European Virtual Laboratory of Mathematics

EVLM	Education and Culture Leonardo da Vinci This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.	Education and Culture Leonardo da Vinci Project No. 2006 - SK/06/B/F/PP - 177436

Európai Virtuális Matematikai Laboratórium

Árvai- Homolya Szilvia

Valószínűségszámítás

EVML e-könyvek
Miskolc 2008

Sorozat szerkesztője: Körtesi Péter

A jelen kötet az eredeti kiadás alapján a szerzők engedélyével készült on-line reprint.

dr. Árvai-Homolya Szilvia:

Valószínűségszámítás

A mindennapi életben gyakran felmerülnek olyan problémák, amelyek a valószínűségszámítással kapcsolatosak, gondolhatunk itt akár a szerencsejátékokra, vagy az egyes tudományterületeken (pl. műszaki-, természettudományok, közgazdaságtan) megoldandó feladatokra.

A valószínűségszámítás a matematikán belül egy viszonylag fiatal tudományágnak számít. Önálló tudománnyá válása Blaise Pascal és Pierre de Fermat 1654-es levelezésével kezdődött, bár náluk még nem jelent meg a valószínűség explicit fogalma. Az általuk felvetett és megoldott problémák hatással voltak többek között Ch. Huygens és később J. Bernoulli munkásságára. A későbbiekben J. Bernoulli, Moivre és Laplace és mások bővítették a valószínűségszámítást új eredményekkel.

Azonban az alapfogalmak nem voltak kellőképpen tisztázva, egyre gyakrabban merültek fel ellentmondások. Ezek vezettek a valószínűségszámítás axiomatikus megalapozásához, amely elsősorban Kolmogorov nevéhez fűződik.

1 Kombinatorikai bevezetés

1.1 Permutációk

Adott n különböző elem *ismétlés nélküli permutációján* az elemek egy meghatározott sorrendjét értjük. Az n különböző elem összes permutációinak számát P_n-nel jelöljük.

Az n különböző elem ismétlés nélküli permutációnak száma:

$$P_n = n!,$$

ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. (Megjegyezzük, hogy a későbbiekben szükséges a 0 faktoriálisát is értelmezni, mégpedig $0! = 1$.)

Példa. Egy 10 fős társaság hányféleképpen tud leülni egy kerek aztalnál, ha a helyek nem számozottak?

Kerek asztalnál csak a tagok egymáshoz viszonyított helyzete számít. Egy főt tetszőleges helyre leültetve csak a társaság másik 9 tagját kell sorba rendeznünk, így a megoldás 9 elem ismétlés nélküli permutációinak száma, azaz

$$P_9 = 9! = 362280.$$

Adott n elem, melyek között r $(r < n)$ különböző található, legyenek ezek: $a_1, a_2 \ldots, a_r$, úgy, hogy az a_1 elem k_1-szer, az a_2 elem k_2-ször,..., az a_r elem k_r-szer fordul elő, ahol $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.
Az adott n elem egy meghatározott sorrendjét ezen elemek egy *ismétléses*

permutációjának nevezzük, az összes ismétléses permutációnak a számát pedig $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ jelöli .

Rögzített $n, r, k_1, k_2, \ldots, k_r$ esetén az ismétléses permutációk száma:

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}.$$

Példa. Hány 7 jegyű telefonszámot képezhetünk a $2, 2, 2, 3, 3, 5, 5$ számjegyek felhasználásával?

A 7 számból kettő, kettő illetve három egymással megegyező, így a lehetséges sorrendjeik ismétléses permutációt alkotnak, melyeknek száma:

$$P_7^{2,2,3} = \frac{7!}{2!2!3!} = 210.$$

1.2 Variációk

Legyen adott n különböző elem. Ezekből tetszőlegesen választott k $(0 < k \leq n)$ különböző elem egy meghatározott sorrendjét *az* n elem k-ad osztályú *ismétlés nélküli variációjának* nevezzük. Az n elem k-ad osztályú *ismétlés nélküli variációinak a számát* V_n^k-val jelöljük.

Az n elem k-ad osztályú *ismétlés nélküli variációinak a száma*

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Példa. Egy 100 fős cég legjobb 3 dolgozója kap különböző jutalmat. Hányféleképpen történhet a jutalmazás?
Mivel a jutalmak különbözőek, így a 100 dolgozóból kiválasztott 3 főt az összes lehetséges módon sorba rendezzük, azaz

$$V_{100}^3 = \frac{100!}{97!} = 970200$$

módon történhet a jutalmazás.

Legyen adott n különböző elem. Ezekből k elemet kiválasztva úgy, hogy egy elem többször is szerepelhet és a kiválasztás sorrndje is számít, *az* n elem k-ad osztályú *ismétléses variációját* kapjuk. Az n elem k-ad osztályú *ismétléses variációinak a számát* $V_n^{k,i}$-vel jelöljük.

Rögzített n, k esetén az ismétléses variációk száma:

$$V_n^{k,i} = n^k.$$

Példa. Egy bankban 4 pultnál folyik egyidőben az ügyintézés. Az érkező ügyfelek bármelyik ügyintézőnél jelentkezhetnek. Hányféleképpen jelentkezhet valamely napon az első 20 ügyfél a 4 ügyintézőnél?

Mivel 4 pultnál folyik az ügyintézés, minden ügyfél ezekből egyiket választhatja (fontos, hogy melyiket) és ugyanahhoz a pulthoz több ügyfél is jelentkezhet. Így a lehetséges jelentkezések ismétléses variációt alkotnak, melyeknek száma:

$$V_4^{20,i} = 4^{20}.$$

1.3 Kombinációk

Legyen adott n különböző elem. Ha ezekből tetszőlegesen választunk k ($0 < k \leq n$) különböző elemet, úgy, hogy a kiválsztott elemek sorrendje nem számít, akkor *az n elem* k-ad osztályú *ismétlés nélküli kombinációját* kapjuk. Az n elem k-ad osztályú *ismétlés nélküli kombinációinak a számát* C_n^k-val jelöljük.

Az n elem k-ad osztályú *ismétlés nélküli kombinációinak a száma*

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

Az $\binom{n}{k}$ ("n alatt a k") szimbólum az úgynevezett binomiális együttható, melynek kiszámítására az

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

formula érvényes. Könnyen belátható, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Példa. Hány ötöslottó-szelvényt kellene kitölteni ahhoz, hogy biztosan legyen ötösünk?
Az ötöslottó esetén 90 különböző elemből kell kiválasztanunk 5 elemet úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. Az összes lehetőségek számát a 90 elem 5-d osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma adja, azaz

$$C_{90}^5 = \binom{90}{5} = 43949268.$$

Legyen adott n különböző elem. Ezekből k elemet kiválasztva úgy, hogy egy elem többször is szerepelhet és a kiválasztás sorrndjére nem vagyunk tekintettel, *az n elem* k-ad osztályú *ismétléses kombinációját* kapjuk. Az

n elem k-ad osztályú *ismétléses kombinációinak a számát* $C_n^{k,i}$-vel jelöljük, melyek száma:

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}.$$

2 Eseményalgebra

Definíció. Egy véletlentől függő kísérlet lehetséges eredményeinek (kimeneteleinek) összességét *eseménytér*nek nevezzük. Jele Ω. Az Ω elemeit *elemi esemény*eknek nevezzük és $\omega_1, \omega_2, \ldots$ jelöljük.

Esemény alatt az eseménytér $A \subset \Omega$ részhalmazát értjük. (Az Ω eseménytér eseményei úgynevezett σ-algebrát alkotnak.)

Példa. Kockadobálás esetén:
Elemi események: $\omega_1 = \{1\}, \omega_2 = \{2\}, \ldots, \omega_6 = \{6\}$.
Eseménytér: $\Omega = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$
Esemény: pl. A jelölje a 4-nél nagyobb szám dobását, ekkor $A = \{\{5\}, \{6\}\}$.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az A esemény bekövetkezik, ha a kísérlet eredménye eleme az A halmaznak. Azt az eseményt, amely a kísérlet során mindig bekövetkezik *biztos esemény*nek (Ω) nevezzük. *Lehetetlen esemény* az az esemény, amely sosem következik be, jelölése: $\emptyset$.

(a) Ha az A esemény csak akkor következhet be, ha a B esemény is bekövetkezik, azt mondjuk, hogy A *maga után vonja* B-t, jelölése $A \subset B$.

(b) Az A esemény *ellentett esemény*én azt az $\overline{A}$-val jelölt esemény értjük, amely pontosan akkor következik be, amikor A nem következik be.

(c) Az A és B események *összegén* azt az $A+B$ szimbólummal jelölt eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik. (Használatos még a halmazalgebrai megfelelőhöz hasonlóan az $A \cup B$ jelölés is.)

(d) Az A és B események *szorzatán* azt az $A \cdot B$ szimbólummal jelölt eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha A és B is bekövetkezik. (Ekvivalens jelölés: $A \cap B$)

(e) Az A és B események *különbségén* azt az eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha az A esemény bekövetkezik, de a B nem. Jelölés: $A - B$. (A halmazelméleti különbség műveletéhez hasonlóan használatos még az $A \setminus B$ jelölés is.

Példa. A Magyarországon mért júliusi napi középhőmérséklet esetén legyen az Ω eseménytér a $(10, 30)$ nyílt intervallum, azaz a júliusi napi középhőmérséklet C°-ban mérve egy tetszőleges valós szám ezen intervallumból. Jelölje A azt az eseményt, amikor a júliusi napi középhőmérséklet legalább $20C^{\circ}$, B pedig azt az esményt, amikor a júliusi napi középhőmérséklet legfeljebb $25C^{\circ}$. Ekkor az
$\overline{A}$ = a júliusi napi középhőmérséklet a $(10, 20)$ nyílt intervallumba esik.
$A \cdot B$ = a júliusi napi középhőmérséklet a $[20, 25]$ zárt intervallumba esik.
$A + B = \Omega$.
$A - B$ = a júliusi napi középhőmérséklet a $(25, 30)$ intervallumba esik.

Definíció. Ha az eseményekből álló Γ halmaz olyan, hogy tartalmazza a biztos eseményt, valamint tetszőleges $A, B \in \Gamma$ esetén $A + B$, $\overline{A} \in \Gamma$, akkor azt mondjuk, hogy a Γ egy eseményalgebra.

Eseményalgebra esetén természetesen $\emptyset$, $A \cdot B$, $A \setminus B \in \Gamma$ is teljesül. Egy kísérlettel kapcsolatos események eseményalgebrát alkotnak.

Mint ahogy azt már az eseményeken értelmezett műveletek bevezetésénél megemlítettük, az esményalgebrai $\overline{}, +, \cdot, -$ műveletek megfelelnek a halmazelméleti $\overline{}$ komplementer, $\cup$ egyesítés, $\cap$ metszet, $\setminus$ különbség műveleteknek. Így az első fejezetben megismert halmazalgebrai azonosságok érvényesek maradnak az eseményalgebra esetén is.

A diszjunkt halmaznak az esményalgebrai megfelelője a következő fogalom:

Definíció. Az A és B eseményeket *egymást kizáró események*nek nevezzük, ha $A \cdot B = \emptyset$.

Definíció. Az mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események rendszere *teljes eseményrendszer*t alkot, ha az alábbi két feltétel teljesül:

(1) $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$ és

(2) $A_i \cdot A_j = \emptyset$ tetszőleges $1 \leq i, j \leq n$ esetén, azaz az eseményrendszer tagjai páronként kizárják egymást.

Egy eseményalgebra tetszőleges két eseményének az összege (szorzata) is elem az eseményalgebrának, így a teljes indukció módszerével könnyen belátható, hogy véges sok $A_1, A_2, \ldots, A_n$ esemény összege (szorzata) is eleme az eseményalgebrának. Megszámlálhatóan végtelen sok $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ esemény esetén az $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ összegen (amely szintén az esményalgbra eleme) azt az eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha az A_i $(i = 1, \ldots, n, \ldots)$ események közül legalább egy bekövetkezik. Megszámlálhatóan végtelen sok $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ esemény *teljes eseményrendszert alkot*, ha $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ és $A_i \cdot A_j = \emptyset$ tetszőleges $i < j$ esetén.

3 A valószínűség fogalma

Ismételjünk meg egy véletlen kísérletet (melynek egyik kimenetele az A esemény) n-szer egymástól függetlenül, azaz a kísérletek eredményét ne befolyásolják az előző kísérletek eredményei. Az A esemény *gyakorisága* alatt azon kísérletek számát értjük, amelyeknél az A esemény bekövetkezett. Jelölése: $k_n(A)$. Az A esemény *relatív gyakoriság*nak pedig $\nu_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$ hányadost nevezzük.

A valószínűség fogalmának axiomatikus bevezetéséhez fontosak a relatív gyakoriság következő tulajdonságai:

- Tetszőleges A esemény esetén $0 \leq \nu_n(A) \leq 1$.
- $\nu_n(\emptyset) = 0$, $\nu_n(\Omega) = 1$.
- Ha A és B egymást kizáró események, akkor

$$\nu_n(A + B) = \nu_n(A) + \nu_n(B).$$

- Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ páronként egymást kizáró események, akkor

$$\nu_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_n(A_i),$$

ahol a jobboldalon álló sor tagjai közül csak véges sok különbözik 0-tól.

- Ha $A \subset B$, akkor $\nu_n(A) \leq \nu_n(B)$.
- Tetszőleges A esemény esetén $\nu_n\left(\overline{A}\right) = 1 - \nu_n(A)$.

Ezen tulajdonságok nem függetlenek egymástól. Például az $\nu_n(\Omega) = 1$ tulajdonságból és az ellentett eseményre vonatkozó $\nu_n\left(\overline{A}\right) = 1 - \nu_n(A)$ összefüggésből azonnal adódik a $\nu_n(\emptyset) = 0$ tulajdonság.

A tapasztalat alapján egy esemény relatív gyakorisága valamilyen konkrét érték körül ingadozik egyre kisebb ingadozással, így természetes az a feltételezés, hogy minden eseményhez hozzá lehet rendelni ezt a bizonyos értéket, melyet az adott esemény *valószínűség*ének nevezünk. A valószínűség rendelkezik a relatív gyakoriság tulajdonságaival.

Definíció. *Valószínűségi mező* alatt egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast értünk, ahol Ω egy nemüres halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω bizonyos részhalmazaiból álló σ-algebra, és $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig egy olyan nemnegatív leképezés, melyre

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$ teljesül tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén,

(2) $P(\Omega) = 1$,

(3) Ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$$

A $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ leképezést *valószínűség*nek nevezzük. A definíció következménye a valószínűség következő tulajdonságai:

- $P(\emptyset) = 0$.
- Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ páronként egymást kizáró események, akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right).$$

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Ha $A \subset B$, akkor $P(A) \leq P(B)$.
- Tetszőleges A, B, C események esetén

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A) + P(B) - P(AB), \\ P(A+B+C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) \\ &\quad + P(ABC). \end{aligned}$$

Az utolsó tulajdonság általánosítása a Poincará-tétel:

Tétel. *Tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre a*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k},$$

ahol az összegzést az összes $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots n\}$ esetre tekintjük.

Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt *klasszikus valószínűségi mező*nek nevezzük, ha az elemi események száma véges és valószínűségük megegyezik.

Klasszikus valószínűségi mező esetén tetszőleges A esemény valószínűségét

$$P(A) = \frac{\text{az } A \text{ szempontjából kedvező elemi események száma}}{\text{az összes elemi események száma}}$$

formula alkalmazásával számíthatjuk ki.

Példa. Szabályos dobókockát feldobva annak valószínűsége, hogy 2-nél nagyobb számot dobunk $\frac{4}{6}$.

A klasszikus képlet széleskörű alkalmazási lehetőségei tárulnak fel az úgynevezett mintavételes feladatok esetén.

3.1 Visszatevés nélküli mintavétel

Adott N darab objektum, amiből M darab rendelkezik bizonyos tulajdonsággal. Visszatevés nélkül kivéve n darabot jelölje A_k azt az eseményt, hogy k darab adott tulajdonsággal rendelkező objektum van a kivettek között. Ekkor A_k (ahol $0 \leq k \leq \min\{n, M\}$) esemény bekövetkezésének valószínűsége

$$P(A_k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Példa. Annak valószínűsége, hogy az ötöslottón hármas találatunk legyen $\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}$. Ugyanis az ötöslottó-szelvény kitöltését tekinthetjük úgy, mint egy $n = 5$ elemű visszatevés nélküli mintavételt (hiszen minden elemet legfeljebb egyszer választhatunk) az $M = 5$ nyerő és $N - M = 85$ nem nyerő szám közül. Így a megoldás valóban

$$P(A_3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \approx 0.0008123.$$

3.2 Visszatevéses mintavétel

Adott N darab különböző objektum, amiből M darab rendelkezik bizonyos tulajdonsággal. Visszatevéssel kivéve n darabot jelölje A_k azt az eseményt, hogy k darab adott tulajdonsággal rendelkező objektum van a kivettek között. Ekkor A_k (ahol $0 \leq k \leq n$) esemény bekövetkezésének valószínűsége

$$P(A_k) = \frac{\binom{n}{k} M^k (N-M)^{n-k}}{N^n}.$$

Nyilván a visszatevéses mintavétel esetén a k akár M-nél nagyobb is lehet, hiszen ugyanazt az objektumot többször is kihúzhatjuk. Ha bevezetjük a $p = \frac{M}{N}$ jelölést az adott tulajdonságú objektumok arányára, akkor az előző valószínűségre a

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

formula adódik.

Példa. Mi a valószínűsége annak, hogy egy osztályban az 5 legjobban tanuló diák közül 3 lány és 2 fiú, ha annak valószínűsége, hogy egy lány a legjobb 5 között van $\frac{4}{7}$, míg fiúk esetén ez a valószínűség $\frac{3}{7}$. A megoldás során a visszatvéses mintavételre vonatkozó képlettel számolhatunk, ahol $n = 5$, $k = 3$, $p = \frac{4}{7}$. Így

$$P(A_3) = \binom{5}{3} \left(\frac{4}{7}\right)^3 \left(\frac{3}{7}\right)^2 \approx 0.3427.$$

Példa. $N = 100$ csavarból $M = 8$ selejtes, a többi jó. Visszatevéssel mintavétellel $n = 10$ elemű mintát veszünk. Mi a valószínűsége, hogy a mintában 4 csavar selejtes?
Nyilván $p = \frac{8}{100}$, $1-p = \frac{92}{100}$, $k = 4$, így a visszatvéses mintavételre vonatkozó képlet alapján a megoldás

$$P(A_4) = \binom{10}{4} \left(\frac{8}{100}\right)^4 \left(\frac{92}{100}\right)^6 \approx 0.005216.$$

3.3 Feltételes valószínűség

Ha az A és B esemény az Ω eseménytér két eseménye úgy, hogy $P(B) \neq 0$, akkor a

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

hányadost az A eseménynek a B eseményre vonatkozó *feltételes valószínűség*ének nevezzük.

Az így bevezetett $P(\cdot \mid B) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ leképezés valóban valószínűség, hiszen könnyen beláthatóak a feltételes valószínűség következő tulajdonságai:

- $0 \leq P(A \mid B) \leq 1$ teljesül tetszőleges A, B eseményekre, ahol $P(B) \neq 0$.
- $P(\Omega \mid B) = 1$ tetszőleges $P(B) \neq 0$ esetén.

- Ha A és C egymást kizáró események és $P(B) \neq 0$, akkor

$$P(A + C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B).$$

Példa. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy 2 gyermekes családban mindkét gyermek lány, ha tudjuk, hogy az idősebb gyermek lány?
Jelölje A azt az eseményt, hogy mindkét gyermek lány, B pedig azt, hogy az idősebb gyermek lány. A kérdés a $P(A \mid B)$ valószínűség. Definíció szerint $P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$.

Állítás. *(Láncszabály) Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események, úgy, hogy $P(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) > 0$, ekkor*

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Bizonyítás. A bizonyítás teljes indukcióval történik.
A feltételes valószínűség definíciója alapján az állítás $n = 2$ esetén igaz .
Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra igaz az állítás, azaz

$$P(A_1 A_2 \ldots A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) \ldots P(A_k \mid A_1 A_2 \ldots A_{k-1}).$$

Továbbá $P(A_1 A_2 \ldots A_k A_{k+1}) = P((A_1 A_2 \ldots A_k) A_{k+1}) = P(A_1 A_2 \ldots A_k) \cdot P(A_{k+1} \mid A_1 A_2 \ldots A_k)$. Ebből pedig az indukciós feltevést alkalmazva következik, hogy az állítás teljesül $n = k + 1$-re is. $\square$

Példa. Húzzunk ki visszatevés nélkül egy 32 lapos magyar kártyából 3-t visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy az első és a harmadik lap ász, miközben a második nem az.
Jelöljük A_i-vel $(i = 1, 2, 3)$ azt az eseményt, amikor az i. húzás ász. A kérdés a $P(A_1 \overline{A_2} A_3)$ valószínűség. De ez a láncszabály alapján

$$P(A_1) \cdot P(\overline{A_2} \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \overline{A_2}).$$

De $P(A_1) = \frac{4}{32}$, $P(\overline{A_2} \mid A_1) = \frac{28}{31}$ és $P(A_3 \mid A_1 \overline{A_2}) = \frac{3}{30}$, így a keresett megoldás

$$P(A_1 \overline{A_2} A_3) = \frac{4}{32} \cdot \frac{28}{31} \cdot \frac{3}{30} = \frac{7}{620}.$$

Korábban már definiáltuk mit értünk teljes eseményrendszer alatt. Ha ismert egy eseménynek egy teljes eseményrendszer eseményeire vett feltételes valószínűsége, akkor a következő tétel segítségével kiszámíthatjuk az esemény valószínűségét.

Tétel. *(Teljes valószínűség tétele) Ha a pozitív valószínűségű* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges* B *eseményre fennáll, hogy*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i).$$

Bizonyítás. A teljes eseményrendszer definíciója miatt $A_1+A_2+\ldots+A_n = \Omega$, továbbá az A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ események páronként kizárják egymást. Így

$$B = B\Omega = B(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = BA_1 + BA_2 + \ldots + BA_n.$$

Az A_i események páronkénti diszjunktsága miatt a BA_i események is páronként kizárják egymást, így

$$P(B) = P(BA_1 + BA_2 + \ldots + BA_n) = P(BA_1) + P(BA_2) + \ldots + P(BA_n).$$

A láncszabályból adódik, hogy

$$P(BA_i) = P(B \mid A_i) P(A_i),$$

így az előző két összefüggést felhasználva azt kapjuk, hogy

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \ \ldots \ + P(B \mid A_n)P(A_n).$$

□

Példa. Egy üzemben három gépen csavarokat gyártanak. Az első gépnél a selejtarány 2%, a másodiknál 3%, a harmadiknál 1,5%. Az első gép az össztermék 25%-át, a második a 35%-át, a harmadik pedig a 40%-át gyártja. Mi a valószínűsége, hogy az össztermékből véletlenszerűen választott csavar selejtes?
Jelölje A_1, A_2 és A_3 azt az eseményt, hogy a kihúzott csavar az i -edik gépen készült és B azt az eseményt, hogy a csavar selejtes. Ekkor az A_1, A_2 és A_3 teljes eseményrendszert alkotnak, mivel $P(A_1) = 0.25$, $P(A_2) = 0.35$, $P(A_3) = 0.4$, így $A_1 + A_2 + A_3 = \Omega$, továbbá páronként kizárják egymást. A selejtarányra vonatkozó feltételek miatt adódnak a következő feltételes valószínűségek: $P(B \mid A_1) = 0.02$, $P(B \mid A_2) = 0.03$ és $P(B \mid A_3) = 0.015$.
Így a teljes valószínűség tétele alapján

$$P(B) = 0.02 \cdot 0.25 + 0.03 \cdot 0.35 + 0.015 \cdot 0.4 = 0.0215.$$

Tétel. *(Bayes-tétel) Ha az* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *pozitív valoszínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, továbbá* B *tetszőleges pozitív valószínűségű esemény, akkor*

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}.$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k B)}{P(B)}.$$

A nevezőben a teljes valószínűség tételét, a számlálóban pedig a láncszabályt alkalmazva kapjuk a tételben szereplő állítást, vagyis

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}.$$

□

Példa. Mennyi a valószínűsége az előző példa esetén annak, hogy a második gépen gyártották a kiválasztott csavart, azon feltétel mellett, hogy az selejtesnek bizonyult?
A Bayes-tétel alapján

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(B \mid A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.03 \cdot 0.35}{0.0215} \approx 0.4884.$$

3.4 Független események

Akkor mondjuk, hogy az A és B események *függetlenek egymástól*, ha az egyik esemény bekövetkezésével kapcsolatos információ nem változtatja meg a másik esemény bekövetkezésének esélyéről alkotott véleményünket. Valamely B esemény ($P(B) > 0$) bekövetkezésekor az A esemény bekövetkezésének valószínűségét a $P(A \mid B)$ adja meg, így az A esemény *független* a pozitív valószínűségű B eseménytől, ha

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Hasonlóan valamely pozitív valószínűségű A esemény bekövetkezésekor a B esemény bekövetkezésének valószínűségét a $P(B \mid A)$ adja meg, így a B esemény *független* a pozitív valószínűségű A eseménytől, ha

$$P(B \mid A) = P(B).$$

Felhasználva a feltételes valószínűség definícióját $\left(\text{azaz } P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}\right)$ láthatjuk, hogy az A esemény pontosan akkor *független* a B eseménytől, amikor a B esemény *független* az A eseménytől. Továbbá a következő definíció alapján a függetlenség akkor is értelmezhető, ha $P(A) = 0$ illetve $P(B) = 1$.

Definíció. Az A és B eseményeket *független*nek nevezzük, ha

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

teljesül.

Példa. Egy 32 lapos magyar kártyából húzzunk véletlenszerűen egy lapot. Legyenek az A és B események a következőek:
A: a kihúzott lap a $7, 8$, király és ász valamelyike,
B: a kihúzott lap a 8, alsó, felső és ász valamelyike.
Független-e az A és B esemény?
Nyilván $P(A) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$. Továbbá az AB az az esemény, amikor a kihúzott lap a 8 illetve ász valamelyike,
azaz $P(AB) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, így $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, azaz A és B esemény független.

Megadhatjuk az előzőek alapján több esemény függetlenségének fogalmát is.

Definíció. Legyen adott az $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ események egy véges vagy végtelen sorozata. Ezeket az eseményeket *páronként független*nek nevezzük, ha közülük bármely két esemény független.
Az $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ eseményeket *teljesen függetlenek*nek nevezzük, ha

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_2}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{i_k}\right)$$

teljesül tetszőleges $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ és $2 \leq k \leq n$ természetes számok esetén.

Ez a két fogalom nem ekvivalens, ugyanis megadható például 3 olyan esemény, amelyek páronként függetlenek, de nem teljesen függetlenek.

4 Valószínűségi változók

Egy véletlen kísérlethez kapcsolódóan sokféle véletlentől függő mennyiséget lehet tekinteni. Például:

- Feldobunk 3 szabályos dobókockát. Tekinthetjük a dobott számok összegét, a legnagyobb dobott számot, a legkisebb két dobott szám szorzatát, stb.
- Kör alakú (3 sugarú) céltáblára lövünk kétszer. Tekinthetjük az első dobás esetén a középponttól mért távolságot, a két dobás esetén a középponttól mért távolságok összegét.

Az előző véletlentől függő mennyiségek mindegyike megadható egy ξ (kszi): $\Omega \to \mathbb{R}$ leképezés segítségével, mivel minden esetben egy (véletlentől függő) valós számot rendeltünk a kísérlethez.

Definíció. A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ leképezést *valószínűségi változó*nak nevezzük, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik a
$P(\{\xi < x\})= P(\{\omega \mid \omega \in \Omega,\ \omega(\xi) < x\})$valószínűség.

A definícióban szereplő $\{\xi < x\}$ esemény tehát az az esemény, amikor a valószínűségi változó az x -nél kisebbb értéket vesz fel. A továbbiakban a $P(\{\xi < x\})$ jelölés helyett az egyszerűbb $P(\xi < x)$ jelölést használjuk majd.

A valószínűségi változót általában görög betűvel (ξ, η, ζ stb) jelöljük.

Példa. A fejezet elején említett példák esetén:
Jelölje a ξ valószínűségi változó a 3 szabályos dobókocka feldobása után a dobott számok összegét. A ξ értékkészlete a $\{3,\ 4,\ \ldots\ , 18\}$ halmaz.
Ha η a kör alakú (3 sugarú) céltáblára lövés esetén az első dobás középponttól mért távolságát jelöli, akkor az η valószínűségi változó értékkészlete a $[0, 3]$ intervallum.

Ha a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó értékkészlete megszámlálható (azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz), akkor ξ-t *diszkrét valószínűségi változó*nak nevezzük. Az előző példánkban ξ diszkrét valószínűségi változó.

Definíció. Az $F(x) = P(\xi < x)$ függvényt a ξ valószínűségi változó *eloszlásfüggvény*ének nevezzük.

A következő tételben az eloszlásfüggvény legfontosabb tulajdonságait foglaljuk össze.

Tétel. *Legyen az $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor:*

(1) *F monoton növekvő,*

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$,

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$,

(4) *F balról folytonos, azaz* $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$.

Ha továbbra is az F a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned} P(a &\leq \xi < b) = F(b) - F(a), \\ P(\xi &= a) = \lim_{x \to a+0} F(x) - F(a). \end{aligned}$$

4.1 Diszkrét valószínűségi változók

Diszkrét valószínűségi változó esetén a lehetséges értékek felírhatóak sorozatként. Jelölje $x_1, x_2, \ldots$ a ξ valószínűségi változó lehetséges értékeit, ahol $x_i \in \mathbb{R}$ tetszőleges $i = 1, 2, \ldots$esetén.

A ξ diszkrét valószínűségi változót akkor tekintjük adottnak, ha ismertek a $p_i = P(\{\xi = x_i\})$ valószínűségek. A $P(\{\xi = x_i\})$ jelölés helyett az egyszerűbb $P(\xi = x_i)$ jelölést használjuk. Ezen p_i valószínűségek sorozatát *eloszlás*nak nevezzük.

Könnyen látható, hogy a $\{\xi = x_i\}$ események teljes eseményrendszert, azaz teljesül a következő állítás:

Állítás. *Ha $p_1, p_2, \ldots$ eloszlás, akkor*

$$\begin{aligned} p_i &\geq 0, \; i = 1, 2, \ldots \text{ esetén és,} \\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i &= p_1 + p_2 + \ldots = 1. \end{aligned}$$

Példa. Egy szabályos kockával dobunk. Jelölje a ξ valószínűségi változó a dobott szám értékét. Ekkor a ξ lehetséges értékeinek halmaza

$$X = \{1, 2, \ldots, 6\}.$$

A kocka szabályossága miatt

$$P(\xi = i) = P(\xi = j), \; (i, j = 1, 2, \ldots 6),$$

ebből következően

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{1}{6}.$$

Példa. Két szabályos kockát feldobva, jelölje az η valószínűségi változó a dobott számok összegét. Ekkor az η lehetséges értékeinek halmaza

$$X = \{2, 3, \ldots, 12\}$$

Például 2 akkor lesz a dobott számok összege, ha mindkét kockán 1 a dobott szám, melynek valószínűsége

$$P(\eta = 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Általánosan
$$P(\xi = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{36}, & \text{ha } 2 \le k \le 6 \\ \frac{13-k}{36}, & \text{ha } 7 \le k \le 12. \end{cases}$$

Példa. Feri és Zoli felváltva dobnak kosárra addig, amíg valamelyikük bele nem talál. Annak valószínűsége, hogy Feri betalál a kosárba $P(A) = \frac{2}{3}$, annak pedig, hogy Zoli betalál szintén $P(B) = \frac{2}{3}$.
Jelölje a ξ valószínűségi változó a szükséges dobások számát. Nyilván $\xi : 1, 2, \ldots$, azaz a ξ lehetséges értékeinek halmaza megszámlálhatóan végtelen.
$\xi = 1$ akkor teljesül, ha Feri rögtön betalál, azaz

$$P(\xi = 1) = P(A) = \frac{2}{3}.$$

$\xi = 2$ akkor teljesül, ha Feri nem talál be, Zoli pedig betalál, azaz

$$P(\xi = 2) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}.$$

$\xi = k$ akkor teljesül, ha az első $(k-1)$ dobás esetén nem találnak be és a k. dobásra pedig betalálnak, azaz

$$P(\xi = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3}, \text{ ahol } k = 1, 2, \ldots.$$

4.1.1 Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Gyakorlati megfontolásokból sokszor néhány szemléltető számadat segítségével jellemezzük az eloszlásokat. Ezek közül a legfontosabb a várható érték.

Tekintsük a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót az

$$X = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

lehetséges értékekkel és a megfelelő $p_1, p_2, \ldots$ valószínűségekkel. Ha elvégzünk n független kísérletet a ξ valószínűségi változóval, akkor az x_k értéket körülbelül np_k esetben kapjuk meg. Hiszen, ha $n_1, n_2, \ldots$ jelöli az $x_1, x_2, \ldots$ értékek előfordulását ($\sum\limits_{i=1} n_i = n$), akkor $p_k \approx \frac{n_k}{n}$ (amely a relatív gyakoriság). Így a megfigyelt értékek átlaga körülbelül:

$$\frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots) \approx \frac{1}{n}(np_1x_1 + np_2x_2 + \ldots) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots$$

A fenti meggondolás elvezet a várható érték fogalmához. Diszkrét valószínűségi változó esetén két esetet különböztetünk meg, attól függően, hogy a lehetséges értékek halmaza véges, vagy megszámlálhatóan végtelen.

Definíció. Ha a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza véges,azaz

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad \text{és } p_i = P(\xi = x_i), \text{ ahol } i = 1, 2, \ldots, n,$$

akkor a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

mennyiséget a ξ *várható érték*ének nevezzük. Jelölés $E(\xi)$.

Példa. Egy szabályos kockával dobunk. Jelölje ξ a dobott számot. Számítsuk ki ξ várható értékét! A ξ valószínűségi változó az $1, 2, 3, 4, 5$ és 6 értékeket veszi fel, rendre $p_i = \dfrac{1}{6}$ $(i = 1, \ldots, 6)$ valószínűséggel, így

$$E(\xi) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5.$$

Ez természetesen nem azt jelenti, hogy lehetséges $3,5$ értékű dobást, hanem azt, hogy a dobásaink átlaga $3,5$ körül fog ingadozni.

Tekintsük a diszkrét valószínűségi változók másik esetét, amikor a lehetséges értékek halmaza megszámlálhatóan végtelen.

Definíció. Ha a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmaza megszámlálhatóan végtelen, azaz

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \quad \text{és } p_i = P(\xi = x_i), \text{ ahol } i = 1, 2, \ldots$$

akkor a

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots$$

mennyiséget a ξ *várható érték*ének nevezzük (amelyet szintén $E(\xi)$-vel jelölünk), feltéve, hogy $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i |x_i| < +\infty$.

A következő fejezetben bevezetjük a folytonos eloszlás esetén is a várható érték fogalmát, amely szintén rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal.

Állítás. *Ha egy ξ valószínűségi változónak létezik a várható értéke,*

(1) *akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén a ξ valószínűségi változónak is létezik a várható értéke és*

$$E(c\xi) = cE(\xi),$$

(2) *akkor tetszőleges $b \in \mathbb{R}$ esetén a $(\xi + b)$ valószínűségi változónak is létezik a várható értéke és*

$$E(\xi + b) = E(\xi) + b.$$

Azaz $E(a\xi + b) = aE(\xi) + b$ teljesül tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén.

4.1.2 Szórás

Az előzőekben elmondattokból kövertkezik, hogy egy valószínűségi változó a várható értéke körül ingadozik. Ezt az ingadozást méri a szórás.

Definíció. A $D^2(\xi) := E\left([\xi - E(\xi)]^2\right)$ mennyiséget a ξ valószínűségi változó *szórásnégyzetének, az* $\sqrt{E\left([\xi - E(\xi)]^2\right)}$ mennyiséget pedig a ξ *szórás*ának nevezzük. Jelölése: $D(\xi)$.

Ha egy ξ valószínűségi változónak létezik a szórásnégyzete, akkor

$$D^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi),$$

amely formula sok esetben megkönnyíti a szórásnégyzet kiszámítását. A szórás tulajdonságai közül a következőket emeljük ki:

Tétel. *Ha a ξ valószínűségi változónak létezik a szórása, akkor tetszőleges b és c konstansok esetén*

$$D(\xi + b) = D(\xi)$$

és

$$D(c\xi) = |c|\, D(\xi).$$

A következőkben áttekintjük a nevezetes diszkrét eloszlások közül a binomiális, a hipergeometrikus és a Poisson-eloszlást.

4.1.3 Binomiális eloszlás

Végezzünk n független kísérletet a p valószínűségű A eseménnyel kapcsolatban. Jelölje ξ az A esemény gyakoriságát. Az így bevezetett ξ valószínűségi változó lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots, n$..

Definíció. Tetszőleges $n \geq 1$ természetes szám és $0 \leq p \leq 1$ esetén a ξ valószínűségi változót (n és p paraméterű) *binomiális eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük, ha ξ lehetséges értékei: $0, 1, 2, \ldots, n$ és

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Például a visszatevéses mintavétel esetén, ha ξ az n elemű mintában talált selejtes darabok számát jelöli, akkor ξ binomiális eloszlású valószínűségi változó, hiszen

(1) ez a véletlentől függő érték a $0, 1, 2, \ldots n$ értékeket veheti fel, és

(2) $P\,(\text{a selejtes darabok száma} = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}, \; (k = 0, 1, 2, \ldots n).$

Példa. $N = 100$ csavarból $M = 8$ selejtes, a többi jó. Visszatevéssel mintavétellel $n = 10$ elemű mintát veszünk. Jelölje ξ a mintában a selejtes csavarok számát. Mi a valószínűsége, hogy $\xi = 4$, azaz a mintában 4 csavar selejtes?
Ebben az esetben $n = 10$, $p = \frac{8}{100}$ paraméterű binomiális eloszlásról van szó, így a megoldás

$$P\,(\xi = 4) = \binom{10}{4}\left(\frac{8}{100}\right)^4\left(\frac{92}{100}\right)^6 \approx 0.005216.$$

Példa. Visszatevéses mintavétellel $n = 10$ elemű mintát veszünk egy olyan sokaságból, amelynek a selejtaránya $p = \dfrac{1}{5}$. Mi a valószínűsége, hogy a mintában talált selejtes elemek ξ száma legalább 2, de legfeljebb 4?
A ξ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n = 10$ és $p = \dfrac{1}{5}$ paraméterekkel.
Mivel a $\{\xi = 2\}$, $\{\xi = 3\}$ és $\{\xi = 4\}$ események kizárják egymást, így

$$P(2 \leq \xi \leq 4) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4),$$

azaz

$$P(2 \leq \xi \leq 4) = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8 +$$

$$+\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^7 + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^6 \approx 0.5914.$$

Az n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke

$$E(\xi) = np,$$

szórása pedig

$$D(\xi) = \sqrt{npq}, \text{ ahol } q = 1 - p.$$

Példa. Egy 0.1 selejtszázalékú gyártmányból visszatevéssel egy 200 elemű mintát véve átlagosan hány selejtes kerül a mintába?
A mintába kerülő selejtesek ξ száma $n = 200$, $p = 0.001$ paraméterű binomiális eloszlást követ, így $E(\xi) = np = 0.2$.

Példa. Egy binomiális eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke 4, szórása $\sqrt{2,4}$. Határozzuk meg az n és p paramétereket.
Ismert, hogy $E(\xi) = np$ és $D^2(\xi) = npq = np\,(1 - p)$, így

$$\left.\begin{aligned} np &= 4 \\ np\,(1-p) &= 2.4. \end{aligned}\right\}$$

A két egyenletet elosztva egymással $(1-p)=0.6$ adódik, azaz $p=0.4$ és $n=10$.

4.1.4 Hipergeometrikus eloszlás

Míg a visszatevéses mintavétel binomiális eloszlást követ, addig a visszatevés nélküli mintavétel hipergeometrikus eloszlású.

Egy urnában N golyó van, amelyből M piros, $N-M$ fekete. Visszatevés nélkül kivéve n darabot jelölje a ξ valószínűségi változó a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ahol $0 \leq k \leq \min\{n, M\}$ esetén

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

a ξ eloszlását pedig *hipergeometrikus eloszlás*nak nevezzük.

Példa. $N=100$ csavarból $M=10$ selejtes, a többi jó. Visszatevés nélkül $n=10$ elemű mintát veszünk. Jelölje ξ a mintában a selejtes csavarok számát. Mi a valószínűsége, hogy $\xi=2$, azaz a mintában 2 csavar selejtes? Ebben az esetben hipergeometrikus eloszlásról van szó, így a megoldás

$$P(\xi = 2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{90}{8}}{\binom{100}{10}} \approx 0.201\,51.$$

Példa. Egy urnában 90 golyó van, amelyből 5 piros, 85 fekete. Visszatevés nélkül kivéve 5 golyót jelölje a ξ valószínűségi változó a kihúzott piros golyók számát. Mi a valószínűsége, hogy a mintában legalább 3 piros golyó van, azaz $P(3 \leq \xi)$?
Mivel 5 elemű a mintánk és a $\{\xi=3\}$, $\{\xi=4\}$ és $\{\xi=5\}$ események kizárják egymást, így

$$P(3 \leq \xi) = P(\xi=3) + P(\xi=4) + P(\xi=5),$$

azaz

$$P(3 \leq \xi) = \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} +$$

$$+ \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} \approx 0.00082199.$$

Az előzőekben definiált hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó várható értéke

$$E(\xi) = np, \text{ ahol } p = \frac{M}{N}$$

szórásnégyzete pedig

$$D^2(\xi) = npq \cdot \frac{N-n}{N-1}, \text{ ahol } q = 1-p.$$

Példa. Egy urnában 100 golyó van, amelyből 60 piros, 40 fekete. Visszatevés nélkül kivéve 10 golyót jelölje a ξ valószínűségi változó a kihúzott piros golyók számát. Átlagosan hány piros golyó kerül a mintába? Mennyi a ξ szórásnégyzete?
A mintába kerülő selejtesek ξ száma hipergeometrikus eloszlást követ, ahol $p = \frac{60}{100}$, így

$$E(\xi) = np = 6.$$

Mivel $q = \frac{40}{100}$ a szórásnégyzet pedig

$$D^2(\xi) = npq \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{240}{100} \cdot \frac{90}{99} \approx 2.181\,8.$$

4.1.5 Poisson-eloszlás

Definíció. Tetszőleges $\lambda > 0$ valós szám esetén egy ξ valószínűségi változót (λ paraméterű) *Poisson-eloszlású*nak nevezzük, ha eloszlása

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ahol $k = 0, 1, 2, \ldots$.

A következő állítás a Poisson-eloszlás és a binomiális eloszlás közötti kapcsolatot adja meg.

Állítás. *A binomiális eloszlás határeloszlása a Poisson-eloszlás, ha n tart a végtelenhez és $np = \lambda$ állandó.*

A λ paraméterű *Poisson-eloszlás*ú valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete megegyezik, mégpedig:

$$E(\xi) = \lambda \text{ és } D^2(\xi) = \lambda.$$

Példa. Egy 100 oldalas könyvben 40 sajtóhiba található. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott oldalon nincs sajtóhiba, ha feltételezzük, hogy a sajtóhibák száma Poisson-eloszlást követ?
Egy oldalon átlagosan $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ sajtóhiba található. Jelölje ξ egy véletlenszerűen kiválasztott oldalon a sajtóhibák számát, amely tehát Poisson-eloszlást követ. Így $\lambda = E(\xi) = \frac{2}{5}$ közelítéssel számolhatunk. A kérdés a $\xi = 0$ valószínűsége, mely

$$P(\xi = 0) = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^0}{0!} e^{-\frac{2}{5}} \approx 0.670\,32.$$

Példa. Mazsolás kalácsot sütünk, 1 kg tésztába 50 szem mazsolát teszünk. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 5 dekagrammos szeletben legalább 2 szem mazsola lesz, ha feltételezzük, hogy a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ? Egy szeletben átlagosan $\frac{50}{20} = \frac{5}{2}$ mazsola van, hiszen 1 kg kalácsban 20 darab 5 dkg-s szelet van. Jelölje ξ egy véletlenszerűen kiválasztott szeletben a mazsolák számát, amely tehát Poisson-eloszlást követ, így $\lambda = E(\xi) = \frac{5}{2}$. Kérdésünk a $P(2 \leq \xi)$ valószínűség, amely mivel összesen 50 mazsola van egyenlő a $P(2 \leq \xi \leq 50)$ valószínűséggel. Ez azonban igen hosszadalmas számolást igényelne, így helyette az ellentett eseménnyel számolunk, azaz

$$P(2 \leq \xi) = 1 - P(\xi < 2) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1)),$$

azaz

$$P(2 \leq \xi) = 1 - \left(\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^0}{0!} e^{-\frac{5}{2}} + \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^1}{1!} e^{-\frac{5}{2}} \right) \approx 0.712\,7.$$

4.2 Folytonos valószínűségi változók

Definíció. Tekintsünk egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változót. Ha létezik $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ függvény, melyre az $F(x)$ eloszlásfüggvény tetszőleges x esetén előáll az

$$F(x) = \int_{t=-\infty}^{x} f(t)dt$$

alakban, akkor az f függvényt a ξ valószínűségi változó *sűrűségfüggvény*ének nevezzük.

A definícióból következik, hogy a sűrűségfüggvény nem egyértelmű.

Definíció. Egy *valószínűségi változó*t *folytonos*nak nevezünk, ha létezik sűrűségfüggvénye.

Ha létezik a sűrűségfüggvény, akkor az $F(x)$ eloszlásfüggvény folytonos.

Ha az f sűrűségfüggvény folytonos az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, akkor ott az F eloszlásfüggvény differenciálható, mégpedig

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Tétel. *Az f valós függvény akkor és csak akkor lehet sűrűségfüggvény, ha teljesíti a következő tulajdonságokat:*

$$f \text{ nemnegatív és} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Az eloszlásfüggvény egyik nevezetes tulajdonságából következik, hogy

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

teljesül tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén.

4.2.1 Folytonos valószínűségi változó várható értéke és szórása

Ha a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos valószínűségi változó, akkor is bevezethetjük a várható érték és szórás fogalmát, melyek a diszkrét esetben felsorolt tulajdonságokkal rendelkeznek.

Definíció. Egy $f(x)$ sűrűségfüggvényű folytonos eloszlású ξ valószínűségi változó esetén a

$$E(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

mennyiséget *várható értéknek nevezzük* feltéve, hogy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx < +\infty.$$

Ebben az esetben is a

$$D^2(\xi) := E\left([\xi - E(\xi)]^2\right)$$

mennyiséget nevezzük a ξ valószínűségi változó s*zórásnégyzetének*.

Emlékeztetünk arra, hogy ha egy ξ valószínűségi változónak létezik a szórásnégyzete, akkor

$$D^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi).$$

A következőkben áttekintjük a nevezetes folytonos eloszlások közül az egyenletes, az exponenciális és a normális eloszlást.

4.2.2 Egyenletes eloszlás

Ha egy rögzített (a, b) intervallumon véletlenszerűen választunk egy ξ pontot úgy, hogy egy $A \subset (a, b)$ részhalmazba esés valószínűsége az illető részhalmaz mértékével arányos, akkor a ξ valószínűségi változót *egyenletes eloszlás*únak nevezzük.

Definíció. A ξ valószínűségi változót *egyenletes eloszlás*únak nevezzük az (a, b) intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Ekkor az egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b \\ 1, & \text{ha } b < x \end{cases},$$

várható értéke:

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2},$$

szórása:

$$D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Példa. Legyen a ξ valószínűségi változó *egyenletes eloszlás*ú a $(-2, 3)$ intervallumon. Írjuk fel a ξ sűrűség- és eloszlásfüggvényét.
Az előzőekből elmondottakból következik, hogy ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}, & \text{ha } -2 < x < 3 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases},$$

eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -2 \\ \dfrac{x+2}{5} & \text{ha } -2 < x \leq 3 \\ 1, & \text{ha } 3 < x. \end{cases}.$$

Példa. Határozzuk meg az előző eloszlás esetén a várható értéket és a szórást.
A ξ várható értéke:

$$E(\xi) = \frac{1}{2},$$

szórása:

$$D(\xi) = \frac{5}{\sqrt{12}} \approx 1.4434.$$

4.2.3 Exponenciális eloszlás

Definíció. Egy ξ valószínűségi változót λ-paraméterű *exponenciális eloszlású*nak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda\, x}, & \text{ha}\, x \geq 0\,, \end{cases} \quad (\lambda > 0).$$

Integrálással kapjuk λ-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, mégpedig

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - \, e^{-\lambda\, x}, & \text{ha}\, x > 0 \end{cases} .$$

Az exponenciális eloszlású valószínűségi változó ,,örökifjú“ tulajdonságú, azaz

$$P(\xi \geq b) = P\left(\xi \geq a + b \mid \xi \geq a\right),$$

ahol a és b tetszőleges pozitív konstansok.

A λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke és szórása megegyezik, mégpedig:

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda} \text{ és } D^2(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Példa. Jelölje a ξ valószínűségi változó egy szóbeli matematika vizsga időtartamát, mely átlagosan 10 percig tart. Írjuk fel a ξ eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a vizsga 5 percnél kevesebb ideig tart
Az előzőekből elmondottakból következik, hogy $E(\xi) = \frac{1}{\lambda} = 10$, azaz a ξ $\frac{1}{10}$-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó melynek eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - \, e^{-\frac{x}{10}}, & \text{ha}\, x > 0 \end{cases} .$$

Továbbá

$$P\left(\xi < 5\right) = F\left(5\right) = 1 - \, e^{-\frac{5}{10}} \approx 0.393\,47.$$

4.2.4 Normális eloszlás

Definíció. Legyen $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. A ξ valószínűségi változót m és σ paraméterű *normális eloszlású*nak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}}$$

alakú. Jelölése $\xi \in \mathcal{N}\ (m, \sigma^2)$.

Ebben az esetben

$$\begin{aligned} E(\xi) &= m, \\ D^2(\xi) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

A ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{\dfrac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Speciálisan, ha $m = 0$ és $\sigma^2 = 1$, akkor a ξ-t *standard normális eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük. Ekkor a sűrűségfüggvényt φ-vel, az eloszlásfüggvényt pedig Φ-vel jelöljük.

Az m és σ paraméterű normális eloszlás $F(x)$ eloszlásfüggvényének kiszámítását visszavezetjük a $\Phi(x)$ eloszlásfüggvény kiszámítására, ugyanis

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

A $\Phi(x)$ függvény értékeit a fejezet végén mellékelt táblázatból határozhatjuk meg.

A táblázat csak nemnegatív x értékeket tartalmaz, mivel

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Példa. Egy zacskóba töltött cukor súlya 1kg várható értékű, 50 gramm szórású normális eloszlású valószínűségi véltozó. Mennyi a valószínűsége, hogy egy zacskóban 0.96 kg-nál kevebb cukor van?
Tehát $m = 1$, $\sigma = 0.05$ és a kérdés $P(\xi < 0.96)$.

$$P(\xi < 0.96) = F(0.96) = \Phi\left(\frac{0.96-1}{0.05}\right)$$

amely az előzőek alapján

$$1 - \Phi(0.8) \approx 1 - 0.7881 = 0.2119.$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	..6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Irodalomjegyzék

[1] DENKINGER GÉZA: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, 1989.

[2] RAISZ PÉTER: Valószínűségszámítás, Miskolci Egyetemi Kiadó, 2004.