MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI MEGOLDÓKULCS
– KÖZÉPSZINT –

<u>I. rész: Az alábbi 12 feladat megoldása kötelező volt!</u>

1) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\mathbf{5^{(2x-1)(x+3)}=1}$$ **(2 pont)**

<u>Megoldás:</u>

$5^{(2x-1)(x+3)}=5^0 \Rightarrow$ az exp. fv. szigorú monotonitása miatt: (1 pont)

$(2x-1)(x+3)=0 \Rightarrow 2x^2+5x-3=0$

A másodfokú egyenletet megoldva: $\boldsymbol{x_1=\frac{1}{2}}$ és $\boldsymbol{x_2=-3}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

2) Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak!

a) Van olyan racionális szám, amelyik nem egész szám. (1 pont)

b) Egy szám osztható tizenhárommal, ha a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadjuk az utolsó szám háromszorosát, és ez a szám osztható tizenhárommal. (1 pont)

<u>Megoldás:</u>

a) **Igaz**. (1 pont)

b) **Hamis**, mert az utolsó szám négyszerese kell. (1 pont)

Összesen: 2 pont

3) Egy marhatenyésztőnek 2500 szarvasmarhája van. A mindenkori állatállomány évenként 5%-kal gyarapszik. Tizennégy év múlva eladja a vejének az akkori állomány felét. Mennyi marhája marad a tenyésztőnek? (Az éppen még születendő állatok nem számítanak.) (2 pont)

<u>Megoldás:</u>

$$\left.\begin{matrix} a_1=2500 \\ q=1{,}05 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{14}=2500\cdot 1{,}05^{13}\approx 4714$$ (1 pont)

$$\frac{a_{14}}{2}=\mathbf{2357}$$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

4) Oldja meg a következő egyenletet!

$$\mathbf{5\,ctg\,\boldsymbol{x}=4\sin \boldsymbol{x}}$$ **(3 pont)**

<u>Megoldás:</u>

Kikötés: $\sin x\neq 0 \Rightarrow x\neq 0°+k\cdot 180°$, ahol $k\in$ ¢

$5\cos x=4\sin^2 x \Rightarrow 5\cos x=4\left(1-\cos^2 x\right)\Rightarrow 4\cos^2 x+5\cos x-4=0$ (1 pont)

$(\cos x)_1=\frac{-5+\sqrt{89}}{8}=0{,}554$ $\mathbf{\Rightarrow x_1=56{,}36°+2\cdot \boldsymbol{l}\cdot 180°}$**, ahol** $\boldsymbol{l}\in$ **¢**

$\mathbf{\Rightarrow \boldsymbol{x_2}=303{,}64°+2\cdot \boldsymbol{n}\cdot 180°}$**, ahol** $\boldsymbol{n}\in$ **¢** (1 pont)

$(\cos x)_2=\frac{-5-\sqrt{89}}{8}=-1{,}804$, de ez nem megoldás, mert $-1\leq \cos x\leq 1$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

5) Egy körgyűrűcikket 3, illetve 9 cm sugarú körívek határolnak. Területe 18π cm². Mekkora a körgyűrűcikk középponti szöge? (3 pont)

Megoldás:

$T_{kgy} = 9^2\pi - 3^2\pi = 72\pi \text{ cm}^2$ (1 pont)

$18\pi = \frac{72\pi}{4} \Rightarrow$ (1 pont)

$\Rightarrow \frac{360°}{4} = \mathbf{90°}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

6) Milyen *x* értékeket vehet fel az alábbi kifejezés?

$$-x^2 - 6x + 7 > 0$$ **(3 pont)**

Megoldás:

Behelyettesítve a megoldóképletbe: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 7}}{2\cdot(-1)}$ (1 pont)

$\Rightarrow x_1 = -7$ és $x_2 = 1$ (1 pont)

Mivel az x^2 együtthatója negatív, a megoldás a két gyök között lesz: $\mathbf{-7 < x < 1}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

7) A virágosnál egy zsák virágföld 15 kg. Egy másik virágosnál csak 10 kg van egy zsákban és itt 160 Forinttal drágább kilója. Egy zsákért mindkét helyen ugyanannyit kérnek. Mennyibe kerül a drágábbik helyen 1 kg virágföld? (3 pont)

Megoldás:

$15x = 10(x+160)$ (1 pont)

$5x = 1600 \Rightarrow x = 320$

$x + 160 =$ **480 Ft** (1 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

Összesen: 3 pont

8) Adja meg a 720 és az 1350 legkisebb közös többszörösét! (2 pont)

Megoldás:

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ és $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ (1 pont)

$[720;1350] = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 =$ **10800** (1 pont)

Összesen: 2 pont

9) Határozza meg az alábbi kifejezés értékkészletét!

$$\sqrt{x^2 - 4x + 8}$$ **(2 pont)**

Megoldás:

$(x-2)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow$ (1 pont)

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 8} \geq 2$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

10) Egy kör egyik átmérőjének végpontjai $A(5;-1)$, $B(3;7)$. Írja fel a kör egyenletét!(3 pont)

Megoldás:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3-5)^2+(7+1)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$ (1 pont)

A kör sugara: $r=\frac{d}{2}=\sqrt{17}$

A felezőpontból megkapjuk a kör középpontját:

$$F=\left(\frac{5+3}{2};\frac{7+(-1)}{2}\right)\Rightarrow O(4;3)$$ (1 pont)

A kör egyenlete: $\mathbf{(x-4)^2+(y-3)^2=17}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\mathbf{2x=\sqrt{2-6x}}$$ **(3 pont)**

Megoldás:

Kikötés: $2-6x\ge 0\Rightarrow \frac{2}{6}\ge x\Rightarrow \frac{1}{3}\ge x$ és $2x\ge 0\Rightarrow x\ge 0$, tehát $0\le x\le \frac{1}{3}$ (1 pont)

$4x^2=2-6x\Rightarrow 4x^2+6x-2=0\Rightarrow 2x^2+3x-1=0$ (1 pont)

A másodfokú egyenletet megoldva:

$\mathbf{x_1=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}=0,28}$ és $x_2=\frac{-3-\sqrt{17}}{4}=-1,78$ ami nem eleme az ért. tartománynak. (1 pont)

Összesen: 3 pont

12) Egy dobozban 10 pár különböző színű kesztyű van. Véletlenszerűen kiveszünk belőle kettőt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ez a két darab kesztyű egy pár lesz? (2 pont)

Megoldás:

Összes eset: 19, hiszen a maradék 19 kesztyűből húzunk egyet. (1 pont)

Kedvező eset: 1, hiszen egyetlen kesztyű passzol a kihúzotthoz.

A keresett valószínűség: $\mathbf{\frac{1}{19}}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

Maximális elérhető pontszám: 30

II/A. rész: Az alábbi három példa megoldása kötelező volt!

13) Egy versenyen huszonhárom 5 fős csapat mérte össze erejét és tudását, 3 feladatban.

a) Az első feladatot eddig 11 csapat csinálta meg. A második, ügyességi feladaton már 15 csapat van túl. Csak 7 csapat van, akik mindkettőn részt vettek. Hány csapat van, aki(k) még nem vett(ek) részt az első két feladaton? (3 pont)

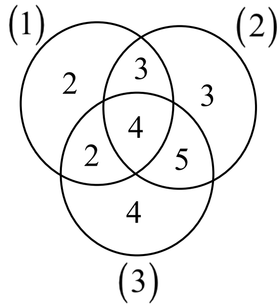
b) Eddig négy olyan csapat volt, akik mind a három feladatot teljesítették. A csapatok közül, akik a 3. feladatrészt megcsinálták, hatan már az elsőn is túl vannak. Kilenc olyan csapat van, akik a 3. és a 2. feladatot is maguk mögött tudhatják. Készítsen halmazábrát a jelenlegi állásról! (6 pont)

c) A résztvevők hány százaléka teljesítette a feladatok legalább $\frac{2}{3}$ részét? (3 pont)

Megoldás:

a) Csak az 1. feladat: $11-7=4$ csapat
Csak a 2. feladat: $15-7=8$ csapat $\quad 4+7+8=19$ csapat (1 pont)
1. és 2. feladat: 7 csapat
Egyik sem: $23-19=$ **4 csapat** (1 pont)
Szöveges válasz… (1 pont)

b) A feladatot ábrázoljuk Venn-diagramon:



$\boldsymbol{x}=7-4=\mathbf{3}$ csapat (1 pont)
$\boldsymbol{y}=6-4=\mathbf{2}$ csapat (1 pont)
$\boldsymbol{z}=9-4=\mathbf{5}$ csapat (1 pont)
Csak az 1. feladat: $4-2=\mathbf{2}$ csapat (1 pont)
Csak a 2. feladat: $8-5=\mathbf{3}$ csapat (1 pont)
Csak a 3. feladat: $23-19=\mathbf{4}$ csapat (1 pont)

c) $23\cdot 5=115$ fő
Legalább 2 feladat:
$3+2+4+5=14\Rightarrow 14\cdot 5=70$ fő (1 pont)
$\mathbf{\frac{70}{115}=0,6087\Rightarrow 60,87\%}$ (1 pont)
Szöveges válasz… (1 pont)

Összesen: 12 pont

14) A Nutella gyártója a vevők visszajelzései alapján új üvegbe tölti a csokikrémet. Ez az üveg szabályos henger alakú, az alapkörének átmérője 7 cm, a teteje műanyag.

a) Hány centiméteres magasságig töltik bele a Nutellát, ha a töltősúlyt nem szeretnék megváltoztatni? (Most 400 gramm Nutella van egy üvegben.) A számolás megkönnyítésére a feladatban az $\mathbf{1\,kg=1\,l}$ átváltással dolgozzon! (6 pont)

b) A Nutellás üvegek előállításához 2.500 dm^2-nyi megrendelt üveg alapanyag áll rendelkezésre minden hónapban. Egy darab régi üveg legyártásához 25 dm^2-nyi üveget használtak fel. Mennyi nyereségük vagy veszteségük lesz az új alakú üvegek gyártása miatt ebben a hónapban, ha egy üveg Nutella eladási ára 810 Ft volt és az új üveges Nutellát is ugyanennyiért szeretnék adni? (6 pont)

Megoldás:

a) $d=0,7\text{dm}\Rightarrow r=0,35\text{dm}$ (1 pont)
$400\text{g}=0,4\text{kg}\Rightarrow 0,4\text{l}\Rightarrow 0,4\text{dm}^3$ (1 pont)
$V_{henger}=r^2\pi\cdot m\Rightarrow 0,4=0,35^2\cdot\pi\cdot m$ (1 pont)
$\frac{0,4}{0,35^2\cdot\pi}=m\Rightarrow\frac{0,4}{0,1225\cdot\pi}=1,039\text{dm}=\mathbf{10,39\ cm}$ (2 pont)
Szöveges válasz… (1 pont)

b) $A_{új\ üveg}=2\cdot 0,35\cdot\pi\cdot 1,039+0,35^2\cdot\pi=2,67\text{dm}^2$ (2 pont)
Új üveg: $2500\text{dm}^2\Rightarrow\frac{2500}{2,67}=936\text{ db}$
Régi üveg: $2500\text{dm}^2\Rightarrow\frac{2500}{25}=100\text{ db}$ (1 pont)
810 Ft/üveg $\Rightarrow$ új: $936\cdot 810=758160$ Ft; $\Rightarrow$ régi: $100\cdot 810=81000$ Ft (1 pont)
Nyereség: 758160-81000 = **677160 Ft** (1 pont)
Szöveges válasz… (1 pont)

Összesen: 12 pont

15) Egy erdészetben megmérték 15 fa magasságát és a következő eredményeket jegyezték fel: 100 m, 95 m, 6 m, 64 m, 79 m, 17 m, 81 m, 100 m, 17 m, 8 m, 100 m, 31 m, 91 m, 95 m és 31 m.

a) Határozza meg a 15 fa átlagmagasságát! (2 pont)

b) Az erdészetben az alábbi táblázat alapján kategorizálják a fákat:

Magasság	**Kategória**
0 – 19 m	**facsemete**
20 – 39 m	**kis fa**
40 – 59 m	**közepesen magas fa**
60 – 79 m	**kifejlett fa**
80 – 100 m	**mamut-fa**

Ennek ismeretében töltse ki a következő táblázatot! (2 pont)

Kategória	**facsemete**	**kis fa**	**közepesen magas fa**	**kifejlett fa**	**mamut-fa**
Fák száma					

c) Készítsen kördiagramot a fák megoszlásáról! Adja meg a körcikkekhez tartozó középponti szögek értékeit is (egészekre kerekítve)! (5 pont)

d) Adja meg a magasságok mediánját és móduszát! (3 pont)

Megoldás:

a) $\dfrac{6+8+2\cdot17+2\cdot31+64+79+81+91+2\cdot95+3\cdot100}{15}=\dfrac{915}{15}=\mathbf{61\ m}$ (2 pont)

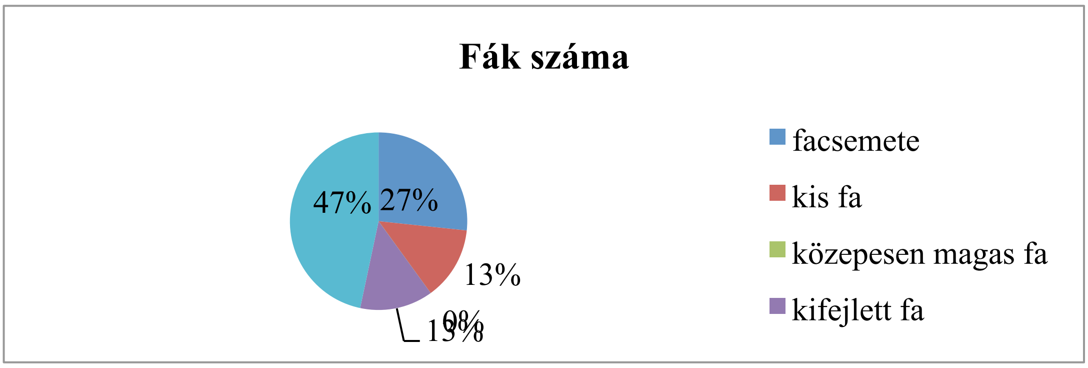
b) A táblázat helyes kitöltése: (2 pont)

Kategória	**facsemete**	**kis fa**	**közepesen magas fa**	**kifejlett fa**	**mamut-fa**
Fák száma	**4 db**	**2 db**	**0 db**	**2 db**	**7 db**

c) $360° \Rightarrow 100\% \Rightarrow 15$ fa

$24° \Rightarrow 6{,}67\% \Rightarrow 1$ fa (2 pont)

0 – 19 m: 4 db fa $\Rightarrow$ **96°**, 20 – 39 m: 2 db fa $\Rightarrow$ **48°**, 40 – 59 m: 0 db fa $\Rightarrow$ **0°**, 60 – 79m: 2 db fa $\Rightarrow$ **48°**, 80 – 100 m: 7 db fa $\Rightarrow$ **168°** (2 pont)



(1 pont)

d) A mediánt az adatok sorba rendezése után kapjuk meg (8. fa): **79** (2 pont)

A módusz a legtöbbször előforduló adat: **100** (1 pont)

Összesen: 12 pont

Maximális elérhető pontszám: 36

II/B. rész: Az alábbi három példa közül kettőt kellett megoldani!

16) Adottak az $f(x)=(x+2)^2+1$ és a $g(x)=|x-3|-2$ függvények.

a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az $f(x)$ függvény $-5 \le x < 1$ intervallumhoz tartozó részét! **(3 pont)**

b) Ábrázolja ugyanebben a koordinátarendszerben a $g(x)$ függvény $-1 \le x \le 5$ intervallumhoz tartozó részét! **(3 pont)**

c) Adja meg az $f(x)$ és a $g(x)$ függvény minimum és/vagy maximum helyeit a teljes értelmezési tartományon és az itt felvett értékeket! **(2 pont)**

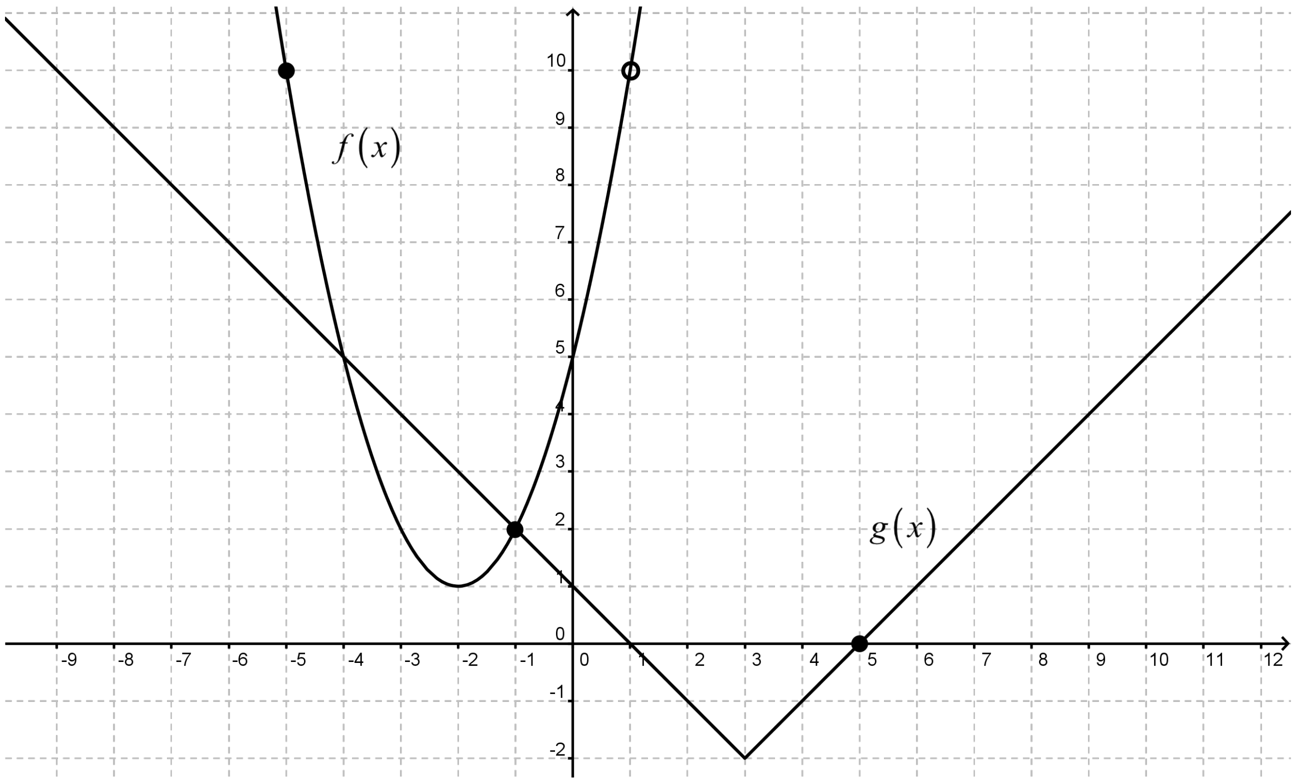
d) Oldja meg az $(x+2)^2+1 \le |x-3|-2$ egyenlőtlenséget! **(7 pont)**

e) Adjon meg egy metszéspontot (ha van)! **(2 pont)**

Megoldás:

a) Az $f(x)$ függvény helyes ábrázolásáért (az intervallumok helytelen jelöléséért 1-1 pont levonás jár!) (3 pont)

b) A $g(x)$ függvény helyes ábrázolásáért (az intervallumok helytelen jelöléséért 1-1 pont levonás jár!) (3 pont)



c) $f(x)$ szélsőérték helye: $\mathbf{x=-2}$, $f(x)$ minimum értéke: $\mathbf{y=1}$ (1 pont)

$g(x)$ szélsőérték helye: $\mathbf{x=3}$, $g(x)$ minimum értéke: $\mathbf{y=-2}$ (1 pont)

d) $(x+2)^2+1 \le |x-3|-2 \Rightarrow (x+2)^2+3 = |x-3|$

$|\text{x-3}| = \begin{cases} x-3 \text{ ha } x \ge 3 \\ -x+3 \text{ ha } x < 3 \end{cases}$ (1 pont)

I. eset: $x \geq 3$

$\left(x+2\right)^2+3=x-3 \Rightarrow x^2+3x+10=0 \Rightarrow$ Diszkrimináns < 0 (1 pont)

II. eset: $x<3$

$x^2+4x+7=-x+3 \Rightarrow x^2+5x+4=0 \begin{array}{l} \Rightarrow x_1=-1 \\ \Rightarrow x_2=-4 \end{array}$ (2 pont)

Ellenőrzés! (1 pont)

Összegezve: $\mathbf{-4 \leq x \leq -1}$ (1 pont)

A pontos x értékek miatt az ábráról való leolvasásra is megadható a pont.

Szöveges válasz… (1 pont)

e) Metszéspontok: $\mathbf{M_1\left(-4;5\right)}$ **és** $\mathbf{M_2\left(-1;2\right)}$ (2 pont)

Összesen: 17 pont

17) Az Okmányirodában a nyári nagytakarításkor minden ingóságnak kódszámot adtak, hogy könnyebb legyen a visszapakolás. A kódszámokat a 0, 9, 8, 7 és 6 számjegyek pontosan egyszeri felhasználásával képezték.

a) Hány bútor volt összesen, ha 3 kódszám kivételével az összes képezhető számot kiosztották? (4 pont)

b) A megadott feltételek alapján képezhető összes kódszámot kezeljük számként! Ha véletlenszerűen kiválasztok egyet, mennyi a valószínűsége, hogy olyan kódszám akad a kezembe, ami 5 számjegyű és páratlan? (7 pont)

c) A megadott számokat egyszer felhasználva 4 jegyű számokat képzünk. Mennyi a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen választunk egyet, akkor 3-mal osztható számot kapunk? (6 pont)

Megoldás:

a) Kódszámokról van szó, így a 0 is lehet bárhol! (1 pont)

$5!=120$ (1 pont)

3-at nem osztottak ki: $120-3=\mathbf{117}$ (1 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

b) Az összes képezhető szám: 120

Mivel számként kezelem a kódszámokat, itt már fontos, hogy nem állhat a 0 az első helyen! (1 pont)

Ahhoz, hogy páratlan legyen a szám, a 9-nek vagy a 7-nek kell az utolsó helyen állnia: (1 pont)

I. eset: 9-es van az utolsó helyen $\Rightarrow 3\cdot3\cdot2=18$ eset (1 pont)

II. eset: 7-es van az utolsó helyen $\Rightarrow 3\cdot3\cdot2=18$ eset (1 pont)

A két esetet össze kell adni, hiszen egyszerre nem következhetnek be: $18+18=36$ (1 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{36}{120}=\mathbf{0,3}$ (1 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

c) Ahhoz, hogy a szám osztható legyen 3-mal, a számjegyek összegének oszthatónak kell lennie 3-mal és mivel 4 jegyű számot keresünk, egy számjegynek ki kell maradnia. (1 pont)

Kimarad	0	9	8	7	6
Számjegyek	9, 8, 7, 6	8, 7, 6, 0	9, 7, 6, 0	0, 9, 8, 6	0, 9, 8, 7
Számjegyek összege	30	21	22	23	24
Osztható-e 3-mal	igen	igen	nem	nem	igen

$\left.\begin{array}{l} \text{Ha a 0 marad ki: } 4\cdot3\cdot2=24 \text{ szám} \\ \text{Ha a 9 marad ki: } 3\cdot3\cdot2=18 \text{ szám} \\ \text{Ha a 6 marad ki: } 3\cdot3\cdot2=18 \text{ szám} \end{array}\right\} 24+18+18=60 \text{ szám}$ (1 pont) (1 pont)

Összes eset (4 jegyű számok): $4\cdot4\cdot3\cdot2=96$ (1 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{60}{96} = \mathbf{0{,}625}$ (1 pont)

Szöveges válasz… (1 pont)

Összesen: 17 pont

18) Vilma, Fred, Diána, Bozont és Scooby új megoldatlan ügyön dolgoznak, a rejtély színhelye 4800 km-re van. Repülővel szerettek volna odautazni, de a vihar miatt Bozont és Scooby a szárazföldi közlekedést választották. A többiek vállalták a repülőt, de az út első harmadán visszaveszik a sebességet 25 százalékkal.

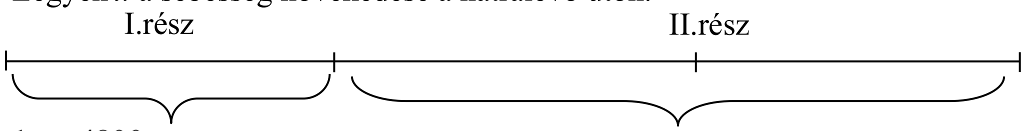
a) Ha ilyen feltételekkel indulnak el, akkor az út maradék részében hány %-kal kell növelni a sebességet az eredetileg tervezetthez képest, ha késés nélkül szeretnének odaérni a megbeszélt időpontra? (10 pont)

b) Bozont és Scooby busszal indultak, de külön járattal, hogy megtévesszék üldözőiket. Egyedül félnek, így azt tervezik, hogy egyszerre indulnak a buszpályaudvarról, a végállomáson pedig Fredék várják őket. Reggel 6 órakor 4 járat indul egyszerre, utána 5, 6, 8 és 9 percenként indulnak buszok ugyanonnan. Segítsen Bozontéknak kitalálni, hogy az utolsó (este 11 órás) járatig hány alkalommal indul egyszerre a négy járat és mikor van(nak) az indulás(ok)! (7 pont)

Megoldás:

a) $s = 4800\text{ km}$

Legyen x a sebesség növekedése a hátralevő úton. (1 pont)



$\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4800}{3} = 1600\text{ km}$ $4800 - 1600 = 3200\text{ km}$ (2 pont)

	$s\ (\text{km})$	$v\ \left(\text{km}/\text{h}\right)$	$t\ (\text{h})$
I. rész	1600	$(1\text{-}0{,}25)v = 0{,}75v$	$\frac{1600}{0{,}75v}$
II. rész	3200	$x \cdot v$	$\frac{3200}{x \cdot v}$
$\sum$	4800	v	$\frac{4800}{v}$

(4 pont)

$\frac{1600}{0{,}75v} + \frac{3200}{x \cdot v} = \frac{4800}{v} \qquad (v \neq 0)$ (1 pont)

$\frac{1600}{0{,}75} + \frac{3200}{x} = 4800 \Rightarrow 1600x + 2400 = 3600x \Rightarrow \mathbf{x = 1{,}2}$ (1 pont)

Tehát az eredeti sebességet az út hátralevő részében **20 százalékkal** kell növelniük. (1 pont)

b) Reggel 6 óra: 4 járat

5 percenként: 5^1

6 percenként: $2^1 \cdot 3^1$

8 percenként: 2^3

9 percenként: 3^2 (1 pont)

LKKT: $5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 = 360$ perc (2 pont)

360 perc = 6 óra $\Rightarrow$ Tehát 6 óránként indul egyszerre a négy busz. (1 pont)

A közös indulások: 1. $\Rightarrow$ reggel $\mathbf{6^{\underline{00}}}$, 2. $\Rightarrow$ délben $\mathbf{12^{\underline{00}}}$, 3. $\Rightarrow$ este $\mathbf{18^{\underline{00}}}$ (3 pont)

Összesen: 17 pont

Maximális elérhető pontszám: 34

A próbaérettségi során szerezhető maximális pontszám: 100