A frakcionális deriválás alapjai

Horváth Dávid

BME Transzportfolyamatok

2013. április 30.

Miről lesz szó

Heurisztikus általánosítások

Formálisabb definíciók

Törtderiváltas, diffúziós differenciálegyenletek Green-függvénye

Összefoglalás

Miről lesz szó

- Heurisztikák

Miről lesz szó

- Heurisztikák
- Definíciók

Miről lesz szó

- Heurisztikák
- Definíciók
- Törtderiváltas, diffúziós differenciálegyenletek Green-függvénye

Miről lesz szó

- Heurisztikák
- Definíciók
- Törtderiváltas, diffúziós differenciálegyenletek Green-függvénye
- Összefoglalás

Miről lesz szó

Heurisztikus általánosítások

Formálisabb definíciók

Törtderiváltas, diffúziós differenciálegyenletek Green-függvénye

Összefoglalás

$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$?

- Legyen $f(x)$ egy kellően sima függvény

$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$?

- Legyen $f(x)$ egy kellően sima függvény
- Legyen $D = \frac{d}{dx}$ a deriválás operátora

$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$?

- Legyen $f(x)$ egy kellően sima függvény
- Legyen $D = \frac{d}{dx}$ a deriválás operátora
- Ekkor $Df(x)$ értelmes, akárcsak D pozitív egész hatványai, melyek az oprátor ismételt hattatását jelentik

$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$?

- Legyen $f(x)$ egy kellően sima függvény
- Legyen $D = \frac{d}{dx}$ a deriválás operátora
- Ekkor $Df(x)$ értelmes, akárcsak D pozitív egész hatványai, melyek az oprátor ismételt hattatását jelentik
- Tört kitevők? 1695, Leibniz és L'Hospital: számos általánosítás lehetséges, de nem adódik egyértelmű eredmény. Lokalitás!

Heurisztikus általánosítások

- Legyen $f(x) = e^{ax}$ és $g(x) = cos(x)$

Heurisztikus általánosítások

- Legyen $f(x) = e^{ax}$ és $g(x) = cos(x)$
- Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = a^n e^{ax}$.

Heurisztikus általánosítások

- Legyen $f(x) = e^{ax}$ és $g(x) = cos(x)$
- Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = a^n e^{ax}$.
- Az általánosítás adódik: $\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{ax} = a^\nu e^{ax}$.

Heurisztikus általánosítások

- Legyen $f(x) = e^{ax}$ és $g(x) = cos(x)$
- Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = a^n e^{ax}$.
- Az általánosítás adódik: $\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{ax} = a^\nu e^{ax}$.
- Valamint $\frac{d^\nu}{dx^\nu} cos(x) = \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left[\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \right] = \frac{(i)^\nu e^{ix}+(-i)^\nu e^{-ix}}{2} = cos\left(x + \nu\frac{\pi}{2}\right)$

Heurisztikus általánosítások

- Legyen $f(x) = e^{ax}$ és $g(x) = cos(x)$
- Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = a^n e^{ax}$.
- Az általánosítás adódik: $\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{ax} = a^\nu e^{ax}$.
- Valamint $\frac{d^\nu}{dx^\nu} cos(x) = \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left[\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right] = \frac{(i)^\nu e^{ix}+(-i)^\nu e^{-ix}}{2} = cos\left(x + \nu\frac{\pi}{2}\right)$
- Ha $f(x)$ Fourier-transzformálható, akkor $\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int f(k)(-ik)^\nu e^{ikx}\, dk$.

Heurisztikus általánosítások

- Legyen $f(x) = e^{ax}$ és $g(x) = cos(x)$
- Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = a^n e^{ax}$.
- Az általánosítás adódik: $\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{ax} = a^\nu e^{ax}$.
- Valamint $\frac{d^\nu}{dx^\nu} cos(x) = \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left[\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right] = \frac{(i)^\nu e^{ix}+(-i)^\nu e^{-ix}}{2} = cos\left(x + \nu\frac{\pi}{2}\right)$
- Ha $f(x)$ Fourier-transzformálható, akkor $\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x) = \frac{1}{2\pi}\int f(k)(-ik)^\nu e^{ikx}\, dk$.
- Probléma: $f(x) = x$. Nem Fourier-transzformálható. Tartományra megszorítva?

Miről lesz szó

Heurisztikus általánosítások

Formálisabb definíciók

Törtderiváltas, diffúziós differenciálegyenletek Green-függvénye

Összefoglalás

A szokásos deriválás definíciója

- $\frac{d}{dx} f(x) = lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$

A szokásos deriválás definíciója

- $\frac{d}{dx} f(x) = lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$
- $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\varepsilon)$

A szokásos deriválás definíciója

- $\frac{d}{dx} f(x) = lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}$
- $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\varepsilon)$
- Pl: $f(x) = x^4$, $n = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \binom{2}{j} (x - j\varepsilon)^4 \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \left[x^4 - 2(x-\varepsilon)^4 + (x - 2\varepsilon)^4 \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \left(12x^2\varepsilon^2 - 24x\varepsilon^3 + 14\varepsilon^4 \right) \\ &= 12x^2 \end{aligned} \tag{1}$$

A D^{-1} operátor

- Bevezetve a σ_ε -ε-nal való eltolás oprátorát: $D^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1-\sigma_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^n f(x)$

A D^{-1} operátor

- Bevezetve a σ_ε -ε-nal való eltolás oprátorát: $D^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1-\sigma_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^n f(x)$
- Mivel $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, így értelmezhetjük$D^{-1}$-et:

$$\begin{aligned} D^{-1} f(x) = & \\ & = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \left[f(x) + f(x-\varepsilon) + f(x-2\varepsilon) + \cdots \right] \\ & = \int_{-\infty}^{x} f(x')\, dx' \end{aligned} \tag{2}$$

A deriválás általánosítása

- Tudjuk már, hogy
  $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\varepsilon)$.

A deriválás általánosítása

- Tudjuk már, hogy $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\varepsilon)$.
- Általánosítsunk úgy, hogy n helyébe írjuk be a ν nem egész számot. $\binom{\nu}{j} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-(j-1))}{j!} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{j!\Gamma(\nu+1-j)}$.

A deriválás általánosítása

- Tudjuk már, hogy $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\varepsilon)$.
- Általánosítsunk úgy, hogy n helyébe írjuk be a ν nem egész számot. $\binom{\nu}{j} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-(j-1))}{j!} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{j!\Gamma(\nu+1-j)}$.
- A szummában meddig mehet viszont ekkor j?

A deriválás általánosítása

- Tudjuk már, hogy $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\varepsilon)$.
- Általánosítsunk úgy, hogy n helyébe írjuk be a ν nem egész számot. $\binom{\nu}{j} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-(j-1))}{j!} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{j!\Gamma(\nu+1-j)}$.
- A szummában meddig mehet viszont ekkor j?
- $f(x)$-ről tegyük fel, hogy ha $x < x_0$, akkor $f(x) \equiv 0$. Ekkor j-t $\lfloor \frac{x-x_0}{\varepsilon} \rfloor$-ig van értelme növelni.

A deriválás általánosítása

- Tudjuk már, hogy $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\varepsilon)$.
- Általánosítsunk úgy, hogy n helyébe írjuk be a ν nem egész számot. $\binom{\nu}{j} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-(j-1))}{j!} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{j!\Gamma(\nu+1-j)}$.
- A szummában meddig mehet viszont ekkor j?
- $f(x)$-ről tegyük fel, hogy ha $x < x_0$, akkor $f(x) \equiv 0$. Ekkor j-t $\lfloor \frac{x-x_0}{\varepsilon} \rfloor$-ig van értelme növelni.
- Így végül a deriválás Grünwald-Letnyikov-féle kiterjesztése:

$$D^\nu f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^\nu} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{x-x_0}{\varepsilon} \rfloor} (-1)^j \frac{\Gamma(\nu+1)}{j!\Gamma(\nu+1-j)} f(x - j\varepsilon) \tag{3}$$

$D^{1/2}x$

- $\nu = 1/2$, $f(x) = x$, ha $x > 0$, máskülönben 0.

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(x - \frac{1}{2}(x-\varepsilon) - \frac{1}{8}(x-2\varepsilon) - \frac{1}{16}(x-3\varepsilon) - \frac{5}{128}(x-4\varepsilon) - \cdots \quad (4)$$
$$= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$D^{1/2}x$

- $\nu = 1/2$, $f(x) = x$, ha $x > 0$, máskülönben 0.

$$\begin{aligned}\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(x - \frac{1}{2}(x-\varepsilon) - \frac{1}{8}(x-2\varepsilon) - \\ \frac{1}{16}(x-3\varepsilon) - \frac{5}{128}(x-4\varepsilon) - \cdots \\ = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\end{aligned} \tag{4}$$

- Polinomok deriváltja $\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$

$D^{1/2}x$

- $\nu = 1/2$, $f(x) = x$, ha $x > 0$, máskülönben 0.

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(x - \frac{1}{2}(x-\varepsilon) - \frac{1}{8}(x-2\varepsilon) - \frac{1}{16}(x-3\varepsilon) - \frac{5}{128}(x-4\varepsilon) - \cdots\right) = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \quad (4)$$

- Polinomok deriváltja $\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$
- Általánosítva/előbbi definícióval számolva: $\frac{d^\nu}{dx^\nu}x^m = \frac{m!}{\Gamma(m+1-\nu)}x^{m-\nu}$

Az e^{ax} és a lokalitás

- Elvárjuk, hogy $\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{ax} = a^\nu e^{ax}$ legyen.

Az e^{ax} és a lokalitás

- Elvárjuk, hogy $\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{ax} = a^\nu e^{ax}$ legyen.
- Nézzük meg, hogy ha e^{ax}-et sorbafejtjük és deriváljuk, mit kapunk.

Az e^{ax} és a lokalitás

- Elvárjuk, hogy $\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{ax} = a^\nu e^{ax}$ legyen.
- Nézzük meg, hogy ha e^{ax}-et sorbafejtjük és deriváljuk, mit kapunk.
- Így

$$\begin{aligned} \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} e^{ax} = \\ &= \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \left[1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 \dots \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left(1 + 2x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{15}x^3 \dots \right) \end{aligned} \tag{5}$$

Az e^{ax} és a lokalitás

- Elvárjuk, hogy $\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{ax} = a^\nu e^{ax}$ legyen.
- Nézzük meg, hogy ha e^{ax}-et sorbafejtjük és deriváljuk, mit kapunk.
- Így

$$\begin{aligned}\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} e^{ax} &= \\ &= \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \left[1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 \dots\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left(1 + 2x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{15}x^3 \dots\right)\end{aligned} \tag{5}$$

- Hol a hiba?

Az e^{ax} és a lokalitás

- $\left\lfloor \frac{x-x_0}{\varepsilon} \right\rfloor$! $x_0 = -\infty$.

Az e^{ax} és a lokalitás

- $\left\lfloor \frac{x-x_0}{\varepsilon} \right\rfloor$! $x_0 = -\infty$.
- Meg lehet mutatni, hogy

$$\begin{aligned} D^{1/2}e^{ax} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(1/2+1)}{j!\,\Gamma(1/2+1-j)} e^{a(x-j\varepsilon)} \\ &= a^{1/2}e^{ax} \end{aligned} \tag{6}$$

Az e^{ax} és a lokalitás

- $\lfloor \frac{x-x_0}{\varepsilon} \rfloor$! $x_0 = -\infty$.
- Meg lehet mutatni, hogy

$$D^{1/2}e^{ax} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(1/2+1)}{j!\Gamma(1/2+1-j)} e^{a(x-j\varepsilon)} = a^{1/2}e^{ax} \tag{6}$$

- Az eredmény tehát függ a "deriválási tartománytól", a törtderivált az integráláshoz hasonlóan nem egy lokális mennyiség

Praktikusabb előállítások

- Cauchy: $\frac{d^{-n}}{dx^{-n}} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-x')^{n-1} f(x')\, dx'$

Praktikusabb előállítások

- Cauchy: $\frac{d^{-n}}{dx^{-n}} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x - x')^{n-1} f(x')\, dx'$
- Innen a frakcionális integrálás:
  $\frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x - x')^{\nu-1} f(x')\, dx'$

Praktikusabb előállítások

- Cauchy: $\frac{d^{-n}}{dx^{-n}} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x - x')^{n-1} f(x')\, dx'$
- Innen a frakcionális integrálás: $\frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x - x')^{\nu-1} f(x')\, dx'$
- Ebből deriválás két különböző módon (konvergencia)

Praktikusabb előállítások

- Cauchy: $\frac{d^{-n}}{dx^{-n}}f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-x')^{n-1} f(x')\,dx'$
- Innen a frakcionális integrálás:
  $\frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-x')^{\nu-1} f(x')\,dx'$
- Ebből deriválás két különböző módon (konvergencia)
- Riemann-Liouville/Left hand $(n-1<\nu<n)$

$$ {}_aD_x^{\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-x')^{n-\nu-1} f(x')\,dx' \tag{7} $$

Praktikusabb előállítások

- Cauchy: $\frac{d^{-n}}{dx^{-n}} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x - x')^{n-1} f(x')\, dx'$
- Innen a frakcionális integrálás: $\frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x - x')^{\nu-1} f(x')\, dx'$
- Ebből deriválás két különböző módon (konvergencia)
- Riemann-Liouville/Left hand $(n - 1 < \nu < n)$

$$ {}_aD_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - x')^{n-\nu-1} f(x')\, dx' \tag{7}$$

- Caputo/Right hand $(n - 1 < \nu < n)$

$$ {}_a^C D_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_a^x (x - x')^{n-\nu-1} f^{(n)}(x')\, dx' \tag{8}$$

Miről lesz szó

Heurisztikus általánosítások

Formálisabb definíciók

Törtderiváltas, diffúziós differenciálegyenletek Green-függvénye

Összefoglalás

Törtderiváltas diffúziós egyenlet

- $$\frac{\partial^{2\beta} u}{\partial t^{2\beta}} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < \beta \leq 1, \qquad D > 0 \qquad (9)$$

Törtderiváltas diffúziós egyenlet

- $$\frac{\partial^{2\beta} u}{\partial t^{2\beta}} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < \beta \leq 1, \qquad D > 0 \tag{9}$$
- Cauchy-probléma

$$\begin{aligned} u(x, 0^+, \beta) &= g(x), && -\infty < x < \infty \\ u(\pm\infty, t, \beta) &= 0, && t > 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Törtderiváltas diffúziós egyenlet

- $$\frac{\partial^{2\beta} u}{\partial t^{2\beta}} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < \beta \leq 1, \qquad D > 0 \tag{9}$$
- Cauchy-probléma
$$\begin{aligned} u(x, 0^+, \beta) &= g(x), & -\infty < x < \infty \\ u(\pm\infty, t, \beta) &= 0, & t > 0 \end{aligned} \tag{10}$$
- Távíróprobléma
$$\begin{aligned} &u(x, 0^+, \beta) = 0, & x > 0 \\ &u(0^+, t, \beta) = h(t), \;\; u(+\infty, t, \beta) = 0 & t > 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Törtderiváltas diffúziós egyenlet

- $$\frac{\partial^{2\beta} u}{\partial t^{2\beta}} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < \beta \leq 1, \qquad D > 0 \qquad (9)$$
- Cauchy-probléma
$$\begin{aligned} u(x, 0^+, \beta) &= g(x), & -\infty < x < \infty \\ u(\pm\infty, t, \beta) &= 0, & t > 0 \end{aligned} \qquad (10)$$
- Távíróprobléma
$$\begin{aligned} &u(x, 0^+, \beta) = 0, & x > 0 \\ &u(0^+, t, \beta) = h(t),\ u(+\infty, t, \beta) = 0 & t > 0 \end{aligned} \qquad (11)$$
- Ha $\beta > 1/2$, akkor $n = 2$, vagyis másodrendű integrodifferenciálegyenlet adódik. Most legyen $u_t(x, 0^+, \beta) = 0$.

Green-függvények

- $\mathcal{G}_C$ a $g(x) = \delta(x)$ során adódó fundamentális megoldás

Green-függvények

- $\mathcal{G}_C$ a $g(x) = \delta(x)$ során adódó fundamentális megoldás
- $$u(x,t,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_C(x',t,\beta) g(x-x')\, dx' \qquad (12)$$

Green-függvények

- $\mathcal{G}_C$ a $g(x) = \delta(x)$ során adódó fundamentális megoldás
- $$u(x,t,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_C(x',t,\beta) g(x-x')\,dx' \qquad (12)$$
- $\mathcal{G}_S$ a $h(t) = \delta(t)$ során adódó fundamentális megoldás

Green-függvények

- $\mathcal{G}_C$ a $g(x) = \delta(x)$ során adódó fundamentális megoldás
- $$u(x,t,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_C(x',t,\beta) g(x-x')\,dx' \qquad (12)$$
- $\mathcal{G}_S$ a $h(t) = \delta(t)$ során adódó fundamentális megoldás
- $$u(x,t,\beta) = \int_{0}^{t} \mathcal{G}_S(x,t',\beta) h(t-t')\,dt' \qquad (13)$$

Megoldás Laplace-transzformációval

- Bizonyítható, hogy

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}f(t)\right\} = s^\alpha f(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-1-i} f^{(i)}(0^+) \qquad (14)$$

$$n-1 < \alpha \le n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Megoldás Laplace-transzformációval

- Bizonyítható, hogy

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}f(t)\right\} = s^\alpha f(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-1-i} f^{(i)}(0^+) \tag{14}$$

$$n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Cauchy-problémánál

$$\begin{aligned} s^{2\beta}\mathcal{G}_C - \delta(x)s^{2\beta-1} &= D\frac{d^2\mathcal{G}_C}{dx^2} \\ \mathcal{G}_C(x,s,\beta) &= \frac{1}{2\sqrt{D}s^{1-\beta}} e^{-(|x|/\sqrt{D})s^\beta} \end{aligned} \tag{15}$$

Megoldás Laplace-transzformációval

- Bizonyítható, hogy

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}f(t)\right\} = s^\alpha f(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-1-i} f^{(i)}(0^+) \tag{14}$$

$$n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Cauchy-problémánál

$$\begin{aligned} s^{2\beta}\mathcal{G}_C - \delta(x)s^{2\beta-1} &= D\frac{d^2\mathcal{G}_C}{dx^2} \\ \mathcal{G}_C(x,s,\beta) &= \frac{1}{2\sqrt{D}s^{1-\beta}} e^{-(|x|/\sqrt{D})s^\beta} \end{aligned} \tag{15}$$

- Távíróproblémánál

$$\mathcal{G}_S(x,s,\beta) = e^{-(x/\sqrt{D})s^\beta}, \quad x \geq 0 \tag{16}$$

Megoldás Laplace-transzformációval

- Bizonyítható, hogy

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}f(t)\right\} = s^\alpha f(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-1-i} f^{(i)}(0^+) \tag{14}$$

$n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}$

- Cauchy-problémánál

$$\begin{aligned} s^{2\beta}\mathcal{G}_C - \delta(x)s^{2\beta-1} &= D\frac{d^2\mathcal{G}_C}{dx^2} \\ \mathcal{G}_C(x,s,\beta) &= \frac{1}{2\sqrt{D}s^{1-\beta}} e^{-(|x|/\sqrt{D})s^\beta} \end{aligned} \tag{15}$$

- Távíróproblémánál

$$\mathcal{G}_S(x,s,\beta) = e^{-(x/\sqrt{D})s^\beta}, \quad x \geq 0 \tag{16}$$

- Látható, hogy $\frac{d}{ds}\mathcal{G}_S = -2\beta x\mathcal{G}_C$, így $x\mathcal{G}_C(x,t,\beta) = \frac{t}{2\beta}\mathcal{G}_S(x,t,\beta)$ ha $x > 0$.

A Green-függvények meghatározása

- $$|x|\mathcal{G}_C(x,t,\beta) = \frac{|x|}{2\sqrt{D}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Br}} e^{st-(|x|/\sqrt{D})s^{\beta}}\,\frac{ds}{s^{1-\beta}} \tag{17}$$

A Green-függvények meghatározása

- $$|x|\mathcal{G}_C(x,t,\beta) = \frac{|x|}{2\sqrt{D}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Br}} e^{st-(|x|/\sqrt{D})s^\beta}\,\frac{ds}{s^{1-\beta}} \tag{17}$$
- Változócsere: $z = \frac{|x|}{\sqrt{D}t^\beta}$

$$|x|\mathcal{G}_C(x,t,\beta) = \frac{z}{2}M(z,\beta),$$
$$M(z,\beta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Br}} e^{\sigma - z\sigma^\beta}\,\frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}} \tag{18}$$
$$M(z,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!\,\Gamma\left(-\beta n + 1 - \beta\right)}$$

A Green-függvények meghatározása

- $$|x|\mathcal{G}_C(x,t,\beta) = \frac{|x|}{2\sqrt{D}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Br}} e^{st-(|x|/\sqrt{D})s^\beta} \frac{ds}{s^{1-\beta}} \tag{17}$$
- Változócsere: $z = \frac{|x|}{\sqrt{D}t^\beta}$

$$\begin{aligned} |x|\mathcal{G}_C(x,t,\beta) &= \frac{z}{2}M(z,\beta), \\ M(z,\beta) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Br}} e^{\sigma - z\sigma^\beta}\frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}} \\ M(z,\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!\Gamma\left(-\beta n + 1 - \beta\right)} \end{aligned} \tag{18}$$

- Ha $\beta = 1/q$ és q pozitív egész, akkor

$$\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}M(z,\frac{1}{q}) + \frac{(-1)^q}{q}zM(z,\frac{1}{q}) = 0 \tag{19}$$

A Green-függvények asszimptotika

- Asszimptotika ($z = \frac{|x|}{\sqrt{Dt^{\beta}}}$, $x\mathcal{G}_C \propto zM$)

$$M(\frac{z}{\beta}, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\beta)}} z^{\frac{\beta-1/2}{1-\beta}} exp\left[-\frac{1-\beta}{\beta} z^{\frac{1}{1-\beta}}\right]$$
$$zM(\frac{z}{\beta}, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\beta)}} z^{\frac{1/2}{1-\beta}} exp\left[-\frac{1-\beta}{\beta} z^{\frac{1}{1-\beta}}\right] \tag{20}$$

Miről lesz szó

Heurisztikus általánosítások

Formálisabb definíciók

Törtderiváltas, diffúziós differenciálegyenletek Green-függvénye

Összefoglalás

Összefoglalás

- Definiáltuk a törtderiváltat, mely nem egy lokális mennyiség (memória)

Összefoglalás

- Definiáltuk a törtderiváltat, mely nem egy lokális mennyiség (memória)
- Differenciálegyenleteknél szó esett a kezdeti és peremfeltételekről

Összefoglalás

- Definiáltuk a törtderiváltat, mely nem egy lokális mennyiség (memória)
- Differenciálegyenleteknél szó esett a kezdeti és peremfeltételekről
- Laplace-transzformációval meghatároztuk a Green-függvényt

Irodalomjegyzék

- F. Mainardi: *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equations* (Appl. Math. Lett. Vol. 9 No.6 1996)
- Mehdi Dalir, Majid Bashour: *Applications for fractional calculus* (Applied Mathematical Sciences, Vol. 4 2010, no. 21.)
- *http://mathpages.com/home/kmath616/kmath616.htm*

Köszönöm a figyelmet!