57600

k=12960

$P=\frac{k}{n}=\frac{12960}{544320}\approx 0{,}024$

λ) 3 páratlan számjegy lesz elöl:

k=(5·4 3)·7·6·5·4=50400

$P=\frac{k}{n}=\frac{50400}{544320}\approx 0{,}093$

μ) páratlan számjegyek lesznek a két szélén:

k=(5·4)·8·7·6·5·4=134400

$P=\frac{k}{n}=\frac{134400}{544320}\approx 0{,}247$

ν) az első két számjegy páratlan lesz, a következő kettő páros:

k=(5·4)·(5·4)·6·5·4=48000

P=$\frac{k}{n} = \frac{48000}{5443200} \approx 0{,}088$

o) mind az 5 páratlan számot fogja tartalmazni:

1. Tartalmazza a 0-t is: Az 5 páratlan szám és a 0 mellé a maradék 4 számból $\binom{4}{1}$ =4 db 1 elemű részhalmazt választhatunk. Ekkor: k_1=4·6·6! = 17280.

2. Nem tartalmazza a 0-t: Az 5 páratlan szám mellé a maradék 4 (hiszen a 0 sem szerepelhet) számból $\binom{4}{2}$ =6 db 2 elemű részhalmazt választhatunk.

Ekkor: k_2=6·7! = 30240.

Tehát k=47520

P=$\frac{k}{n} = \frac{47520}{544320} \approx 0{,}087$

3) a) Az **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** számjegyekből **hány darab hét jegyű számot** tudunk készíteni, **ha minden számjegyet többször felhasználhatunk**:

9 különböző elem hetedosztályú ismétléses variációi szerepelhetnek: n=$V_9^{7,i} = 9^7$

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szám

α) 0-ra fog végződni:

P=0

β) csupa 3-mal osztható számjegyből áll:

k=$V_3^{7,i} = 3^7$

P=$\frac{k}{n} = \frac{3^7}{9^7} \approx 0{,}00046$

γ) 5-tel osztható lesz:

Az utolsó számjegy 5, k=$V_9^{6,i} = 9^6$

P=$\frac{k}{n} = \frac{9^6}{9^7} \approx 0{,}11$

δ) 4-gyel osztható lesz:

Az utolsó 2 jegyből álló szám: 12, 16, 24, 28, 32, 36, 44, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 88, 92 és 96 lehet. Ez összesen 18 db.

Tehát k=18· $V_9^{5,i} = 18 \cdot 9^5$= 1062882

P=$\frac{k}{n} = \frac{18 \cdot 9^5}{9^7} \approx 0{,}22$

ε) tartalmazni fogja az „12” részletet:

6 egység lesz, a „12” hatféleképpen helyezkedhet el. A maradék 5 helyre mindegyik esetben 9^5 lehetőség van, így $k=6\cdot9^5$

$P=\frac{k}{n}=\frac{6\cdot9^5}{9^7}\approx 0{,}074$

φ) tartalmazni fogja az „123” részletet.

5 egység lesz, a „123” ötféleképpen helyezkedhet el. A maradék 4 helyre mindegyik esetben 9^4 lehetőség van, így $k=5\cdot9^4$

$P=\frac{k}{n}=\frac{5\cdot9^4}{9^7}\approx 0{,}0069$

ι) nem fogja tartalmazni az „123” részletet:

P=1-0,0069=0,9931

κ) váltakozva fog páros és páratlan számjegyeket tartalmazni:

1. Páratlan szám lesz elöl: $k_1=(5\cdot5\ 5\cdot5)\cdot(4\cdot4\cdot4)=40000$
2. Páros szám lesz elöl: $k_2=(4\cdot4\cdot4\cdot4)\cdot(5\cdot5\cdot5)=32000$

k=72000

$P=\frac{k}{n}=\frac{72000}{9^7}\approx 0{,}015$

λ) 3 páratlan számjegy lesz elöl:

$k=(5\cdot5\ 5)\cdot9^4=820125$

$P=\frac{k}{n}=\frac{820120}{9^7}\approx 0{,}17$

μ) páratlan számjegyek lesznek a két szélén:

$k=(5\ 5)\cdot9^5=1476225$

$P=\frac{k}{n}=\frac{1476225}{9^7}\approx 0{,}309$

ν) az első két számjegy páratlan lesz, a következő kettő páros:

$k=(5\ 5)\cdot(4\ 4)\cdot9^3=291600$

$P=\frac{k}{n}=\frac{291600}{9^7}\approx 0{,}061$

ο) a 9-est ötször fogja tartalmazni:

$k=\binom{7}{5}\cdot8^2=1344$

$P=\frac{k}{n}=\frac{1344}{9^7}\approx 2{,}81\cdot10^{-4}$

4) a) A **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** számjegyekből **hány darab hét jegyű** számot tudunk készíteni, **ha minden számjegyet többször felhasználhatunk**:

Elöl nem állhat a 0, ezért 9 lehetőség van, utána 10 különböző elem hatodosztályú ismétléses variációi szerepelhetnek: n=$9 \cdot V_{10}^{6,i} = 9 \cdot 10^6$

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szám

α) 0-ra fog végződni:

k=$9 \cdot V_{10}^{5,i} = 9 \cdot 10^5$

P=$\frac{k}{n} = \frac{9 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^6} \approx 0{,}1$

β) csupa 3-mal osztható számjegyből áll:

4 db 3-mal osztható számjegy van, de a 0 nem állhat az első helyen, így k=$3 \cdot 4^6$

P=$\frac{k}{n} = \frac{3 \cdot 4^6}{9 \cdot 10^6} \approx 0{,}0014$

γ) 5-tel osztható lesz:

0-ra vagy 5-re végződhet: k=$9 \cdot V_{10}^{5,i} \cdot 2 = 18 \cdot 10^5$

P=$\frac{k}{n} = \frac{18 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^6} \approx 0{,}2$

δ) 4-gyel osztható lesz:

Az utolsó 2 jegyből álló szám: 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92 és 96 lehet. Ez összesen 25 db.

k=$9 \cdot V_{10}^{4,i} \cdot 25 = 9 \cdot 10^5$

P=$\frac{k}{n} = \frac{9 \cdot 10^4 \cdot 25}{9 \cdot 10^6}$=0,25

Vegyük észre, hogy elég lenne csak a 2 utolsó számjegyet vizsgálni!

ε) tartalmazni fogja az „12" részletet:

1. Ha a „12" elöl van, akkor $k_1=V_{10}^{5,i}=10^5$
2. Ha nem elöl van, akkor 5 helyen lehet, de figyelni kell a 0-ra is:

$k_2=5 \cdot 9 \cdot V_{10}^{4,i} = 45 \cdot 10^4$

k=$55 \cdot 10^4$

P=$\frac{k}{n} = \frac{55 \cdot 10^4}{9 \cdot 10^6}$=0,061 φ) tartalmazni fogja az „123” részletet:

1. Ha a „123” elöl van, akkor $k_1=V_{10}^{4,i}=10^4$
2. Ha nem elöl van, akkor 4 helyen lehet, de figyelni kell a 0-ra is:

$k_2=4\cdot 9\cdot V_{10}^{3,i}=36\cdot 10^3$

$k=46\cdot 10^3$

$P=\frac{k}{n}=\frac{46\cdot 10^3}{9\cdot 10^6}=0{,}0051$

ι) nem fogja tartalmazni az „123” részletet:

$P=1-0{,}0051=0{,}9949$

κ) váltakozva fog páros és páratlan számjegyeket tartalmazni:

1. Páratlan szám lesz elöl: $k_1=(5\cdot 5\ 5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5\cdot 5)=5^7$
2. Páros szám lesz elöl: $k_2=(4\cdot 5\cdot 5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5\cdot 5)=4\cdot 5^6=$

$k=9\cdot 5^6$

$P=\frac{k}{n}=\frac{9\cdot 5^6}{9\cdot 10^6}\approx 0{,}016$

λ) 3 páratlan számjegy lesz elöl:

$k=(5\cdot 5\ 5)\cdot 10^4=1250000$

$P=\frac{k}{n}=\frac{1250000}{9\cdot 10^6}\approx 0{,}139$

μ) páratlan számjegyek lesznek a két szélén:

$k=(5\ 5)\cdot 10^5=2500000$

$P=\frac{k}{n}=\frac{2500000}{9\cdot 10^6}\approx 0{,}278$

ν) az első két számjegy páratlan lesz, a következő kettő páros:

$k=(5\ 5)\cdot(5\ 5)\cdot 10^3=625000$

$P=\frac{k}{n}=\frac{625000}{9\cdot 10^6}\approx 0{,}069$

ο) a 9-est ötször fogja tartalmazni:

1. Az első jegy 9-es: $k_1=1\cdot\binom{6}{4}\cdot 9^2=1215$
2. Az első jegy nem 9-es: $k_2=8\cdot\binom{6}{5}\cdot 9=432$

$k=1647$

$P=\frac{k}{n}=\frac{1647}{9\cdot 10^6}\approx 0{,}00018$

5) Kombinábiában az **autók rendszámai** T-ABC-KLM alakúak, ahol T a tartomány számjele, 1-től 8-ig változhat, A,B,C a 26 betűs angol abc betűi, azonosak is lehetnek, K,L,M pedig 0 és 9 közötti számjegyek, de nem lehetnek azonosak. *Pl. 3-XXY-056*

a) Hány különböző rendszám lehetséges:

$n=8\cdot 26^3\cdot 10\cdot 9\cdot 8=101237760$

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a rendszámban 3 azonos betű lesz:

Mind a 26 betű szerepelhet, ezért $k=8\cdot 26\cdot 10\cdot 9\cdot 8=101237760=149760$

$P=\frac{k}{n}=\frac{149760}{101237760}\approx 0{,}0015$

Vegyük észre, hogy a valószínűség kiszámításához elegendő lett volna csak a betűket vizsgálni: $P=\frac{k}{n}=\frac{26}{26^3}\approx 0{,}0015$

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a betűk vagy a számok nagyság szerint közvetlenül követni fogják egymást:

A esemény: a betűk követik egymást: az első betűre 24 lehetőség van, a többi meghatározott, azaz $k_A=8\cdot 24\cdot 10\cdot 9\cdot 8=138240$

B esemény: a számok követik egymást: az első számra 8 lehetőség van, a többi meghatározott, azaz $k_B=8\cdot 26^3\cdot 8=1124864$

Az A·B esemény akkor teljesül, ha az A és B is bekövetkezik, azaz $k_{A\cdot B}=8\cdot 24\cdot 8=1536$

A keresett A+B esemény kedvező eseteinek száma a logikai szita formula szerint

$k_{A+B}=k_A+k_B-k_{A\cdot B} = 138240 + 1124864 - 1536 = 1261568$

$P=\frac{k}{n}=\frac{1261568}{101237760}\approx 0{,}012$

VIII. Kombinációk

1) Számítsuk ki az alábbi műveletek eredményét **faktoriálisok segítségével**!

a) $\binom{10}{8}=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=\frac{9\cdot 10}{2}=45$

b) $\binom{16}{12}=\frac{16!}{4!\cdot 12!}=\frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{2\cdot 3\cdot 4}=13\cdot 7\cdot 5\cdot 4=1820$

c) $\binom{20}{16}=\frac{20!}{4!\cdot 16!}=\frac{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{2\cdot 3\cdot 4}=17\cdot 3\cdot 19\cdot 5=4845$

d) $\binom{100}{98}=\frac{100!}{2!\cdot 98!}=\frac{99\cdot 100}{2}=4950$

e) $\binom{100}{95}=\frac{100!}{5!\cdot 95!}=\frac{96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=6\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 20=112931280$

f) $\binom{99}{94}+\binom{99}{95}=\frac{99!}{5!\cdot 94!}+\frac{99!}{4!\cdot 95!}=\frac{99!\cdot 95+99!\cdot 5}{5!\cdot 95!}=\frac{99!\cdot 100}{5!\cdot 95!}=\frac{100!}{5!\cdot 95!}=\binom{100}{95}$

g) $\frac{\binom{10}{6}}{\binom{100}{6}}=\frac{\frac{10!}{4!\cdot 6!}}{\frac{100!}{94!\cdot 4!}}=\frac{10!\cdot 94!}{100!\cdot 6!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{95\cdot 96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}=\frac{1}{95\cdot 12\cdot 97\cdot 14\cdot 11\cdot 10}\approx 5{,}87\cdot 10^{-9}$

h) $\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}=2^{10}$

i) $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}=\frac{10!}{8!\cdot 2!}\cdot\frac{8!}{6!\cdot 2!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{0!\cdot 2!}=\frac{10!}{(2!)^5}$

j) $\binom{100}{5}\cdot\binom{95}{2}\cdot\binom{93}{3}\cdot\binom{90}{3}\cdot\binom{87}{2}=\frac{100!}{95!\cdot 5!}\cdot\frac{95!}{93!\cdot 2!}\cdot\frac{93!}{90!\cdot 3!}\cdot\frac{90!}{87!\cdot 3!}\cdot\frac{87!}{85!\cdot 2!}=$

$=\frac{100!}{5!}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{85!\cdot 2!}=\frac{100!}{85!\cdot 120\cdot 144}=\frac{86\cdot 87\cdot 88\cdot\ldots\cdot 100}{120\cdot 144}$

k) $\frac{\binom{80}{10}\cdot\binom{20}{5}}{\binom{100}{15}}=\frac{\frac{80!}{70!\cdot 10!}\cdot\frac{20!}{15!\cdot 5!}}{\frac{100!}{85!\cdot 15!}}=\frac{80!\cdot 20!\cdot 85!\cdot 15!}{100!\cdot 70!\cdot 10!\cdot 15!\cdot 5!}=\frac{11\cdot 12\cdot\ldots\cdot 20\cdot 71\cdot 72\cdot\ldots\cdot 85}{81\cdot 82\cdot\ldots\cdot 100\cdot 120}$

l) $\frac{\binom{80}{13}\cdot\binom{20}{2}+\binom{80}{14}\cdot\binom{20}{1}+\binom{80}{15}\cdot\binom{20}{0}}{\binom{100}{15}}=\frac{\frac{80!}{67!\cdot 13!}\cdot\frac{20!}{18!\cdot 2!}+\frac{80!}{66!\cdot 14!}\cdot\frac{20!}{19!\cdot 1!}+\frac{80!}{65!\cdot 15!}\cdot\frac{20!}{20!\cdot 0!}}{\frac{100!}{85!\cdot 15!}}$

$=\frac{80!\cdot 20!\cdot 85!\cdot 15!}{100!\cdot 65!\cdot 13!}\cdot\left(\frac{190}{66\cdot 67}+\frac{20}{66\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 15}\right)\approx\frac{20!\cdot 66\cdot 67\cdot\ldots\cdot 85\cdot 14\cdot 15}{81\cdot 82\cdot\ldots\cdot 100}\cdot 0{,}069$

2) Az **ötöslottón** 90 számból ötöt kell eltalálni. Mennyi a valószínűsége a 0, 1, 2, 3, 4 és 5 találatnak:

Az összes esetek száma n=$\binom{90}{5}$

Az x találat akkor következik be, ha x-et az 5 nyertes számból tippeltünk, 5-x darabot pedig a 85 nem nyertes számból, tehát k = $\binom{5}{x} \cdot \binom{85}{5-x}$

P(x találat) = $\frac{k}{n} = \frac{\binom{5}{x}\cdot\binom{85}{5-x}}{\binom{90}{5}}$

P(0) = $\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}746$

P(1) = $\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}230$

P(2) = $\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}0225$

P(3) = $\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}00081$

P(4) = $\frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}0000097$

P(5) = $\frac{\binom{5}{5}\cdot\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}000000023$

3) A **hatoslottón** 45 számból hatot kell eltalálni. Mennyi a valószínűsége a 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 találatnak?

Az összes esetek száma n=$\binom{45}{6}$

Az x találat akkor következik be, ha x-et a 6 nyertes számból tippeltünk, 6-x darabot pedig a 39 nem nyertes számból, tehát k = $\binom{6}{x} \cdot \binom{39}{6-x}$

P(x találat) = $\frac{k}{n} = \frac{\binom{6}{x}\cdot\binom{39}{6-x}}{\binom{45}{6}}$

P(0) = $\frac{\binom{6}{0}\cdot\binom{39}{6}}{\binom{45}{6}} \approx 0{,}401$

P(1) = $\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{39}{5}}{\binom{45}{6}} \approx 0{,}424$

P(2) = $\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{39}{4}}{\binom{45}{6}} \approx 0{,}151$

P(3) = $\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{39}{3}}{\binom{45}{6}} \approx 0{,}022$

P(4) = $\frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{39}{2}}{\binom{45}{6}} \approx 0{,}0014$

P(5) = $\frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{39}{1}}{\binom{45}{6}} \approx 0{,}000029$

P(6) = $\frac{\binom{6}{6}\cdot\binom{39}{0}}{\binom{45}{6}} \approx 0{,}000000123$

4) Egy üzemben **500 termékből 40 selejtes**.

Mennyi a valószínűsége, hogy ha **visszatevés nélkül** véletlenszerűen kiválasztunk 20 terméket, akkor a kiválasztottak között

a) nem lesz selejtes:

Az összes esetek száma n=$\binom{500}{20}$

Akkor nem lesz selejtes a kiválasztott termékek között, ha mind a 20-at a 460 hibátlan termék közül választjuk ki, tehát k = $\binom{460}{20}$

$$P = \frac{k}{n} = \frac{\binom{460}{20}}{\binom{500}{20}}$$

b) 5 selejtes lesz:

Akkor lesz pontosan 5 selejtes a kiválasztott termékek között, ha 15-öt a 460 hibátlan termék közül választjuk ki, 5-öt pedig a 40 selejtes közül, tehát k = $\binom{460}{15} \cdot \binom{40}{5}$

$$P = \frac{k}{n} = \frac{\binom{460}{15} \cdot \binom{40}{5}}{\binom{500}{20}}$$

c) 3-nál kevesebb selejtes lesz:

A kedvező esetek számát úgy kapjuk, hogy összeszámoljuk, hány esetben 0, 1 ill. 2 selejtes a kíválasztottak között, tehát

$$P = \frac{k}{n} = \frac{\binom{460}{20} \cdot \binom{40}{0} + \binom{460}{19} \cdot \binom{40}{1} + \binom{460}{18} \cdot \binom{40}{2}}{\binom{500}{20}}$$

d) 2-nél több selejtes lesz:

A komplementer esemény éppen az előbbi, így

$$P = 1 - \frac{\binom{460}{20} \cdot \binom{40}{0} + \binom{460}{19} \cdot \binom{40}{1} + \binom{460}{18} \cdot \binom{40}{2}}{\binom{500}{20}}$$

5) Egy üzemben **500 termékből 40 selejtes**.

Mennyi a valószínűsége, hogy ha **visszatevéssel** véletlenszerűen kiválasztunk 20 terméket, akkor a kiválasztottak között

A visszatevés minden egyes húzásnál ugyanannyi a valószínűsége, hogy selejtes terméket húzunk: p=$\frac{40}{500}$=0,08. Annak pedig, hogy nem lesz selejtes, 1-p=0,92 a valószínűsége.

a) nem lesz selejtes:

A kérdés az, hogy ha 20-szor egymás után elvégezzük a kísérletet, mennyi a valószínűsége, hogy egyszer sem következik be az a p=0,08 valószínűségű esemény, hogy selejtes terméket választunk ki. A binomiális eloszlás képlete szerint

P(0 selejtes) = $\binom{20}{0} \cdot 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{20} \approx 0{,}19$

b) 5 selejtes lesz.

P(5 selejtes) = $\binom{20}{5} \cdot 0{,}08^5 \cdot 0{,}92^{15} \approx 0{,}015$

c) 3-nál kevesebb selejtes lesz

P(<3) = $\binom{20}{0} \cdot 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^{18} \approx 0{,}788$

d) 2-nél több selejtes lesz:

P(>2) = 1 – P(<3) ≈ 1 – 0,788 = 0,212

6) Egy üzemben **a termékek 10 %-a selejtes**. Mennyi a valószínűsége, hogy ha nagyon sok termékből (azaz lényegtelen lesz, hogy viszatevéssel vagy viszatevés nélkül) véletlenszerűen kiválasztunk 20-at, akkor azok között

Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott termék selejtes lesz: p = 0,1, annak pedig, hogy nem lesz selejtes, 1-p=0,9 a valószínűsége. A feladat lényegében azonos az előzővel.

a) nem lesz selejtes:

P(0 selejtes) = $\binom{20}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{20} \approx 0{,}122$

b) 5 selejtes lesz:

P(5 selejtes) = $\binom{20}{5} \cdot 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^{15} \approx 0{,}032$

c) 3-nál kevesebb selejtes lesz:

P(<3) = $\binom{20}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{18} \approx 0{,}677$

d) 2-nél több selejtes lesz:

P(>2) = 1 – P(<3) ≈ 1 – 0,677 = 0,323

7) Egy üzemben egy vizsgálat szerint **minden nyolcadik termék selejtes**. Mennyi a valószínűsége, hogy ha nagyon sok termékből véletlenszerűen kiválasztunk 20-at, akkor azok között

Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott termék selejtes lesz: p = 1/8 = 0,125, annak pedig, hogy nem lesz selejtes, 1-p=0,875 a valószínűsége.

a) nem lesz selejtes:

P(0 selejtes) = $\binom{20}{0} \cdot 0{,}125^0 \cdot 0{,}875^{20} \approx 0{,}069$

b) 5 selejtes lesz:

P(5 selejtes) = $\binom{20}{5} \cdot 0{,}125^5 \cdot 0{,}875^{15} \approx 0{,}064$

c) 3-nál kevesebb selejtes lesz:

P(<3) = $\binom{20}{0} \cdot 0{,}125^0 \cdot 0{,}875^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}125^1 \cdot 0{,}875^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}125^2 \cdot 0{,}875^{18} \approx 0{,}472$

d) 2-nél több selejtes lesz:

P(>2) = 1 – P(<3) ≈ 1 – 0,472 = 0,528

8) A **Magyar kártyában** 32 lap van, 4 szín (piros, zöld, makk és tök), és minden színből 8 figura.

Ha véletlenszerűen kiosztunk 5 lapot, mennyi a valószínűsége, hogy

a) pontosan 3 piros lesz köztük:

A kiválasztás sorrendjét nem vesszük figyelembe sem az összes esetek számolásánál, sem a kedvező eseteknél. n=$\binom{32}{5}$ = 201376

A piros lapok száma 8, a nem pirosaké 24, így

k=$\binom{8}{3}\cdot\binom{24}{2}$ = 15456

$P = \frac{k}{n} = \frac{15456}{201376} = 0{,}077$

b) legfeljebb 2 piros lesz köztük:

Kedvező, ha 0, 1 vagy 2 piros lesz, így

$k = \binom{8}{0}\cdot\binom{24}{5} + \binom{8}{1}\cdot\binom{24}{4} + \binom{8}{2}\cdot\binom{24}{3} = 184184$

$P = \frac{k}{n} = \frac{184184}{201376} = 0{,}915$

c) legalább 3 piros lesz köztük:

Ez az előző komplementer eseménye, tehát P = 1 – 0,915 = 0,085

d) pontosan 2 piros, 1 zöld és 2 makk lesz:

$k = \binom{8}{2}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{8}{2} = 6272$

$P = \frac{k}{n} = \frac{6272}{201376} = 0{,}031$

e) pontosan 2 piros és 2 zöld lesz köztük:

$k = \binom{8}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{16}{1} = 12544$

$P = \frac{k}{n} = \frac{12544}{201376} = 0{,}062$

f) pontosan 2 ász lesz köztük:

$k = \binom{4}{2}\cdot\binom{28}{3} = 19656$

$P = \frac{k}{n} = \frac{19656}{201376} = 0{,}098$

g) pontosan 2 piros lesz köztük:

$k = \binom{8}{2}\cdot\binom{24}{3} = 55672$

$P = \frac{k}{n} = \frac{55672}{201376} = 0{,}276$

h) pontosan 2 ász és 2 piros lesz köztük:

A kedvező eset kétféleléppen állhat elő:

1. A kiosztott lapok között van a piros ász is. Ekkor a másik három ászból kell még egyet választani mellé, és a másik 7 pirosból szintén még egyet. Ez három lap, a maradék két lapot a 21 nem piros és nem ász lapok közül kell választani, tehát

$k_1 = \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{21}{2} = 4410$

2. A kiosztott lapok között nincs ott a piros ász. Ekkor a másik három ászból kell választani mindkét ászt, és a másik hét pirosból mindkét pirosat. Ez négy lap, az utolsót a 21 nem piros és nem ász lapok közül kell választani, tehát

$k_2 = \binom{3}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{21}{1} = 1323$

$k = k_1 + k_2 = 5733$

$P = \frac{k}{n} = \frac{5733}{201376} = 0{,}028$

i) pontosan 2 ász vagy pontosan 2 piros lesz köztük:

Vegyük észre, hogy ha az f)-ben szereplő eseményt A-val, a g)-ben szereplőt B-vel jelöljük, akkor a h)-ban szereplő esemény A·B, a mostani pedig az A+B esemény. A kedvező esetek halmazaira vonatkozó logikai szita formula szerint $k_{A+B} = k_A + k_B - k_{A \cdot B}$

Tehát k_{A+B} = 19656 + 55672 – 5733 = 69595, így

$P = \frac{k}{n} = \frac{69595}{201376} = 0{,}346$

A logikai szita formula közvetlenül a valószínűségekre is alkalmazható:

P(A+B)=P(A) + P(B) – P(A·B),

tehát P = 0,098 + 0,276 – 0,028 = 0,346

j) ha mind az öt lap piros lesz, akkor benne lesz a piros ász és a piros hetes is:

Feltételes valószínűségnél az összes esetek számát a feltételnek megfelelő esetek száma adja, azaz $n = \binom{8}{5} = 56$

A kedvező eseteket a feltétel figyelembe vételével kell számítani, tehát a piros ász és a piros hetes mellé kell még 3 pirosat választanunk a maradék 6 piros közül: $k = \binom{6}{3} = 20$

$P = \frac{k}{n} = \frac{20}{56} = 0{,}357$

9) A **Magyar kártyában** a figurák sorrendje: 7, 8, 9, 10, alsó, fölső, király, ász.

Ha véletlenszerűen kiosztunk 5 lapot, mennyi a valószínűsége, hogy

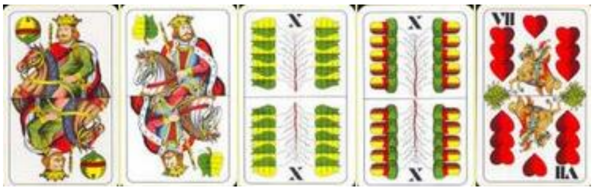
a) pontosan két azonos figura (pár) lesz köztük:

A kiválasztás sorrendjét nem vesszük figyelembe sem az összes esetek számolásánál, sem a kedvező eseteknél. n=$\binom{32}{5}$ = 201376

Az azonos figurák értékét 8-féleképpen tudjuk kiválasztani, hiszen bármelyik érték lehet a 8 közül. A kiválasztott értékhez a négy szín közül bármelyik kettőt választhatjuk, ezt $\binom{4}{2}$ = 6 féleképpen tehetjük meg. Egy párt tehát 8·6 = 48 féleképpen választhatunk ki a 32 lapból. Mivel több pár nem lehet, a maradék 7 figuraértékből $\binom{7}{3}$ = 35 féleképpen választhatjuk ki a 3 különböző értéket, a színük viszont bármilyen lehet, vagyis mindegyiknél négyszereződik a választható lapok száma, így a 3 különböző figuraértékű lap kiválasztására $35 \cdot 4^3$= 2240 lehetőségünk van. Összesen tehát k= 48·2240 = 107520

P = $\frac{k}{n} = \frac{107520}{201376}$ = 0,534

b) pontosan két-két azonos figura (2 pár) lesz köztük:



A két figuraérték kiválasztásánál is kombinációt kell alkalmaznunk, nehogy duplán szerepeljenek az értékek. A két figuraértéket tehát $\binom{8}{2}$ =28 féleképpen választhatjuk ki. A színekre mindkét figuraérték esetén $\binom{4}{2}$ = 6 lehetőségünk van. Két párt tehát $28 \cdot 6^2$ = 1008 féleképpen választhatunk ki a 32 lapból. A maradék figuraértékre 6 lehetőségünk marad, és mind a 4 szín választható hozzá, ez tehát 24 lehetőség. Így k=1008 · 24 = 24192

P = $\frac{k}{n} = \frac{24192}{201376}$ = 0,120

c) pontosan (három azonos figura) (drill) lesz köztük:

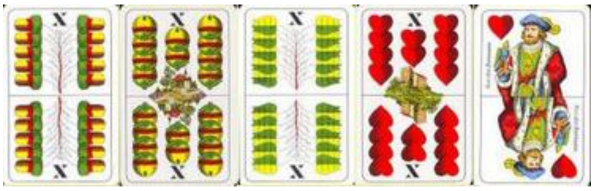
k = 8· $\binom{4}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot 4^2$ = 10752, tehát P = $\frac{k}{n} = \frac{10752}{201376}$ = 0,053

d) pontosan 1 drill és 1 pár lesz köztük (full):

A két párral ellentétben külön kell számítanuk a drill és a pár figuraértékét, míg a két párnál csak azt mondhattuk, hogy mi legyen a két figuraérték, most azt is meg kell mondanunk, hogy melyik a drillé és melyik a páré.

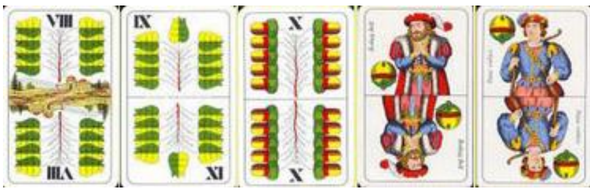
k = 8 · $\binom{4}{3} \cdot 7 \cdot \binom{4}{2}$ = 1344, tehát P = $\frac{k}{n} = \frac{1344}{201376}$ = 0,0067

e) pontosan négy azonos figura (póker) lesz közöttük:



k = 8 · $\binom{4}{4} \cdot 7 \cdot 4$ = 224, tehát P = $\frac{k}{n} = \frac{224}{201376}$ = 0,0011

f) a figurák sorban követik egymást (sor):



A sor kezdődhet a hetessel, nyolcassal, ..., tizessel, ez 4 lehetőség. A lapok színe tetszőleges lehet, ez 4^5 lehetőség, azaz k = 4 · 4^5= 4096

P = $\frac{k}{n} = \frac{4096}{201376}$ = 0,020

g) mindegyik lap azonos színű (szín):

4 féle szín közül lehet egy, és a 8 figuraértékből kell kiválasztani 5-öt, azaz

k = 4 · $\binom{8}{5}$ = 224, tehát P = $\frac{k}{n} = \frac{224}{201376}$ = 0,0011

h) mindegyik lap azonos színű és a figurák sorban követik egymást (színsor):

A sor kezdődhet a hetessel, nyolcassal, ..., tizessel, ez 4 lehetőség. A lapok színe azonos, erre 4 lehetőség van, azaz k = 4 · 4= 16

P = $\frac{k}{n} = \frac{16}{201376}$ = 0,0000795

Összegezve az esélysorrend:

pár: P = 0,534

két pár: P = 0,120

drill: P = 0,053

sor: P = 0,020

full: P = 0,0067

szín: P = 0,0011

póker: P = 0,0011

színsor: P = 0,0000795

10) A **Francia kártyában** 52 lap van, 4 szín (treff, káró, kőr és pikk), és minden színből 13 figura.

A figurák sorrendje: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, bubi, dáma, király, ász

Ha véletlenszerűen kiosztunk 5 lapot, mennyi a valószínűsége, hogy

a) pontosan két azonos figura (pár) lesz köztük:

A kiválasztás sorrendjét nem vesszük figyelembe sem az összes esetek számolásánál, sem a kedvező eseteknél. n=$\binom{52}{5}$ = 2598960

A kedvező esetek kiszámításának elve ugyanaz, mint a Magyar kártya esetén.

k = 13 · $\binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3$ = 1098240, tehát P = $\frac{k}{n} = \frac{1098240}{2598960}$ = 0,4226

b) pontosan két-két azonos figura (2 pár) lesz köztük:

$k = \binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{11}{1} \cdot 4 = 123552$, tehát $P = \frac{k}{n} = \frac{123552}{2598960} = 0{,}0475$

c) pontosan (három azonos figura) (drill) lesz köztük:

$k = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2 = 54912$, tehát $P = \frac{k}{n} = \frac{54912}{2598960} = 0{,}0211$

d) pontosan 1 drill és 1 pár lesz köztük (full):

$k = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744$, tehát $P = \frac{k}{n} = \frac{3744}{2598960} = 0{,}00144$

e) pontosan négy azonos figura (póker) lesz közöttük:

$k = 13 \cdot \binom{4}{4} \cdot 12 \cdot 4 = 624$, tehát $P = \frac{k}{n} = \frac{624}{2598960} = 0{,}00024$

f) a figurák sorban követik egymást (sor):

$k = 9 \cdot 4^5 = 9216$, tehát $P = \frac{k}{n} = \frac{9216}{2598960} = 0{,}00355$

g) mindegyik lap azonos színű (szín):

$k = 4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$, tehát $P = \frac{k}{n} = \frac{5148}{2598960} = 0{,}00198$

h) mindegyik lap azonos színű és a figurák sorban követik egymást (színsor)?

$k = 4 \cdot 9 = 36$, tehát $P = \frac{k}{n} = \frac{36}{2598960} = 0{,}000014$

Összegezve az esélysorrend:

pár: P = 0,4226

két pár: P = 0,0475

drill: P = 0,0211

sor: P = 0,00355

szín: P = 0,00198

full: P = 0,00144

póker: P = 0,00024

színsor: P = 0,000014

A szín gyengült a Magyar kártyához képest, a pókerrel azonos szintről visszaesett a full alá.

11) A 8 -10) feladatok során egymás után teljesen azonos körülmények között 15 osztást végezve, mennyi a valószínűsége, hogy az említett események

a) pontosan hétszer fognak bekövetkezni:

Az egyes események bekövetkezésének valószínűsége p. Annak valószínűségét, hogy 15 kísérletből a vizsgált esemény éppen hétszer következik be, a binomiális eloszlás adja meg:

$P = \binom{15}{7} \cdot p^7 \cdot (1-p)^8$

b) legfeljebb kétszer következnek be:

$P = \binom{15}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{15} + \binom{15}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{14} + \binom{15}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{13}$

c) legalább háromszor következnek be:

Az előző esemény komplementere, tehát

$P = 1 - \binom{15}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{15} - \binom{15}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{14} - \binom{15}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{13}$

12) **Kombinábiában 30 lapos kártyával játszanak. 5 szín van: piros, sárga, zöld, kék és ibolya. Minden színből 6 figura: perec, persely, varangy, varázsló, kombájn és komputer.**

a) Hányféleképpen tudunk kiosztani 5 lapot, ha a sorrendre nem vagyunk tekintettel:

$n=\binom{30}{5} = 142506$

b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan2 piros és 2 komputer lesz köztük?

Pl. jó osztás: piros komputer, piros perec, ibolya komputer, kék varangy és sárga kombájn.

A kedvező eset kétféleléppen állhat elő:

1. A kiosztott lapok között van a piros komputer is. Ekkor a másik négy komputerből kell még egyet választani mellé, és a másik 5 piros figurából szintén még egyet. Ez három lap, a maradék két lapot a 20 nem piros és nem komputer lapok közül kell választani, tehát

$k_1 = \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{20}{2} = 3800$

2. A kiosztott lapok között nincs ott a piros komputer. Ekkor a másik négy komputerből kell választani mindkét komputert, és a másik 5 pirosból mindkét pirosat. Ez négy lap, az utolsót a 20 nem piros és nem komputer lapok közül kell választani, tehát

$k_2 = \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{20}{1} = 1200$

$k=k_1 + k_2 = 5000$

$P = \frac{k}{n} = \frac{5000}{142506} = 0{,}035$

c) Mennyi a valószínűsége, hogy 15 leosztás esetén éppen 10-szer fordul elő, hogy pontosan 2 piros és 2 komputer lesz a lapok közt:

Egy leosztás esetén a valószínűség p = 0,035, így a binomiális eloszlás szerint

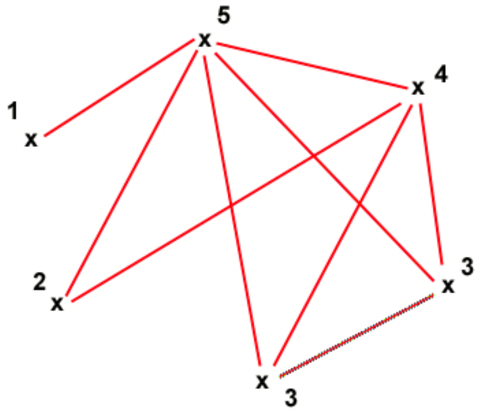
$P = \binom{15}{10} \cdot 0{,}035^{10} \cdot (1-0{,}035)^8 = 0.00000000000693$

IX. Gráfelmélet

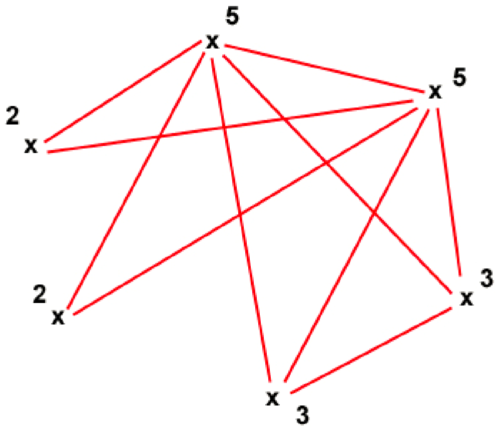
1) Rajzoljunk 6 pontú egyszerű gráfot, ahol a fokszámok

a) 5, 4, 3, 3, 2, 1:

A fokszámok összege az élek számának a kétszerese, tehát páros számnak kell lennie.



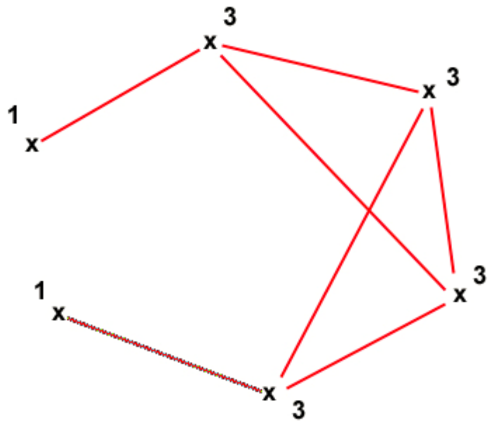
b) 5, 5, 3, 3, 2, 2:



c) 4, 3, 3, 3, 2, 2

A megadott fokszámok összege páratlan, tehát nincs ilyen gráf.

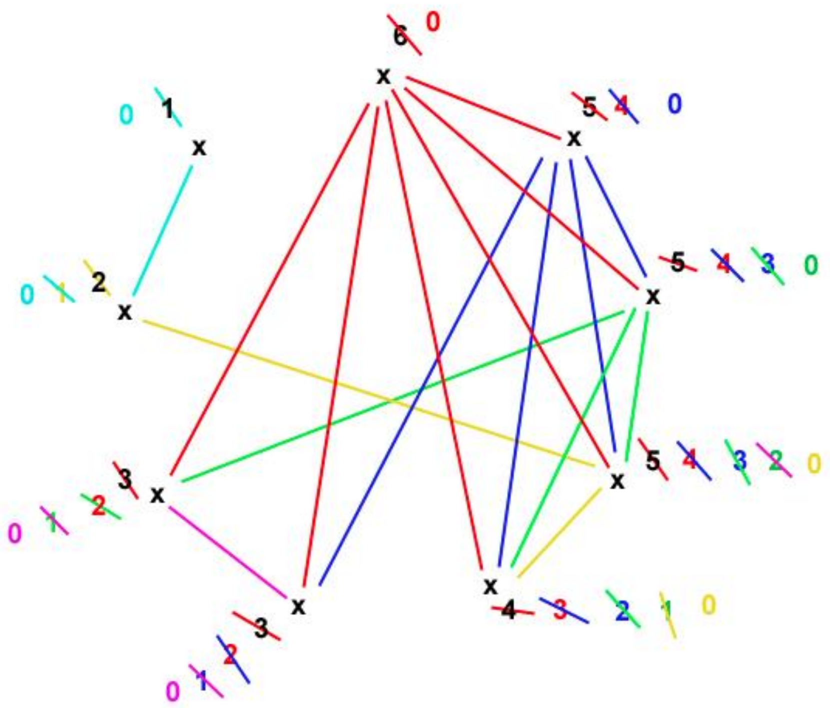
d) 3, 3, 3, 3, 1, 1



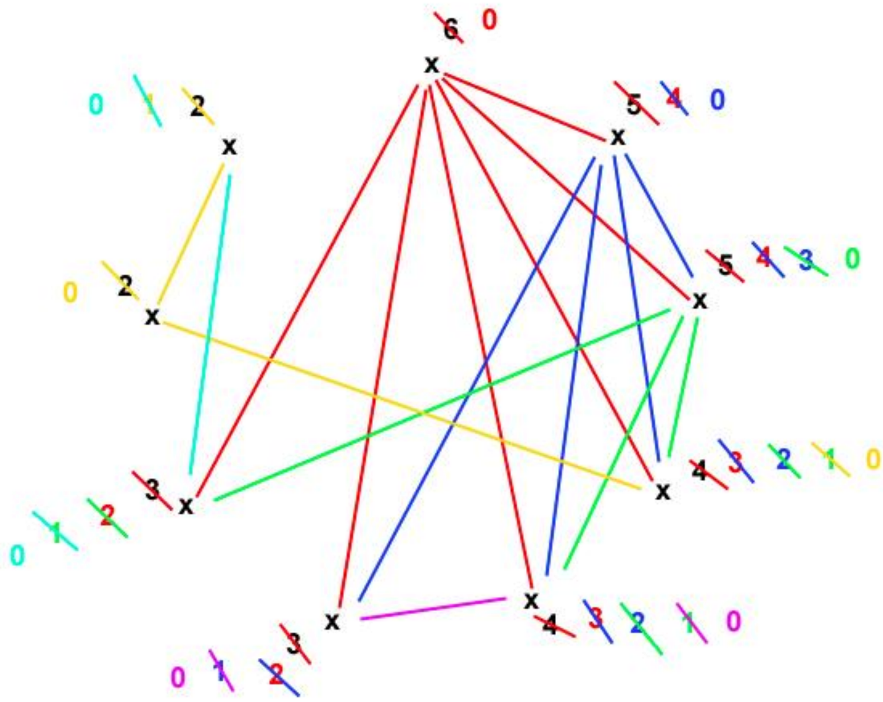
2) Rajzoljunk 9 pontú egyszerű gráfot a **Havel-Hakimi algoritmus segítségével**, ahol a fokszámok

a) 6, 5, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 1:

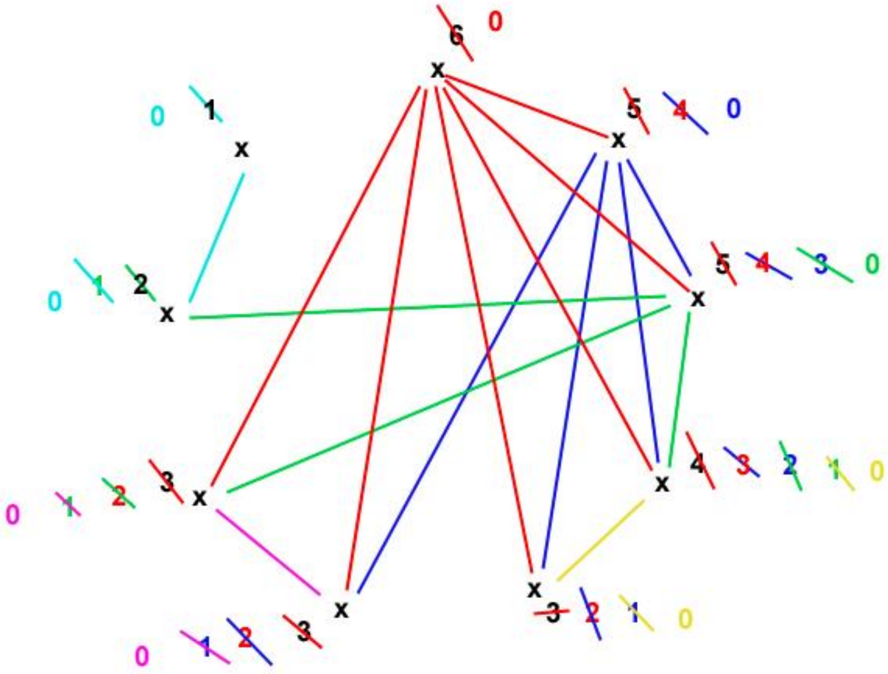
Minden lépésben a legmagasabb fokszámú pontból húzzuk meg a belőle kiinduló összes élt a következő legmagasabb fokszámú pontok felé, és minden egyes kiinduló pont fokszámának nullázása után jelöljük a többi pontnál a még behúzandó élek számát:



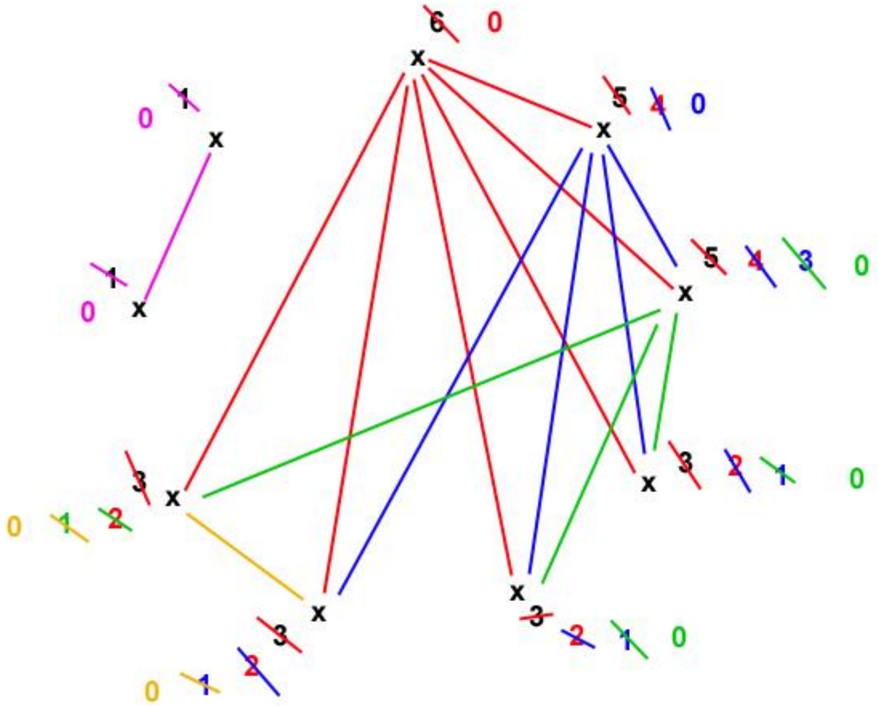
b) 6, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2:



c) 6, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 1:



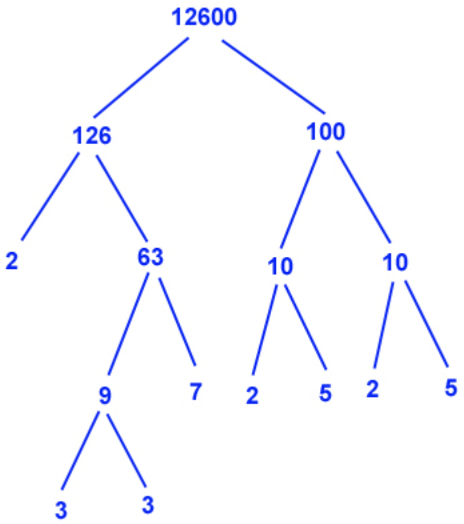
d) 6, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 1, 1:



3) Hány pontja van a 28 élt tartalmazó fának:

Egy n pontú fának n-1 éle van, tehát n=29.

4) Határozzuk meg **fával** a 12600 **prímtényezős felbontását**:



A felbontandó szám a fa gyökere, a felbontás pedig a levélelemek szorzata:

$12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

5) Hány pontú az a **teljes gráf**, amelyben 210 él van:

Az n pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$ =210

n^2 -n -420 =0

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+1680}}{2}$$

n_1=21, n_2 negatív, így az nem jöhet szóba. Tehát a teljes gráf pontjainak száma csak 21 lehet.

6) Egy 30 fős társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Eddig 300 kézfogás történt. **Mennyi van még hátra**:

A kézfogásokat gráffal modellezzük. A 30 fős társaságban összesen annyi kézfogás lehet, mint amennyi a 30 pontú teljes gráf éleinek száma, azaz $\frac{30 \cdot 29}{2}$ = 435. Mivel eddig 300 kézfogás történt, még 135 van hátra.

7) Egy 25 fős társaságban eddig 150 kézfogás történt. Maximum hány olyan ember van a társaságban, **aki még senkivel sem fogott kezet**:

Határozzuk meg, mennyi az a legkevesebb ember, akiknél a kézfogások számaelérheti a 150-et.

n ember esetén a maximum $\frac{n(n-1)}{2}$ Erre kell tehát teljesülni, hogy $\frac{n(n-1)}{2} \geq 150$.

n^2 -n -300 $\geq$ 0

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+1200}}{2}$$

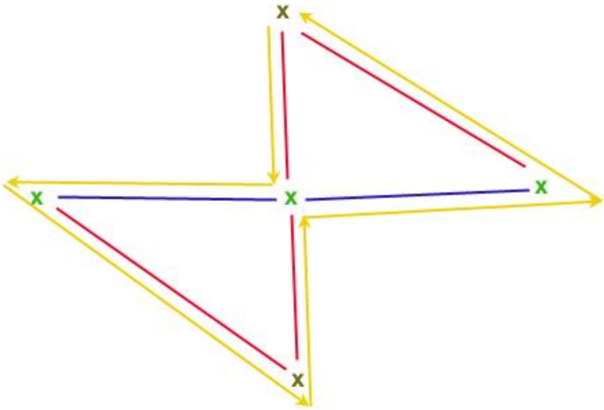
n_1=17,83, n_2 negatív, így a legkisebb n, amire az egyenlőtlenség teljesül:.n=18

Valóban, 18 ember esetén összesen $\frac{18 \cdot 17}{2}$ = 153 kézfogás lehetséges, de 17 esetén még csak $\frac{17 \cdot 16}{2}$ = 136. Így maximum 7 olyan ember lehet, aki még senkivel sem fogott kezet.

8) Kombinábia legnagyobb folyóján, a **Gráffolyón** sorban egymás mellett három sziget van. A középső szigetet egy-egy híd köti össze a két szélsővel. **Tervezzünk hidakat** a partok és a szigetek között, hogy az egyik partról indulva be tudjuk járni mindhárom szigetet és a túlsó partot is, úgy, hogy minden hídon pontosan egyszer haladjunk át, és

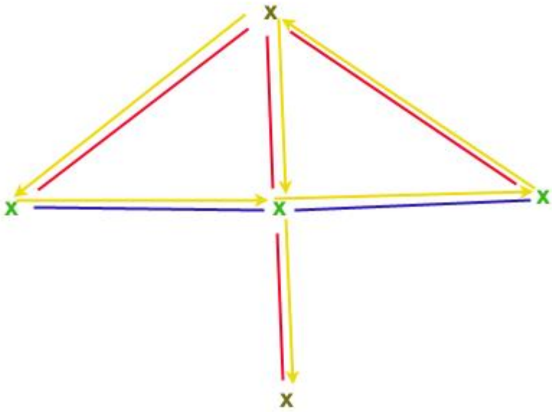
a) a kiindulási helyünkre térjünk vissza:

A feladatot egy gráffal modellezzük. A három sziget és a két part a gráf pontjai, a hidak az élek. Olyan gráfot kell tervezni, melynek minden fokszáma páros, akkor van Euler-köre, ami a keresett bejárást adja:



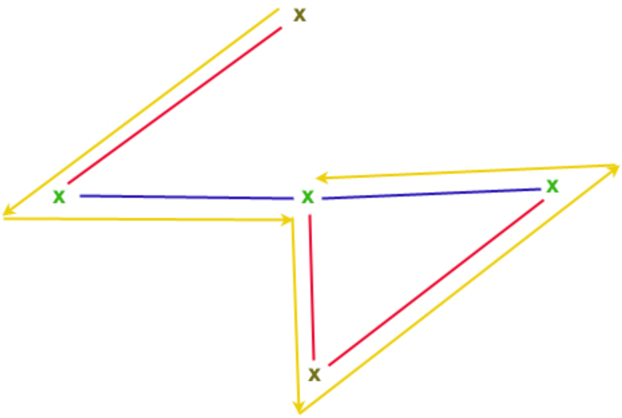
b) a túlsó parton fejezzük be a sétát:

A kezdőpont és a túlsó parti végpont fokszáma legyen páratlan, a többi pedig páros:



c) a középső szigeten fejezzük be a sétát:

A kezdőpont és a középső szigeten lévő végpont fokszáma legyen páratlan, a többi pedig páros:



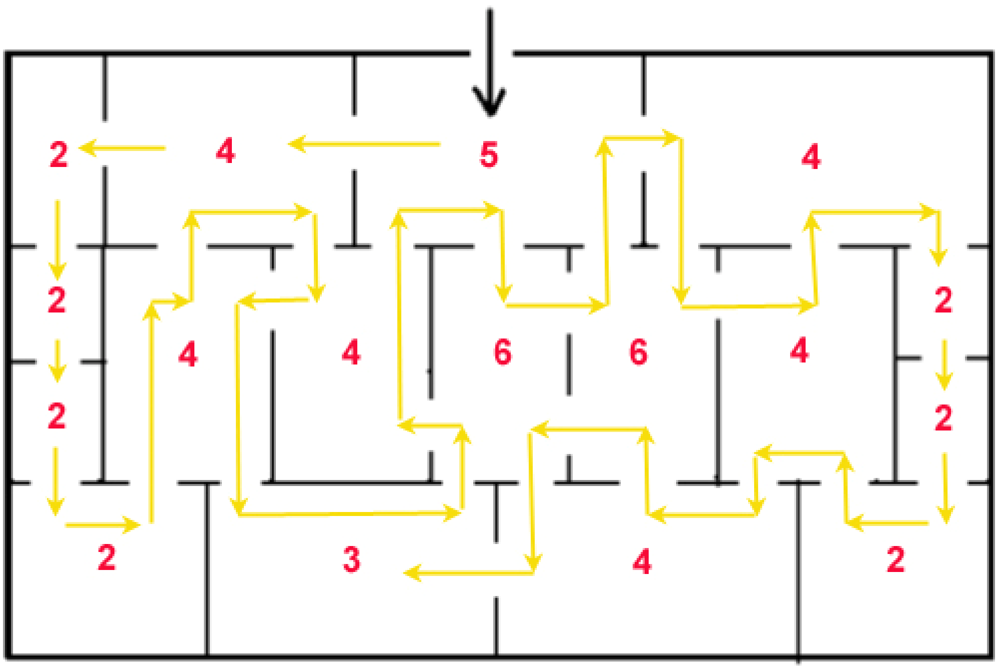
Rajzoljuk le mindegyik esetben a bejárási útvonalakat is:

Az ábrákon a narancssárga vonalak mutatják a bejárásokat.

9) Maximus Kombinatoris úgy terveztette meg az **új Főkombinátori Székházat**, hogy minden reggel belépve a nyíllal jelölt kapun, az épületet bejárva minden ajtót kinyithasson, majd azokon pontosan egyszer áthaladva, végül a saját irodájába érkezzen. (Tehát korábban kinyitott ajtón már nem halad át újra, viszont néhány helyiségbe többször betérhet.)

a) Létezik-e ilyen útvonal, s ha igen, rajzoljuk be az alaprajzba is!

Gráffal modellezve a feladatot, a helyiségek lesznek a pontok, az ajtók pedig az összekötő élek. Minden helyiségbe beírhatjuk a neki megfelelő pont fokszámát. Az első helyiség ajtóinak száma 5, a székház akkor járható be, ha ezen kívül már csak egy helyiségben lesz páratlan számú ajtó, és az lesz Maximus Kombinatoris irodája.



A székház bejárható a, a megfelelő bejárást az ábra mutatja.

b) Meg lehet-e oldani egyetlen ajtó befalazásával vagy egy új nyitásával, hogy a palotát a kívánt módon bejárva az utolsó helyiség a középen lévő legyen:

Igen, a jelenlegi iroda és a középső helyiség közötti ajtó befalazásával az ajtók száma az irodában 2-re csökken, a középső helyiségben pedig 5-re, így létezik a gráfnak Euler-vonala, ami mentén bejárható lesz. Az ábrán is látható, hogy ha az irodából az első alkalommal nem a középső helyiségbe megyünk, hanem onnan kezdve fordítva járjuk be a helyiségeket, akkor éppen a középső helyiségben fejezzük be az útvonalat az ajtó befalazása után.

X. Összefoglalás

1) Kombinábia **cukrászdájában** 6-féle fagylalt van: csoki, vanília, puncs, málna, eper és citrom.

a) Hányféle sorrendben helyezhetik ki a hat fagylaltos tartályt:

$P_6 = 6! = 720$

b) Hányféle sorrend lehet, ha csokiból 3, puncsból és eperből 2 tartályt helyeznek ki, a többiből pedig egyet:

Most összesen 10 tartály van, abból 3, 2, 2 azonos.

$P_{10}^{3,2,2,i} = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151200$

c) Hányféleképpen kaphatunk 3 gombócosfagylaltot

α) tölcsérbe kérve, ahol a sorrend is számít, ha egy fajtából csak egy gombócot kaphatunk:

$V_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$

β) tölcsérbe kérve, ahol a sorrend is számít, ha egy fajtából több gombócot is kaphatunk

$V_6^{3,i} = 6^3 = 216$

γ) kehelybe kérve, ahol a sorrend nem számít, ha egy fajtából csak egy gombócot kaphatunk,

$C_6^3 = \binom{6}{3} = 20$

δ) kehelybe kérve, ahol a sorrend nem számít, ha egy fajtából több gombócot is kaphatunk:

$C_6^{3,i} = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$

d) Mennyi a valószínűsége az egyes esetekben, hogy **mindhárom gombóc gyümölcsfagylalt** lesz:

3 féle gyümölcsfagylalt van: málna, eper és citrom.

α) $k = P_3 = 3! = 6$, így $P = \frac{k}{n} = \frac{6}{120} = 0{,}05$

β) $k = V_3^{3,i} = 3^3 = 27$, így $P = \frac{k}{n} = \frac{27}{216} = 0{,}125$

γ) $k = C_3^3 = \binom{3}{3} = 1$, így $P = \frac{k}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05$

δ) Mivel az ismétléses kombinációk nem azonos valószínűségűek, nem tekinthetjük azokat elemi eseményeknek, a sorrendet is figyelembe kell vennünk, ismétléses variációkkal kell számolnunk. Tehát a β) esetnek megfelelően P = 0,125

2) 6 barátnő és gyermekeik, 4 fiú és 8 lány közösen megnézik a színházban az **Egy csodálatos kombinátor története** című színmű gyermekelőadását, melyre a 2. sorban az 1, 2, 3, ..., 18 székekre kaptak jegyet.

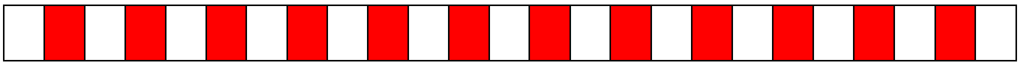
a) Hányféleképpen foglalhatnak helyet a székeken:

$P_{18} = 18! = 6{,}402 \cdot 10^{15}$

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a jegyek véletlenszerű kiosztása során

α) egy felnőtt sem ül felnőtt mellett:

Sorba állítjuk a 12 gyermeket, úgy hogy egy-egy hely legyen közöttük, ill. a sor elején és végén. Az így kialakított 13 hely bármelyikére állíthatjuk a felnőtteket, biztosan nem kerül két felnőtt egymás mellé. Ezután a kialakult sorrendben foglalják el a helyüket az 1, 2, 3, ..., 18 székeken.



A 12 gyermeket 12! sorrendben tudjuk egymás után állítani. A 6 felnőtt számára $\binom{13}{6}$ féleképpen választhatjuk ki a helyeket, amelyekre 6! sorrendben állíthatjuk be őket. Tehát $k = 12! \cdot \binom{13}{6} \cdot 6! = 5{,}918 \cdot 10^{14}$

$P = \frac{k}{n} = \frac{5{,}918 \cdot 10^{14}}{6{,}402 \cdot 10^{15}} = 0{,}0924$

β) egy leány sem ül leány mellett:

A 6 felnőtt és 4 fiú 10! sorrendben állítható fel, a kialakult 11 helyre kell elosztani a lányokat, tehát $k = 10! \cdot \binom{11}{8} \cdot 8! = 2{,}414 \cdot 10^{13}$

$P = \frac{k}{n} = \frac{2{,}414 \cdot 10^{13}}{6{,}402 \cdot 10^{15}} = 0{,}0038$

γ) egy fiú sem ül fiú mellett:

A 6 felnőtt és 8 lány 14! sorrendben állítható fel, a kialakult 15 helyre kell elosztani a fiúkat, tehát $k = 14! \cdot \binom{15}{4} \cdot 4! = 2{,}856 \cdot 10^{15}$

$P = \frac{k}{n} = \frac{2{,}856 \cdot 10^{15}}{6{,}402 \cdot 10^{15}} = 0{,}446$

δ) egy gyermek sem ül gyermek mellett:

A 6 felnőtt 6! sorrendben állítható fel, a kialakult 7 helyre kellene elosztani a 12 gyermeket, ami lehetetlen.

3) Kombinábiában minden évben versenyt rendeznek, melynek győztese nyeri el egy évre a főkombinátori címet. A versenyen **hétféle feladattípus közül válogatnak**, és egy féléből mindig csak egyet választanak: *ismétlés nélküli- és ismétléses permutáció, ismétlés nélküli- és ismétléses variáció, ismétlés nélküli- és ismétléses kombináció, ill. gráfelmélet.* Hányféleképpen válogathatnak be a feladattípusokból öt feladatot a versenyre, ha a sorrendre nem vagyunk tekintettel:

$C_7^5 = \binom{7}{5} = 21$

Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerű kiválasztás esetén a kiválasztott feladatok között

a) nem szerepel gráfelmélet:

k= $C_6^5 = \binom{6}{5} = 6$, tehát P = $\frac{k}{n} = \frac{6}{21} = 0{,}286$

b) szerepel ismétléses kombináció:

Egyszerűbb a komplementer eseményt vizsgálni. Annak valószínűsége, hogy nem szerepel egy adott feladattípus, az előző pont szerint 0,286. Így tehát annak a valószínűsége, hogy szerepel: P = 1 - 0,286 = 0,714

c) egymás utáni 10 évben mindig szerepel ismétléses kombináció:

Egy adott évben p = 0,714 valószínűséggel szerepel, így a binomiális eloszlás szerint

P = $\binom{10}{10} \cdot 0{,}714^{10} \cdot (1 - 0{,}714)^0$ = 0.0344

FÜGGELÉK

I. Elméleti összefoglaló

Klasszikus valószínűségi mező (Laplace 1812)

Valószínűség kiszámítása a klasszikus valószínűségi mezőben: P = $\frac{k}{n}$

De Morgan-azonosságok: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ és $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

Események összegének valószínűsége: P(A+B)=P(A) + P(B) – P(A·B)

Egymást kizáró események: P(A·B) = 0. Ekkor P(A+B)=P(A) + P(B)

Független események: P(A·B) = P(A) · P(B)

Komplementer esemény: P($\overline{A}$) = 1 – P(A)

Ismétléses kombinációk: Adott n-fajta elem, melyekből k db-ot választunk ki, **egy fajtából akár többbet is**, úgy, hogy **az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel**.

Ismétléses variációk: Adott n-fajta elem, melyekből k hosszúságú **sorozatokat készítünk**, úgy, hogy **egy fajta elemet több helyre is** kiválaszthatunk.

Pl. Két pénzérme feldobásánál másodosztályú ismétléses kombinációk: ff, fí, íí

másodosztályú ismétléses variációk: ff, fí, íf, íí

Az ismétléses variációk száma: $\mathbf{V_n^{k,i}}$ = $\mathbf{n^k}$

Helyek	1	2	3	…	n
Lehetőségek	k	k	k	…	k

Pl. **8 szögsorból álló Galton-deszka**:

Lépések	1	2	3	…	8
Lehetőségek	2	2	2	…	2

Összes lehetséges utak száma: $V_2^{8,i}$ = 2^8= 256

A Galton-deszkás kísérletnél egy **elemi esemény** egy **útvonal**, ezek a klasszikus Galton-deszkánál azonos valószínűségűek (mindegyik szögől 0,5-0,5 valószínűséggel megy balra vagy jobbra a golyó), így mindegyik útvonal $0{,}5^8$ valószínűségű.

Az útvonalak számának rekurzív összeadási szabálya: A legfölső szögről indul a golyó, oda egyféleképpen juthatott. Minden újabb szöghöz, ill. a végén a rekeszekbe a szélsők kivételével a két fölötte lévő szögről juthat el, így a belső utak száma mindig a fölötte lévő két szöghöz vezető útvonalak számának összege lesz.

A **szóháromszögek** a Galton-deszka 45° -os vagy egyéb elforgatottjának tekinthetők, azzal a különbséggel, hogy ott az utolsó betűk a rekeszekbe kerülnek. Így egy 8 szögsorből álló Galton-deszkára egy 9 betűs szó írható, tehát egy 9 betűből álló szóháromszögnek felel meg. A legelső betűrre egyféleképpen juthatunk, ahhoz nyilván az 1 tartozik, a szélsők kivételével az összes többihez a tőle balra lévőtől és a fölötte lévőtől juthatunk el, így a belső utak száma az ezekhez vezető utak számának ös--szege lesz.

Az összes lehetséges kiolvasás száma a 8 szögsorból álló Galton-deszkánál és a 9 betűs, azaz 8 lépéses szóháromszögnél egyaránt $2^8=256$.

A szóháromszög minden egyes utolsó betűje meghatároz egy szótéglalapot, melynek szemközti átlói a szó első és a tekintett utolsó betűje. Míg a szóháromszögben minden egyes betűről kétféleképpen haladhatunk tovább, a szótéglalap széleit elérve kényszerpályára kerülünk. Pl. ha a 9 betűből álló szóháromszögnek azt a 9 betűs szótéglalapját tekintjük, melynek 6 sora és 4 oszlopa van, akkor mindenképpen 5-ször kell lefelé lépnünk és 3-szor jobbra, hogy elérjünk az utolsó betűhöz.

É 1	R 1	E 1	T 1	T 1	S 1	É 1	G 1	I 1
R 1	E 2	T 3	T 4	S 5	É 6	G 7	I 8	
E 1	T 3	T 6	S 10	É 15	G 21	I 28		
T 1	T 4	S 10	É 20	G 35	I 56			
T 1	S 5	É 15	G 35	I 70				
S 1	É 6	G 21	I 56					
É 1	G 7	I 28						
G 1	I 8							
I 1								

Egy 21 karakteres szó 20 lépéses szóháromszögének értéktáblázatát a 2. sz. melléklet tartalmazza.

A téglalapban haladás és a részhalmazok kapcsolata:

A kiolvasások során hány olyan útvonalunk lesz, melyeknél a 8 lépésből 3-szor lépünk jobbra? Ahányféleképpen a 8 lépésből ki tudjuk választani azt a hármat, amikor jobbra lépünk. Ezt pedig pontosan annyi féleképpen tehetjük meg, ahány 3 elemű részhalmaza van az {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} halmaznak.

Általánosan, az n lépésből álló útvonalak esetén azoknak a száma, melyekben k-szor lépünk jobbra, éppen annyi, mint az n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a száma. Ez az adott n különböző elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak a száma. Jele $\mathbf{C_n^k}$. A részhalmazok és az útvonalak között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés van, az {1,2,3, ..., n} halmaz k elemű részhalmazainak elemei ugyanis meghatározzák azoknak a lépéseknek a sorszámait, melyekben jobbra haladunk.

Az ismétlés nélküli kombináció ulajdonságai:

$\mathbf{C_n^0 = C_n^n = 1}$, hiszen bármely halmazból az {}-t, ill. önmagát csak egyféleképpen választhatjuk ki.

$\mathbf{C_n^{n-k} = C_n^k}$ **=,** mivel mindegy, hogy a részhalmazokat vagy a komplementereiket számoljuk.

Rekurzív összefüggés a kiolvasások rekurzív összeszámlálásának alapján: $\mathbf{C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k}$

Összegzési tulajdonság a szótéglalapok és a szóháromszög alapján: $\mathbf{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n}$

A binomiális tétel, mint kiválasztási feladat:

$$(a+b)^n = \underset{(a+b)}{1.} \cdot \underset{(a+b)}{2.} \cdot \underset{(a+b)}{3.} \cdot \ldots \cdot \underset{(a+b)}{n.}$$

A szorzatban $a^k \cdot b^{n-k}$ kifejezést akkor kapunk, ha az n- tényezős szorzatban k db-ból vesszük az a-t.

Az n db (a+b) tényezőből a k db-ot pedig C_n^k -féleképpen tudjuk kiválasztani.

Tehát $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\mathbf{n}} = \mathbf{C_n^0 \cdot a^n \cdot b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \ldots + C_n^n \cdot a^0 \cdot b^n}$

$\mathbf{C_n^k}$ **értékét** $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ -val („n alatt a k”) szokás jelölni, amit a binomiális tételben betöltött szerepe miatt **binomiális együtthatónak** nevezünk. A binomiális együtthatók tulajdonságai az előzőek alapján:

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{0}} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}} = \mathbf{1}, \quad \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n-k}} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}, \quad \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \binom{\mathbf{n-1}}{\mathbf{k-1}} + \binom{\mathbf{n-1}}{\mathbf{k}}$$

és $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{0}} + \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{1}} + \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{2}} + \cdots + \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}} = \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$

A binomiális együtthatók táblázata a **Pascal-háromszög**, amit a rekurzív összefüggés alapján készíthetünk el. Első 15 sorát a 3. sz. melléklet tartalmazza. Legfelső sora a 0. sor. Az n-edik sorban álló számok összege 2^n.

A binomiális eloszlás:

Legyen egy valószínűségi kísérletben egy A esemény bekövetkezésének valószínűsége p.
Mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy a kísérletet egymástól függetlenül n-szer elvégezve az A esemény éppen k-szor fog bekövetkezni?
(A probléma kapcsán szokás visszatevéses mintavételről is beszélni.)

Analógia a binomiális tétellel:

$$(A+\overline{A})^n = \underset{(A+\overline{A})}{1.} \cdot \underset{(A+\overline{A})}{2.} \cdot \underset{(A+\overline{A})}{3.} \cdot \ldots \cdot \underset{(A+\overline{A})}{n.}$$

P(A k-szor)= $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Látható, hogy a valószínűségek összege 1 lesz, ha k 0-tól n-ig változhat.

Permutációk:

Ismétlés nélküli permutációk

Adott n db különböző elem. Ezeknek az elemeknek egy lehetséges sorrendjét az n db elem egy ismétlés nélküli permutációjának nevezzük.

Az ismétlés nélküli permutációk száma: $\mathbf{P_n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

Helyek	1	2	3	…	n
Lehetőségek	n	n-1	n-2	…	1

Ismétléses permutációk:

Adott n db elem, melyek között azonosak is vannak. Az egymással azonos elemek száma: k_1, k_2, … , k_l. Ezeknek az elemeknek egy lehetséges sorrendjét, melyben tehát az azonos elemek egymás közötti felcserélését nem tekintjük külön sorrendnek, az n db elem egy ismétléses permutációjának nevezzük.

Ha az ismétléses permutációk számát megszorozzuk az azonos elemek permutációinak számával, akkor megkapjuk az ismétlés nélküli permutációk számát.

Az ismétléses permutációk száma: $\mathbf{P_n^{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_l,i}} = \dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot\ldots\cdot k_l!}$

Ismétlés nélküli variációk

Adott n db különböző elem, melyekből k hosszúságú sorozatokat készítünk visszatevés nélkül, azaz minden elemet csak egyszer választhatunk ki. Ilyenkor **n különböző elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációiról** beszélünk. Nyilvánvaló, hogy $k \leq n$.

Az ismétléses variációk száma: $\mathbf{V_n^k}$ = n· (n-1) · (n-2) · … · (n-k+1), azaz $\mathbf{V_n^k} = \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{k})!}$

Helyek	1	2	3	…	k
Lehetőségek	n	n-1	n-2	…	n-k+1

A számológépen: V_n^r = nPr

Az ismétlés nélküli kombinációk számának meghatározása képlettel:

Hasonlítsuk össze az **ismétlés nélküli kombinációt** és az **ismétlés nélküli variációt**!

Könnyen észrevehetjük, hogy az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak számát a kiválasztott k db elem lehetséges sorrendjeinek számával megszorozva éppen az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak számát kapjuk meg, azaz

$\mathbf{C_n^k \cdot P_k = V_n^k}$ **, azaz** $\mathbf{C_n^k \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}}$. Tehát $\mathbf{C_n^k} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{k})!\cdot\mathbf{k}!}$

A számológépen: C_n^r = nCr

Az ismétléses kombináció visszavezetése ismétlés nélküli kombinációra:

Adott n-fajta elem, melyekből k db-ot választunk ki, egy fajtából akár többet is, úgy, hogy az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel. Ekkor az n-fajta elem egy k-ad osztályú ismétléses kombinációját kapjuk.(Szokás n különböző elemről és visszatevéses kiválasztásról is beszélni.)

Általánosan n-fajta elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma: $\mathbf{C_n^{k,i}} = \binom{\mathbf{n+k-1}}{\mathbf{k}}$

Legyen pl. a virágüzletben 4 fajta virág, rózsa, szegfű, gerbera és kála, és ezekből szeretnénk 5 szálas csokrot készíteni. Írjuk le a megadott sorrendben a virágfajtákat, és mindegyik után tegyünk annyi + jelet, ahányat választani akarunk az adott fajtából. Összesen 5 db + jelet kell kitennünk. Egy ilyen felírás kölcsönösen egyértelmű módon meghatározza a választásunkat. Pl. r ++szg++k+ azt jelenti, hogy 2 szál rózsát, 2 szál gerberát és 1 kálát választottunk. Az első helyen mindenképpen a rózsa neve áll, így a maradék 8 helyből kell azokat kiválasztanunk, ahová a + jeleket tesszük. Ezt $\binom{8}{5}$-féleképpen tehetjük meg. A 4-fajta elem 5-öd osztályú ismétléses kombinációinak száma tehát $C_4^{5,i} = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = 56$

Teljesen hasonló gondolatmenetet alkalmazhatunk általános esetben is.

Gráfelmélet:

A gráf pontok és azokat összekötő élek összessége. Egy pont fokszáma a belőle kiinduló élek száma.

A fokszámok összegére vonatkozó tétel: A gráf fokszámainak összege az élek számának kétszerese, tehát mindig páros szám.

Gráfok megrajzolása az egyes pontok fokszámai alapján:

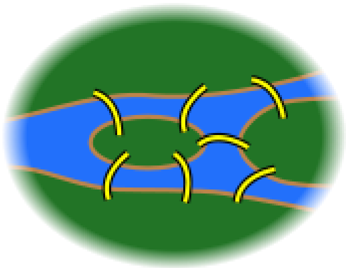
Havel-Hakimi algoritmus: Felvesszük a pontokat és nemnövekvő sorrendben melléjük írjuk a szükséges fokszámokat. A legnagyobb fokszámú ponttal kezdünk, meghúzzuk belőle a szükséges éleket a következő legnagyobb fokszámú pontok felé. Közben korrigáljuk a szükséges fokszámokat, és addig ismételjük az eljárást, míg az összes pont szükséges fokszámát le nem nullázzuk.

A **fa** pontjainak és éleinek száma közötti összefüggés: **Egy n pontú fa éleinek száma n-1**

Teljes gráf: Olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között fut él.

Egy n pontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$

A königsbergi hidak problémája: Létezik-e olyan út, mely minden hídon pontosan egyszer halad át? Van-e esetleg olyan is, mely végül visszatér a kiindulási pontjába?

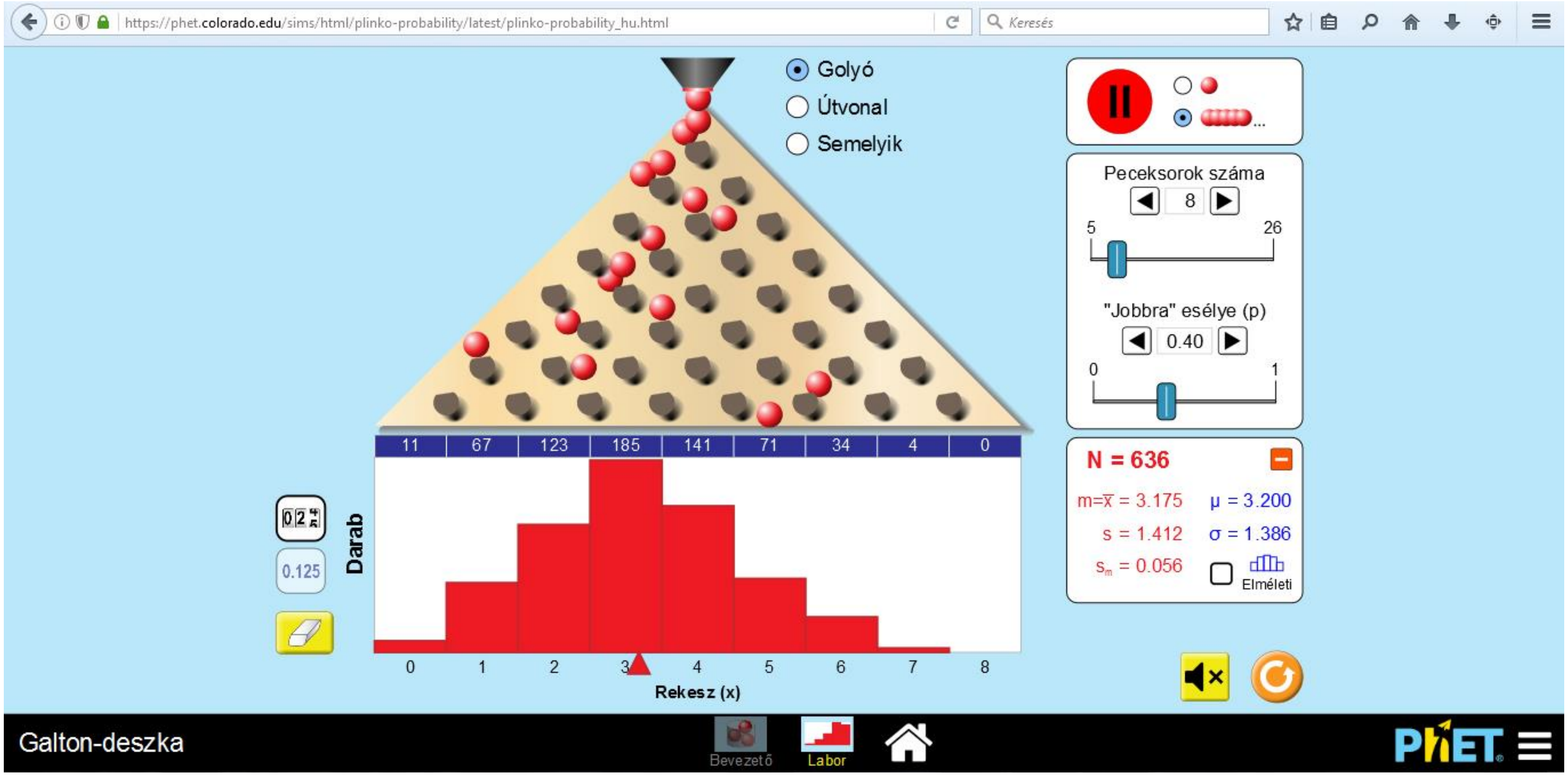


Euler-vonal, Euler-kör

Euler-vonal akkor létezik, ha maximum két pont fokszáma páratlan, a többi páros. Ilyenkor a páratlan fokszámú pontokban kell kezdeni. ill. befejezni a bejárást.

Euler-kör pedig akkor létezik, ha minden pont fokszáma páros. Ilyenkor bármelyik pont lehet a kezdőpont, ill. végpont.

II. Mellékletek



1. A Galton-deszka szimuláció

https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_hu.html

L / J	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190		
3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1140			
4	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845				
5	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504					
6	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760						
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520							
8	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970								
9	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960									
10	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756										
11	1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960											
12	1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970												
13	1	14	105	560	2380	8568	27132	77520													
14	1	15	120	680	3060	11628	38760														
15	1	16	136	816	3876	15504															
16	1	17	153	969	4845																
17	1	18	171	1140																	
18	1	19	190																		
19	1	20																			
20	1																				

2. Egy 21 karakteres szó 20 lépéses szóháromszögének értéktáblázata

															1															
														1		1														
													1		2		1													
												1		3		3		1												
											1		4		6		4		1											
										1		5		10		10		5		1										
									1		6		15		20		15		6		1									
								1		7		21		35		35		21		7		1								
							1		8		28		56		70		56		28		8		1							
						1		9		36		84		126		126		84		36		9		1						
					1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1					
				1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1				
			1		12		66		220		495		792		924		792		495		220		66		12		1			
		1		13		78		286		715		1287		1716		1716		1287		715		286		78		13		1		
	1		14		91		364		1001		2002		3003		3432		3003		2002		1001		364		91		14		1	
1		15		105		455		1365		3003		5005		6435		6435		5005		3003		1365		455		105		15		1

3. A Pascal-háromszög első 15 sora

A III/2. feladat megoldása:

H7 =G7+H6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	L/J	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
4	2	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	253	276		
5	3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1140	1330	1540	1771	2024			
6	4	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845	5985	7315	8855	10626				
7	5	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504	20349	26334	33649	42504					
8	6	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760	54264	74613	100947	134596						
9	7	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520	116280	170544	245157	346104							
10	8	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970	203490	319770	490314	735471								
11	9	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	293930	497420	817190	1307504									
12	10	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	352716	646646	1144066	1961256										
13	11	1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	352716	705432	1352078	2496144											
14	12	1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293930	646646	1352078	2704156												
15	13	1	14	105	560	2380	8568	27132	77520	203490	497420	1144066	2496144													
16	14	1	15	120	680	3060	11628	38760	116280	319770	817190	1961256														
17	15	1	16	136	816	3876	15504	54264	170544	490314	1307504															
18	16	1	17	153	969	4845	20349	74613	245157	735471																
19	17	1	18	171	1140	5985	26334	100947	346104																	
20	18	1	19	190	1330	7315	33649	134596																		
21	19	1	20	210	1540	8855	42504																			
22	20	1	21	231	1771	10626																				
23	21	1	22	253	2024																					
24	22	1	23	276																						
25	23	1	24																							
26	24	1																								

4. Egy 25 karakteres szó szóháromszögének értéktáblázata Excel-lel

A III/4. feladat megoldása:

M4 =L3+N3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
1				1		15		105		455		1365		3003		5005		6435		6435		5005		3003		1365		455		105		15		1			
2			1		16		120		560		1820		4368		8008		11440		12870		11440		8008		4368		1820		560		120		16		1		
3		1		17		136		680		2380		6188		12376		19448		24310		24310		19448		12376		6188		2380		680		136		17		1	
4	1		18		153		816		3060		8568		18564		31824		43758		48620		43758		31824		18564		8568		3060		816		153		18		1
5																																					

5. A Pascal-háromszög 16-18. sora (a 15. sorból indulva Excellel)