BANCSIK ZSOLT
LAJOS SÁNDOR
JUHÁSZ IMRE

Ábrázoló geometria kezdőknek

mobiDIÁK könyvtár

Bancsik Zsolt, Lajos Sándor, Juhász Imre

Ábrázoló geometria kezdőknek

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Bancsik Zsolt
egyetemi adjunktus
Lajos Sándor
tanszéki mérnök
Juhász Imre
egyetemi docens

Miskolci Egyetem

Ábrázoló geometria kezdőknek

Egyetemi jegyzet

Első kiadás

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Intézet
4010 Debrecen, Pf. 12
Hungary
http://mobidiak.inf.unideb.hu/

A mű „A mobiDIÁK önszervező mobil portál” (IKTA, OMFB-00373/2003)) és a „GNU Iterátor, a legújabb generációs portál szoftver” (ITEM, 50/2003) projektek keretében készült.

Tartalomjegyzék

Előszó

A jegyzet elsődleges célja, hogy az ábrázoló geometria egyik legfontosab fejezetébe, a Monge-féle kétképsíkos ábrázolásba bevezesse az olvasót. Ennek megfelelően nem feltételezünk a középiskolai tananyagot meghaladó ismereteket. Célkitűzésünk a levelező és távoktatás feltételeinek is megfelelő szemléletes, az önálló tanulás során is követhető és áttekinthető tárgyalás.

Különös tantárgy az ábrázoló geometria: műveléséhez geometriai ismeretek, a térbeli alakzatok belső látásának képessége, a feladatok megoldásához kreativitás, a rajzok elkészítéséhez pontosság, sőt esztétikai igényesség is szükséges. Ugyanakkor a tárggyal való lelkiismeretes és szorgalmas foglalkozás során gyarapodni fognak geometriai ismereteik, erősödik majd a térszemléletük, fejlődik a kreativitásuk, igényesebbé válnak rajzaik.

Az ábrázoló geometria a geometria más területeinek, így az elemi geometria mellett leginkább a projektív geometriának és a differenciálgeometriának az eredményeit alkalmazza. Ezeknek a korrekt ismertetése nem egyeztethető össze a jegyzet kereteivel és eredeti céljával. Ehelyett csak szemléletesen, apró betűs szedéssel közlünk néhol ilyen ismereteket, és az igényes olvasót arra biztatjuk, hogy megfelelő szakkönyvekből egészítse ki ismereteit.

A jegyzet elektronikusan hozzáférhető és ennek sok előnye van (az ábrák színesek, kinagyíthatók), de *senki ne higgye, hogy a képernyő előtt ülve, az egérrel kattintgatva fogja elsajátítani a tárgyat*! A körző-vonalzó továbbra is nélkülözhetetlen! Ne csak az előírt feladatokat oldják meg! Egy ábra felépülésének a követése és így az ábra megértése leginkább az önálló szerkesztés során érhető el.

Nagyon fontos, hogy minden ábrázoló geometriai ábrának, szerkesztésnek "lássuk" a térbeli jelentését. A síkban vetületeikkel ábrázolt alakzatokat állítsuk vissza a térbe: rekonstruáljunk! A térbeli elképzelést szemléltető ábrákkal is segítjük. A jegyzet szemléltető ábrái is merőleges vetületek, amelyek azonban tekinthetők merőleges axonometriának is. Az axonometrikus ábrázolás alapismereteit az utolsó fejezetben közöljük.

A tárgy tankönyvekkel és példatárakkal jól ellátott, ezeket további segítségként ajánljuk, így pl. az [7], [10], [14] könyveket.

Mindezen segédanyagok mellett is emlékeztetjük a hallgatót számos tankönyv és példatár előszavának közös tanulságára: *az ábrázoló geometria csak a saját magunk által elvégzett szerkesztésekkel sajátítható el! Nincs királyi út!*[1]

A jegyzetben az alábbi témaköröket tárgyaljuk: Monge-projekció, térelemek ábrázolása, a képsíkrendszer transzformációja. Kör ábrázolása, ellipszis, mint a kör affin képe.

[1] Ez a sokat idézett mondás az alexandriai Euklidesztől (Eukleidesztől) származik. I. Ptolemaiosz király azt kérdezte Euklidesztől, hogy miként lehetne a geometriát könnyen elsajátítani. Euklidesz azt felelte, hogy "A geometriához nem vezet királyi út". Ezt még azzal is megtoldotta: "Munka nélkül nincs kenyér, sem geometria" (lásd [13]).

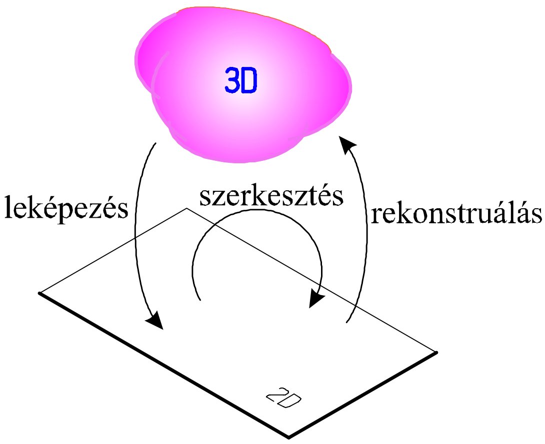
Gömb, forgáshenger és forgáskúp ábrázolása, metszése egyenessel és síkkal. A kúpszeletek néhány tulajdonsága. Gömb, forgáshenger és forgáskúp áthatása, széteső áthatások. A merev síkbeli rendszerek mozgása, csavarvonal. Az axonometrikus ábrázolás alapelvei.

1. fejezet

Térelemek ábrázolása, illesztése és metszése a Monge-féle képsíkrendszerben

Tananyag: *Az ábrázoló geometria feladata: ábrázolás, szerkesztés, rekonstruálás. A Monge-féle képsíkrendszer, általános és különleges helyzetű térelemek ábrázolása, illesztése, metszése, rekonstruálása. (Az első térnegyedre koncentrálva.) Térelemek párhuzamossága.*

1.1. Az ábrázoló geometria feladata



1.1. ábra. Az ábrázoló geometria feladata

Az ábrázoló geometria feladata a háromdimenziós tér alakzatainak szemléltetése és az azokkal megfogalmazott geometriai feladatok megoldása a rajz síkján. Ez a folyamat az alábbi szorosan összefüggő részek egysége (1.1. ábra.):

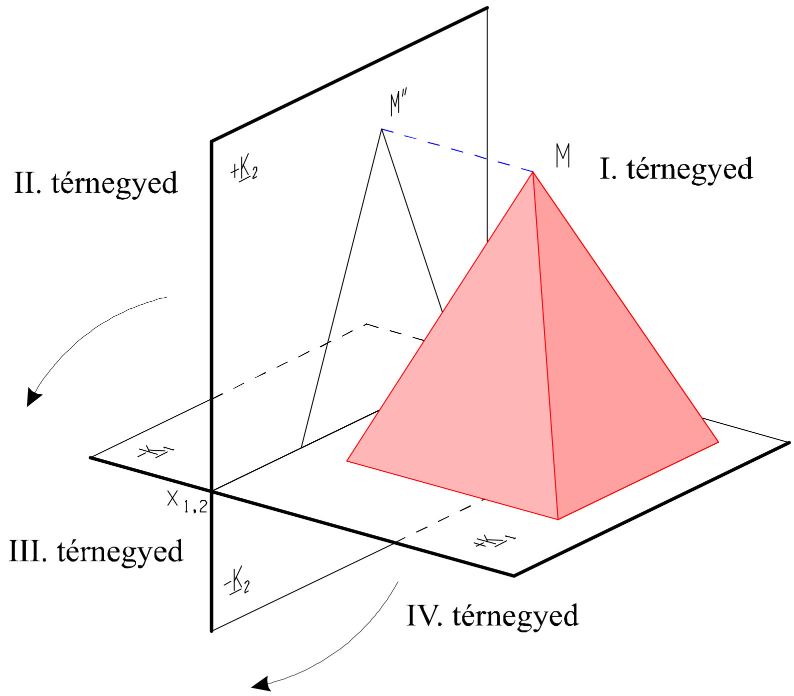
- a térbeli alakzatok *ábrázolása* a síkon (leképezés);
- a térre vonatkozó szerkesztések elvégzése a síkon (szerkesztés);

- a síkbeli képekből (vetületekből) a térbeli alakzat visszaállítása (*rekonstruálás*).

Az ábrázoló geometriával való foglalkozás során, a sok-sok konkrét feladat *körzővel, vonalzóval történő megszerkesztésének* eredményeként kialakul a geometriai ismeretekkel szervezett kreatív térszemlélet, ami a műszaki tervezéshez, de még a „mindent tudó" CAD rendszerek értelmes, eredményes alkalmazásához is nélkülözhetetlen.

1.2. A Monge-féle képsíkrendszer

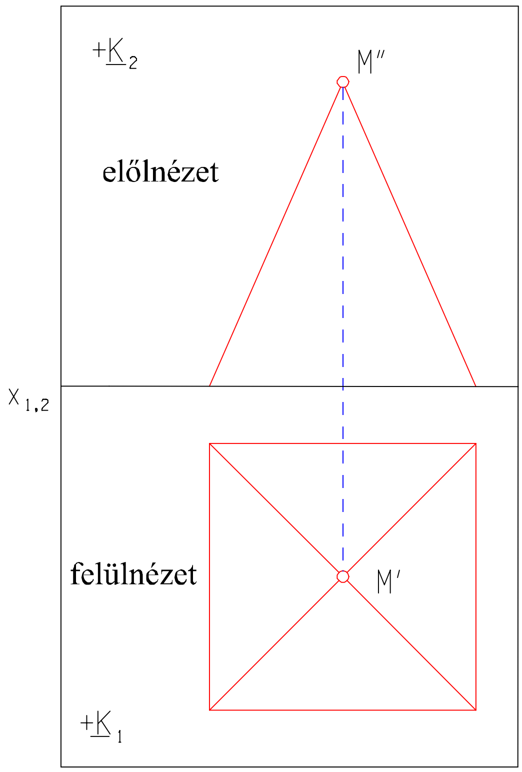
Gaspard Monge (1746 - 1818) az „ábrázoló geometria atyja" aki a meglévő szakmai ismereteket kiegészítette, és önálló tudományággá szervezte.



1.2. ábra. A Monge-féle képsíkrendszer

A Monge-féle képsíkrendszer részei: $\underline{\mathbf{K}}_1$, a vízszintes (horizontális) *első képsík* a felülnézet síkja, $\underline{\mathbf{K}}_2$ a szemközti (frontális) *második képsík* az elölnézet síkja. A képsíkok metszésvonala az $\mathbf{x}_{1,2}$ *tengely* (1.2. ábra.).

A képsíkok a teret négy *térnegyed*re osztják, a tengely a képsíkokat különböző előjelű félképsíkokra osztja. A pozitív félképsíkok által határolt térnegyed az első, leginkább ezt használjuk, a láthatósági vizsgálatokhoz magunkat is ebben a térnegyedben képzeljük el.



1.3. ábra. Az egyesített képsíkok

A későbbiekben szükségessé válhat további képsíkok bevezetése is, de mindig két egymásra merőleges képsík alkot egy rendszert. Leggyakrabban a $\underline{\mathbf{K}}_3$ *harmadik képsíkot* használjuk kiegészítésként, amely mindkét korábbi képsíkra és így az $\mathbf{x}_{1,2}$ tengelyre is merőleges (profil képsík), ez az oldalnézet síkja.

A tér leképezése a rajz síkjára két lépésben történik:

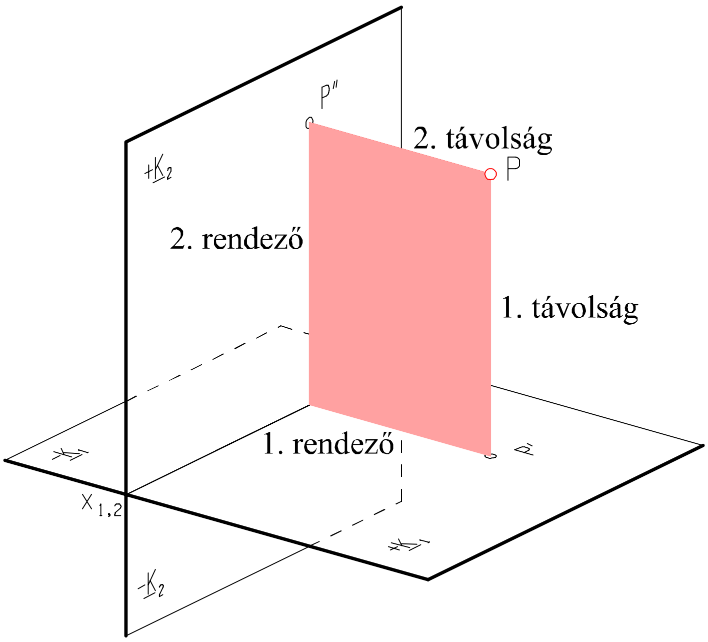
- a térbeli alakzatokat a képsíkokra merőleges vetítősugarakkal *vetítjük* a képsíkokra;
- a képsíkokat egyesítjük a rajz síkjában úgy, hogy az első térnegyedet határoló pozitív félképsíkokat szétnyitjuk (1.3. ábra.).

1.3. Térelemek ábrázolása

Térelemek:

- a *pont* (jele latin nagybetű: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$, vagy arab szám:$\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$);
- az *egyenes* (jele latin kisbetű: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$);
- és a *sík* (jele nálunk aláhúzott latin nagybetű: $\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}, \ldots$, vagy római szám: $\underline{\mathbf{I}}, \underline{\mathbf{II}}, \ldots$).

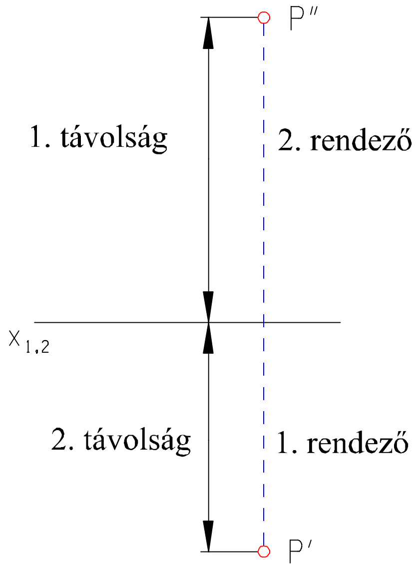
1.3.1. Pont ábrázolása és rekonstruálása



1.4. ábra. Pont leképezése

A **P** pont ábrázolása:

- a képsíkokra merőleges *vetítősugarakkal* vetítjük a pontot, a vetületeket **P′** és **P″** jelöli;
- a pont és vetületei egy *vetítő téglalapot* határoznak meg, amelynek szemközti oldalai egyenlők, tehát a pont egyik képsíktól mért távolsága a másik képsíkra illeszkedő *rendező szakasszal* egyenlő (1.4. ábra.);



1.5. ábra. Pont az első térnegyedben

- mivel a két rendező szakasz az $\mathbf{x}_{1,2}$ tengelyre merőleges, azért a képsíkok egyesítése után a vetületek egy egyenesre, a pont *rendező egyenesére* esnek (1.5. ábra.);
- figyelje meg, hogy az első rendező akkor pozitív, ha $\mathbf{P}'$ az $\mathbf{x}_{1,2}$ tengely alatt van, míg a második akkor, ha $\mathbf{P}''$ a tengely fölött.

Különleges helyzetű pontok:

- a képsíkokra illeszkedő pontok, ezek képsíktól mért távolsága (azaz a másik rendezője) nulla, tehát a másik kép illeszkedik az $\mathbf{x}_{1,2}$ tengelyre;
- a képsíkoktól egyenlő távolságra lévő, tehát a képsíkok szögfelező síkjaira illeszkedő pontok. Ha a távolságok előjele is megegyezik, a pont két képe az $\mathbf{x}_{1,2}$ tengelyre szimmetrikus, ezért az I. és III. térnegyedeket felező síkot *szimmetriasík*nak nevezzük. Ha a távolságok előjele különböző, a pont két képe egybeesik, ezért a II. és IV. térnegyedeket felező síkot *koincidencia*síknak nevezzük.

Pont rekonstruálása

Különbséget teszünk aszerint, hogy a rajz síkja függőleges (tábla, képernyő, állványos rajzgép esete), vagy vízszintes (asztali rajz esete). Az első esetben úgy képzeljük el, hogy a rajz síkja azonos a $\underline{\mathbf{K}}_2$ második képsíkkal és a képsíkok egyesítésekor a $+\underline{\mathbf{K}}_1$ félképsíkot hajlítottuk le. Az asztalon készített rajz esetén úgy képzeljük el, hogy a rajz síkja azonos a $\underline{\mathbf{K}}_1$ első képsíkkal és a képsíkok egyesítésekor a $+\underline{\mathbf{K}}_2$ félképsíkot döntöttük hátra. Ha módunkban áll az $\mathbf{x}_{1,2}$ tengely mentén meghajlítani a rajzunkat, rekonstruálhatunk úgy is, hogy először a megfelelő félképsíkot állítjuk vissza és ezután a két vetítősugár metszéspontjaként kapjuk a rekonstruált pontot. A táblát, vagy a képernyőt azonban nem hajlíthatjuk meg, ezért inkább úgy rekonstruálunk egy pontot, hogy

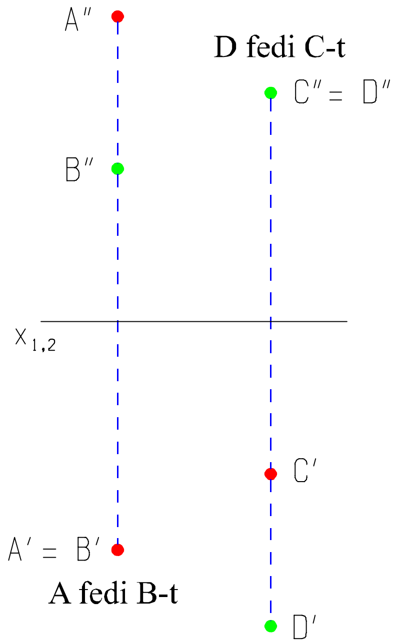
- függőleges rajz esetén a pontnak a $\mathbf{P}''$ második képétől a második vetítősugárra felmérjük a második képsíktól mért távolságot, ami az első képen látszik (első rendező);

- míg vízszintes rajz esetén a $\mathbf{P}'$ első képre illesztett első vetítősugárra felmérjük az első képsíktól mért távolságot, ami a második képen látszik (második rendező).

Az ábrázoló geometria tanulásának egyik legfőbb célja, hogy képessé váljunk egyre összetettebb alakzatok vetületek alapján történő *rekonstruálására*, más szóval: a rajz olvasására. Minden rajzot kommentáljunk, szemléltessünk, *rekonstruáljunk*! A rekonstruálás a szerkesztés, vagy a rajzolvasás folyamatának a szerves része (nem válik el attól, nem külön fázis), ezért munka közben a rajzlap forgatása *tilos*!

Fedőpontpárok

A közös vetítősugárra illeszkedő pontokat fedőpontoknak nevezzük. Mivel az ilyen pontok képe egybeesik, egyik elfedi a másikat. A szemléltetés egyik eszköze a láthatóság feltüntetése. Az európai rendszerben úgy képzeljük el, hogy az (első térnegyedbeli) alakzat a képsík és a szemünk között van (míg az amerikai rendszerben a képsík mögött). A láthatóság eldöntésének alapesete a fedőpontpároknál jelenik meg.



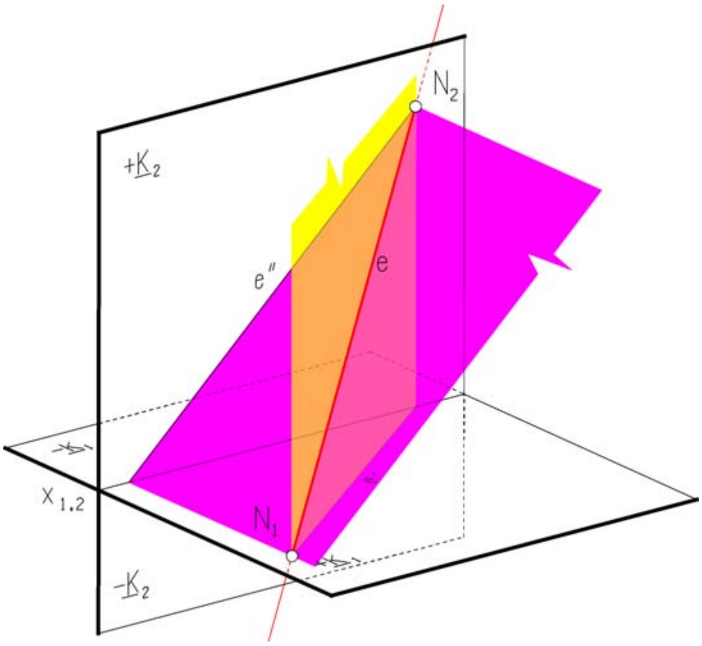
1.6. ábra. Fedőpontpárok

Fedőpontpárból az a pont látszik, amelyik a szemlélőhöz közelebb van (1.6. ábra.), azaz

- első fedőpontpárból, felülnézeten a magasabban lévő (amelyiknek az előjeles második rendezője nagyobb);
- a második fedőpontpárból, elölnézeten, amelyik előrébb van (amelyiknek az előjeles első rendezője nagyobb).

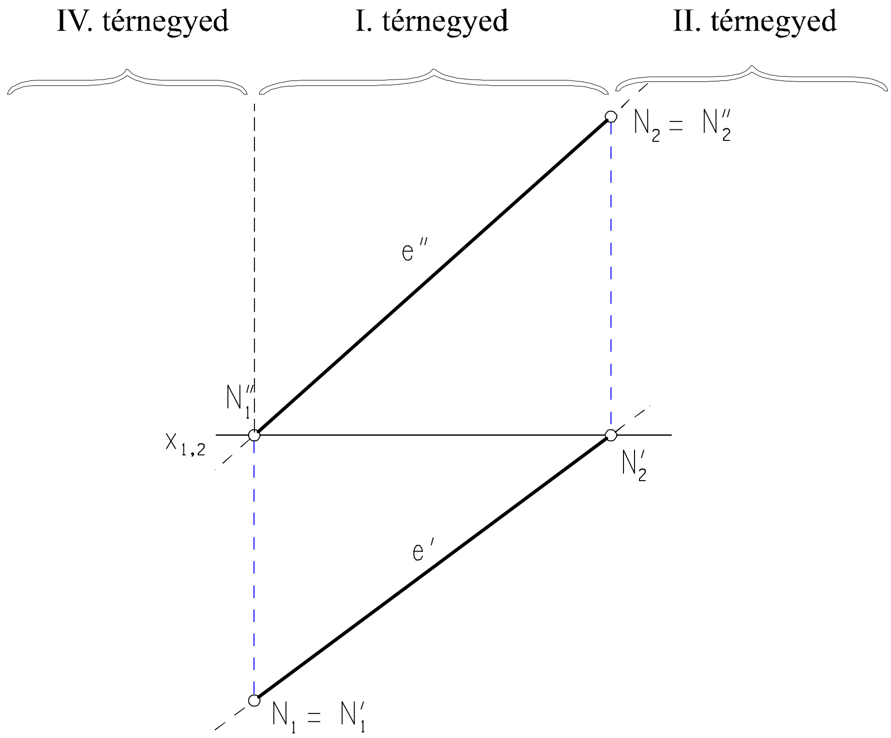
1.3.2. Egyenes ábrázolása

Tekintsük az egyenest a rá illeszkedő pontok összességeként és vetítsük minden egyes pontját! A pontok vetítősugarai a megfelelő képsíkra merőleges *vetítősíkot* alkotnak. Ha az egyenes nem merőleges a képsíkra, akkor a képe az egyenesre illeszkedő vetítősíknak és a képsíknak a metszésvonala, tehát szintén egyenes. Az egyenest rekonstruálhatjuk a vetítősíkjai metszésvonalaként (kivéve, ha a vetítősíkok egybeesnek, azaz a profilegyenes esetében). Ha az egyenes merőleges a képsíkra (vetítősugár), akkor a képe egyetlen pont.



1.7. ábra. Egyenes nyompontjai

Az egyenes nyompontja az egyenesnek és a képsíknak a döféspontja (1.7. ábra.). A nyompont jele (általában) $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$. A nyompont egyik képe azonos a nyomponttal (ezért a kép jelét elhagyhatjuk), a másik képe pedig az $\mathbf{x}_{1,2}$ tengelyre illeszkedik (1.8. ábra.). Egy egyenesnek képsíkonként egy nyompontja van (ha párhuzamos a képsíkkal, akkor a végtelenben).

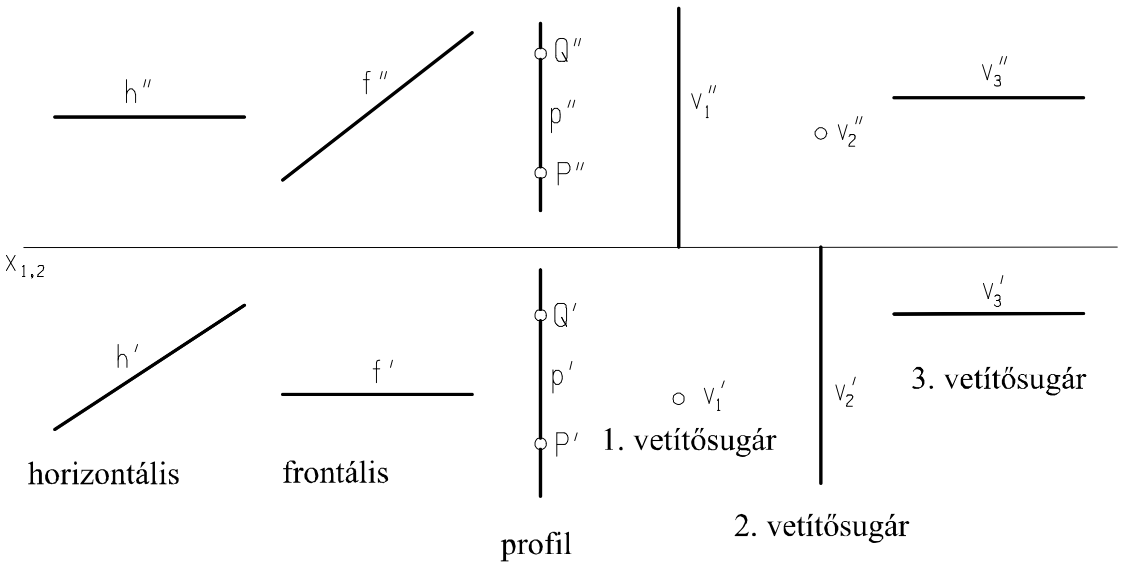


1.8. ábra. Nyompontok szerkesztése

Az egyenes a nyompontban döfi a képsíkot és átkerül egy másik térnegyedbe. Ha a képsíkok átlátszatlanok, az egyenesnek csak az első térnegyedbeli részét látjuk. Az egyenest rekonstruálhatjuk a nyompontjai összekötéseként is.

Különleges helyzetű egyenesek (a képsíkrendszerhez képest) (1.9. ábra.)**:**

- képsíkra illeszkedő, vagy a képsíkkal párhuzamos (horizontális, frontális, profil) egyenesek;
- képsíkra merőleges $(1., 2., 3.)$ vetítősugarak.

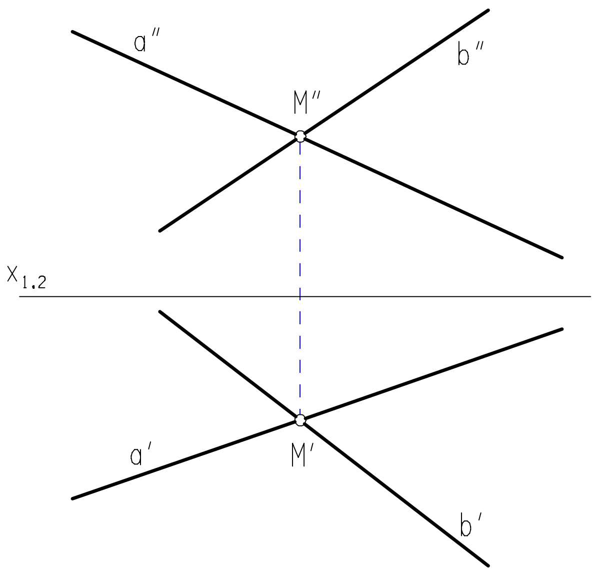


1.9. ábra. Különleges helyzetű egyenesek

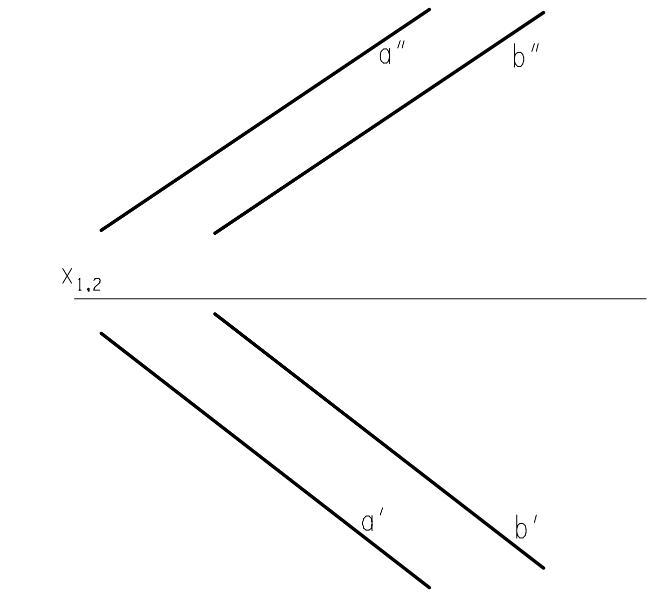
A képsíkkal párhuzamos egyeneseket (horizontális, frontális, profil) 1., 2., 3. *fővonalnak is nevezzük.*

Két egyenes kölcsönös helyzete (egymáshoz képest)**:**

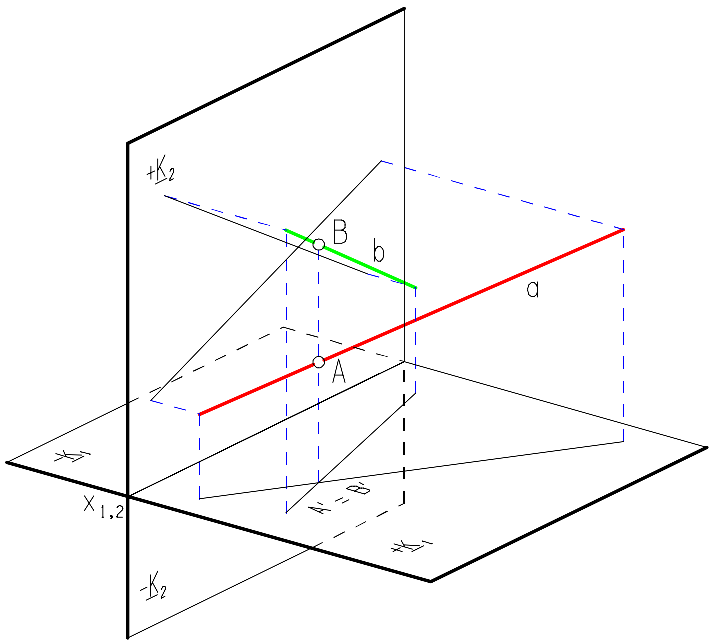
- a *komplanáris* (közös síkú) egyenesek lehetnek metszők, vagy párhuzamosak (1.10.,1.11. ábra.);
- a nem komplanáris egyenesek *kitérők* (ez az általános eset!) (1.12. ábra.).



1.10. ábra. Metsző egyenesek

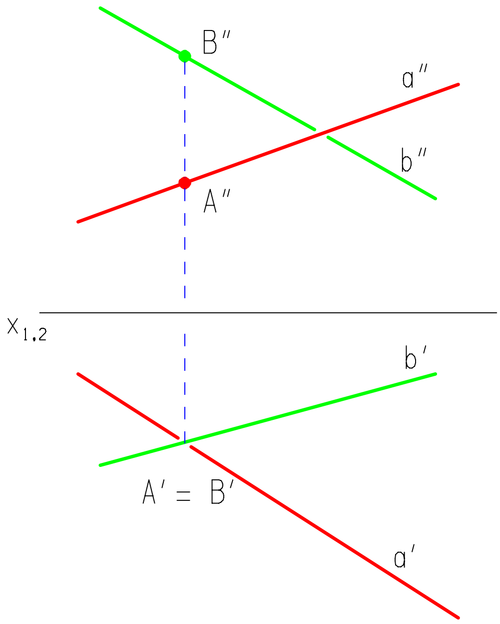


1.11. ábra. Párhuzamos egyenesek



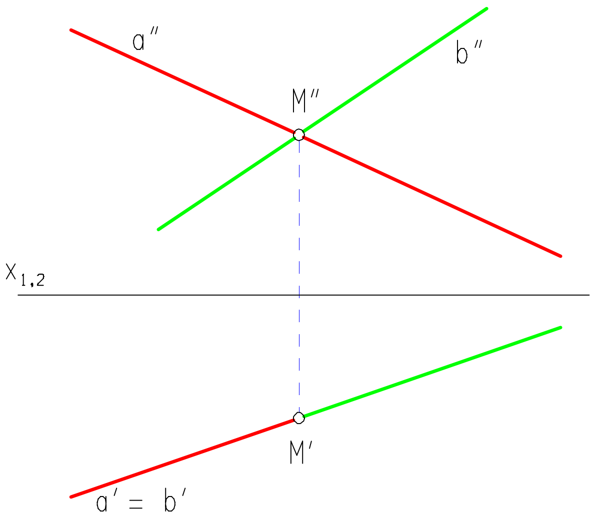
1.12. ábra. Kitérő egyenesek fedőpontpárral

Kitérő egyenesek láthatóságát a képeik metszéspontjához tartozó vetítősugárral az egyenesekből kimetszett fedőpontpár segítségével döntjük el (1.13. ábra.).

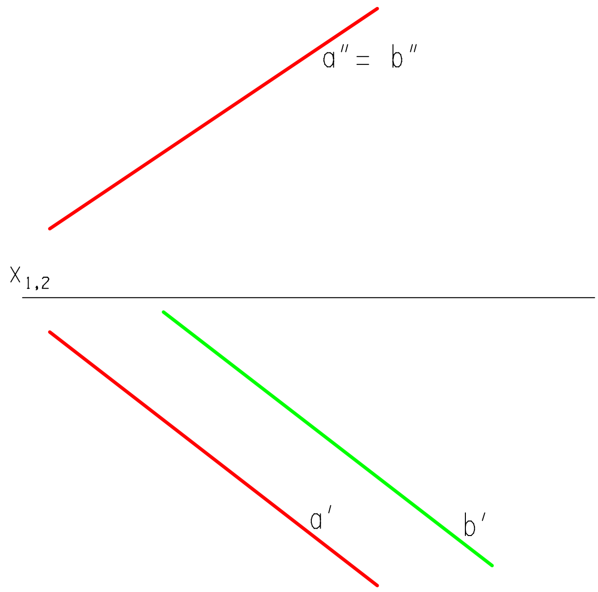


1.13. ábra. Kitérő egyenesek láthatósága a fedőpontpár alapján

A *fedőegyenesek* közös vetítősíkban vannak, tehát komplanárisak, ezért csak metszők, vagy párhuzamosak lehetnek (1.14., 1.15. ábra.).



1.14. ábra. Metsző fedőegyenesek



1.15. ábra. Párhuzamos fedőegyenesek

1.3.3. Sík ábrázolása

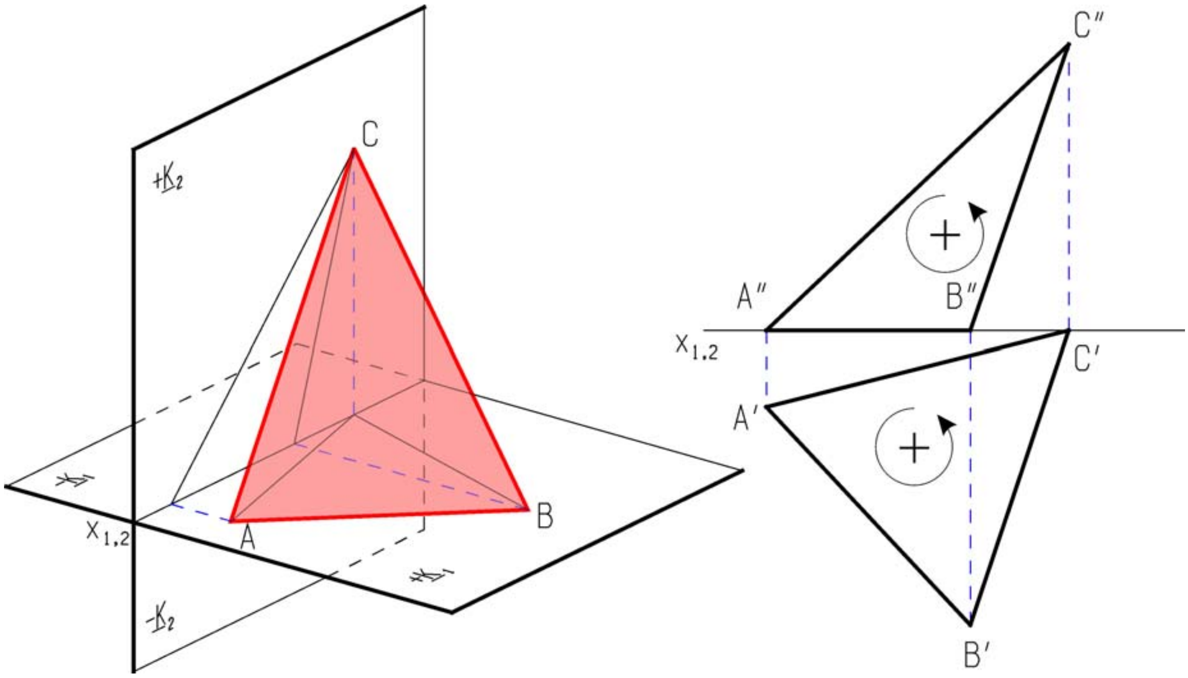
Az általános helyzetű síkot nem ábrázolhatjuk a pontjai vetületével, mint az egyenest (hiszen a vetülete beborítaná az egész képsíkot), ezért az általános helyzetű síkot a *tartó elemeivel* ábrázoljuk Vetületével csak az "élben látszó" vetítősíkot ábrázoljuk.

Tartó elemek:

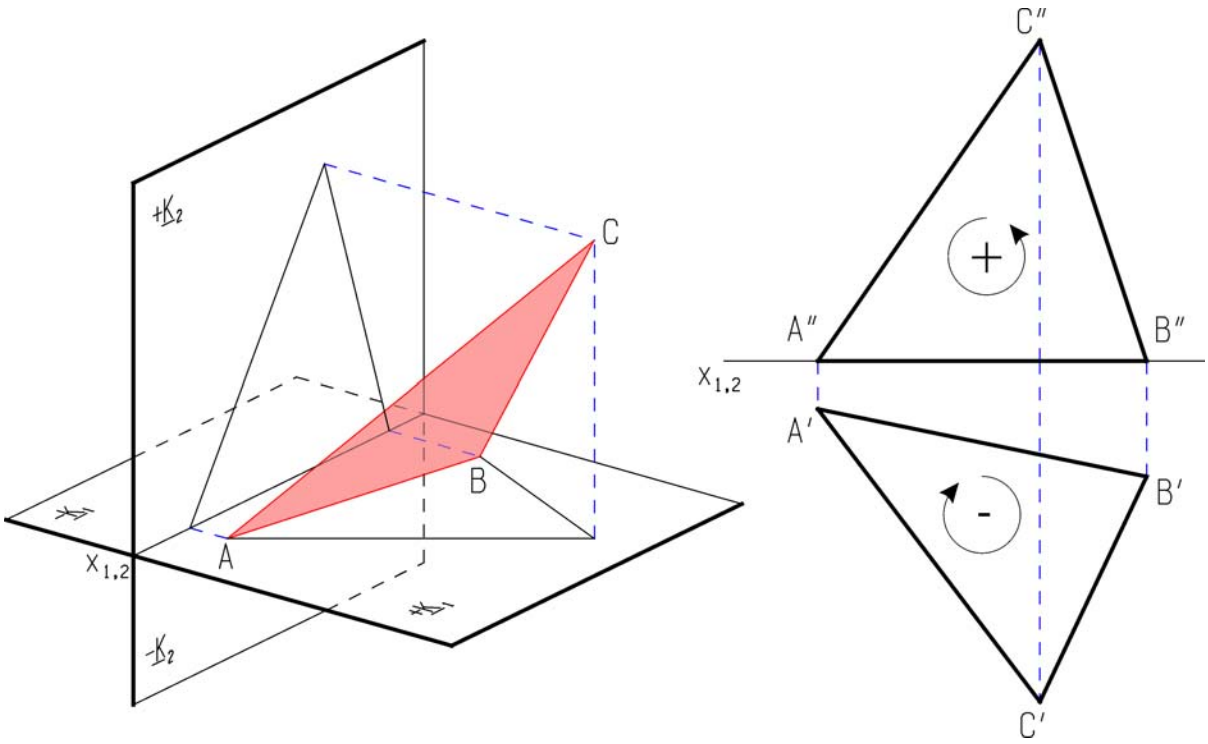
- három, nem egy egyenesre illeszkedő, azaz nem *kollineáris* pont;
- két komplanáris (párhuzamos, vagy metsző) egyenes;
- egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont.

A sík helyzetei (a képsíkrendszerhez képest)**:**

- Az általános helyzetű sík *dőlt*, ha mindkét képen ugyanazt az (azonos irányítású, vagy körüljárási irányú) oldalát látjuk (1.16. ábra)



1.16. ábra. A dőlt helyzetű háromszögnek elölről és felülről ugyanazt az oldalát látjuk (bal oldali ábra); A vetületek irányítása megegyezik (jobb oldali ábra)



1.17. ábra. A feszített helyzetű háromszögnek elölről és felülről különböző oldalát látjuk (bal oldali ábra); A vetületek irányítása különbözik (jobb oldali ábra)

- Az általános helyzetű sík *feszített*, ha a két képen különböző (irányítású, vagy körüljárási irányú) oldalát látjuk (1.17. ábra).

- A dőlt és a feszített helyzet között a vetítősík a határeset.

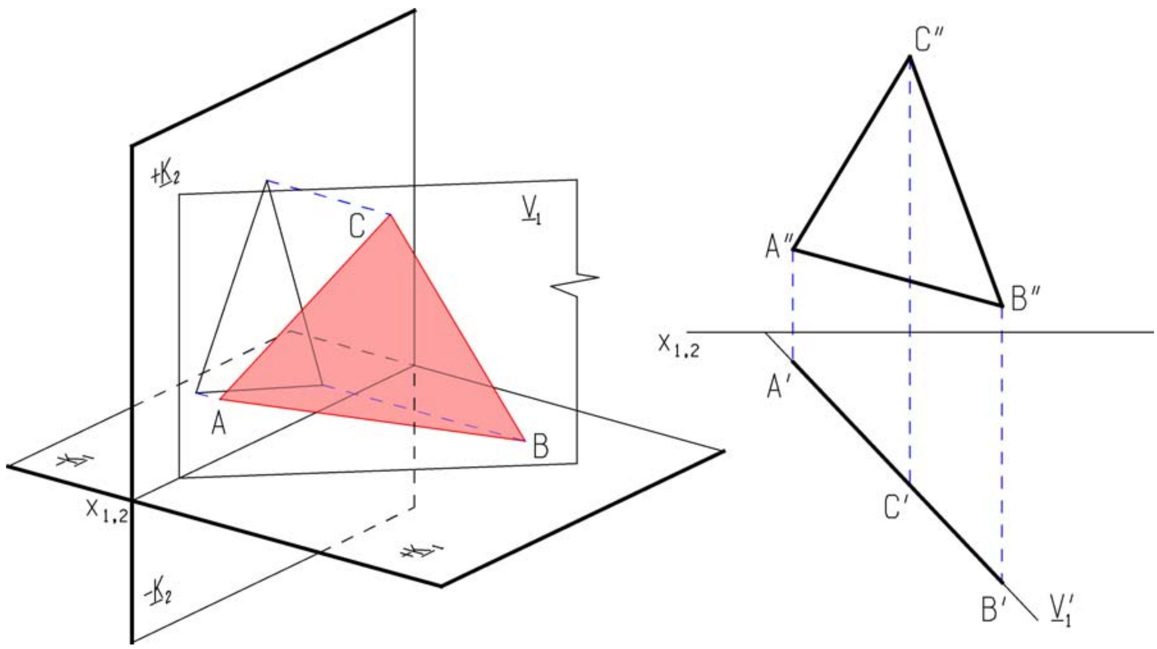
- Ha a vetítősík a másik képsíkkal párhuzamos, főállású (*horizontális*, vagy *frontális*) sík ha pedig mindkét képsíkra merőleges, (tehát a $\underline{\mathbf{K}}_3$ harmadik képsíkkal párhuzamos) *profil* sík a neve.

Különleges helyzetű síkok:

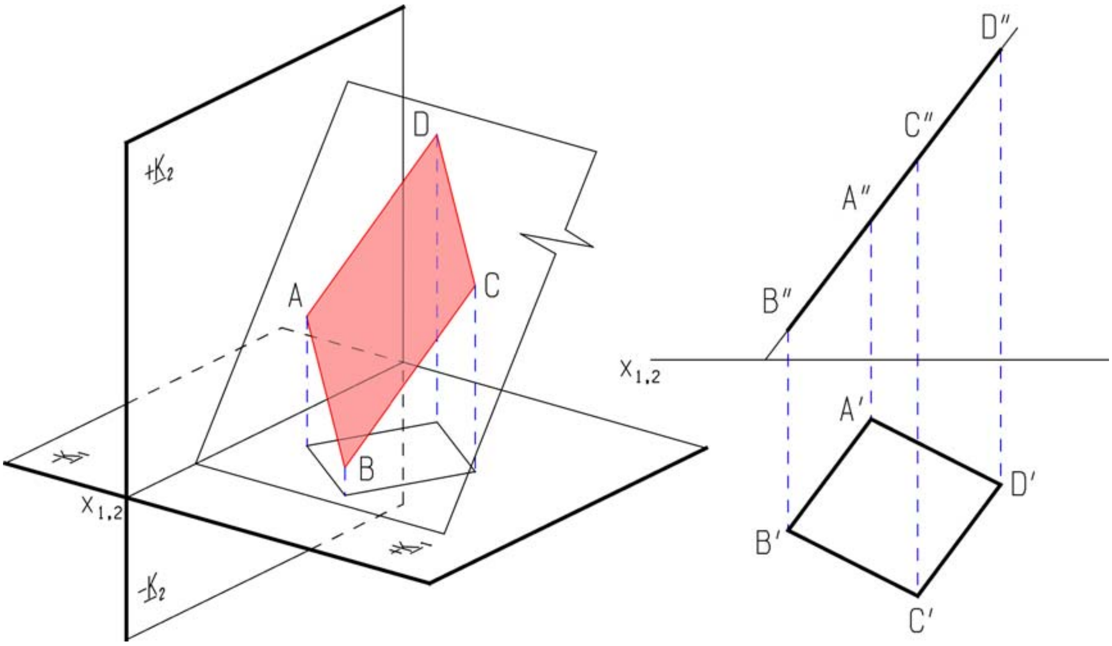
- a vetítősíkok (az 1.18. ábra első vetítősíkot, az 1.19. ábra második vetítősíkot mutat);

- és a főállású (horizontális, frontális, profil) síkok.

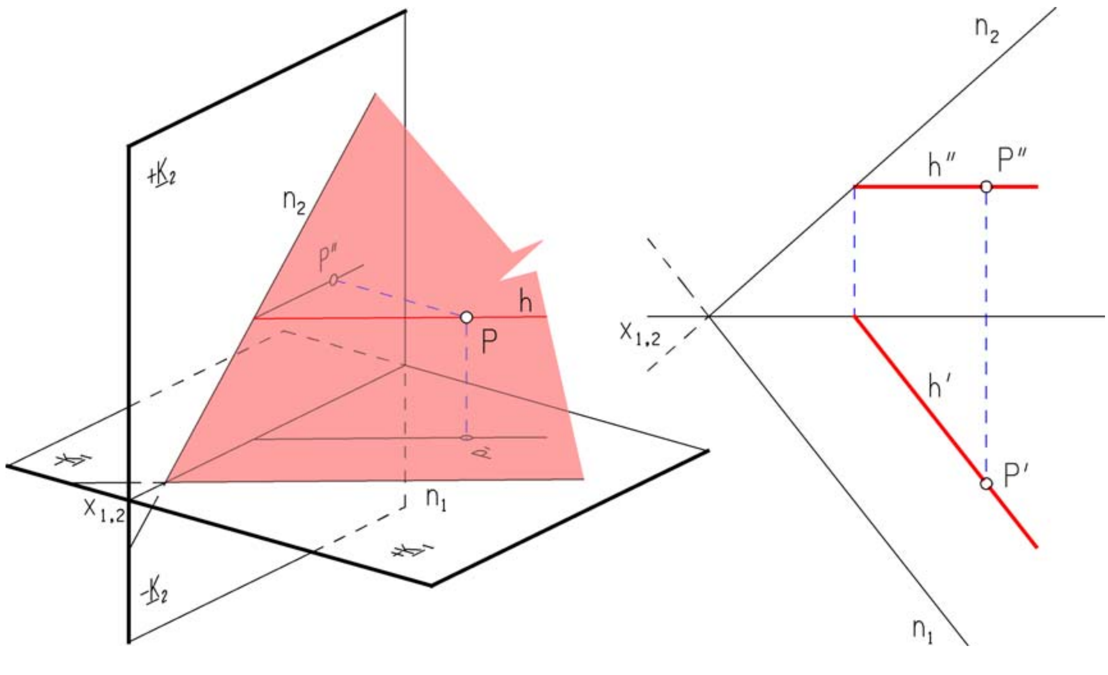
Általános helyzetű sík rekonstruálása a tartó elemek rekonstruálásával történik. Vetítősíkot az élben látszó vetülete alapján rekonstruálunk.



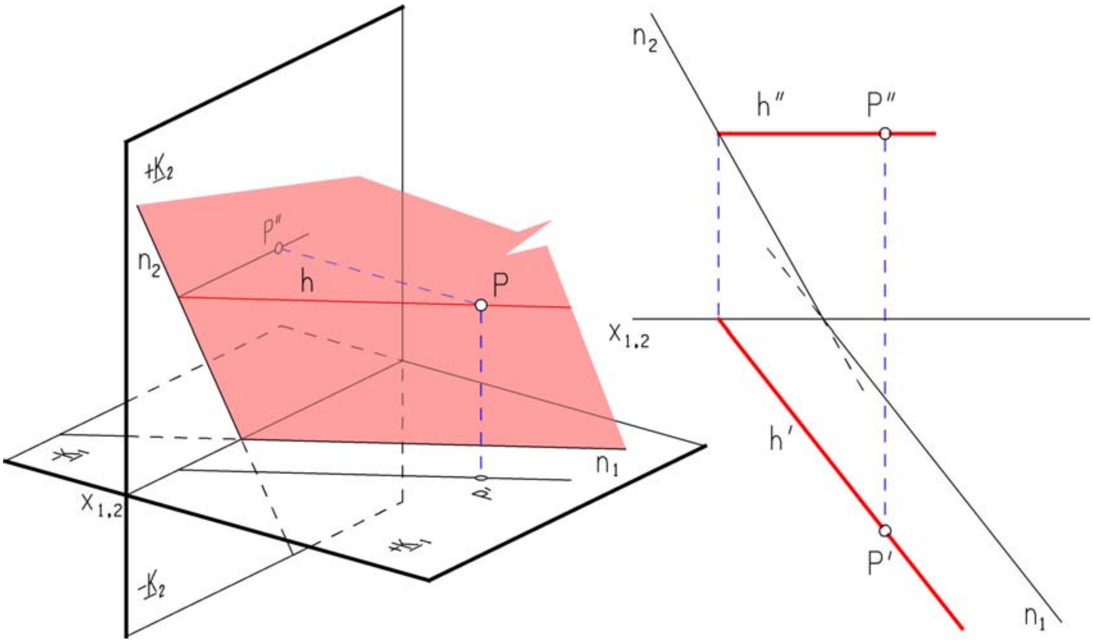
1.18. ábra. Az első vetítősík merőleges az első képsíkra (bal oldali ábra); Az első vetítősíkra illeszkedő háromszög az első képen élben látszik (jobb oldali ábra)



1.19. ábra. A második vetítősík merőleges a második képsíkra (bal oldali ábra); A második vetítősíkra illeszkedő parallelogramma a második képen élben látszik (jobb oldali ábra)



1.20. ábra. Dőlt sík nyomvonalai (bal oldali ábra); Pont illesztése fővonallal a nyomvonalaival adott dőlt síkra (jobb oldali ábra)



1.21. ábra. Feszített sík nyomvonalai (bal oldali ábra); Pont illesztése fővonallal a nyomvonalaival adott feszített síkra (jobb oldali ábra)

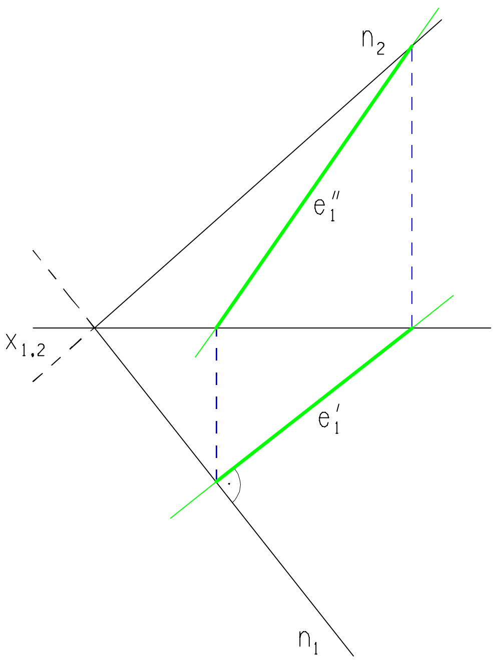
A sík különleges helyzetű egyenesei (a képsíkrendszerhez képest)**:**

- A *nyomvonal* a sík és a képsík metszésvonala. A nyomvonalak az $\mathbf{x}_{1,2}$ tengelyen metszik egymást. Dőlt sík nyomvonalainak a látható fele a tengelypontra illesztett profilsík azonos oldalára esik, míg a feszített sík nyomvonalainak a látható fele a tengelypontra illesztett profilsík különböző oldalán van (1.20. és 1.21. bal oldali ábrái).

- A *fővonalak* párhuzamosak a képsíkkal (ez a másik képen látszik, ahol a képsík képe a tengely). A fővonalak párhuzamosak a megfelelő nyomvonallal.

- Az *esésvonalak* merőlegesek a megfelelő fővonalakra és nyomvonalra. Ez a merőlegesség a megfelelő képen is derékszögben látszik, mert a derékszög vetülete is derékszög, ha legalább az egyik szára párhuzamos a képsíkkal és egyik sem merőleges rá.

Például egy háztető síkjában a cseréptartó lécek horizontális fővonalak, míg a szarufák a tető síkjának első esésvonalai.



1.22. ábra. Az esésvonal meghatározza a síkot

Egyetlen esésvonal már meghatározza a síkot, mert egy tetszőleges pontján át a rá merőleges fővonal két képe megrajzolható és akkor már a sík két metsző egyenese ismert. Az esésvonal nyompontjain át a sík nyomvonalait szerkeszthetjük (1.22. ábra).

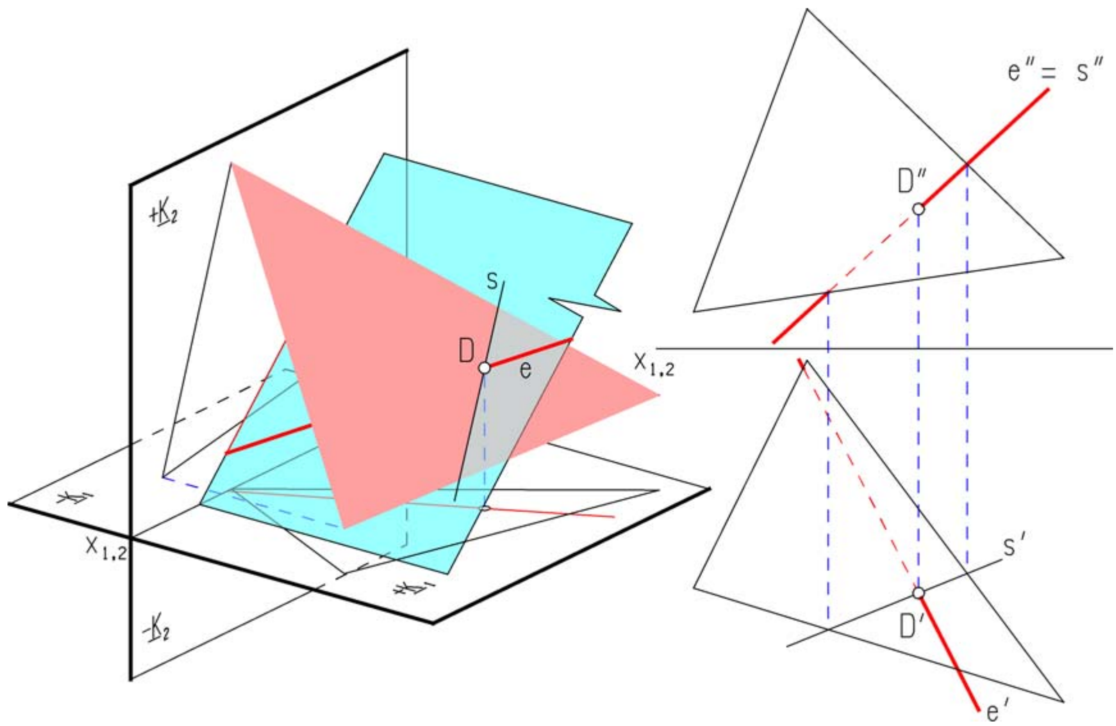
Pont illesztése a síkra: a síkra illeszkedő általános, vagy különleges egyenesekkel (javasolt a fővonalakkal, 1.20. és 1.21. jobb oldali ábrái).

Egyenes illesztése a síkra: az illesztendő egyenes a sík megadott egyeneseivel komplanáris, tehát csak metsző, vagy párhuzamos lehet. Ha ismertek a sík nyomvonalai, további síkbeli egyenest a nyompontjaival ezekre illeszthetünk.

1.4. Metszési feladatok

Két egyenes metszéséről a két egyenes kölcsönös helyzete kapcsán esett szó. Most a sík és egyenes, valamint a két sík metszése következik.

1.4.1. Sík és egyenes döféspontja



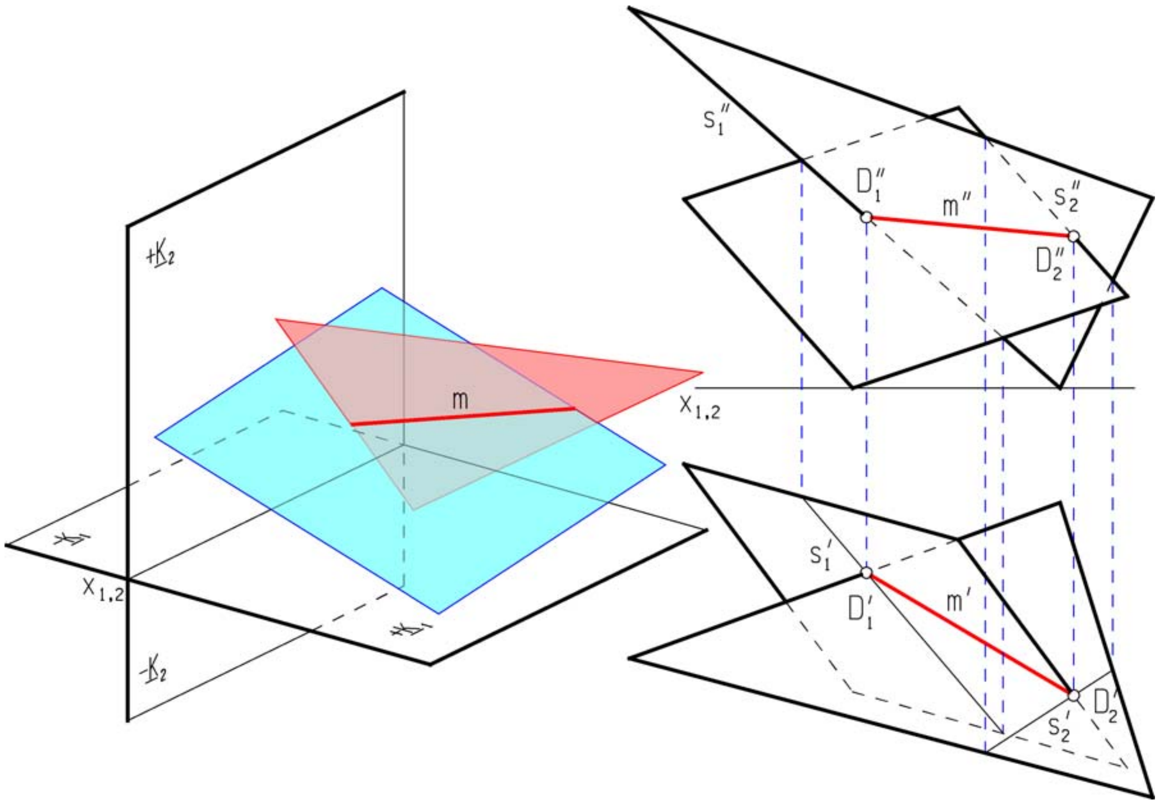
1.23. ábra. Síkidom és egyenes döféspontja (bal oldali ábra); Döféspont szerkesztése fedőegyenessel (jobb oldali ábra)

1.1. Feladat. *Adott a sík és az egyenes, szerkesszük meg a döféspontjukat!*

Megoldás.

- ha a sík általános helyzetű, akkor az adott egyenesnek a síkban felvett fedőegyenesével szerkesztünk, a fedőegyenes segít a láthatóság eldöntésében is (1.23. ábra):
  - a fedőegyenes egyik képe azonos az adott egyenes megfelelő képével;
  - a fedőegyenes illeszkedik a síkra, ezért metszi a sík egyeneseit, ennek alapján megszerkesztjük a másik képét;
  - ott (a másik képen) megkapjuk a döféspont képét, amit visszavetítünk a fedőegyenes és az adott egyenes közös képére;
- ha a sík vetítősík, a döféspontot a vetítősík élben látszó képe metszi ki, már csak át kell vetíteni a másik képre.

1.4.2. Két sík metszésvonala



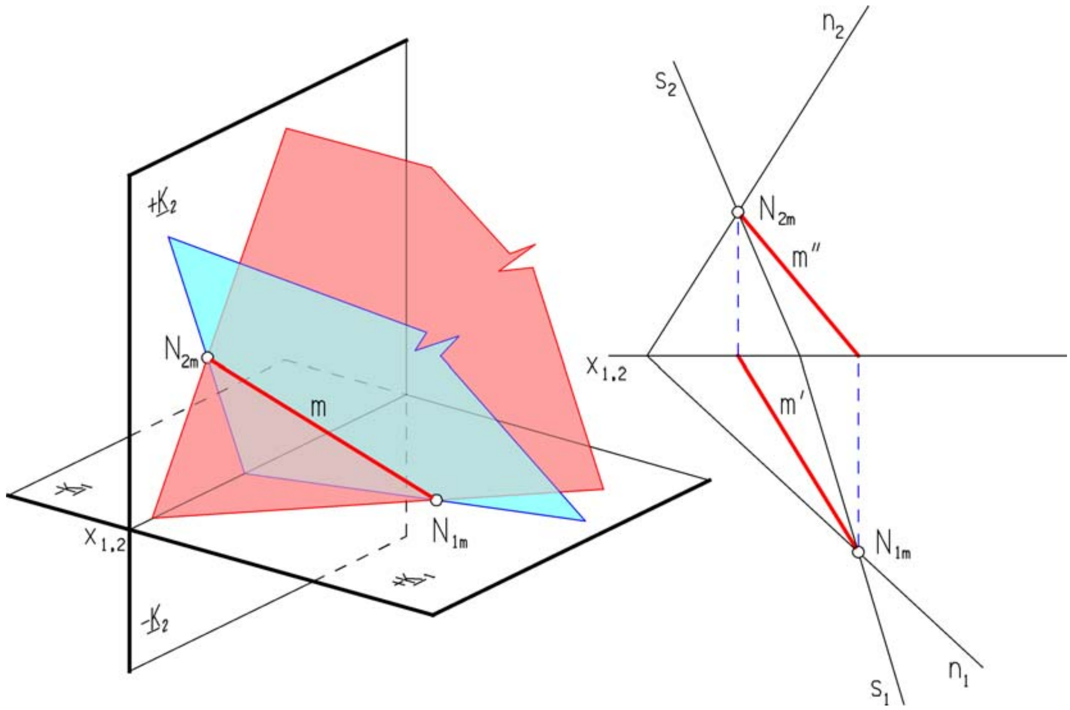
1.24. ábra. Két síkidom metszésvonala (bal oldali ábra); Metszésvonal szerkesztése döféspontokkal (jobb oldali ábra)

1.2. Feladat. *Adott két síkidom, szerkesztendő a metszésvonaluk.*

Megoldás. a metszésvonalat két döféspottal is megszerkeszthetjük (1.24. ábra):

- döféspontot szerkesztünk az egyik síkból választott egyenessel a másik síkon;
- megismételjük az előbbi lépést (a síkok szerepét megtartva, vagy felcserélve);
- a két döféspont összekötő egyenese a metszésvonal.

Ha a két sík a nyomvonalaival adott, a szerkesztés különösen egyszerű, hiszen a nyomvonalak metszéspontjai a metszésvonal nyompontjai (1.25. ábra).



1.25. ábra. Nyomvonalakkal adott síkok metszésvonala (bal oldali ábra); Metszésvonal szerkesztése nyomvonalakkal (jobb oldali ábra)

Ha az egyik sík vetítősík, a metszésvonalat a vetítősík élben látszó képe metszi ki. Ha mindkét sík vetítősík (egyik első, másik második), akkor azok a metszésvonal vetítősíkjai, élben látszó képük a metszésvonal megfelelő képe.

1.5. Térelemek párhuzamossága

Az euklideszi geometriában

- két egyenes párhuzamos, ha komplanárisak (van közös síkjuk), de nincs közös pontjuk;
- egyenes és sík párhuzamos, ha van a síkban az adott egyenessel párhuzamos egyenes;
- két sík párhuzamos, ha van az egyik síkban a másik síkkal párhuzamos két metsző egyenes.

A reneszánsz festők a térben hátrafutó egyeneseket egy *iránypontban* metsződő egyenesekként ábrázolták. A geometriába Desargues (1593 - 1662) vezette be a végtelen távoli pont fogalmát. Eszerint:

- a párhuzamos egyenesek egy közös végtelen távoli pontban metszik egymást;
- párhuzamos síkok egy közös végtelen távoli egyenesben metszik egymást;
- végül egy síkkal párhuzamos egyenes metszi a sík végtelen távoli egyenesét.

Az egységesség érdekében két párhuzamos egyenes is csak *egyetlen* közös (végtelen távoli) pontban metszheti egymást. Így egy egyenesnek csak *egy* végtelen távoli pontja, hasonlóan egy síknak csak *egy* végtelen távoli egyenese és az egész térnek *egyetlen* végtelen távoli síkja van. A térnek ez a projektív szemlélete egységesebbé és hatékonyabbá teszi általában a geometria és különösen az ábrázoló geometria tárgyalását.

1.6. Gyakorló feladatok az 1. témakörhöz

1.1. Illesszen a képsíkrendszerhez egy Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy az $\mathbf{y}$ tengely a Monge-féle képsíkrendszer $\mathbf{x}_{1,2}$ tengelyére essen, az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ tengelyek pedig a $\underline{\mathbf{K}}_1$, $\underline{\mathbf{K}}_2$ képsíkokra. Ábrázoljon ezután pontot a koordináták alapján, illetve olvassa le általános és különleges helyzetű pontok koordinátáit (1.26. ábra).

1.2. Adottak az $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ pontok. Szerkessze meg az $\mathbf{e}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ egyenes nyompontjait!

1.3. Adottak az $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ pontok. Szerkessze meg az $\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ sík nyomvonalait!

1.4. Adottak az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ komplanáris (metsző, vagy párhuzamos) egyenesek. Szerkessze meg az $\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sík nyomvonalait!

1.5. Adott az $\mathbf{A}$ pont és az $\mathbf{e}$ egyenes. Szerkessze meg az $\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{e})$ síknak az $\mathbf{A}$ pontra illeszkedő fővonalait és esésvonalait!

1.6. Adott az $\mathbf{a}$ egyenes és vetületével a $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősík. Szerkessze meg az $\mathbf{a}$ egyenesnek az $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősíkkal alkotott döféspontját!

1.7. Adott az $\mathbf{a}$ egyenes és $\mathbf{e}_1$ első esésvonalával az $\underline{\mathbf{S}}$ sík. Szerkessze meg az $\mathbf{a}$ egyenesnek az $\underline{\mathbf{S}}$ síkkal alkotott döféspontját (1.27. ábra)!

1.8. Adott a $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősík és egy $\underline{\mathbf{S}}$ sík a nyomvonalaival. Szerkessze meg a két sík metszésvonalát!

1.9. Adott két sík a nyomvonalaival. Szerkessze meg a két sík metszésvonalát (1.25. ábra)!

1.10. Adott az $\underline{\mathbf{A}}$ sík a nyomvonalaival és a $\underline{\mathbf{B}}$ sík a fővonalaival. Szerkessze meg a két sík metszésvonalát!

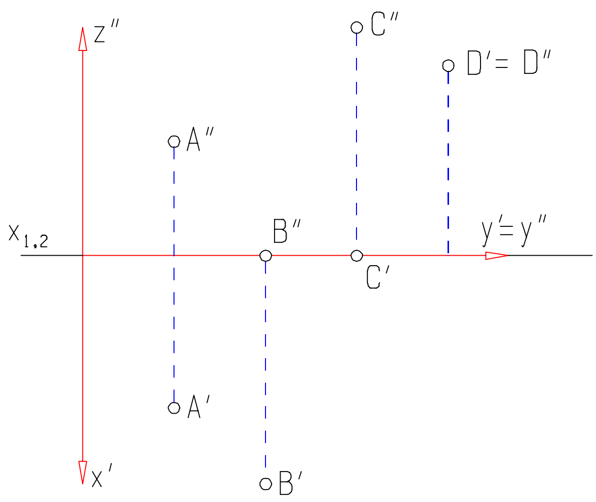
1.11. Adott két sík a fővonalaival. Szerkessze meg a két sík metszésvonalát!

1.12. Adott két sík az $\mathbf{e}_1$ és a $\mathbf{g}_1$ első esésvonalakkal. Szerkessze meg a két sík metszésvonalát!

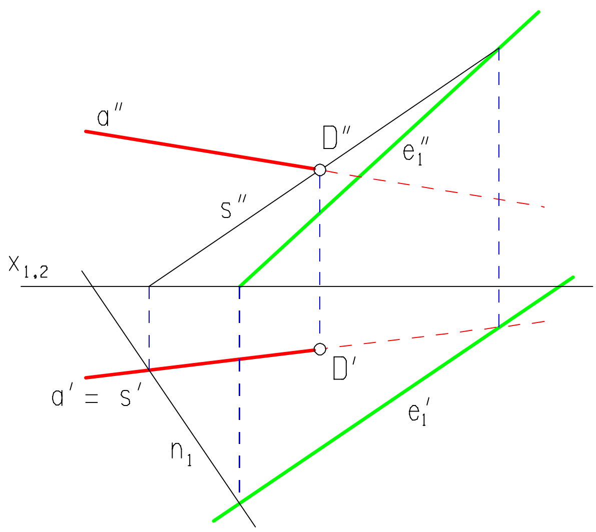
1.13. Adott a rajz szerinti két téglalap (1.28. ábra). Szerkessze meg a metszésvonalukat!

1.14. Adott az $\mathbf{a}$ egyenes, és az $\underline{\mathbf{S}}$ sík $\mathbf{n}_1$ első nyomvonala. Szerkessze meg az $\underline{\mathbf{S}}$ sík $\mathbf{n}_2$ második nyomvonalát úgy, hogy $\mathbf{a}$ és $\underline{\mathbf{S}}$ párhuzamos legyen!

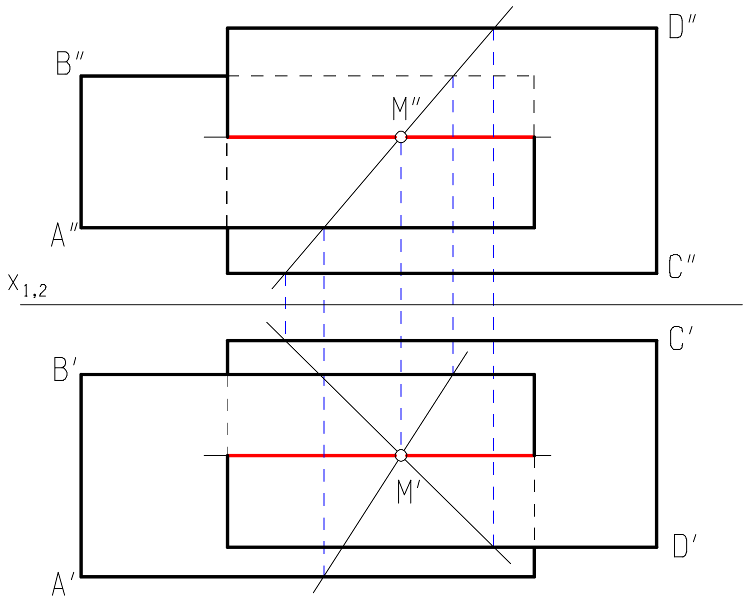
1.15. Adott az $\underline{\mathbf{A}}$ és a $\underline{\mathbf{B}}$ sík a nyomvonalaival valamint a $\mathbf{C}$ pont. Szerkessze meg a $\mathbf{C}$ pontra illeszkedő és az $\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}$ síkokkal párhuzamos $\mathbf{c}$ egyenest!



1.26. ábra. Pontok koordinátái (1.1. gyakorló feladat)



1.27. ábra. Esésvonalával adott sík döfése egyenessel (1.7. gyakorló feladat)



1.28. ábra. Különleges helyzetű téglalapok metszése (1.13. gyakorló feladat)

2. fejezet

Méretfeladatok

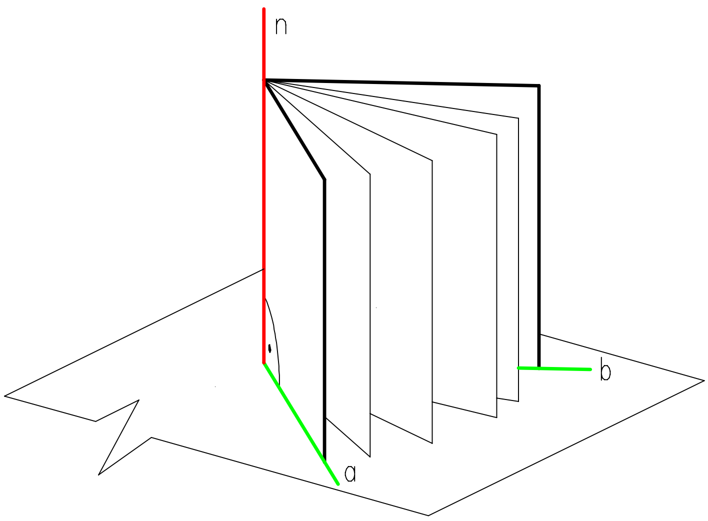
Tananyag: *Térelemek merőlegessége. A képsíkrendszer transzformációja. Egyenes és sík különleges helyzetbe transzformálása. Különbségi háromszög, egyszerűbb távolságfeladatok. A sík leforgatása, a merőleges, tengelyes affinitás néhány tulajdonsága. További méretfeladatok megoldása transzformálással és a sík leforgatásával.*

2.1. Merőlegesség

Először *sík és egyenes merőlegességének* a vetületi feltételeit vizsgáljuk, a két egyenes és a két sík merőlegességét majd erre vezetjük vissza.

Két kitérő egyenes szögén az önmagukkal párhuzamosan közös pontba eltolt egyenesek szögét értjük. Eszerint két kitérő egyenes merőleges, ha önmagukkal párhuzamosan közös pontba eltolva derékszöget zárnak be.

Egy sík és egy egyenes merőleges, ha az egyenes a sík minden egyenesére merőleges.

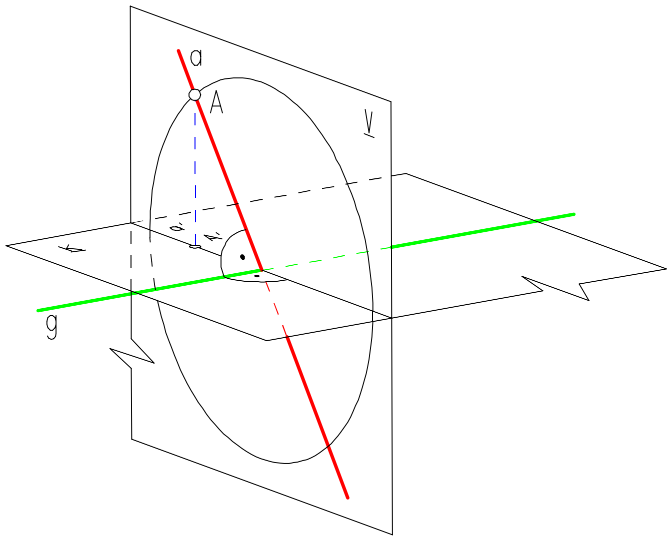


2.1. ábra. A síkra merőleges egyenes tétele

Merőleges sík és egyenes szerkesztését két (középiskolából ismert) tételre alapozzuk:

1. a síkra merőleges egyenes tétele: *Ha egy egyenes merőleges a sík két metsző egyenesére, akkor a sík minden egyenesére (és így magára a síkra is) merőleges.* (A tételt itt nem bizonyítjuk, csak szemléltetjük (2.1. ábra). Az asztalon álló nyitott könyv **n** gerince jelzi azt az egyenest, amelyik a könyv két fedele miatt az asztallap síkjának két metsző **a** és **b** egyenesére merőleges és ezért a különböző irányú lapok mind érintik az asztalt. (Ha a könyvet ferdén vágták volna el, a lapok élei egy kúp felületére illeszkednének és nem egy síkra.)

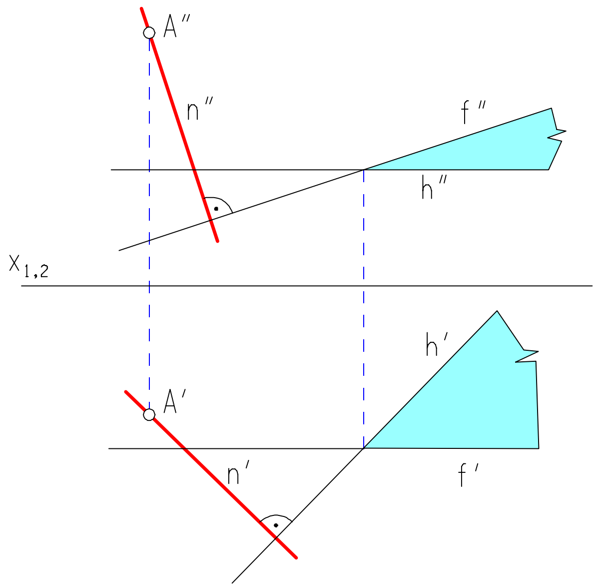
2. a három merőleges tétele: *Egy síkkal hegyesszöget bezáró egyenes akkor és csak akkor merőleges egy síkbeli egyenesre, ha a síkra eső merőleges vetülete is az.* A tételt szemléltető 2.2. ábrán a síkbeli **g** tengely körül megforgatott **a** egyenes vetülete a forgatás közben nem változik, mert állandóan ugyanarra a **V** vetítősíkra illeszkedik.



2.2. ábra. A három merőleges tétele

A merőlegesség nem változik, ha az egyeneseket önmagukkal párhuzamosan eltoljuk, eszerint a három merőleges tételét így is átfogalmazhatjuk:

Egy térbeli derékszög (el nem fajuló) vetülete akkor és csak akkor derékszög, ha legalább az egyik szára párhuzamos a képsíkkal, vagy illeszkedik arra.



2.3. ábra. Síkra merőleges egyenes szerkesztése

2.1. Feladat. *Adott az* $\underline{\mathbf{S}}$ *sík a* **h** *és* **f** *fővonalaival, valamint az* **A** *pont. Szerkesszünk az* **A** *pontból az* $\underline{\mathbf{S}}$ *síkra merőleges* **n** *egyenest (normálist)!*

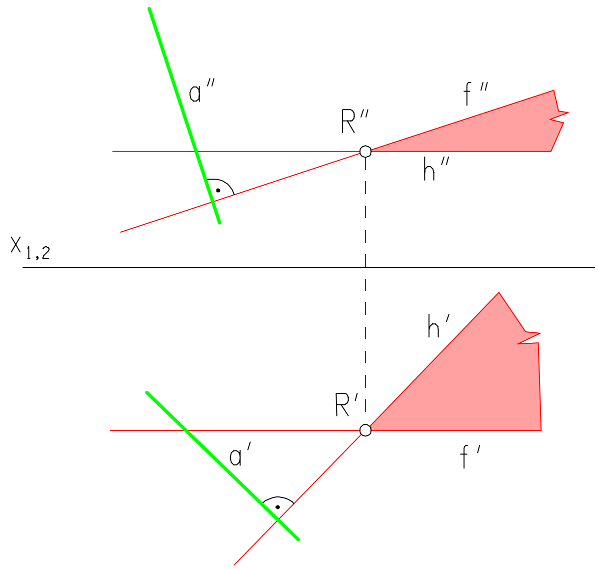
Megoldás. (2.3. ábra)

- **n** második képe legyen merőleges **f** második képére;
- **n** első képe legyen merőleges **h** első képére.

A szerkesztés helyességének bizonyítása:

A 2. tétel miatt **n** merőleges **f**-re is és **h**-ra is (az $\mathbf{n}, \mathbf{f}$ és $\mathbf{n}, \mathbf{h}$ egyenespárok általában kitérők), de ha merőleges az $\underline{\mathbf{S}}$ sík két metsző egyenesére (**f**-re és **h**-ra), akkor az 1. tétel miatt merőleges magára az $\underline{\mathbf{S}}$ síkra is.

Persze „baj” van, ha **h** és **f** nem metsző egyenesek, azaz ha $\underline{\mathbf{S}}$ párhuzamos az $\mathbf{x}_{1,2}$-vel. Ebben az esetben a feladatot transzformálással oldjuk meg.



2.4. ábra. Egyenesre merőleges sík szerkesztése

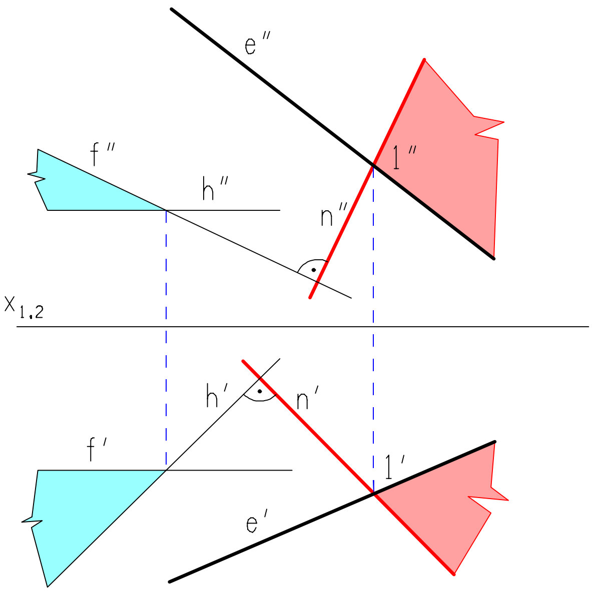
2.2. Feladat. *Adott az* **R** *pont és az* **a** *egyenes. Szerkesszünk az* **R** *pontból az* **a** *egyenesre merőleges síkot!*

Megoldás. (2.4. ábra) Rajzoljuk meg a keresett síknak az **R** pontra illeszkedő **h**, **f** fővonalait!

Ha **a** merőleges az $\mathbf{x}_{1,2}$-re, azaz profilegyenes, **h** és **f** egybeeső egyenesekként nem határoznák meg a keresett síkot. Ebben az esetben a feladatot transzformálással oldjuk meg.

Két egyenes merőlegessége (erre már van egy definíciónk, de most szerkeszteni akarjuk, ezért a sík és egyenes jól szerkeszthető merőlegességére fogjuk visszavezetni): *Két egyenes merőleges egymásra, ha az egyik illeszkedik egy, a másik egyenesre merőleges síkra.*

Két sík merőlegessége (a sík és egyenes jól szerkeszthető merőlegességére visszavezetve): *Két sík merőleges egymásra, ha az egyik illeszkedik egy, a másik síkra merőleges egyenesre.*



2.5. ábra. Síkra merőleges sík szerkesztése

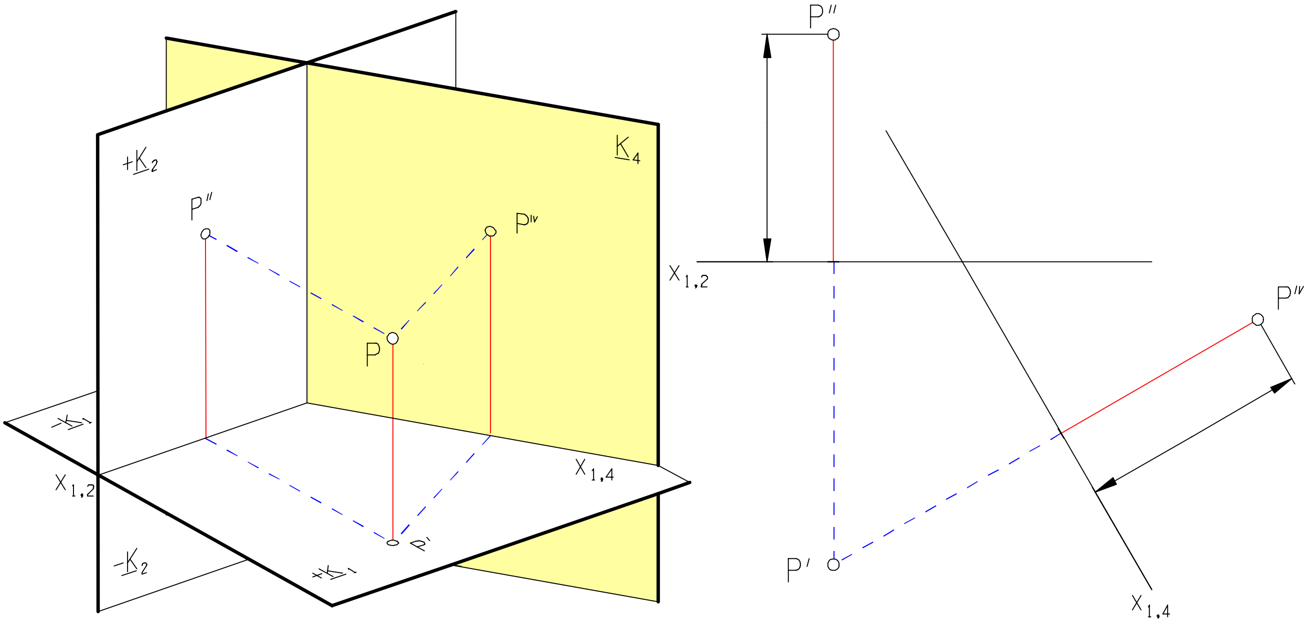
2.3. Feladat. *Adott az* **e** *egyenes, valamint* **h** *és* **f** *fővonalaival az* $\underline{\mathbf{S}}$ *sík. Szerkesszünk az* **e** *egyenesre illeszkedő és az* $\underline{\mathbf{S}}$ *síkra merőleges* $\underline{\mathbf{M}}$ *síkot!*

Megoldás. (2.5. ábra) Az **e** egyenes tetszőleges **1** pontjából állítsunk **n** merőlegest az $\underline{\mathbf{S}}$ síkra. **e** és **n** meghatározza a keresett $\underline{\mathbf{M}}$ síkot: $\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{e}, \mathbf{n})$.

Vetítősíkra fővonal, fővonalra vetítősík merőleges. Ábrázolja!

2.2. A képsíkrendszer transzformációja

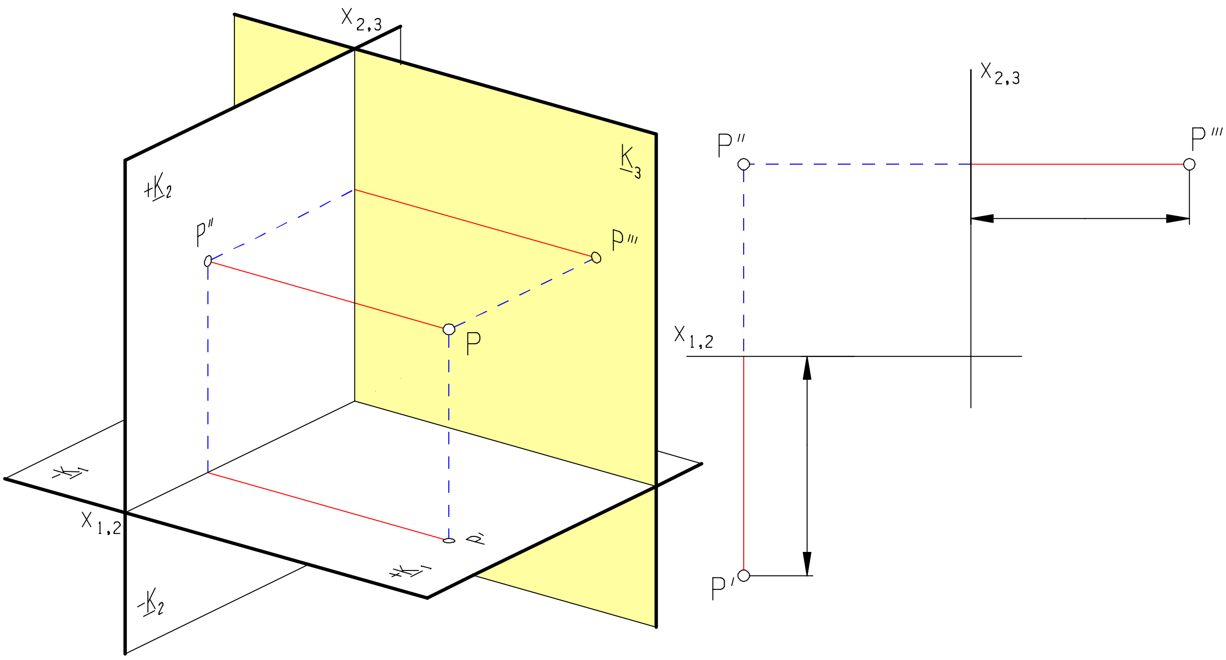
Egy meglévő képsíkrendszerről egy új képsíkrendszerre való áttérést a képsíkrendszer transzformációjának nevezzük. A transzformáció során a meglévő képsíkok egyikére merőlegesen vezetjük be az új képsíkot, ezek alkotják az új rendszert, a másik régi képsíkot pedig elhagyjuk. Így beszélhetünk *megmaradó*, *új* és *elmaradó* képsíkról, illetve képről. Az új képsíkot az új tengellyel (az új képsíknak a megmaradó képsíkra eső vetületével) adjuk meg. A térelemek új képének a megszerkesztését a térelemek transzformálásának nevezzük. Alapvető a pont transzformálása, mert az egyenest két, a síkot pedig három (nem kollineáris) pontjával transzformálhatjuk.



2.6. ábra. A negyedik képsík (bal oldali ábra); Pont negyedik képe (jobb oldali ábra)

A pont új (transzformált) képének szerkesztése (2.6. ábra):

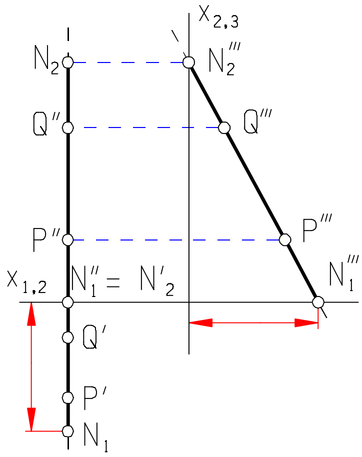
- a megmaradó képből az új tengelyre merőleges rendező egyenest rajzolunk;
- a rendező egyenesre (nagyság és irány szerint) felmérjük az elmaradó rendező szakaszt.



2.7. ábra. A harmadik (profil) képsík (bal oldali ábra); Pont harmadik képe (jobb oldali ábra)

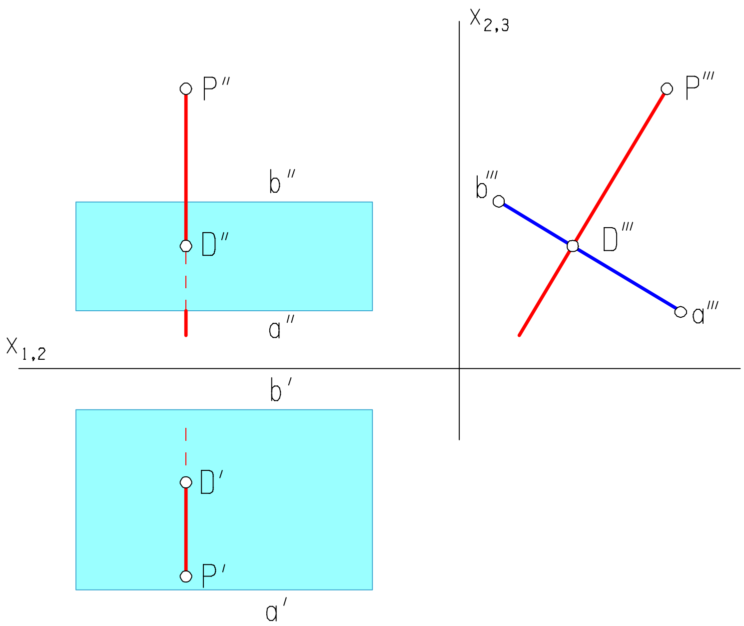
Az $\mathbf{x}_{1,2}$ tengelyre merőleges *profil* képsík a $\underline{\mathbf{K}}_3$, harmadik képsík (2.7. ábra). Erre transzformálva a profilegyenesekkel és harmadik vetítősíkokkal kapcsolatos feladatok válnak könnyen megoldhatóvá. Például:

- illesztés profilegyenesre (a 2.8. ábrán a $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ pontokkal adott profilegyenes nyompontjait szerkesztettük meg),



2.8. ábra. Profilegyenes nyompontjai

- profilegyenesre, vagy harmadik vetítősíkra merőleges térelem szerkesztése (a 2.9. ábrán 3. vetítősíkra állítottunk merőlegest az adott $\mathbf{P}$ pontból).



2.9. ábra. Merőleges állítás harmadik vetítősíkra

A képsíkrendszer transzformációjával elérhető, hogy egy adott egyenes, vagy sík az új rendszerben *különleges helyzetű* legyen:

- általános helyzetű *egyeneshez* az első transzformációval párhuzamos ($\underline{\mathbf{K}}_4$), a másodikkal merőleges ($\underline{\mathbf{K}}_5$) képsíkot vehetünk fel;
- általános helyzetű *síkhoz* az első transzformációval merőleges ($\underline{\mathbf{K}}_4$), a másodikkal párhuzamos ($\underline{\mathbf{K}}_5$) képsíkot vehetünk fel.

Általános helyzetű adatokra vonatkozó feladat transzformációval történő megoldásának menete:

- valamelyik adott egyenest, vagy síkot különleges helyzetbe (főállásba, vagy vetítő helyzetbe) transzformáljuk;
- az új rendszerben (a különleges helyzetet kihasználva) megoldjuk a feladatot;
- az eredményt visszatranszformáljuk az adatok eredeti rendszerébe.

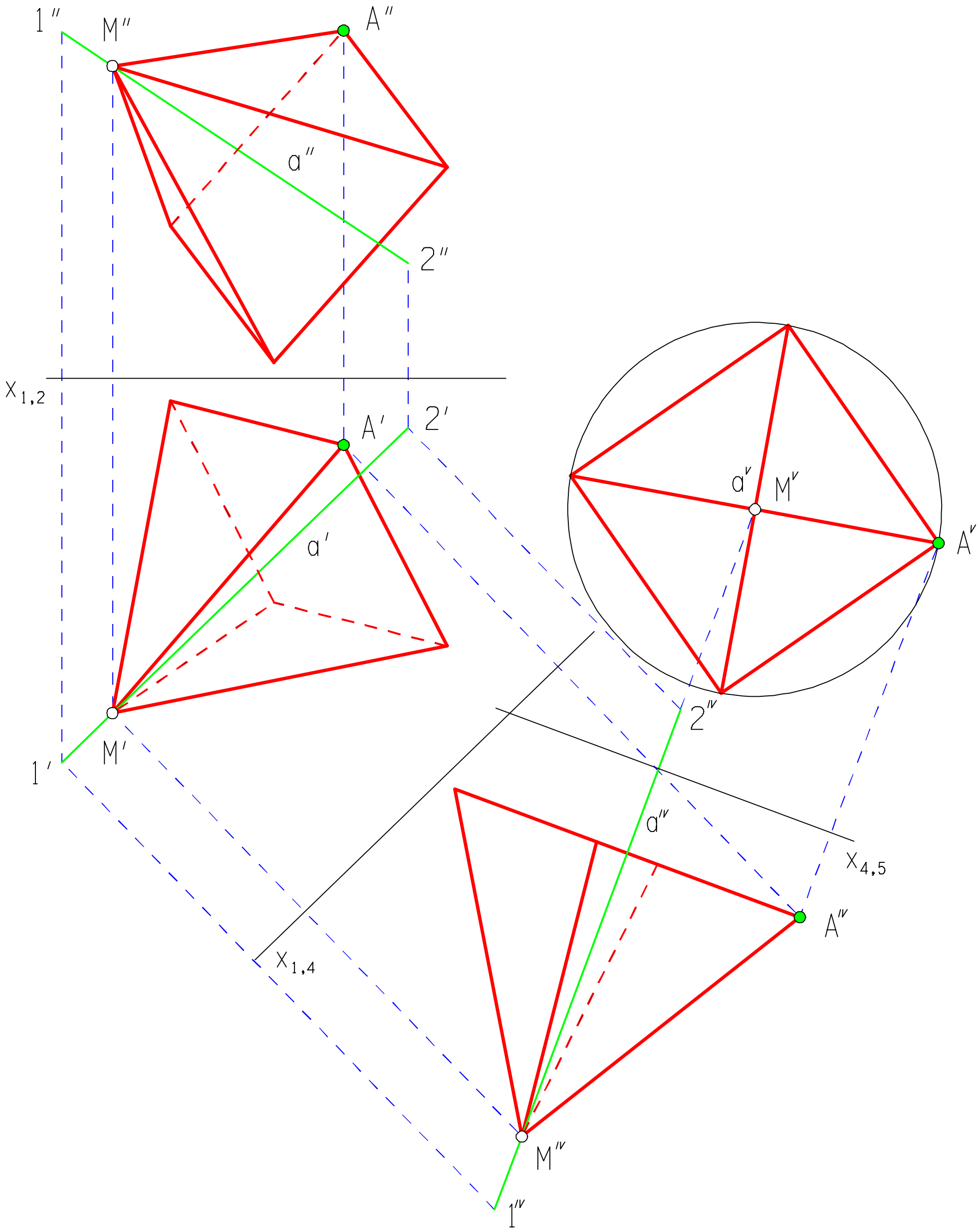
Az eddig tanult szerkesztések közül oldjuk meg transzformációval a sík és egyenes döféspontjának és a két sík metszésvonalának a szerkesztését! Mindkét esetben transzformáljuk a metszősíkot vetítősíkká!

2.4. Feladat. *Adott egy szabályos négyoldalú gúla* **a** *szimmetriatengelye, alapnégyzetének* **A** *csúcsa és* m *magassága. Szerkesszük meg a gúlát! (A gúlát a 2.6.2. pontban definiáljuk.)*

Megoldás. Alapötlet: transzformáljuk az **a** szimmetriatengelyt vetítősugárrá (2.10. ábra)!

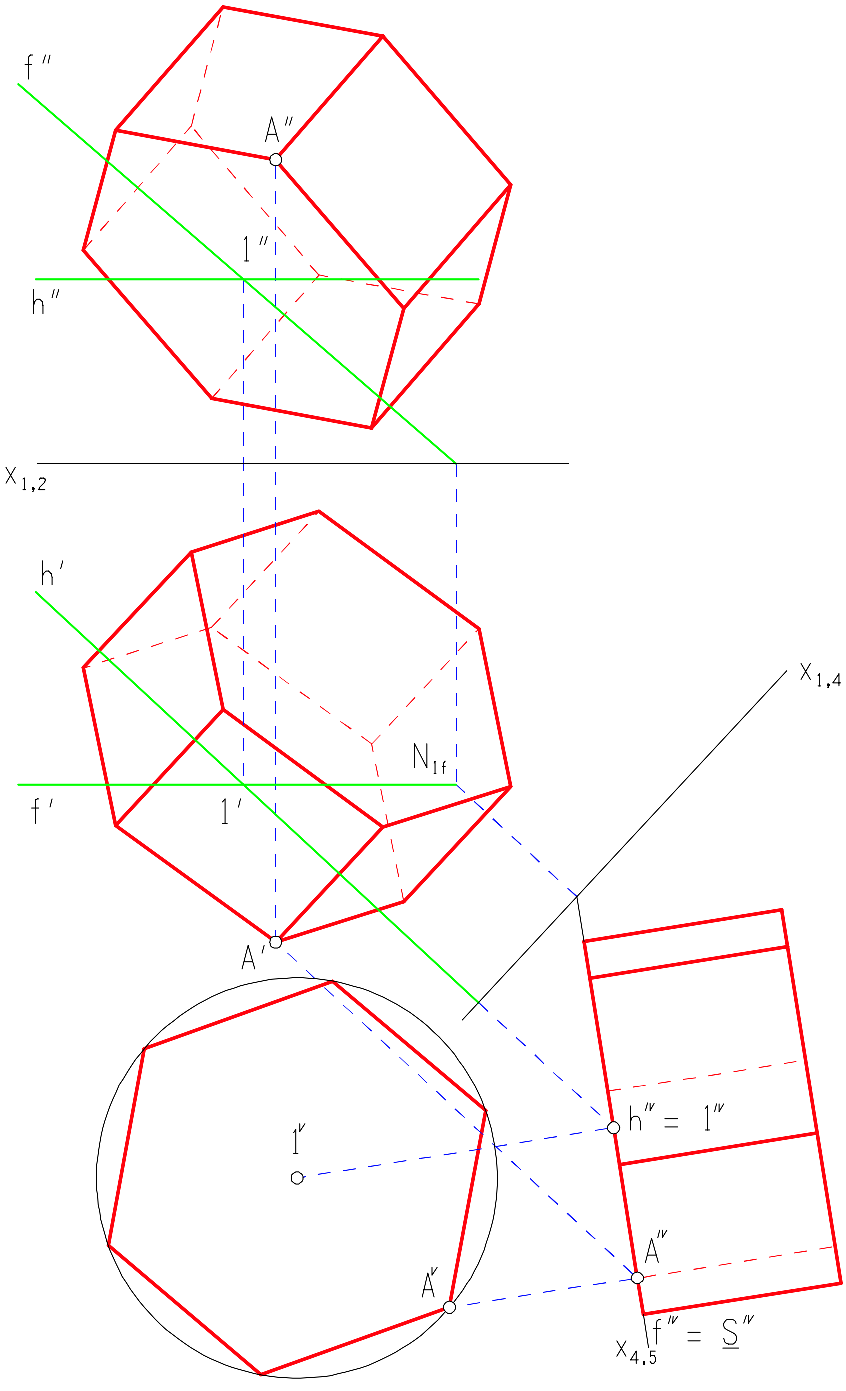
- $\underline{\mathbf{K}}_4$ párhuzamos **a**-val ($\mathbf{x}_{1,4}$ párhuzamos **a** első képével), transzformáljuk az **A** pontot és az **a** egyenest (az utóbbit két pontjával);
- $\underline{\mathbf{K}}_5$ merőleges **a**-ra ($\mathbf{x}_{4,5}$ merőleges **a** negyedik képére), transzformáljuk az **A** pontot és az **a** egyenest (**a** ötödik vetítősugár, ötödik képe egy pont);
  - a negyedik-ötödik képek rendszerében szerkesszük meg a gúlát:
  - az alapnégyzet ötödik képe valódi nagyságú;
  - a gúla magassága a negyedik képen látszik;
- transzformáljuk vissza az eredményt:
  - előbb az első;

– majd a második képre;



2.10. ábra. Gúla szerkesztése a szimmetriatengely vetítőhelyzetbe transzformálásával

- húzzuk ki az egyes képeket láthatóság szerint! Ha következetesen jártunk el, bármely rendszerben vizsgáljuk egy kép láthatóságát, azonos eredményre jutunk.



2.11. ábra. Hasáb szerkesztése az alaplap síkjának főállásba transzformálásával

2.5. Feladat. *Adott egy szabályos hatoldalú hasáb alaplapjának* **A** *síkja az alaplap* **1** *középpontjára illeszkedő* **h**, **f** *fővonalaival és az alaplap* **A** *csúcsának* **A′** *első képe. Szerkesszük meg a hasábot, ha oldalélei az alapélekkel egyenlők! (A hasábot a 2.6.1. pontban definiáljuk.)*

Megoldás. A megoldás hasonló az előzőhöz: transzformáljuk az alaplap **A** síkját főállásba (2.11. ábra)!

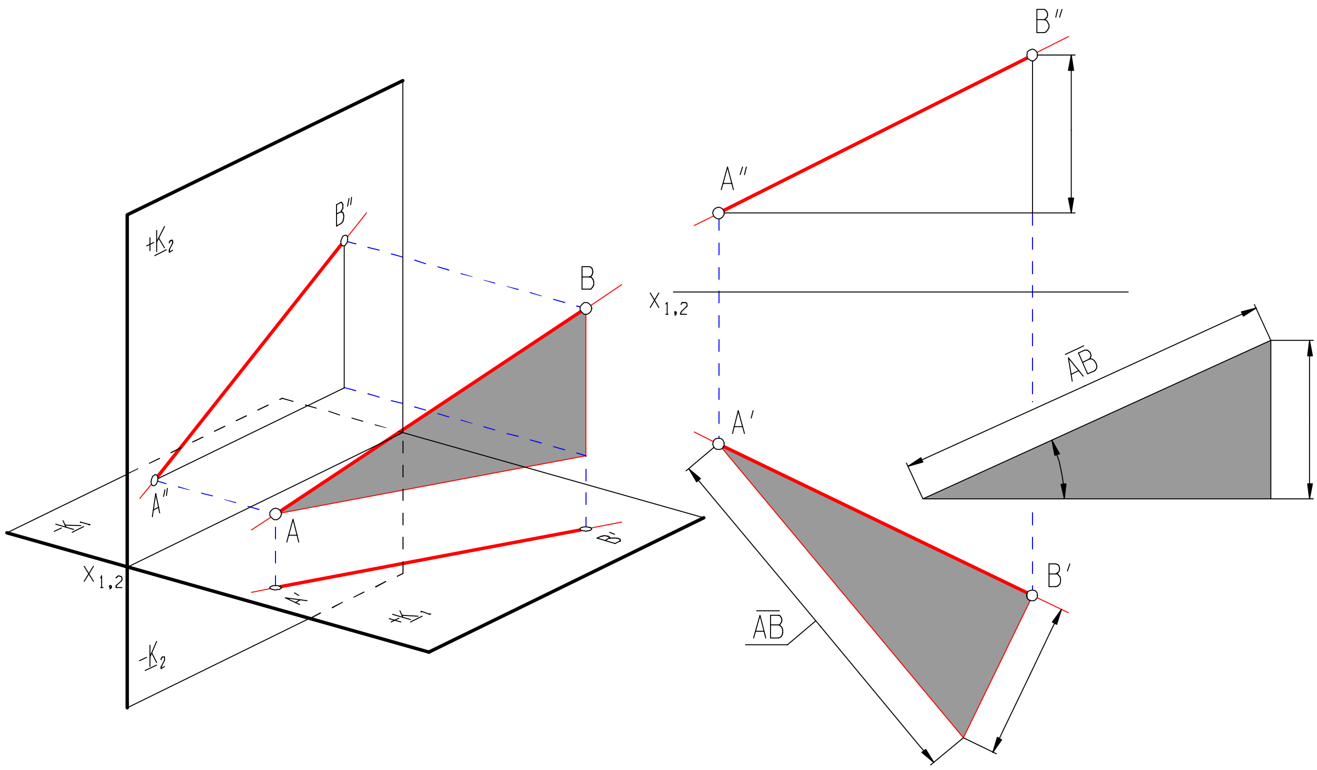
- $\underline{\mathbf{K}}_4$ merőleges $\underline{\mathbf{A}}$-ra ($\mathbf{x}_{1,4}$ merőleges $\mathbf{h}'$-re), transzformáljuk az $\underline{\mathbf{A}}$ síkot és vetítsük rá az $\mathbf{A}$ pontot (itt könnyebb az $\mathbf{A}$ pontot az $\underline{\mathbf{A}}$ síkra illeszteni, mint az eredeti $\underline{\mathbf{K}}_1$, $\underline{\mathbf{K}}_2$ rendszerben);
- $\underline{\mathbf{K}}_5$ párhuzamos $\underline{\mathbf{A}}$-val ($\mathbf{x}_{4,5}$ egybeesik $\underline{\mathbf{A}}$ negyedik képével), transzformáljuk az $\mathbf{1}$ és az $\mathbf{A}$ pontot;
- a negyedik-ötödik képek rendszerében szerkesszük meg a hasábot:
  - az alaphatszög ötödik képe valódi nagyságú;
  - a hasáb magassága a negyedik képen látszik;
- transzformáljuk vissza az eredményt:
  - előbb az első;
  - majd a második képre;
- húzzuk ki az egyes képeket láthatóság szerint!

2.3. Távolság, különbségi háromszög, egyszerűbb távolságfeladatok

Két térelem távolságán a legközelebbi pontjaik közt mérhető távolságot értjük, (metsző, vagy illeszkedő térelemek távolsága 0).

Alapeset a két pont távolsága, vagyis az általuk meghatározott szakasz hossza. A többi távolságfeladatot is erre fogjuk (az előző definícióval) visszavezetni.

2.3.1. A különbségi háromszög



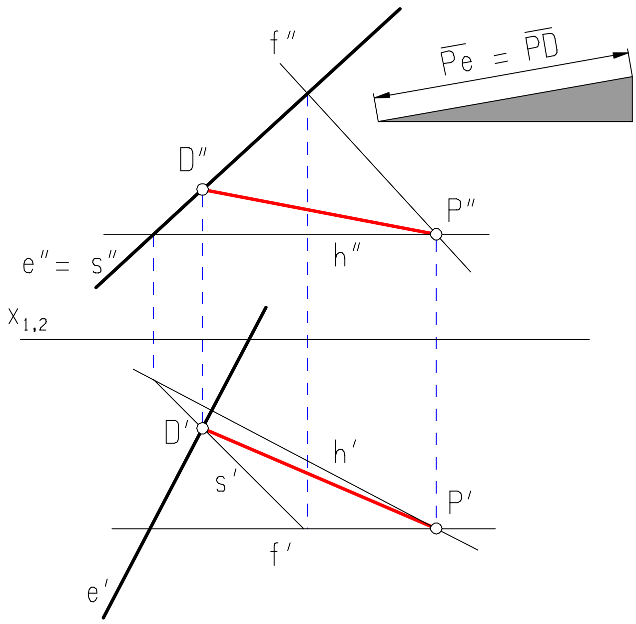
2.12. ábra. A különbségi háromszög (bal oldali ábra); Szakasz hosszának szerkesztése különbségi háromszöggel (jobb oldali ábra)

2.6. Feladat. *Adott az* **A**, **B** *pont, szerkesztendő az* $\overline{\mathbf{AB}}$ *távolságuk.*

Megoldás. (2.12. ábra)

- Toljuk fel a szakasz első képét a szakaszig. Egy derékszögű háromszöget kapunk, amelynek átfogója az adott szakasz, egyik (vízszintes) befogója a feltolt első kép, másik (függőleges) befogója pedig a végpontok első képsíktól mért távolságainak a különbsége (erről a befogóról kapta a *különbségi háromszög* elnevezést). Mivel az első képsíktól mért távolságok megegyeznek a második rendezőkkel, ez a különbség a második képről lemérhető. A térbeli szakasz és a hozzátolt kép közötti szög a szakasznak a képsíkkal bezárt *képsíkszögével* egyállású. Ezért a különbségi háromszögről az is leolvasható, hogy a szakasz vetülete a térbeli hossznak és a képsíkszög koszinuszának a szorzata (tehát csak a képsíkkal párhuzamos szakasz látszik valódi nagyságban, minden más esetben a vetület rövidebb).
- A különbségi háromszöget bármely két független adatából megszerkeszthetjük. A szerkesztést bárhol (még a rajzlapon kívül is) elvégezhetjük, de praktikus a szakasz vetületeihez kapcsolni.

Szakasz hossza transzformálással is megszerkeszthető. Igazolja, hogy a két szerkesztés eredménye megegyezik!



2.13. ábra. Pont és egyenes távolsága merőleges állításával

2.7. Feladat. *Adott a* **P** *pont és az* **e** *egyenes, szerkessze meg a távolságukat!*

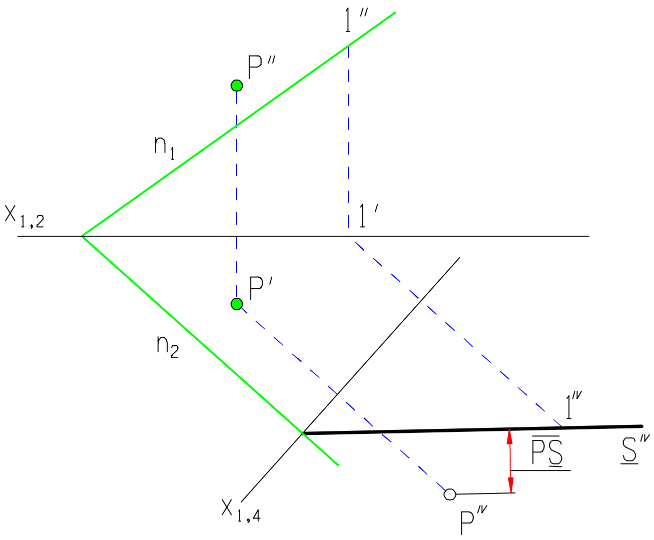
Megoldás. (2.13. ábra)

- állítson **P**-ből **e**-re merőleges **<u>M</u>** síkot;
- szerkessze meg a $\mathbf{D}(\underline{\mathbf{M}}, \mathbf{e})$ döféspontot;
- a keresett távolság a **PD** szakasz hossza.

2.8. Feladat. *Adott a* **P** *pont és az* **<u>S</u>** *sík, szerkessze meg a távolságukat!*

Megoldás.

- állítson **P**-ből **<u>S</u>**-re merőleges **n** egyenest;
- szerkessze meg a $\mathbf{Q}(\underline{\mathbf{S}}, \mathbf{n})$ döféspontot;
- a keresett távolság a **PQ** szakasz hossza.



2.14. ábra. Pont és sík távolsága transzformálással

Másik megoldás (2.14. ábra):

- transzformáljon az **S̲**-re merőleges új $\underline{\mathbf{K}}_4$ képsíkra;
- a keresett távolság a negyedik képen valódi nagyságban látszik.

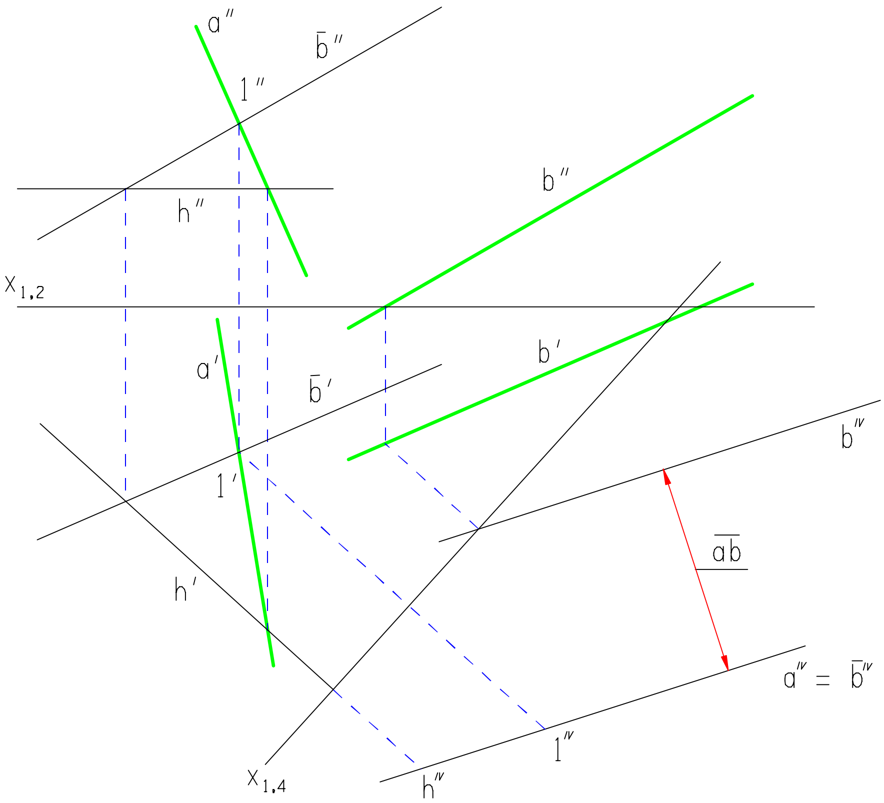
Két kitérő egyenest metsző harmadik egyenes az előbbiek transzverzálisa. Azt a transzverzálist, amelyik a két kitérő egyenes mindegyikére még merőleges is, a két kitérő egyenes normáltranszverzálisának nevezzük.

Két kitérő egyenes távolsága a normáltranszverzálisukon a két metszéspont közé eső *normáltranszverzális szakasz* hossza.

2.9. Feladat. *Adottak a képsíkrendszerhez képest általános helyzetű* **a** *és* **b** *kitérő egyenesek, szerkessze meg a távolságukat!*

Megoldás.

- Transzformálja vetítősugárrá az **a** egyenest (kétszeri transzformálással);
- az egyenesek ötödik képének (egy pontnak és egy egyenesnek) a távolsága megadja a két kitérő egyenes távolságát, ugyanis az a normáltranszverzális szakasz ötödik képe;
- ha szerkesztendő a normáltranszverzális is, transzformálja vissza az eredeti rendszerbe.



2.15. ábra. Kitérő egyenesek távolsága transzformálással

Másik megoldás (2.15. ábra):

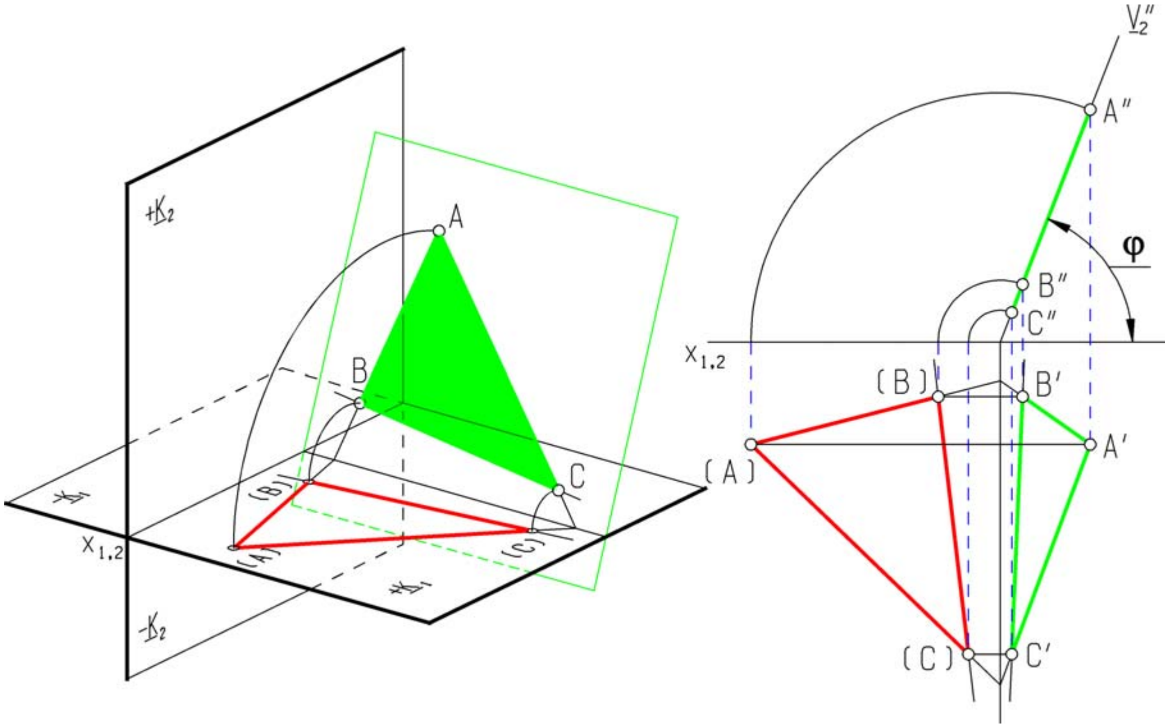
- toljuk el a **b** egyenest (önmagával párhuzamosan) az **a** egyenest metsző helyzetbe;
- az így kapott metsző egyenesekkel meghatározott síkot transzformáljuk vetítősíkká;
- az egyenesek negyedik képének (két párhuzamos egyenesnek) a távolsága megadja a két kitérő egyenes távolságát, ugyanis a normáltranszverzális párhuzamos a $\underline{\mathbf{K}}_4$ negyedik képsíkkal. (A normáltranszverzális pontos helyét azonban most csak egy további transzformációval szerkeszthetnénk meg.)

2.4. A sík leforgatása, a merőleges tengelyes affinitás néhány tulajdonsága

Egy síkbeli alakzat csak akkor látszik valódi nagyságban, ha síkja párhuzamos a képsíkkal. Ez elérhető (legfeljebb kétszeri) transzformálással is, vagy a sík képsíkkal párhuzamos helyzetbe, azaz főállásba forgatásával. Mivel a forgatás közben a forgatás tengelye helyben marad, ezért az már eleve a képsíkkal párhuzamos, vagyis fővonal, vagy nyomvonal kell legyen.

2.10. Feladat. *Határozzuk meg a* $\underline{\mathbf{V}}_2$ *második vetítősíkban lévő* **ABC** *háromszög valódi nagyságát!*

Megoldás. (2.16. ábra) Válasszuk a forgatás tengelyéül $\underline{\mathbf{V}}_2$ első nyomvonalát és forgassuk akörül a háromszöget az első képsíkba. Forgatás közben a pontok tengelytől mért távolsága nem változik, tehát a tengely körül körpályákat írnak le, amelyek felülnézetben a tengelyre merőleges egyeneseknek látszanak. Szerencsére a pontoknak a forgatás tengelyétől mért távolsága a második képen közvetlenül lemérhető.



2.16. ábra. Vetítősík leforgatása (bal oldali ábra); Merőleges tengelyes affinitás a síkidom képe és leforgatottja között (jobb oldali ábra)

A síkidom képe és leforgatottja közötti megfelelés (az első képen) hasonlít a tengelyes tükrözésre, csak most a tengely két oldalán található távolság nem egyenlő, hanem csak arányos (arányuk a képsíkszög koszinusza). Ha ezt a megfelelést elvonatkoztatjuk (absztraháljuk) a forgatástól, a két síkidom viszonyát *merőleges tengelyes (perspektív) affinitásnak* nevezzük.

A fogalom általánosításával kapjuk a *ferde tengelyes (perspektív) affinitást*, amelyben a megfelelő pontokat összekötő egyenesek már nem merőlegesek a tengelyre (pl. egy síkidom két képe között fennálló affinitás tengelye a síknak a koincidencia egyenese), ha pedig tengely sincs (pl. egy síkidom transzformálása során kapott két különböző rendszerbeli képe között fennálló affinitás), az (általános) *affinitást.*

Egy egyenesre illeszkedő három pont osztóviszonya, vagy egyszerűviszonya a megfelelő irányított távolságaik hányadosa: $(\mathbf{ABC}) = \overrightarrow{\mathbf{AC}}/\overrightarrow{\mathbf{BC}}$.

2.4.1. Az affinitás tulajdonságai

Az alábbiakban az affinitás tulajdonságait a fenti általánosítás rendjében csoportosítottuk:

A *merőleges tengelyes affinitás* tulajdonságai:

- általános tulajdonságok:
  - folytonos leképezés;
  - egyenestartó leképezés;
  - illeszkedéstartó leképezés;
  - az osztóviszony invariáns;
  - a párhuzamosság invariáns;
  - végtelen távoli pont megfelelője végtelen távoli pont.
- tengellyel kapcsolatos tulajdonságok:
  - a tengely pontonként fix;
  - a megfelelő egyenesek a tengelyen metszik egymást;
  - a tengellyel párhuzamos egyenes megfelelője a tengellyel párhuzamos;
  - a megfelelő pontokat összekötő egyenesek párhuzamosak;
  - a megfelelő pontok tengelytől mért távolságának az aránya állandó.
- az *affinitás merőleges* ha:
  - a megfelelő pontokat összekötő egyenesek az affinitás tengelyére merőlegesek.

A fenti felsorolásból elhagyva az affinitás merőlegességére vonatkozó tulajdonságot, maradnak a (ferde) *tengelyes affinitás* tulajdonságai, és ha még a tengelyre vonatkozó tulajdonságokat is elhagyjuk, akkor maradnak az (általános) *affinitás* tulajdonságai.

A síknak síkra (esetleg önmagára) való olyan folytonos, kölcsönösen egyértelmű leképezését, amelyben pontnak pont, egyenesnek egyenes, illeszkedésnek illeszkedés felel meg, kollineációnak nevezzük.

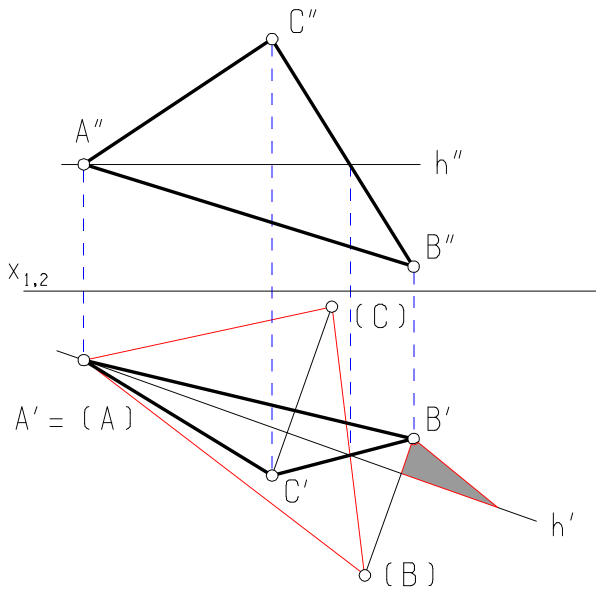
Az affinitás az euklideszi sík legáltalánosabb kollineációja.

2.4.2. Affinitás megadása

Minél általánosabb az affinitás, annál több a megadható, szabad paramétere.

- A *merőleges tengelyes affinitást* meghatározza:
  - a tengelye és a megfelelő pontok tengelytől mért távolságának az arányszáma (leforgatásnál ez a sík képsíkszögének a koszinusza);
- A *tengelyes affinitást* meghatározza:
  - a tengelye és egy megfelelő pontpárja;
- Az (általános) *affinitást* meghatározza:
  - három általános helyzetű (nem kollineáris) pontpárja (tehát két háromszög mindig tekinthető affin megfelelőnek).

Általános helyzetű sík leforgatottját (visszaforgatottját) úgy szerkesztjük meg, hogy egy pont leforgatottját (visszaforgatottját) a forgatási sugár különbségi háromszögével megszerkesztjük, a továbbiakra pedig alkalmazzuk az affinitás tulajdonságait.

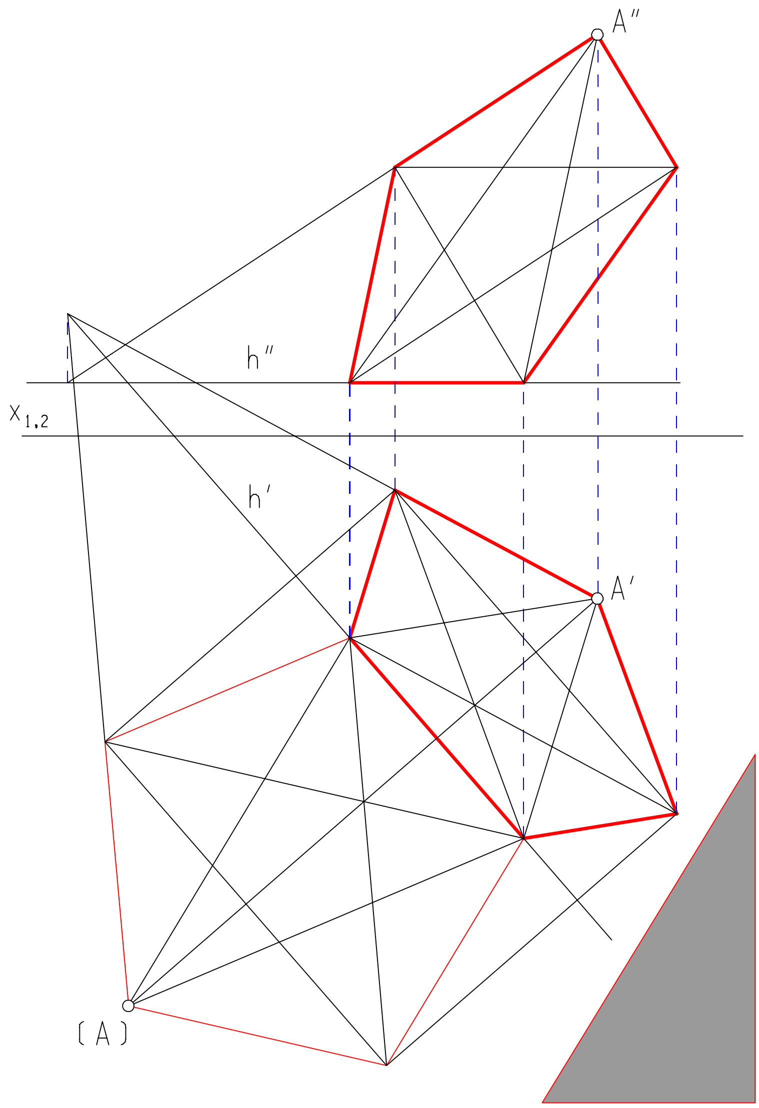


2.17. ábra. Általános helyzetű háromszög leforgatása

2.11. Feladat. *Határozzuk meg az általános helyzetű* **<u>S</u>** *síkban lévő* **ABC** *háromszög valódi nagyságát!*

Megoldás. (2.17. ábra)

- Válasszuk a forgatás tengelyéül **<u>S</u>** valamelyik, pl. az **A** pontra illeszkedő **h** első fővonalát, és forgassuk akörül a háromszöget az első képsíkkal párhuzamos helyzetbe. $\mathbf{A}' = (\mathbf{A})$ mert **A** illeszkedik a forgatás tengelyére;
- szerkesszük meg különbségi háromszöggel a **B** pont tengelytől mért távolságát és mérjük fel azt a tengelytől a $\mathbf{B}'$ ponton átmenő tengelyre merőleges egyenesre, így kapjuk a (**B**) pontot;
- (**C**) megszerkesztéséhez használjuk fel, hogy a háromszög **BC** oldala és annak (**B**)(**C**) leforgatottja a forgatás tengelyén metszik egymást.

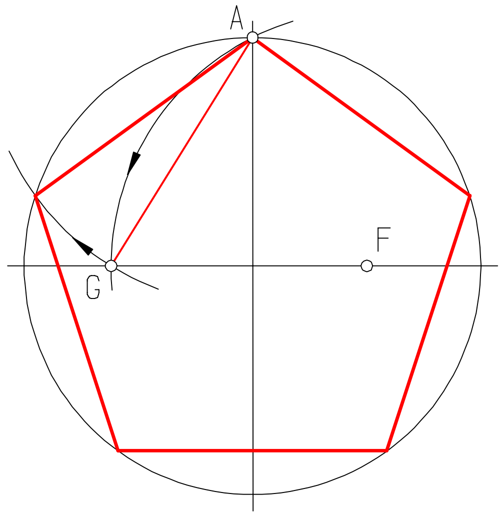


2.18. ábra. Szabályos ötszög visszaforgatása

2.12. Feladat. *Adott a* **h** *horizontális fővonal körül leforgatott szabályos ötszög és* **A** *csúcsának az első képe. Szerkesszük meg az ötszög hiányzó képeit (2.18. ábra)!*

Az adottnak tekintett szabályos ötszöget úgy szerkesztettük meg, hogy

- vettük a kör két merőleges átmérőjét;
- az egyik átmérőn vett sugár **F** felezőpontjától a másik átmérő **A** végpontjáig mért távolságot rámértük a felezőponttól az első átmérőre;
- az így kapott $\overline{\mathbf{AG}}$ távolság lett a körbe írt szabályos ötszög oldalhossza (2.19. ábra).

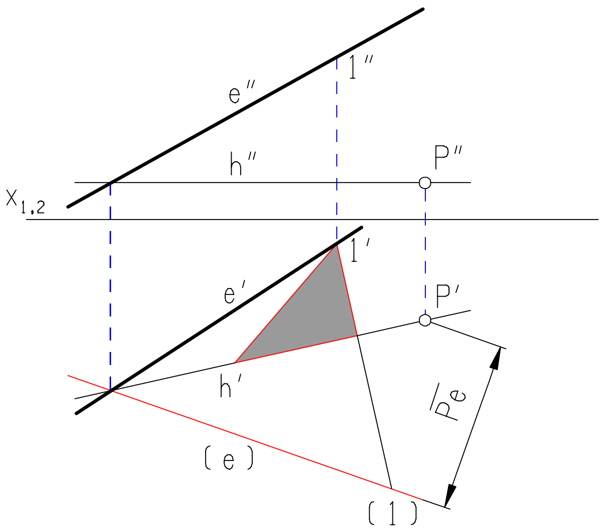


2.19. ábra. Szabályos ötszög szerkesztése

Megoldás.

- Az **A** csúcs első képének és leforgatottjának a forgatás tengelyétől mért távolsága a különbségi háromszög két oldala, ezekből a különbségi háromszög és így a második rendezők különbsége megszerkeszthető (két lehetőség közül az ábrán a dőlt síkot választottuk);
- az ötszög első képét a merőleges tengelyes affinitás tulajdonságainak a felhasználásával szerkesztettük;
- az ötszög második képét az elemek (**h**, **A**) síkra történő illesztésével szerkesztettük.

Figyeljük meg, hogy az oldalak és átlók párhuzamossága invariáns!



2.20. ábra. Pont és egyenes távolsága a síkjuk leforgatásával

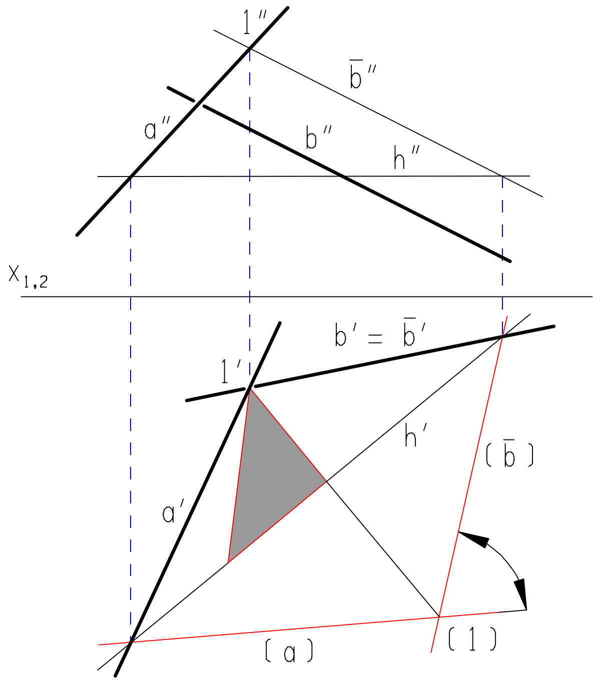
Szerkesszük meg adott pont és egyenes távolságát a síkjuk leforgatásával (2.20. ábra)!

2.5. Térelemek szöge

Egyenesnek, vagy síknak a képsíkkal bezárt szögét képsíkszögnek nevezzük.

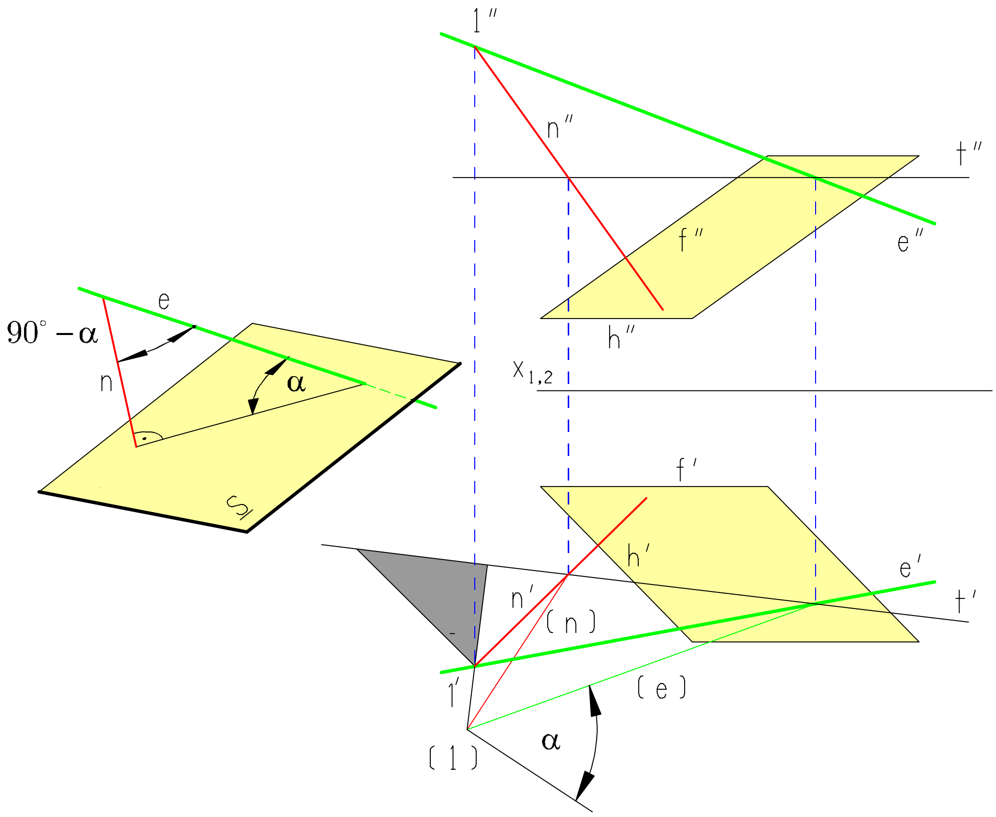
Egyenes képsíkszögét a különbségi háromszöggel (vagy főállásba transzformálással) szerkeszthetjük. Sík képsíkszöge az esésvonal képsíkszögével egyenlő.

Két metsző egyenes hajlásszögét a síkjuk leforgatásával szerkeszthetjük meg.



2.21. ábra. Két kitérő egyenes hajlásszöge

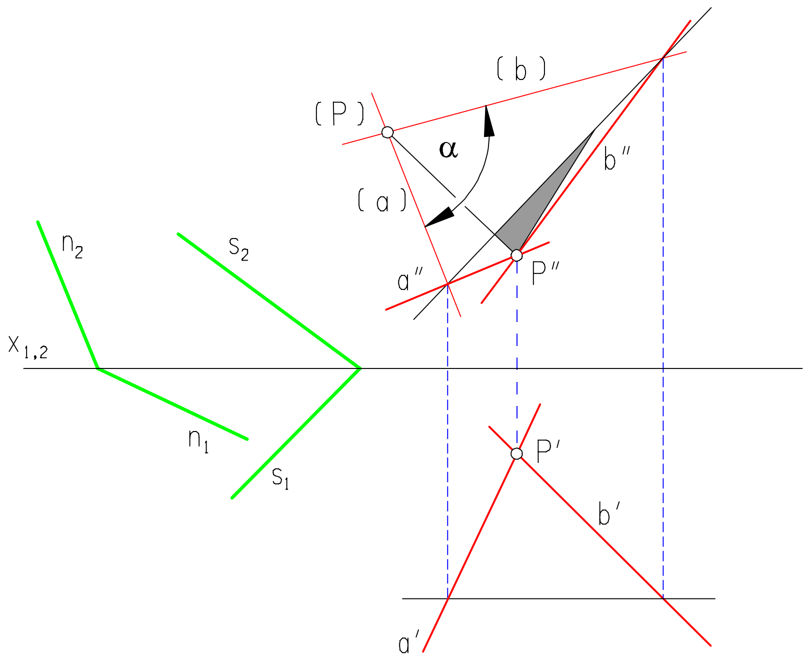
Két kitérő egyenes hajlásszögén a párhuzamosan közös pontba eltolt egyenesek szögét értjük (2.21. ábra).



2.22. ábra. Sík és egyenes hajlásszöge (bal oldali ábra); Sík és egyenes hajlásszögének szerkesztése pótszöggel (jobb oldali ábra)

Sík és egyenes hajlásszögén az egyenesnek a síkra eső merőleges vetületével bezárt szögét értjük.

Bár sík és egyenes hajlásszögét a fenti definíció szerint is megszerkeszthetnénk, egyszerűbb, ha e helyett az egyenes és a sík normálisa által bezárt szöget szerkesztjük meg (a síkjuk leforgatásával), a keresett szöget ennek a pótszögeként kapjuk (2.22. ábra).



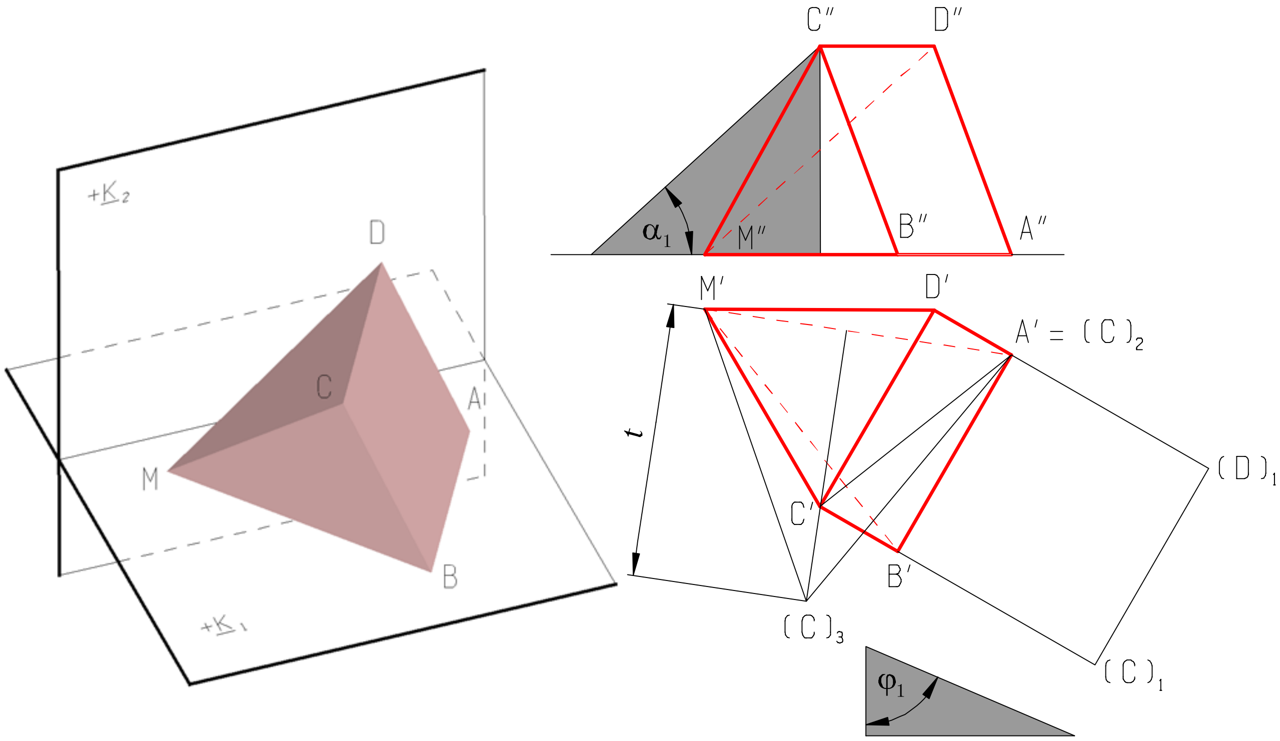
2.23. ábra. Két sík szögének szerkesztése a normálisaikkal

Két sík hajlásszögén az egyes síkokban a síkok metszésvonalára állított merőlegesek szögét értjük.

Két sík hajlásszöge egy tetszőleges pontból a síkokra állított merőlegesek szögeként is szerkeszthető (2.23. ábra).

2.13. Feladat. *Adott egy szabályos négyoldalú gúla első képsíkra illeszkedő* **ABM** *oldallapja. Ábrázolja a gúlát és szerkessze meg*

- *az alaplap első képsíkszögét;*
- *a* **C** *csúcsnak az* **MA** *éltől mért távolságát;*
- *az* **MC** *él első képsíkszögét.*



2.24. ábra. Képsíkon fekvő gúla (bal oldali ábra); Gúla felépítése és méretei (jobb oldali ábra)

Megoldás. (2.24. ábra) Képzeljük a gúla hálózatát az első képsíkba terítve! Ebből megrajzoltuk az alapnégyzet leforgatottját, a **BCM** oldallapot pedig ráforgattuk az **ABM** oldallapra. Visszaforgatás közben a kétféleképpen leforgatott **C** csúcs a két különböző forgatási tengelyre merőleges kör mentén mozog. Ezek vetületének metszéspontja lesz a $\mathbf{C}'$. Az alapnégyzet **AB** forgatási tengelye és a $(\mathbf{C})_1, \mathbf{C}'$ pontpár meghatározza azt a merőleges tengelyes affinitást, amivel az alaplap első képét szerkeszthetjük.

- A $(\mathbf{C})_1, \mathbf{C}'$ pontpár meghatározza a forgatás sugarának különbségi háromszögét, amelynek egyik befogója **C** magasságát, szemközti φ_1 szöge pedig az alaplap első képsíkszögét határozza meg;
- a **C** csúcsnak az **MA** éltől mért t távolságát az **AMC** sík **AM** nyomvonal körüli leforgatásával;
- az **MC** él α_1 első képsíkszögét pedig az él második képéhez kapcsolt különbségi háromszöggel szerkesztettük meg.

2.6. Hasáb és gúla metszése egyenessel és síkkal, centrális kollineáció

2.6.1. Hasáb

Vegyünk egy síkbeli sokszöget, amit a továbbiakban alapsokszögnek nevezünk! Hasábot kapunk,

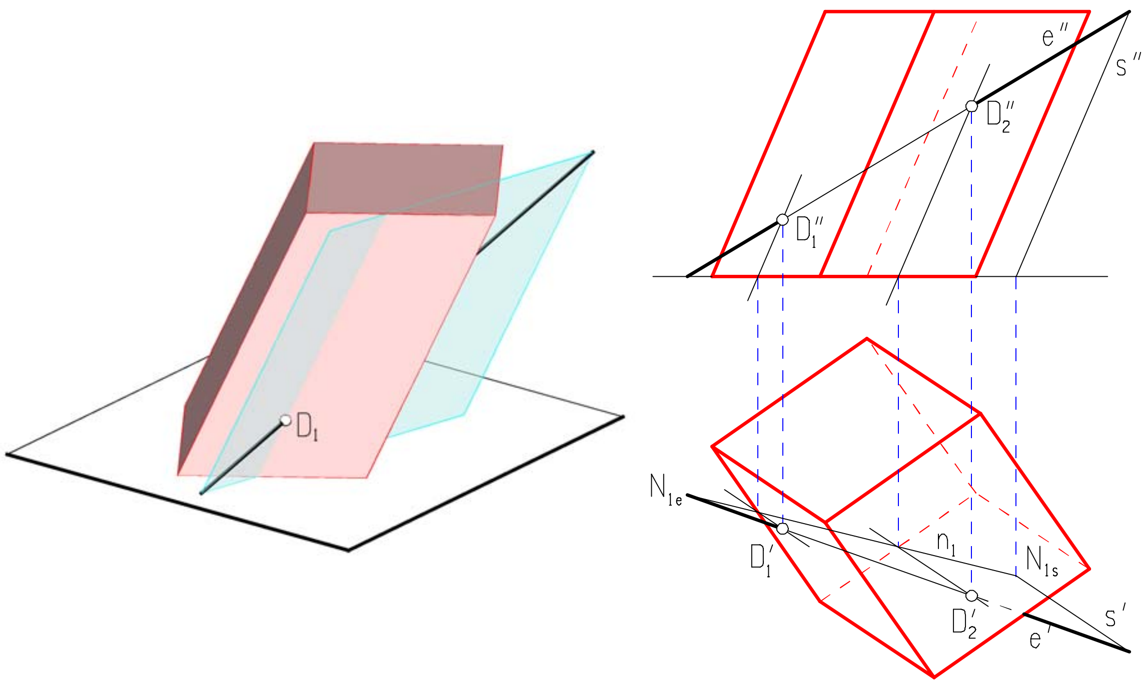
- *ha az alapsokszög kerületén egy, a síkjával nem párhuzamos szakaszt önmagával párhuzamosan körbe tolunk,*
- *vagy ha az alapsokszöget egy a síkjával nem párhuzamos szakasz mentén önmagával párhuzamosan eltolunk.*

A hasábot egyenesnek nevezzük, ha az oldaléle az alaplap síkjára merőleges. Az ilyen hasáb oldallapjai téglalapok.

Szabályosnak mondjuk azt az egyenes hasábot, amelynek az alaplapja szabályos.

Az ilyen hasáb oldallapjai egybevágó téglalapok.

Hasáb metszése egyenessel

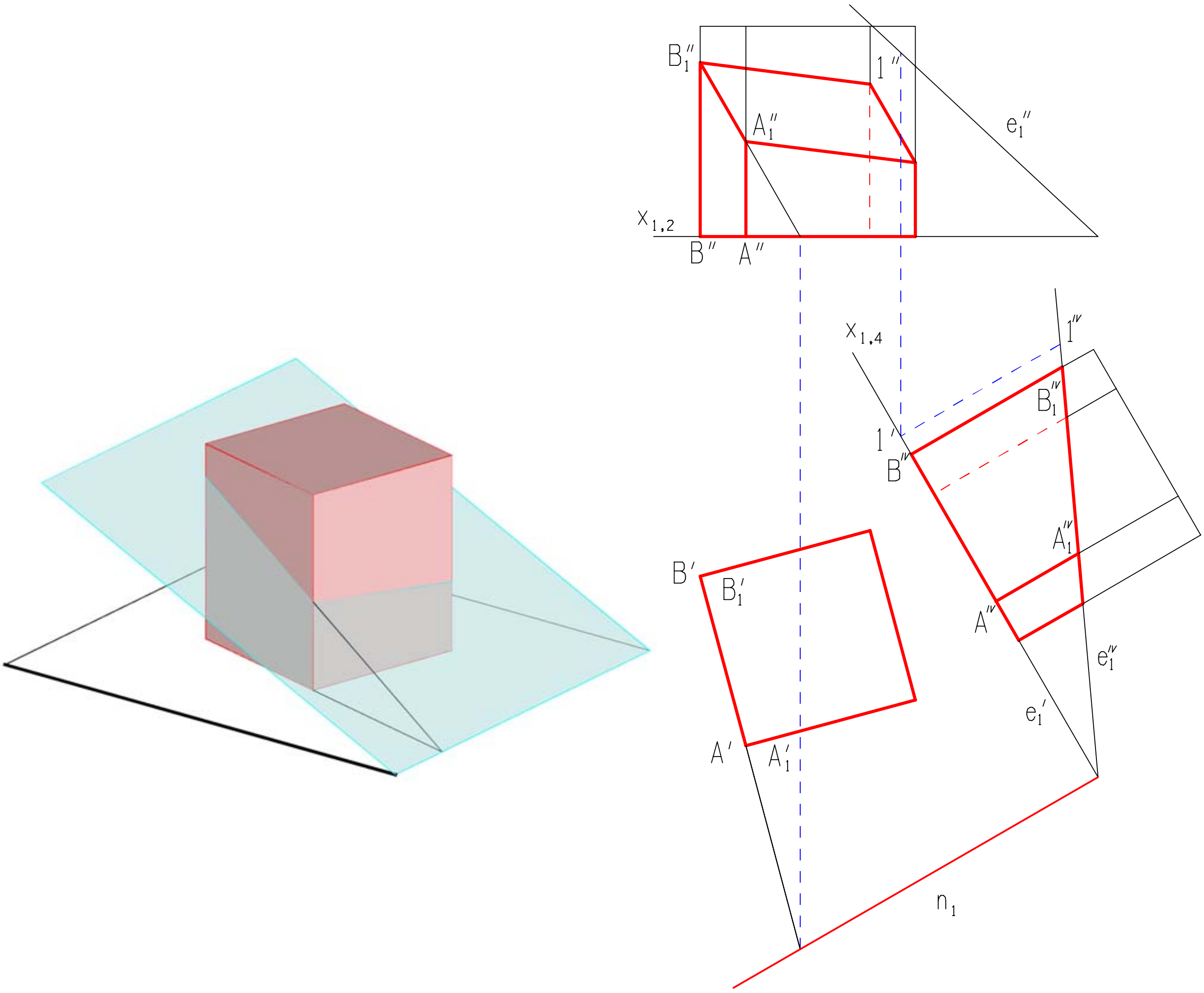


2.25. ábra. Hasáb döfése egyenessel (bal oldali ábra); Hasáb döféspontjainak szerkesztése segédsíkkal (jobb oldali ábra)

2.14. Feladat. *Hasáb és egyenes döféspontjának szerkesztése.*

Megoldás. (2.25. ábra) Vegyünk fel az egyenesre illeszkedő, a hasáb oldaléleivel párhuzamos segédsíkot, ennek az alaplap síkjába eső metszésvonala kimetszi az alaplapból annak a két alkotónak egy-egy pontját, amelyek az egyenest a döféspontokban metszik. Esetünkben az alaplap síkja az első képsík, ezért a segédsík metszésvonala éppen az első nyomvonal. (A képsíkon álló egyenes hasáb esetén a segédsík az egyenes élben látszó vetítősíkja, az ezzel kimetszett alkotók vetítősugarak.)

Hasáb metszése síkkal



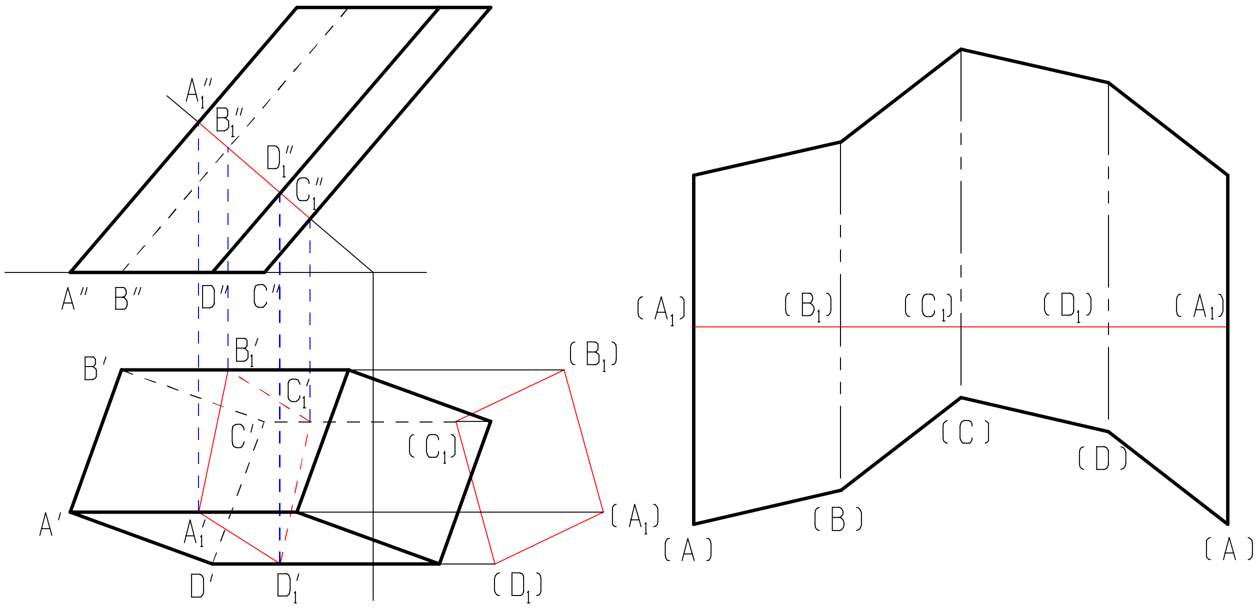
2.26. ábra. Affinitás a hasáb alaplapja és síkmetszete között (bal oldali ábra); Hasáb síkmetszetének szerkesztése (jobb oldali ábra)

A hasáb alaplapja és a síkmetszete között (térbeli) tengelyes affinitás áll fenn. Az affinitás tengelye a metszősíknak az alaplap síkjába eső metszésvonala, iránya a hasáb oldaléleivel párhuzamos, a megfelelő pontpárok az alaplapnak és a metszetidomnak a hasáb közös oldalélére illeszkedő csúcsai. Az alaplap és a metszetidom megfelelő oldalegyenesei az affinitás tengelyén (a metszősík és az alaplap metszésvonalán) metszik egymást (2.26. ábra, bal oldal).

A hasáb alaplapja és síkmetszete közötti affinitás az (el nem fajuló) vetületek között is fennáll, így a hasáb síkmetszetét, sőt annak valódi nagyságát is az alaplap affin megfelelőjeként szerkeszthetjük, ha már egy pontpárral az affinitást meghatároztuk.

A hasáb síkmetszetét általános helyzetű síkkal úgy is megszerkeszthetjük, hogy a metszősíkot vetítősíkká transzformáljuk (2.26. ábra, jobb oldal).

Ferde hasáb palástjának kiterítéséhez szerkesszük meg a hasáb oldaléleire merőleges síkkal képzett metszetét, azaz a hasáb *normálmetszetét*! A kiterített paláston a normálmetszet kerülete egy, az oldalélekre merőleges egyenesre esik (2.27. ábra).



2.27. ábra. Ferde hasáb normálmetszete (bal oldali ábra); Ferde hasáb kiterített palástja (jobb oldali ábra)

A ferde hasábot átdarabolhatjuk a normálmetszettel egyenes hasábbá, ezért a ferde hasáb palástjának a területe a normálmetszet kerületének és az oldalél hosszának a szorzatával, a ferde hasáb térfogata pedig a normálmetszet területének és az oldalél hosszának a szorzatával számítható ki.

2.6.2. Gúla

Gúlát kapunk,

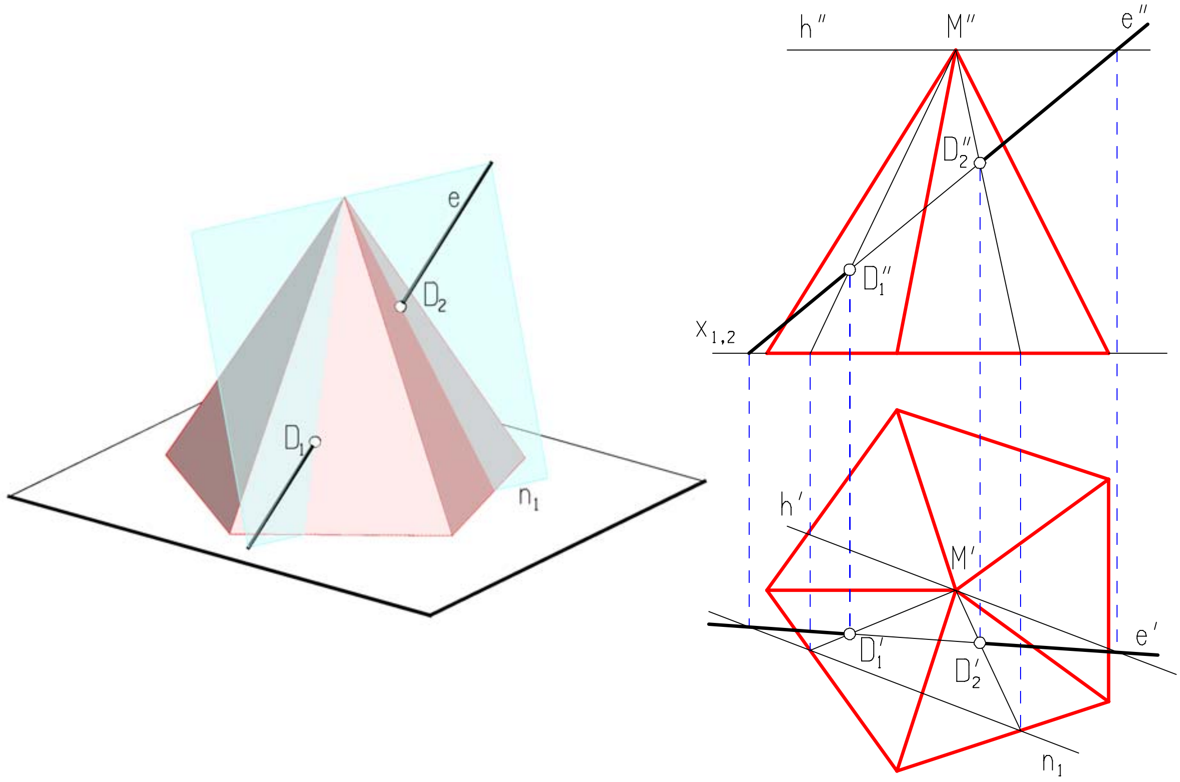
- *ha az alapsokszög kerületének minden pontját egy, a síkjára nem illeszkedő ponttal (a gúla csúcspontjával) összekötjük,*

- *vagy ha az alapsokszöget egy a síkjára nem illeszkedő pont (a gúla csúcspontja), mint hasonlósági középpont körül a csúcsig kicsinyítjük (ha előbb megállunk, csonka gúlát kapunk).*

A gúla szabályos, ha az alaplapja szabályos és a csúcspontja az alaplap középpontján átmenő, az alaplap síkjára merőleges egyenesen van.

A szabályos gúla oldallapjai egybevágó, egyenlőszárú háromszögek.

Gúla metszése egyenessel



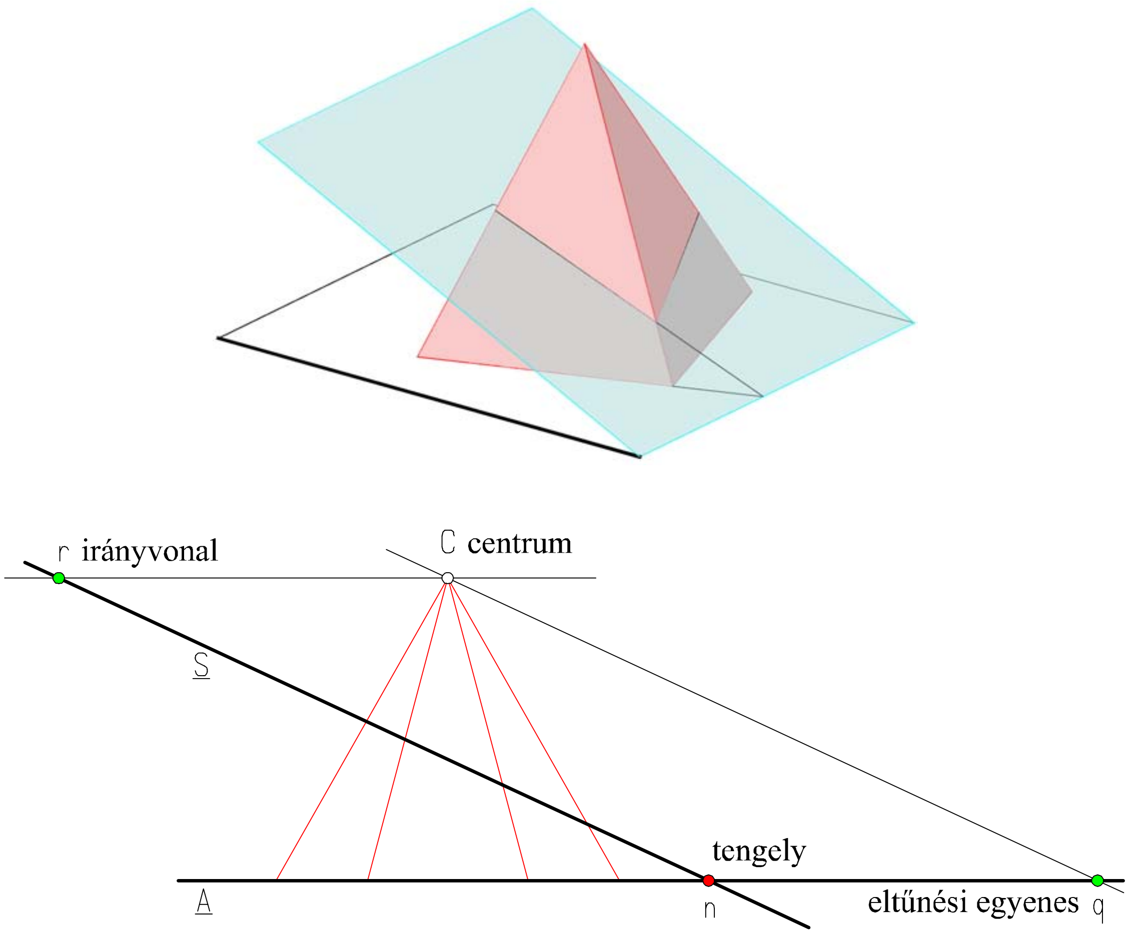
2.28. ábra. Gúla döfése egyenessel (bal oldali ábra); Gúla döféspontjainak szerkesztése segédsíkkal (jobb oldali ábra)

2.15. Feladat. *Gúla és egyenes döféspontjának szerkesztése.*

Megoldás. (2.28. ábra) Vegyünk fel az egyenesre és a gúla csúcspontjára illeszkedő segédsíkot, ennek az alaplap síkjába eső metszésvonala kimetszi az alaplapból annak a két alkotónak egy-egy pontját, amelyek az egyenest a döféspontokban metszik. Az ábrán a gúla alaplapja az első képsíkra illeszkedik, ezért a segédsíknak az alaplap síkjával alkotott metszésvonala a segédsík első nyomvonala, az alkotóknak ezzel kimetszett pontja pedig azok első nyompontja. A segédsík nyomvonalát az egyenes nyompontján át, a segédsíknak a gúla csúcsára illeszkedő fővonalával párhuzamosan rajzoltuk meg.

2.6.3. Gúla metszése síkkal, centrális (perspektív) kollineáció

A gúla alaplapja és a síkmetszete között (a hasáb esetéhez sokban hasonló) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés (térbeli) *centrális kollineáció* áll fenn. Az alaplap és a metszetidom megfelelő pontjai a gúla egy-egy oldalélére illeszkednek, amelyek mind a gúla csúcspontján mennek át. A gúla csúcspontját a kollineáció *centrumának* nevezzük. Az alaplap és a metszetidom megfelelő oldalegyenesei a metszősíknak az alaplap síkjába eső metszésvonalán metszik egymást, ezt a metszésvonalat a kollineáció *tengelyének* nevezzük (2.29. ábra, felső).



2.29. ábra. Centrális kollineáció a gúla alaplapja és síkmetszete között (felső ábra); Centrális kollineáció és centrális vetítés (alsó ábra)

A két sík ilyen megfeleltetése az egyik sík végtelen távoli egyeneséhez a másik síkon egy végesben lévő egyenest, egy *ellentengelyt* rendel (2.29. ábra, alsó). Ha a leképezést irányítottnak tekintjük, az ellentengelyek neve *eltűnési egyenes* (képe a végtelenben) és *irányvonal* (a végtelen távoli egyenes képe).

Ha a kollineáció megfelelő pontjait összekötő egyenesek egy ponton a kollineáció centrumán mennek át a kollineációt centrálisnak, vagy perspektívnek nevezzük.

Ha $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ *négy kollineáris pont, a velük képzett két alábbi egyszerűviszony (osztóviszony) hányadosát kettősviszonynak nevezzük:* $(\mathbf{ABCD}) = (\mathbf{ABC})/(\mathbf{ABD}) = (\overrightarrow{\mathbf{AC}}/\overrightarrow{\mathbf{BC}})/(\overrightarrow{\mathbf{AD}}/\overrightarrow{\mathbf{BD}})$.

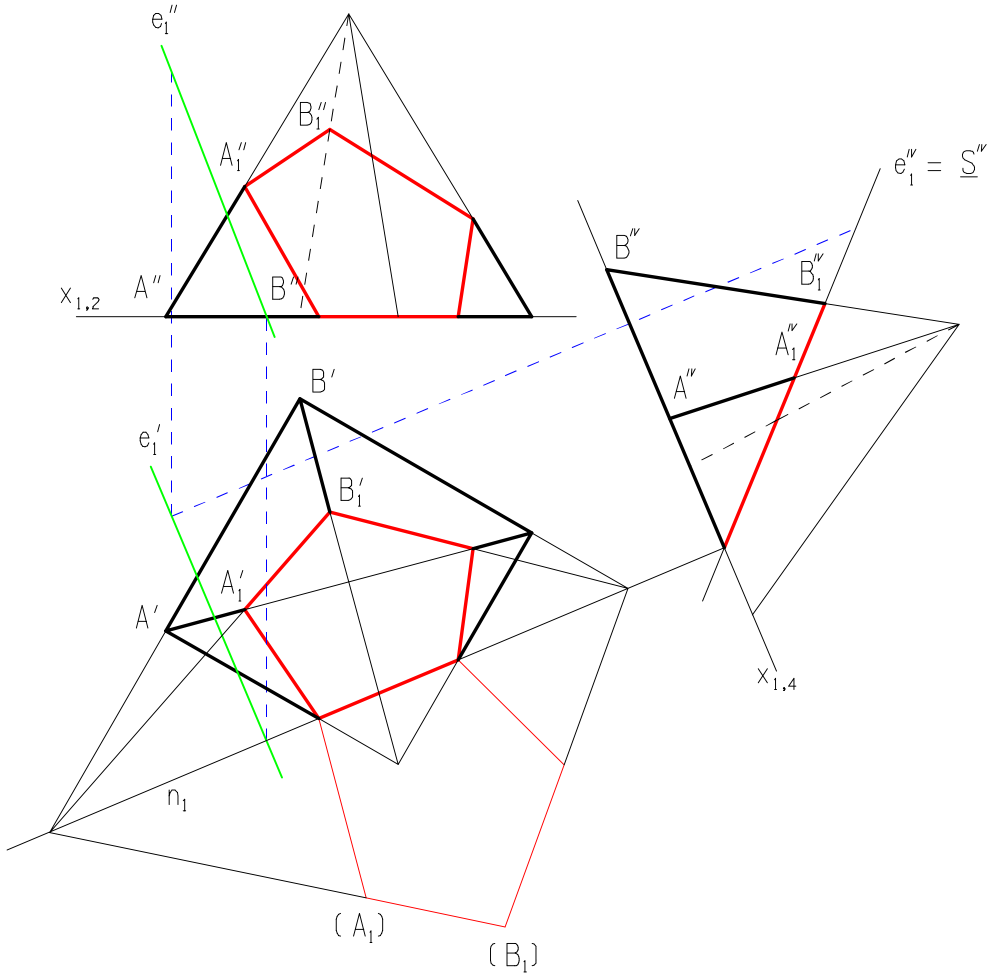
A centrális kollineáció tulajdonságai

- folytonos leképezés;

- egyenestartó leképezés;
- a kettősviszony invariáns;
- a megfelelő pontokat összekötő egyenesek a centrumra illeszkednek;
- a megfelelő egyenesek a tengelyen metszik egymást;
- a végtelen távoli egyenesek megfelelői az ellentengelyek;
- párhuzamos egyenesek képei a megfelelő ellentengelyen metszik egymást.

A 2.29. ábrán (felül) a gúla alaplapja az első képsíkra illeszkedik, ezért a centrális kollineáció tengelye a metszősík első nyomvonala. A gúla alaplapja és síkmetszete közötti centrális kollineáció az (el nem fajuló) *vetületek* között is fennáll, így a gúla síkmetszetét az alaplap megfelelőjeként szerkeszthetjük, ha már a centrális kollineációt centrumával, tengelyével és egy pontpárjával meghatároztuk.

Gúla síkmetszetét általános helyzetű síkkal úgy is megszerkeszthetjük, hogy a metsző-síkot vetítősíkká transzformáljuk.



2.30. ábra. Gúla síkmetszetének szerkesztése transzformálással

2.16. Feladat. *Adott egy első képsíkon álló szabályos négyoldalú gúla és* $\mathbf{e}_1$ *első esésvonalával a metszősík. Ábrázolja az adott síkkal csonkolt gúlát és szerkessze meg a síkmetszet valódi nagyságát!*

Megoldás. transzformációval (2.30. ábra)

- az $\mathbf{e}_1$ esésvonal nyompontján át megrajzoljuk a metszősík $\mathbf{n}_1$ első nyomvonalát;
- vetítősíkká transzformáljuk a metszősíkot ($\mathbf{x}_{1,4}$ merőleges az $\mathbf{n}_1$ nyomvonalra) és transzformáljuk a gúlát is;
- a síkmetszet negyedik képen élben látszik, csúcsait visszavetítjük az első képre (ellenőrzésre felhasználjuk az alapnégyzet és a metszetidom között fennálló centrális kollineációt);
- a síkmetszet második képét vetítéssel és transzformálással szerkesztjük;
- a síkmetszet valódi nagyságát az első képsíkba forgatással kapjuk (a metszetidom képe és leforgatottja között merőleges tengelyes affinitás van).

2.7. Hogyan oldjunk meg ábrázoló geometriai feladatot?

Már elég sok feladatot megoldottunk ahhoz, hogy tanulságokat vonjunk le arról, hogy *hogyan oldjunk meg ábrázoló geometriai feladatot?*

Segítségül hívjuk *Pólya György* [11] könyvét, amelynek a belső borítóján olvasható *Hogyan oldjunk meg feladatokat?* Tanácsait (a közvetlen, tegező szóhasználatát megtartva) átfogalmazzuk ábrázoló geometriai feladatokra:

1. **Értsd meg a feladatot!** (térben)
   - Képzeld el, modellezd, rajzolj szemléltető ábrát!
   - Mi adott, mit kell szerkeszteni?
2. **Készíts tervet!** (térben)
   - Hogyan juthatsz el az adatoktól a szerkesztendőkig?
   - Össze tudod rakni ezt az utat az ismert szerkesztési egységekből?
   - Ha valamelyik elem különleges helyzetű lenne, meg tudnád oldani a feladatot? Ha igen, transzformálj!
3. **Felvétel** (tér leképezése a síkra)
   - *Vedd fel az adatokat*
     - A felvétel legyen általános!
     - Ábrázold a térben elképzelt helyzetet,

– vagy szerkessz visszafelé, hogy a megoldás jó helyre kerüljön!

- *vagy elemezd az adott felvételt!*
  - Van-e az adott elemek között speciális helyzetű?
  - Adaptáld a tervet az adott felvételre!

4. **Szerkesztés** (a síkban)
   - Hajtsd végre a tervet! Törekedj érthetőségre – betűzz!
   - Törekedj pontosságra – kerüld el a lapos metszéseket és a túl közeli pontok összekötését!
   - Használd ki az ellenőrzési lehetőségeket – jól és pontosan szerkesztettél?

5. **Láthatóság** (síkból a térbe)
   - Rekonstruálj!
   - Reális az eredmény?
   - Húzd ki a rajzot láthatóság szerint!

6. **Diszkusszió** (a megoldás vizsgálata)
   - Különböző felvételnél mikor, hány megoldás van?
   - Meg tudnád szerkeszteni máshogy is?
   - Tudnád ezt a szerkesztést másra is alkalmazni?
   - Van a feladatnak általános tanulsága?

2.8. Gyakorló feladatok a 2. témakörhöz

2.1. Adott a **PQ** szakasz. Szerkessze meg a szakasz felező merőleges síkjának a nyomvonalait!

2.2. Adott az **a** egyenes és a $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősík. Szerkessze meg a vetítősíkra merőleges és az **a** egyenesre illeszkedő **M** sík nyomvonalait!

2.3. Adott az **a** egyenes és a $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősík. Szerkesszen a vetítősíkra illeszkedő és az **a** egyenest merőlegesen metsző egyenest!

2.4. Adott a **P** pont és fővonalaival az $\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{h}, \mathbf{f})$ sík. Szerkessze meg a **P** pont és az $\underline{\mathbf{S}}$ sík $d(\mathbf{P}, \underline{\mathbf{S}})$ távolságát!

2.5. Ábrázoljon egy 4 cm oldalélű kockát, amelynek alaplapja illeszkedik az első képsíkra, egyik testátlója pedig párhuzamos a második képsíkkal. Transzformálja a kockát olyan rendszerbe, amelyben a második képsíkkal párhuzamos testátlója vetítősugár!

2.6. Adott a $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősík és az **M** pont. Szerkesszen szabályos négyoldalú gúlát, amelynek az **M** pont a csúcsa és $35mm$ oldalélű alapnégyzete illeszkedik a $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősíkra!

2.7. Adott az $\mathbf{M}$ pont és nyomvonalaival az $\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ sík. Ábrázoljon egy olyan $3cm$ alapélű szabályos négyoldalú gúlát, amelynek csúcspontja $\mathbf{M}$, alapnégyzete pedig illeszkedik az $\underline{\mathbf{S}}$ síkra!

2.8. Adottak az $\underline{\mathbf{S}}$ sík $\mathbf{h}, \mathbf{f}$ fővonalai. Szerkessze meg a $\mathbf{h}$ egyenesnek az $\mathbf{f}$ egyenestől $20mm$-re lévő pontjait!

2.9. Nyomvonalaival adott az $\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ sík. Szerkesszen az $\underline{\mathbf{S}}$ sík első térnegyedbeli részén egy $40mm$ oldalú négyzetet, amelynek egyik oldala az $\mathbf{n}_1$ első nyomvonalra, egy csúcsa pedig az $\mathbf{n}_2$ második nyomvonalra illeszkedik!

2.10. Adott a $\mathbf{PQ}$ szakasz. Szerkesszen egy olyan szabályos négyoldalú gúlát, amelynek $\mathbf{P}$ a csúcspontja, $\mathbf{Q}$ pedig a $35mm$ élű alapnégyzetnek a középpontja!

2.11. Adott az $\mathbf{a}$ egyenes és nyomvonalaival az $\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ sík. Szerkesszen az $\mathbf{a}$ egyenesre illeszkedő, az $\underline{\mathbf{S}}$ síktól $20mm$-re lévő pontot!

2.12. $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ pontjaival adott az $\underline{\mathbf{S}}$ sík. Szerkessze meg az $\underline{\mathbf{S}}$ sík első képsíkszögét és a nyomvonalai által bezárt szöget!

2.13. Adottak az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ kitérő egyenesek. Szerkessze meg a két egyenes távolságát és szögét!

2.14. Adott egy szabályos négyoldalú gúla és az azt metsző $\mathbf{e}$ egyenes. Szerkessze meg a gúla és az egyenes döféspontjait!

2.15. Adott egy szabályos négyoldalú hasáb és az azt metsző $\underline{\mathbf{S}}$ síknak az $\mathbf{e}_1$ első esésvonala. Ábrázolja a hasábnak a metszősík mögötti részét és szerkessze meg a síkmetszet valódi nagyságát!

2.16. Adott egy szabályos négyoldalú gúla és az azt metsző $\underline{\mathbf{S}}$ síknak az $\mathbf{e}_1$ első esésvonala. Ábrázolja a gúlának a metszősík mögötti részét és szerkessze meg a síkmetszet valódi nagyságát!

3. fejezet

Kör ábrázolása, ellipszis, mint a kör affin képe

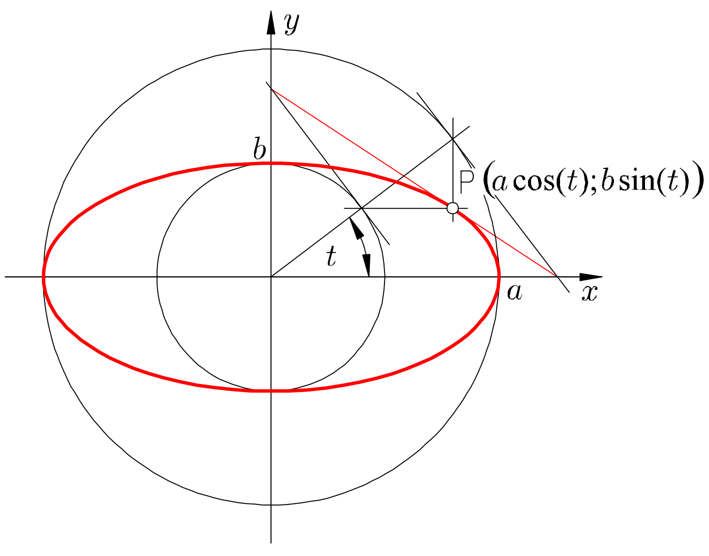
Tananyag: *Kör ábrázolása, ellipszis, mint a kör affin képe. Az ellipszis affin tulajdonságai, (Rytz szerkesztés). Néhány ellipszisre vonatkozó feladat megoldása affinitással. A merőleges affinitásra korlátozva.*

3.1. Ellipszis, mint a kör affin képe

A koordináta-rendszerben középpontosan elhelyezett

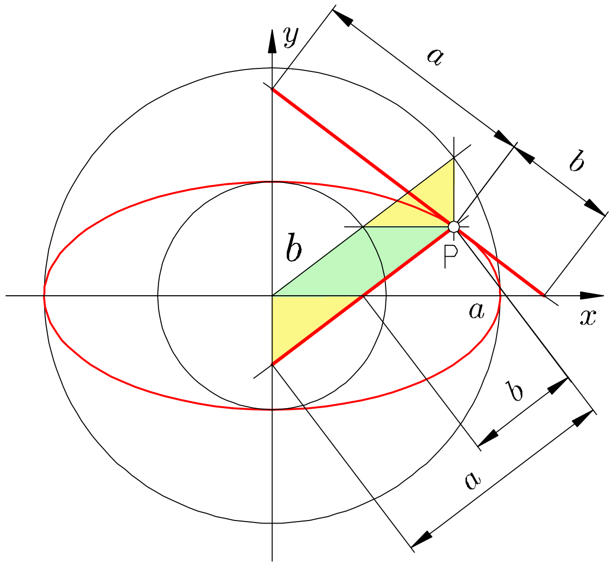
$$x = a\cos t;\ y = b\sin t$$

koordinátafüggvényekkel adott görbe ellipszis, ahol a a fél nagytengely, b a fél kistengely hossza, t pedig a paraméter (geometriai jelentése: egy sugár irányszöge).



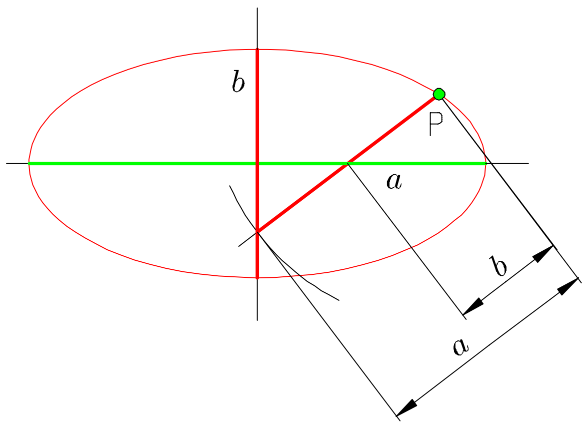
3.1. ábra. Két-kör módszer

A paraméteres egyenletnek megfelel egy már Proklosz (i.e. 410-485) által is ismert szerkesztés, a *két-kör módszer*. A 3.1. ábra szerint az ellipszis két körrel is merőleges tengelyes affinitásban áll: az a sugarú nagykör és az ellipszis közötti affinitás tengelye a nagytengely; a b sugarú kiskör és az ellipszis közötti affinitás tengelye a kistengely egyenese.



3.2. ábra. A papírcsíkos eljárás elve

A két-kör módszerrel szerkesztett 3.2. ábráról leolvasható a *papírcsíkos eljárás* elve, amely szerint, ha az ellipszis tetszőleges **P** pontján átmenő egyenesnek a **P** ponttól a kistengelyig terjedő szakasza fél nagytengelynyi (a), akkor az egyenesnek **P**-től a nagytengelyig terjedő szakasza fél kistengelynyi (b) és viszont. A papírcsíkos eljárással ellipszispontokat jelölhetünk ki, az elve alapján ellipszisrajzoló készülék (ellipszográf) készíthető, de számunkra legfontosabb, hogy az ellipszis egyik tengelye és egy **P** pontja ismeretében a papírcsíkos eljárás alapján megszerkeszthetjük az ellipszis másik tengelyét (3.3. ábra).



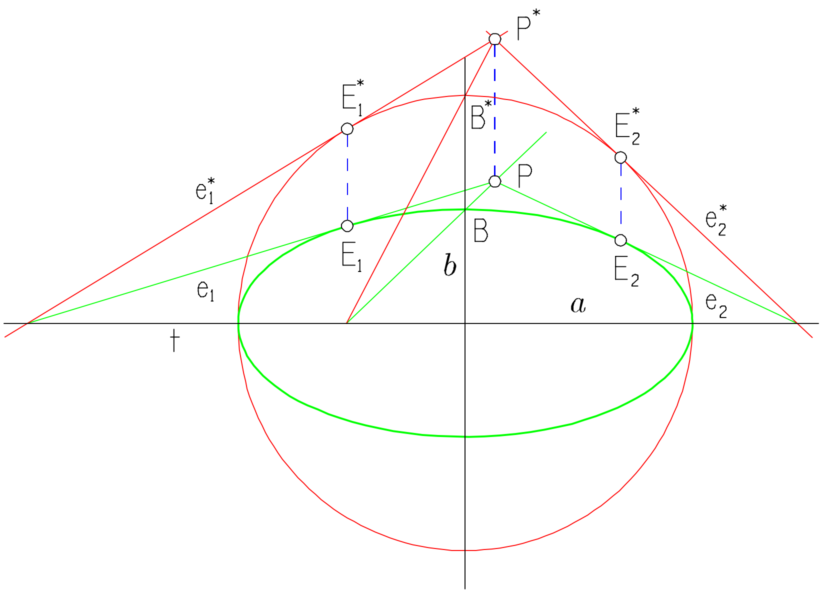
3.3. ábra. Kistengely szerkesztése

3.1.1. Néhány ellipszisre vonatkozó feladat megoldása affinitással

(A merőleges tengelyes affinitásra korlátozva.)

Az ellipszis és a két kör egyike között fennálló merőleges tengelyes affinitást felhasználhatjuk ellipszisre vonatkozó feladatok megoldására. A folyamat a következő lépésekből áll:

- az affinitással áttérünk a kör rendszerére,
- a körre vonatkoztatva megoldjuk a feladatot,
- az eredményt az affinitással visszavisszük az ellipszis rendszerébe.

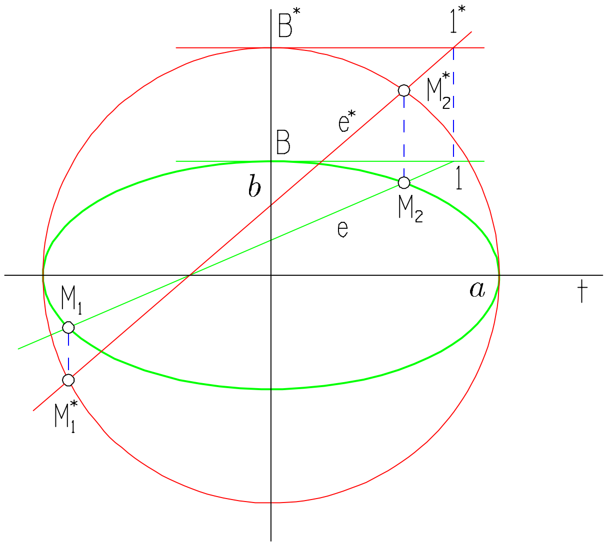


3.4. ábra. Ellipszis érintőinek szerkesztése affinitással

3.1. Feladat. *Adottak az ellipszis tengelyei és egy külső pont. Szerkesszünk az adott pontból az ellipszishez érintőket!*

Megoldás. (3.4. ábra) Tekintsük azt a merőleges tengelyes affinitást, amely az adott ellipszist a nagytengelye fölé rajzolt körbe viszi át! Ezt az affinitást meghatározza a nagytengely egyenese, mint az affinitás tengelye és a $\mathbf{B}, \mathbf{B}^*$ pontpár.

- Szerkesszük meg az adott $\mathbf{P}$ pont affin megfelelőjét a $\mathbf{PB}$ egyenes segítségével;
- húzzunk érintőket $\mathbf{P}^*$-ból a nagykörhöz;
- transzformáljuk vissza az érintőket és az érintési pontokat az ellipszis rendszerébe.



3.5. ábra. Ellipszis és egyenes metszéspontjainak szerkesztése affinitással

3.2. Feladat. *Adottak az ellipszis tengelyei és az* **e** *egyenes. Szerkesszük meg az adott egyenesnek az ellipszissel alkotott metszéspontjait!*

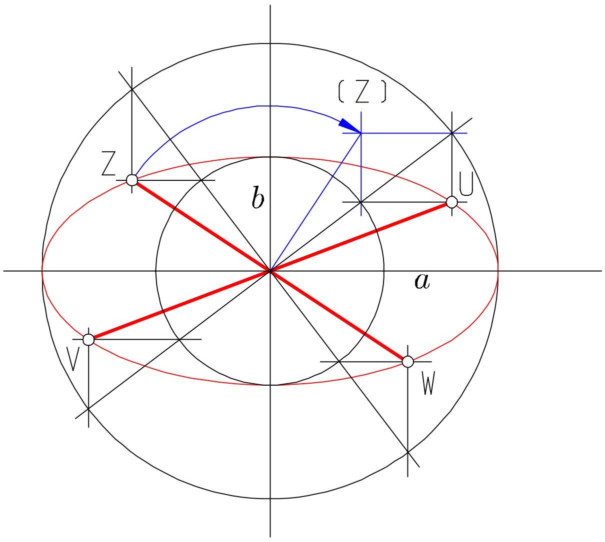
Megoldás. (3.5. ábra) Tekintsük azt a merőleges tengelyes affinitást, amely az adott ellipszist a nagytengelye fölé rajzolt körbe viszi át! Ezt az affinitást meghatározza a nagytengely egyenese, mint az affinitás tengelye és a $\mathbf{B}, \mathbf{B}^*$ pontpár.

- Szerkesszük meg az adott **e** egyenes affin megfelelőjét a **B** pontból az affinitás tengelyével húzott párhuzamos segítségével;
- jelöljük ki az $\mathbf{e}^*$ egyenesnek a nagykörrel alkotott metszéspontjait;
- transzformáljuk vissza a metszéspontokat az ellipszis rendszerébe.

3.1.2. Az ellipszis konjugált (kapcsolt) átmérőpárja

Két átmérőt konjugált (kapcsolt) átmérőpárnak nevezünk, ha az egyik átmérő végpontjában az érintő párhuzamos a másik átmérővel.

A kör bármely két merőleges átmérője *konjugált* (kapcsolt) *átmérőpárt* alkot ebben az értelemben. Ha a kört párhuzamosan vetítjük, vagy affinitással (például a két-kör módszer szerint) a kört ellipszisre képezzük le (3.6. ábra), az átmérők merőlegessége (általában) megszűnik, de a párhuzamosság az affinitással szemben invariáns és ezért a kör bármely merőleges átmérőpárjának a megfelelője az ellipszisnek *konjugált átmérőpár*ja lesz.

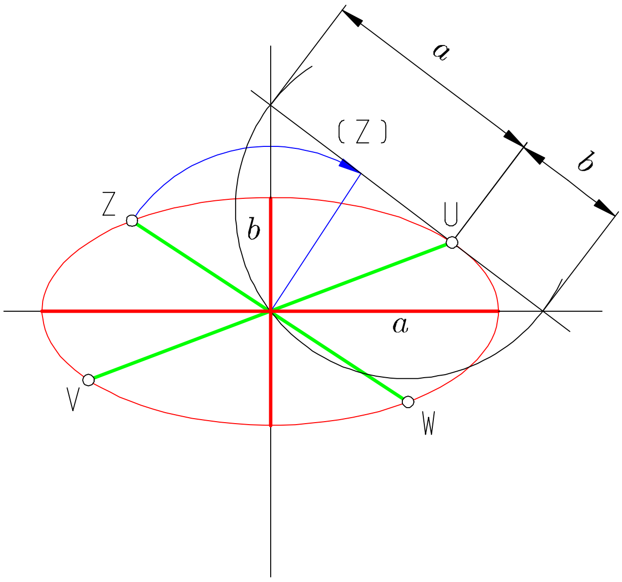


3.6. ábra. Konjugált átmérők két-kör módszerrel;

3.1.3. Rytz-szerkesztés

3.3. Feladat. *Adott egy ellipszis konjugált átmérőpárja, szerkesszük meg a tengelyeit!*

Megoldás. Tekintsük a 3.6. ábrát a feladathoz készített vázlatként és szerkesszük meg fordított sorrendben, vagyis az ellipszis konjugált átmérőpárjából kiindulva (3.7. ábra)!



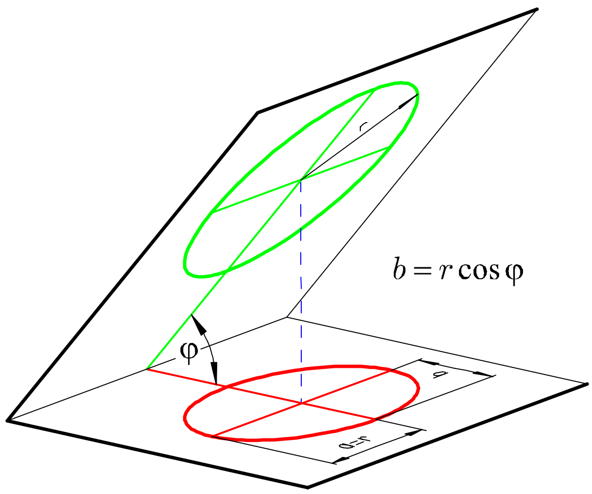
3.7. ábra. A Rytz-szerkesztés

- Forgassuk el az egyik félátmérőt derékszöggel és kössük össze az elforgatott végpontot a másik átmérő egyik végpontjával (így éppen a papírcsíkos eljárás egyik egyenesét kaptuk);

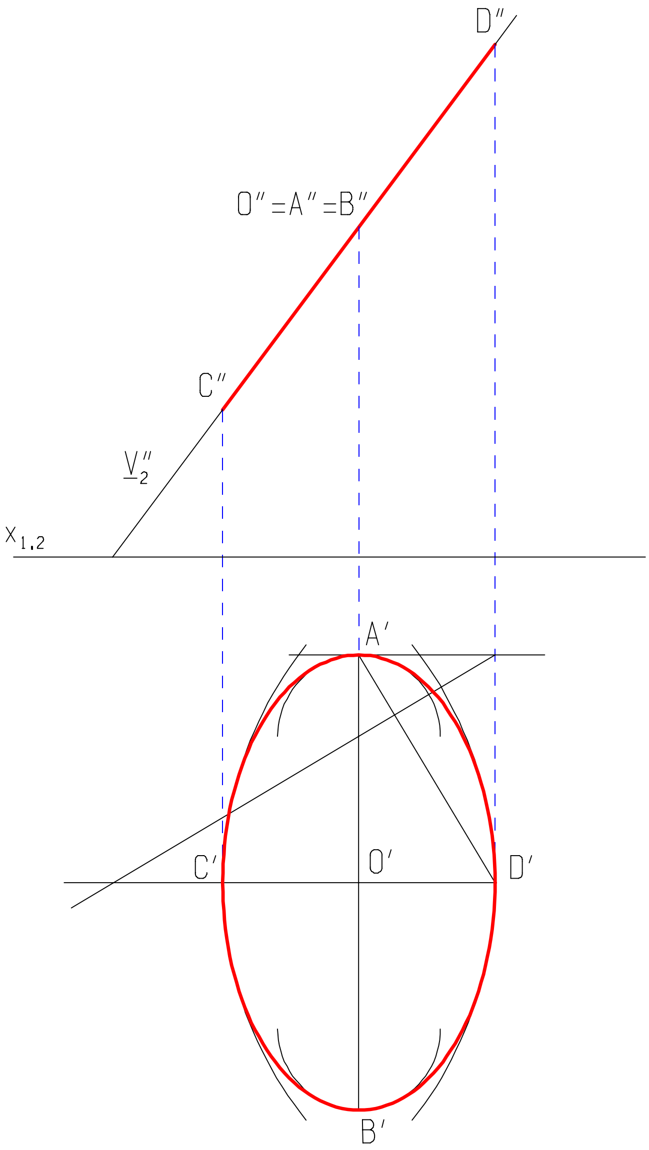
- szerkesszünk a végpontok közötti szakasz felezőpontja köré az ellipszis középpontján át Thalész-kört, ez az előbbi egyenesből a tengelyek egy-egy pontját metszi ki;
- az ellipszis középpontját a konjugált átmérők hegyesszögű tartományába eső metszésponttal összekötve kapjuk a nagytengely egyenesét, a tompaszögű tartományban pedig a kistengely egyenesét;
- a tengelyek hosszát a papírcsíkos eljárás alapján felmérjük a tengelyek egyeneseire.

3.2. Kör ábrázolása

A kör képsíkkal párhuzamos átmérője nem rövidül, az esésvonal irányú átmérőnek a legerősebb a rövidülése, ezért a fővonal irányú köratmérő vetülete lesz a vetületként kapott ellipszis nagytengelye, és az esésvonal irányú köratmérő vetülete lesz a vetület kistengelye (3.8. ábra).



3.8. ábra. Kör és vetülete



3.9. ábra. Vetítősíkra illeszkedő kör

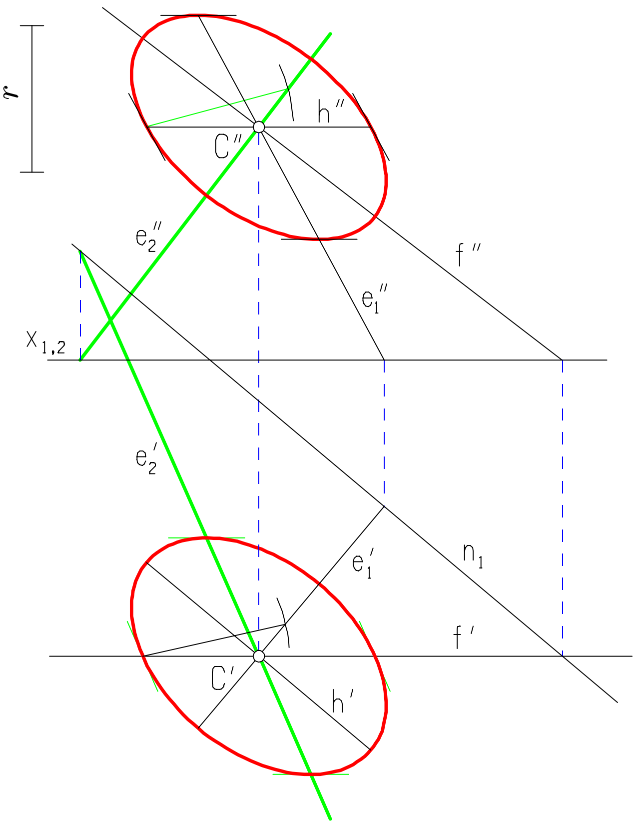
Vetítősíkban fekvő kör megfelelő képe átmérő hosszúságú szakasz; másik képe olyan ellipszis, amelynek nagytengelye a képsíkkal párhuzamos, valódi nagyságban látszó körátmérő, kistengelye pedig a másik képen valódi nagyságban látszó esésvonal vetülete (3.9. ábra).

A görbület fogalma

A görbület differenciálgeometriai fogalom, amelyet itt csak szemléltetni fogunk. Kiindulásul gondoljunk arra, hogy ha egy görbe két pontján átmenő szelőjét vesszük, majd a két ponttal a görbén egy közös határponthoz tartunk, a görbe szelőjének a határhelyzeteként a görbe érintőjét kapjuk. Hasonló eljárással tekintsük most a görbe három nem kollineáris pontját és az azokon átmenő kört, ezután a görbére illeszkedő három ponttal tartsunk egy közös határponthoz. Eközben a pontokra illeszkedő kör határhelyzeteként a görbének a határpontbeli simulókörét (oszkuláló körét) kapjuk. Egy görbe adott pontbeli görbületén a pontbeli simulókör sugarának a reciprokát értjük. A kör állandó görbületű görbe. Tekintsünk most egy változó görbületű görbét, mint amilyen az ellipszis. A görbének egy általános helyzetű pontjában a görbülete csökken, vagy növekszik, tehát a simulókörétől a kisebb görbületű ív egyik oldalon kihajlik, másik oldalon a nagyobb görbületű ív bekunkorodik, vagyis a görbe a simulókörét az inflexiós érintőhöz hasonlóan át is metszi. Ha azonban a kiválasztott pontban a görbe görbületének szélső értéke van, mint például az ellipszis tengelypontjaiban, akkor a görbe (legalább a választott pont egy környezetében) a simulókörnek ugyanazon az oldalán marad. Az ilyen simulókört a görbe hiperoszkuláló körének nevezzük. A hiperoszkuláló kör még szorosabban simul a görbéhez, ezért jól segíti a görbe megrajzolását.

Ellipszis megrajzolásához

- szerkesszük meg a tengelyeket;
- szerkesszük meg a hiperoszkuláló köröket (ezek sugara a^2/b és b^2/a, melyek a 3.9. ábra szerint szerkeszthetők);
- rajzoljuk meg a szerkesztett adatokat kielégítő görbét (halvány szabadkézi vonallal);
- húzzuk ki görbevonalzó mellett úgy, hogy a szimmetrikus ívekhez a görbevonalzónak ugyanazt az ívét használjuk.



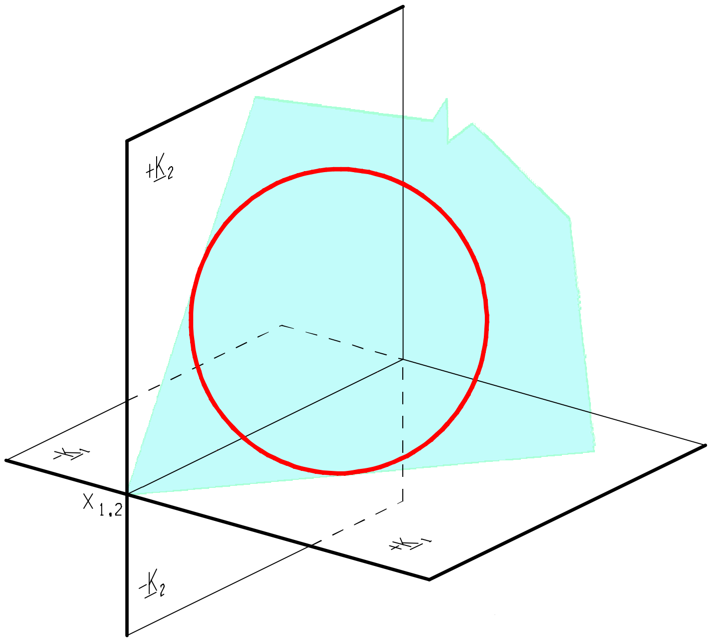
3.10. ábra. A kör képeinek a tengelyei

3.4. Feladat. *Adott a kör* **C** *középpontja, síkjának* (**C**-*re illeszkedő)* **h**, **f** *fővonalai és a kör* r *sugara. Ábrázoljuk a kört!*

Megoldás. (3.10. ábra)

- A fővonalak megfelelő képére felmérjük az r sugarat és a végpontokat átvetítjük a másik képre;
- a "papírcsíkos" eljárással megszerkesztjük a képellipszisek kistengelyeit (ezek illeszkednek az esésvonalak megfelelő vetületeire);
- segédegyenessel megszerkesztjük az esésvonal irányú átmérők másik képét;
- mindkét képen ismertek a képellipszis tengelyei, és a másik kép tengelyeit adó (a térben merőleges) átmérőpár képe, ami a képellipszis konjugált átmérőpárja, ezek alapján megrajzoljuk a kör ellipszisképeit.

Ha a kör középpontja, vagy sugara csak közvetve adott, vagy több részletet kell szerkesztenünk, forgassuk le a kör síkját a képsíkkal párhuzamos helyzetbe!

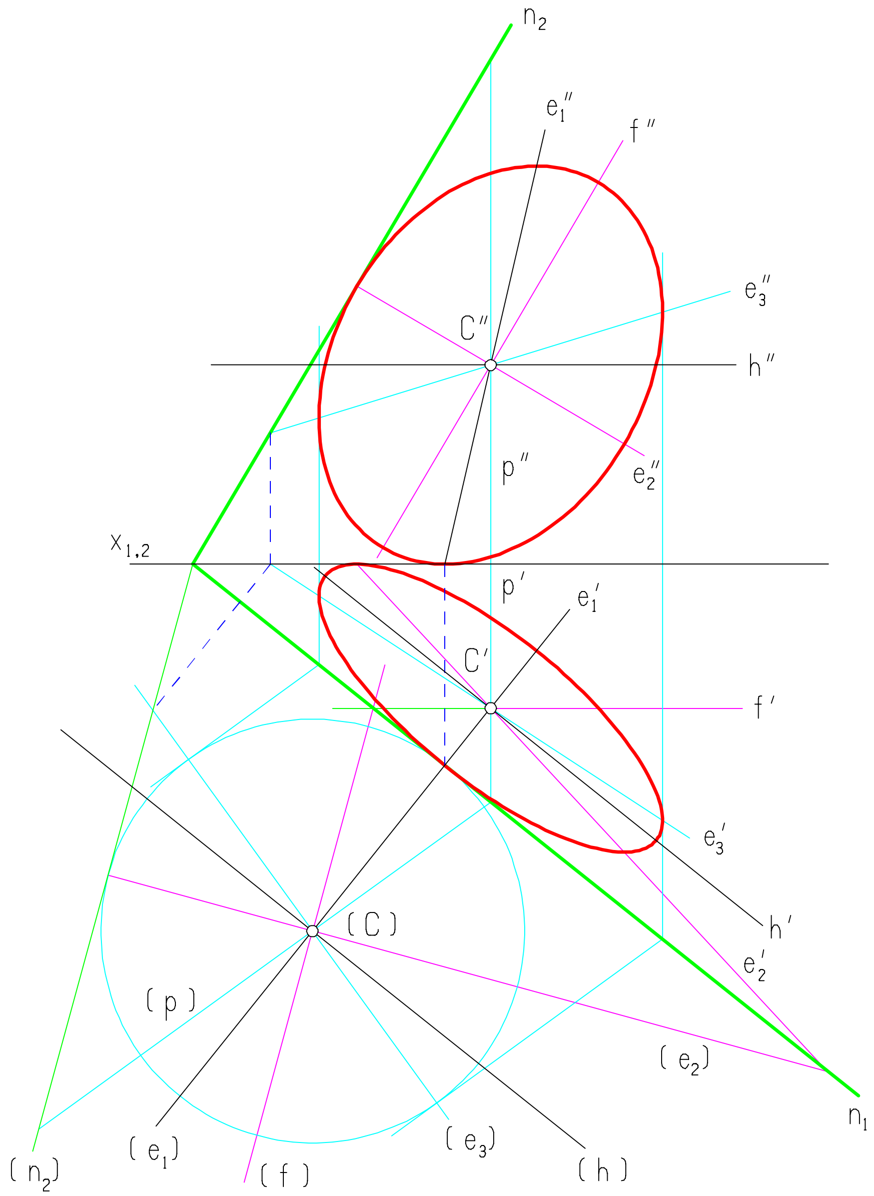


3.11. ábra. Nyomvonalakat érintő kör

3.5. Feladat. *Adott a kör r sugara és a kört érintő* $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ *nyomvonalak. Ábrázoljuk a kört (3.11. ábra)!*

Megoldás. (3.12. ábra)

- Forgassuk le a kör síkját, (itt az $\mathbf{n}_1$ nyomvonal körül az $\mathbf{n}_2$ egyenest forgattuk le, kihasználva, hogy $\mathbf{n}_2$ a második képen is és a leforgatásban is valódi nagyságban látszik);
- a leforgatott síkon szerkesszük meg a kör leforgatottját;
- a leforgatásban megszerkesztett kört visszaforgatjuk:
  - megszerkesztjük a $(\mathbf{C})$-re illeszkedő fővonalból és az arra merőleges esésvonalból álló átmérőpárok leforgatottját és azokat visszaforgatjuk;
  - az első fő- és esésvonal irányú átmérőpár adja a kör első képén a tengelyeket;
  - a második fő- és esésvonal irányú átmérőpár adja a kör második képén a tengelyeket;
  - a harmadik esésvonalra illeszkedő átmérő végpontjaiban a kör érintői párhuzamosak a konjugált profilátmérővel, ezért ezek a képek szélső pontjai;
- mindkét képen ismertek a tengelyek, egy konjugált átmérőpár és a szélső pontok, szerkesszünk a tengelyvégpontokban hiperoszkuláló köröket, a konjugált átmérők végpontjaiban a párjukkal párhuzamos érintőket, ezek alapján rajzoljuk meg a kör ellipszis képeit.



3.12. ábra. Nyomvonalakat érintő kör szerkesztése leforgatással

3.3. Gyakorló feladatok a 3. témakörhöz

3.1. Adott (a rajz síkjában) egy ellipszis **AB** nagytengelye és **P** pontja. Rajzolja meg az ellipszist! Ehhez szerkessze meg az ellipszis kistengelyét, hiperoszkuláló köreit és a **P** pontban az érintőjét!

3.2. Adott (a rajz síkjában) egy ellipszis **CD** kistengelye és **P** pontja. Rajzolja meg az ellipszist! Ehhez szerkessze meg az ellipszis nagytengelyét és a **P** pontban vett érintőjét!

3.3. Adott (a rajz síkjában) egy ellipszis **CD** kistengelye és **e** érintője. Rajzolja meg az ellipszist! Ehhez szerkessze meg az ellipszis nagytengelyét és az **e** érintőjén az érintési pontot!

3.4. Adott (a rajz síkjában) egy ellipszis $\mathbf{UV}, \mathbf{WZ}$ konjugált átmérőpárja. Rajzolja meg az ellipszist! Ehhez szerkessze meg az ellipszis tengelyeit!

3.5. Adott a $\underline{\mathbf{V}}_1$ első vetítősík. Ábrázoljon a vetítősík nyomvonalait érintő, $4cm$ sugarú kört! Ehhez szerkessze meg a kör vetületének a tengelyeit és hiperoszkuláló köreit!

3.6. $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ nyomvonalaival adott az $\underline{\mathbf{S}}$ sík. Szerkesszen az első térnegyedben az adott nyomvonalakat érintő $4cm$ sugarú kört! Ehhez szerkessze meg a képek tengelyeit és hiperoszkuláló köreit!

3.7. $\mathbf{e}_1$ első esésvonalával adott az $\underline{\mathbf{S}}$ sík és az esésvonalra illeszkedő $\mathbf{O}$ pont. Ábrázolja az $\underline{\mathbf{S}}$ síkra illeszkedő, $\mathbf{O}$ középű, $r = 3cm$ sugarú kört! Ehhez szerkessze meg a körnek azokat az átmérőit, amelyek vetülete a kör első képének a tengelyeit adja!

3.8. Adott az $\mathbf{ABC}$ háromszög. Ábrázolja a háromszög köré írható kört! Ehhez szerkessze meg a kör képeinek a tengelyeit és érintőjét az $\mathbf{A}$ pontban!

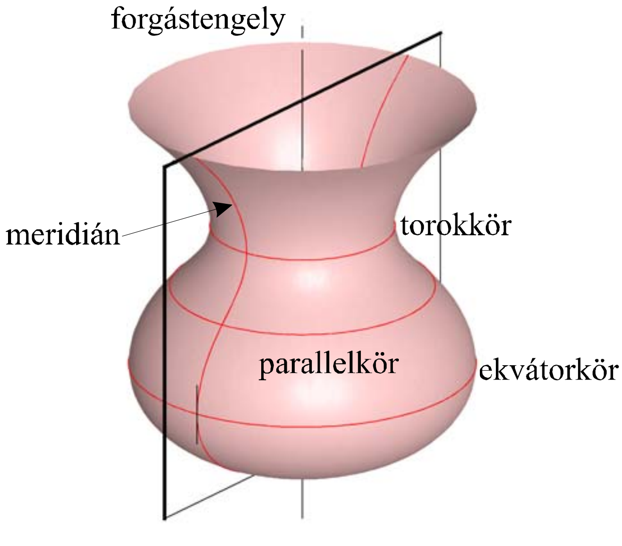
3.9. Adott az $\mathbf{O}$ pont és az $\mathbf{e}$ egyenes. Ábrázoljon az $\mathbf{O}$ pont köré írható, az $\mathbf{e}$ egyenest érintő kört! Ehhez szerkessze meg a kör érintési pontját az $\mathbf{e}$ egyenesen és a kör képeinek a tengelyeit!

3.10. Adott egy kör $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ pontja és az $\mathbf{A}$ pontbeli $\mathbf{a}$ érintője. Ábrázolja a kört! Ehhez szerkessze meg a kör fő- és esésvonal irányú átmérőit és a $\mathbf{B}$ pontbeli $\mathbf{b}$ érintőjét!

4. fejezet

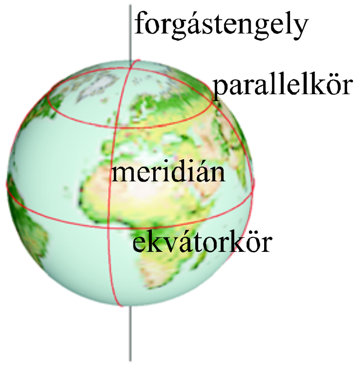
Gömb, forgáshenger és forgáskúp

Tananyag: *Gömb, forgáshenger és forgáskúp ábrázolása, a kontúr fogalma, felületi pont, normális, érintősík meghatározása. A gömb, forgáshenger és forgáskúp metszése egyenessel és síkkal.*
A kúpszeletek néhány konstruktív tulajdonsága, (fokális definíciók, tengelyek, aszimptoták, fókuszok kapcsolata) ezek alapján elvégezhető síkgeometriai szerkesztések.



4.1. ábra. Forgásfelület

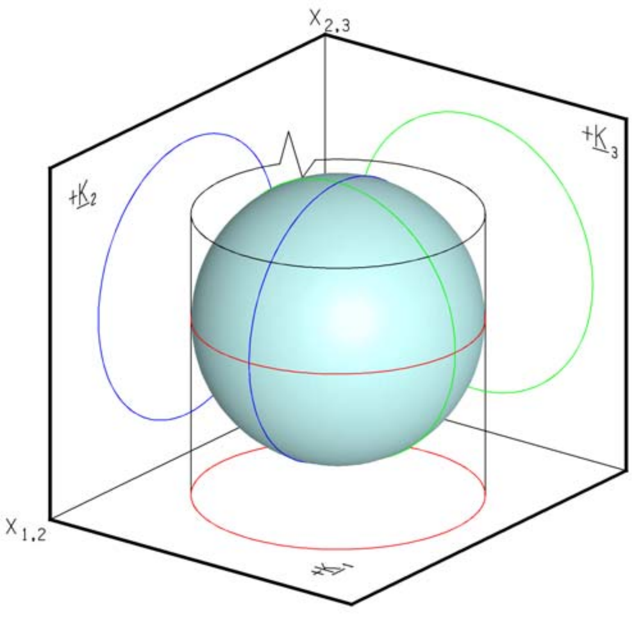
Az itt tárgyalandó gömb, forgáshenger és forgáskúp *forgásfelületek*. Forgásfelület keletkezik, ha egy tengely körül egy (egyenes, vagy görbe) vonalat megforgatunk (4.1. ábra). Forgás közben a megforgatott vonal pontjai *parallelköröket* írnak le. A környezetében legkisebb sugarú parallelkört *torokkörnek*, a környezetében legnagyobb sugarú parallelkört *egyenlítő-*, vagy *ekvátorkörnek* nevezzük. A forgásfelületet a tengelyre illeszkedő síkok a *meridiánban* metszik. Például a földgömb (4.2. ábra) hosszúsági körei meridiánok (innen vitték át ezt az elnevezést egyéb forgásfelületekre is), a földgömb szélességi körei pedig parallelkörök, közülük az egyenlítő ekvátorkör. Ha a meridián síkja főállású (vagyis valamelyik képsíkkal párhuzamos), akkor *főmeridiánról* beszélünk.



4.2. ábra. A földgömb mint forgásfelület

4.1. Gömb ábrázolása és metszése

Egy poliéder (pl. hasáb, vagy gúla) ábrázolásához elegendő az élek vetületét megszerkeszteni, de egy görbe felületű testet (pl. egy gömböt) nem lehet így ábrázolni. Poliéder esetében az élek egy részének a vetülete határolja a poliéder vetületét. Görbe felületű test esetében is szeretnénk a vetületének a határát megszerkeszteni. A képhatár pontjait létrehozó vetítősugarak érintik a görbe felületet és összességükben egy *vetítőhengert* alkotnak (4.3. ábra).



4.3. ábra. A gömb kontúrjai

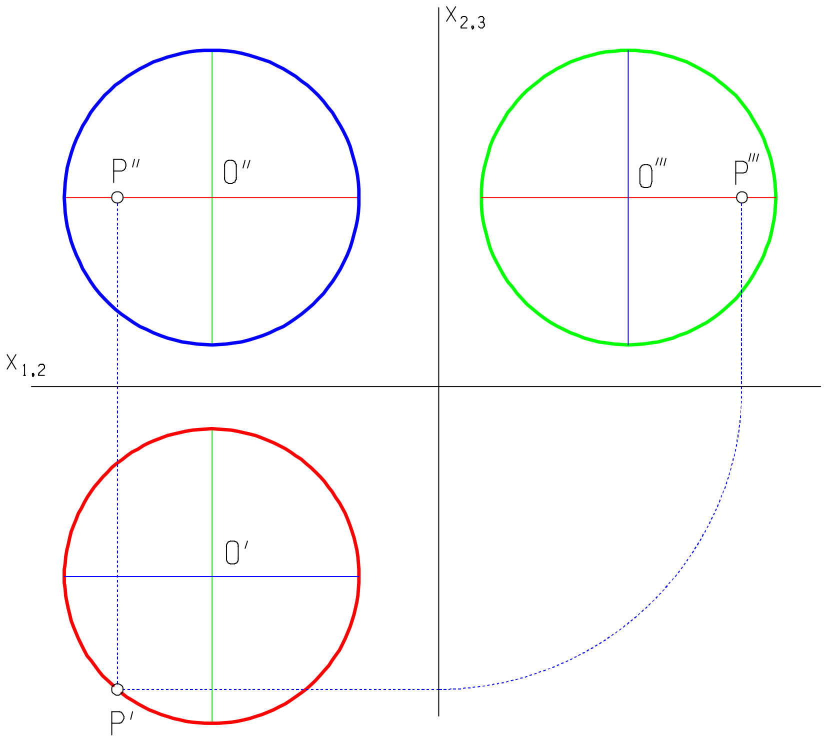
Ez a vetítőhenger a térben egy felületi görbe, a *kontúr* mentén érinti a görbe felületet. A vetítőhenger érintősíkjai a képhatár érintőit állítják elő a képsíkon, és szintén érintik a görbe felületet. Konkáv felület esetén a képhatáron belül is találhatunk még olyan pontokat, amelyek vetítősugara a felületet érinti. Ezek a pontok is a kontúrhoz tartoznak, (láthatóság szerint kihúzott) vetületük a képet tagolja. Görbe felületet tehát a kontúr vetületével ábrázolunk.

A kontúr a felület azon pontjainak a mértani helye, amelyekben a felület érintősíkja vetítősík.

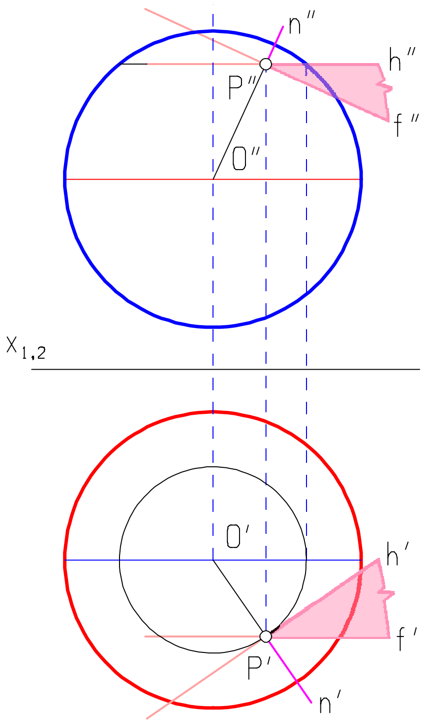
A kontúr megfelelő képe (csak ezt húzzuk ki láthatóság szerint)

- konvex felület esetén a felület képének a határa;
- konkáv felület képén a képhatáron belül még a különböző fedettségű területek határát is megadja.

Ahány kép(sík) annyi kontúr és annyi képhatár van (4.4. ábra).



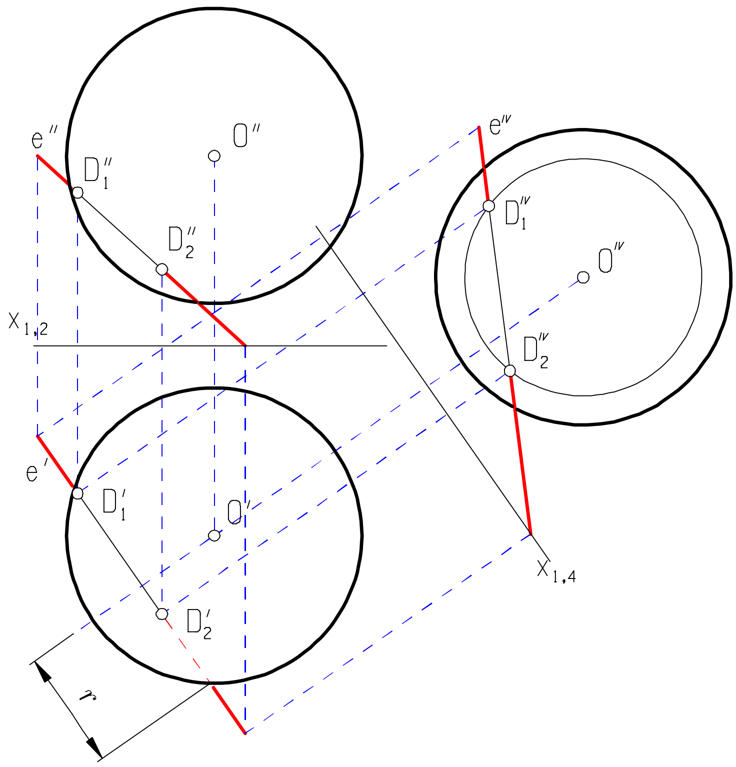
4.4. ábra. A kontúr képe a kép határa



4.5. ábra. Gömb felületi pontja, normálisa, érintősíkja

A gömbre felületi pontot parallelkörrel illesztünk (4.5. ábra). A parallelkörök általában gömbi kiskörök, az egyenlítőkör (a kontúr) gömbi főkör.

Felületi normális a felületi ponthoz húzott sugár. Az érintősík a normálisra merőleges.



4.6. ábra. Gömb és egyenes döfése

4.1.1. Gömb és egyenes döféspontja

Gömb és egyenes döféspontjának szerkesztése:

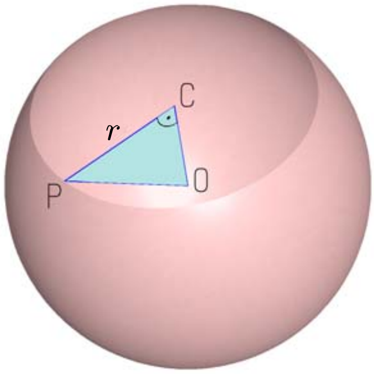
- ha az egyenes fővonal, akkor vele fedő helyzetben egy parallelkör van;
- ha az egyenes általános helyzetű, transzformáljuk főállásba (4.6. ábra), vagy forgassuk le egy vele komplanáris gömbi főkörrel együtt!

4.1.2. Gömb síkmetszete

Gömb bármely síkmetszete kör.

A tétel belátásához (4.7. ábra) állítsunk merőlegest a gömb **O** középpontjából a metszősíkra és jelöljük a talppontját **C**-vel. A síkmetszet tetszőleges **P** pontja az előbbiekkel az **OCP** derékszögű háromszöget alkotja, amelynek átfogója a gömb R sugara, egyik befogója a gömb **O** középpontjának a síktól mért $\overline{\mathbf{OC}}$ távolsága és ezért a másik befogó (a síkmetszet sugara) független a **P** pont választásától: $r^2 = R^2 - \overline{\mathbf{OC}}^2$.

Ha a metszősík illeszkedik a gömb középpontjára, a gömb és a kimetszett kör középpontja azonos, és a sugaruk is egyenlő: $r = R$. Az ilyen kört *gömbi főkörnek* nevezzük. Ellenkező esetben, vagyis ha a gömbi kör sugara kisebb, mint a gömb sugara, *gömbi kiskörről* beszélünk.



4.7. ábra. A gömb síkmetszete kör

Közös végpontú körívek közül a legnagyobb sugarú kör kisebbik íve a legrövidebb. Eszerint egy gömbfelületen két pont között legrövidebb út a két ponton átmenő gömbi főkör kisebbik íve. Ezt a főkört a két ponton és a gömb középpontján átmenő sík metszi ki.

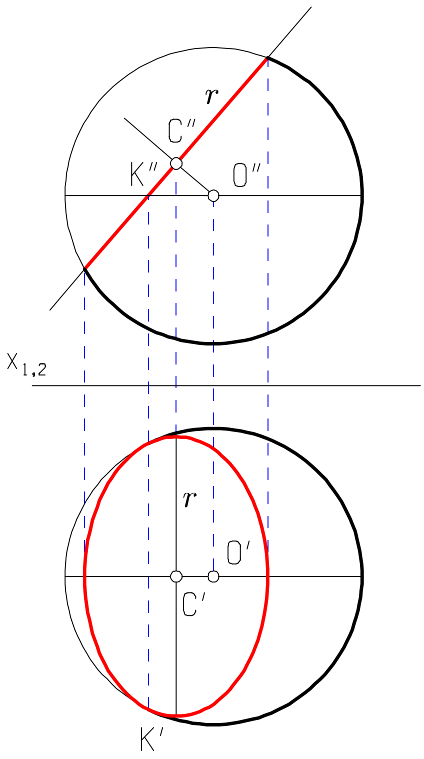
A Földön is így jelölhetjük ki hajók, vagy repülők számára két pont között a legrövidebb útvonalat. A síkgeometriában két pont között legrövidebb az egyenes szakasz. Ha a gömb felületén akarunk geometriát felépíteni, az egyenes szerepét a gömbi főkör veszi át, mert a gömbfelületen két pont között legrövidebb út a két ponton átmenő gömbi főkör nemnagyobb íve. Ez a gömbi geometria, amiben a gömbi főkört tekintjük „egyenesnek”, sokban különbözik az euklideszi geometriától. Erre mutatunk néhány példát.

- Állítsunk az egyenlítő „egyenesre” két merőleges hosszúsági kört, ezek a sarkokon metszik egymást, tehát nincsenek „párhuzamos egyenesek”.

- Tekintsük a Földön azt az egyenlő oldalú gömbháromszöget, amelyet az egyenlítő, valamint a 0^o-os és a 90^o-os hosszúsági kör határol. Ennek az egyenlő oldalú gömbháromszögnek minden szöge derékszög, a szögeinek az összege 270^o. Minden gömbháromszög szögeinek összege nagyobb, mint 180^o fok. Persze, ha egy tenyérnyi egyenlő oldalú háromszöget karcolunk egy befagyott tó jegére, nincs az a műszer, amivel kimutathatnánk, hogy a szögei nagyobbak 60^o-nál, pedig egy picivel nagyobbak, ezt nem nehéz kiszámítani. A gömbháromszög szögeinek az összege az egész gömb felszínének és a gömbháromszög területének az arányától függ. A két egyenlő oldalú, de különböző területű gömbháromszög szögei különbözőek. Egy gömbön tehát nincsenek hasonló gömbháromszögek.

- Vegyük most az egyenlítőt, mint gömbi „egyenest” és képezzük a vele ekvidisztáns vonalat, azaz minden pontjától mérjünk fel északra, mondjuk 100 km-t. Egy szélességi kört, vagyis egy gömbi kiskört kapunk, ami már nem „egyenes”.

A gömbi geometria egy nem-euklideszi geometria modellje az euklideszi térben. A nem-euklideszi geometriák egyik felfedezője a magyar Bolyai János (1802-1860).

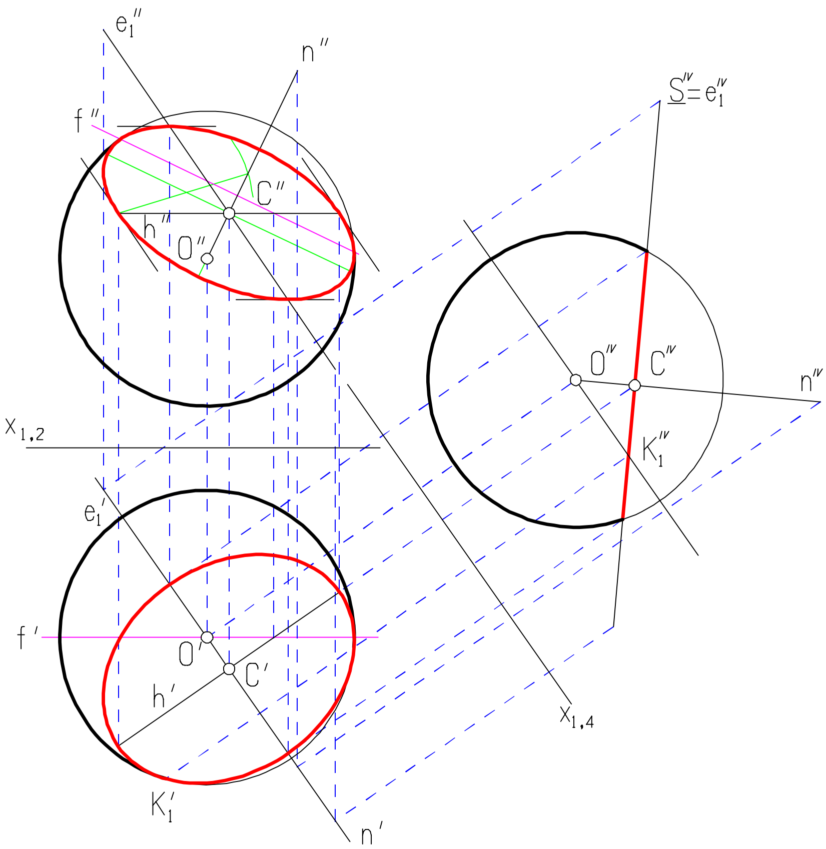


4.8. ábra. Gömb metszése vetítősíkkal

4.1. Feladat. *Gömb és vetítősík metszete.*

Megoldás. (4.8. ábra)

- A vetítősíkkal együtt a síkmetszet is élben látszik, ahonnan lemérhető a körmetszet sugara és ábrázolhatjuk a kör ellipszisképét;
- a láthatóság szerinti kihúzáshoz szerkesszük meg a kontúr és a síkmetszet közös pontjait, amelyeket ezeknek az élben látszó képei metszenek ki.



4.9. ábra. Gömb metszése általános helyzetű síkkal

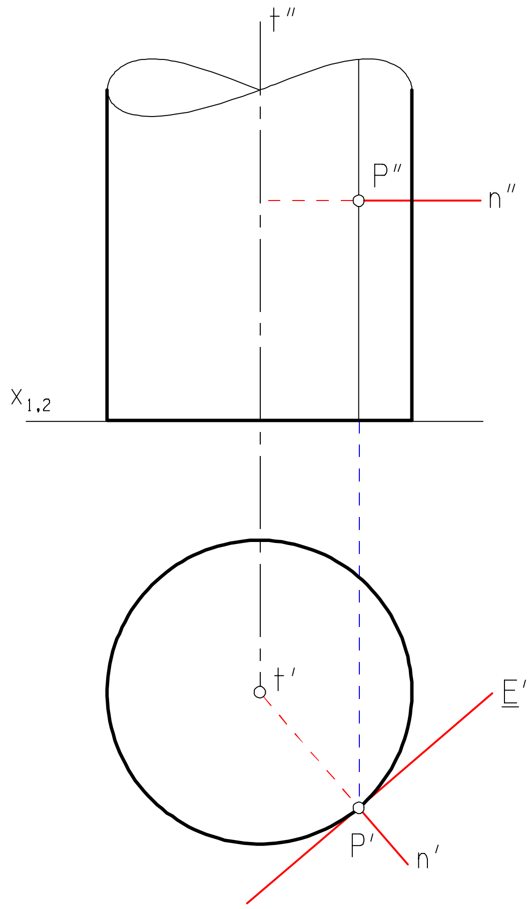
4.2. Feladat. *Gömb és általános helyzetű sík metszete.*

Megoldás. (4.9. ábra)

- Transzformáljuk a metszősíkot vetítősíkká;
- szerkesszük meg a metszetnek a transzformálthoz kapcsolódó (itt első) képét a 4.8. ábrán látott módon;
- a még hiányzó (itt második) képen az előző kép tengelyeit adó átmérők konjugált átmérőpárban látszanak, a kép nagytengelye a második fővonalon valódi nagyságban látszik, a kistengelyét pedig például a "papírcsíkos" módszerrel szerkeszthetjük meg;
- a gömb második kontúrja a metszősík egy frontális fővonalával van fedésben, ennek a fővonalnak a második képe metszi ki a gömb második képhatárából a hiányzó kontúrpontokat.

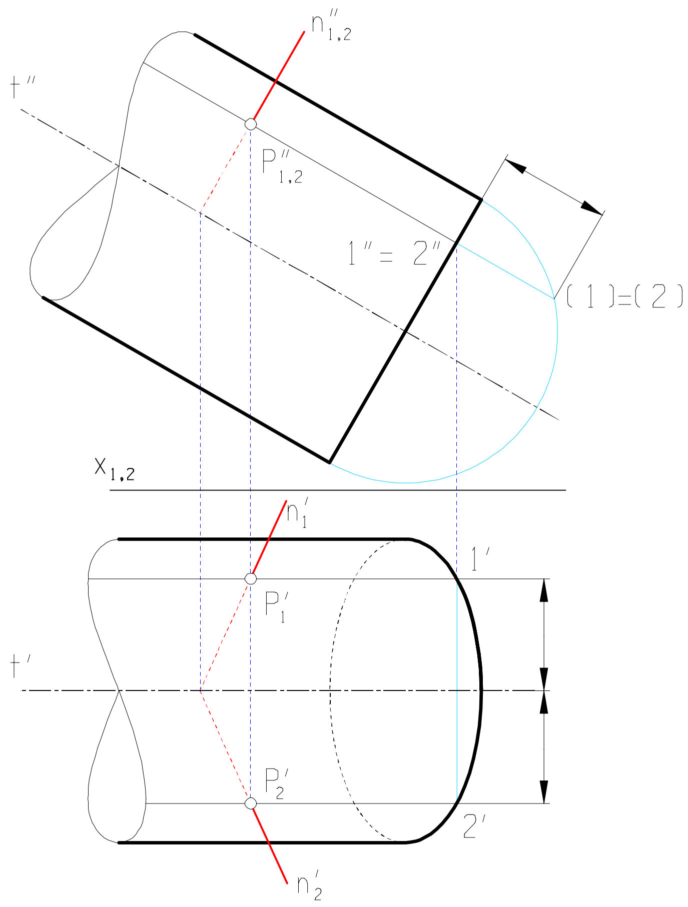
4.2. Forgáshenger ábrázolása és döfése egyenessel

Ha a tengely körül egy vele párhuzamos egyenest forgatunk meg, forgáshengert kapunk. A megforgatott egyenes pontjai a henger *parallelköreit* írják le, az egyenes egyes helyzetei pedig a henger *alkotói*. Elméleti vizsgálatokhoz a végtelen hengerpalástot, gyakorlati célokra ennek két, a tengelyre merőleges sík (alap és fedősík) közé eső részét vesszük.



4.10. ábra. Forgáshenger felületi pontja, normálisa, érintősíkja

- Forgáshenger felületére az alkotója segítségével illesztünk pontot (4.10. ábra);
- a felületi normális a pontra illeszkedő, a forgáshenger tengelyét merőlegesen metsző egyenes;
- a henger érintősíkja egy alkotója mentén érinti a hengert, így az alapkör síkjába eső egyenese érinti a henger alapkörét.

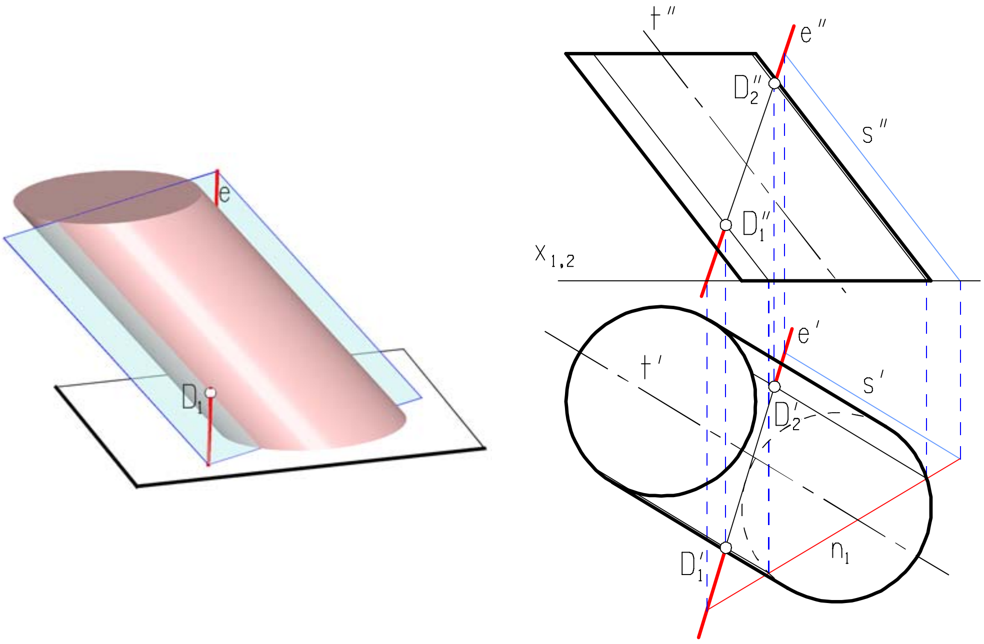


4.11. ábra. Frontális tengelyű forgáshenger felületi pontja és normálisa

A képsíkkal hegyesszöget bezáró tengelyű forgáshenger (4.11. ábra) esetén az alkotó képét a henger beforgatott szelvénye, vagy a tengelyre merőleges képsíkra transzformált képe segítségével szerkesztjük.

Ferde körhenger és egyenes döféspontját (a hasáb és egyenes döféspontjainak megszerkesztéséhez hasonlóan) az egyenesre illeszkedő és a henger alkotóival párhuzamos segédsíkkal szerkesztjük (4.12. ábra, bal oldal). A segédsíknak az alapkör síkjába eső metszésvonala kimetszi az alapkörből a döféspontokon átmenő alkotóknak egy-egy pontját. A 4.12. ábrán a henger alapköre az első képsíkra illeszkedik, ezért a segédsík metszésvonala a nyomvonal, a segédsíkkal kimetszett alkotók pontjai pedig azok nyompontjai.

Általános helyzetű forgáshenger és egyenes döféspontját vetítőhengerré transzformálással, vagy a tengelyre merőleges metszet (alapkör) beforgatásával szerkeszthetjük meg.

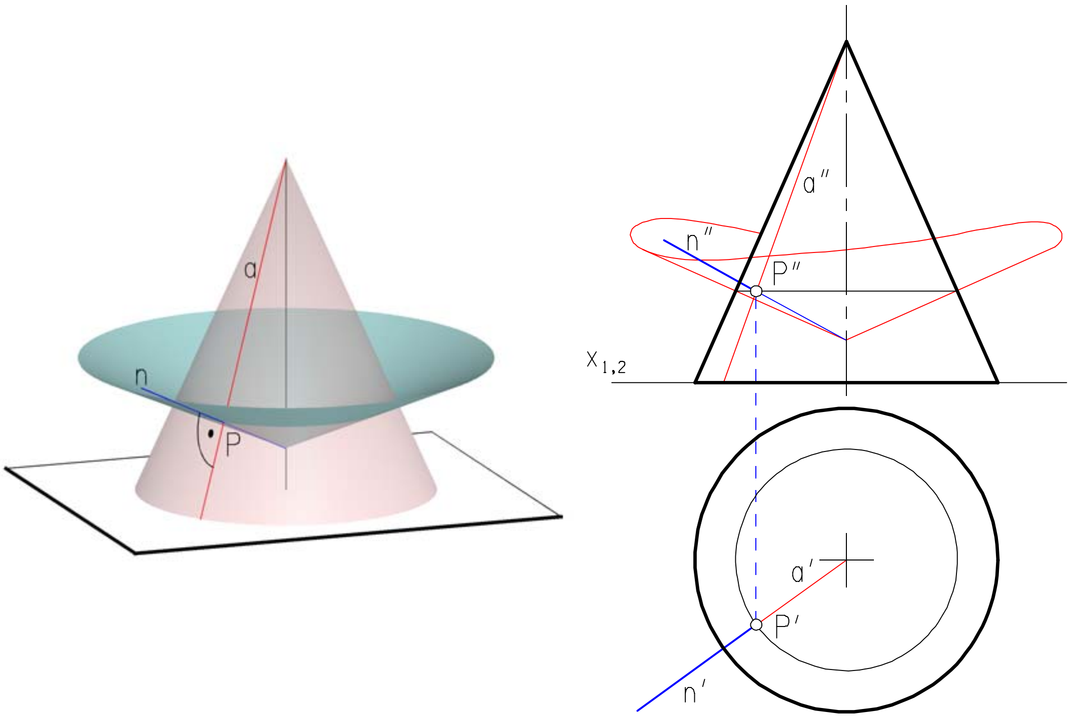


4.12. ábra. Henger döfése egyenessel (bal oldali ábra); Henger döféspontjainak szerkesztése segédsíkkal (jobb oldali ábra)

4.3. Forgáskúp ábrázolása és döfése egyenessel

Ha a tengely körül egy azt metsző egyenest forgatunk meg, forgáskúpot kapunk. A megforgatott egyenes pontjai a kúp *parallelköreit* írják le, az egyenes egyes helyzetei pedig a kúp *alkotói.* Elméleti vizsgálatokhoz a mindkét irányban végtelen kúppalástot, gyakorlati célokra ennek a csúcspont és egy, a tengelyre merőleges sík (alapsík) közé eső részét vesszük.

Forgáskúp felületére az alkotója, vagy a parallelköre segítségével illesztünk pontot. Ha a főmeridián síkjában az alkotóra egy pontjában merőlegest állítunk és azt az alkotóval együtt forgatjuk a tengely körül, a forgáskúppal együtt egy *normálkúp* is létrejön, amelynek alkotói a parallelkör pontjaiban a kúpfelületre merőlegesek.

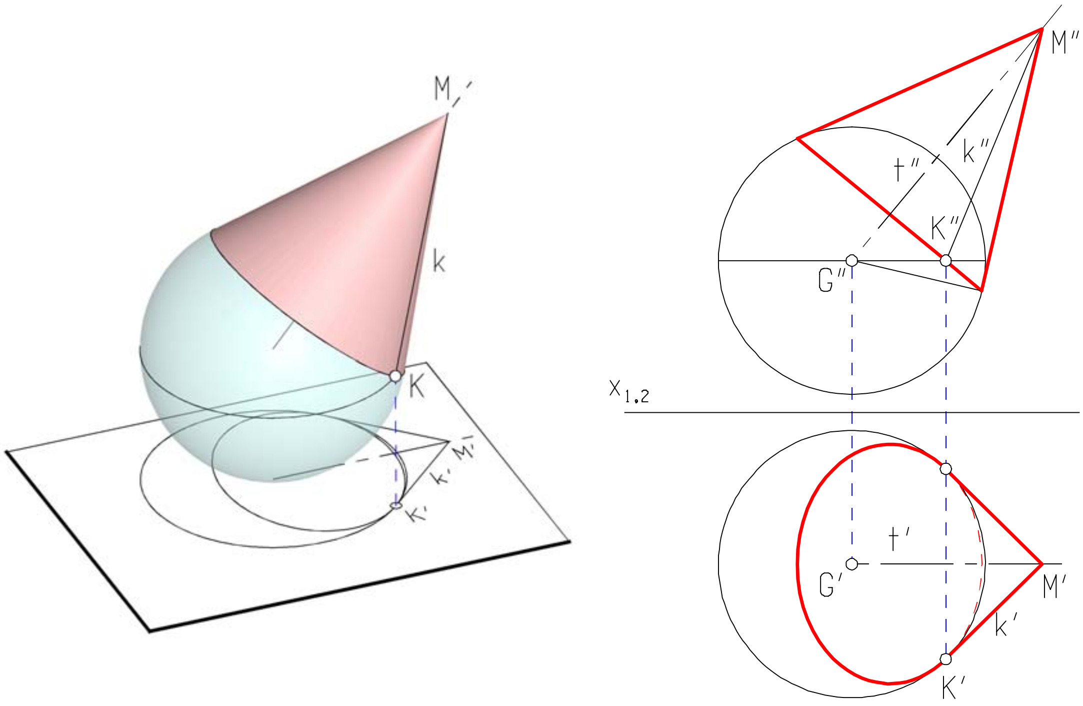


4.13. ábra. Forgáskúp normálkúpja és normálisa (bal oldali ábra); Felületi pont és normális szerkesztése (jobb oldali ábra)

Felületi normális szerkesztése a forgáskúp adott pontjában (4.13. ábra):

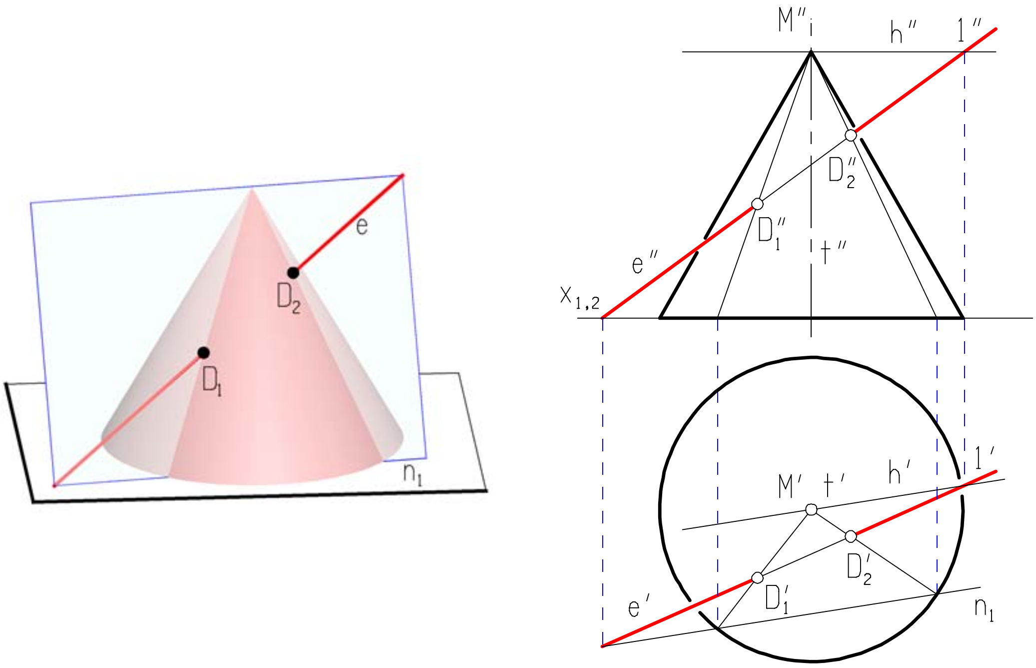
- a pontot parallelköre mentén a forgáskúp tengelye körül a főmeridiánra forgatjuk;
- onnan a főmeridiánra merőlegest állítunk, amely a normálkúp csúcspontját metszi ki a kúp forgástengelyéből;
- a normálkúp csúcspontját összekötjük a felületi ponttal, a normálkúpnak ez az alkotója lesz az adott pontbeli felületi normális.

A kúp érintősíkja egy alkotója mentén érinti a kúpot, így az alapkör síkjába eső egyenese érinti a kúp alapkörét. Ha a forgáskúp alapköre a képsíkra illeszkedik, az érintősík nyomvonala az alapkört érinti, az érintett alkotó pedig az érintősík esésvonala.



4.14. ábra. Kontúralkotó kiválasztása érintőgömbbel (bal oldali ábra); Kúp kontúralkotójának szerkesztése érintőgömbbel (jobb oldali ábra)

Frontális tengelyű forgáskúp első kontúralkotóit a kúpot az alapköre mentén érintő gömb segítségével szerkesztjük (4.14. ábra). Az érintési kör mentén a két felületnek közös az érintősíkja, a gömb kontúrköre mentén az érintősík vetítősík, ezért a két kör metszéspontjában a közös érintősík vetítősík, tehát az kontúrpont. Mivel az érintősík a kúpot alkotói mentén érinti, ezért a kontúrponton átmenő egész alkotó kontúralkotó. Figyelje meg, hogy a kontúralkotó vetülete, vagyis az első képhatár nem megy át az alapkör ellipszisképe nagytengelyének végpontjain (mint a henger esetében), hanem a megszerkesztett kontúrpontban érinti az alapkör ellipszisképét, továbbá hogy különböző ferdeségű tengelyek esetében a kúptest palástjából a felénél több, más esetben kevesebb, esetleg az egész, vagy semmi sem látszik (mert az alapkör takarja).



4.15. ábra. Forgáskúp és egyenes döféspontja (bal oldali ábra); Forgáskúp és egyenes döféspontjainak szerkesztése segédsíkkal (jobb oldali ábra)

4.3.1. Forgáskúp és egyenes döféspontja

Forgáskúp és egyenes döféspontját (a gúla és egyenes döféspontjainak megszerkesztéséhez hasonlóan) az egyenesre és a kúp csúcspontjára illeszkedő segédsíkkal szerkesztjük (4.15. ábra). A segédsíknak az alapkör síkjába eső metszésvonala kimetszi az alapkörből a döféspontokon átmenő alkotóknak egy-egy pontját. Az ábrán a kúp alapköre az első képsíkra illeszkedik, ezért a segédsík metszésvonala a nyomvonal, a segédsíkkal kimetszett alkotók pontjai pedig azok nyompontjai.

4.4. Forgáshenger síkmetszete

A forgáshenger ferde síkmetszete ellipszis.

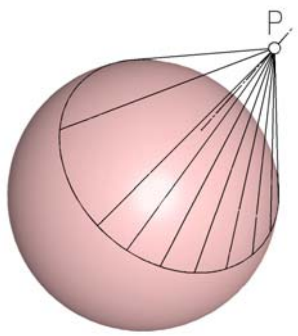
Ugyanis az alapkör és a síkmetszet között (merőleges) tengelyes affinitás áll fenn (az affinitás tengelye a metszősíknak az alapkör síkjában fekvő metszésvonala), a kör affin megfelelője pedig általában ellipszis.

Az ellipszis *fokális* (fókuszokkal kapcsolatos) definíciója:

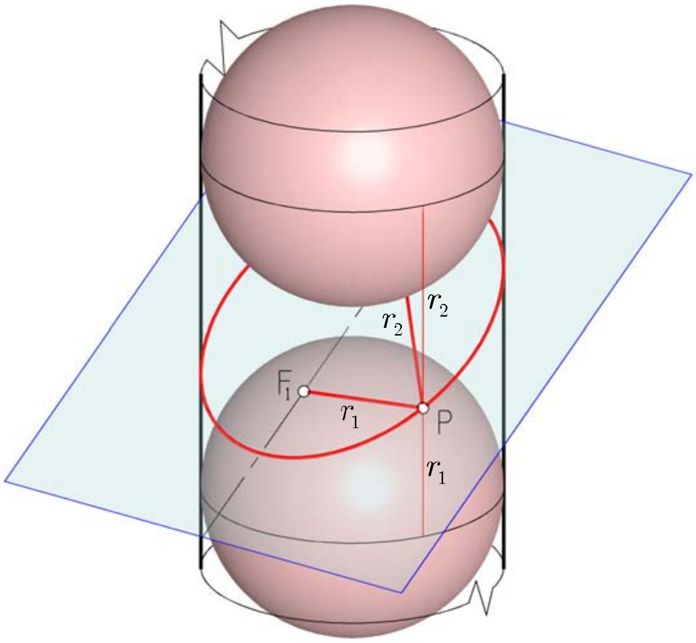
Az ellipszis azon pontok mértani helye a síkban, amelyeknek a sík két pontjától (az ellipszis fókuszaitól) mért távolságának az összege (a fókuszok távolságánál nagyobb) állandó.

A forgáshenger ferde síkmetszete ellipszis (a fokális definíció alapján).

Ezt a Dandelin-gömbökkel bizonyítjuk be. A bizonyításhoz felhasználjuk az alábbi segédtételt: *Egy gömbhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők* (4.16. ábra). Tudjuk, hogy egy körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők és ennek az alakzatnak a szimmetriatengelye körüli megforgatásával kapjuk a gömböt és az érintőit.

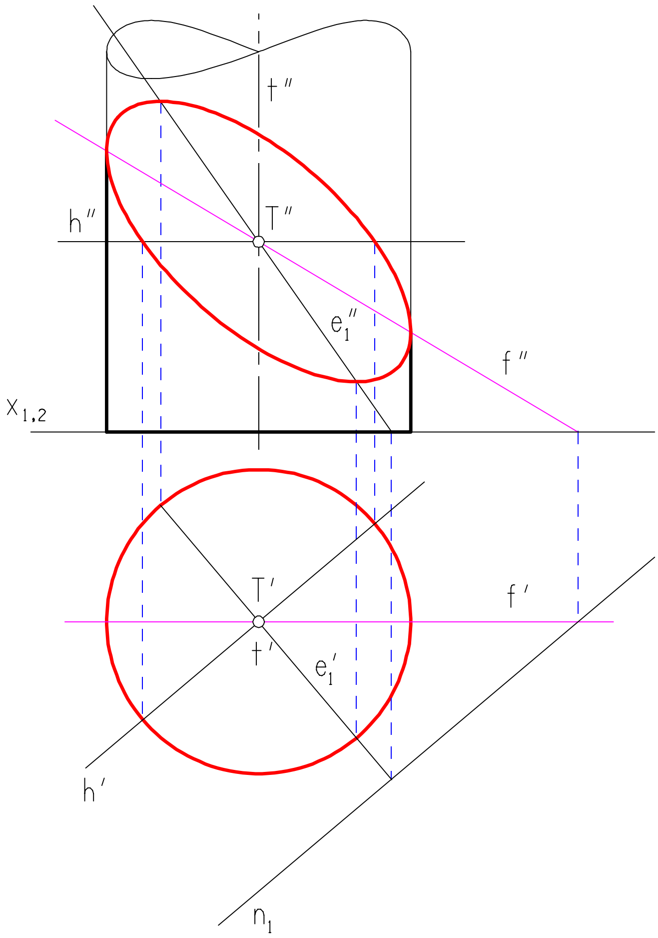


4.16. ábra. Külső pontból a gömbhöz húzott érintők egyenlők



4.17. ábra. Forgáshengert metsző sík és a Dandelin-gömbök

Ezek után az eredeti állítás bizonyítása (4.17. ábra) következik. Legyen adott egy forgáshenger és az azt metsző ferde sík. Illesszünk érintő gömböket, amelyek a hengert parallelkörökben, a metszősíkot pedig egy-egy pontban érintik (ezek a Dandelin-gömbök, amelyek egyértelműen meghatározhatók, pl. a középpontjuk szögfelezővel történő szerkesztésével). Ez után megmutatjuk, hogy a síkmetszet bármely pontjának a Dandelin-gömbök érintési pontjaitól (az $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ fókuszoktól) mért távolság-összege állandó: Legyen **P** a síkmetszet tetszőleges pontja, húzzunk **P**-ből a Dandelin-gömbökhöz két-két érintő-szakaszt: egyiket a metszősíkban a fókuszokig, a másikat a henger alkotója mentén az érintett parallelkörig. Az érintőszakaszok egyenlősége miatt a **P** pont fókuszoktól mért távolság-összege egyenlő az alkotónak a két parallelkör közötti szakaszával, amely viszont független a **P** pont választásától.



4.18. ábra. Forgáshenger metszése általános helyzetű síkkal

Egy első vetítőhengert az általános helyzetű sík olyan ellipszisben metsz, amelynek középpontja a henger **t** tengelyére, kistengelye a metszősík **h** fővonalára, nagytengelye pedig a metszősík $\mathbf{e}_1$ esésvonalára illeszkedik (4.18. ábra). A térbeli tengelyek második képei azonban nem tengelyei, hanem csak konjugált átmérői az ellipszis második képének. A képellipszis tengelyeit a Rytz-módszerrel szerkeszthetjük meg. A kontúrpontok a metszősík **f** fővonalán vannak.

Előfordul, hogy a metszősík a henger alap- (vagy fedő-) körébe is belemetsz. Ilyenkor a meghosszabbított hengerpalástból kimetszett teljes ellipszist szerkesztjük meg, majd annak a véges hengerre eső részét húzzuk ki. Az ellipszis akármilyen kicsiny íve egy ellipszis része és nem körív, vagy parabolaív.

4.5. A kúpszeletek síkgeometriai tulajdonságai

A másodrendű kúp (itt csak forgáskúp szerepel) síkmetszeteit közös névvel *kúpszelet*eknek nevezzük.

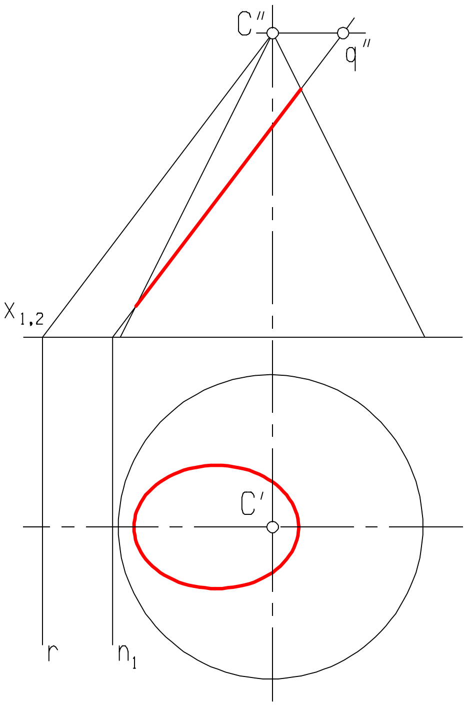
A kúpszeletek a műszaki- és a természettudományokban jelentősek:

- a csillagászatban az égitestek pályái;

- műszaki alkalmazásuk: hídszerkezetek, antennák.

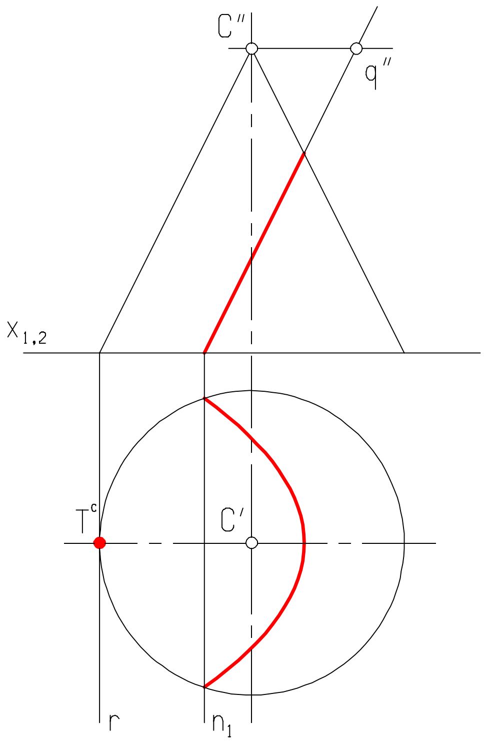
4.5.1. A kúpszeletek végtelen távoli pontjai

Az első képsíkon álló forgáskúp alapköre és síkmetszete között centrális kollineáció áll fenn. A kollineáció centruma a kúp **C** csúcspontja, tengelye a metszősík $\mathbf{n}_1$ nyomvonala, a metszősík végtelen távoli egyenesének megfelelő ellentengely pedig az **r** egyenes (a másik ellentengely az alapsík végtelen távoli egyenesének a metszősíkra eső **q** vetülete). Ebben a centrális kollineációban a kúpszelet centrális képe (mintegy fényképe) az alapkör, a végtelen távoli egyenesé pedig az **r** egyenes. Figyeljük meg ezen a centrális képen a kúpszelet és a végtelen távoli egyenes kapcsolatát:



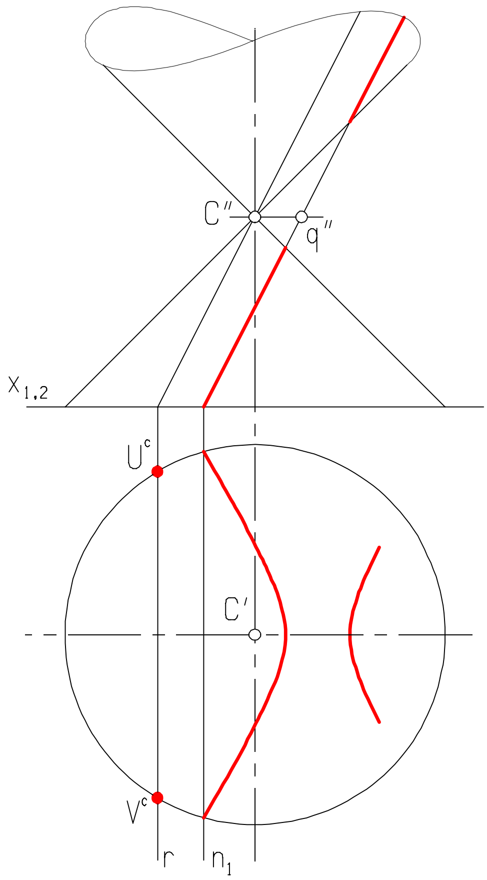
4.19. ábra. Az ellipszisnek nincs végtelen távoli pontja

- ha a metszősík a tengellyel a félnyílásnál nagyobb szöget zár be (4.19. ábra)
  - a csúcsponton átmenő, a metszősíkkal párhuzamos sík nem metsz ki valós alkotót;
  - a kúpszeletnek nincs valós végtelen távoli pontja;
  - a kúpszelet *ellipszis*;



4.20. ábra. A parabolát a sík végtelen távoli egyenese érinti egy pontban

- ha a metszősík a tengellyel a félnyílással egyenlő szöget zár be (4.20. ábra)
  - a csúcsponton átmenő, a metszősíkkal párhuzamos sík egy alkotóban érinti a kúpot;
  - a kúpszelet egy valós végtelen távoli pontban érinti a végtelen távoli egyenest;
  - a kúpszelet *parabola*;



4.21. ábra. A hiperbolát a sík végtelen távoli egyenese két pontban metszi

- ha a metszősík a tengellyel a félnyílásnál kisebb szöget zár be (4.21. ábra)
  - a csúcsponton átmenő, a metszősíkkal párhuzamos sík két valós alkotót metsz ki;
  - a kúpszelet két valós végtelen távoli pontban metszi a végtelen távoli egyenest;
  - a kúpszelet *hiperbola*.

4.5.2. A kúpszeletek fokális definíciói

Az ellipszis fokális definícióját már a hengernél megismertük, itt most mégis megismételjük, hogy együtt látva a három kúpszelet definícióját rögzíthessük, miben egyeznek, miben különböznek:

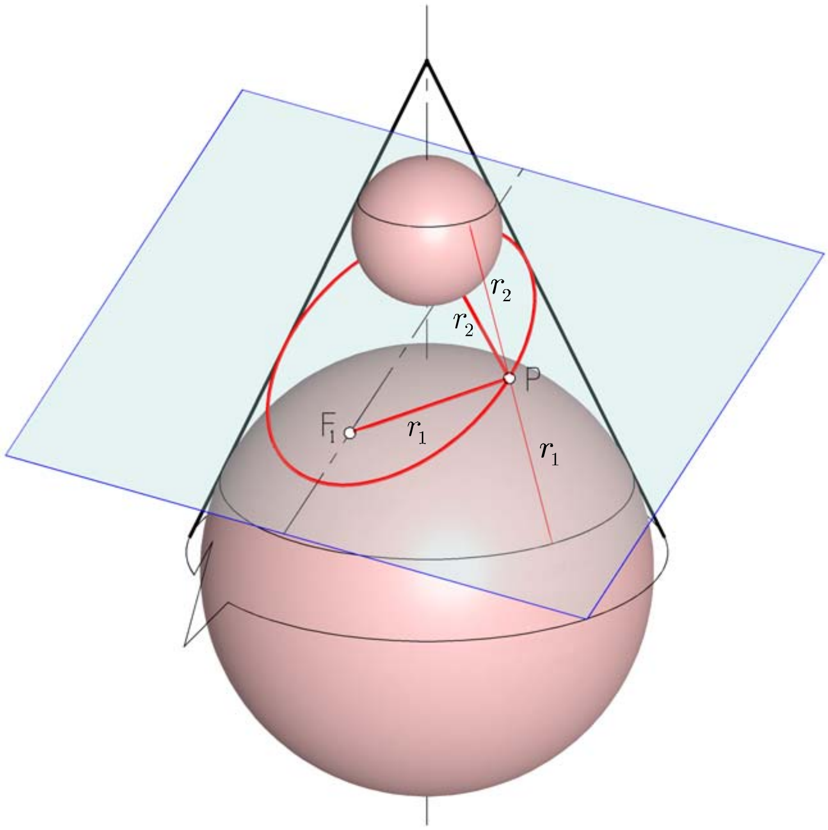
Az ellipszis azon pontok mértani helye a síkban, amelyeknek a sík két pontjától (az ellipszis fókuszaitól) mért távolságának az összege (a fókuszok távolságánál nagyobb) állandó.

A hiperbola azon pontok mértani helye a síkban, amelyeknek a sík két pontjától (a hiperbola fókuszaitól) mért távolságának a különbsége (a fókuszok távolságánál kisebb) állandó.

A parabola azon pontok mértani helye a síkban, amelyeknek a sík egy pontjától (a parabola fókuszától) és egy egyenesétől (a parabola vezéregyenesétől) mért távolsága egyenlő.

A kúpszelet egy pontja és fókusza közötti szakasz neve *vezérsugár*. A kúpszeletek előbbi fokális tulajdonságai alapján a kúpszeletek pontját ("kertész-módszerrel"), majd a vezérsugarak szögfelezőjeként az érintőjét is megszerkeszthetjük.

A „kertész-módszer” elnevezés arra utal, hogy a barokk kertépítésben szokás volt a kastélyhoz felvezető útra nagytengelyével keresztbe egy ellipszis alakú virágágyat elhelyezni. Ennek az volt az optikai hatása, hogy a jámbor látogató (tudat alatt kör alakúnak vélve a virágágyat,) a kastélyt távolabbinak, tehát nagyobbnak érzékelte a valóságosnál. A kertészek a virágágy ellipszisét úgy jelölték ki, hogy a fókuszokba egy-egy karót ütöttek, majd az ezekre kötött, a nagytengellyel egyenlő hosszúságú fonalat egy harmadik karóval kifeszítve körbe karcolták a virágágyat.

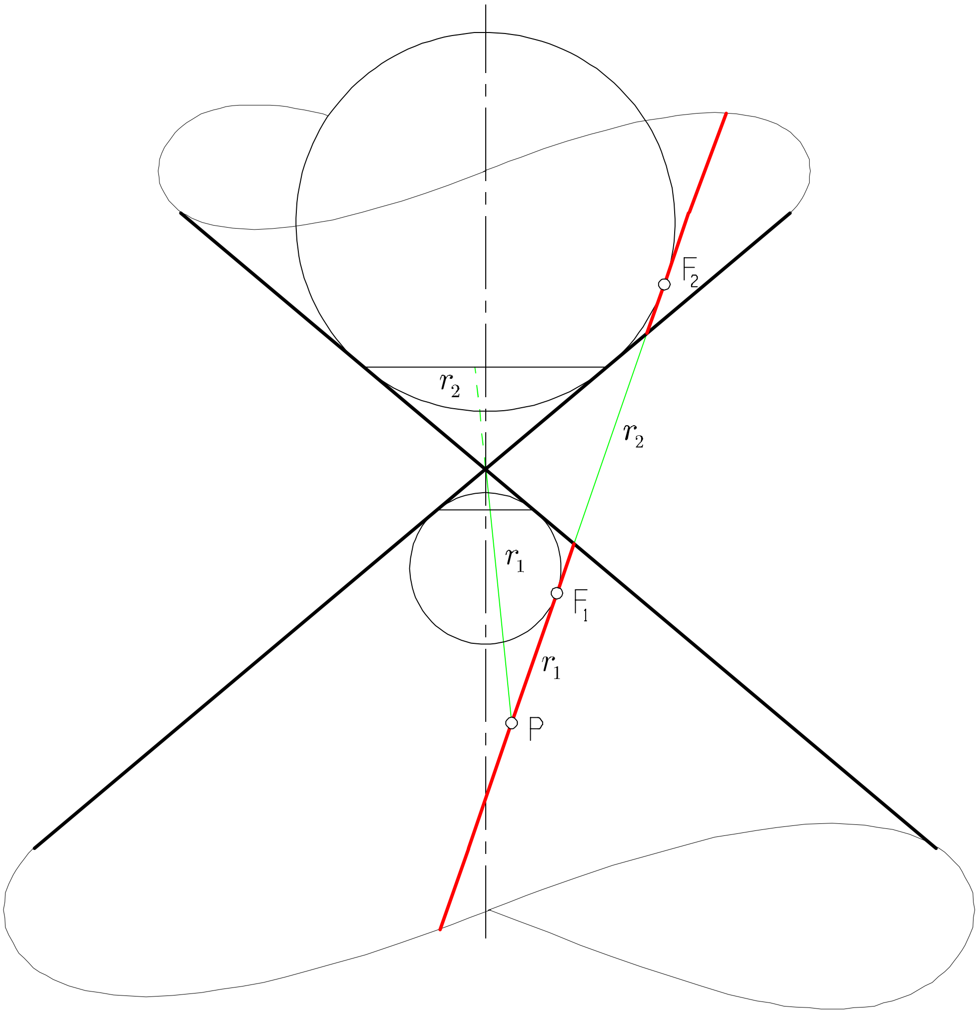


4.22. ábra. Az ellipszismetszet fokális tulajdonsága

A fenti módszert több-kevesebb sikerrel rajztáblán rajzszögekkel és ceruzával is kipróbálhatjuk (a hiperbola és a parabola esetére is van ilyen fonalas rajzolási mód), ez azonban euklideszi értelemben nem szerkesztés. Szerkesztést a fokális tulajdonság alapján úgy kapunk, hogy a nagytengelyen (hiperbola esetén a valós tengelyen felvett tetszőleges ponttal kijelölünk két olyan távolságot, amelynek összege (illetve különbsége) $2a$. A fókuszok körül ezekkel a távolságokkal rajzolt körívek a kúpszelet pontjaiban metszik egymást. A kapott pontok vezérsugarain a két körívnek a pontokhoz tartozó sugarait értjük. Parabola pontját a fokális definíció alapján úgy szerkeszthetjük, hogy a tetszőleges távolsággal a fókusz köré rajzolt kört elmetszük a vezéregyenestől ilyen távolságra (a fókusz oldalán) rajzolt párhuzamossal. Ebben az esetben a kimetszett pont vezérsugarai a fókuszból húzott sugár és a vezéregyenesre állított mrőleges szakasz.

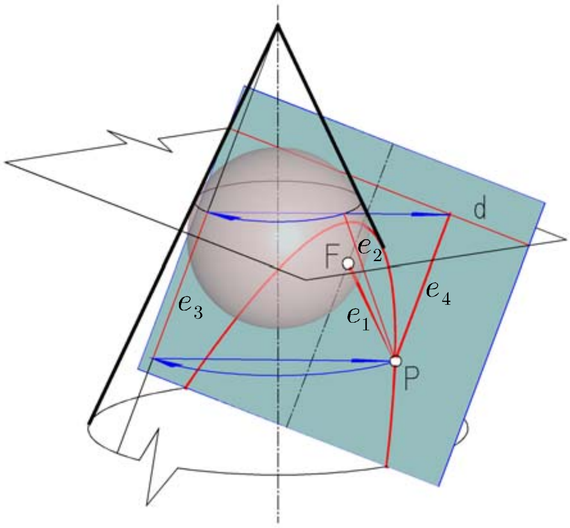
A forgáskúpból kimetszett kúpszeletek fokális tulajdonságait (a henger esetéhez hasonló módon) a Dandelin-gömbökkel bizonyítjuk.

- Az ellipszis esetében a bizonyítás csak annyiban tér el a forgáshengernél tárgyalttól, hogy forgáshenger helyett egy csonka kúpot kapunk (4.22. ábra). Bizonyítson!



4.23. ábra. A hiperbolametszet fokális tulajdonsága

- a hiperbola esetében a vezérsugarak különbsége a kúp csúcsát is tartalmazó kettőskúp véges darabjának alkotóival egyenlő (4.23. ábra). Bizonyítson!



4.24. ábra. A parabolametszet fokális tulajdonsága

- a parabola esetében a bizonyítást az alábbiakban részletezzük (4.24. ábra):
  - a metszősík most a kúpnak pontosan egy alkotójával párhuzamos, ezért csak egy olyan Dandelin-gömb van, amelyik a kúpot egy parallelkörében, a metszősíkot pedig egy **F** pontjában (a fókuszban) érinti;
  - az érintési parallelkör síkja a metszősíkból kimetszi a **d** vezéregyenest;
  - válasszuk a síkmetszet tetszőleges **P** pontját és húzzunk ebből a Dandelin-gömbhöz két érintőt: az egyiket a metszősíkban az **F** érintési pontig (fókuszig), jelölje ennek a szakasznak a hosszát e_1, a másikat pedig a **P** ponton átmenő alkotó mentén az érintési parallelkörig, jelölje ennek a hosszát e_2; $e_1 = e_2$, mert külső pontból a gömbhöz húzott érintők egyenlők;
  - forgassuk az utóbbi szakaszt a kúp tengelye körül a metszősíkkal párhuzamos alkotóra és jelölje az elforgatott szakasz hosszát e_3, a forgatás miatt $e_2 = e_3$;
  - végül toljuk el az elforgatott szakaszt önmagával párhuzamosan úgy, hogy a megfelelő végpont visszakerüljön **P**-be, eközben a másik végpont az érintési parallelkör síkjában mozdul el és a párhuzamosság miatt a rá merőleges **d**-re kerül; az eltolás miatt $e_3 = e_4$;
  - összegezve tehát $e_1 = e_4$, vagyis a **P** pontnak az **F** fókusztól és a **d** vezéregyenestől mért távolsága egyenlő.

A Dandelin-gömbök nemcsak a bizonyítás miatt fontosak, hanem azért is, mert a segítségükkel megszerkeszthetjük a forgáskúpból kimetszett kúpszeletek fókuszait.

Az ellipszis a fél nagytengelye, b fél kistengelye és c fél fókusztávolsága egy derékszögű háromszöget alkot, ezért közülük bármely kettő egybevágóságig meghatározza az ellipszist. Az $e = c/a < 1$ excentricitás az ellipszist hasonlóságig meghatározza. Az excentricitás az ellipszisnek a körtől való eltérését, lapultságát fejezi ki. A kör olyan ellipszis, amelynek a fókuszai egybeesnek, így a kör excentricitása $e = 0$.

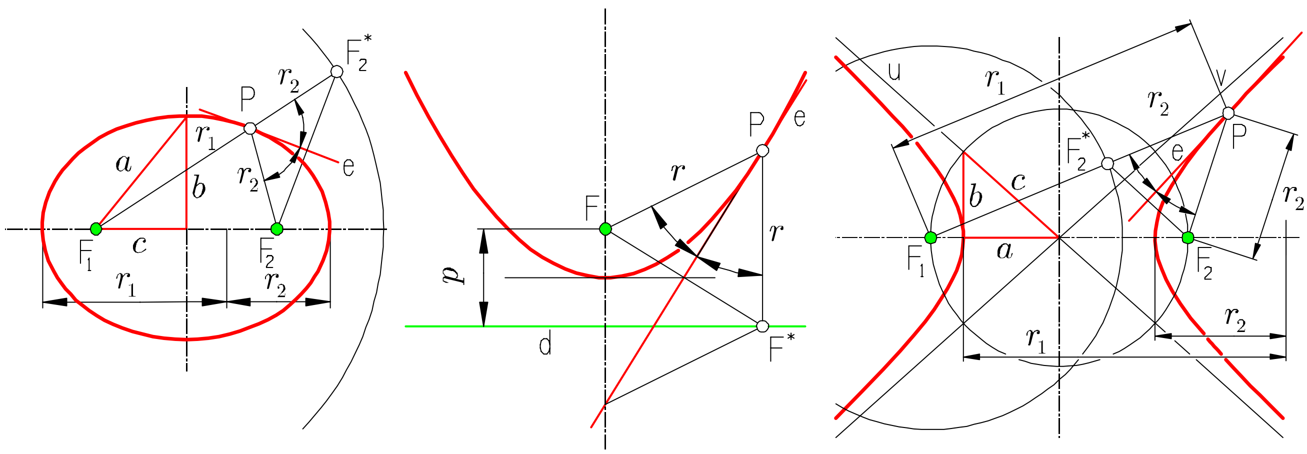
A naprendszer bolygói ellipszispályákon keringenek, amelyek egyik fókuszában van a Nap. Ezeknek az ellipsziseknek az excentricitása azonban nagyon kicsi, például a Föld pályájának az excentricitása $0,0167$. Próbáljon egy ilyen ellipszist rajzolni! Nem csoda, hogy egészen Kepler 1609-ben megjelent művéig körnek vélték.

A hiperbola a fél valós tengelye, b fél képzetes tengelye és c fél fókusztávolsága derékszögű háromszöget alkot, ezért közülük bármely kettő egybevágóságig meghatározza a hiperbolát. Az $e = c/a > 1$ excentricitás a hiperbolát hasonlóságig meghatározza.

A parabola fókuszának és vezéregyenesének p távolsága, (a parabola paramétere) egybevágóságig meghatározza a parabolát. A p távolságot a parabola paraméterének nevezzük. A parabola excentricitása $e = 1$, tehát bármely két parabola hasonló!

Szerkesztések vezérkörrel vezéregyenessel

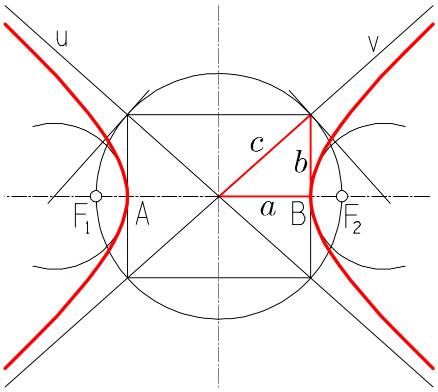
Az ellipszis és a hiperbola esetén az egyik fókusz érintőkre vett tükörképeinek a mértani helye a másik fókusz köré írt $2a$ sugarú kör, a *vezérkör* (ellenkör). Parabola esetén a fókusz érintőkre vett tükörképeinek a mértani helye a *vezéregyenes*. A vezérkör illetve vezéregyenes felhasználásával a kúpszelethez külső pontból érintőt, adott irányú érintőt, sőt adott egyenessel metszéspontot szerkeszthetünk (4.25. ábra).



a) *b*) *c*)

4.25. ábra. a) Az ellipszis pontja, érintője, vezérköre; b) A parabola pontja, érintője, vezéregyenese; c) A hiperbola pontja, érintője, vezérköre

Tekintsük a hiperbola egyik fókuszának azokat a tükörképeit, amelyek a másik fókusz köré írt vezérkörhöz húzott érintők érintési pontjaiba esnek. Az ezekhez tartozó tükrözési tengelyek a hiperbola végtelen távoli pontjaiban érintenek, ezek a hiperbola aszimptotái. Az aszimptoták iránytangense b/a.



4.26. ábra. Hiperbola szerkesztése a valós tengely és az egyik fókusz ismeretében

4.3. Feladat. *Adott egy hiperbola valós tengelyén az* $\mathbf{F}_1$ *fókusz és az* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *csúcspontok (a valós tengely végpontjai). Rajzolja meg a hiperbolát!*

Megoldás. (4.26. ábra)

- Az **AB** valós tengely szakaszfelező merőlegese a hiperbola képzetes tengelye;
- a hiperbola középpontja köré rajzoljunk az $\mathbf{F}_1$ fókuszon át c sugarú kört! Ez egyrészt kimetszi a másik fókuszt, másrészt az $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ pontokban húzott csúcsérintőkből az aszimptoták pontjait;
- szerkesszük meg a hiperoszkuláló köröket és rajzoljuk meg a hiperbolát! A hiperbola hiperoszkuláló köreinek a sugara (mint az ellipszisnél) b^2/a, csak itt a tengelypontokon kívül. Állítson merőlegest az aszimptotára az érintőtéglalap csúcsában (ahol a c sugarú kör metszi) ez a merőleges a valós tengelyt a hiperoszkuláló kör középpontjában metszi.
- húzzuk ki görbevonalzó mellett úgy, hogy a szimmetrikus ívekhez a görbevonalzónak ugyanazt az ívét használjuk.

4.4. Feladat. *Adott egy parabola* **F** *fókusza és* **d** *direktrixe (vezéregyenese). Rajzolja meg a parabolát!*

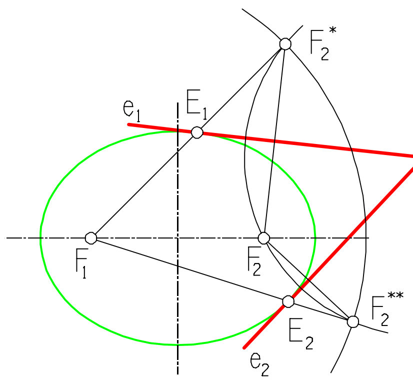
Megoldás. (4.25.b) ábra)

- Szerkesszük meg a tengelyt és rajta a tengelypontot;
- szerkesszük meg a hiperoszkuláló kört (ennek p sugara a parabola paramétere, ami a fókusz és a vezéregyenes távolsága);
- szerkesszünk általános helyzetű pontot és érintőt;
- rajzoljuk meg a szerkesztett adatokat kielégítő görbét (halvány szabadkézi vonallal);
- húzzuk ki görbevonalzó mellett úgy, hogy a szimmetrikus ívekhez a görbevonalzónak ugyanazt az ívét használjuk.

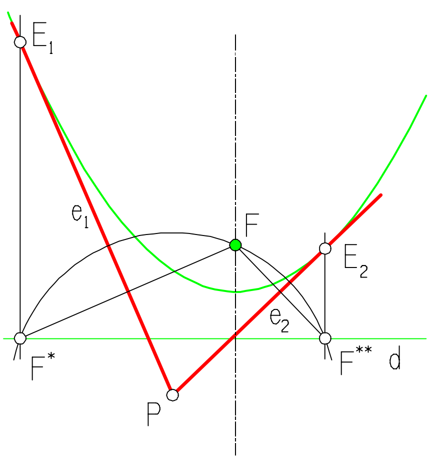
4.5. Feladat. *Adottak az ellipszis, parabola, vagy hiperbola fókuszai valamint vezérköre, illetve (a parabola esetében) vezéregyenese és még egy külső* **P** *pont. Szerkesszünk az adott kúpszelethez a* **P** *pontból érintőt!*

Megoldás. (4.27., 4.28., 4.29. ábrák)

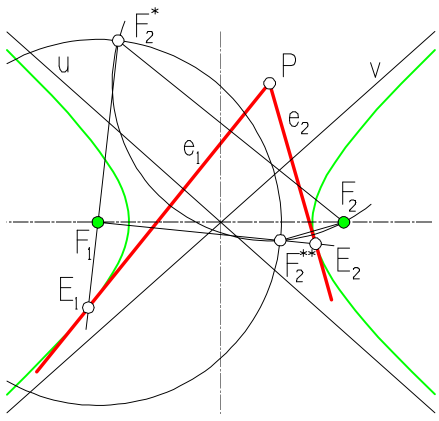
- A fókusz és a **P** ponton átmenő érintőre vett tükörképe **P**-től egyenlő távolságra van, tehát egy **P** középű, a fókuszon átmenő kör és a vezérkör, illetve (a parabola esetében) vezéregyenes két metszéspontjában lehet,
- a keresett érintők a fókusz és tükörképe között vett szakasz felező merőlegesei,
- az érintőn az érintési pontot a fókusz tükörképét a másik fókusszal összekötő egyenes, vagyis a vezérkör sugara, illetve (a parabola esetében) a végtelen távoli másik fókuszhoz húzott, a vezéregyenesre merőleges egyenes metszi ki.



4.27. ábra. Érintő szerkesztése ellipszishez vezérkörrel



4.28. ábra. Érintő szerkesztése parabolához vezéregyenessel

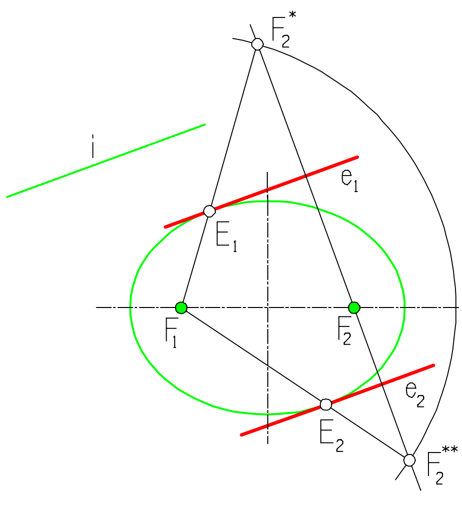


4.29. ábra. Érintő szerkesztése hiperbolához vezérkörrel

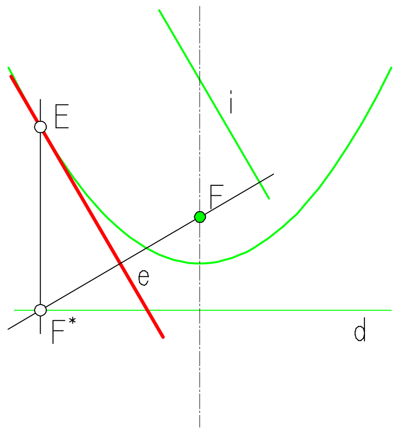
4.6. Feladat. *Adottak az ellipszis, parabola, vagy hiperbola fókuszai valamint vezérköre, illetve (a parabola esetében) vezéregyenese és még egy* **i** *irány. Szerkesszünk az adott kúpszelethez az* **i** *iránnyal párhuzamos érintőt!*

Megoldás. (4.30., 4.31., 4.32. ábrák)

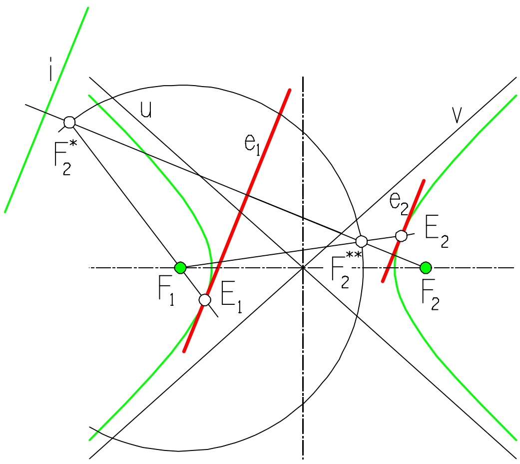
- Projektív szemlélettel nézve ez a feladat csupán annyiban tér el az előzőtől, hogy a keresett érintőnek a végesben lévő **P** pont helyett az **i** irány végtelen távoli iránypontjára kell illeszkedni, ezért a fókusz tükörképét a **P** középű kör helyett az **i** irányra merőleges egyenes (végtelen sugarú kör) metszi ki,
- a szerkesztés további elemei megegyeznek az előzőével.



4.30. ábra. Adott irányú érintő szerkesztése ellipszishez vezérkörrel



4.31. ábra. Adott irányú érintő szerkesztése parabolához vezéregyenessel

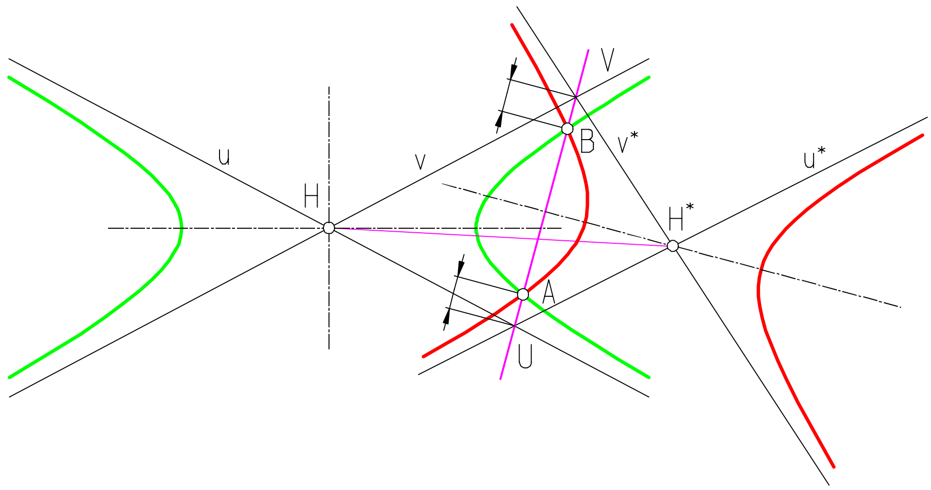


4.32. ábra. Adott irányú érintő szerkesztése hiperbolához vezérkörrel

4.5.3. A kúpszeletek affin tulajdonságai

A kúpszeletek affin tulajdonságain azokat a tulajdonságokat értjük, amelyek affin transzformációval szemben invariánsak. A kúpszelet típusa pl. affin tulajdonság, mert a végtelen távoli pontok számától függ, ami affin invariáns. A fókusz azonban nem az. Gondoljunk egy körre és a vele affinitásban álló ellipszisre. A kör fókuszai egybeesnek, az ellipszis fókuszai pedig nem.

Az ellipszis affin tulajdonságait már tárgyaltuk.



4.33. ábra. A hiperbola és az aszimptoták közé eső szelődarabok egyenlők

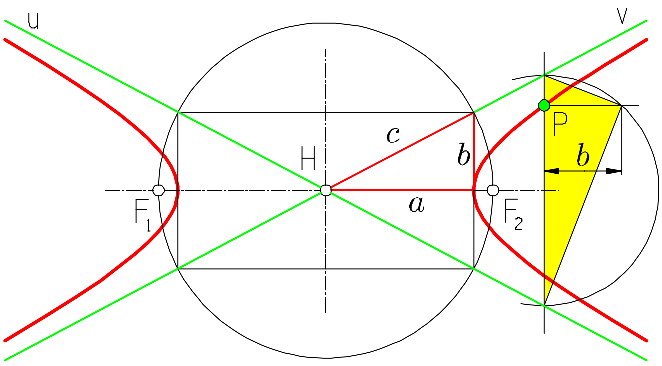
A hiperbola affin tulajdonságai

- A szelőnek a hiperbola pontjaitól az aszimptotákig terjedő darabjai egyenlők. Az állítás belátásához tekintsük most a hiperbolának a tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ pontokban metsző szelőjét (4.33. ábra). Ugyanez a szelő az aszimptotákat az $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ pontokban metszi. Hajtsuk végre a hiperbolán azt az affin transzformációt, amelynek tengelye az adott szelő, és amely affinitás a hiperbola $\mathbf{H}$ középpontját az $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ pontok felező-merőlegesére viszi át. A transzformált hiperbolán $\mathbf{AU} = \mathbf{BV}$, mert szimmetrikusak, tehát az eredeti hiperbolán is egyenlők.

- Ha ezek után $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, azaz a szelő a hiperbola érintője, az előző tulajdonságból következik, hogy az érintési pont felezi az érintőnek az aszimptoták közé eső szeletét;

- Középiskolából ismert az $xy = C$ egyenletű egyenlő oldalú hiperbola. Ebből a valós tengelyére vett merőleges affinitással akármilyen excentricitású hiperbolát előállíthatunk. A hiperbola alábbi három tulajdonsága az $xy = C$ egyenletű egyenlő oldalú hiperbolán könnyen belátható. Ebből már - kihasználva, hogy az adott tulajdonság affin invariáns – következik, hogy a tulajdonságok minden hiperbolára teljesülnek.

  - Az érintő által az aszimptotákból lemetszett szakaszok szorzata állandó, mértani közepük a hiperbola fél fókusztávolsága: c (4.35. ábra);
  - a képzetes tengellyel párhuzamos szelőn a hiperbola pontjától az aszimptotákig terjedő szakaszok szorzata állandó, mértani közepük a hiperbola fél képzetes tengelye: b (4.34. ábra);
  - a valós tengellyel párhuzamos szelőn a hiperbola pontjától az aszimptotákig terjedő szakaszok szorzata állandó, mértani közepük a hiperbola fél valós tengelye: a.

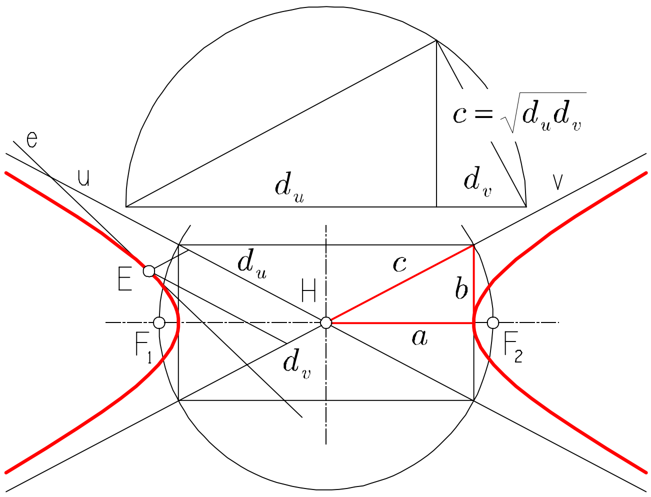


4.34. ábra. Hiperbola szerkesztése az aszimptoták és egy pont ismeretében

4.7. Feladat. *Adott a hiperbola* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *aszimptotája és* $\mathbf{P}$ *pontja. Rajzolja meg a hiperbolát!*

Megoldás. (4.34. ábra) A hiperbola megrajzolásához megszerkesztjük a tengelyeit, fókuszait, hiperoszkuláló köreit:

- az aszimptoták szögfelezői a tengelyek egyenesei;
- a képzetes tengellyel párhuzamos szelőnek a hiperbola $\mathbf{P}$ pontjától az aszimptotákig terjedő darabjai között a hiperbola fél képzetes tengelye: b mértani közép;
- a valós tengelytől b távolságra vannak az aszimptotákon az érintőtéglalap csúcsai;
- az érintőtéglalap csúcsain átmenő c sugarú kör kimetszi a valós tengelyből a fókuszokat;
- a hiperoszkuláló kör sugara (mint az ellipszisnél) b^2/a, a középpontját az érintőtéglalap csúcsában az aszimptotára állított merőleges metszi ki a valós tengelyből;
- rajzoljuk meg a szerkesztett adatoknak megfelelő hiperbolákat és húzzuk ki görbevonalzó mellett úgy, hogy a szimmetrikus ívekhez a görbevonalzónak ugyanazt a darabját használjuk!



4.35. ábra. Hiperbola szerkesztése az aszimptoták és egy érintő ismeretében

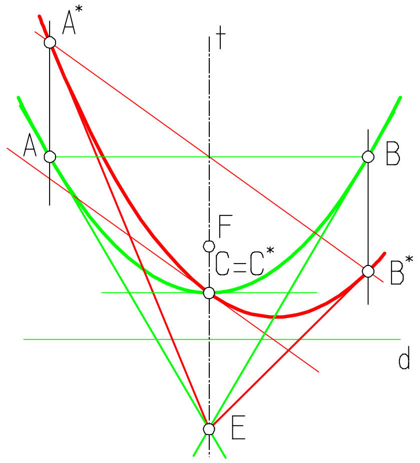
4.8. Feladat. *Adott a hiperbola* **u**, **v** *aszimptotája és* **e** *érintője. Rajzolja meg a hiperbolát!*

Megoldás. (4.35. ábra) A hiperbola megrajzolásához megszerkesztjük a tengelyeit, fókuszait, hiperoszkuláló köreit:

- az aszimptoták szögfelezői a tengelyek egyenesei;
- az érintő által az aszimptotákból lemetszett szakaszok szorzata állandó, mértani közepük a hiperbola fél fókusztávolsága: c;
- a **H** középpontú c sugarú kör az aszimptotákból kimetszi az érintőtéglalap csúcsait, a valós tengelyből pedig a fókuszokat;
- az **E** érintési pont felezi az érintőnek az aszimptoták közé eső szeletét;
- a továbbiakban az előző feladathoz hasonlóan járunk el.

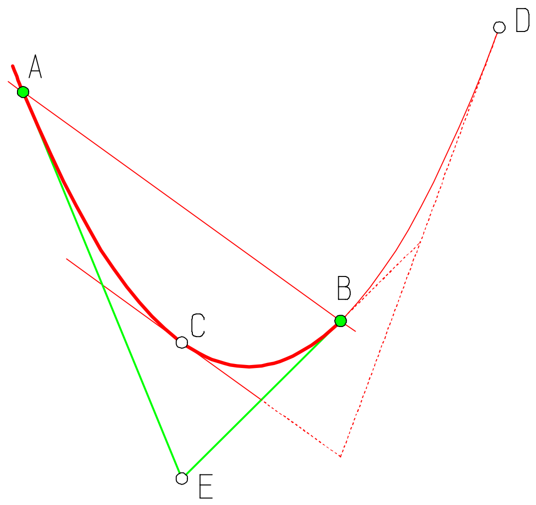
A parabola affin tulajdonságai

Vegyük egy parabolának a tengelyére szimmetrikus valamely ívét a végpontokhoz tartozó érintőkkel, és vessük alá olyan affin transzformációnak, amelynek a tengelye a parabola tengelye, az iránya pedig azzal párhuzamos (affin eláció) (4.36. ábra).



4.36. ábra. Parabola és affin transzformáltja

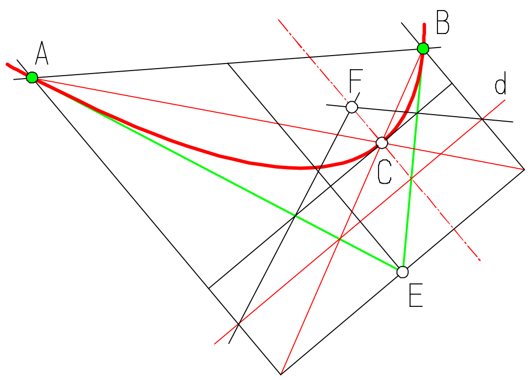
- A transzformált parabolának az eredeti tengely már nem tengelye, de párhuzamos azzal, mert a parabola végtelen távoli pontja az affinitás tengelyén van. Ha tehát a transzformált parabola húrjának a felezőpontját összekötjük a húr végpontjaihoz tartozó érintők metszéspontjával, megkapjuk a tengely irányát.
- Az eredeti parabola csúcsérintője felezi az érintőknek az érintési pont és a tengely közé eső darabját. Mivel az affinitásban az osztóviszony invariáns, ez a transzformált parabolára is igaz. Tehát egy külső **E** pontból a parabolához húzott érintőszakaszok felezőpontjait összekötő, (az érintési pontokon átmenő húrral párhuzamos) szakasz a felezőpontjában érinti a parabolát.



4.37. ábra. Parabola rajzolása az érintőszakaszok felezésével

A fenti eljárást folytatva (akár „visszafelé” is) a parabola tetszőlegesen sok pontját és érintőjét előállíthatjuk, és végül megrajzolhatjuk a parabolát, anélkül, hogy tengelyét, fókuszát ismernénk (4.37. ábra). Igényesebb rajzhoz az alábbiak szerint járunk el.

4.9. Feladat. *Adott a parabola két pontja a pontbeli érintőkkel. Rajzolja meg a parabolát!*



4.38. ábra. Parabola szerkesztése az érintőkből

Megoldás. (4.38. ábra) A megrajzoláshoz szerkesszük meg a parabola tengelyét, csúcspontját, hiperoszkuláló körét:

- az érintők metszéspontját kössük össze a húr felezőpontjával, ez lesz a tengely *iránya* (de általában nem a tengely);
- húzzunk párhuzamosokat a tengely irányával az érintési pontokon át;
- ezután

  – vagy tükrözzük az érintőkre az érintési pontokon átmenő, a tengely irányával párhuzamos egyeneseket, így a tükörképek metszéspontjaként a parabola fókuszát kapjuk (ez a szerkesztés nem stabil, ha az érintők közel merőlegesek);
  – vagy állítsunk a tengely irányára merőlegest az érintők metszéspontjából, az így kapott derékszögű trapéz átlóinak metszéspontja adja a parabola tengelypontját (a 4.38. ábrán ezt látjuk);

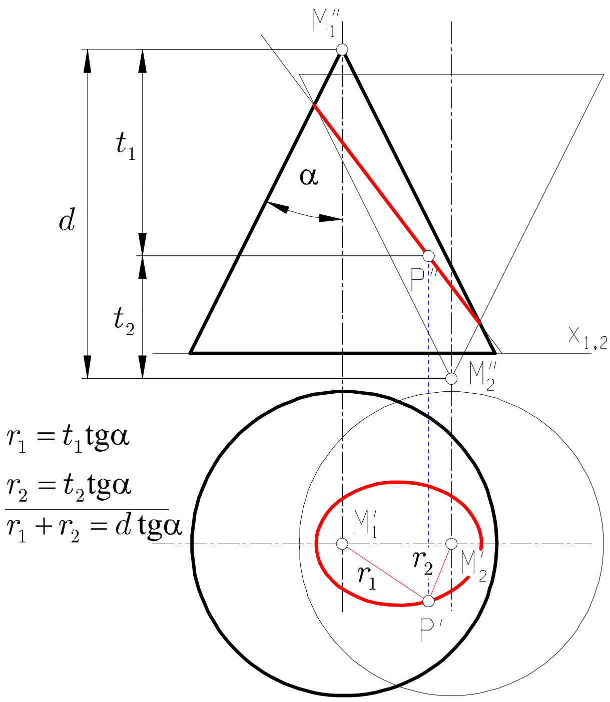
- mindkét esetben már könnyen szerkeszthető a parabola tengelye és tengelypontjában a p sugarú hiperoszkuláló köre.

4.6. A forgáskúp síkmetszeteinek ábrázolása

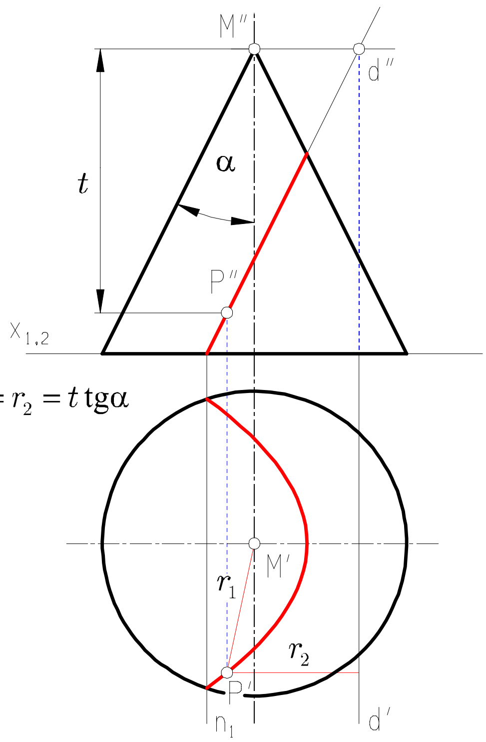
Az eddigiekben a kúpszeletek *síkgeometriai* tulajdonságaival foglalkoztunk, még ha azokat a forgáskúp felhasználásával vezettük is le. A következőkben a forgáskúp síkmetszeteit fogjuk ábrázolni. Tudjuk már, hogy ez a síkmetszet ellipszis, parabola, vagy hiperbola aszerint, hogy a metszősíknak a kúp tengelyével bezárt szöge a kúp félnyílásszögénél nagyobb, egyenlő, vagy kisebb és a metszősík nem megy át a kúp csúcspontján. Ezen kúpszeletek el nem fajuló vetülete is ugyanúgy ellipszis, parabola, vagy hiperbola lesz, mert a végtelen távoli pontoknak és csak azoknak a vetülete is végtelen távoli párhuzamos vetítés során.

Egy forgáskúpnak és egy a tengelyével hegyesszöget bezáró metszősíknak pontosan egy közös szimmetriasíkja van: az, amelyik illeszkedik a kúp tengelyére és merőleges a metszősíkra. Ez a közös szimmetriasík a Dandelin-gömböknek is szimmetriasíkja, ezért a metszősíkot a kúpszelet azon szimmetriatengelyében metszi, amelyre a kúpszelet fókuszai is illeszkednek. Ha a kúp tengelye vetítősugár, a kúpszeletnek ez a tengelye a metszősíknak esésvonala, az erre merőleges tengelye (már ha van, tehát ellipszis és hiperbola esetén) fővonala lesz. Tekintsük most a kúpszeletnek a kúp forgástengelyére merőleges képsíkra eső vetületét! Ezen a vetületen a tengelyek és a tengelypontban vett érintők merőlegessége megmarad, mert egyikük fővonal. Ezért itt még a tengely képe a kúpszelet képének a tengelye, de egy másik képsíkon, ahol ez a derékszög torzul, a tengely képe már csak a kép átmérője lesz, és nem a tengelye.

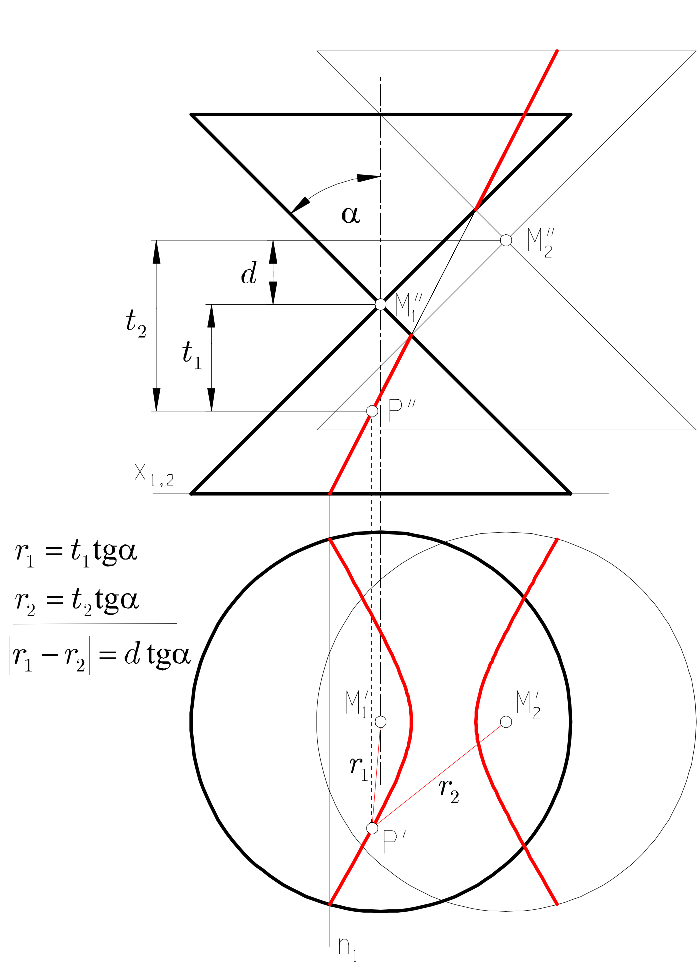
A kúpszelet fókuszainak a vetülete viszont már a kúp tengelyére merőleges képsíkon sem lesz a vetület fókusza. Az ellipszis és a hiperbola esetén tükrözzük a forgáskúpot a kúpszelet középpontjára, a parabolametszet esetén pedig vegyük fel a metszősíknak a kúp csúcspontjával egy magasságban lévő **d** fővonalát! A 4.39., 4.40., 4.41. ábrákról leolvasható, hogy a kúpszelet tengelyre merőleges vetületének egyik fókusza a kúp csúcspontjának a vetülete (és nem a fókusz vetülete). Más képsíkon a vetület fókuszát a síkgeometriai tulajdonságai alapján szerkeszthetjük meg.



4.39. ábra. Az ellipszismetszet vetületének egyik fókusza a csúcspont vetülete

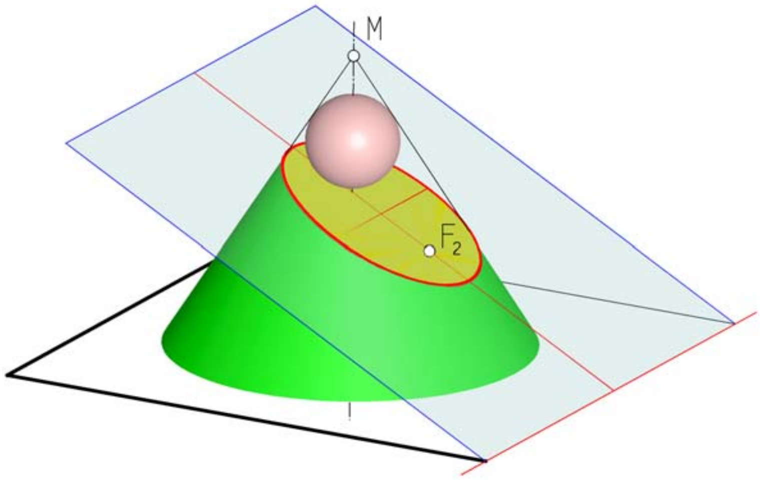


4.40. ábra. A parabolametszet vetületének fókusza a csúcspont vetülete



4.41. ábra. A hiperbolametszet vetületének egyik fókusza a csúcspont vetülete

4.6.1. A forgáskúp ellipszismetszete

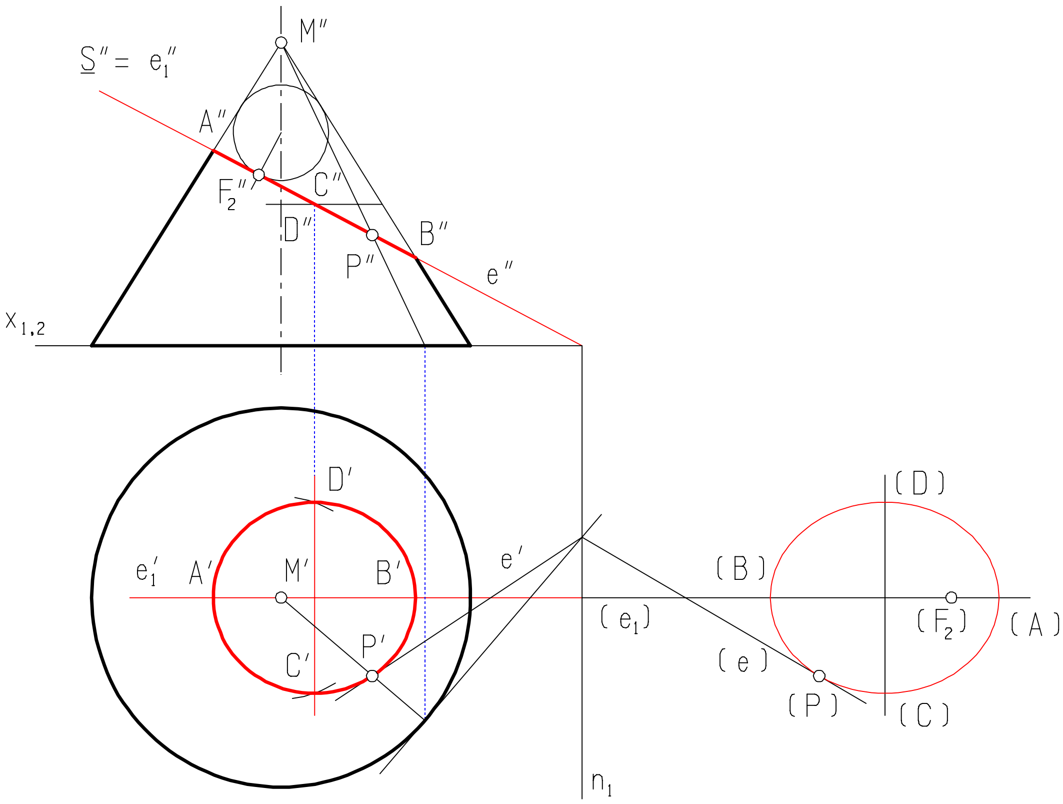


4.42. ábra. Forgáskúp ellipszismetszete

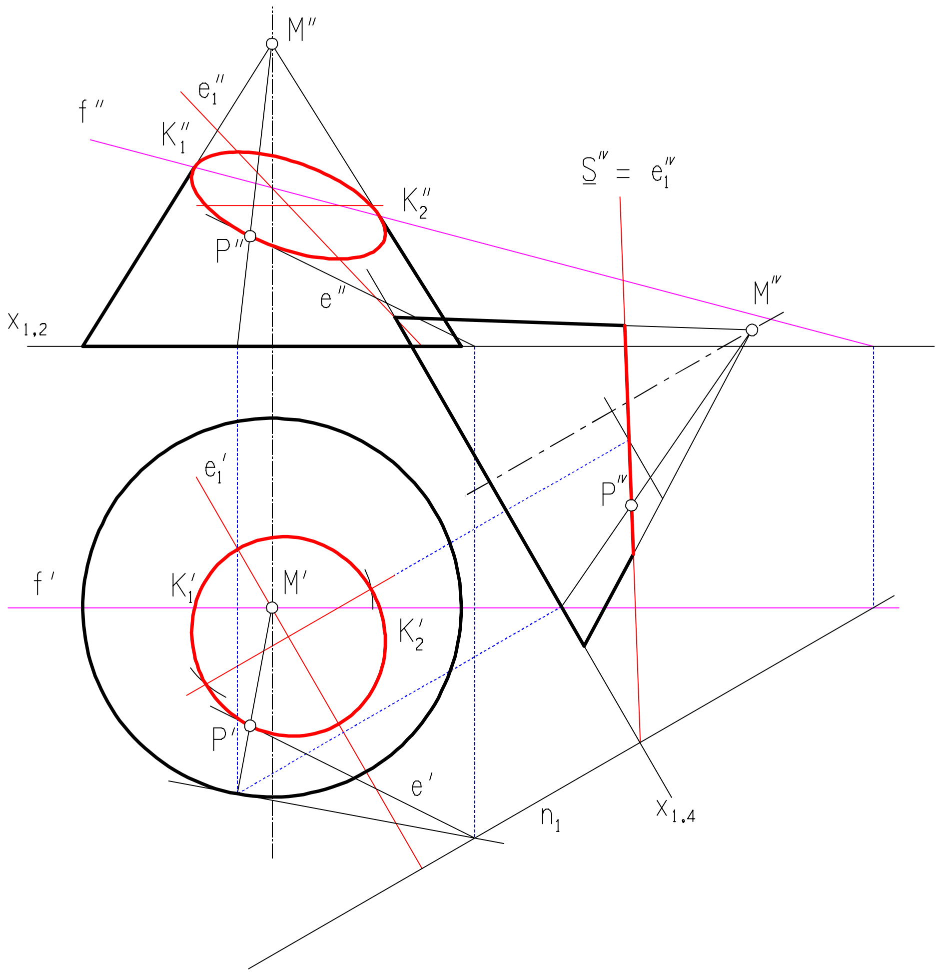
4.10. Feladat. *Adott egy forgáskúp és a kúpot ellipszisben metsző második vetítősík. Szerkessze meg az ellipszis vetületét, általános pontját az érintővel és a síkmetszet valódi nagyságát!*

Megoldás. (4.42., 4.43. ábra)

- Az ellipszis második képen élben látszik;
- a nagytengely a metszősík esésvonalán van, végpontjait le kell csak vetíteni;
- a kistengely a nagytengely felező merőlegese, második képe pont, első képét parallelkörrel, vagy a csúcspont első képének, mint fókusznak a felhasználásával szerkeszthetjük;
- a metszet általános **P** pontját alkotó, vagy parallelkör segítségével, a **P** pontbeli érintőt a metszősík és a kúp **P**-beli érintősíkjának a metszésvonalaként szerkeszthetjük;
- a síkmetszet valódi nagyságát a metszősík nyomvonala körüli leforgatásával szerkesztettük meg.



4.43. ábra. Forgáskúp ellipszismetszete vetítősíkkal



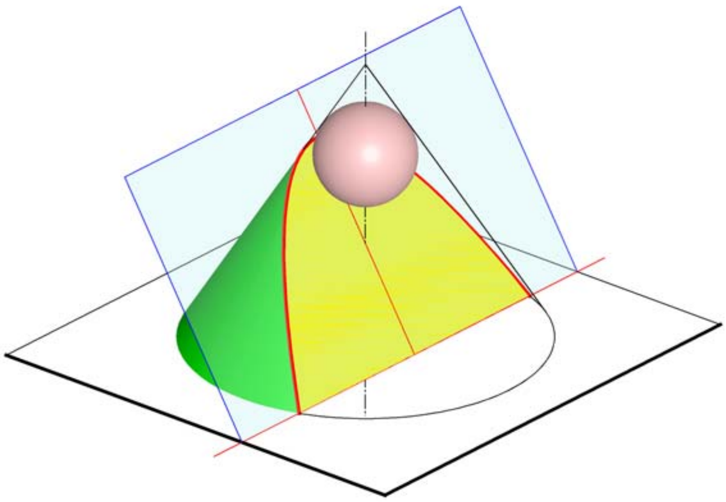
4.44. ábra. Forgáskúp ellipszismetszete általános helyzetű síkkal

4.11. Feladat. *Adott egy forgáskúp és a kúpot ellipszisben metsző általános helyzetű sík az* $\mathbf{e}_1$ *első esésvonalával. Ábrázolja a kúp síkmetszetét!*

Megoldás. (4.44. ábra) A feladatot a metszősík élbe transzformálásával, (vagy a metszet és az alapkör között fennálló *centrális kollineáció* felhasználásával) oldhatjuk meg:

- az ellipszismetszet tengelyeinek a képe csak első képen tengely, a második képen a képnek egy konjugált átmérőpárja, ezért a kép tengelyeit Rytz-módszerrel szerkesztettük;
- a kontúrpontokat a metszősíknak a kontúralkotókkal fedésben lévő **f** fővonala metszi ki.

4.6.2. A forgáskúp parabolametszete

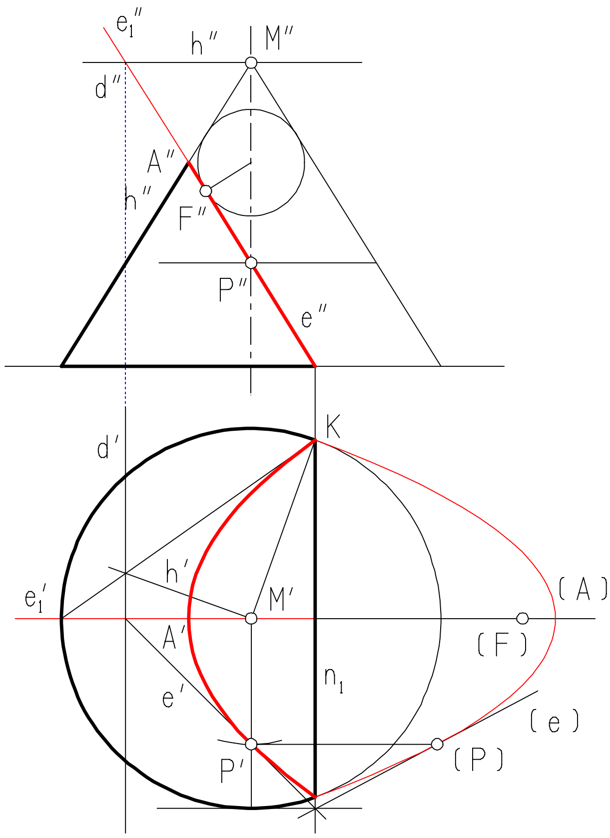


4.45. ábra. Forgáskúp parabolametszete

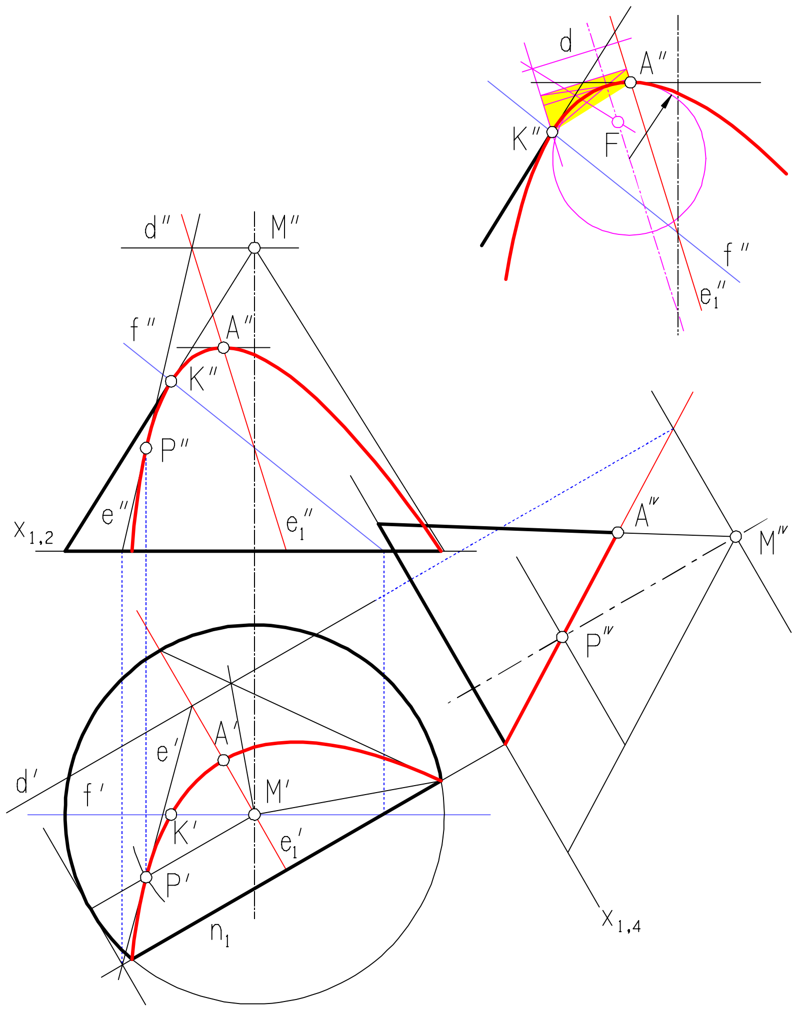
4.12. Feladat. *Adott egy forgáskúp és a kúpot parabolában metsző második vetítősík. Ábrázolja a kúp parabolametszetét és szerkessze meg a síkmetszet valódi nagyságát!*

Megoldás. (4.45., 4.46. ábra)

- a parabola második képen élben látszik;
- a tengely a metszősík esésvonalán van, a parabola tengelypontját kell csak levetíteni;
- a vetület fókusza a kúp csúcspontjának a vetülete (és nem a fókusz vetülete).
- a **P** pont a kúp tengelyével fedésben lévő, egyébként általános helyzetű pont. Mivel az alkotó profilegyenes, a $\mathbf{P}'$-t parallelkörrel könnyebb szerkeszteni. A **P**-ben érintő **e** egyenes a metszősík és a **P**-ben érintősík metszésvonala;
- az alapkör **K** pontjában az érintőt a metszősík és a **K**-beli érintősík metszésvonalaként szerkeszthetjük, de most nem a nyomvonalakkal, (mert azok metszéspontja ugyanazt a **K** pontot adná), hanem a kúp csúcspontjának a magasságában lévő **h** és **d** fővonalakkal. A szerkesztésből látszik, hogy $\mathbf{d}'$ a parabola első képének a vezéregyenese;
- a parabolametszet valódi nagyságát az $\mathbf{n}_1$ nyomvonal körüli leforgatással szerkesztettük. A leforgatott parabola fókuszát a Dandelin-gömbbel szerkesztett térbeli **F** fókusz leforgatásával, vezéregyenesét az érintési kör síkjával kimetszett vezéregyenes leforgatásával kaphatnánk meg.



4.46. ábra. Forgáskúp parabolametszete vetítősíkkal



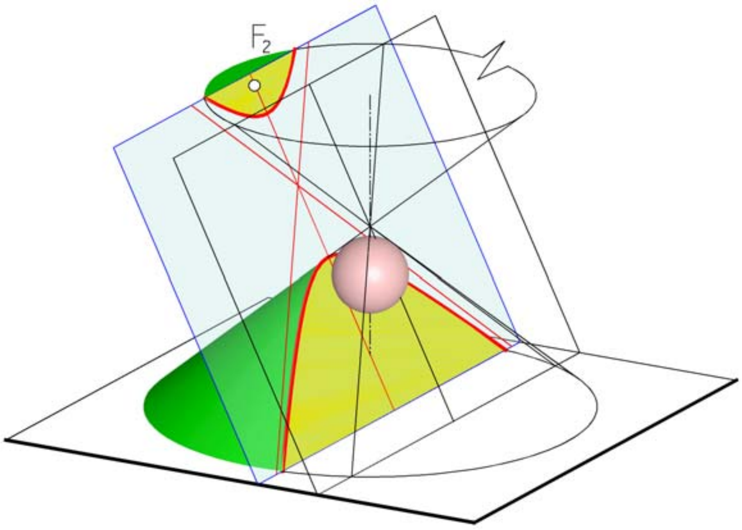
4.47. ábra. Forgáskúp parabolametszete általános helyzetű síkkal

Általános helyzetű metszősík esetében a feladatot a metszősík élbe transzformálásával, vagy a metszet és az alapkör között fennálló *centrális kollineáció* felhasználásával oldhatjuk meg.

A 4.47. ábrán általános helyzetű síkkal kimetszett parabolát szerkesztettünk transzformálással:

- az $1-4$. kép megegyezik a 4.46. ábra $1-2$. képével;
- a második kép tengelyét a parabola affin tulajdonsága szerint a kinagyított részleten szerkesztettük meg;
- a kontúrpontokat a metszősíknak a kontúralkotókkal fedésben lévő **f** fővonala metszi ki.

4.6.3. A forgáskúp hiperbolametszete

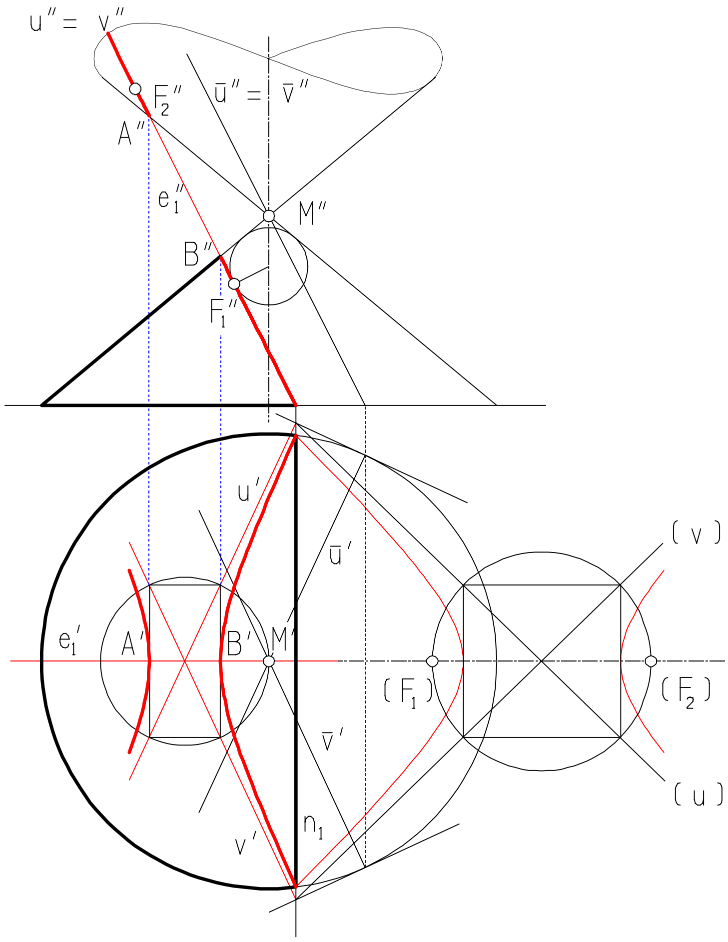


4.48. ábra. Forgáskúp hiperbolametszete

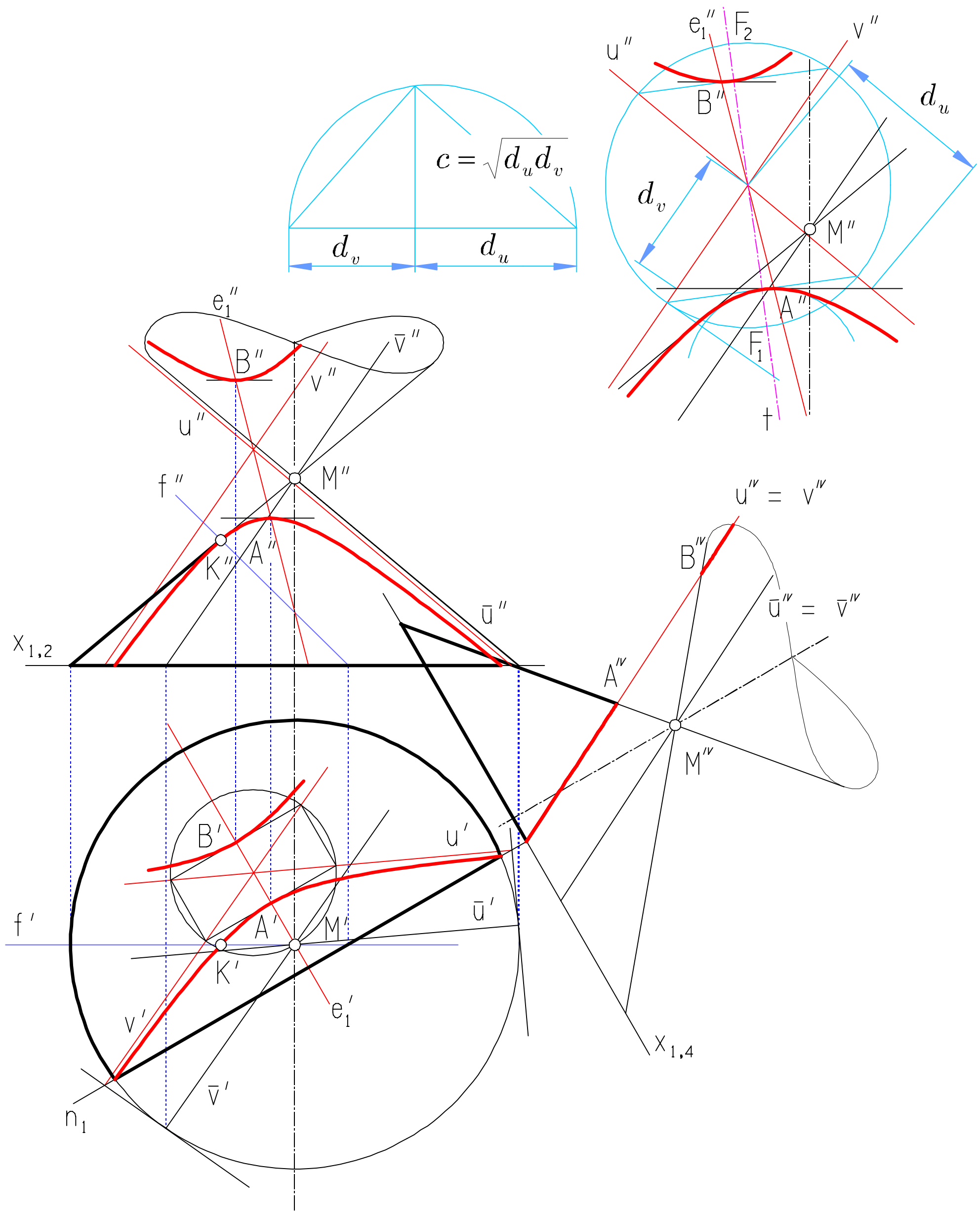
4.13. Feladat. *Adott egy forgáskúp és a kúpot hiperbolában metsző második vetítősík. Ábrázolja a kúp hiperbolametszetét és szerkessze meg a síkmetszet valódi nagyságát!*

Megoldás. (4.48., 4.49. ábra)

- A hiperbola második képen élben látszik;
- a valós tengely a metszősík esésvonalán van, a tengelypontokat kell csak levetíteni;
- a kúp csúcspontjának a képe, mint a képhiperbola fókusza és a valós tengely képe a hiperbola első képét már egyértelműen meghatározza (lásd a 4.3. feladatot), de ezt az összefüggést itt a nagyobb pontosság érdekében csak ellenőrzésre használjuk;
- az aszimptoták a hiperbola középpontját kötik össze a végtelen távoli pontokkal. A végtelen távoli pontokat pedig a metszősíkkal párhuzamos alkotók határozzák meg. Messük hát a kúpot a csúcsára illeszkedő, a metszősíkkal párhuzamos síkkal. A kimetszett alkotók metszik ki a hiperbola végtelen távoli pontjait. A hiperbola aszimptotáit ezután úgy kapjuk, hogy a középpontján át a kimetszett alkotókkal párhuzamosokat húzunk. Használjuk most ellenőrzésre az előbbi összefüggést!
- a hiperbolametszet valódi nagyságát az $\mathbf{n}_1$ nyomvonal körüli leforgatással szerkesztettük. A leforgatott hiperbola aszimptotái a térbeli aszimptoták leforgatottja, de fókuszait a Dandelin-gömbbel szerkesztett térbeli $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ fókuszok leforgatásával, vagy a síkbeli tulajdonságok alapján kapjuk.



4.49. ábra. Forgáskúp hiperbolametszete vetítősíkkal



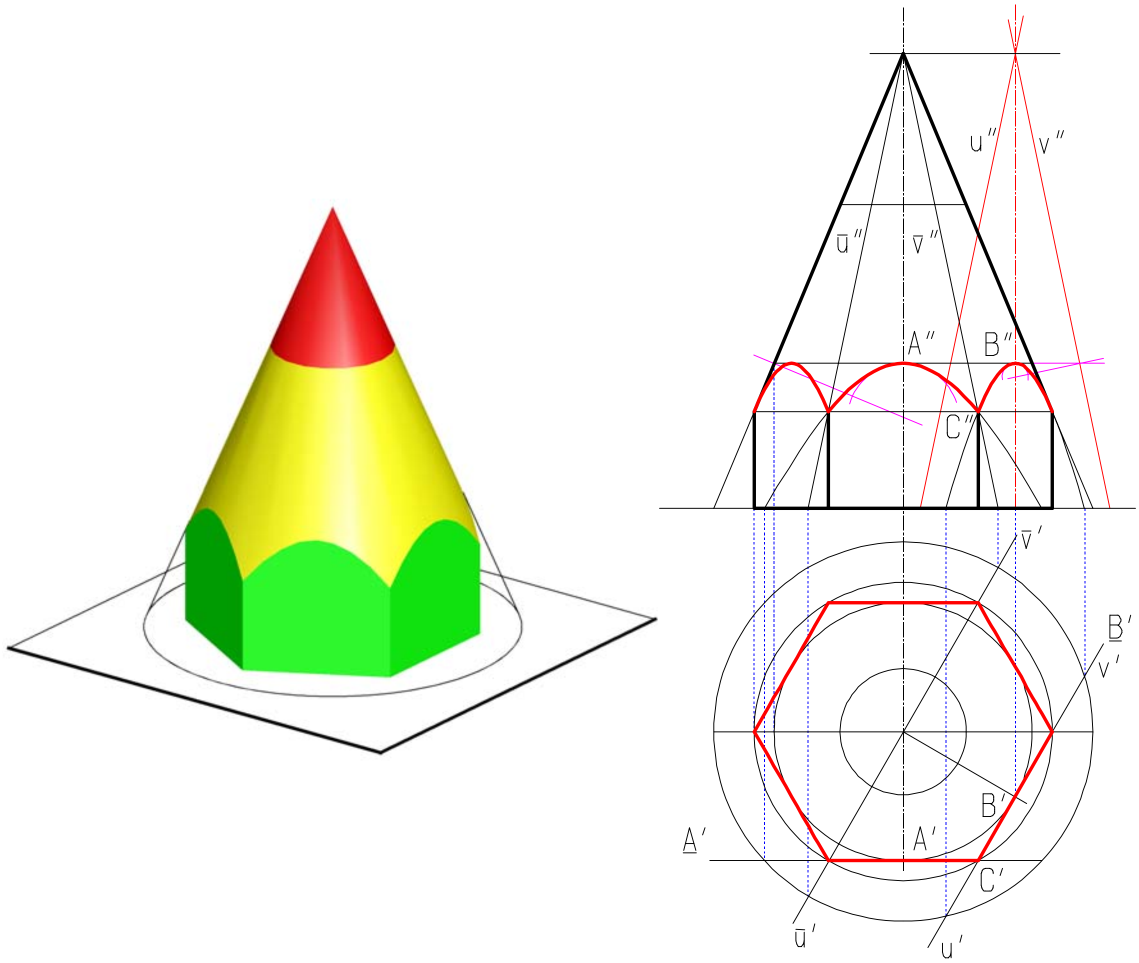
4.50. ábra. Forgáskúp hiperbolametszete általános helyzetű síkkal

Általános helyzetű metszősík esetében a feladatot a metszősík élbe transzformálásával, vagy a metszet és az alapkör között fennálló *centrális kollineáció* felhasználásával oldhatjuk meg.

A 4.50. ábrán általános helyzetű síkkal kimetszett hiperbolát szerkesztettünk transzformálással:

- az 1 − 4. kép megegyezik a 4.49. ábra 1 − 2. képével;
- a második kép tengelye az aszimptoták szögfelezője;
- a hiperbola valós tengelyét és hiperoszkuláló köreit az affin tulajdonság alapján a kinagyított részleten szerkesztettük meg;

- a kontúrpontokat a metszősíknak a kontúralkotókkal fedésben lévő **f** fővonala metszi ki.



4.51. ábra. Hiperbolák a kihegyezett ceruzán (bal oldali ábra); A forgáskúp tengelyével párhuzamos síkkal kimetszett hiperbolák (jobb oldali ábra)

A műszaki gyakorlatban leginkább a kúp tengelyével párhuzamos síkkal kimetszett hiperbolákat találunk. A 4.51. ábrán egy hatoldalú szabályos hasábot közös tengelyű (koaxiális) forgáskúppal metszettünk (vagyis egy kihegyezett ceruzát rajzoltunk).

- A frontális helyzetű $\underline{\mathbf{A}}$ sík által kimetszett hiperbola a második képen valódi nagyságban látszik. A legszűkebb parallelkörön, tehát legmagasabban lévő **A** pont a hiperbola egyik tengelypontja. Az aszimptoták a kontúralkotókkal párhuzamos fedőegyenesek.

- Az első vetítősík helyzetű $\underline{\mathbf{B}}$ sík által kimetszett hiperbola **B** tengelypontja az **A** ponttal közös parallelkörön van. A hiperbola középpontja **B** fölött a kúp csúcspontjával azonos magasságban található. Ide toltuk el a $\underline{\mathbf{B}}$ metszősíkkal párhuzamos alkotókat, így kaptuk az $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ aszimptotákat.

Hasonló hiperbolák találhatók a kúppal lesarkított hatlapú csavarfejeken, csavaranyákon is. Ezeket a műszaki rajzokon körívekkel helyettesítik.

4.7. Gyakorló feladatok a 4. témakörhöz

4.1. Adott az **O** közepű gömb és az **e** egyenes. Szerkessze meg a gömb és az egyenes döféspontjait és ábrázolja azokat láthatóság szerint!

4.2. Adott az **O** közepű gömb és a $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősík. Ábrázolja a gömbnek a $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősík alatti szeletét! Ehhez szerkessze meg a metszet kontúrpontjait és képének a tengelyeit!

4.3. Adott a $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősík és a **C** pont. Ábrázolja a vetítősíkban a **C** ponttól $50mm$ távolságra lévő pontok mértani helyét! Ehhez szerkessze meg a mértani hely vetületének a tengelyeit és hiperoszkuláló köreit!

4.4. Adott a $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősík és az **M** pont. Ábrázolja azt az **M** csúcspontú, 30^o-os félnyílásszögű forgáskúpot, amelynek alaplapja a $\underline{\mathbf{V}}_2$ vetítősíkban van! Ehhez szerkessze meg a kúp alapkörének és első kontúralkotóinak mindkét képét!

4.5. Adott az első képsíkon álló **M** csúcspontú kúp és az **e** egyenes. Szerkessze meg a kúp és az egyenes döféspontjait és ábrázolja azokat láthatóság szerint!

4.6. Adott (a rajz síkjában) egy ellipszis **AB** nagytengelye és $e = 1/2$ excentricitása. Rajzolja meg az ellipszist! Ehhez szerkessze meg az ellipszis kistengelyét és az attól fél fókusztávolságra lévő pontjait, majd ezek egyikében az ellipszis érintőjét!

4.7. Adott (a rajz síkjában) egy ellipszis az $\mathbf{UV}, \mathbf{WZ}$ konjugált átmérőpárjával. Rajzolja meg az ellipszist! Ehhez szerkessze meg az ellipszis tengelyeit és hiperoszkuláló köreit, valamint érintőit az adott átmérők végpontjaiban!

4.8. Adott (a rajz síkjában) egy ellipszis a tengelyeivel, továbbá a **P** pont. Szerkessze meg a **P** pontból az ellipszishez húzható érintőket az érintési pontokkal!

4.9. Adott (a rajz síkjában) egy parabola **F** fókusza, továbbá **e** érintője az **E** érintési ponttal. Rajzolja meg a parabolát! Ehhez szerkessze meg a parabola tengelyét, fókuszát, hiperoszkuláló körét, továbbá a fókusztól $5cm$ távolságra lévő pontjait az érintőkkel!

4.10. Adott (a rajz síkjában) egy parabola **d** vezéregyenese és **e** érintője az **E** érintési ponttal. Rajzolja meg a parabola egy ívét! Ehhez szerkessze meg a parabola hiperoszkuláló körét is!

4.11. Adott (a rajz síkjában) egy parabola a fókuszával és vezéregyenesével, továbbá a **P** pont. Szerkessze meg a **P** pontból a parabolához húzható érintőket az érintési pontokkal!

4.12. Adott (a rajz síkjában) egy parabola $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ érintője az $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ érintési pontokkal. Rajzolja meg a parabolát! Ehhez szerkessze meg a parabola tengelyét, fókuszát, hiperoszkuláló körét, továbbá a fókusztól $5cm$ távolságra lévő pontjait az érintőkkel!

4.13. Adott (a rajz síkjában) egy hiperbola **P** pontja, valamint $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ fókuszai. Rajzolja meg a hiperbola egy ívét! Ehhez szerkessze meg a hiperbola hiperoszkuláló köreit is!

4.14. Adottak (a rajz síkjában) egy hiperbola $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ aszimptotái és $\mathbf{e}$ érintője. Rajzolja meg a hiperbolát! Ehhez szerkessze meg a hiperbola tengelyeit és hiperoszkuláló köreit, valamint az $\mathbf{e}$ érintőn az $\mathbf{E}$ érintési pontját!

4.15. Adottak (a rajz síkjában) egy hiperbola $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ aszimptotái és $\mathbf{P}$ pontja. Rajzolja meg a hiperbolát! Ehhez szerkessze meg a hiperbola valós tengelyét és hiperoszkuláló köreit, valamint érintőjét a $\mathbf{P}$ pontban!

4.16. Adott (a rajz síkjában) egy hiperbola az $\mathbf{AB}$ valós és a $\mathbf{CD}$ képzetes tengelyével, továbbá a $\mathbf{P}$ pont. Szerkessze meg a $\mathbf{P}$ pontból a hiperbolához húzható érintőket az érintési pontokkal!

4.17. Adott az első képsíkon álló forgáshenger és a henger tengelyét metsző $\mathbf{e}_1$ első esésvonalával az $\underline{\mathbf{S}}$ sík. Ábrázolja a hengernek az $\underline{\mathbf{S}}$ síkkal alkotott síkmetszetét! Ehhez szerkessze meg a síkmetszet tengelyeinek a képét, a második kép tengelyeit és a második kontúrpontokat!

4.18. Adott az első képsíkon álló forgáskúp és a $\underline{\mathbf{V}}_1$ első vetítősík. Szerkessze meg a kúpnak a $\underline{\mathbf{V}}_1$ síkkal a síkmetszetét! Ehhez szerkessze meg a síkmetszet aszimptotáit, a második kép tengelyeit, hiperoszkuláló köreit és a második kontúrpontokat!

4.19. Adott az első képsíkon álló forgáskúp és a kúpot ellipszisben metsző $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősík. Szerkessze meg a kúp síkmetszetét! Ehhez szerkessze meg a síkmetszet vetületének tengelyeit, hiperoszkuláló köreit és a síkmetszet valódi nagyságát!

4.20. Adott az első képsíkon álló forgáskúp és a kúpot parabolában metsző $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősík. Szerkessze meg a kúp síkmetszetét! Ehhez szerkessze meg a síkmetszet vetületének tengelyét, hiperoszkuláló körét és a síkmetszet valódi nagyságát!

4.21. Adott az első képsíkon álló forgáskúp és a kúpot hiperbolában metsző $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősík. Szerkessze meg a kúp síkmetszetét! Ehhez szerkessze meg a síkmetszet vetületének aszimptotáit, hiperoszkuláló köreit és a síkmetszet valódi nagyságát!

4.22. Adott az első képsíkon álló forgáskúp és $\mathbf{h}, \mathbf{f}$ fővonalaival a kúpot ellipszisben metsző $\underline{\mathbf{S}}$ sík. Szerkessze meg a kúpnak az $\underline{\mathbf{S}}$ síkkal a síkmetszetét! Ehhez szerkessze meg a képek tengelyeit, és a második kontúrpontokat!

4.23. Adott az első képsíkon álló forgáskúp és a tengelyét metsző $\mathbf{e}_1$ első esésvonalával a kúpot ellipszisben metsző $\underline{\mathbf{S}}$ sík. Ábrázolja a kúpnak az $\underline{\mathbf{S}}$ síkkal alkotott síkmetszetét! Ehhez szerkessze meg a síkmetszet tengelyeinek a képét, a második kép tengelyeit és a második kontúrpontokat!

4.24. Adott az első képsíkon álló forgáskúp és $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ nyomvonalaival a kúpot hiperbolában metsző $\underline{\mathbf{S}}$ sík. Szerkessze meg a kúpnak az $\underline{\mathbf{S}}$ síkkal a síkmetszetét! Ehhez szerkessze meg az aszimptotákat, az alapkörön és a tengelyen lévő, valamint a második kontúrpontokat!

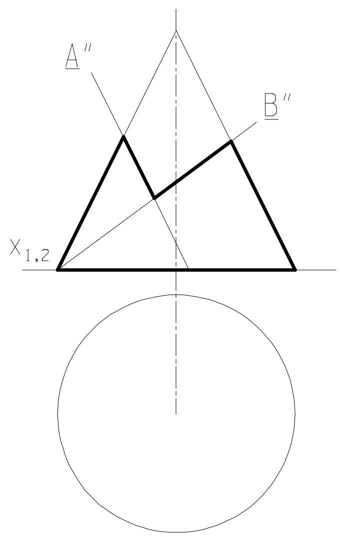
4.25. Adott az első képsíkon álló forgáskúp és az $\mathbf{e}$ egyenes. Szerkessze meg a kúpnak az $\mathbf{e}$ egyenes $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősíkjával a síkmetszetét! Ehhez szerkessze meg a síkmetszet tengelyeit, az $\mathbf{e}$ egyenesen lévő pontjait, ezek egyikében a síkmetszet érintőjét és a kép hiperoszkuláló köreit!

4.26. Adott az első képsíkon álló forgáskúp és az **e** egyenes. Szerkessze meg a kúpnak az **e** egyenes $\underline{\mathbf{V}}_1$ első vetítősíkjával a síkmetszetét! Ehhez szerkessze meg a síkmetszet aszimptotáit, valós tengelyét, az **e** egyenesen lévő pontjait, ezek egyikében a síkmetszet érintőjét és a kép hiperoszkuláló köreit!

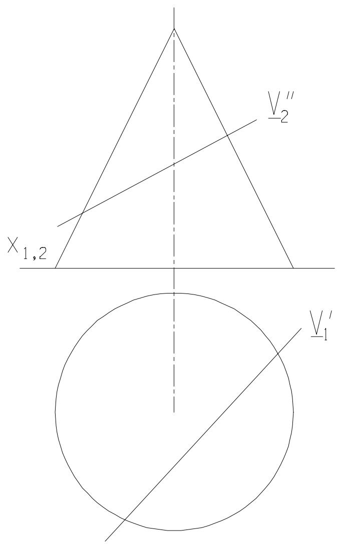
4.27. Adott az első képsíkon álló forgáskúp és a tengelyét metsző **h** horizontális fővonal. Határozza meg azt a **h** fővonalra illeszkedő dőlt síkot, amelyik a kúpot parabolában metszi, majd szerkessze meg a kúp síkmetszetét! Ehhez szerkessze meg az alapkörre és a második kontúrra illeszkedő pontokat, a második kép tengelyét és hiperoszkuláló körét!

4.28. Az első képsíkon álló forgáskúpot a 4.52. ábra szerint két második vetítősíkkal metszettük, majd a csúcsot tartalmazó részét eltávolítottuk. Ábrázolja a csonkolt kúptestet! Ehhez szerkessze meg a síkmetszetek metszéspontjait az érintőkkel, a síkmetszetek képeinek a tengelyeit és hiperoszkuláló köreit!

4.29. Az első képsíkon álló forgáskúpot a 4.53. ábra szerint a $\underline{\mathbf{V}}_1$ első és a $\underline{\mathbf{V}}_2$ második vetítősíkkal metszettük, majd a csúcsot tartalmazó részt eltávolítottuk. Ábrázolja a csonkolt kúptestet! Ehhez szerkessze meg a síkmetszetek metszéspontjait az érintőkkel, a síkmetszetek képeinek a tengelyeit és hiperoszkuláló köreit!



4.52. ábra. Felvétel a 4.28. gyakorló feladathoz



4.53. ábra. Felvétel a 4.29. gyakorló feladathoz

5. fejezet

Áthatások

Tananyag: *Gömb, forgáshenger és forgáskúp áthatása, az áthatási görbe globális tulajdonságai (a görbe rendje, kettős vetület). Az áthatás különleges pontjai: szinguláris pontok (önmetszéspont, csúcspont), a kontúrra illeszkedő pontok, szélső szeletelő felülettel meghatározott áthatási pontok. Az áthatási görbe általános helyzetű pontjai. Széteső áthatások.*

5.1. A képtengely elhagyása

A korábbi fejezetek szerkesztési ábráiban mindig ott találtuk az $\mathbf{x}_{1,2}$ tengelyt. Rekonstrukciónál abból indultunk ki, transzformálásnál attól mértük az elmaradó rendezőt. Ha most egy kissé előrelapozunk, láthatunk olyan ábrákat is, amelyekről hiányzik a tengely. Hogyan lehet ez?

Ha egy ábráról (amelyen csak első és második kép szerepel) elhagyjuk az $\mathbf{x}_{1,2}$ tengelyt, a rendezők párhuzamossága megmarad és azokra merőlegesen bármikor visszarajzolhatjuk azt, persze (hacsak nincsenek nyomelemek) nem pontosan a régi helyére. Az egyes pontok rendezői megváltoznak: amennyivel nő az egyik. annyival csökken a másik, így a rendezők (előjeles) összege változatlan marad. Továbbá változatlan marad két különböző pont megfelelő rendezőjének a különbsége, vagyis egyik pontnak a másikhoz viszonyított relatív rendezője is. Ha ezután rekonstruálunk ugyanazt az alakzatot kapjuk (a relatív rendezők állandósága miatt) csak az egész alakzatnak a rajz fölötti magassága (vízszintes rajznál), vagy a rajz előtti távolsága (függőleges rajznál) nő, vagy csökken.

Vizsgáljuk meg most, hogy a térben rögzítettnek elképzelt alakzathoz képest hogyan változik a képsíkrendszer helyzete a tengely eltolásakor. Mivel a rendezők (előjeles) összege változatlan marad, a koincidenciasíkra illeszkedő pontok (amelyekre ez az összeg 0) továbbra is ilyenek maradnak. Tehát a tengely eltolásakor a képsíkrendszer az alakzathoz képest a koincidenciasík mentén mozdul el.

Ha egy olyan ábrán akarjuk pótolni a hiányzó képtengelyeket, amelyen transzformálás vagyis több képsíkrendszer is szerepel, csak az egyik tengelyt vehetjük fel tetszőlegesen (természetesen a megfelelő rendezőirányra merőleges helyzetben), a többit már a megfelelő rendezők egyenlősége meghatározza.

Eddig csak arról esett szó, hogy a hiányzó tengely pótolható, de a fő kérdés az, hogy mi az előnye a tengely elhagyásának? A műszaki életben az ember által tervezett alakzatok általában rendelkeznek az alakzat belső tulajdonságaiból következő viszonyítási rendszerrel (bázissík, szimmetriasík, szimmetria-, vagy forgástengely). Esetenként zavaró, de mindenképpen fölösleges lenne ezt a viszonyítási rendszert az ábrázolás kedvéért megduplázni. Műszaki rajzokon ezért általában nem rajzolnak képtengelyt.

A képtengely nélkülözhetőségére Klingenfeld figyelmeztetett 1851-ben megjelent [3] tankönyvében.

5.2. Az áthatással kapcsolatos fogalmak

Műszaki alkalmazásokban a geometriai testek és felületek általában nem teljes egészként és önállóan fordulnak elő, hanem más testeken, vagy felületeken áthatolva, azokkal csonkolva, vagy egyesítve. Az ábrázoló geometriában ezt a jelenséget hagyományosan az *áthatás* szóval jelöljük, függetlenül attól, hogy halmazműveleti fogalmaink szerint az áthatásban szereplő geometriai testek és felületek (mint ponthalmazok) metszetet, uniót, vagy különbséget képeznek. Az áthatás megszerkesztésének alapfeladata a határoló felületek közös metszésvonalának, az *áthatási görbének* a megszerkesztése. Azt pedig, hogy az alakzat milyen halmazművelet eredményeként származott, a láthatóság szerinti kihúzással fejezzük ki.

Az alábbiakban előbb összefoglaljuk az áthatások szerkesztéséhez szükséges ismereteket, majd ezek alkalmazását példákon mutatjuk be. A példák kiválasztásánál a gömb, forgáshenger és forgáskúp alkalmazására szorítkoztunk és eltekintettünk a középiskolai szintet meghaladó geometriai ismereteket alkalmazó megoldásoktól, mint amilyen az áthatási görbe simulókörének, vagy önmetszéspontbeli érintőjének a szerkesztése lenne.

Hogyan szerkesszünk áthatást?

- Elemezzük a feladatot: határozzuk meg az áthatási görbe és vetületei globális tulajdonságait, szingularitásait, topológiáját;

- szerkesszük meg az áthatási görbét: határozzuk meg a lehetséges szeletelő felületeket, szerkesszük meg az áthatási görbe különleges pontjait és néhány általános pontját a pontbeli érintőkkel, rajzoljuk meg a görbét;

- döntsük el a láthatóságot: húzzuk ki láthatóság szerint a megszerkesztett ábrát.

5.3. Az elemzéshez szükséges ismeretek

Az n-edfokú algebrai egyenlettel leírható görbét, vagy felületet n-edrendű algebrai görbének, vagy felületnek nevezzük.

A gömb, a forgáshenger és a forgáskúp másodrendű algebrai felületek.

Az *algebra alaptételéből* következik, hogy

- egy egyenes egy n-edrendű síkgörbét, vagy n-edrendű felületet legfeljebb n valós pontban metsz, ha nincs közös komponensük;

- egy sík egy n-edrendű térgörbét, legfeljebb n valós pontban metsz, ha a térgörbének nincs a síkra illeszkedő komponense;

- egy sík és egy n-edrendű felület egy legfeljebb n-edrendű valós síkgörbében metszi egymást, ha nincs közös komponensük.

A gömb, a forgáshenger és a forgáskúp síkmetszetei másodrendű algebrai görbék.

Bézout tétele: Egy m-edrendű és egy n-edrendű algebrai síkgörbe egymást (a képzetes, a többszörös és a végtelen távoli pontokat is számítva) mn pontban metszi.

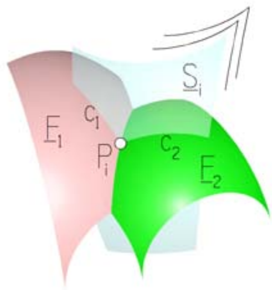
Következmény:

- Egy m-edrendű és egy n-edrendű algebrai felület egymást (a képzetes, a többszörös és a végtelen távoli pontokat is számítva) mn-edrendű görbében, az *áthatási görbében* metszi. Az áthatási görbe lehet *széteső* (reducibilis), vagy *nem széteső* (irreducibilis).
- Egy n-edrendű térgörbe vetülete általában n-edrendű síkgörbe, de ha minden vetítősugár a térgörbe k pontjára illeszkedik, akkor a kapott k-szoros vetület n/k-adrendű.

Tehát a másodrendű gömb, henger, kúp áthatási görbéje (ha nem széteső) 4-edrendű térgörbe, aminek az egyszeres vetülete is 4-edrendű, a kettős vetülete pedig másodrendű síkgörbe (ellipszis, parabola, vagy hiperbola). Kettősvetület jön létre, ha az egyik felület vetítőhenger, vagy ha a metsződő felületeknek a képsíkkal párhuzamos, közös szimmetriasíkjuk van (, vagy ha a kontúrok síkjai egybeesnek).

5.4. A szerkesztéshez szükséges ismeretek

Az $\underline{\mathbf{F}}_1$ és $\underline{\mathbf{F}}_2$ felületek áthatási vonalának egy $\mathbf{P}$ pontját úgy szerkesztjük meg, hogy felveszünk egy alkalmas $\underline{\mathbf{S}}$ szeletelő felületet (általában síkot, vagy gömböt), amellyel egy $\mathbf{c}_1$ görbében metszük az $\underline{\mathbf{F}}_1$ felületet és egy $\mathbf{c}_2$ görbében az $\underline{\mathbf{F}}_2$ felületet, végül a $\mathbf{c}_1$ és a $\mathbf{c}_2$ görbék metszéspontja lesz a keresett $\mathbf{P}$ pont (5.1. ábra).

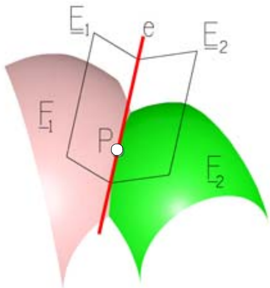


5.1. ábra. Áthatási pont szerkesztésének elve

A szeletelő felületet úgy kell megválasztanunk, hogy a kimetszett $\mathbf{c}$ segédgörbe könnyen szerkeszthető alkotó, vagy parallelkör legyen. Ahhoz, hogy a görbén elég sok $\mathbf{P}_i$ pontot kapjunk, több $\underline{\mathbf{S}}_i$ szeletelő felületet kell választanunk.

5.4.1. Szeletelő felületek választása

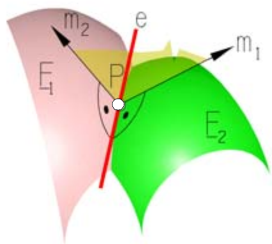
Az adott felületek	Szeletelő felületek	Metszetgörbék	Ábra
hengerek, kúpok	síksor	alkotók	5.27. – 5.4.
forgásfelület és tengelyére merőleges henger	forgásfelület tengelyére merőleges síkok	parallelkörök és hengeralkotók	5.30.
párhuzamos tengelyű forgásfelületek	forgásfelület tengelyére merőleges síkok	parallelkörök	5.31.
metsző tengelyű forgásfelületek	koncentrikus gömbök	parallelkörök	5.50.



5.2. ábra. Áthatási görbe érintője az érintősíkok metszésvonalaként

Az áthatási görbe érintőjének szerkesztése (a már megszerkesztett pontban):

- az érintő mind a két felület érintősíkjában benne van, tehát az érintősíkoknak a metszésvonala (5.2. ábra);
- az érintő mindkét felületi normálisra, tehát a normálisok síkjára is merőleges (5.3. ábra).



5.3. ábra. Áthatási görbe érintője a normálisok síkjára állított merőlegesként

5.4.2. Az áthatási görbe különleges pontjai

- szinguláris pontok:
  - térbeli: izolált pont, elsőfajú csúcspont, önmetszéspont (ahol a felületek érintkeznek);
  - vetületi: önmetszéspont, elsőfajú csúcspont (ahol a térgörbe érintője vetítősugár, a vetület érintője a csúcspontban a térbeli simulósík vetülete);
- a felületek kontúrjaira illeszkedő áthatási pontok (a megfelelő képen a kontúr és az áthatási görbe érintői fedőegyenesek);
- szélső szeletelő felületekkel szerkesztett pontok: ha a szeletelő felület az áthatásban részt vevő egyik felületet érinti, a másikat metszi, akkor az utóbbiból kimetszett görbe (ami persze lehet alkotó, tehát egyenes is) érinti az áthatási görbét.

A görbe megrajzolásánál vegyük figyelembe

- a görbe globális tulajdonságait (egy n-edrendű görbét egy egyenes legfeljebb n valós pontban metszhet), szingularitásait és topológiáját;
- a megszerkesztett pontokat, érintőket;
- a folytonosságot („szomszédos” pontok összekötése);
- a pontok sorrendjét (a különböző képeken megegyezik);
- a görbe „nem lóghat le” egyik felületről sem;
- a simaságot (egy algebrai görbe akárhányszor folytonosan differenciálható).

5.4.3. Az áthatás láthatóságának eldöntése

A láthatóság szerinti kihúzással fejezzük ki a felületek, vagy testek közötti halmazművelet eredményét. A kihúzásnál vegyük figyelembe, hogy

- mindkét (konvex) felületet a megfelelő kontúr osztja látható és nem látható részre;
- ha az áthatási görbét csak „rárajzoltuk” a felületre, akkor a görbének a felület látható részére eső darabja látszik;
- unió áthatási görbéjéből az látszik, ami mind a két felület látható részére esik;
- metszet áthatási görbéjéből az nem látszik, ami mind a két felület takart részére esik;
- különbség áthatási görbéjéből az látszik, ami a meghagyott felület látható részére esik és ami az azon keletkezett lyukon keresztül vált láthatóvá;
- testek különbségének ábrázolásakor ügyeljünk az eltávolított test „lenyomatára”.

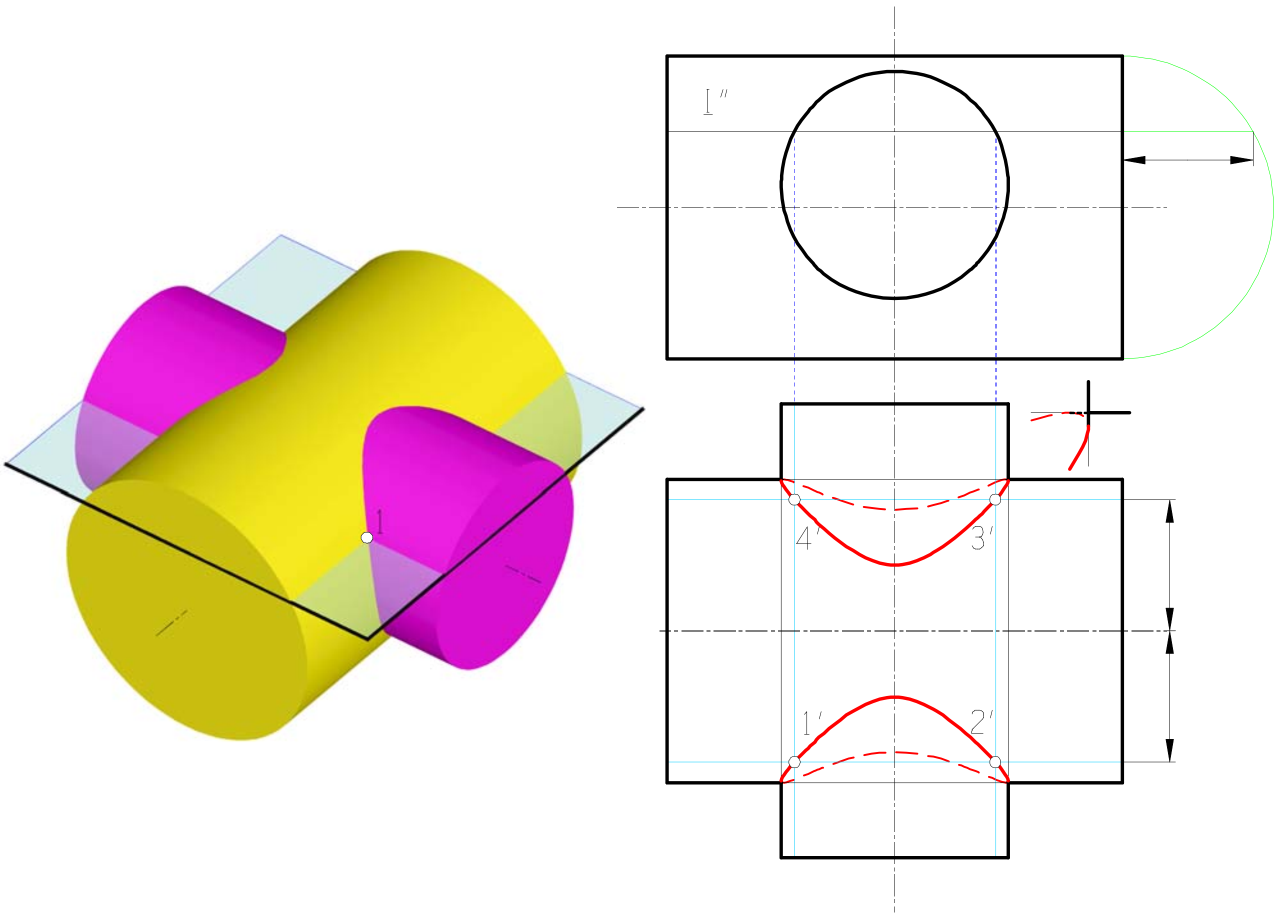
Egyébként az a legjobb, ha *látjuk*, és ez gyakorlattal elérhető.

5.5. Gömb, forgáshenger és forgáskúp áthatásai

Az alábbiakban gömb, forgáshenger és forgáskúp áthatásaira mutatunk példákat. Ezeken legtöbbször a szerkesztésnek csak egy-egy mozzanata látható. Egy áthatás konkrét megszerkesztése az előzőekben mondottak szerint történik. Két esetben (az 5.16.- 5.21. illetve az 5.43.-5.49. ábrákon) részletezve is bemutatjuk az áthatás megszerkesztését. Azt ajánljuk, hogy a tanulás során minél több ilyen teljesnek mondható szerkesztést végezzen el.

A gömb, a forgáshenger és a forgáskúp másodrendű felületek, az áthatási görbe tehát általában negyedrendű.

5.5.1. Forgáshengerek áthatása

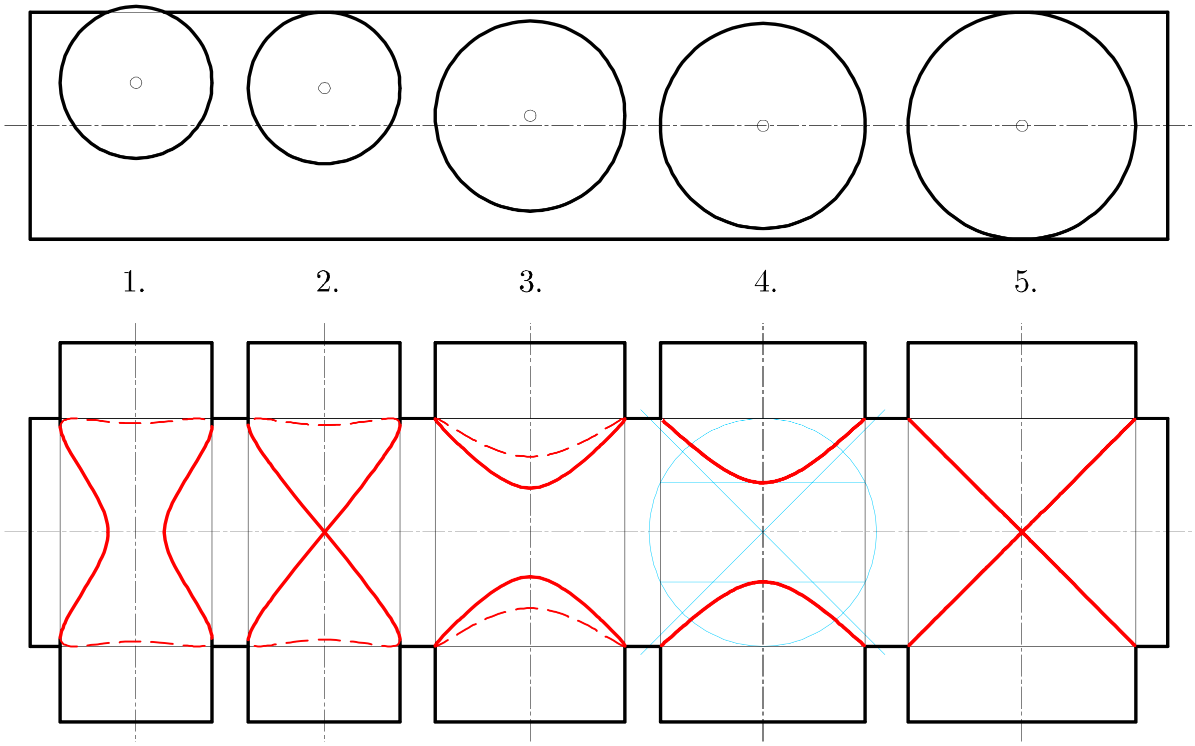


5.4. ábra. Két hengert alkotókban metsző szeletelő sík (bal oldali ábra); Hengerek áthatási pontjainak szerkesztése alkotókban metsző szeletelő síkkal (jobb oldali ábra);

A szeletelő felületek

- mindig lehetnek mindkét henger alkotóival párhuzamos síkok (5.4. ábra);

- metsző tengelyű hengerek esetén lehetnek a tengelyek metszéspontja körül felvett koncentrikus gömbök (5.5. ábra 4. hengere).

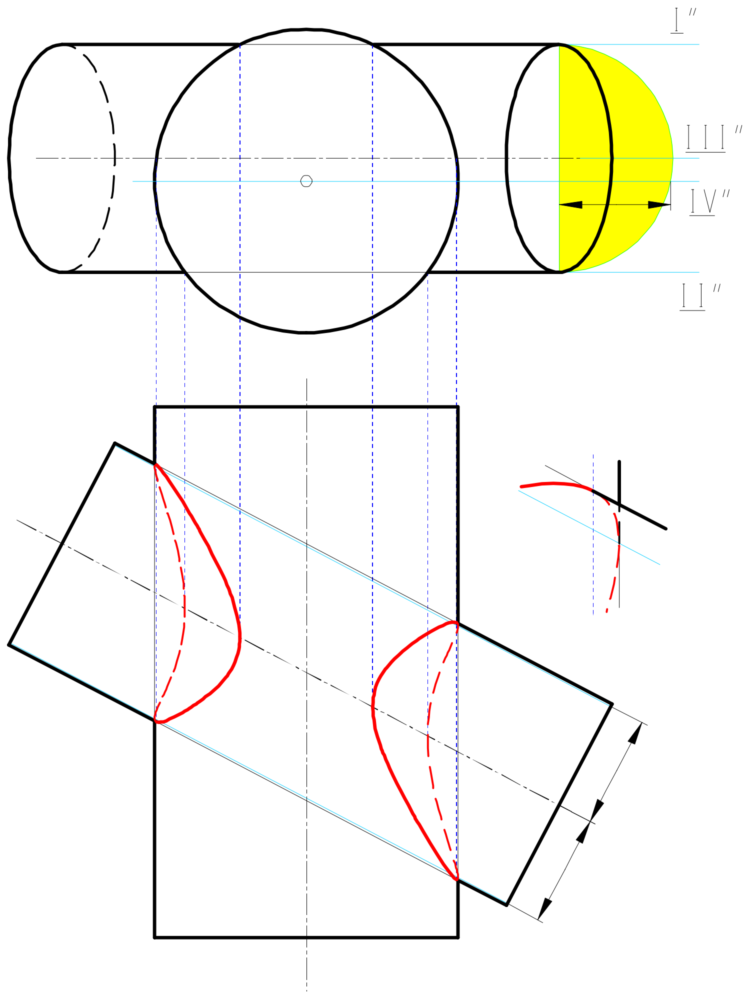


5.5. ábra. Merőleges tengelyű hengerek áthatásai: 1. egy zárt görbe; 2." nyolcas"; 3. két zárt ág; 4. metsző tengelyű hengerek áthatásának kettős vetülete hiperbola; 5. széteső áthatás.

Az 5.5. ábrán merőleges tengelyű hengerek néhány topológikusan különböző áthatási görbéjét mutatjuk be. Ezek némileg módosulnak, ha a tengelyek nem merőlegesek.

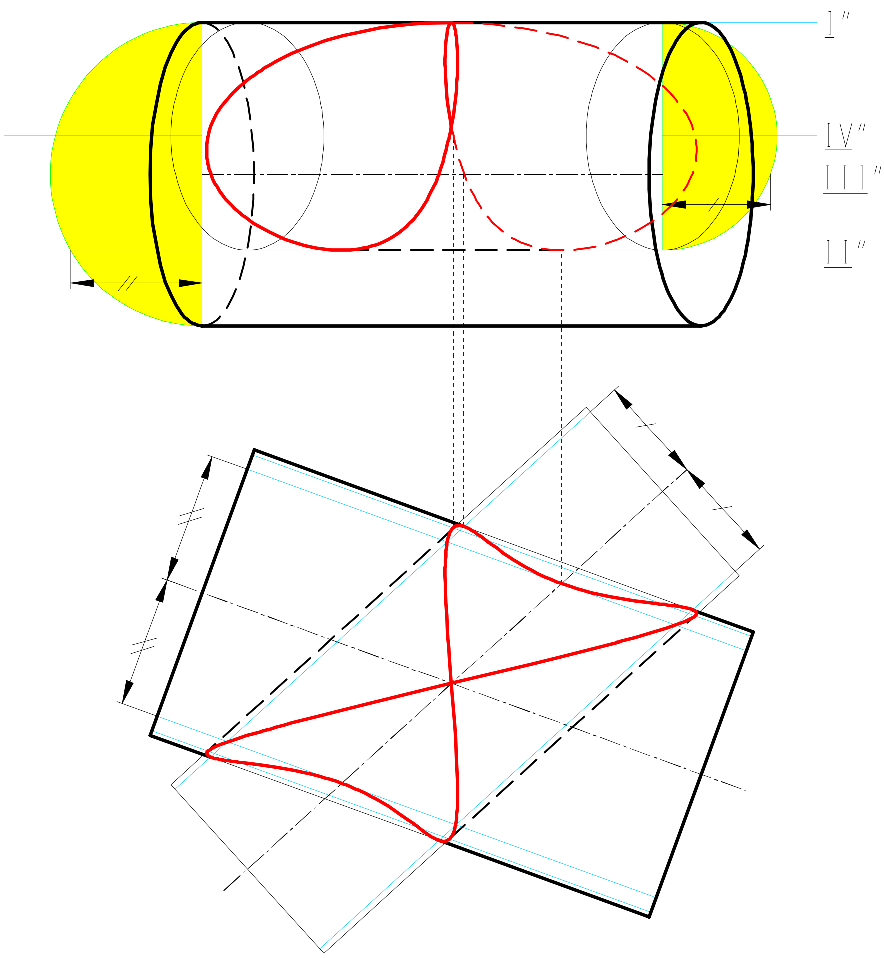
Ha az egyik henger vetítőhenger, az áthatás megfelelő képe kör (körív). Ha valamelyik hengernek nincs kör képe, a beforgatott szelvényt alkalmazva könnyen megszerkeszthetjük a szeletelő síkkal kimetszett hengeralkotók képeit.

Az 5.5. ábra 4. hengerei metsző tengelyűek, ilyenkor a tengelyek metszéspontja körül felvett koncentrikus gömbökkel is szeletelhetünk. Az ábrán mindkét tengely párhuzamos az első képsíkkal, ezért ott kettős vetületként hiperbolát kapunk. A vastagabb hengert érintő gömb a másik hengert parallelkörökben metszi. A kettős vetületen ezek általában egy átmérő végpontjaiban, itt a hiperbola tengelypontjaiban érintenek. A hiperbolakép aszimptotái a tengelyek szögfelezői lesznek.



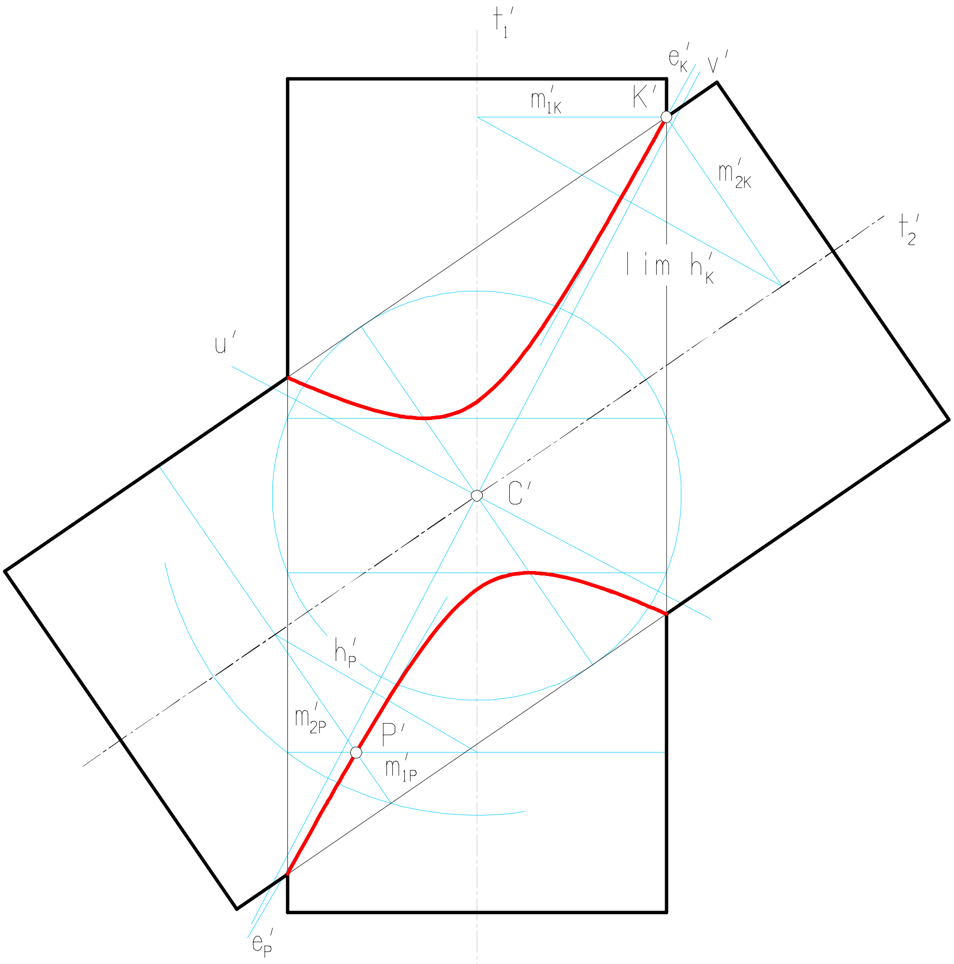
5.6. ábra. Kitérő tengelyű hengerek áthatása

Az 5.6. és az 5.7. ábrán kitérő tengelyű hengerek áthatását szerkesztettük a hengerek alkotóival párhuzamos szeletelő síkok, illetve beforgatott szelvények (az ábrákon besárgítva) alkalmazásával. Az ábrákon az áthatási görbéknek csak a különleges (szélső szeletelő síkra, vagy kontúrra illeszkedő) pontjait szerkesztettük meg. Az 5.7. ábrán a térbeli áthatási görbe önmetszéspontja első képen önmetszéspontnak, míg a második képen *önérintési* pontnak látszik.



5.7. ábra. Hengerek áthatása önmetszésponttal

Az 5.8. ábrán a tengelyek metszéspontja körül felvett koncentrikus gömbökkel szeleteltünk. A tengelyek párhuzamosak a rajz síkjával (ez transzformációval mindig elérhető). A tengelyek síkja a két henger közös szimmetriasíkja, ezért az áthatási görbének kettős vetülete van. A kettős vetület $(4 : 2 = 2)$, másodrendű, éspedig hiperbola. A vetületi hiperbola aszimptotái a tengelyek szögfelezői. A mellékszögek szögfelezői merőlegesek, ezért a vetület egyenlő oldalú hiperbola.



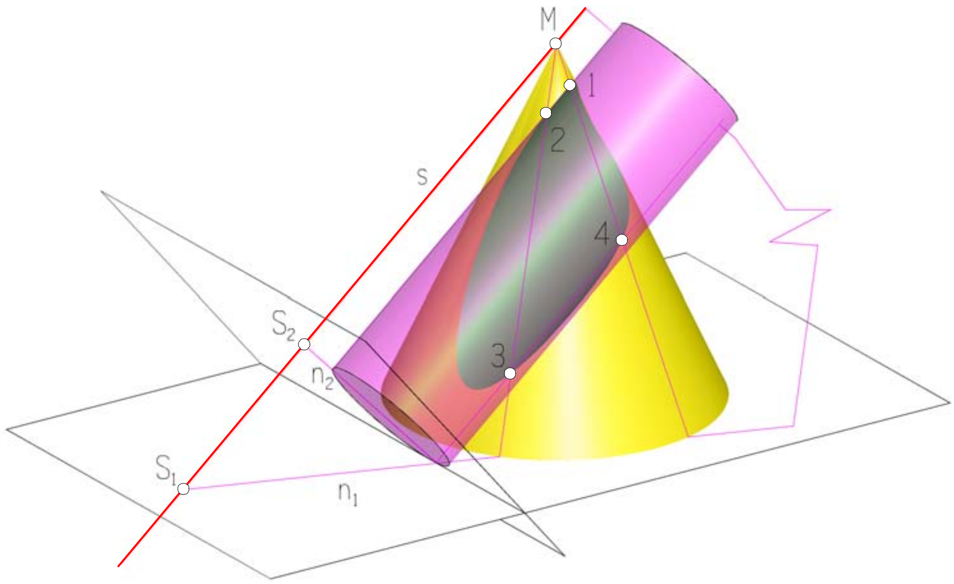
5.8. ábra. Metsző tengelyű hengerek áthatásának kettős vetülete hiperbola

Az általános helyzetű **P** pontban a felületi normálisok felhasználásával szerkesztettünk érintőt. A felületi normálisok tengelypontjaira egy $\mathbf{h}_P$ horizontális fővonal illeszkedik. A normálisok síkjára merőleges érintő vetülete tehát erre merőleges. Ez a szerkesztés nem alkalmazható minden további megfontolás nélkül a **K** kontúrpontban, mert ott mindkét normális, tehát a normálisok síkjának minden egyenese horizontális. Ha azonban az áthatási pontoknak egy **K**-hoz tartó sorozatát vesszük, az érintő szerkesztéséhez szükséges horizontális fővonal határértéke, a $\lim \mathbf{h}_K$ egyszerűen adódik.

Látható, hogy az áthatási görbe kettős vetülete nem a teljes hiperbola, hanem annak csupán két íve. Ha azonban algebrailag számítjuk az áthatási görbe vetületét, megkapjuk az egész hiperbolát. Vegyük például a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben az y tengelyű, 5 egység sugarú hengert, aminek az egyenlete: $x^2+z^2=25$, továbbá az x tengelyű, 4 egység sugarú hengert, aminek az egyenlete: $y^2+z^2=16$. Az áthatási görbe pontjai mindkét hengerre illeszkednek, tehát koordinátáik mind a két egyenletet és így azok különbségét is kielégítik. A két egyenlet különbsége pedig $x^2-y^2=9$ egy teljes egyenlő oldalú hiperbola egyenlete. Válasszuk most ennek a hiperbolának egy a hengerek képhatárán kívül eső pontját, például legyen $x=6$, akkor $y^2=27$ és ebből valamelyik henger egyenletébe helyettesítve $z^2=-11$, innen z koordinátáira két konjugált komplex számot kaptunk. Algebrailag tehát az áthatási görbének nem csak valós, hanem konjugált komplex koordinátájú képzetes pontpárjai is vannak, amelyeknek az xy síkra eső kettős vetületét éppen a képzetes koordináta elhagyásával kapjuk, tehát a kettős vetület már valós. A kettős vetületnek azokat a pontjait, amelyek nem valós, hanem konjugált komplex koordinátájú képzetes pontpárok valós kettős vetületeként jöttek létre „parazita" pontoknak nevezték el.

A forgáshengerek széteső áthatásairól a többivel összevontan a *Széteső áthatások* című 5.6. szakaszban lesz szó.

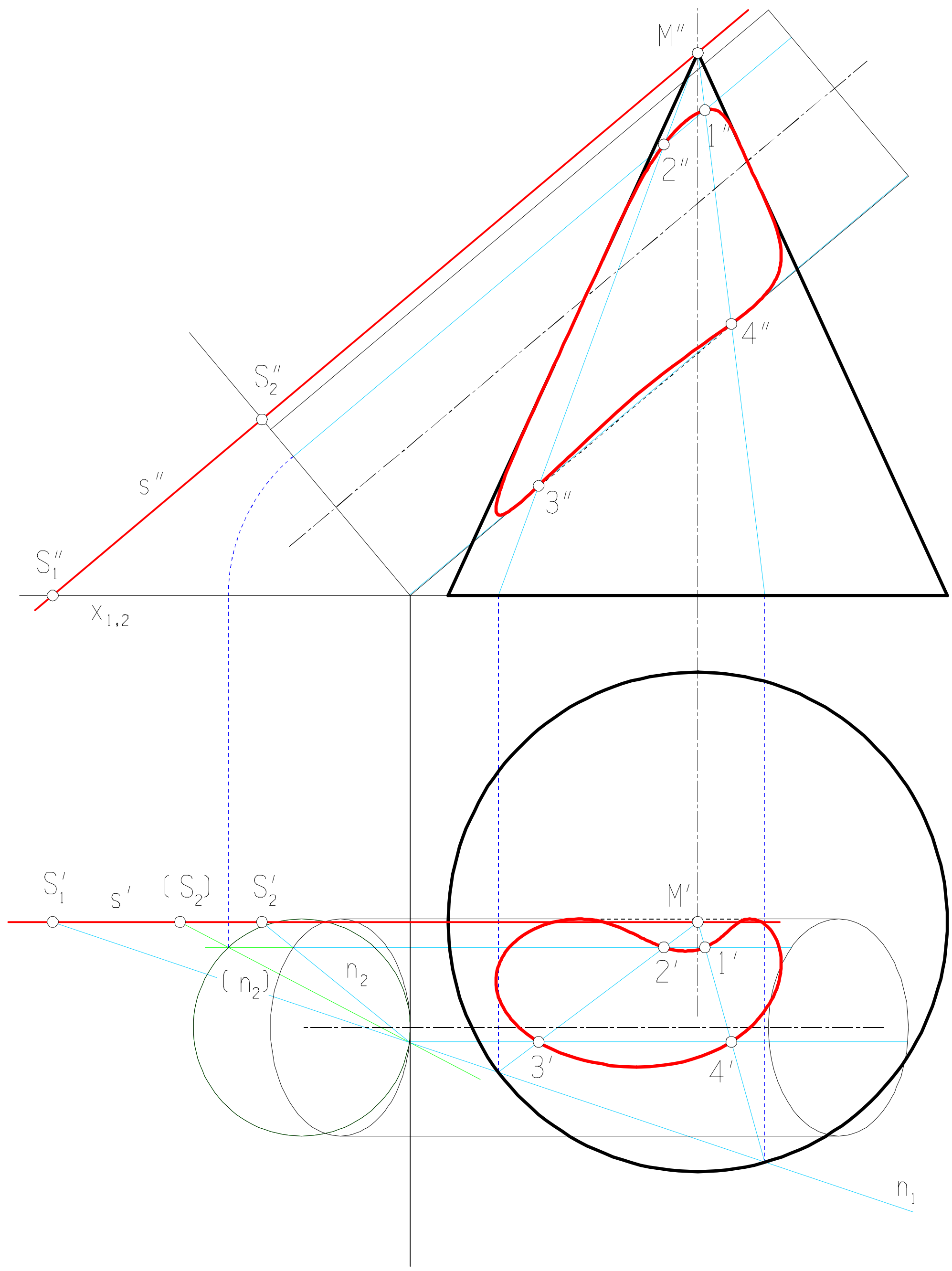
5.5.2. Forgáskúp és forgáshenger áthatása



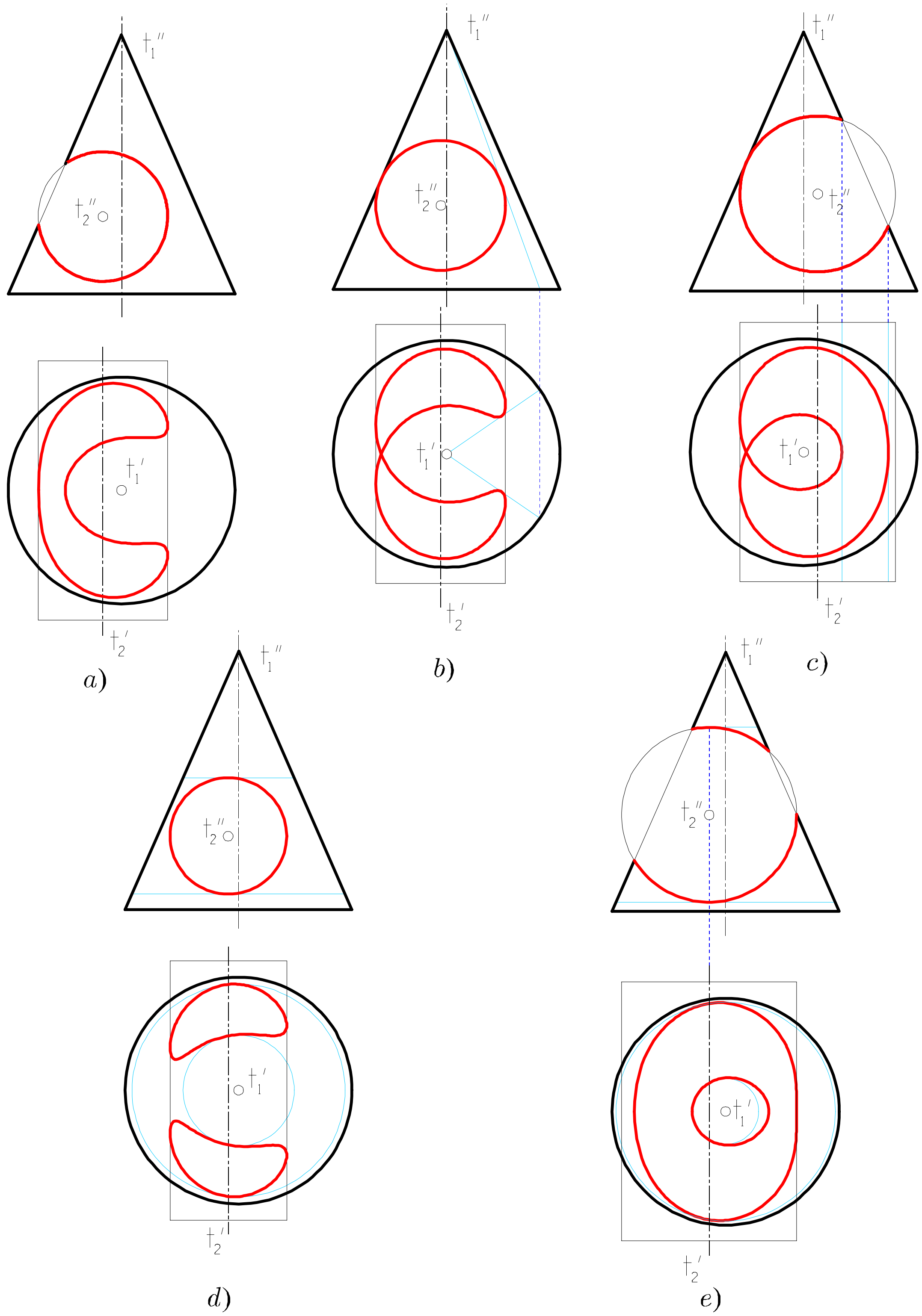
5.9. ábra. A kúpot és a hengert alkotókban metsző szeletelő sík

A szeletelő felületek

- mindig lehetnek a kúp csúcspontján átmenő és a henger tengelyével párhuzamos sorozóegyenesre illeszkedő síksor tagjai, amelyek mindkét felületet alkotókban metszik (5.9., 5.10. ábrák);
- ha a henger tengelye merőleges a kúpéra, lehetnek a kúp tengelyére merőleges síkok, amelyek a kúpból parallelköröket, a hengerből alkotókat metszenek ki (5.11. ábra);
- ha a tengelyek metszik egymást, lehetnek a tengelyek metszéspontja köré írt koncentrikus gömbök, amelyek mindkét felületből parallelköröket metszenek ki (5.14., 5.15. ábra).



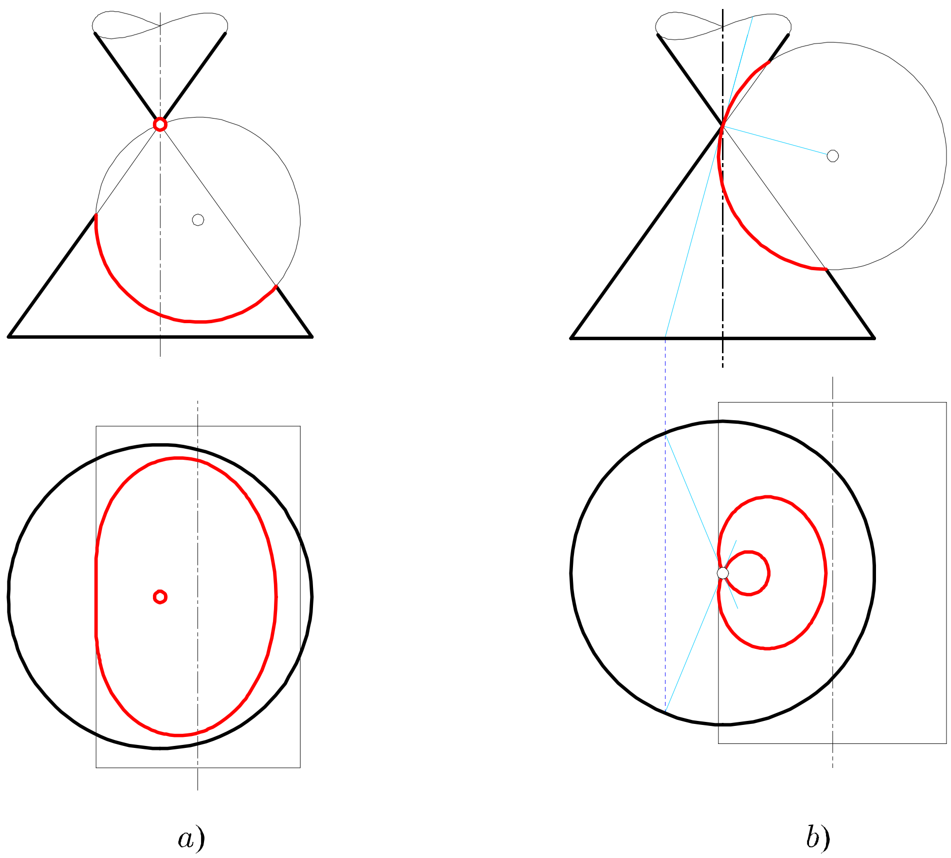
5.10. ábra. Kúp és henger áthatási pontjainak szerkesztése alkotókban metsző szeletelő síkkal



5.11. ábra. Forgáskúp palástjának egy merőleges tengelyű hengeren kívül maradó része: a) az áthatás egy zárt görbe; b) az áthatási görbe egy „nyolcas”, amelyet kúpalkotók érintenek; c) az áthatási görbe egy „nyolcas”, amelyet hengeralkotók érintenek; d) a kúpot átfúrja a henger, az áthatási görbének két zárt ága van; e) a hengert átfúrja a kúp, az áthatási görbének két zárt ága van

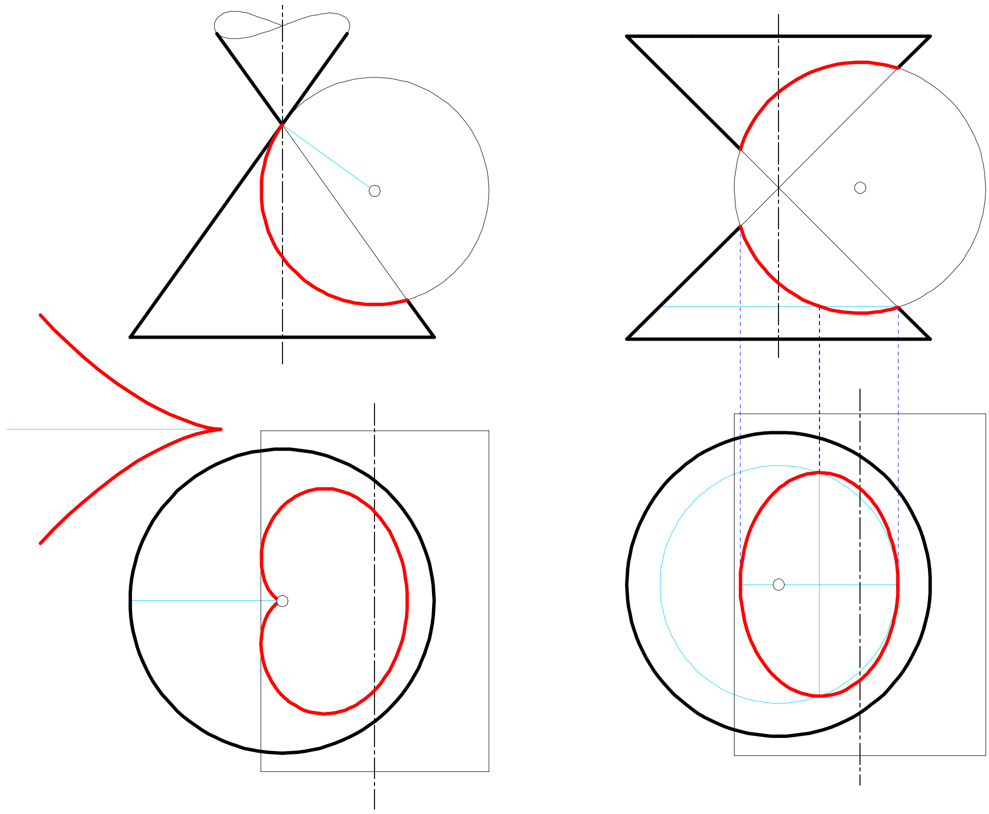
Az 5.11. – 5.14. ábrákon merőleges tengelyű henger és kúp néhány topológikusan különböző áthatási görbéjét mutatjuk be.

Az 5.11. b) ábrán a hengert érintő szeletelő síkkal kimetszett kúpalkotók az áthatási görbe érintői. Az 5.11. c) ábrán a kúpot érintő szeletelő síkkal kimetszett hengeralkotók az áthatási görbe érintői. Az 5.11. d) és 5.11. e) ábrán a hengert érintő horizontális szeletelő síkokkal kimetszett parallelkörök az áthatási görbe érintői.



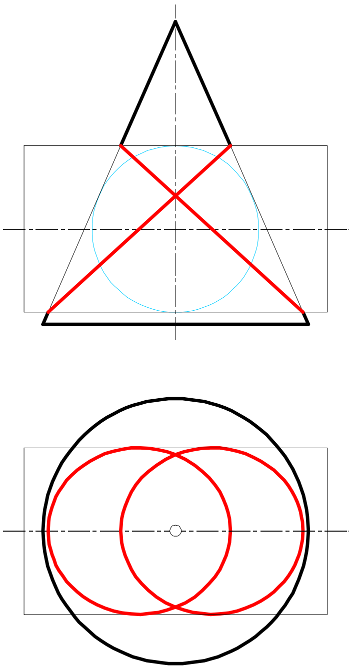
5.12. ábra. Forgáskúp palástjának egy merőleges tengelyű hengeren kívül maradó része: a) az áthatásban izolált pont; b) az áthatási görbe egy „nyolcas”, amelyet a csúcspontban kúpalkotók érintenek

Az 5.12. a) ábrán az áthatási görbe része egy izolált pont is (a régiek ezt a „remetepont” elnevezéssel illették). Az 5.12. b) ábrán a hengert érintő szeletelő síkkal kimetszett kúpalkotók az áthatási görbét az önmetszéspontjában érintik. Az 5.13. a) ábrán a hengert érintő szeletelő sík a kúpot is érinti egy alkotóban. Az áthatási görbén elsőfajú csúcspont van, amelyben az előbbi kúpalkotó érint. A csúcspont környezetét kinagyítva is bemutatjuk.

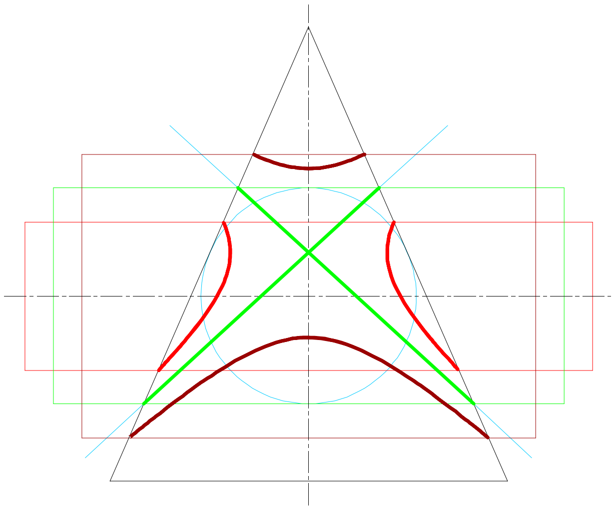


5.13. ábra. Forgáskúp palástjának egy merőleges tengelyű hengeren kívül maradó része: a) az áthatási görbén elsőfajú csúcspont, amelyben egy kúpalkotó érint; b) az áthatási görbe kettős vetülete ellipszis

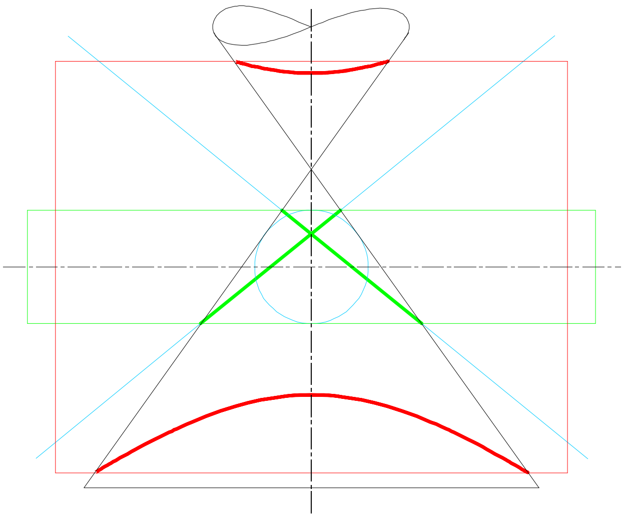
Az 5.13. b) ábrán a kúp csúcsára illesztett horizontális sík a kúpnak is és a hengernek is szimmetriasíkja, ezért első képen is kettős vetületet: egy ellipszist kapunk. Az ábra azt mutatja, hogy ilyen esetben célszerű az ellipszis tengelyeit megszerkeszteni.



a)



b)



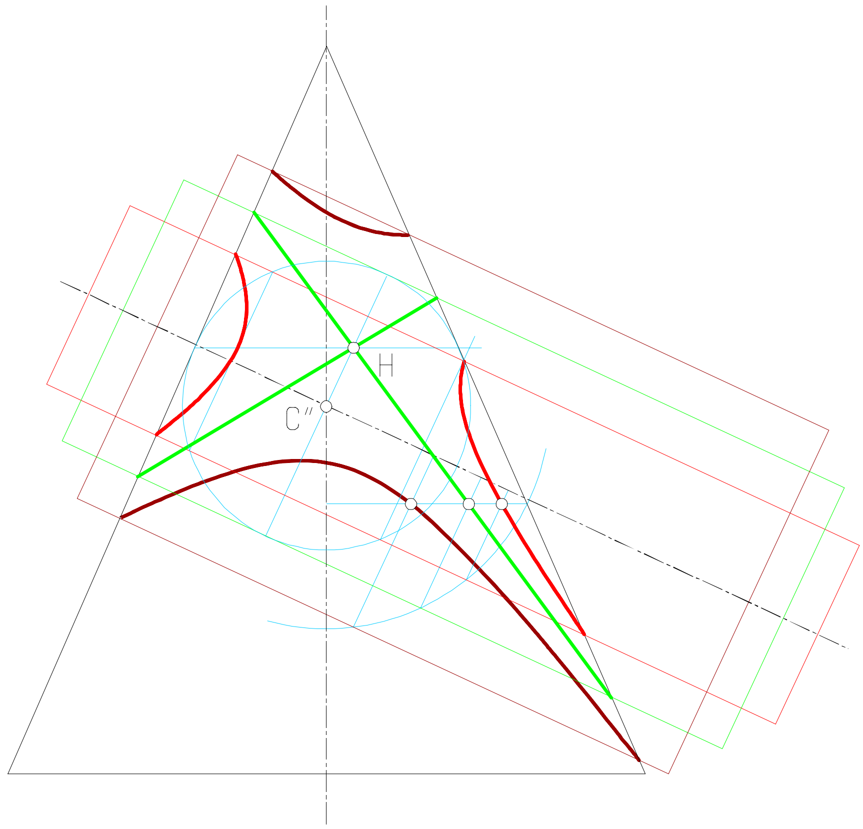
c)

5.14. ábra. a) Kúp és henger ellipszisekre széteső áthatása; b) Kúp és metsző tengelyű hengerek áthatásának kettős vetületei hiperbolák; c) Kúp és metsző tengelyű henger áthatásának kettős vetülete hiperbola

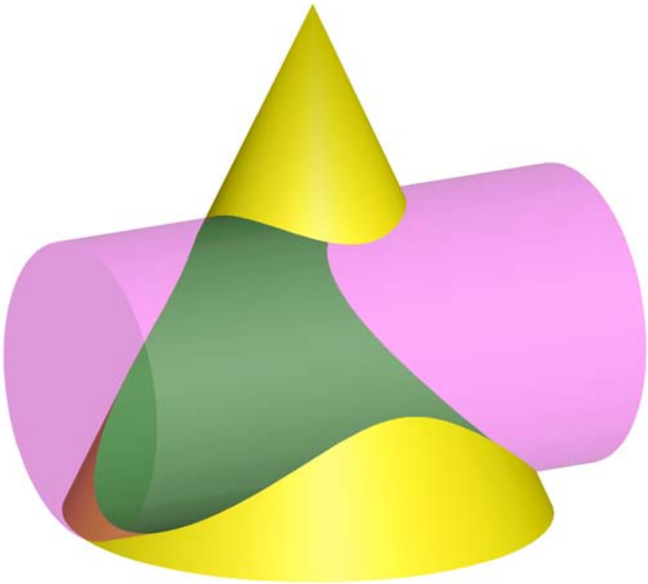
Az 5.14. a) ábra közös gömböt érintő kúp és henger ellipszisekre széteső áthatatását mutatja. Az ellipszisek második képen kettős vetületben szakaszoknak látszanak.

Forgáshenger és forgáskúp széteső áthatásairól a többivel összevontan a *Széteső áthatások* című 5.6. szakaszban lesz még szó.

Az 5.14. b), 5.14. c), 5.15. ábrákon metsző tengelyű kúp-henger áthatásokat szerkesztettünk meg különböző átmérőjű hengerekkel. Az áthatási pontokat a tengelyek metszéspontja (mint középpont) körül felvett szeletelő gömbökkel szerkesztettük. Az áthatási görbének a tengelyek síkjára (vagy azzal párhuzamos képsíkra) eső kettős vetülete hiperbola. Az áthatás (képzetes) végtelen távoli pontja nem változik az alkotók párhuzamos eltolása közben. Ezért a kúppal közös gömböt érintő henger széteső áthatásának két egyenesből álló kettős vetülete a többi hiperbolavetületnek a közös aszimptotája.



5.15. ábra. Metsző tengelyű kúp és hengerek áthatásának kettős vetületei hiperbolák

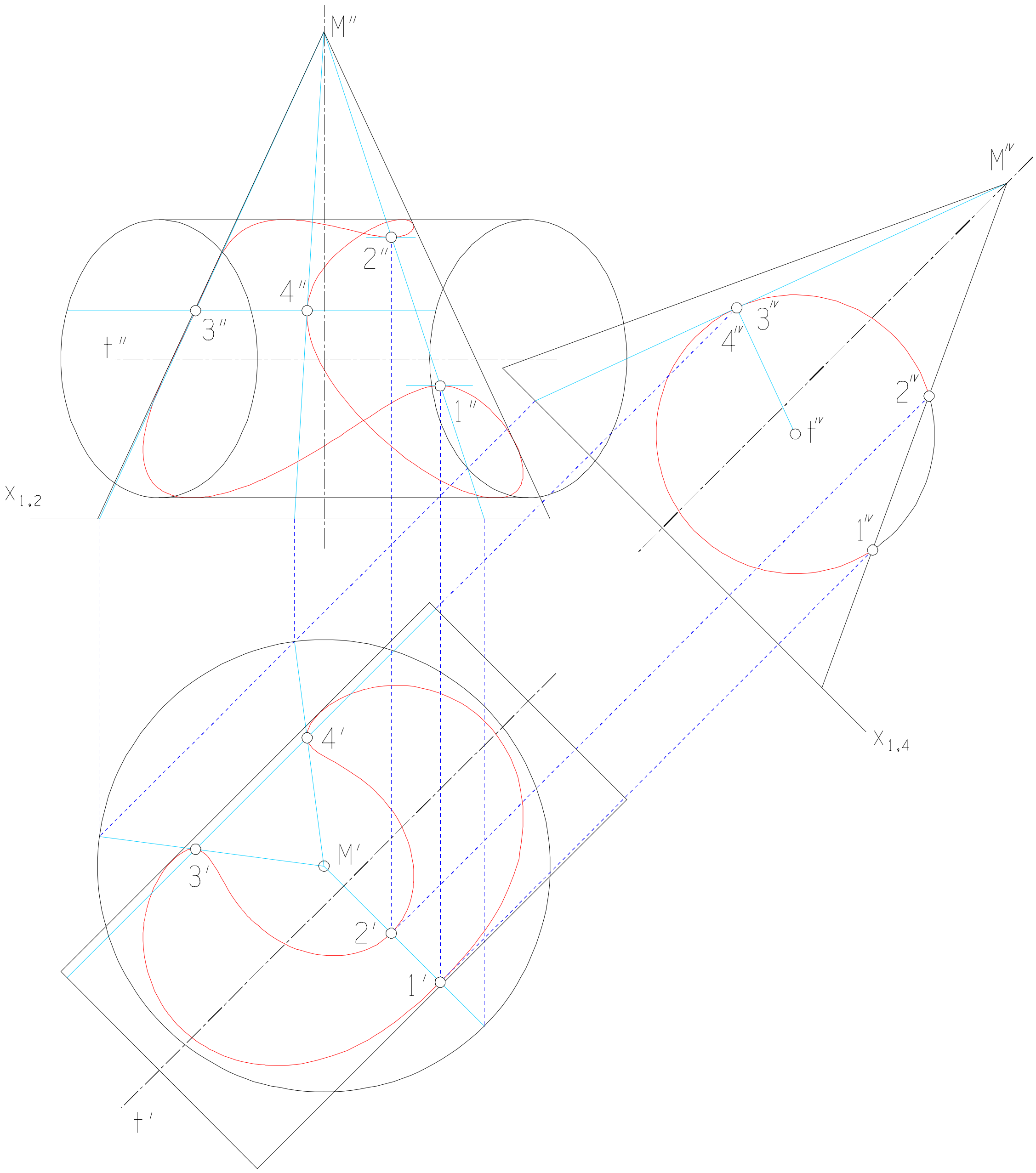


5.16. ábra. Merőleges tengelyű kúp és henger áthatása

5.1. Feladat. *Adott az első képsíkon álló forgáskúp és a horizontális tengelyű forgáshenger (5.16. ábra). Ábrázolja a kúptestnek a hengeren kívüli részét!*

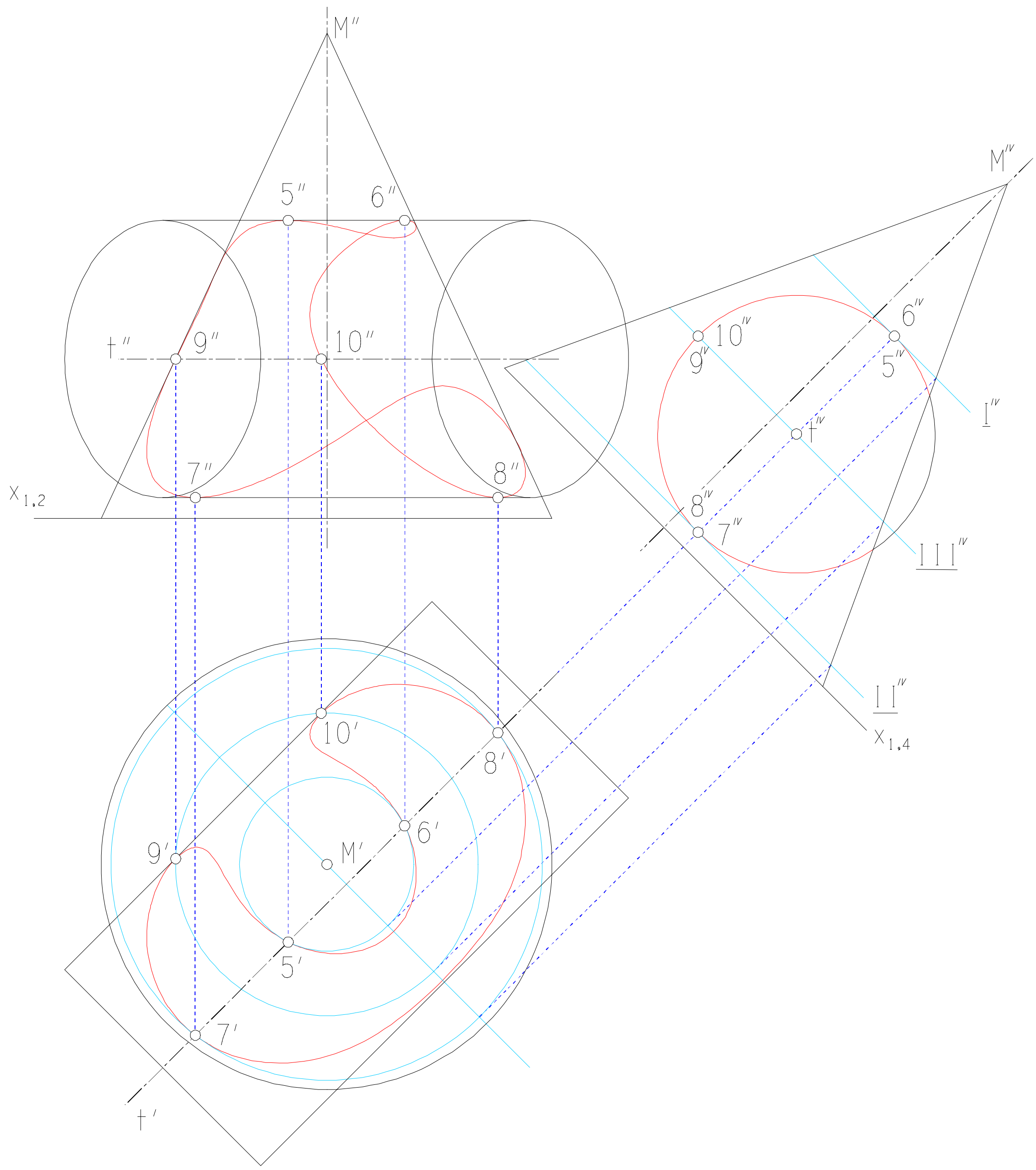
Megoldás.

- Transzformáljuk a metsző hengert vetítőhengerré, így negyedik képen az áthatás képe körív, a szeletelő síkok pedig negyedik vetítősíkok;
- szerkesszük meg az áthatás különleges pontjait:



5.17. ábra. A szélső szeletelő síkokkal szerkesztett pontokban alkotó az érintő

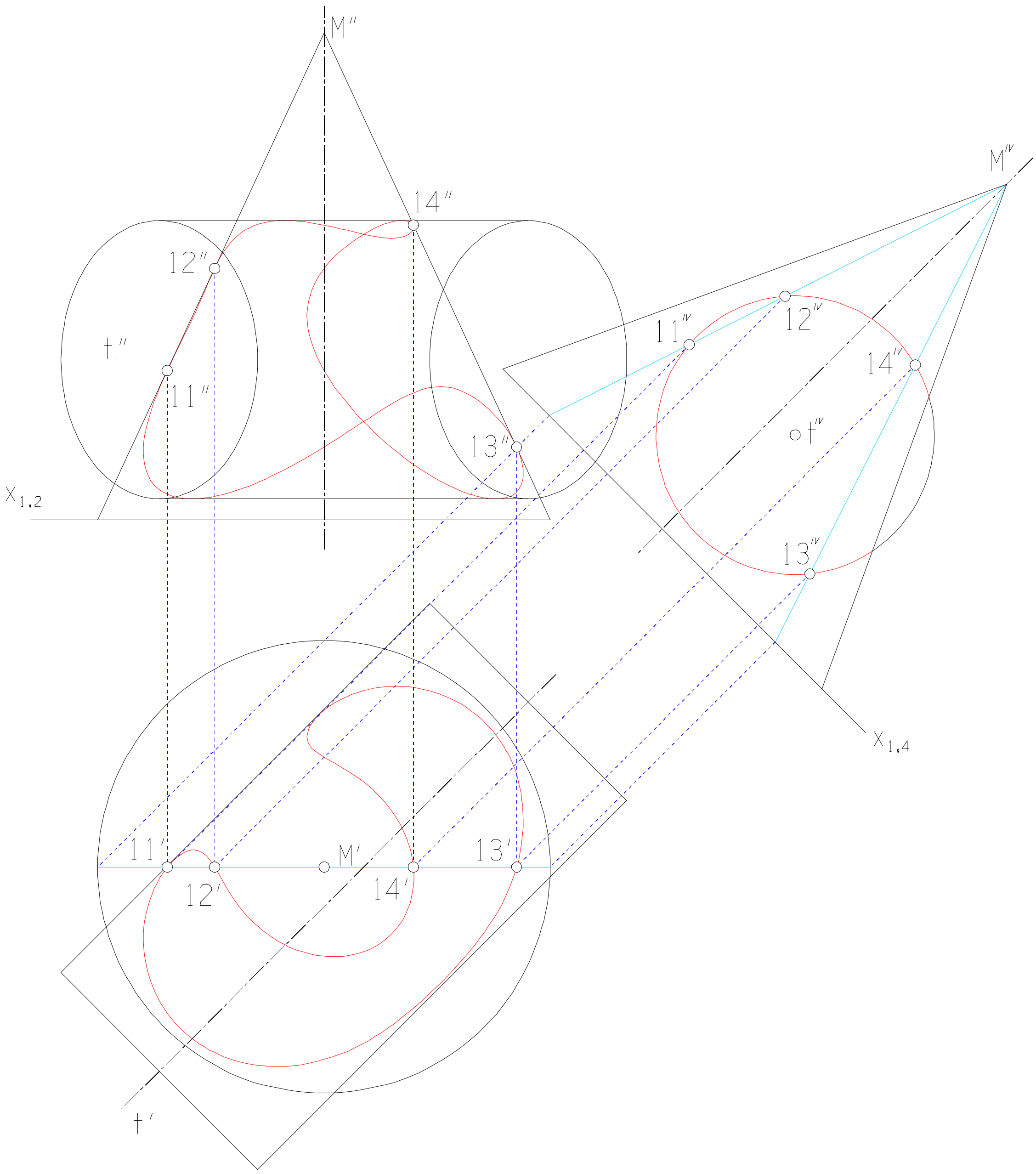
– vegyük a kúp csúcsán átmenő, a henger tengelyével párhuzamos sorozóegyenesre illeszkedő szeletelő síkok közül a szélsőket: a kúpot érintő síkkal **1**, **2** szerkeszthető, ahol hengeralkotó az érintő, a hengert érintő síkkal **3**, **4** szerkeszthető, ahol kúpalkotó az érintő (5.17. ábra);



5.18. ábra. Kontúrpontok szerkesztése a kontúralkotókra illesztett szeletelő síkokkal

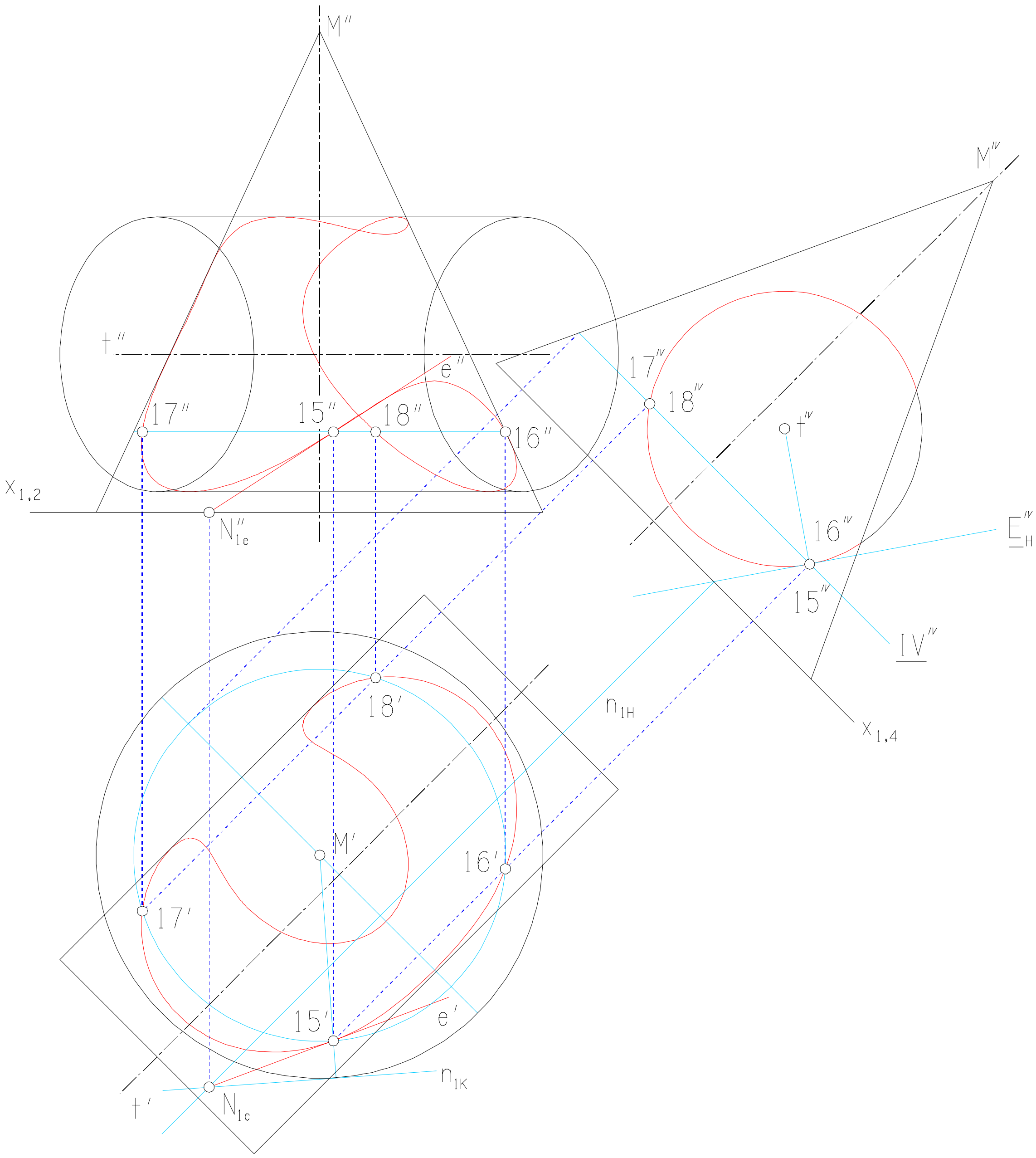
– vegyük a kúp tengelyére merőleges síkok közül a szélsőket: a hengert fölülről érintő **I** síkkal **5**, **6**, majd hengert alulról érintő **II** síkkal **7**, **8** szerkeszthető, ezekben a pontokban a kúpból kimetszett parallelkör és az áthatási görbe érintője egybeesik (ezek egyúttal a henger második kontúrpontjai) (5.18. ábra);

– a henger **9**, **10** első kontúrpontjait a **III** síkkal szerkesztettük (5.18. ábra);



5.19. ábra. A második kontúrpontok szerkesztése

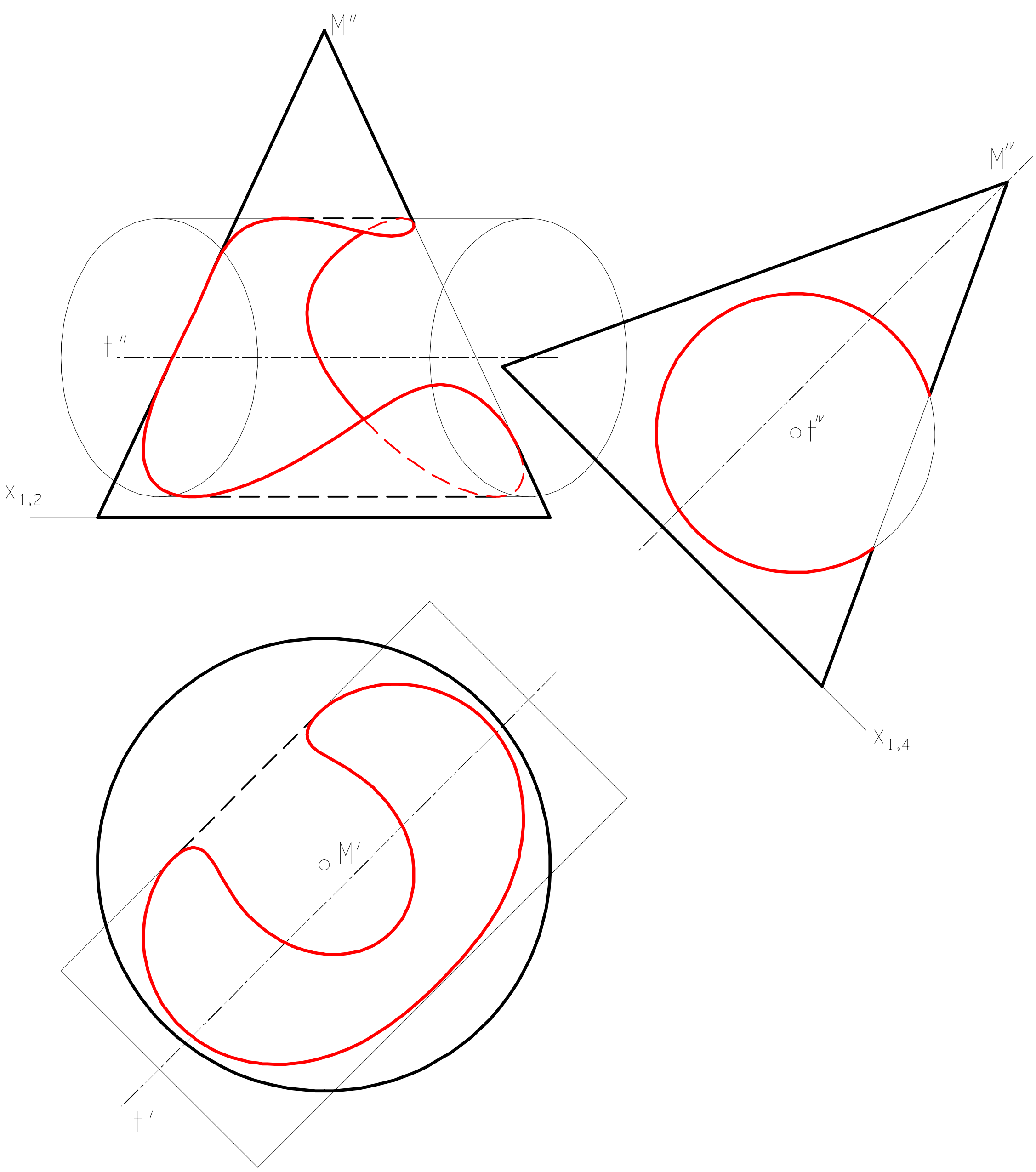
– a kúp **11 – 14** második kontúrpontjait a második kontúralkotókra és a sorozóegyenesre illeszkedő síkokkal szerkesztettük (5.19. ábra);



5.20. ábra. Általános helyzetű pont és pontbeli érintő szerkesztése

- szerkesszünk az áthatási görbén általános helyzetű pontot érintővel:
  - a **15** – **18** pontokat a <u>**IV**</u> síkkal szerkesztettük;
  - a **15** pontban az érintőt az érintősíkok metszésvonalaként szerkesztettük. Az érintősíkok első nyomvonalai, $\mathbf{n}_{1H}$ és $\mathbf{n}_{1K}$ az érintő első nyompontjában metszik egymást (5.20. ábra);

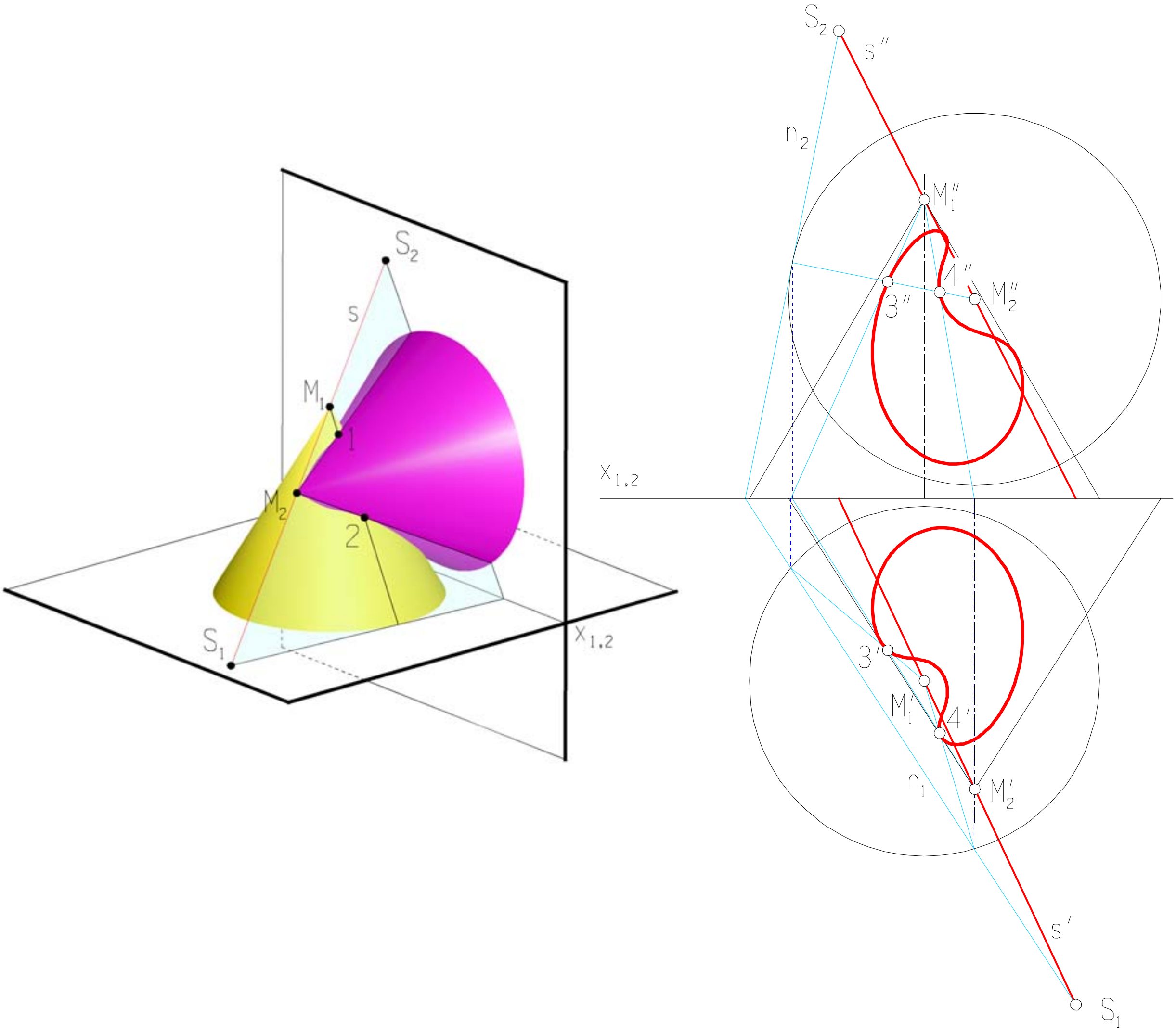
Végül a kész ábrát láthatóság szerint kihúztuk (5.21. ábra)



5.21. ábra. A kúptestből a hengeren kívül maradó rész láthatóság szerint kihúzva

5.5.3. Két forgáskúp áthatása

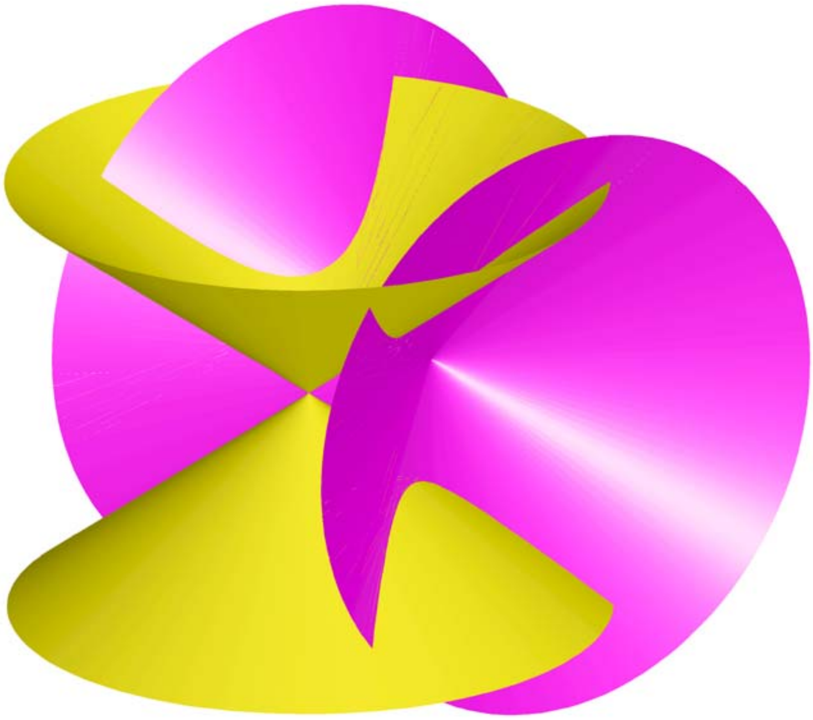
Két kúp áthatása még változatosabb lehet, mint az 5.11. – 5.15. ábrákon mutatott kúp-henger áthatások. Azokhoz hasonló eseteket kapunk, ha a hengert egy kis nyílásszögű kúppal helyettesítjük. Például az 5.22. ábrán bemutatott eset hasonlít az 5.11.a esethez. Ugyanakkor a kúpokkal sokkal változatosabb áthatásokat kaphatunk, erre szolgál érdekes példaként az 5.23. - 5.26. ábrákon bemutatott eset.



5.22. ábra. Kitérő tengelyű kúpok áthatása (bal oldali ábra); A szélső szeletelő síkokkal szerkesztett pontokban alkotó az érintő (jobb oldali ábra)

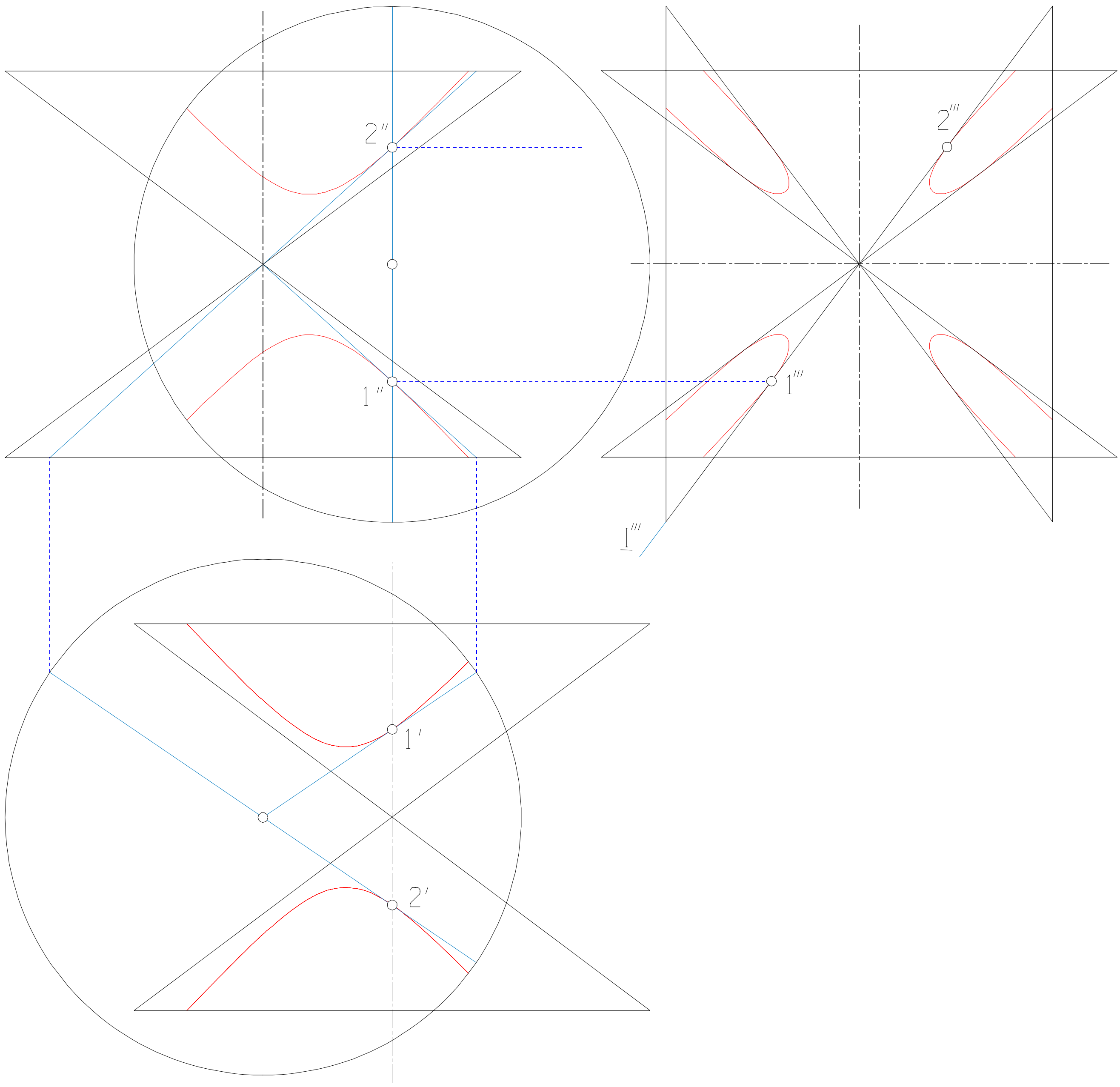
Két kitérő tengelyű forgáskúp áthatását olyan szeletelő síkok alkalmazásával szerkeszthetjük meg, amelyek mindkét kúpot alkotókban metszik, azaz mindkét kúp csúcspontjára, tehát az azokat összekötő egyenesre is illeszkednek. A szeletelő síkok alakzatát *síksornak*, a síkok közös metszésvonalát a síksor tartó-, vagy sorozó egyenesének nevezzük. A kúpok alapsíkjai a sorozó egyenest egy pontban, a szeletelő síkokat pedig arra illeszkedő egyenesekben metszik. A síksor metszeteként kapott alakzat a *sugársor*, a sugarak közös pontja a sugársor tartó-, vagy sorozópontja.

Az 5.22. ábrán a két kitérő tengelyű kúp a képsíkokon áll, ezért a szeletelő síksornak a képsíkokkal képzett metszeteként előálló sugársorok sorozó pontjai a sorozóegyenes nyompontjai, a sugarak pedig a szeletelő síkok nyomvonalai. Az 5.22. ábrán (bal oldal) szemléltetjük az első képsíkon álló kúpot érintő szélső szeletelő síkot. Az így kapott **1**, **2** pontokban, a második képsíkon álló kúpból kimetszett alkotók érintik az áthatási görbét Az 5.22. ábrán (jobb oldal) megszerkesztettük a második képsíkon álló kúpot érintő szélső szeletelő síkot. Az így előállított **3**, **4** pontokban, az első képsíkon álló kúpból kimetszett alkotók érintik az áthatási görbét.



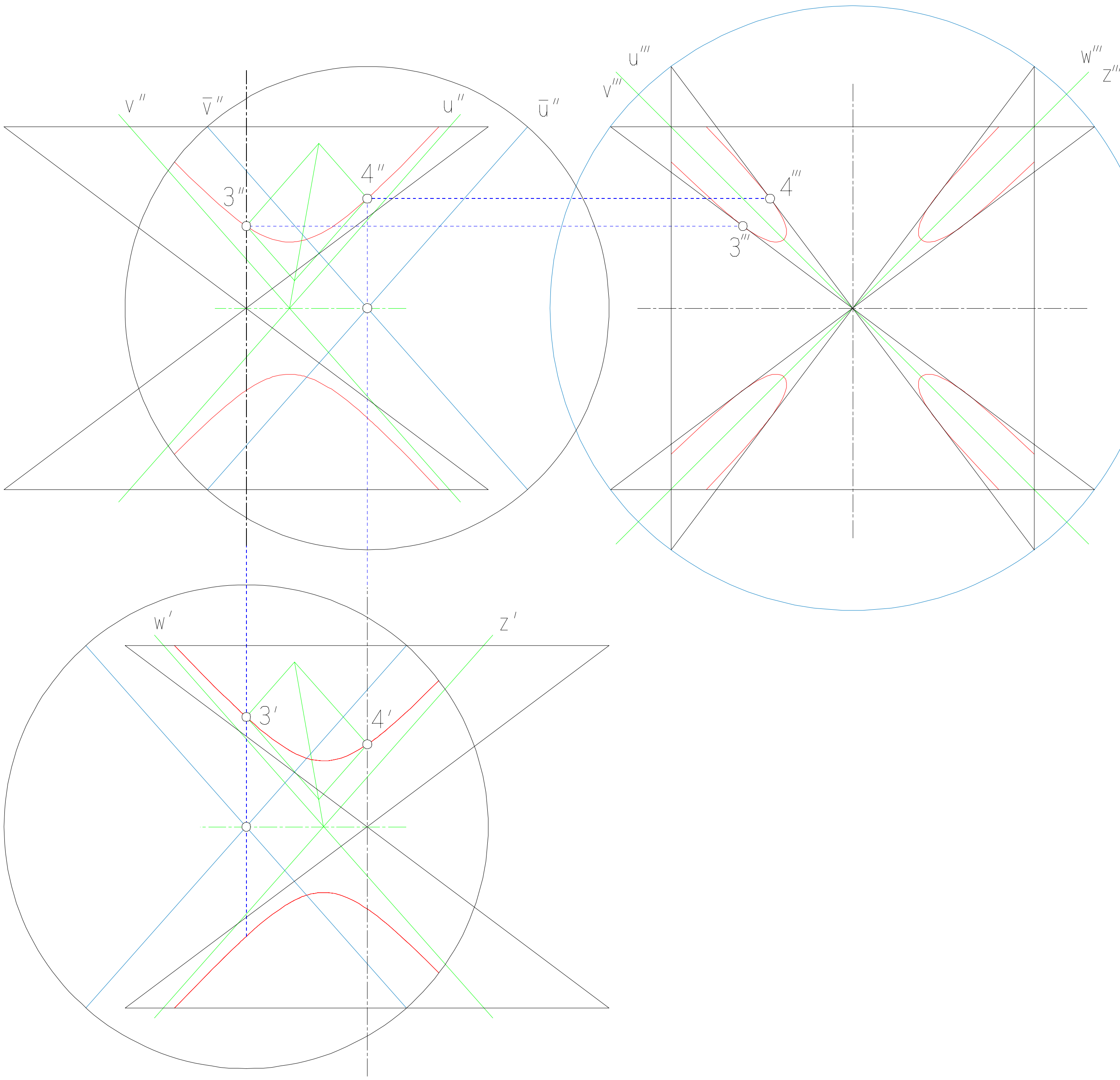
5.23. ábra. Kitérő tengelyű kúppalástok szimmetrikus helyzetben

Az 5.23. ábrán látható két kitérő tengelyű kúp csúcsait összekötő sorozóegyenes harmadik vetítősugár, ezért a szeletelő síkok harmadik képen élben látszanak.



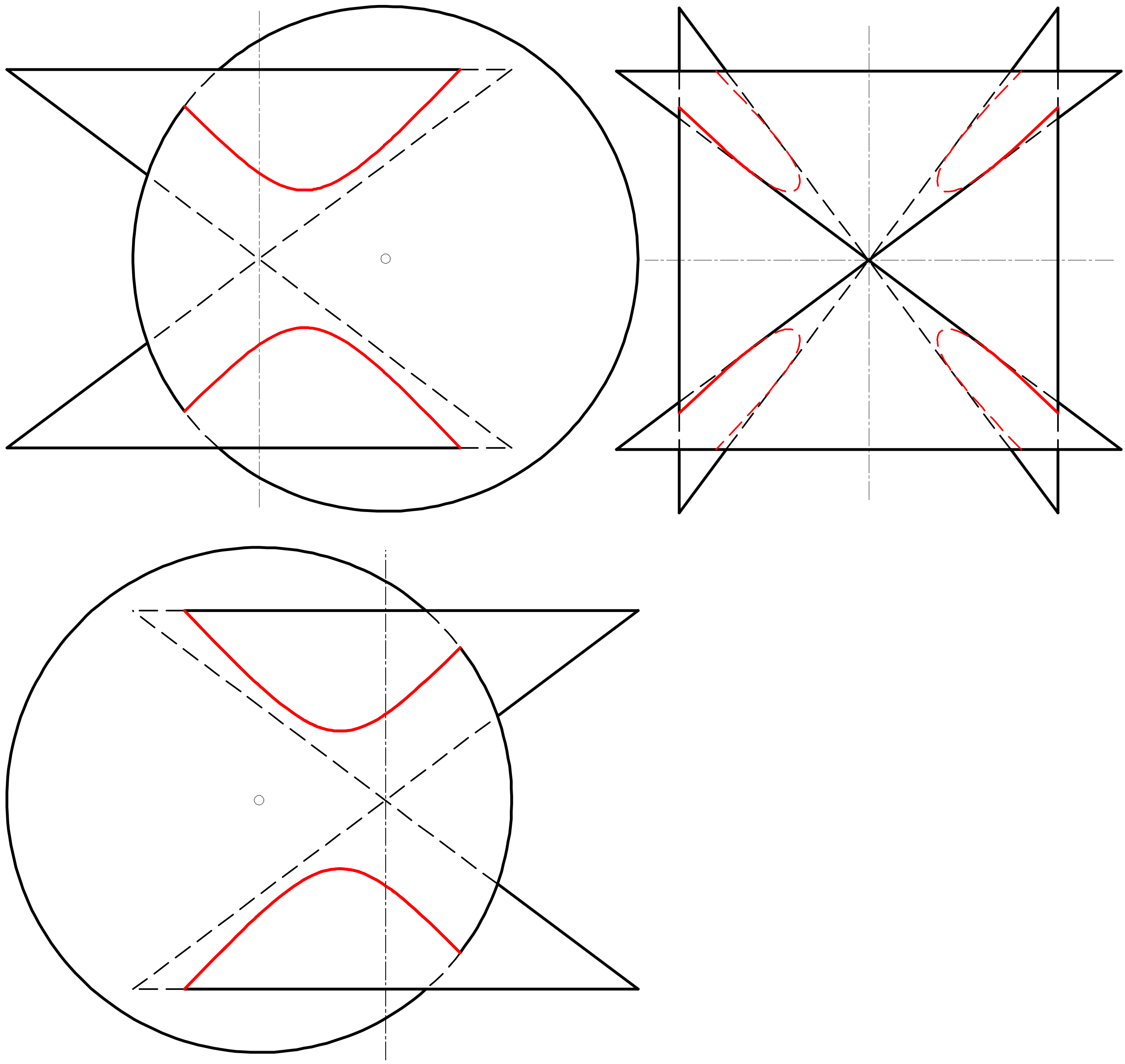
5.24. ábra. Szerkesztés a síksor szélső elemével

Egy szélső szeletelő síkkal az 5.24. ábrán szerkesztettünk áthatási pontokat. Ezekben a másik kúpból kimetszett alkotók az érintők.



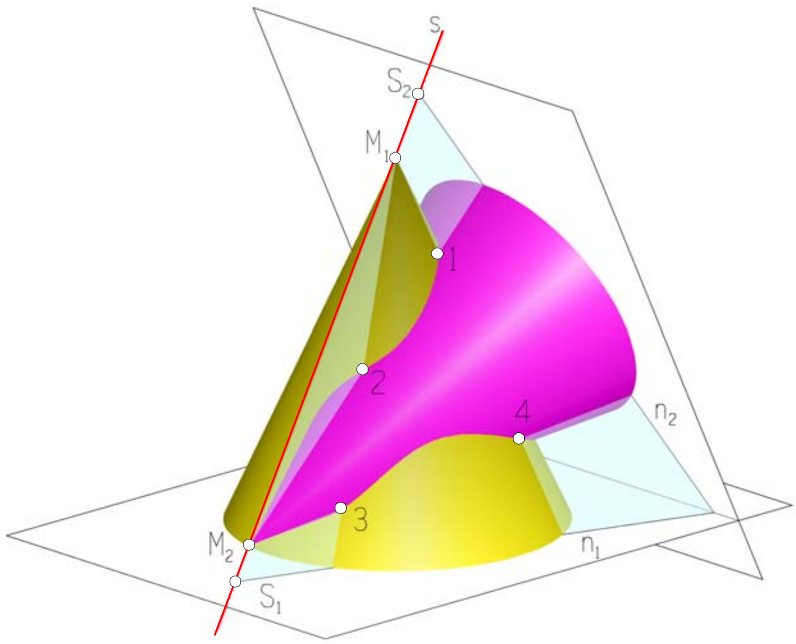
5.25. ábra. A kettős vetületek aszimptotáinak szerkesztése

A közös szimmetriasíkok miatt első és második képen egyaránt kettős vetületet kapunk. A kettős vetületek hiperbolák, amelyek aszimptotái párhuzamosak a közös csúcsponthoz eltolt kúpok közös alkotóival. Ezek szerkesztését a harmadik képen végeztük el, mert ott a csúcsok vetületei már eleve egybeestek (5.25. ábra).



5.26. ábra. A kúppalástok ábrázolása láthatóság szerint

Mivel az összetolt kúpoknak most mind a négy közös alkotója valós, ezért az áthatásnak négy valós végtelen távoli pontja van. A láthatóság szerinti ábrázolást az 5.26. ábra mutatja.

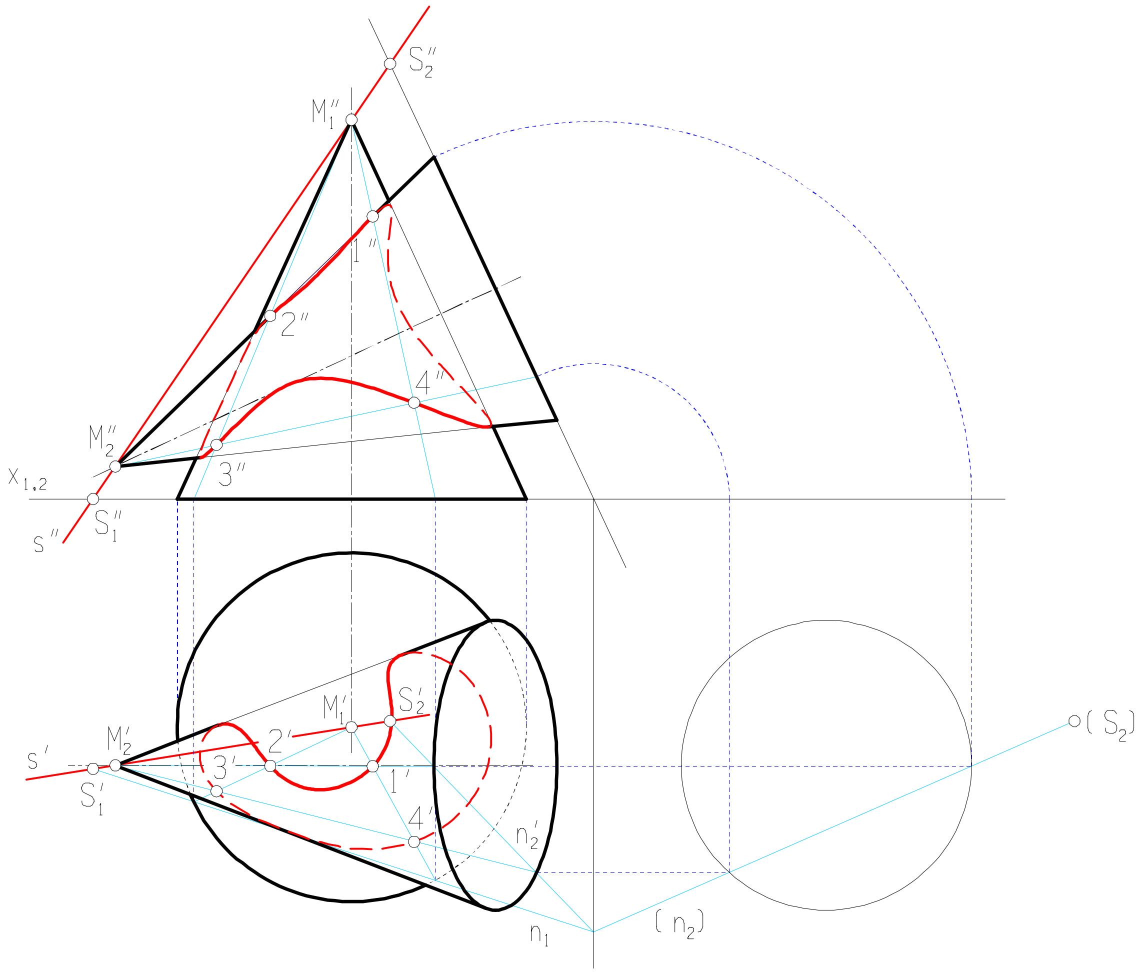


5.27. ábra. A kúpok csúcsaira illeszkedő szeletelő sík

A szeletelő síksoros szerkesztés jelentőségét az adja, hogy másodrendű felületek áthatása visszavezethető másodrendű kúpok, hengerek áthatására, ami az előbb mutatott módon már szerkeszthető (lásd még az 5.27., 5.28. ábrákat).

Legyen ugyanis két másodrendű felület (másodfokú) egyenlete $F(x, y, z) = 0$ és $G(x, y, z) = 0$. Az áthatás bármely pontjának koordinátái mindkét egyenletet kielégítik. Képezzük ezután az egyenletek tetszőleges arányú $\lambda F(x, y, z) + (1 - \lambda)G(x, y, z) = 0$ lineáris kombinációját, ami szintén másodfokú és az áthatási pontok koordinátái is kielégítik. Így λ változtatásával másodrendű felületeknek egy olyan seregét kapjuk, amelyek mindegyike illeszkedik a kiindulásul vett két felület áthatási görbéjére. Azt, hogy a sereg mely elemei elfajulók, vagyis kúpok, vagy hengerek, általában egy negyedfokú egyenlet megoldásával kapjuk. Az algebra alaptétele szerint egy negyedfokú egyenletnek legfeljebb 4 különböző valós gyöke lehet, tehát legfeljebb 4 különböző másodrendű henger, vagy kúp illeszkedik a kiindulásul vett másodrendű felületek áthatási görbéjére. Például az 5.23. - 5.26. ábrákon tárgyalt esetben az áthatási görbére a két adott kúp és a két hiperbola vezérgörbéjű vetítőhenger illeszkedik, vagy az 5.55. - 5.58 ábrákon mutatott esetben az áthatási görbére az adott kúp és henger mellett a hiperbola vezérgörbéjű második vetítőhenger és az ellipszis vezérgörbéjű első vetítőhenger illeszkedik.

A fentiekben kitérő tengelyű forgáskúpok áthatására láttunk néhány példát, a metsző tengelyű kúpok áthatását majd az 5.5.5. pontban tárgyaljuk. A forgáskúpok széteső áthatásairól a többivel összevontan a *Széteső áthatások* című 5.6. szakaszban lesz szó.

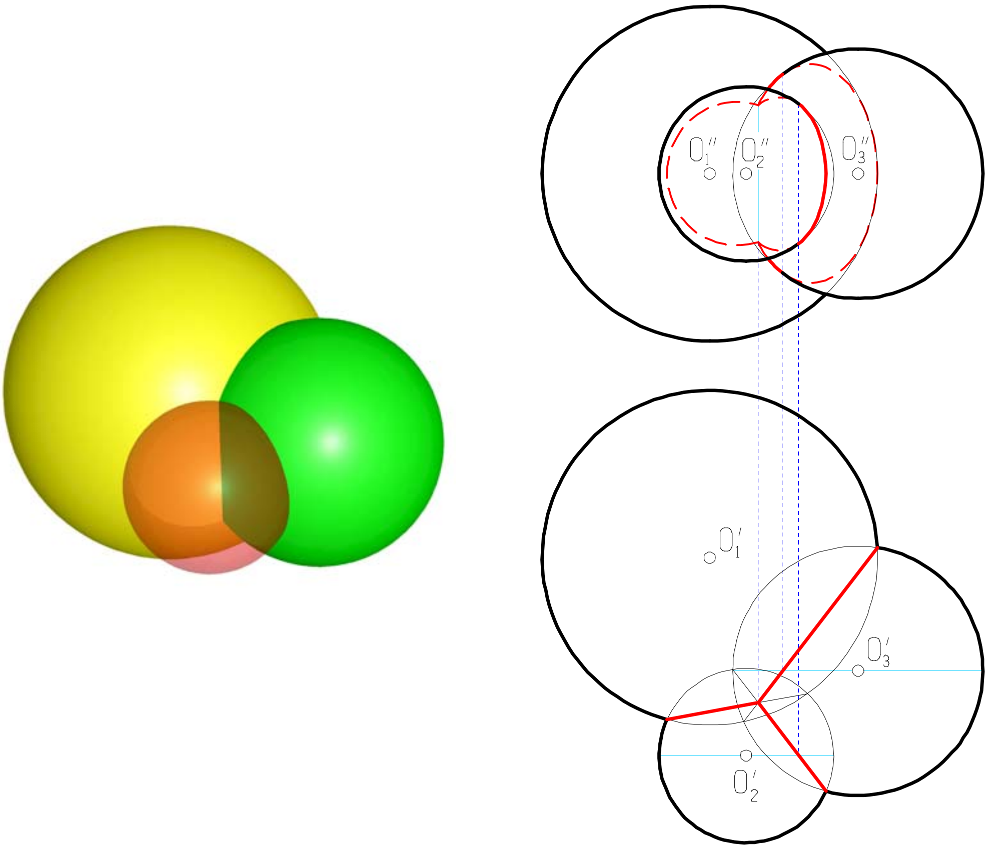


5.28. ábra. Kúpok áthatási pontjának szerkesztése alkotókban metsző szeletelő síkkal

5.5.4. Gömb, forgáshenger és forgáskúp áthatása

Két gömb áthatása kör. Vegyünk ugyanis egy közös síkban két, egymást metsző kört és forgassuk meg azokat a centrálisuk körül, ekkor a körök az áthatásban szereplő két gömböt, a metszéspontjaik pedig az áthatás körét súrolják. Ha a gömbök középpontjai a képsíkban, vagy attól egyenlő távolságra vannak, az áthatási kör élben látszik.

Bézout tétele szerint viszont két másodrendű felület áthatása negyedrendű kellene, hogy legyen. Egyszerűsítsük le a feladatot kétdimenziósra: már a közös síkban lévő két kör esetében is négy metszéspontnak kellene lenni. Annyi is van, de ebből a négyből legfeljebb kettő valós, kettő pedig minden esetben képzetes és még végtelen távoli is, az utóbbiakat abszolút körpontoknak nevezzük. Az alakzat megforgatásával visszatérve az áthatási problémánkra, beláthatjuk, hogy a végesben található valós áthatási kör mellett még az abszolút körpontok megforgatásából származó, képzetes, végtelen távoli kör is része az áthatásnak.



5.29. ábra. Három gömb áthatása

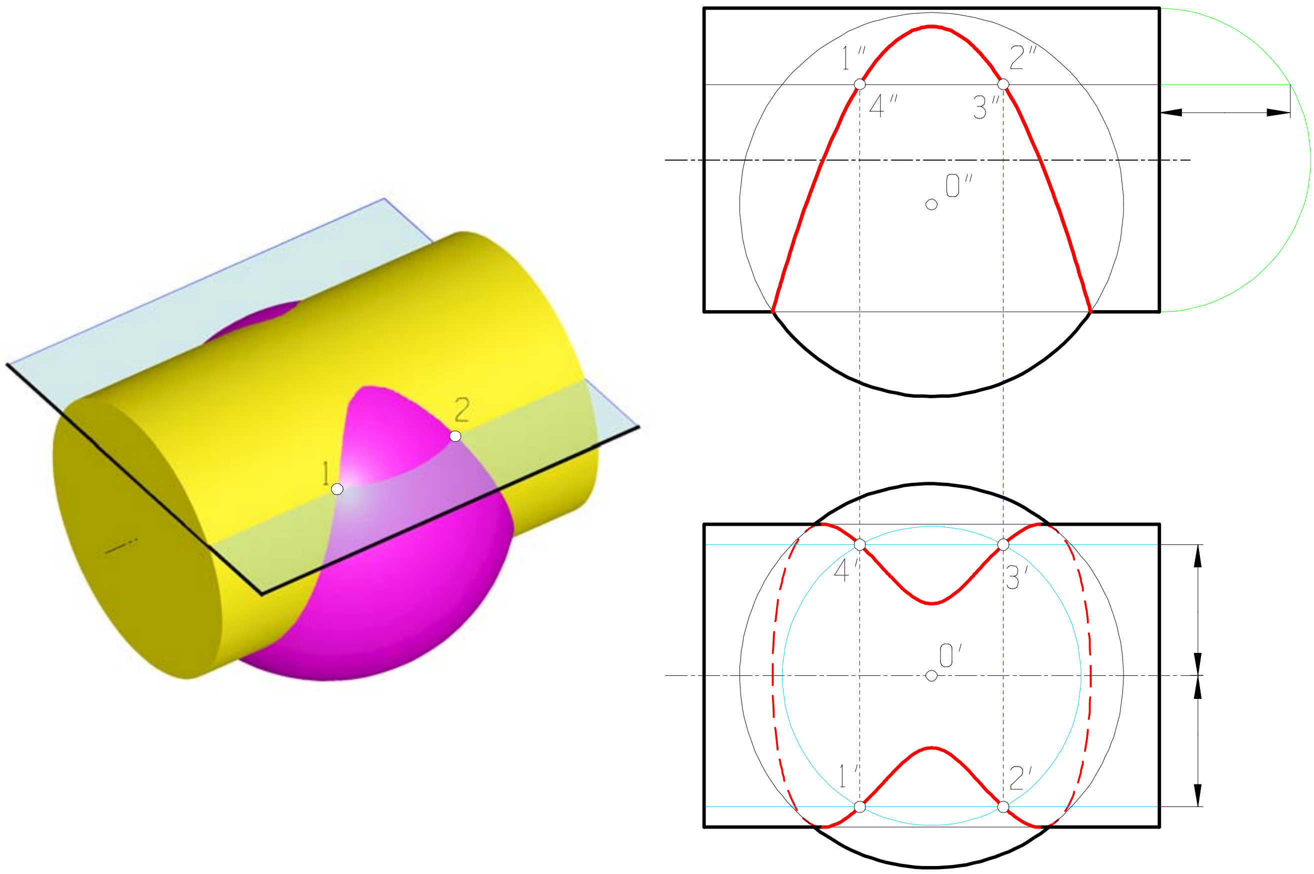
Az 5.29. ábrán három gömböt vettünk fel, amelyek középpontjai horizontális síkban vannak (ez transzformációval mindig elérhető). Két áthatási kör nem lehet „kitérő”, mert közös gömbfelületre illeszkedik, a metszéspontjuk mindhárom gömbön, tehát a harmadik áthatási körön is rajta van.

Tekintsünk most el az 5.29. ábrán az első kép térbeli jelentésétől. Három kört (a három kontúrkört) látunk, amelyek metszéspontjait összekötő egyenesek (a metszet-körök élben látszó vetületei) egy pontban metsződnek. Ezek az egyenesek a páronként vett körök hatványvonalai, a metszéspontjuk pedig a három kör hatványpontja.

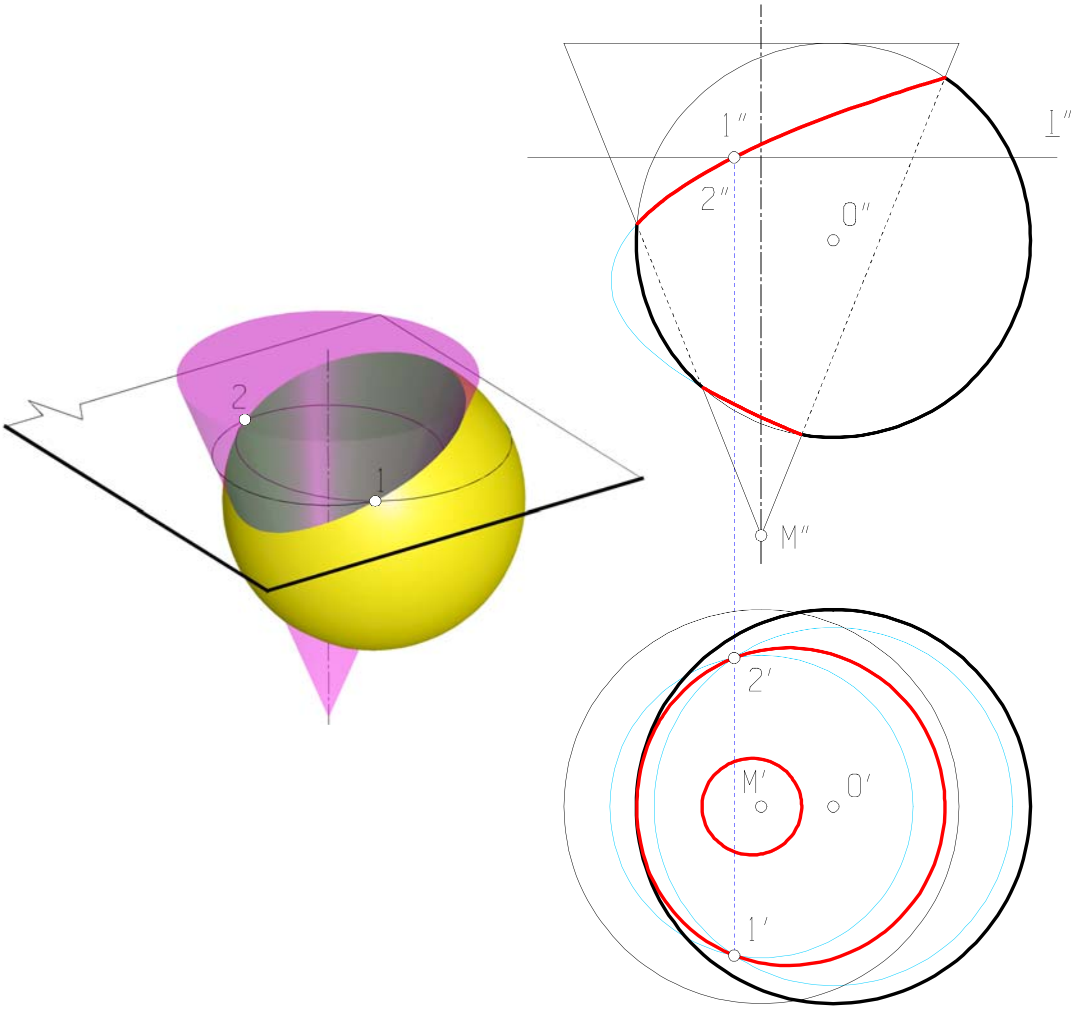
Legyen adott egy kör és egy rá nem illeszkedő pont, a ponton átmenő bármely egyenesnek a körig terjedő szelődarabjai ugyanazt a szorzatot adják (külső ponthoz az érintőtétel szerint). Ezt a szorzatot, amely külső pont esetében pozitív, belső pont esetében (a szelődarabok különböző irányítása miatt) negatív, a pont körre vonatkoztatott hatványának nevezzük. Két kör hatványvonala egy egyenes, amely azon pontok mértani helye, amelyeknek a két körre vonatkoztatott hatványa egyenlő. Két kör hatványvonala illeszkedik a körök metszéspontjaira (akkor is, ha azok képzetesek). Három kör hatványpontja az a pont, amelynek mind a három körre vonatkoztatott hatványa egyenlő.

A szeletelő felületek gömb és forgáskúp, vagy forgáshenger áthatásánál:

- lehetnek a henger tengelyével párhuzamos, a gömböt parallelkörökben metsző, egymással párhuzamos síkok (5.30. ábra);



5.30. ábra. A gömböt parallelkörben és a hengert alkotókban metsző szeletelő sík (bal oldali ábra); Gömb és henger áthatási pontjainak szerkesztése a gömböt parallelkörben és a hengert alkotókban metsző szeletelő síkkal (jobb oldali ábra)

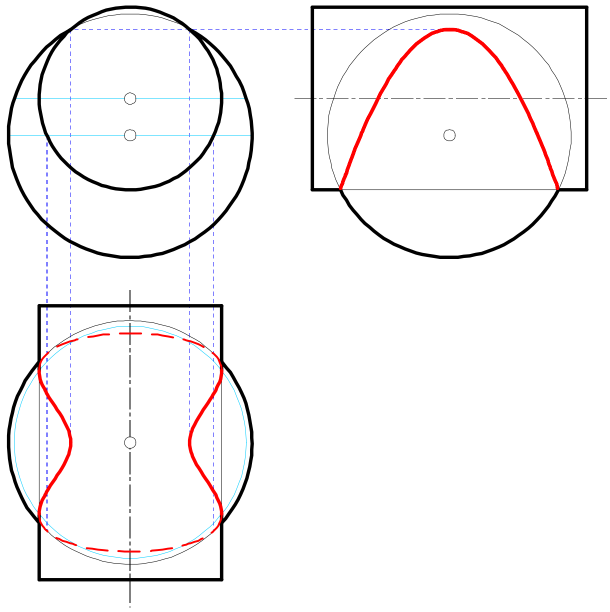


5.31. ábra. Gömb és kúp áthatása parallelkörökben metsző szeletelő síkkal (bal oldali ábra); Gömb és kúp áthatási pontjainak szerkesztése parallelkörökben metsző szeletelő síkkal (jobb oldali ábra)

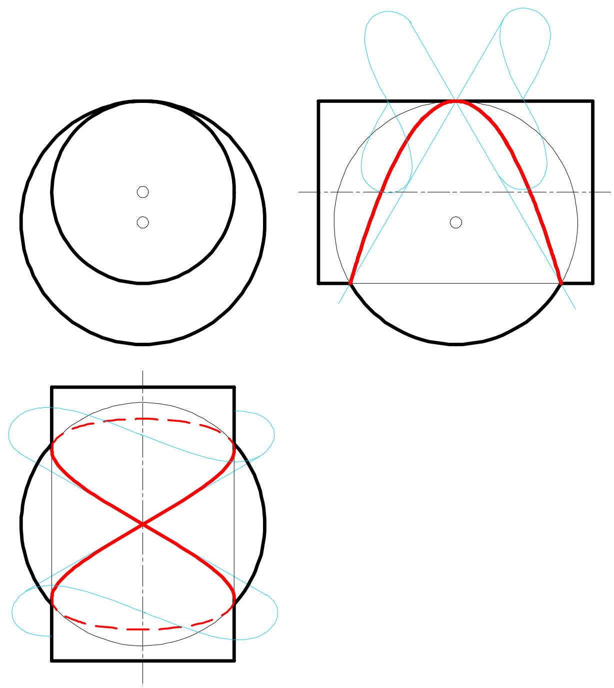
- lehetnek a henger, vagy kúp tengelyére merőleges, mindkét felületet parallelkörökben metsző, egymással párhuzamos síkok (5.31. ábra);
- lehetnek koncentrikus gömbök is, hiszen a gömb centrumán átmenő bármely egyenes tekinthető forgástengelyként, mindig választhatunk tehát ezek közül a kúp, vagy henger tengelyét metszőt.

Az 5.30 – 5.49. ábrákon az áthatási görbe kettős vetülete parabola. Ezt az alábbiakban indokoljuk: ha a kúp (,vagy henger) tengelyére merőleges síkkal szeletelünk, az mindkét felületet körben metszi. A közös szeletelő síkban lévő két körnek azonban a végesben lévő két (valós, vagy képzetes) metszéspontján kívül a két abszolút körpont is közös pontja. Az abszolút körpontok (valós) kettős vetülete a szeletelő sík élben látszó vetületének a végtelen távoli pontja. A párhuzamos szeletelő síkoknak a vetületei is párhuzamosak, ezért így egyetlen végtelen távoli pontot kapunk. Az a (nem elfajult) kúpszelet pedig, amelyiknek egyetlen végtelen távoli pontja van, a parabola.

Az 5.32., 5.33., 5.34. ábrákon gömb és henger néhány topológikusan különböző áthatási görbéjét mutatjuk be.



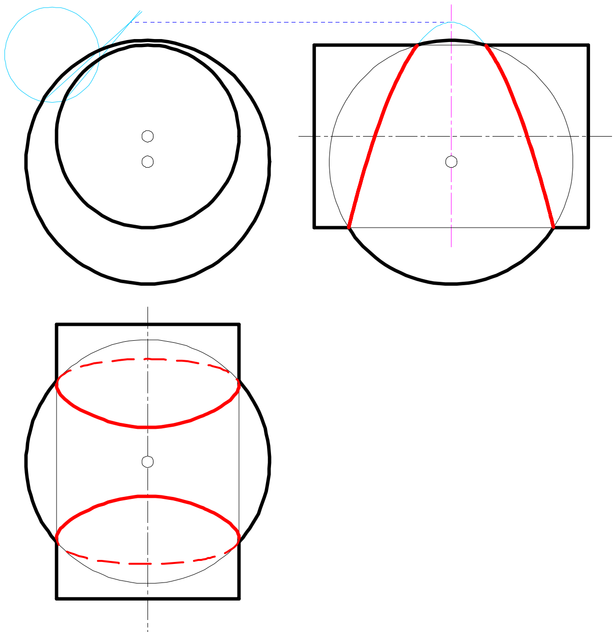
5.32. ábra. Gömb és henger uniója; az áthatás egy zárt görbe



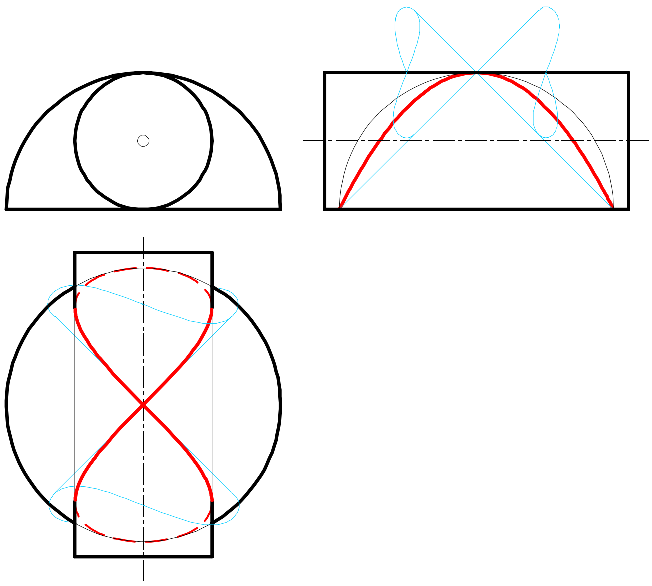
5.33. ábra. Gömb és henger uniója; az áthatási görbe egy „nyolcas": Eudoxosz „hippoped"-je

Eudoxosz (i.e. 408-355) hippoped-nek (lópatának) nevezte az 5.33. ábrán látható áthatást, amelynek speciális esete a Viviani-görbe (ha a henger átmérője egyenlő a gömb sugarával) (5.35. ábra). A henger tengelyére illeszkedő közös szimmetriasíkkal párhuzamos harmadik képsíkon a 4-edrendű áthatási görbe kettős vetülete parabola. Az áthatási görbe illeszkedik az 5.34., 5.35. ábrákon jelzett kúpra is, ezért az áthatási görbe önmetszéspontjában a henger érintősíkjával kimetszett kúpalkotók (a kúp első kontúralkotói) az áthatási görbe érintői. A Viviani-görbe esetében ennek alapján még az is belátható, hogy az önmetszéspontban az érintők merőlegesek.

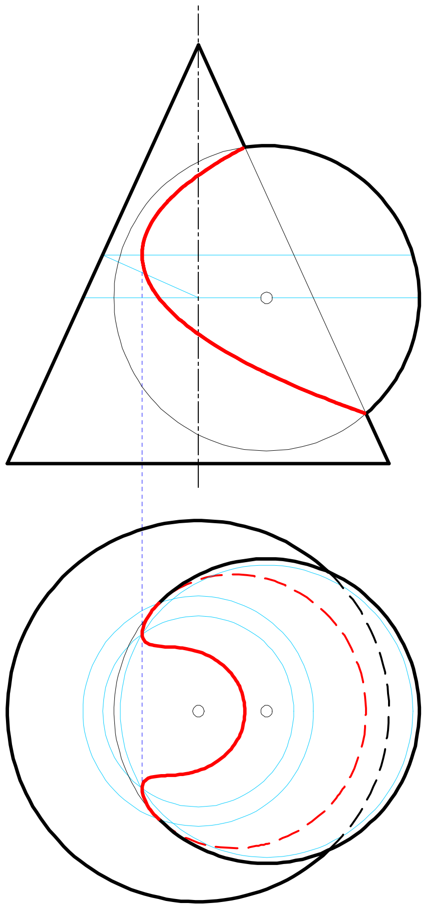
Ha egy negyedrendű térgörbének pontosan egy önmetszéspontja van, és ebből vetítjük a görbe többi pontját, a vetítősugarak másodrendű kúpot állítanak elő. Ugyanis a vetítősugarak már tartalmazzák a görbe három pontját (az önmetszéspont duplán számít), ezért a rájuk illeszkedő bármely síkban a görbének legfeljebb még egy pontja, és így a kúpnak legfeljebb még egy alkotója lehet.



5.34. ábra. Gömb uniója a gömböt átfúró hengerrel; az áthatási görbének két zárt ága van

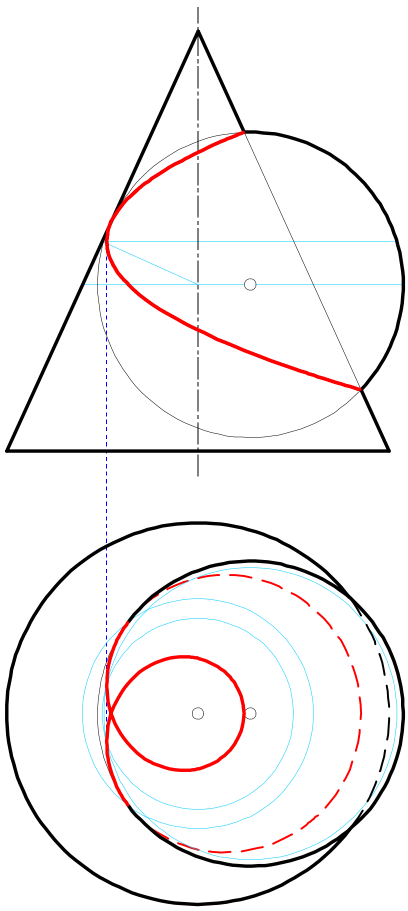


5.35. ábra. Gömb és henger uniója; az áthatási görbe egy „nyolcas”: Viviani-görbe

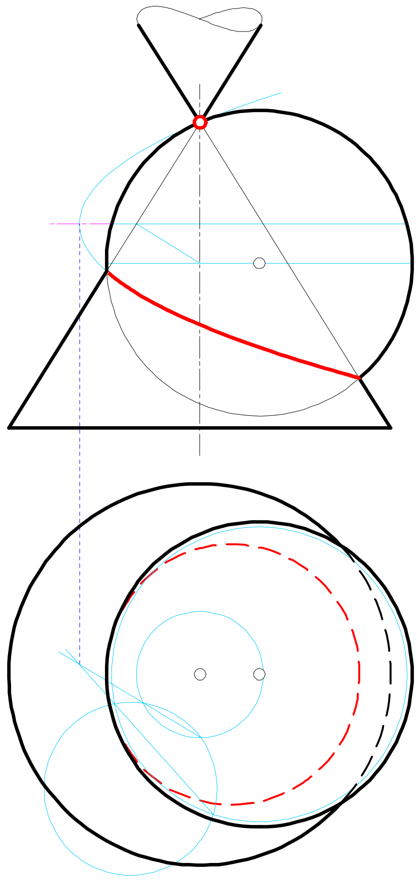


5.36. ábra. Kúp és gömb uniója; az áthatás egy zárt görbe

Az 5.36. – 5.42. ábrákon gömb és forgáskúp néhány topologikusan különböző áthatási görbéjét mutatjuk be. Az 5.36. és 5.37. ábrákon először a gömb középpontján átmenő horizontális síkkal szeleteltünk. Ennek eredményeként kaptuk a gömb első kontúrjára illeszkedő áthatási pontokat. Majd a kettős vetületként kapott parabola tengelypontját kerestük meg. Az áthatási görbe érintőjét a felületi normálisok módszerével szerkesztjük. Azt a pontot keressük, ahol az érintő második képe „függőleges”. Ehhez a normálisok tengelypontjait összekötő frontális fővonalnak „vízszintesnek” kell lenni. Válasszuk tehát a normálkúp csúcspontját a gömb középpontjának a magasságában és szeleteljünk a normálkúppal kimetszett parallelkörön átmenő síkkal. A kapott pontok az áthatás bal oldali szélső pontjai, ezekben az érintő profilegyenes.

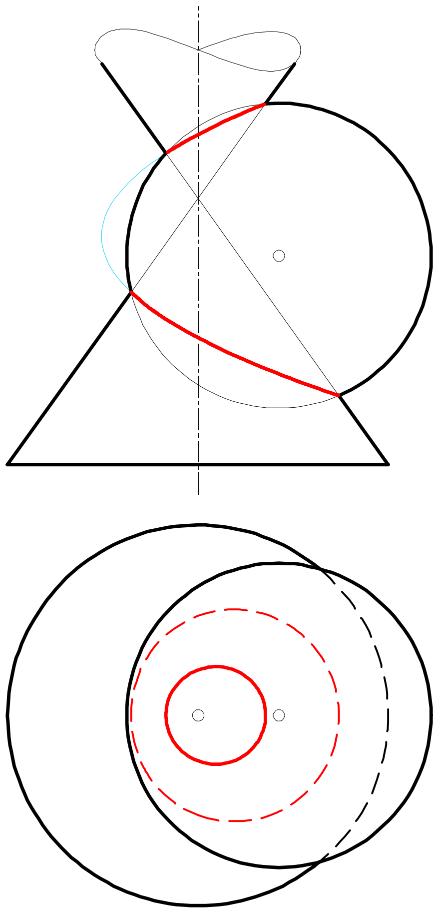


5.37. ábra. Kúp és gömb uniója; az áthatási görbe egy „nyolcas”

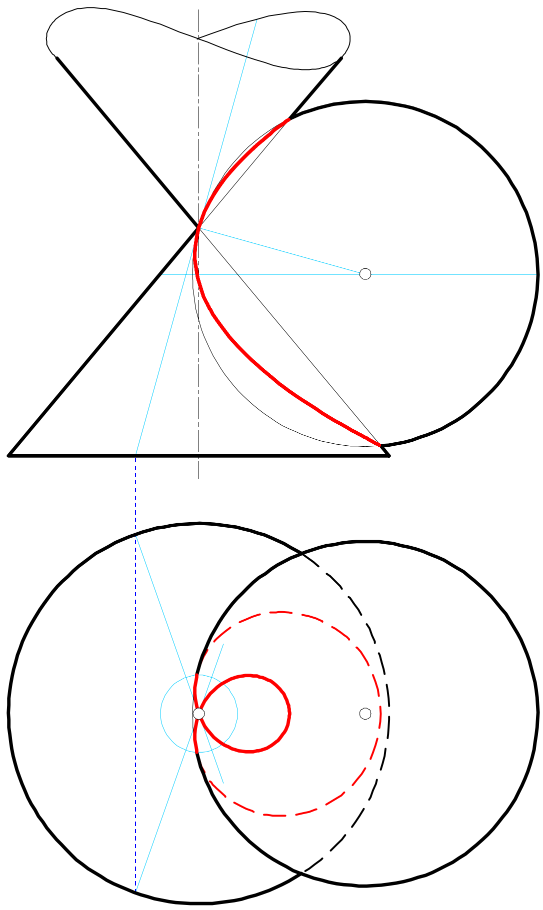


5.38. ábra. Kúp és gömb uniója; az áthatásban izolált pont van

Az 5.38. ábrán az áthatáshoz tartozik egy izolált (vagy „remetepont”) is. A parabola tengelypontjának a megszerkesztése egy kis nehézségbe ütközik. A megfelelő szeletelősíkkal kimetszett parallelköröknek ugyanis nincs valós metszéspontjuk. A képzetes metszéspontok is illeszkednek viszont a két kör hatványvonalára. Ennek a helyét egy tetszőlegesen felvett harmadik körrel képzett hatványpont segítségével szerkesztettük meg. (A tengelypontot a parabola síkgeometriai tulajdonságaival is megszerkeszthettük volna.)

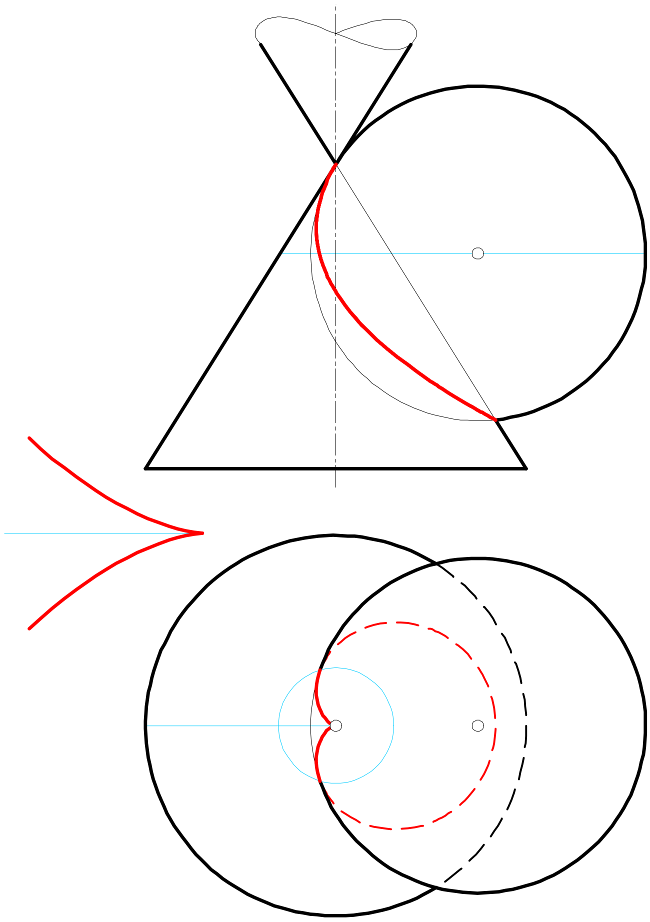


5.39. ábra. Kúp és gömb uniója; az áthatási görbének két zárt ága van



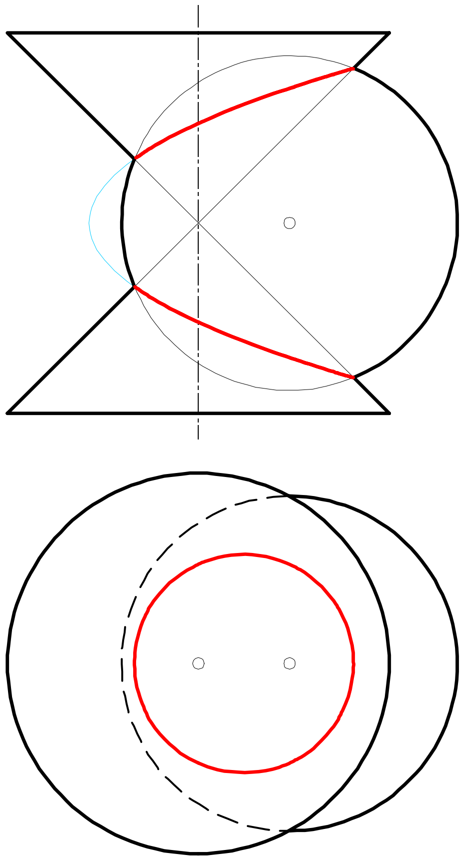
5.40. ábra. Kúp és gömb uniója; az áthatási görbe egy „nyolcas”, amelynek az önmetszéspontban kúpalkotók az érintői

Az 5.40. ábrán a gömböt a kúp csúcspontjában érintő síkkal kimetszett kúpalkotók az áthatási görbét az önmetszéspontjában érintik, a gömb középpontján átmenő horizontális szeletelő síkkal pedig az első kontúrpontokat kapjuk meg.



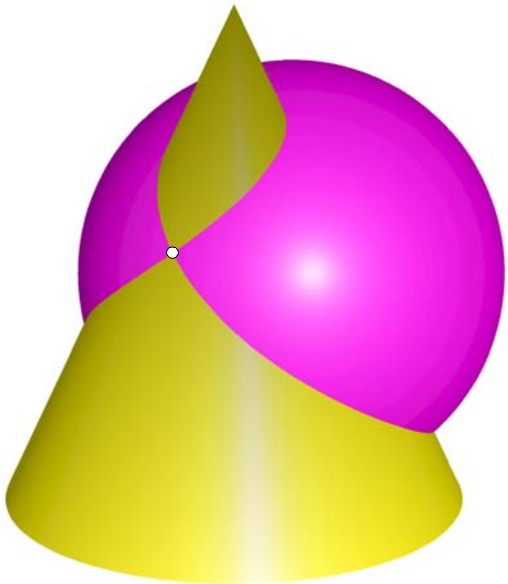
5.41. ábra. Kúp és gömb uniója; az áthatási görbén elsőfajú csúcspont van

Az 5.41. ábrán a gömböt a kúp csúcspontjában érintő sík a kúpot is érinti egy alkotóban. Az áthatási görbén elsőfajú csúcspont van, amelyben az előbbi kúpalkotó az érintő. A csúcspont környezetét kinagyítva is bemutatjuk.



5.42. ábra. Kúppalást és gömb uniója; az áthatási görbe kettős vetülete kör

Az 5.42. ábrán a kúp csúcsára illesztett horizontális sík a kúpnak is és a gömbnek is szimmetriasíkja, ezért első képen is kettős vetületet: egy kört kapunk. Ebben az esetben nem lenne célszerű az áthatást pontonként szerkeszteni.

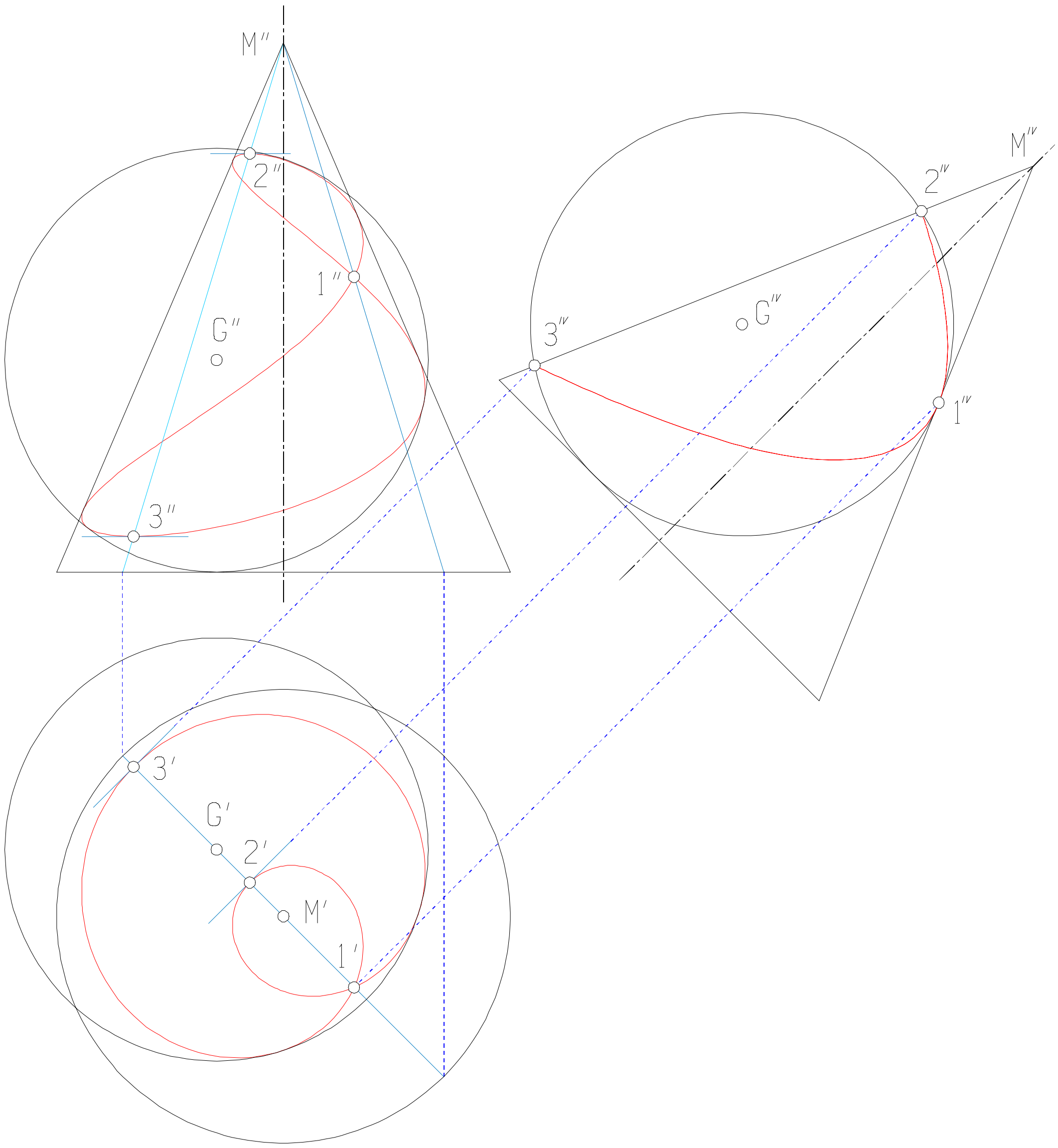


5.43. ábra. Kúp és gömb egy önmetszéspontot tartalmazó áthatása

5.2. Feladat. *Adott az első képsíkon álló forgáskúp és egy, a kúp palástját érintő gömb. Ábrázolja a két test unióját (5.43. ábra.)!*

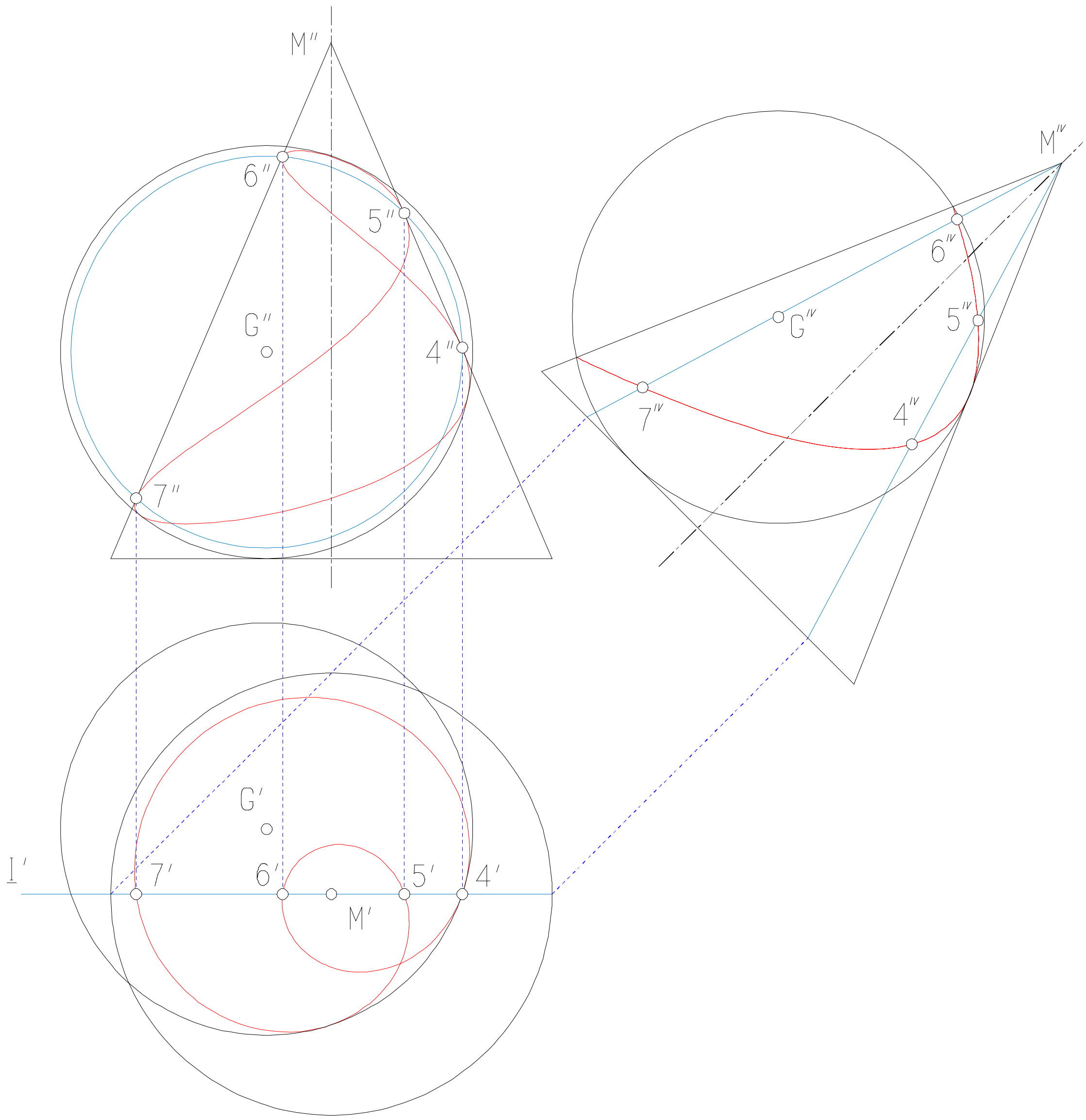
Megoldás.

- Transzformáljunk a közös szimmetriasíkkal párhuzamos negyedik képsíkra, így negyedik képen látszik a gömb és kúp érintkezése (itt vettük fel), és az áthatás kettős vetülete, amely másodfokú görbe: parabola;
- szerkesszük meg az áthatás különleges pontjait:



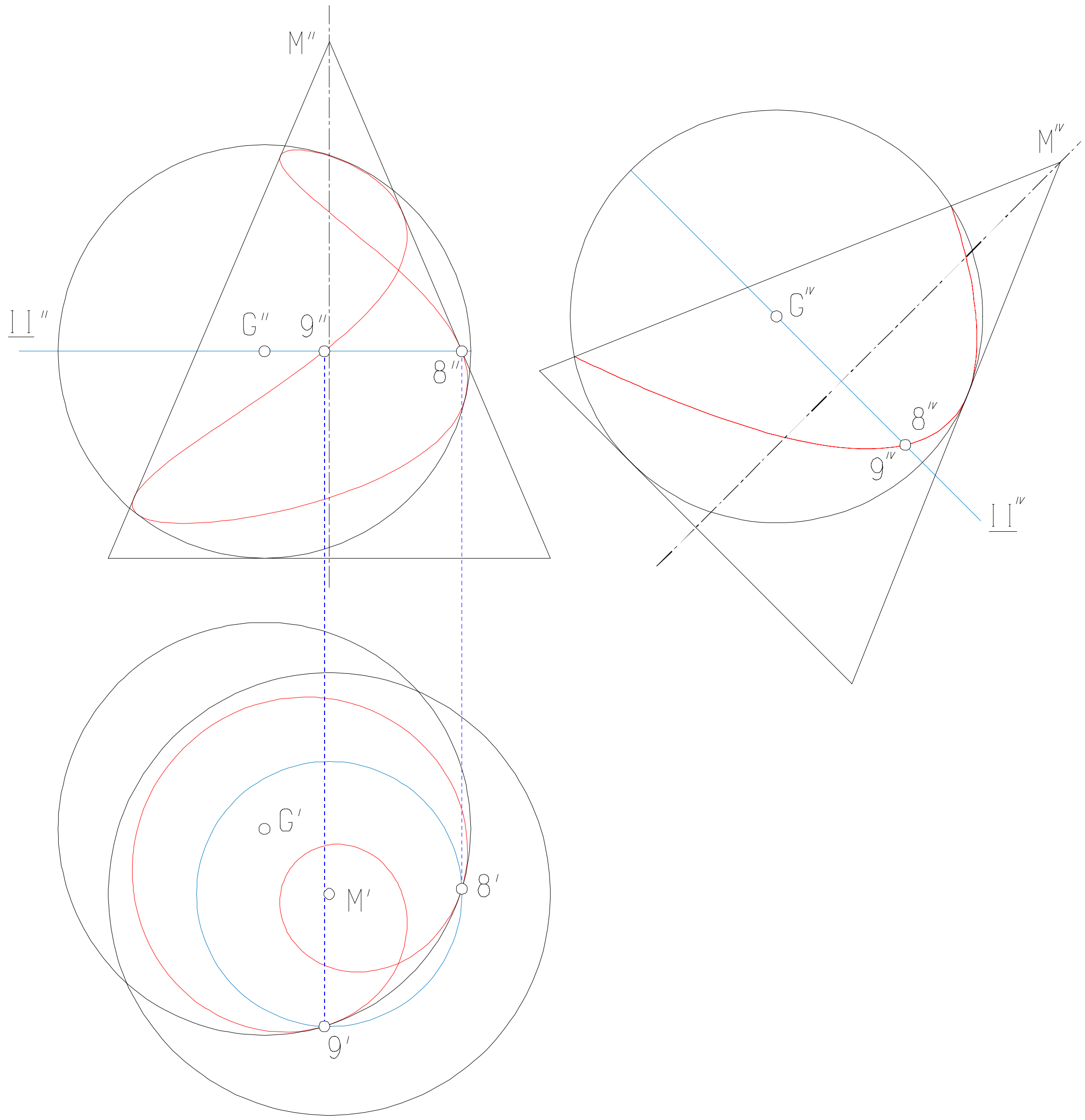
5.44. ábra. Szerkesztés a közös szimmetriasíkkal

– szeleteljünk a közös szimmetriasíkkal: **1**-ben önmetszéspont van, **2** és **3** a legfelső és legalsó áthatási pontok, ahol a kúp parallelköreinek és az áthatási görbének az érintője egybeesik (5.44. ábra.);



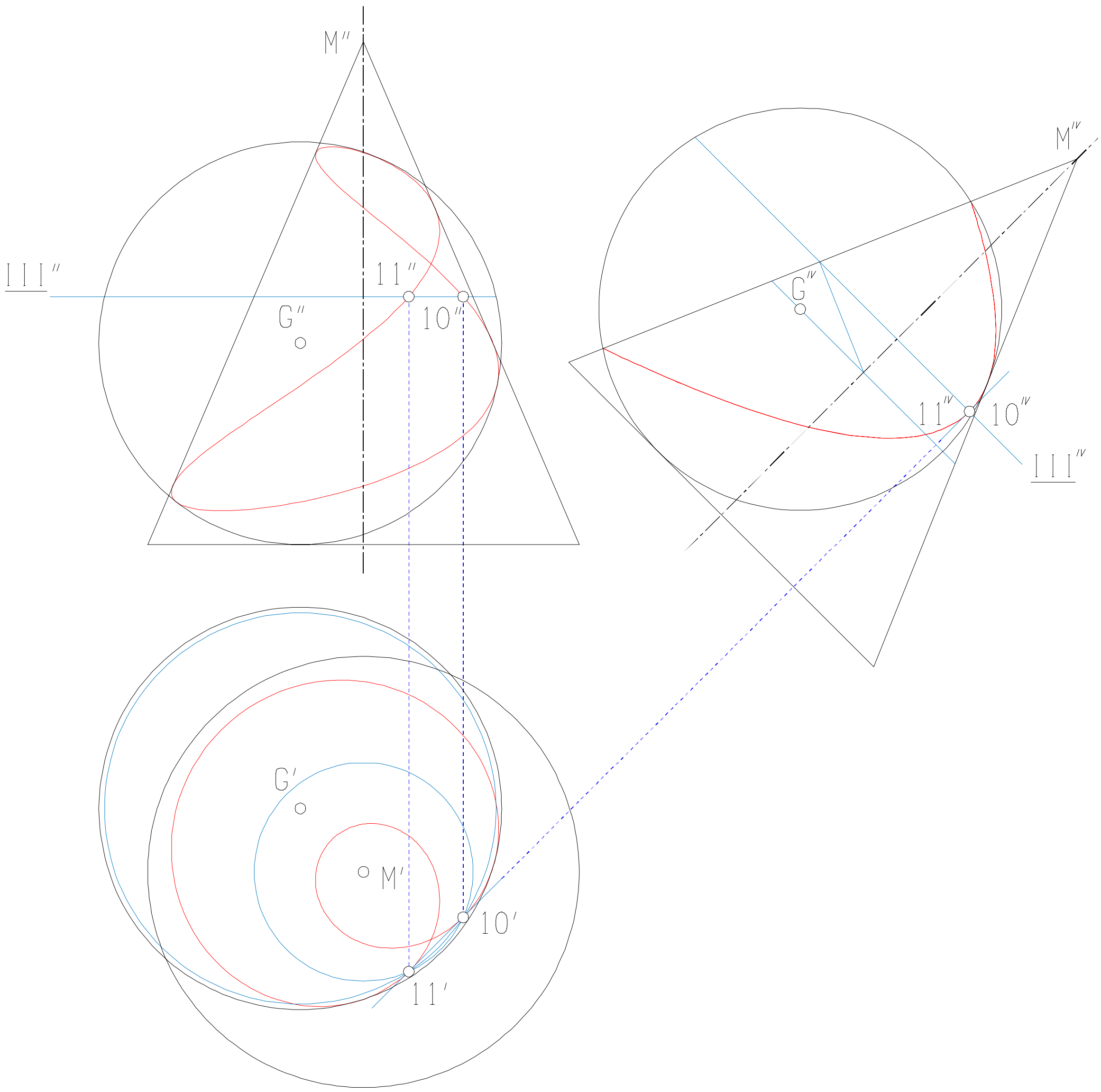
5.45. ábra. A kúp kontúrpontjainak szerkesztése gömbi parallelkörrel

- a kúp **4** – **7** második kontúrpontjait a kontúralkotókra illeszkedő, a gömböt második parallelkörben metsző **I** síkkal szerkesztettük (5.45. ábra.);



5.46. ábra. A gömb első kontúrpontjainak a szerkesztése a kúp parallelkörével

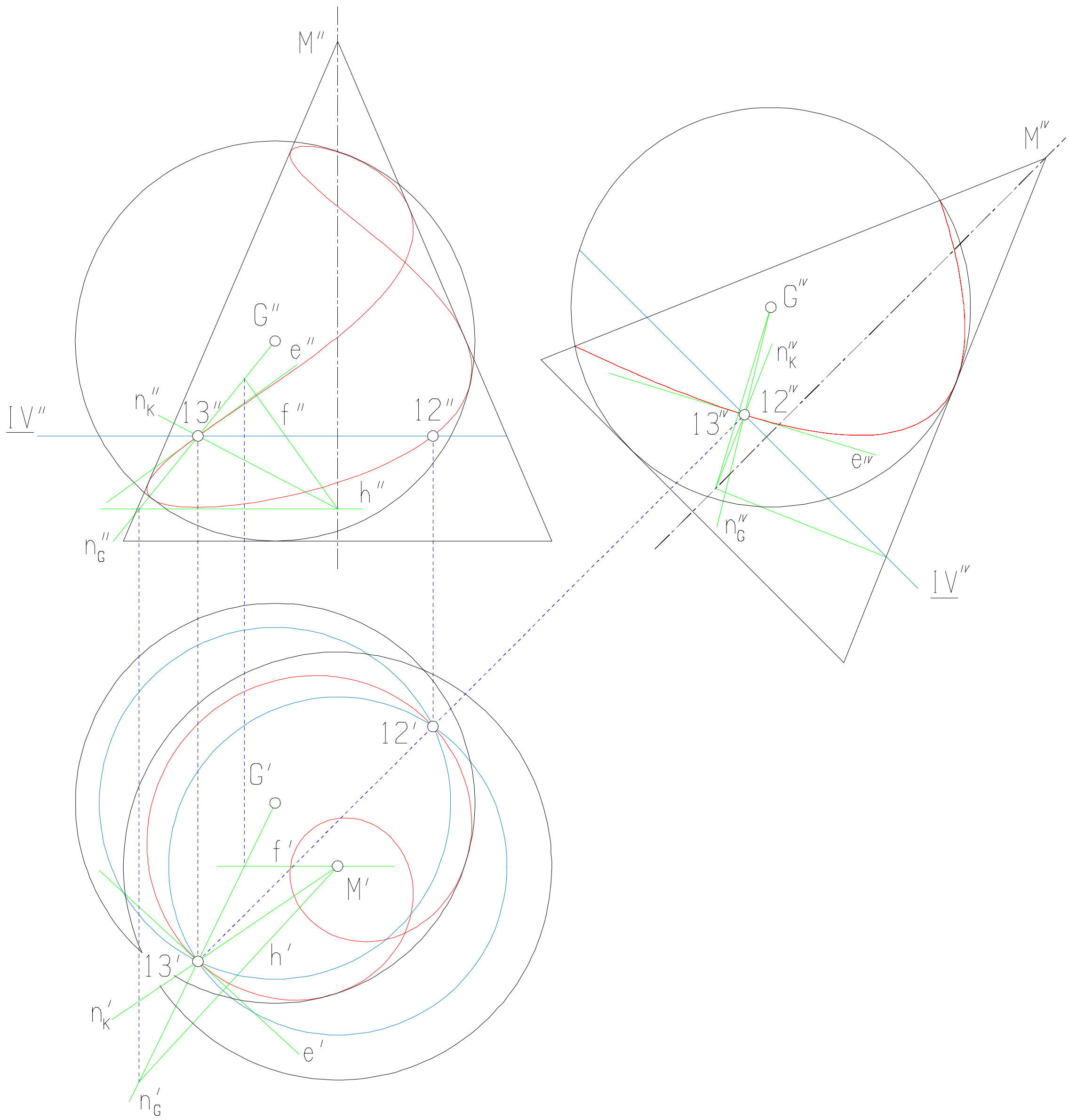
– a gömb **8**, **9** első kontúrpontjait a parallelkörökben metsző <u>**II**</u> síkkal szerkesztettük (5.46. ábra.);



5.47. ábra. A parabola kettős vetület tengelypontjának a szerkesztése

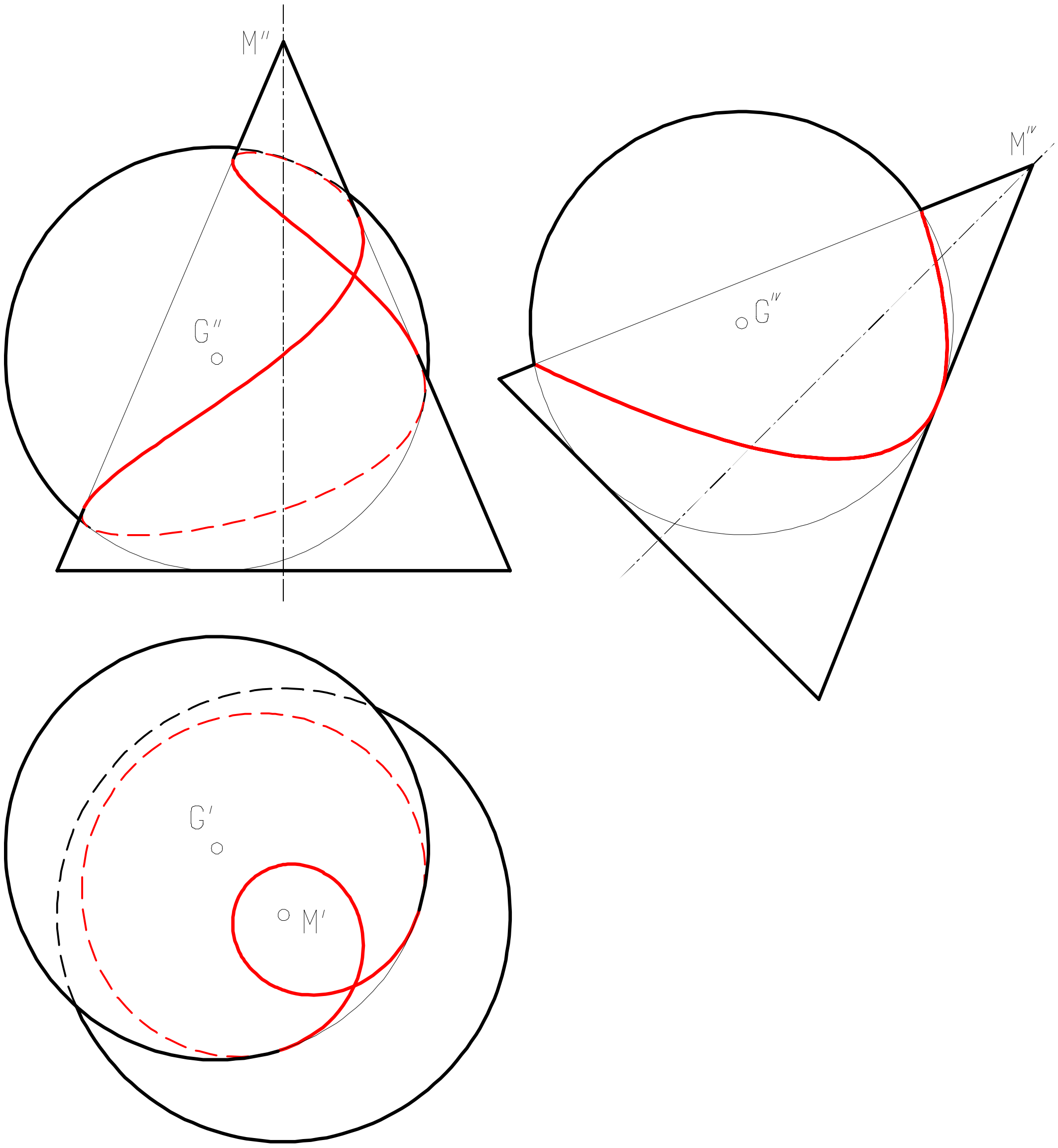
– negyedik képen, az áthatási görbe kettős vetületének, a parabolának a tengelypontja ott van, ahol az érintő merőleges az $\mathbf{x}_{1,4}$ tengelyre. Az érintőt a felületi normálisokkal szerkesztjük, tehát ha a normálkúp csúcspontja a gömb középpontjával egy magasságban van, a negyedik fővonal az $\mathbf{x}_{1,4}$ tengellyel párhuzamos, az érintő pedig arra merőleges lesz (5.47. ábra).

- szerkesszünk az áthatási görbén általános helyzetű pontot érintővel:

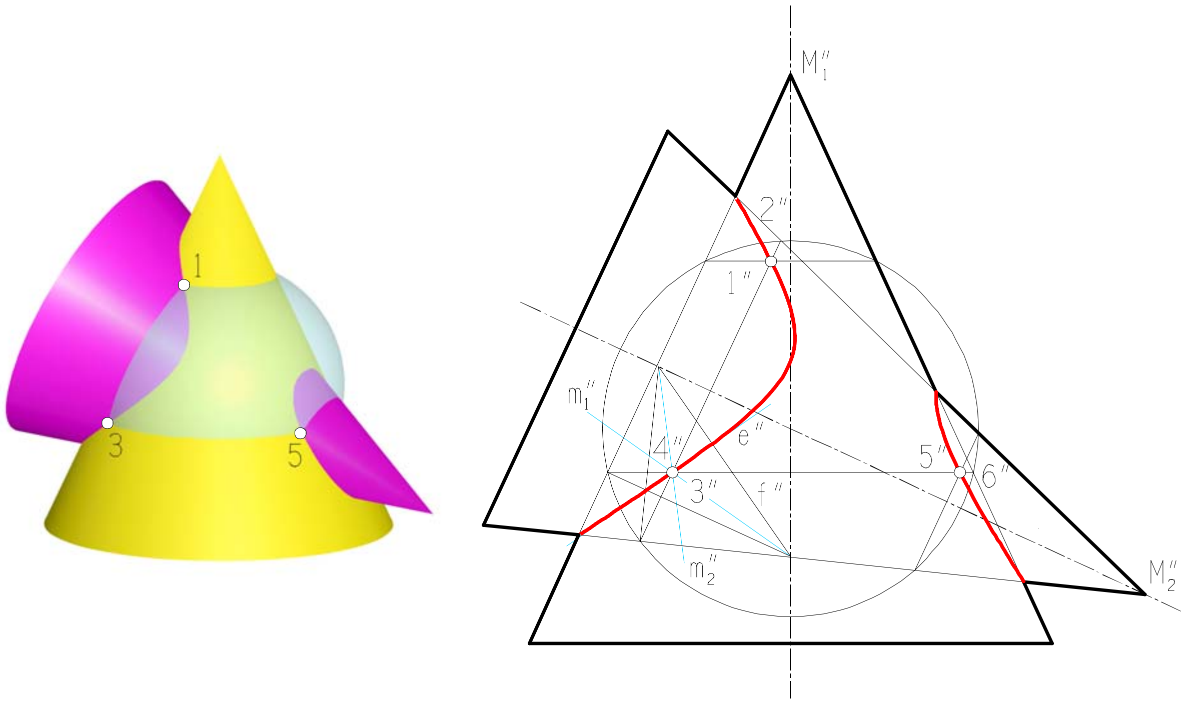


5.48. ábra. Általános helyzetű pont és a pontbeli érintő szerkesztése

- a **12** – **13** pontokat a <u>**IV**</u> síkkal szerkesztettük (5.48. ábra.);
- a **13** pontban az érintőt a felületi normálisok síkjára állított merőlegesként szerkesztettük.



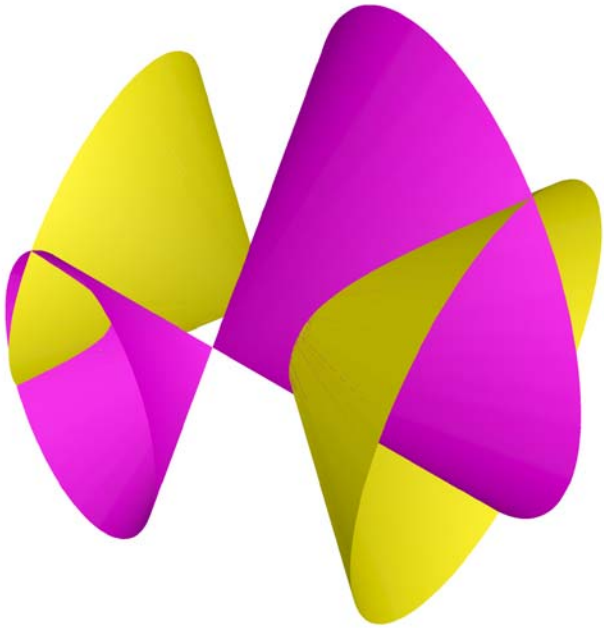
5.49. ábra. A kúp és a gömb uniója láthatóság szerinti kihúzva



5.50. ábra. Metsző tengelyű kúpokat szeletelő gömb (bal oldali ábra); Áthatási pontok szerkesztése szeletelő gömbbel (jobb oldali ábra)

5.5.5. Metsző tengelyű forgásfelületek áthatása

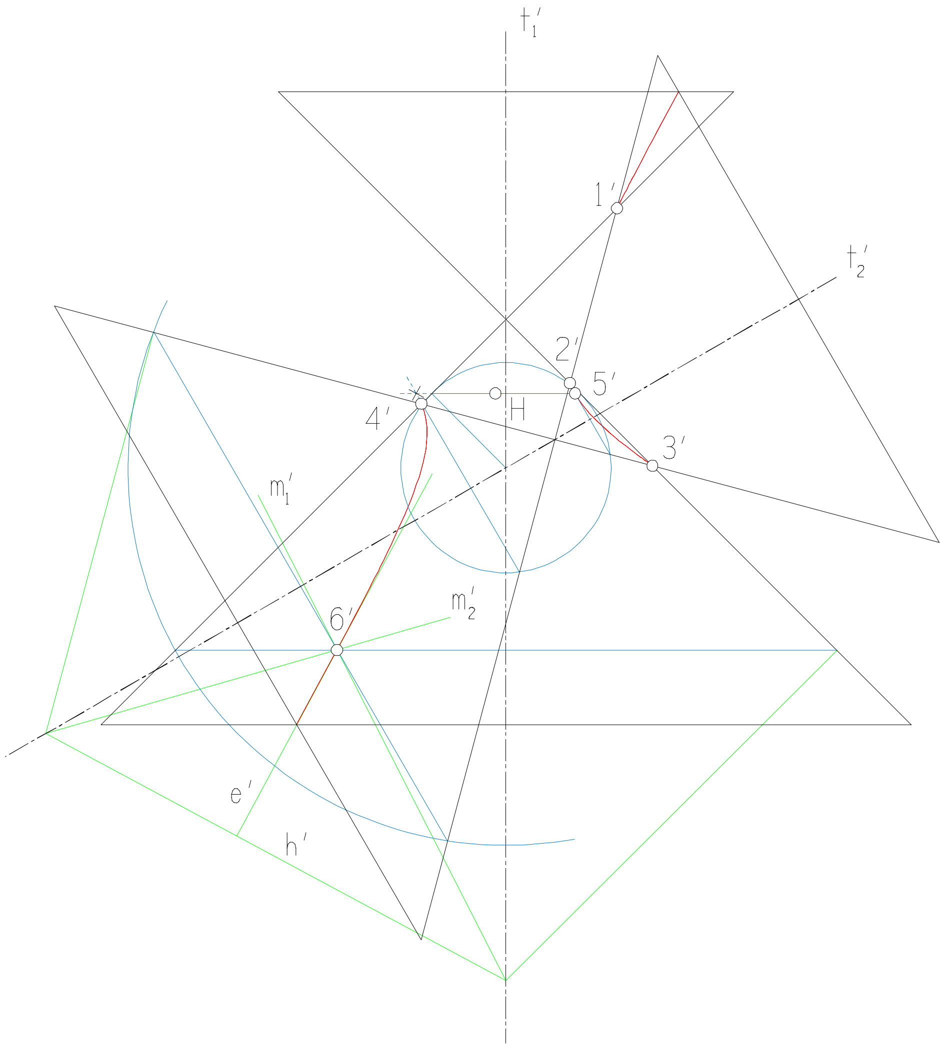
Metsző tengelyű forgásfelületek áthatását a tengelyek metszéspontja köré írt, a forgásfelületeket parallelkörökben metsző szeletelő gömbökkel szerkeszthetjük (5.50. ábra). Transzformációval mindig elérhető, hogy a tengelyek síkja a képsíkkal párhuzamos legyen. Ezen a képen a kimetszett parallelkörök élben látszanak és a negyedrendű áthatási görbe kettős vetülete kúpszelet.



5.51. ábra. Metsző tengelyű kúppalástok

5.3. Feladat. *Adottak az* $\mathbf{M}_1$ *és az* $\mathbf{M}_2$ *csúcspontú metsző tengelyű kúppalástok (5.51. ábra). Szerkessze meg az áthatási görbét!*

Megoldás. A szerkesztést csak a tengelyek síkjával párhuzamos képsíkon végezzük el, ha a felvétel nem ilyen lenne, ebbe a helyzetbe transzformálnánk. Az áthatás pontjait a tengelyek **C** metszéspontja köré írt szeletelő gömbökkel szerkesztjük. Az áthatás ezen a képen kettős vetületben, egy hiperbola íveit adja:

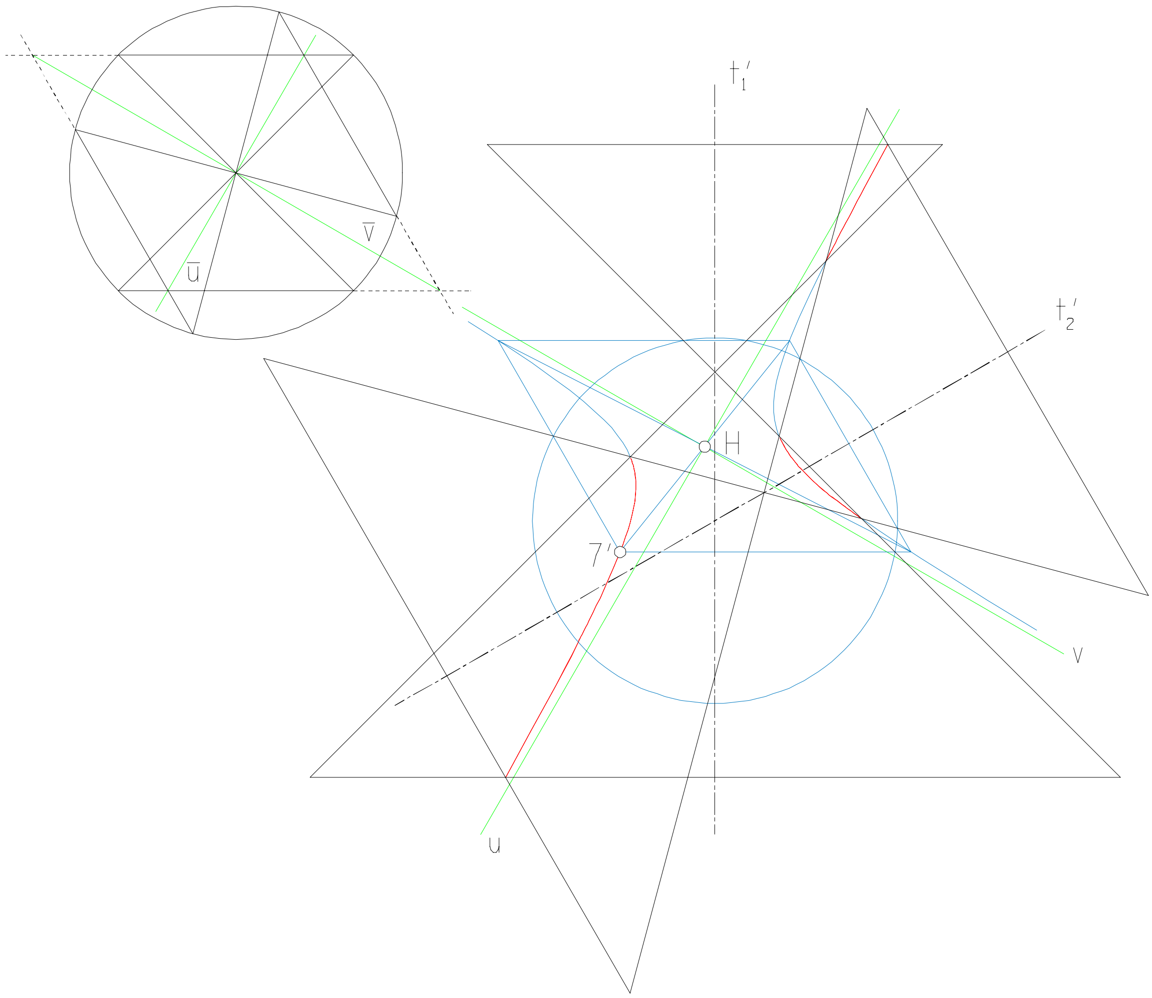


5.52. ábra. Áthatási pontok szerkesztése szeletelő gömbökkel

- a kontúrok a tengelyek síkjában vannak, metszéspontjaik a **1** − **4** pontok (5.52. ábra);

- vegyük fel azt a legszűkebb gömböt, amelyik még ad áthatási pontot. Ez a gömb a $\mathbf{t}_1$ tengelyű (első) kúpot érinti, az ezzel szerkesztett pontpárok egyike valós, ennek kettős vetülete az **5** pont, a másik pontpár képzetes. Ezekben a pontokban a másik kúpból kimetszett, ezen a képen párhuzamos szakasznak látszó parallelkörök érintenek, tehát a kapott pontok a hiperbola-vetület egy átmérőjének a végpontjai, **H** felező pontjuk így a hiperbola középpontja (5.52. ábra);

- az általános helyzetű **6** pontot koncentrikus szeletelő gömbbel, a **6** pontbeli **e** érintőt a felületi normálisok módszerével szerkesztettük(5.52. ábra);

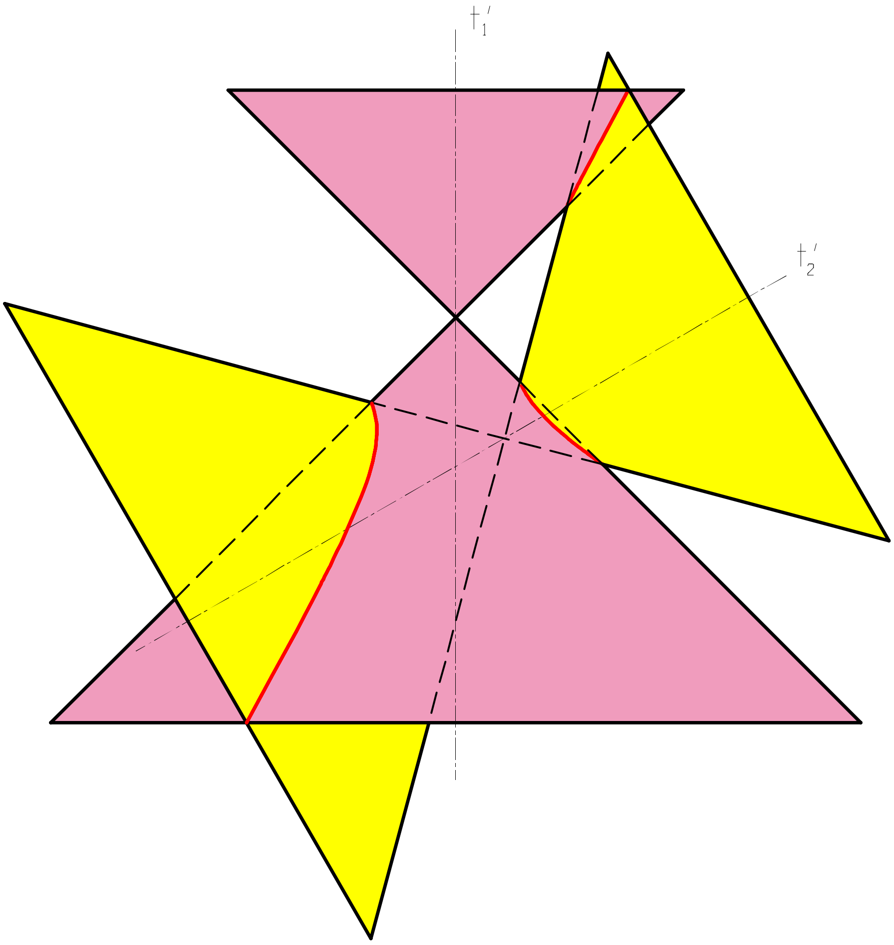


5.53. ábra. A kettős vetületként kapott hiperbola aszimptotáinak szerkesztése

- a hiperbolavetület középpontját úgy is megszerkeszthetjük, hogy egy tetszőleges szeletelő gömbbel mind a négy fedőpontpárt, tehát esetenként nemcsak a valós pontpárokat, hanem a konjugált komplex koordinátájú képzetes áthatási pontok valós kettős vetületét (a „parazita” pontokat) is megszerkesztjük. (Az 5.53. ábrán a négy kettős vetületből csak egy adódott valós pontok kettős vetületeként, ezt **7** jelöli.) Az így kapott parallelogramma közepe a hiperbola **H** középpontja;

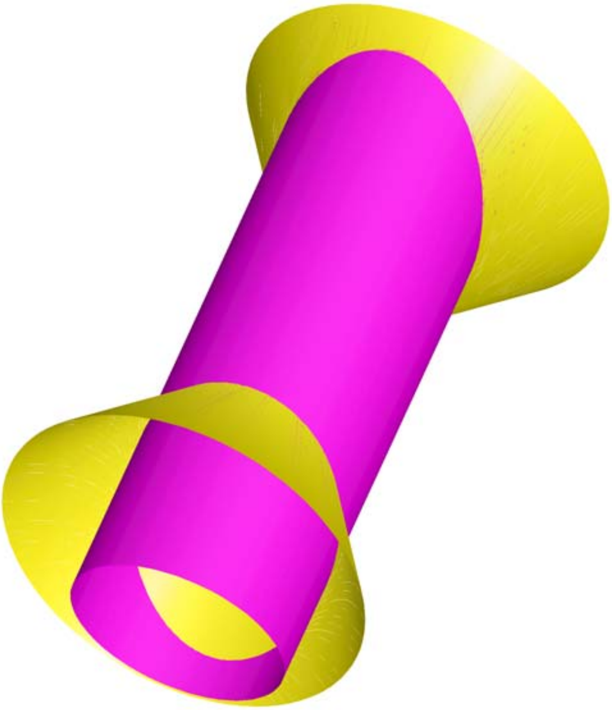
- a hiperbola asszimptotái illeszkednek az áthatás végtelen távoli pontjainak vetületére, ez pedig nem változik, ha a kúpokat önmagukkal párhuzamosan eltoljuk. Az 5.53. ábrán az aszimptotákat úgy szerkesztettük meg, hogy mindkét kúpot önmagával párhuzamosan eltoltuk egy közös pontba és az így kapott közös csúcspontú kúpok páronként fedésben lévő közös alkotóit a segédgömbös módszerrel megszerkesztettük, majd a kapott vetületekkel párhuzamosan **H**-n keresztül megrajzoltuk a hiperbola aszimptotáit. Figyeljük meg, hogy az **u** iránya valós (az áthatási görbének ebben az irányban valós végtelen távoli pontjai vannak) a **v** iránya pedig képzetes alkotók kettős vetülete (az áthatási görbének ebben az irányban konjugált komplex koordinátájú képzetes végtelen távoli pontjai vannak);

- (az aszimptoták irányát úgy is megszerkeszthetjük, hogy a kúpokat önmagukkal párhuzamosan egy közös gömböt érintő helyzetbe toljuk és az így kapott széteső áthatás két élben látszó vetülete adja az aszimptoták irányát).



5.54. ábra. A metsző tengelyű kúppalástok ábrázolása láthatóság szerint

- Az 5.54. ábrán láthatóság szerint ábrázoltuk a metsző tengelyű kúppalástokat.



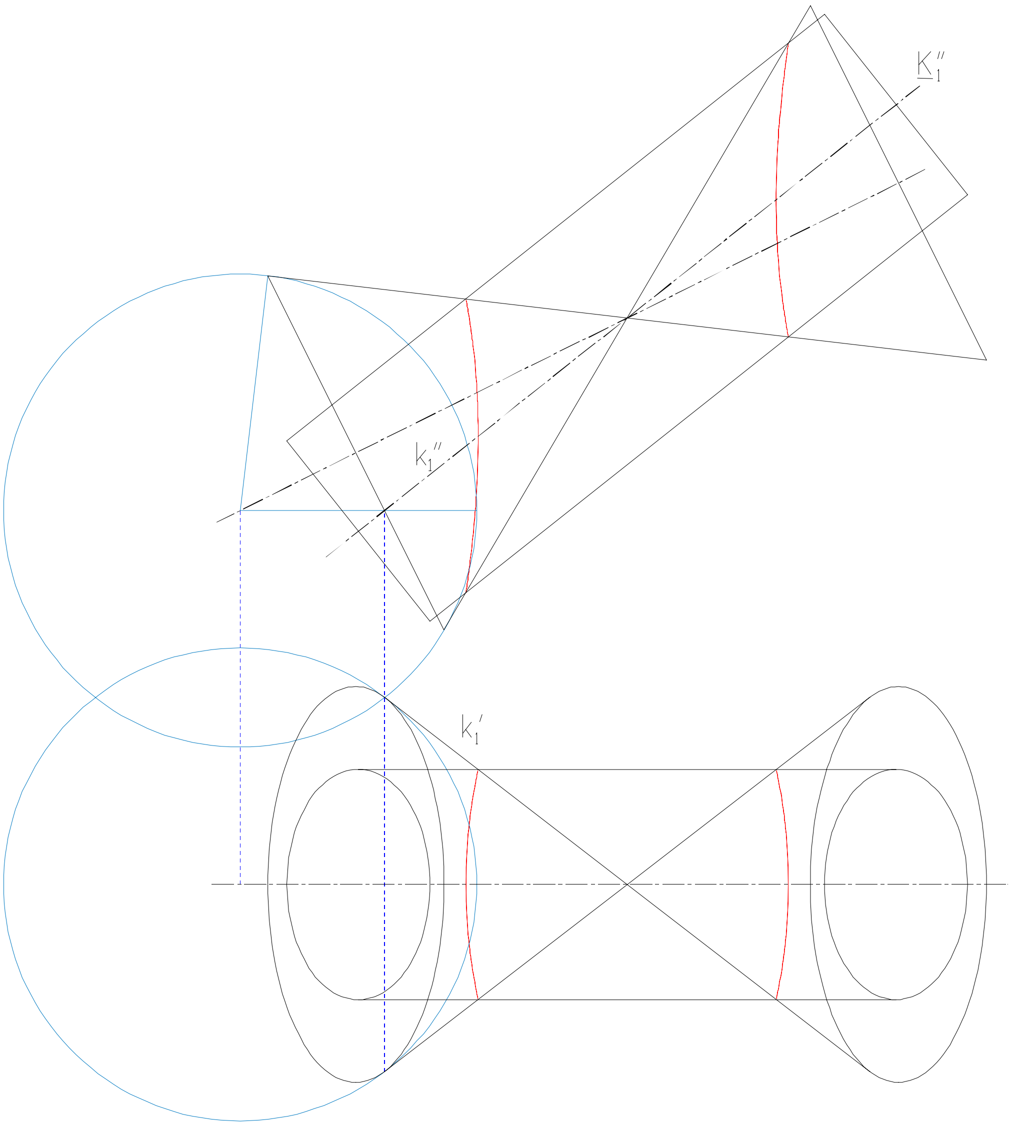
5.55. ábra. Közös polársíkú kúp- és hengerpalást

Az 5.55. ábrán arra mutatunk példát, hogy nemcsak főállású közös szimmetriasík okozhat kettős vetületet.

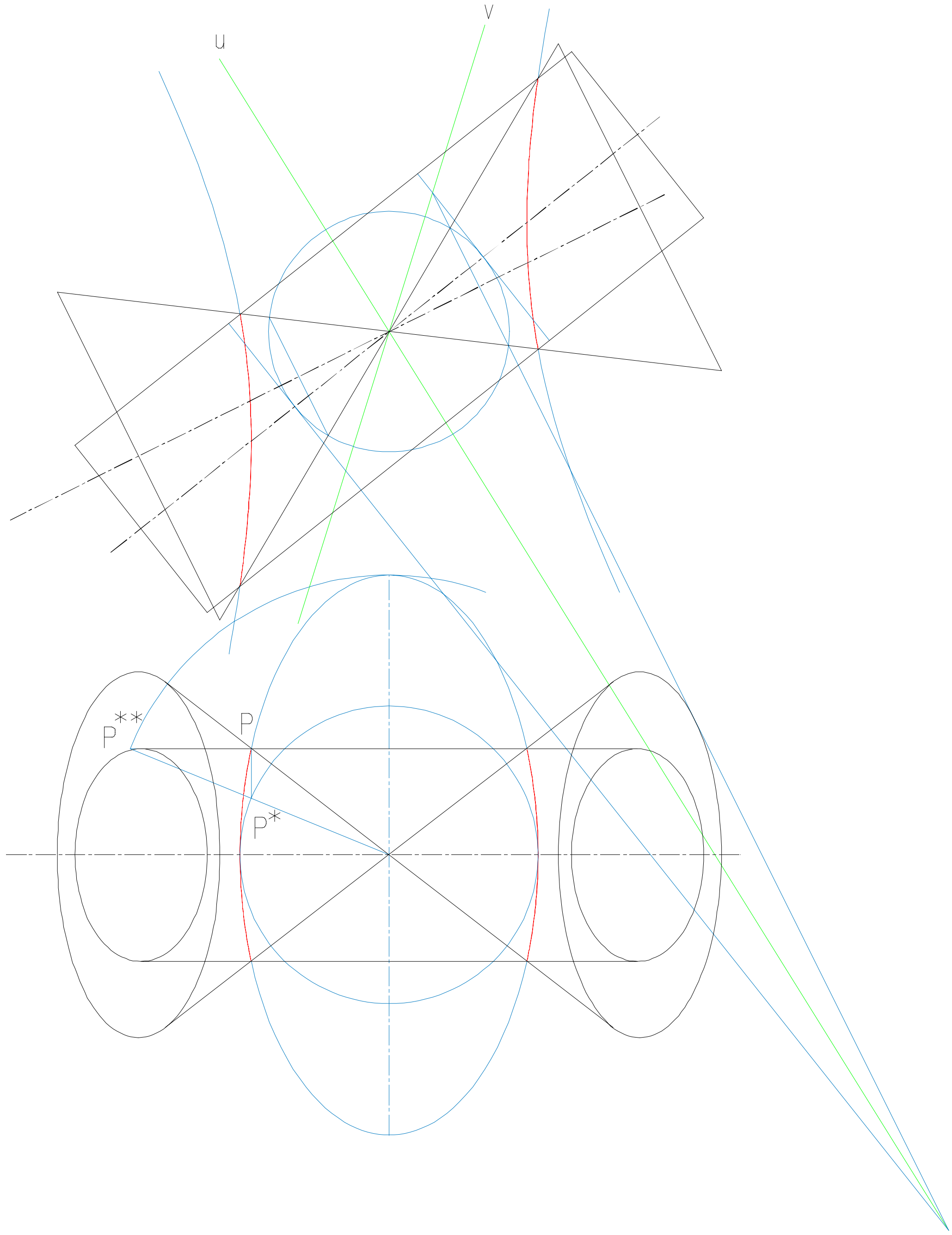
- Előbb felvettünk egy frontális tengelyű forgáskúpot és egy érintőgömbbel megszerkesztettük a kúp $\mathbf{k}_1$ első kontúralkotóit. A henger frontális tengelyét ezután a kontúralkotók $\underline{\mathbf{K}}_1$ síkjában vettük fel. A $\underline{\mathbf{K}}_1$ sík a végtelen távoli vetítési centrumnak a kúpra és a hengerre vonatkoztatott közös polársíkja, ezért a $\underline{\mathbf{K}}_1$ síkra a kúp és a henger pontjai és így az áthatás pontjai is *ferdén szimmetrikusak.* Az áthatási görbe *ferdén szimmetrikus* pontpárjai első képen is kettős vetületet adnak (5.56. ábra). Tehát elértük, hogy az áthatási görbének mindkét képen kettős vetülete van

A síkban egy külső pontból a másodrendű görbéhez húzott érintők érintési pontjai egy egyenesre, a külső pontnak, mint pólusnak a másodrendű görbére vonatkoztatott polárisára illeszkednek. A pólusra illeszkedő szelők metszéspontjait a pólus és polárisa harmonikusan választja el (a négy pont kettősviszonya -1), ez végtelen távoli pólus esetében azt jelenti, hogy a poláris felezi a metszéspontok távolságát.

Hasonlóképpen a térben egy külső pontból a másodrendű felülethez húzott érintők érintési pontjai egy síkra, a külső pontnak, mint pólusnak a másodrendű felületre vonatkoztatott polársíkjára illeszkednek. A pólusra illeszkedő szelők metszéspontjait a pólus és polársíkja harmonikusan választja el, ez végtelen távoli pólus esetében azt jelenti, hogy a polársík felezi a metszéspontok távolságát.



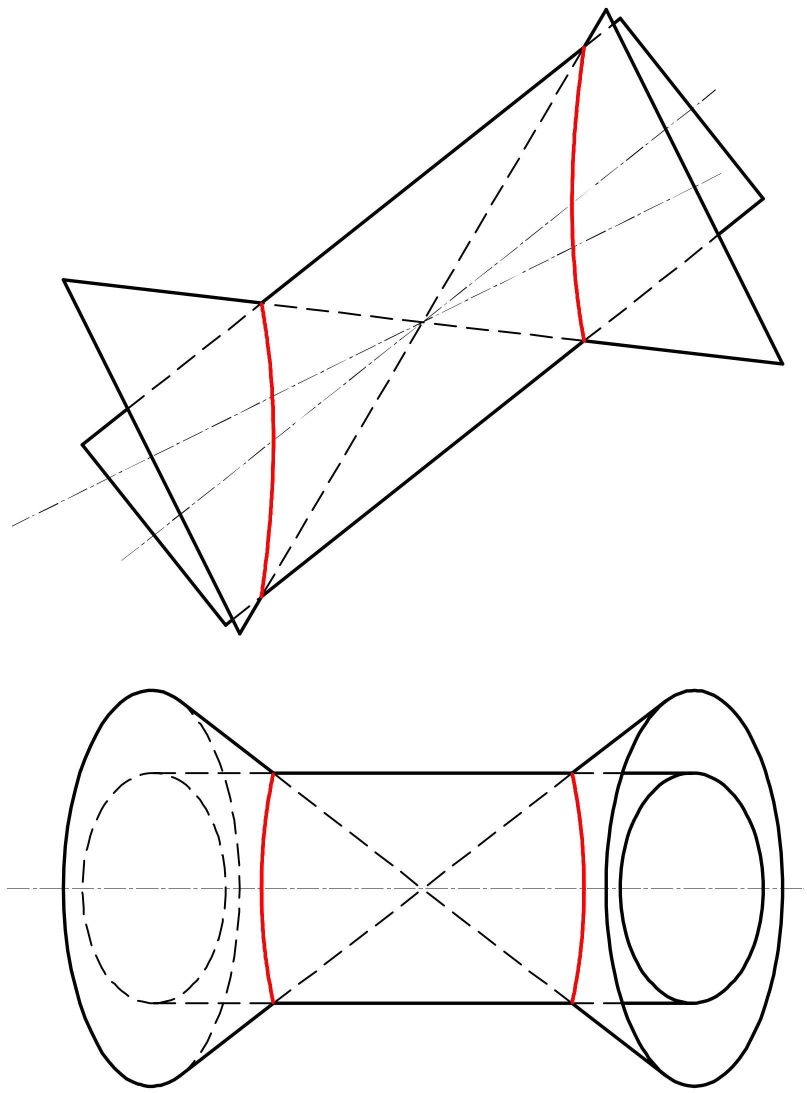
5.56. ábra. A henger és a kúp kontúralkotói közös síkra illeszkednek



5.57. ábra. Az áthatás kettős vetületei ellipszis és hiperbola

- A második kép hiperbola kettős vetületének az aszimptotáit a közös pontba tolt alkotók segítségével szerkesztettük. Az összetolt hengeralkotók egybeesnek, a szeletelő gömb egy 0 sugarú kört metsz ki, amely a kúpból kimetszett parallelköröket képzetes pontokban metszi (5.57. ábra).

- Az első kép ellipszis kettős vetületének a nagytengelyét a két-kör módszer segítségével szerkesztettük(5.57. ábra).



5.58. ábra. Közös polársíkú kúp- és hengerpalást ábrázolása láthatóság szerint

- Az 5.58. ábrán láthatóság szerint ábrázoltuk a metsző tengelyű kúp és henger palástjait.

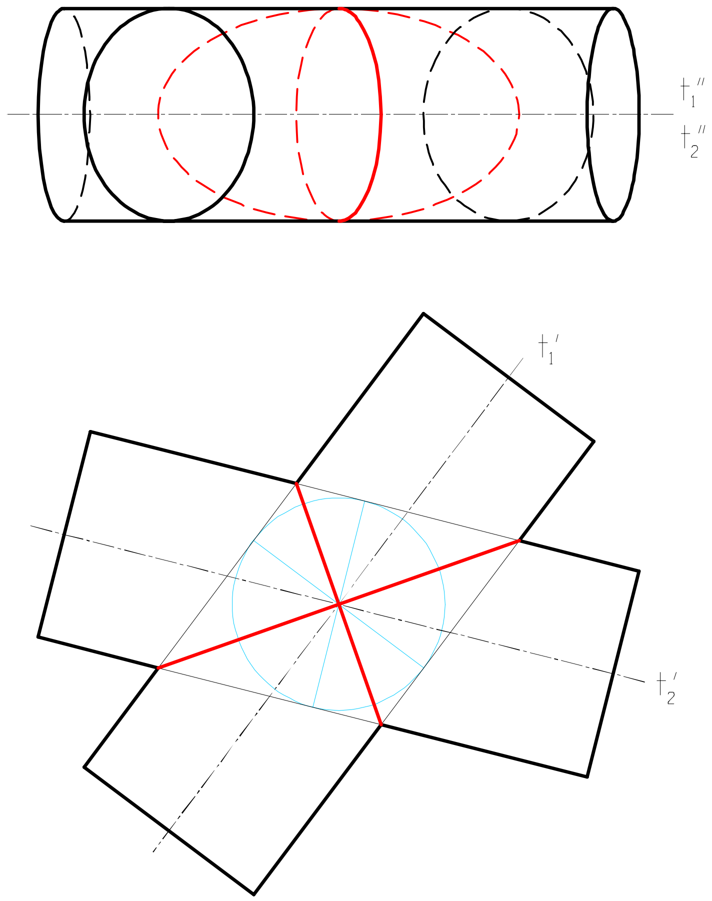
Két másodrendű felület egyenleteinek lineáris kombinációjával felírt másodrendű felületek szintén illeszkednek a kiindulásul vett két másodrendű felület áthatási görbéjére. Ezek közül (egy negyedfokú egyenlet megoldásával) kiválasztható legfeljebb négy elfajuló másodrendű felület. Az 5.55 - 5.58. ábrákon láthatjuk is a negyedrendű áthatási görbére illeszkedő négy elfajuló másodrendű felületet: a kiindulásul megadott kúp és henger mellett illeszkedik még az áthatási görbére a két másodrendű vetítőhenger is. Az első vetítőhenger ellipszis, a második pedig hiperbola vezérgörbéjű.

5.6. Széteső áthatások

A szétesés fogalmát egy síkbeli példával szemléltetjük: tekintsük először az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbolát, ez nem széteső. Euklideszi szemlélettel ugyan két ága van, de projektív szemlélettel nézve egy zárt görbe, amely kétszer metszi a végtelen távoli egyenest. Nézzük ezután az $x^2 - y^2 = 0$ egyenletet, ami $(x - y)(x + y) = 0$ alakban szorzattá alakítható. A szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát ez az egyenlet szétválasztható két egyenes egyenletére. (Ezek az egyenesek éppen a hiperbola aszimptotái.) Példánkban a másodfokú egyenlettel leírt (elfajuló) másodrendű görbe „szétesett” két elsőfokúra: $2 = 1 + 1$.

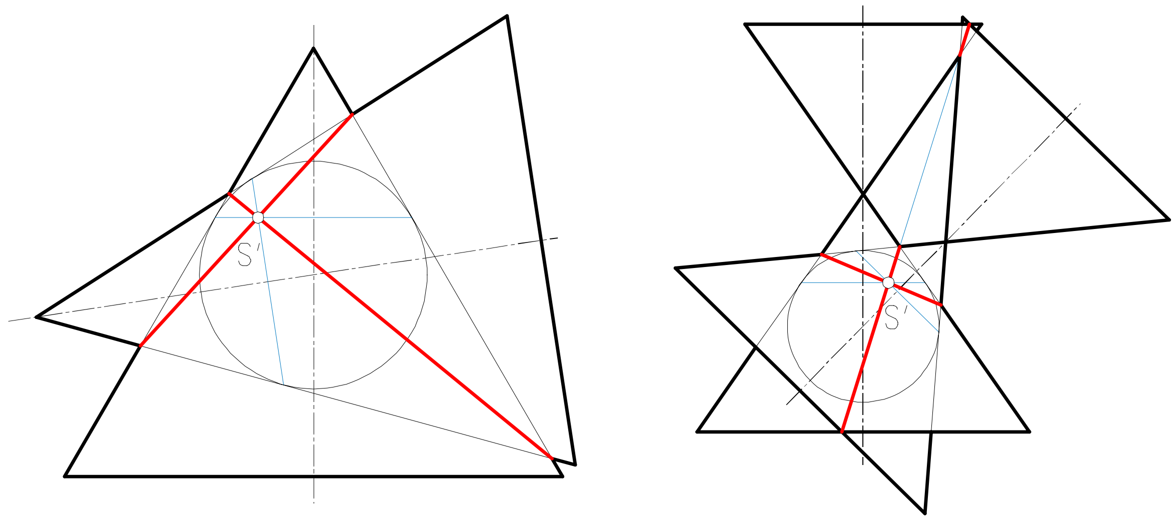
A fenti értelemben beszélhetünk széteső (reducibilis) áthatási görbékről is. Az általunk tárgyalt másodrendű felületek negyedrendű áthatási görbéje széteshet alacsonyabb rendűekre, amelyek rendjének az összege 4. Ha az áthatás egy komponensében a felületek érintkeznek, az duplán számítandó. Minden lehetséges esetre lehet példát találni: kezdve onnan, hogy két közös csúcspontú kúp áthatása széteshet négy egyenesre $(4 = 1{+}1{+}1{+}1)$, addig, hogy egy gömb és érintő kúpjának az „áthatása” az érintett parallelkör, ami azonban kétszer számítandó $(4 = 2 \cdot 2)$.

Ha a másodrendű felületek negyedrendű áthatási görbéjének két önmetszéspontja és ezeken kívül még két olyan pontja van, hogy a négy pont nem komplanáris, akkor az áthatás szétesik két másodrendű görbére (5.59., 5.14.a) ábra.). A másodrendű görbék kettős vetülete pedig már egyenes. Már csak ez a rendkívül könnyű szerkeszthetőség is indokolja a széteső áthatások kiterjedt alkalmazását, fontosságát.



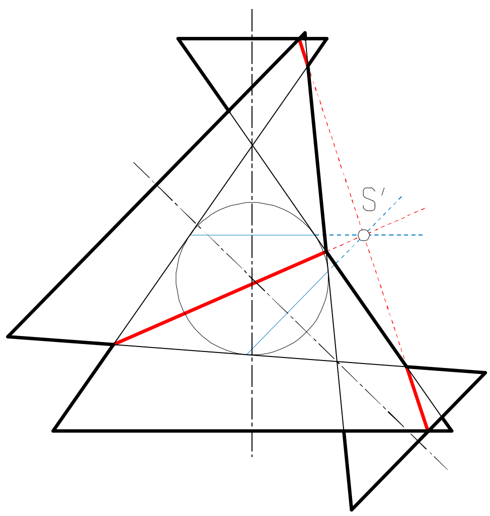
5.59. ábra. Közös gömböt érintő hengerek ellipszisekre széteső áthatása

Közös gömböt érintő kúp és henger áthatásának az érintési parallelkörök két metszéspontjában önmetszéspontja van, ezért az áthatás szétesik két kúpszeletre (két ellipszisre), amelyek a tengelyekkel párhuzamos képsíkon élben látszanak (5.14. a) ábra).



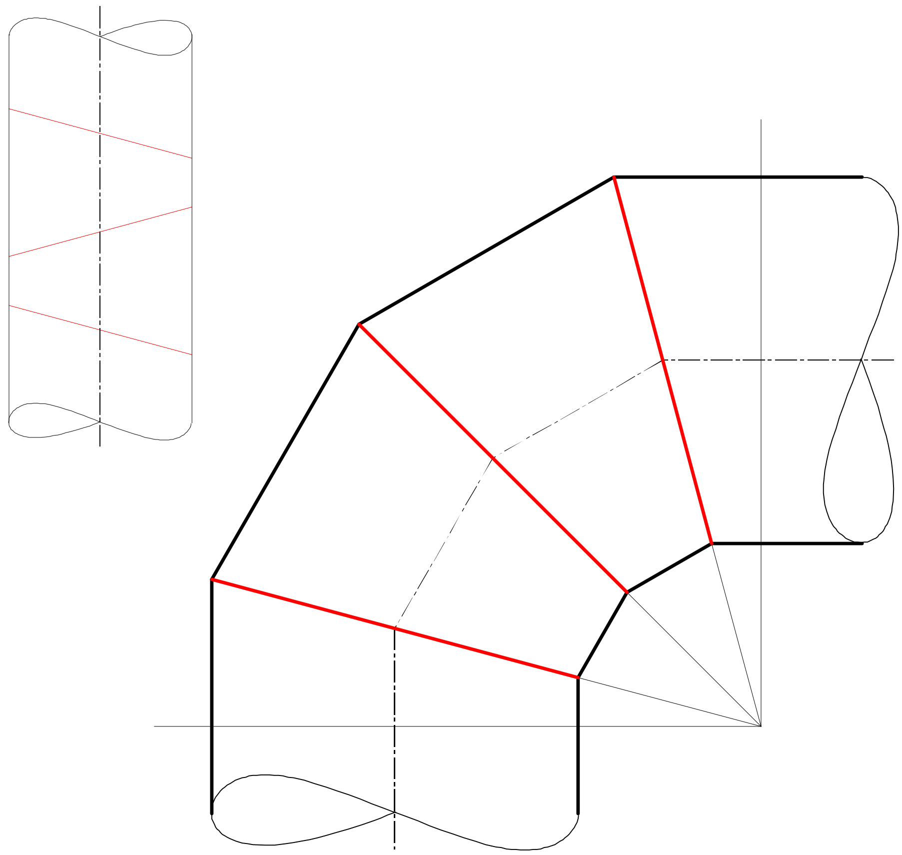
5.60. ábra. Közös gömböt érintő kúpok ellipszisekre széteső áthatása (bal oldali ábra); Közös gömböt érintő kúpok ellipszisre és hiperbolára széteső áthatása (jobb oldali ábra)

Közös gömböt érintő kúpok áthatásának az érintési parallelkörök metszéspontjában önmetszéspontja van, ezért az áthatás szétesik két kúpszeletre (5.60. ábra).



5.61. ábra. Közös gömböt érintő kúpok érintési parallelkörei képzetes pontokban metsződnek

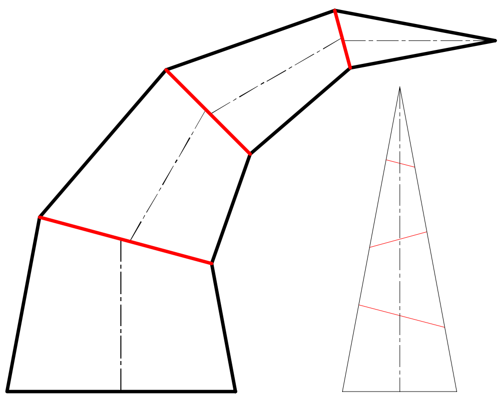
Az 5.61. ábrán az érintési parallelkörök metszéspontjai és így az önmetszéspontok is képzetesek, az áthatás így is szétesik két kúpszeletre (egy ellipszisre és egy hiperbolára), amelyek a tengelyekkel párhuzamos képsíkon élben látszanak.



5.62. ábra. Széteső áthatásokból kialakított könyökcső

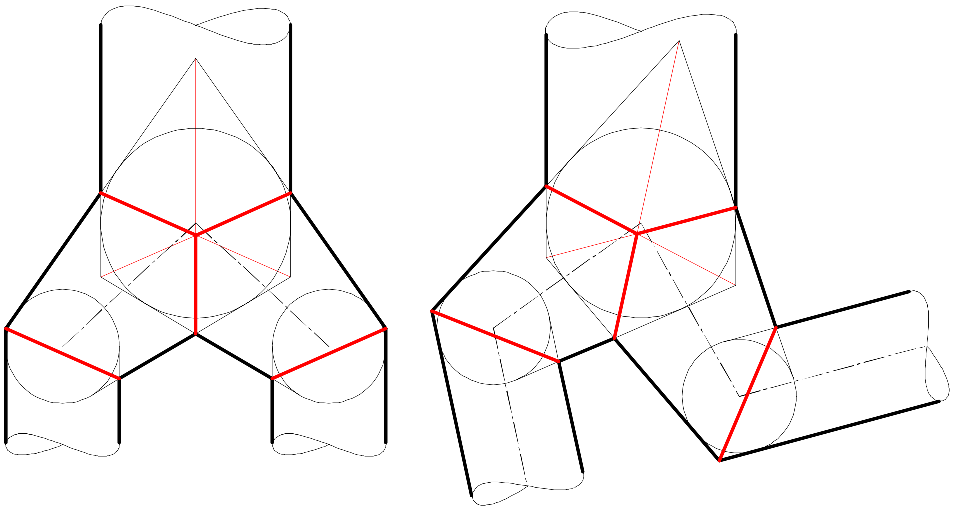
Alkalmazások:

- nagy átmérőjű csövön kialakított könyökcső (5.62. ábra.), vagy a hőtágulást kiegyenlítő „líra”;



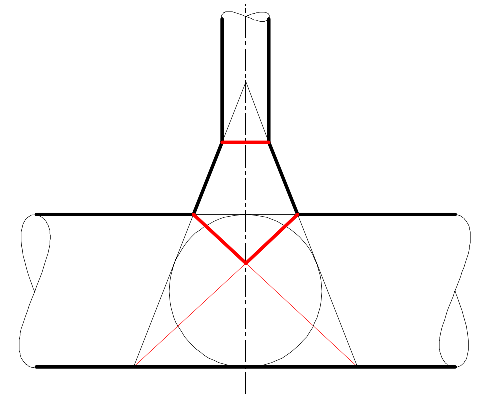
5.63. ábra. Szűkülő görbület kialakítása kúppalástból

- szűkülő görbület kialakítása kúppalástból (5.63. ábra);



5.64. ábra. Forgáskúpból és hengerből kialakított szimmetrikus és aszimmetrikus "nadrág-cső"

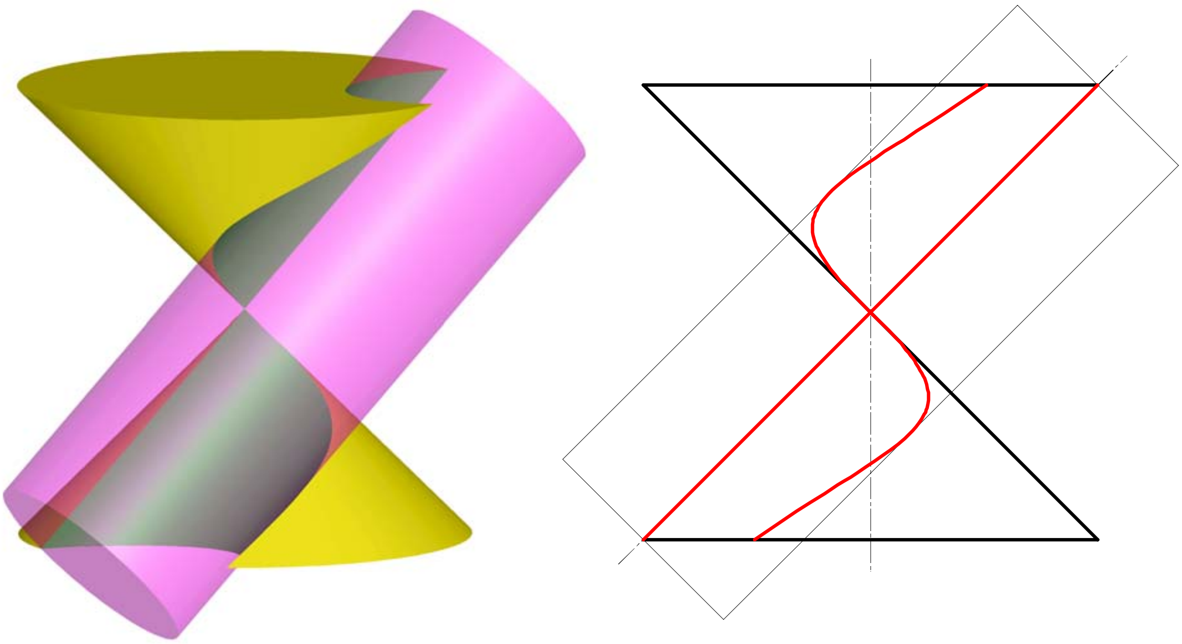
- "nadrág-cső" (a közös érintőgömbök középpontjai és a hengerek iránya tetszőlegesen, akár a képsíkból kilépve is elhelyezhetők) (5.64. ábra);



5.65. ábra. Merevített csőleágazás

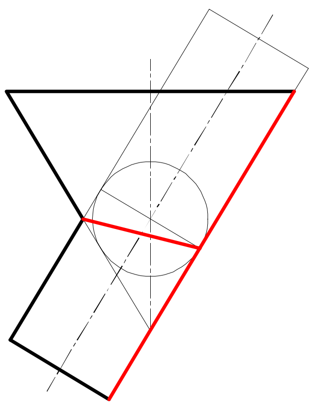
- merevített csőleágazás (5.65. ábra).

Széteső áthatást kapunk úgy is, ha a két felületet egy előre megadott *közös alkotóra*, vagy *kúpszeletre* (pl. körre) illesztjük.



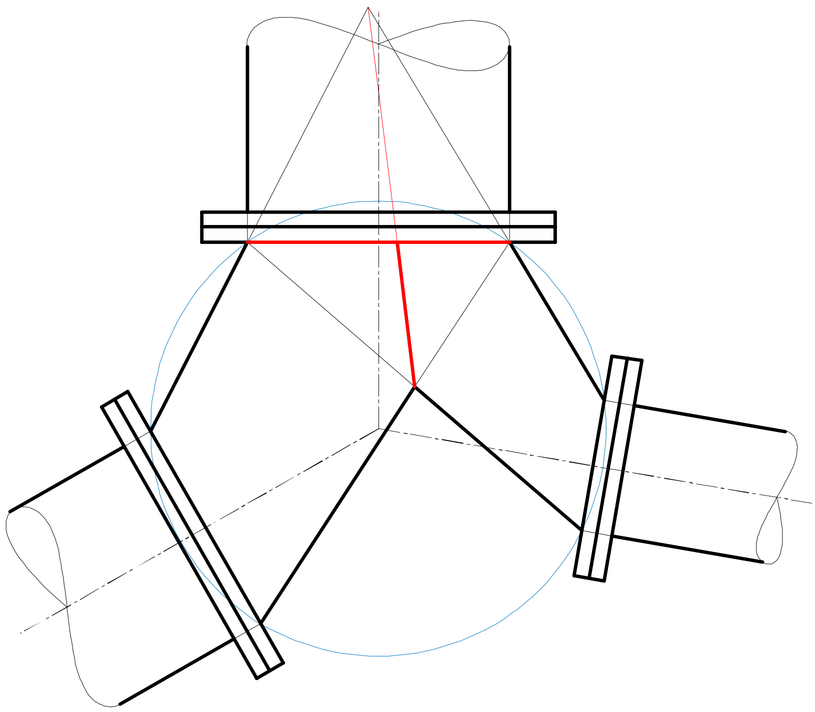
5.66. ábra. Közös alkotójú kúp és henger

- közös alkotóban metsződő két kúp, vagy kúp és henger egymást az alkotón kívül még egy *harmadrendű* görbében metszi $(1 + 3 = 4)$ (5.66. ábra);



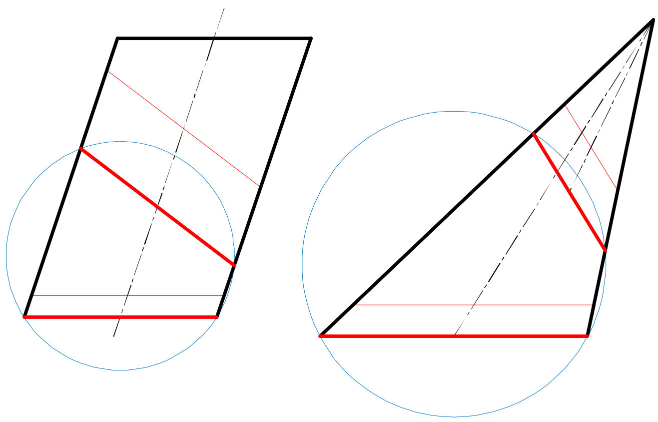
5.67. ábra. Közös alkotóban érintkező kúp és henger

- közös alkotóban érintkező két kúp, vagy kúp és henger egymást a kétszeresen számítandó alkotón kívül még egy *másodrendű* görbében metszi $(2 \cdot 1 + 2 = 4)$ (5.67. ábra);



5.68. ábra. Karimákkal szerelhető csőelágazás

- közös parallelkörre illeszkedő két (ferde) kúp, vagy kúp és henger negyedrendű áthatásából még egy kúpszeletre „telik” $(2 + 2 = 4)$ (5.68. ábra).



5.69. ábra. Ferde körhenger és körkúp körmetszetei

Az 5.64. ábrán látható csőelágazáson a kúp-henger csatlakozások nem szerelhetők. Ha karimákkal szerelhető csatlakozásokat kell alkalmaznunk, vegyük fel a karimák belső körét egy gömbön, a hengerek tengelyeit pedig illesszük a gömb középpontjára (5.69., 5.68 ábra). A közös gömbön felvett köröket másodrendű kúpok kötik össze, ezek azonban általában nem forgáskúpok. Két közös körre illeszkedő másodrendű kúp negyedrendű áthatása szétesik a közös körre és még egy másodrendű görbére. Az ábrán ez egy élben látszó ellipszis. Ez a megoldás is igen sokoldalúan alkalmazható, tetszőleges átmérőjű és irányú, sőt háromnál több cső szerelhető csatlakozása is megoldható így. Mivel a kúpokon a gömbi körökkel párhuzamos minden metszet kör, ezért az sem fontos, hogy a csatlakozások a közös gömbön legyenek.

A kúpszeletek vetületénél tanulmányozott 4.39., 4.41. ábrán párhuzamos tengelyű, egyenlő nyílású kúpok egymást egy kúpszeletben metszik. Hol van az áthatás hiányzó másodrendű része? Ezek a kúpok közös végtelen távoli kúpszeletre illeszkednek.

5.7. Gyakorló feladatok az 5. témakörhöz

5.1. Szerkessze meg kitérő merőleges tengelyű forgáshengerek áthatási görbéjét, majd ábrázolja láthatóság szerint a két test közös részét! Ehhez szerkessze meg az áthatási görbe különleges pontjait és egy általános pontjában az érintőjét (lásd az 5.5. ábrát)!

5.2. Szerkessze meg kitérő tengelyű forgáshengerek áthatási görbéjét és ábrázolja láthatóság szerint a vastagabb hengernek a másikon kívüli részét! Ehhez szerkessze meg az áthatási görbe különleges pontjait (lásd az 5.6. és 5.7. ábrát)!

5.3. Szerkessze meg metsző tengelyű forgáshengerek áthatási görbéjét! Ehhez szerkessze meg a vetület egy általános és egy kontúrpontjában az érintőt, a vetület aszimptotáit és hiperoszkuláló köreit! A hengerek tengelyei illeszkednek az első képsíkra (lásd az 5.8. ábrát).

5.4. Ábrázolja gömb- és forgáshengertest unióját! Ehhez szerkessze meg az áthatási görbe különleges pontjait és egy általános pontjában az érintőjét (lásd az 5.32. - 5.35. ábrákat)!

5.5. Szerkessze meg kúp és gömb áthatási görbéjét és ábrázolja láthatóság szerint a kúpnak a gömbön kívüli részét! Ehhez szerkessze meg az áthatási görbe különleges pontjait és egy általános pontjában az érintőjét (lásd az 5.44. - 5.49. ábrákat)!

5.6. Szerkessze meg párhuzamos tengelyű forgáshenger és forgáskúp áthatási görbéjét, majd ábrázolja láthatóság szerint a két test közös részét! Ehhez szerkessze meg az áthatási görbe különleges pontjait és egy általános pontjában az érintőjét!

5.7. Szerkessze meg kitérő tengelyű henger és kúp áthatását és ábrázolja láthatóság szerint a kúptestnek a hengeren kívül maradó részét! Ehhez szerkessze meg az áthatási görbe különleges pontjait (lásd az 5.9., 5.10., 5.16. ábrákat)!

5.8. Szerkessze meg metsző tengelyű hengerek áthatását! A tengelyek illeszkednek a rajz síkjára. Ehhez szerkessze meg az áthatási görbe különleges pontjait és a vetület aszimptotáit (lásd az 5.8. ábrát)!

5.9. Szerkessze meg a metsző tengelyű henger és kúp áthatását. A tengelyek illeszkednek a rajz síkjára. Ehhez szerkessze meg az áthatási görbe különleges pontjait és a vetület aszimptotáit (lásd az 5.14.b, 5.14.c, 5.15. ábrákat)!

5.10. Szerkessze meg metsző tengelyű kúpok áthatását! A tengelyek illeszkednek a rajz síkjára. Ehhez szerkessze meg az áthatási görbe különleges pontjait és a vetület aszimptotáit (lásd az 5.50., 5.23. - 5.26. ábrákat)!

5.11. Szerkessze meg a közös gömböt érintő forgáskúpok áthatási görbéjét, majd ábrázolja láthatóság szerint a két test közös részét! A kúpok tengelyei illeszkednek a képsíkra (lásd az 5.60. ábra).

5.12. Szerkessze meg a közös gömböt érintő forgáskúpok áthatási görbéjét, majd ábrázolja láthatóság szerint a két test unióját! A kúpok tengelyei illeszkednek a képsíkra(lásd az 5.60. ábra jobb oldalát).

5.13. Szerkessze meg a közös gömböt érintő forgáshenger és forgáskúp áthatási görbéjét, majd ábrázolja láthatóság szerint a két test unióját! A henger és a kúp tengelyei illeszkednek a képsíkra.

5.14. Tervezzen széteső áthatások alkalmazásával két hengert összekötő kúpfelületet!

5.15. Tervezzen széteső áthatások alkalmazásával két kúpot összekötő adott átmérőjű hengerfelületet!

5.16. Tervezzen széteső áthatások alkalmazásával „nadrágcsövet” (lásd az 5.64. ábrát)!

5.17. Tervezzen széteső áthatások alkalmazásával hármas csőelágazást!

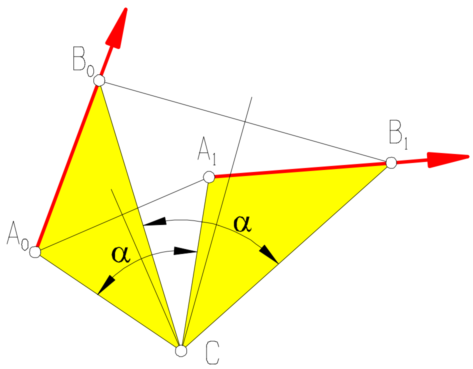
6. fejezet

Merev rendszerek mozgása, csavarvonal

Tananyag: *A merev síkbeli rendszer mozgása, ruletták. Csavarvonal.*

6.1. Merev síkbeli rendszerek mozgása

Tekintsük a rögzítettnek feltételezett rajz síkján egy másik sík (fólia) és az arra illeszkedő rendszer elmozdulását. Az elmozdított sík helyzetét egy félegyenese meghatározza. A síkbeli rendszer merevségén azt értjük, hogy a mozgás során a távolságok nem (és ezért a szögek sem) változnak. A félegyenes $\mathbf{A}$ kezdőpontjától választott $\mathbf{AB}$ szakasz kiinduló helyzete legyen $\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0$, az elmozdulás utáni helyzete pedig $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ (6.1. ábra). Szerkesszük meg az $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1$ szakaszok felező merőlegeseinek $\mathbf{C}$ metszéspontját.



6.1. ábra. Merev síkbeli rendszer elmozdulása elfordulás

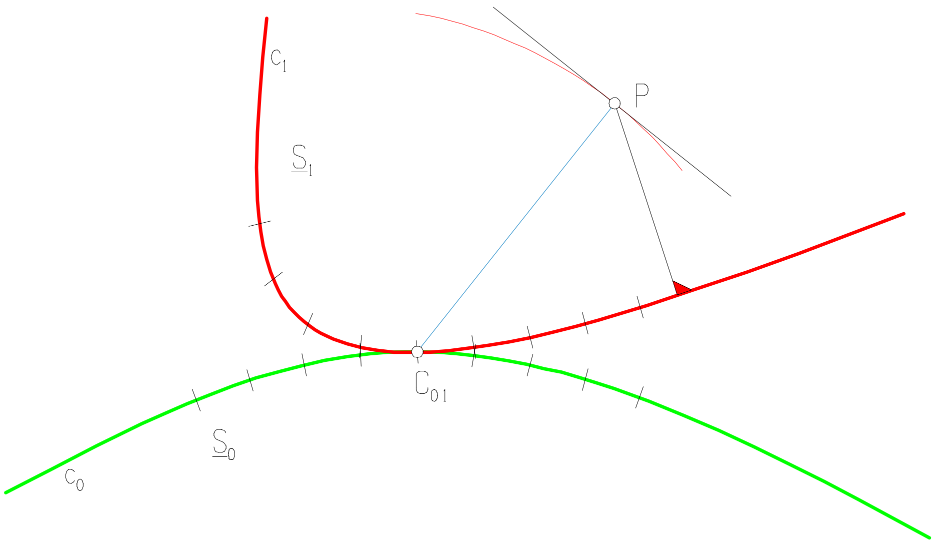
Mivel

$$\mathbf{A}_0\mathbf{C} = \mathbf{A}_1\mathbf{C},\ \mathbf{B}_0\mathbf{C} = \mathbf{B}_1\mathbf{C}$$

és

$$\alpha = \measuredangle(\mathbf{A}_0\mathbf{C}\mathbf{A}_1) = \measuredangle(\mathbf{B}_0\mathbf{C}\mathbf{B}_1)$$

az elmozdulás helyettesíthető egy $\mathbf{C}$ körüli α szögű elfordulással. A síkbeli rendszer merevsége miatt minden további elmozgatott pont is egybeesik az elforgatottjával. Ha $\mathbf{C}$ végtelen távoli pont, az elmozdulás eltolás.



6.2. ábra. A mozgó sík P pontjának mozgásiránya merőleges a momentán centrumból húzott sugárra

Az előzőekben az elmozdulásnak csak a végeredményét vizsgáltuk. A továbbiakban a mozgás folyamatát fogjuk elemezni. Vegyük a t_i időpontoknak egy kiválasztott t_0 időponthoz tartó sorozatát, és tekintsük az időben folytonosan mozgó síknak a t_i, t_0 időpontokhoz tartozó helyzeteit. Ezen helyzetek közötti elmozdulás mindig helyettesíthető egy $\mathbf{C}_i$ pont körüli elfordulással. A folytonosság miatt a $\mathbf{C}_i$ forgási középpontoknak is lesz egy $\mathbf{C}_0$ határhelyzete, ez a határhelyzet a t_0 időponthoz tartozó *momentán centrum*, vagy *pólus*. A $\mathbf{C}_0$ momentán centrumban a mozgó síknak az álló síkhoz viszonyított sebessége 0, minden más, ettől különböző $\mathbf{P}$ pontjában a $\mathbf{C}_0$ körüli forgásnak megfelelően a $\mathbf{C}_0\mathbf{P}$ sugárra merőleges. Mivel minden időponthoz tartozik egy momentán centrum, ezek az álló és a mozgó síkban egy-egy görbét határoznak meg. Ezen görbék neve *centroid*, vagy *pólusgörbe*. A két görbe együtt a *pólusgörbepár*, vagy *centroidpár* (6.2. ábra). A mozgás során a két görbének minden t_0 időpontban van egy momentán közös pontja, a $\mathbf{C}_0$ momentán centrum, ahol a két különböző síkban lévő pont relatív sebessége 0, vagyis a rögzített síkban lévő pólusgörbén a mozgó sík pólusgörbéje csúszás nélkül legördül. Mivel a mozgó sík momentán mozgása a $\mathbf{C}_0$ momentán centrum körüli elfordulása, ezért a sík tetszőleges $\mathbf{P}$ pontjának a sebessége (sebességvektora) a $\mathbf{C}_0\mathbf{P}$ sugárra merőleges.

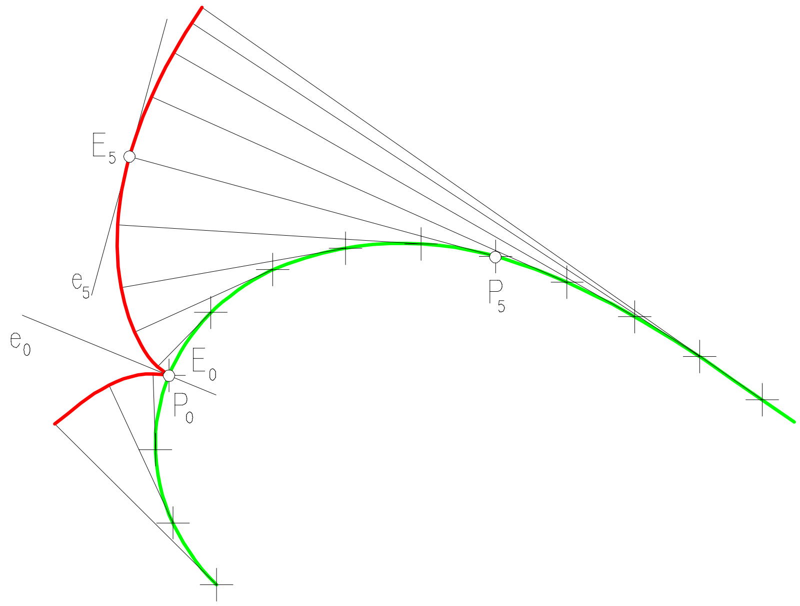
Összefoglalva: két sík relatív mozgása meghatároz egy pólusgörbepárt, amelyek a mozgás során egymáson csúszás nélkül legördülnek. Fordítva: az egymáson csúszás nélkül legördülő pólusgörbepár meghatározza két sík relatív mozgását.

6.2. Ruletták

Az alábbiakban néhány speciális pólusgörbepárral (centroidpárral) meghatározott síkbeli mozgást és eközben a mozgó sík néhány kiválasztott pontja által az álló síkban leírt görbét, rulettát vizsgálunk meg.

6.2.1. Körevolvens

Egy görbe minden érintőjére mérjük fel a P érintési pont és a görbe rögzített P_0 pontja közötti ív (előjeles) hosszát, az így kapott pontok mértani helye az eredeti görbe evolvense (6.3. ábra).



6.3. ábra. Evolvens származtatása

A $\mathbf{P}_0$ választásának megfelelően egy görbének végtelen sok evolvense van. Képzeljünk el egy a görbére feszített fonalat, vágjuk el azt a $\mathbf{P}_0$ pontban és feszesen tartva, fejtsük le mindkét felét a görbéről! Eközben a $\mathbf{P}_0$ pont a görbe evolvensét írja le. Síkgörbe esetén az előzővel ekvivalens definíció:

A rögzített görbén csúszás nélkül legördülő egyenes pontjai a görbe evolvenseit írják le.

Mivel a legördülő egyenes a momentán pólusban érinti az adott görbét, pontjainak (az álló síkhoz viszonyított) sebessége mindig merőleges a legördülő egyenesre. Az evolvensek tehát az érintők *ortogonális trajektóriái* (az érintőket merőlegesen metsző görbék).

Vegyünk fel ezután a gördülő egyenesen két pontot! A mozgás során a két pont távolsága nem változik és merőleges mind a két pont által leírt evolvensre. Egy görbe evolvensei tehát ekvidisztáns görbék.

Egy görbe görbületi középpontjainak (a simulókörök középpontjainak) a mértani helye a görbe evolútája.

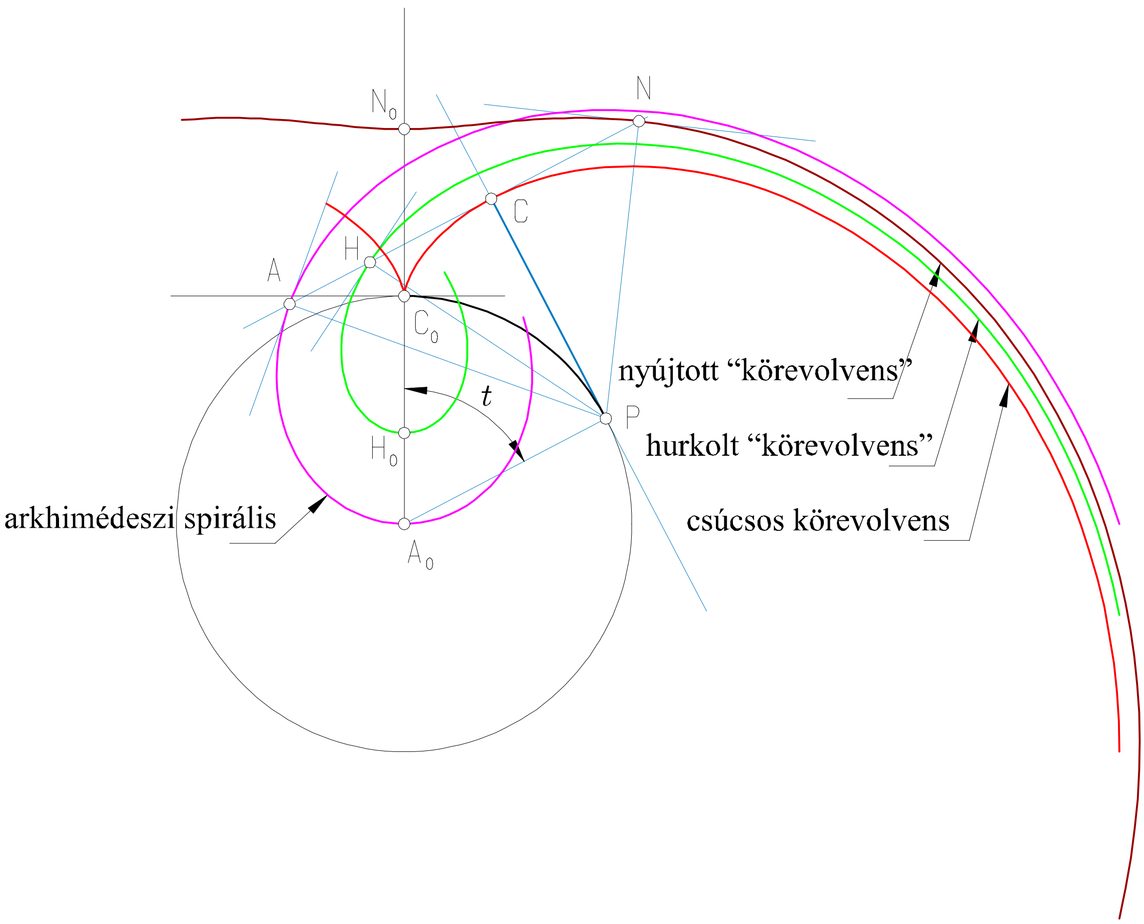
A fenti definícióból következik, hogy egy görbének csak egy evolútája van. Síkgörbe esetén az előzővel ekvivalens definíció:

A görbe normálisainak a burkolója (a normálisokat érintő görbe) *a görbe evolútája.*

Egy görbe evolvensének az evolútája az eredeti görbe. (Egy síkgörbe evolútájának valamelyik evolvenséről ezzel szemben csak annyit mondhatunk, hogy az eredeti görbével ekvidisztáns.)

Ha a rögzített görbe kör, a legördülő egyenes pontjai körevolvenseket írnak le. A körevolvens műszaki jelentőségét az adja, hogy (kevés kivételtől eltekintve) a fogaskerekek fogprofilja körevolvens. Ha a mozgó sík pontját a gördülő egyenesen kívül választjuk, az általa leírt görbe már nem körevolvens, de a származtatására utalva mégis „körevolvens-nek": nyújtott, vagy hurkolt körevolvensnek nevezzük (6.4. ábra). A hurkolt körevolvens speciális esete a rögzített kör középpontján átmenő arkhimédeszi spirális. Az arkhimédeszi spirális polárkoordinátás egyenlete

$$r = c\varphi.$$

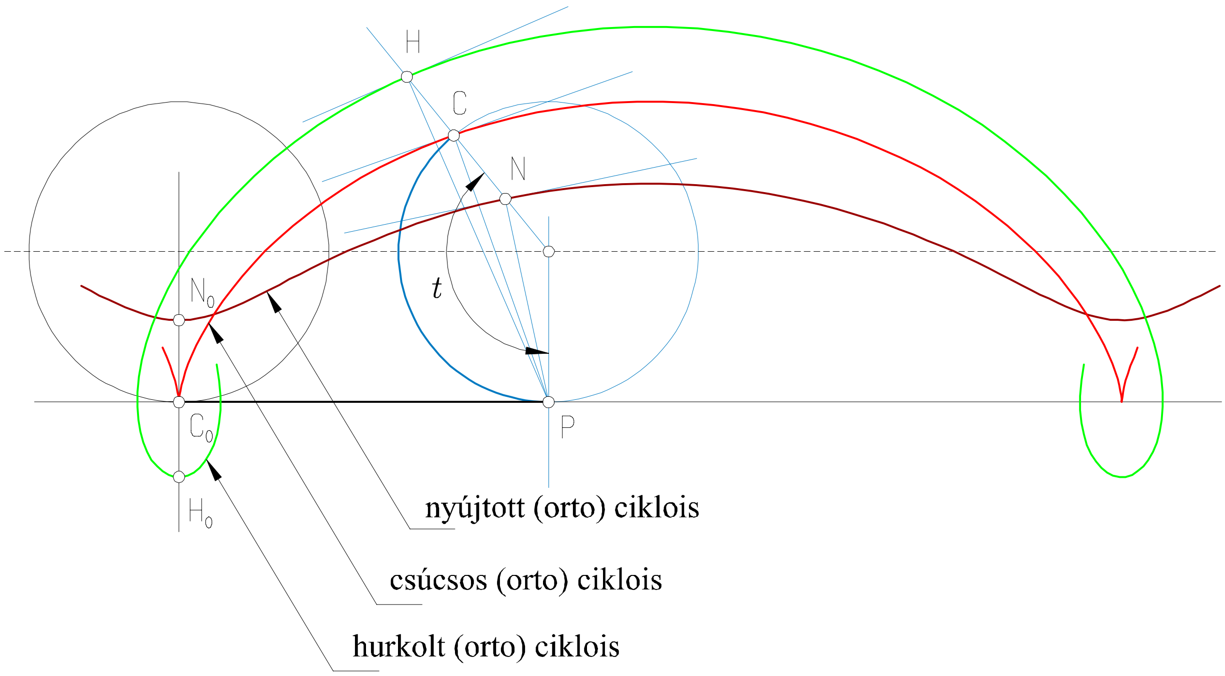


6.4. ábra. „Körevolvensek": csúcsos (valódi) körevolvens, hurkolt „körevolvens", nyújtott „körevolvens", arkhimédeszi spirális

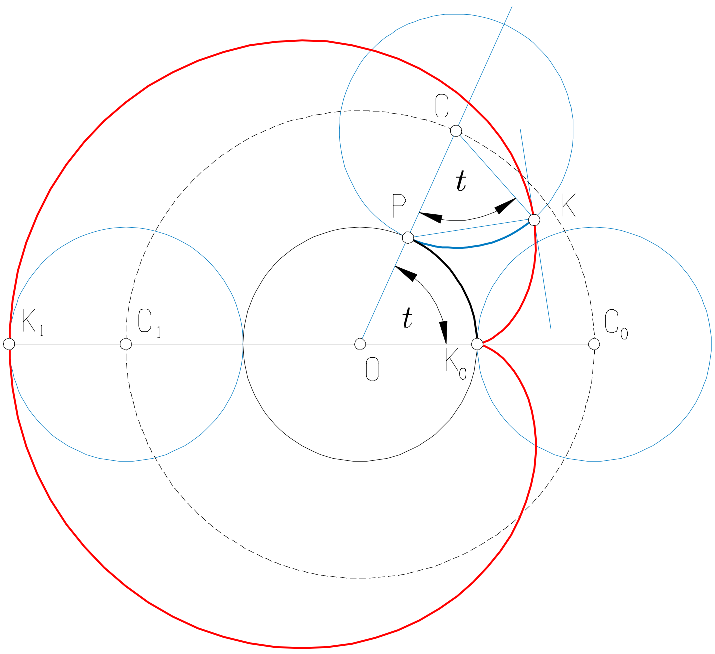
6.2.2. Cikloisok

Ha a gördülő centroid kör, akkor a mozgó sík pontjai *cikloisokat* írnak le a rögzített síkon. Ha a rögzített centroid egyenes, a leírt görbék *közönséges*, vagy *orto-cikloisok* (6.5. ábra). Ha a rögzített centroid kör, és ezen kívül gördül a mozgó centroid köre, a kapott görbék *epicikloisok*, ha pedig a rögzített körön belül gördül a mozgó centroid köre, a kapott görbék *hipocikloisok*. Mind a háromféle cikloisból van csúcsos, nyújtott és hurkolt. Az epi- és hipocikloisok esetében, ha a rögzített és a gördülő kör sugarának az aránya racionális, a kapott ciklois záródik, egyébként nem. (Kapcsolódó fogaskerekek esetében ez az arány a fogszámok aránya, tehát mindig racionális.) Speciális csúcsos epiciklois a *kardioid* (6.6. ábra: a sugarak aránya 1 : 1), csúcsos hipociklois az *asztrois* (6.7. ábra: a sugarak aránya

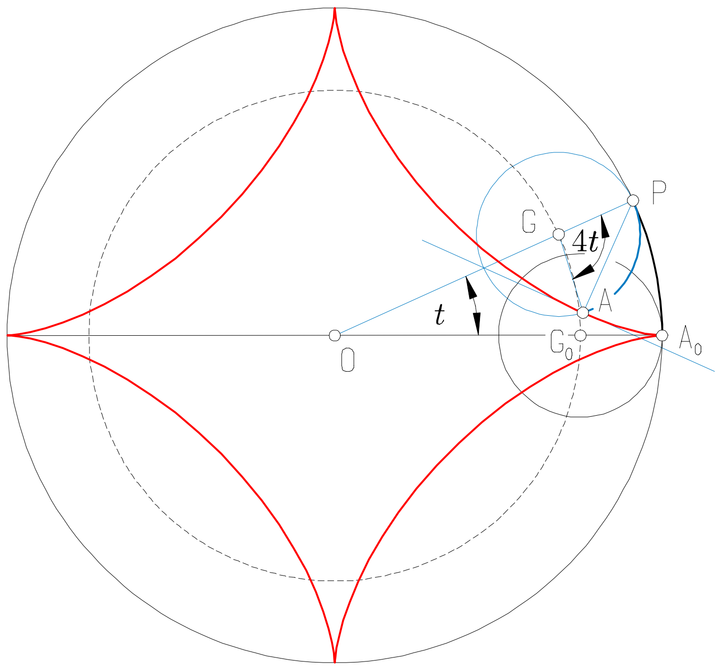
4 : 1), speciális csúcsos hipocikloisként előállíthatjuk a rögzített kör átmérőjét (a sugarak aránya 2 : 1). Ennek alapján forgó mozgást egyenesvonalú alternáló mozgássá alakító mechanizmust készíthetünk. Ugyanennél a mozgásnál, amikor tehát a sugarak aránya 2 : 1, nyújtott hipocikloisként ellipszist kapunk (6.8. ábra). Ilyen módon ellipszist rajzoló mechanizmust, ellipszográfot készíthetünk.



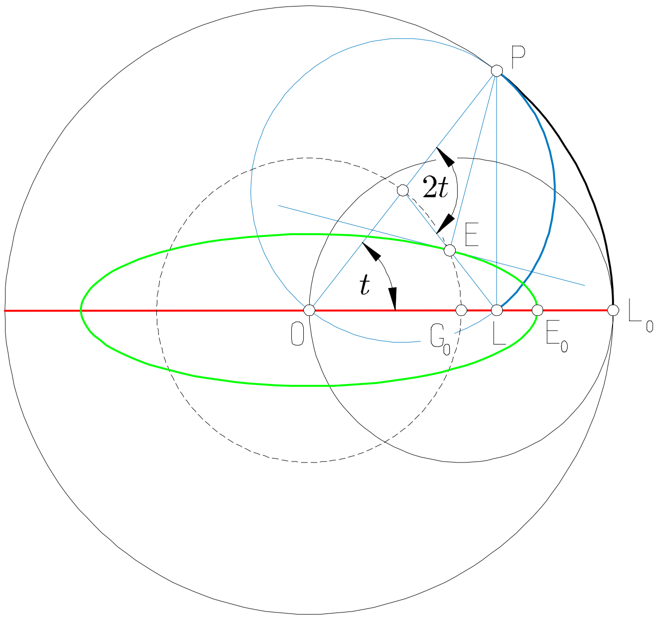
6.5. ábra. Közönséges (orto-) cikloisok: csúcsos; hurkolt; nyújtott



6.6. ábra. Speciális epiciklois a kardioid



6.7. ábra. Speciális csúcsos hipociklois az asztrois



6.8. ábra. Speciális csúcsos hipociklois az átmérő és nyújtott hipociklois az ellipszis

6.3. Hengeres csavarvonal

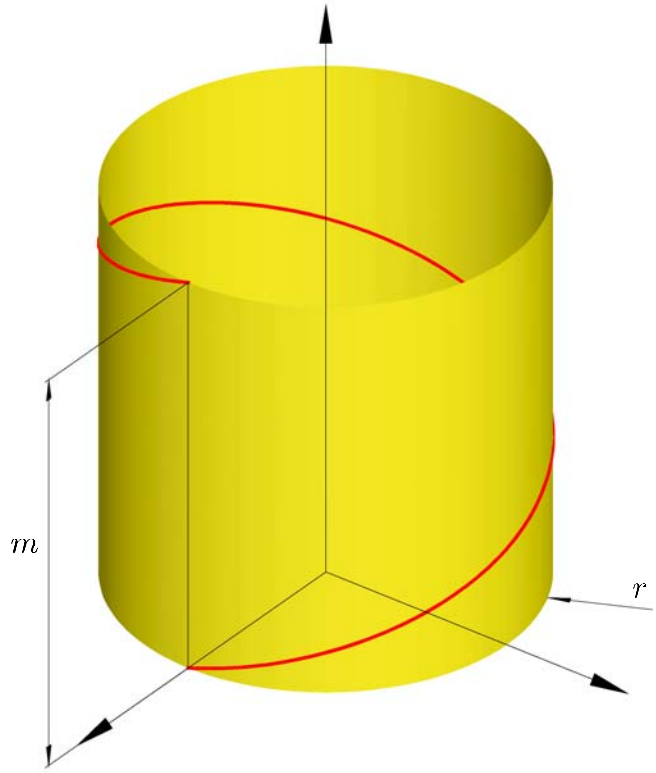
Az előző pontban a síkbeli mozgások geometriai elemzésével a műszakilag is fontos síkgörbék egy csoportjához, a rulettákhoz jutottunk el. A térbeli mozgások hasonló tárgyalása a csavarmozgásra épülne, amire azonban a jegyzet szűk keretei között csak utalhatunk. Műszaki jelentősége miatt is fontosnak tartjuk viszont legalább a hengeres csavarvonal ismertetését.

Csavarvonalat ír le a mozgó pont, ha egy tengely körüli elfordulás közben az elfordulás szögével arányos tengely irányú mozgást is végez. A pont és a tengely r távolsága a csavarvonalat tartalmazó henger sugara, egy teljes körülfordulás alatt végzett tengely irányú elmozdulás a csavarvonal m menetmagassága, az egy radián elfordulás alatt végzett tengely irányú elmozdulás a csavarvonal p paramétere. A p paraméter pozitív, ha a csavarvonal jobbos (mint a dugóhúzó), negatív, ha a csavarvonal balos (6.9. ábra).

A csavarvonal egy menetét kapjuk akkor is, ha egy kiterített hengerpalástnak megrajzoljuk az átlóját, majd a palástot visszahajlítjuk a hengerre. A csavarvonalnak a henger alapkörével bezárt α szögét a csavarvonal emelkedési szögének nevezzük (az α szöget a kiterített hengerpaláston az alap és az átló zárja be).

A fenti jelölésekkel

$$tg\alpha = \frac{m}{2r\pi} = \frac{p}{r}.$$



6.9. ábra. Jobbos csavarvonal egy menete

6.3.1. A csavarvonal paraméteres egyenlete és kísérő triédere

A kísérő triéder fogalma

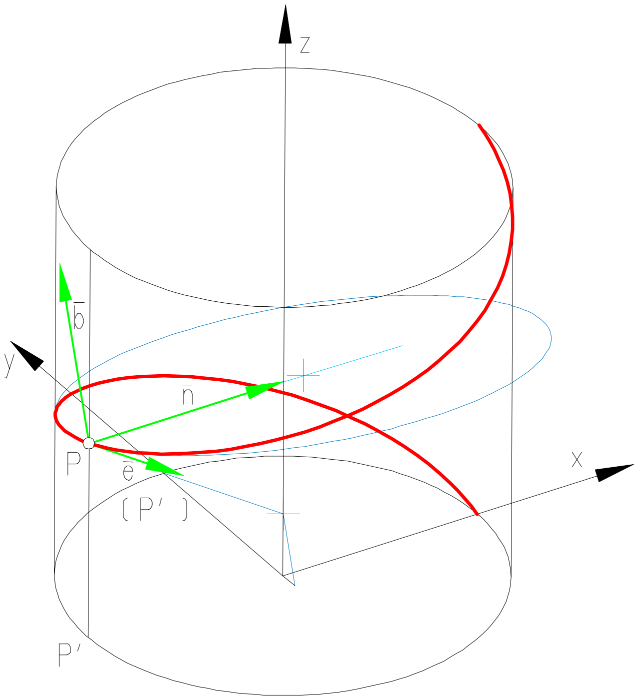
A térgörbék differenciálgeometriai tárgyalásának fontos fogalma a kísérő triéder, amiről itt megkísérelünk szemléletes képet adni. Emlékezzünk vissza a simulókör fogalmának a bevezetésére! Vettük a görbe három pontját és az azokon átmenő kört, majd a görbére illeszkedő három pontot összevontuk egy közös határponthoz. Eközben a pontokra illeszkedő kör határhelyzeteként a görbének a határpontbeli simulókörét (oszkuláló körét) kaptuk. Térgörbe vizsgálatához tekintsük a három pont által meghatározott sík határhelyzetét is, ezt a határhelyzetet a térgörbe adott pontbeli simulósíkjának nevezzük. A bevezetésből nyilvánvaló, hogy a térgörbe adott pontbeli érintője és simulóköre illeszkedik a simulósíkra. Tekintsük ezután a térgörbét irányítottnak (paraméteresen megadott görbe esetében a görbe irányítása a paraméter növekvő értékeinek felel meg). Az irányított térgörbe adott pontbeli jellemzői (6.10. ábra):

- a görbe érintőjének és irányításának megfelelő egységnyi $\mathbf{e}$ érintővektor;
- a simulósíkban a simulókör középpontja felé mutató egységnyi $\mathbf{n}$ főnormális vektor;
- a simulósíkra merőleges és az $\mathbf{e}, \mathbf{n}$ vektorokkal jobbsodrású hármast alkotó egységnyi $\mathbf{b}$ binormális vektor.

A bevezetésből következik, hogy $\mathbf{b} = \mathbf{e} \times \mathbf{n}$ ($\times$ a vektoriális szorzatot jelöli). A vektorok páronként egy-egy síkot határoznak meg:

- az **e** érintővektor és az **n** főnormális vektor síkja az $\underline{\mathbf{S}}$ simulósík;
- az **n** főnormális vektor és a **b** binormális vektor síkja az $\underline{\mathbf{N}}$ normálsík;
- a **b** binormális vektor és az **e** érintővektor síkja az $\underline{\mathbf{R}}$ rektifikáló sík.

Az $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ egységvektorokból és az $\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{R}}$ síkokból álló alakzatot a térgörbe adott pontbeli kísérőtriéderének nevezzük (triéder a neve egy közös kezdőpontból kiinduló három félegyenesből és az általuk kifeszített három szögtartományból álló alakzatnak). Ha ismert a görbe paraméteres egyenlete, annak első deriváltja a görbe érintőjének az irányát, második deriváltja az elsővel a simulósíknak az irányát határozza meg.



6.10. ábra. Csavarvonal kísérő triédere

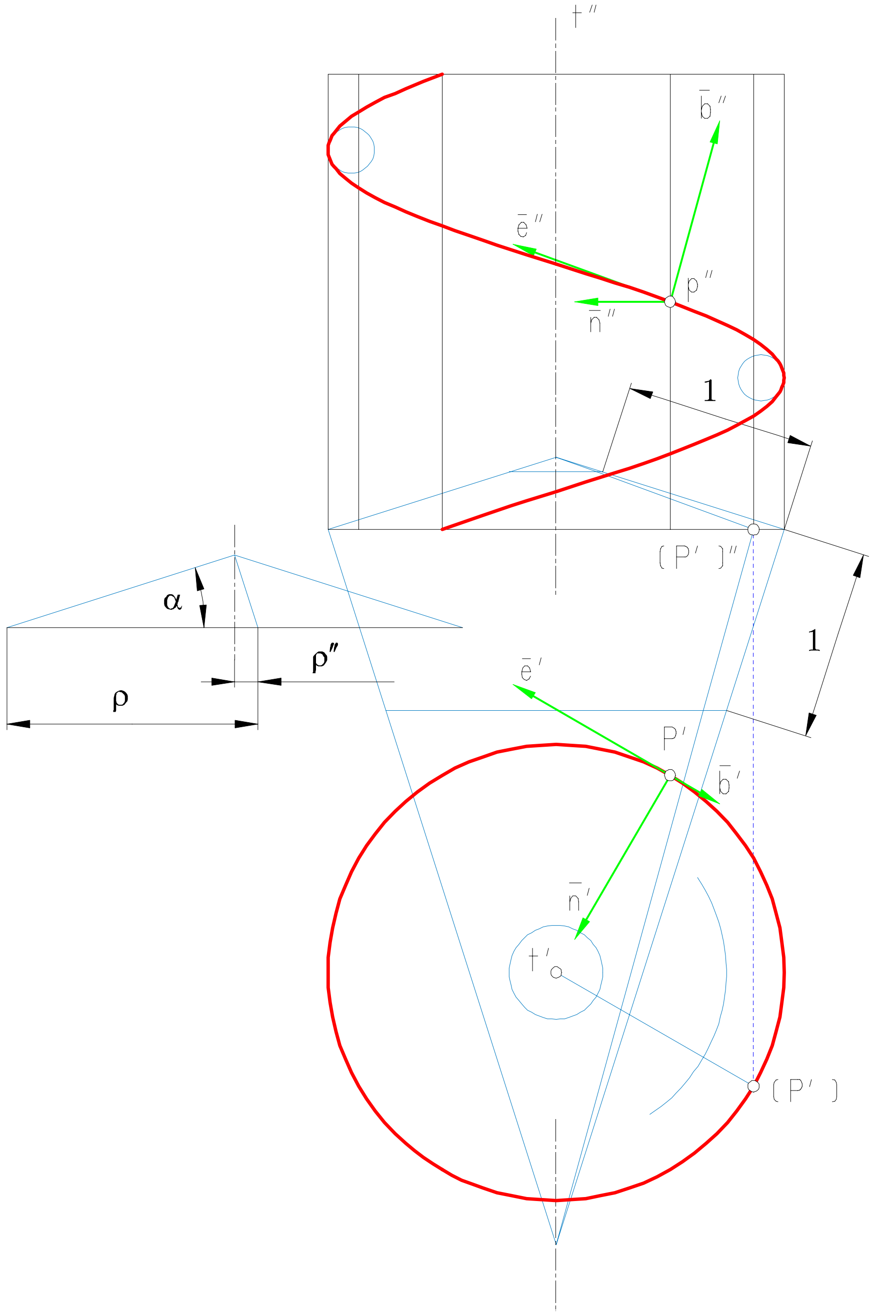
A csavarvonal paraméteres egyenletét

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ p\varphi \end{bmatrix}$$

alakban írhatjuk fel, ahol φ a tengely körüli elforgatás szögét jelöli. Ebből a φ szerinti deriválással kapjuk az érintő irányvektorát:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ p \end{bmatrix}.$$

Figyeljük meg, hogy az érintőnek az xy síkra eső vetülete, (amit z elhagyásával kapunk) a pont helyvektorának vetületével $+90°$-ot zár be, és hogy az érintők z irányú koordinátája a p, állandó. Ezekből következik, hogy ha az érintővektorokat önmagukkal párhuzamosan a pontok $-90°$-kal elforgatott vetületébe eltoljuk, azok mind a tengely p magasságú pontjába mutatnak, vagyis egy kúpot alkotnak (ha a csavarvonal balos, p negatív, vagyis a kúp csúcspontja az alapkör alatt van). Ezt a kúpot az érintők iránykúpjának nevezzük (6.11. ábra).



6.11. ábra. Kísérő triéder szerkesztése

Mivel a paraméteres egyenlet első deriváltjának a hossza állandó $\left(\sqrt{r^2+p^2}\right)$, ezért a második derivált közvetlenül a csavarvonal főnormálisának az irányát adja:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy ez a csavarvonal pontjából a tengelyre állított metsző merőleges. Az érintő és a főnormális a görbe simulósíkját határozza meg, amelyre a binormális merőleges és az előző két vektorral jobbsodrású rendszert alkot. Ha a simulósíkot és a binormális irányt is eltoljuk a pontok $-90°$-kal elforgatott vetületébe, az érintők iránykúpjának az érintősíkjait, illetve a binormálisoknak a közös alapkörre illeszkedő iránykúpját kapjuk, ami az érintők iránykúpjának a normálkúpja.

A fenti elemzés alapján megszerkeszthetjük a csavarvonal kísérő triéderét a görbe tetszőleges pontjában (6.11. ábra):

- az érintőt úgy kapjuk, hogy a pont $-90°$-kal elforgatott vetületét összekötjük az érintők iránykúpjának a csúcsával és ezt önmagával párhuzamosan eltoljuk a csavarvonal pontjába;
- a főnormálist úgy kapjuk, hogy a pontból merőlegest állítunk a csavarvonal tengelyére;
- a binormálist úgy kapjuk, hogy a pont $-90°$-kal elforgatott vetületét összekötjük a binormálisok iránykúpjának a csúcsával és ezt önmagával párhuzamosan eltoljuk a csavarvonal pontjába.

A vetület simulóköre

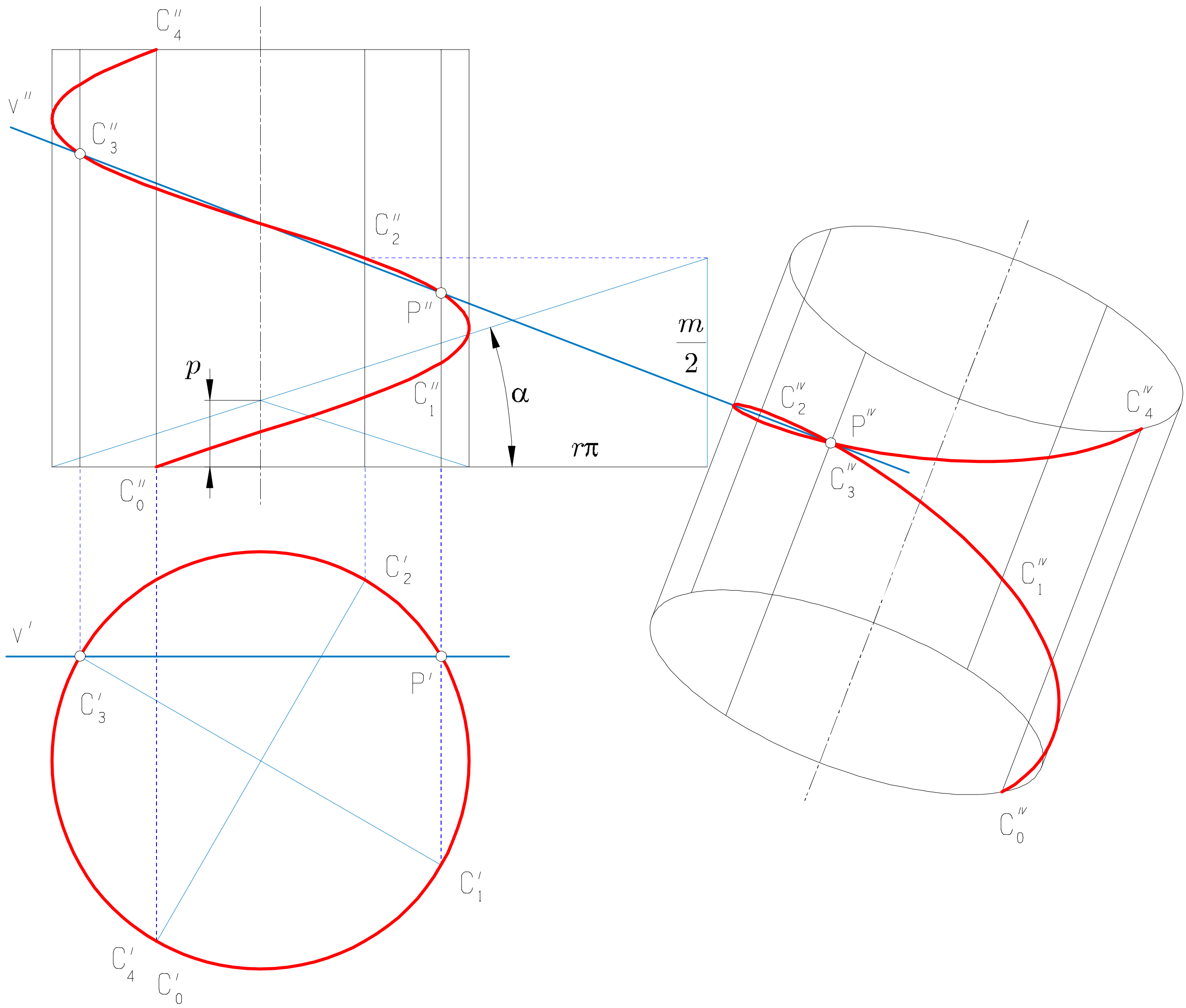
A térgörbének és vetületének a simulókörei között fennálló összefüggést Bellavitis (,Giusto 1803-1880) találta meg, eszerint $\rho' = \rho\dfrac{\cos^3\beta}{\cos\omega}$, ahol ρ' a vetület simulókörének a sugara, ρ a térgörbe simulókörének a sugara, β a görbe érintőjének, ω pedig a görbe simulósíkjának a képsíkszöge a görbe adott pontjában. Tekintsük most a 6.11. ábra kiemelt részletét! Mivel a csavarvonal első képe kör, ennek önmaga a simulóköre, tehát $\rho' = r$. A görbe érintőjének, és a görbe simulósíkjának a képsíkszöge egyaránt a csavarvonal emelkedési szöge: $\beta = \omega = \alpha$, tehát Bellavitis tétele alapján $\rho = \dfrac{r}{\cos^2\alpha}$.

Ezzel a sugárral rajzoltuk a 6.10. (szemléltető) ábrán a térgörbe simulókörét. Szerkesszük meg most a ρ ismeretében a csavarvonal második képén a kontúrpontokban a simulóköröket! (Mivel itt a görbületnek maximuma van, ezek egyúttal a kép hiperoszkuláló körei lesznek.) Ezekben a pontokban $\beta = \omega = \pi/2 - \alpha$, tehát Bellavitis tétele alapján $\rho'' = \rho\sin^2\alpha$. Ezzel a sugárral rajzoltuk a 6.11. ábrán a csavarvonal második képének a hiperoszkuláló köreit.

6.3.2. A csavarvonal merőleges vetületei

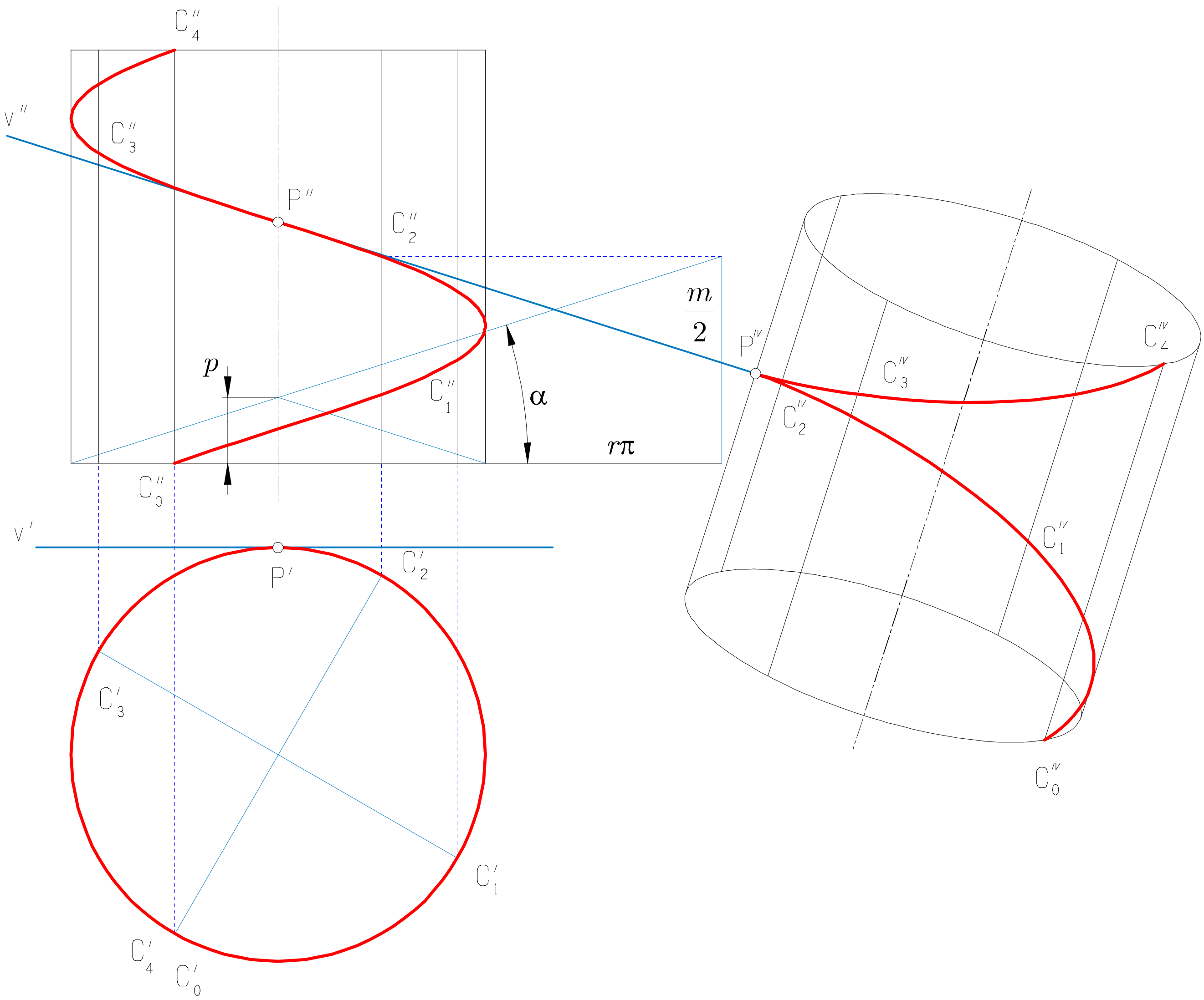
A csavarvonal tengelyirányú merőleges vetülete kör, a tengellyel párhuzamos síkra eső merőleges vetülete a szinuszgörbe affin transzformáltja. A csavarvonalnak a tengelyével hegyesszöget bezáró síkra eső merőleges vetülete nyújtott, csúcsos, vagy hurkolt ortociklois affin transzformáltja aszerint, hogy a tengely és a képsík szöge a csavarvonal emelkedési szögénél kisebb, egyenlő, vagy nagyobb.

A vetület különleges pontjait az alábbiak szerint kapjuk:



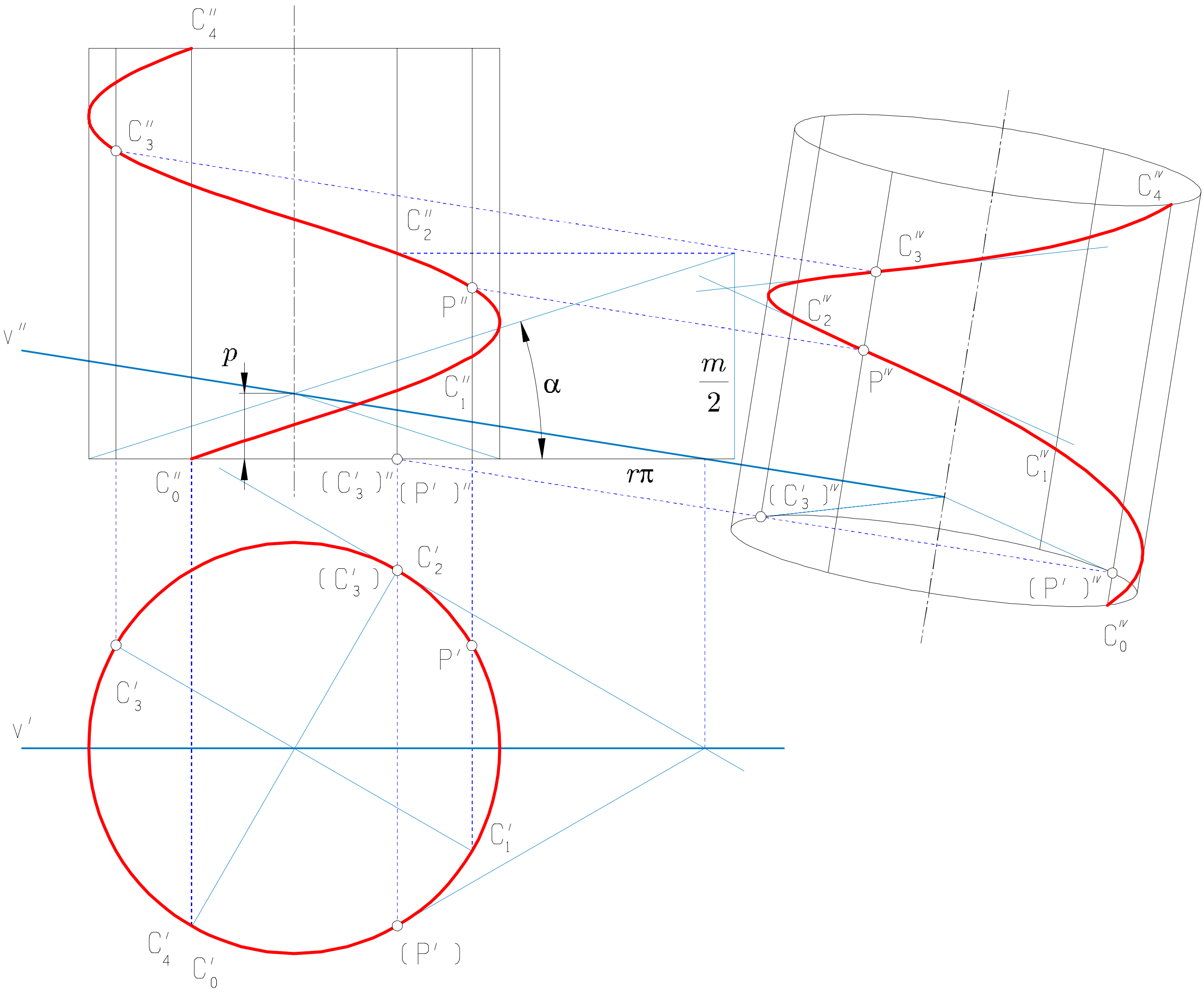
6.12. ábra. A csavarvonal önmetszéspontot tartalmazó vetülete a hurkolt ortociklois affin megfelelője

- ha a térgörbe egy húrja vetítősugár, a vetületen önmetszéspontot kapunk (6.12. ábra);



6.13. ábra. A csavarvonal csúcspontot tartalmazó vetülete a csúcsos ortociklois affin megfelelője

- ha a térgörbe egy érintője vetítősugár, a vetületen csúcspontot kapunk (6.13. ábra);



6.14. ábra. A csavarvonal inflexiós pontot tartalmazó vetülete a nyújtott ortociklois affin megfelelője

- ha egy pontban az érintő nem vetítősugár, de a simulósík vetítősík, a görbe vetületén inflexiós pont lesz, amelyben az érintő a simulósík élben látszó vetülete (6.14. ábra).

6.4. Merev térbeli rendszerek mozgása

A merev térbeli rendszerek mozgását a merev síkbeli rendszerek mozgásához hasonlóan vizsgálhatjuk. A merev térbeli rendszer helyzetét egy félegyenes és egy általa határolt félsík (vagy egy ezekhez kötött koordináta-rendszer) határozza meg. A síkbeli elmozduláshoz hasonlóan a térbeli rendszer elmozdulása egy tengely körüli elcsavarás, ennek határértékeként a mozgás pillanatnyi jellemzői (sebességtere) pedig egy momentán csavartengely körül, egy momentán csavarparaméter szerinti csavarmozgáséval egyezik meg. Ha a momentán csavarparaméter 0, az elmozdulás a momentán tengely körüli elfordulás, ha a momentán tengely végtelen távoli, az elmozdulás párhuzamos eltolás.

A merev térbeli rendszerek legáltalánosabb folytonos mozgása egy változó csavartengely és csavarparaméter által meghatározott momentán csavarmozgás. A mozgás során a momentán tengely (axis) egy-egy vonalfelületet, *axoidot* súrol mind az álló, mind a mozgó térben. Egy adott pillanatban az axoidok a momentán tengelyben érintkeznek és csak tengelyirányú csúszást megengedve legördülnek egymáson. Fordítva: a merev térbeli rendszerek legáltalánosabb folytonos mozgása megadható egy axoidpárral és a momentán csavarparaméter értékének a függvényével.

6.5. Gyakorló feladatok a 6. témakörhöz

6.1. Szerkessze meg a csúcsos, nyújtott és hurkolt körevolvens, valamint az arkhimédeszi spirális néhány pontját az érintőjével és rajzolja meg a görbéket!

6.2. Szerkessze meg a csúcsos, nyújtott és hurkolt ortociklois néhány pontját az érintőjével, és rajzolja meg a görbéket!

6.3. Szerkessze meg a csúcsos, nyújtott, és hurkolt epiciklois, valamint hipociklois néhány pontját az érintőjével és rajzolja meg a görbéket!

6.4. Szerkessze meg a kardioid és az asztroid néhány pontját az érintőjével, és rajzolja meg a görbéket!

6.5. Ábrázoljon csavarvonalat és szerkessze meg egy általános pontjában a kísérő triéderét!

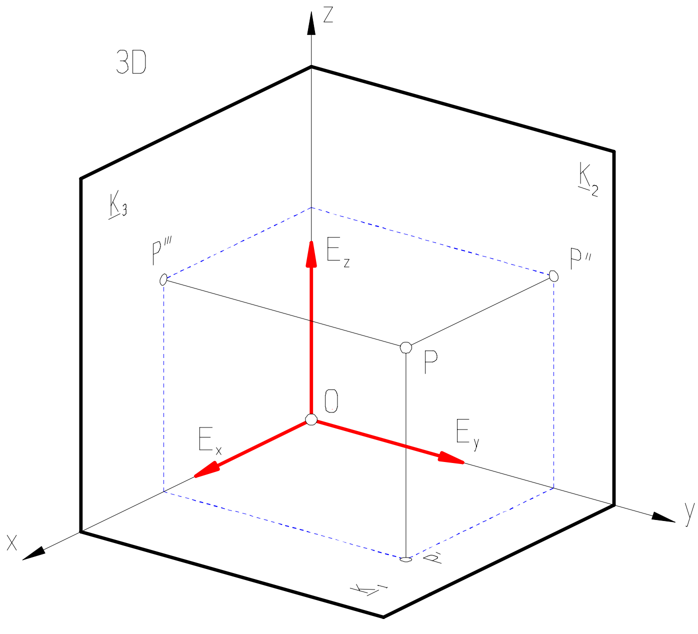
6.6. Ábrázoljon csavarvonalat és transzformálja úgy, hogy az új vetülete nyújtott, csúcsos vagy hurkolt ortociklois affin transzformáltja legyen!

7. fejezet

Az axonometrikus ábrázolás

Tananyag: *Az axonometrikus ábrázolás alapelvei, szemléltető axonometrikus képek vázolása. Szabványos axonometriák.*

A jegyzet szemléltető ábrái (számítógépen készült) merőleges vetületek, amelyeket tekinthetünk merőleges axonometrikus képeknek is. Ilyen képeket szerkeszthetnénk Monge-rendszerben transzformációval is, de célszerűbb lenne, a merőleges axonometria alkalmazása. Az axonometria az ábrázoló geometria teljes értékű részterülete, amelynek itt csak az alapelvét ismertetjük. Az axonometria (axis: tengely, metrum: mérték) a koordinátarendszer tengelyein mért távolságok, vagyis a koordináták szerinti ábrázolást jelent.



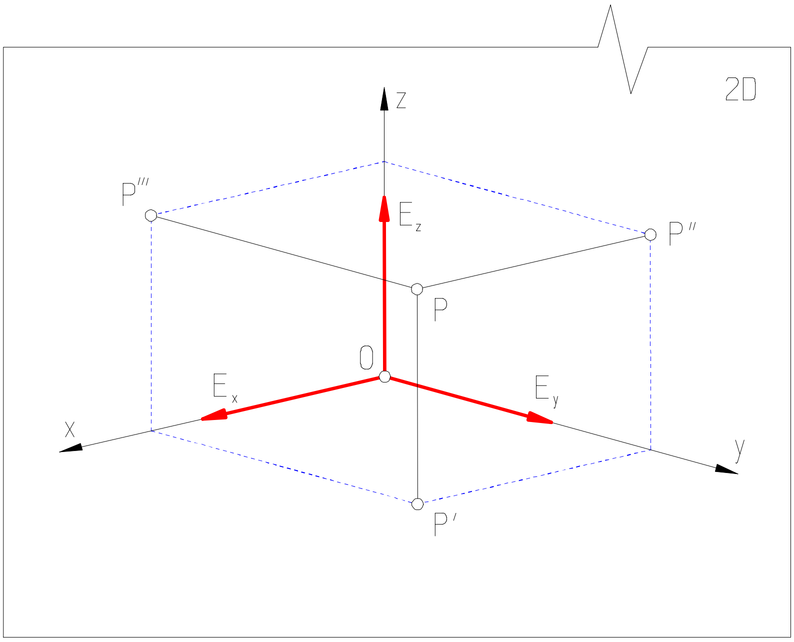
7.1. ábra. Pont koordinátái a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben

7.1. Az axonometrikus ábrázolás alapelve

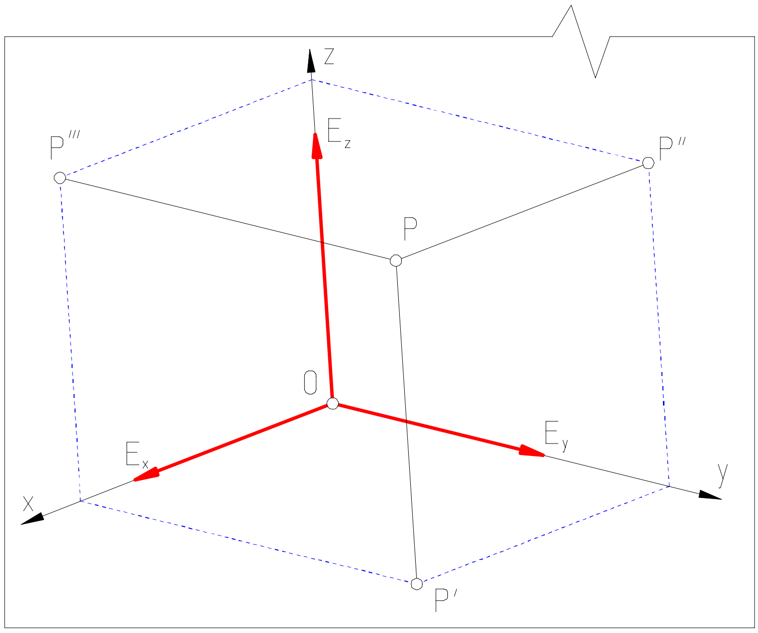
A háromdimenziós térben felvett Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben egy pont helyvektora a bázisvektorok lineáris kombinációjaként írható fel. A pont axonometrikus képének a helyvektorát a kép síkjában a bázisvektorok adott axonometrikus képeiből ugyanolyan együtthatókkal képzett lineáris kombináció adja meg (7.1., 7.2. ábrák)

A háromdimenziós térben a tengelyek, a pont és a pont vetületei egy vetítő téglatestet határoznak meg. Az axonometrikus képen a téglatest élei a tengelynek megfelelően rövidülnek, a tengelyek axonometrikus képével párhuzamosak maradnak. Az egyes tengelyek mentén vett rövidülés (nyúlás) mértékét q_x, q_y, q_z jelöli.

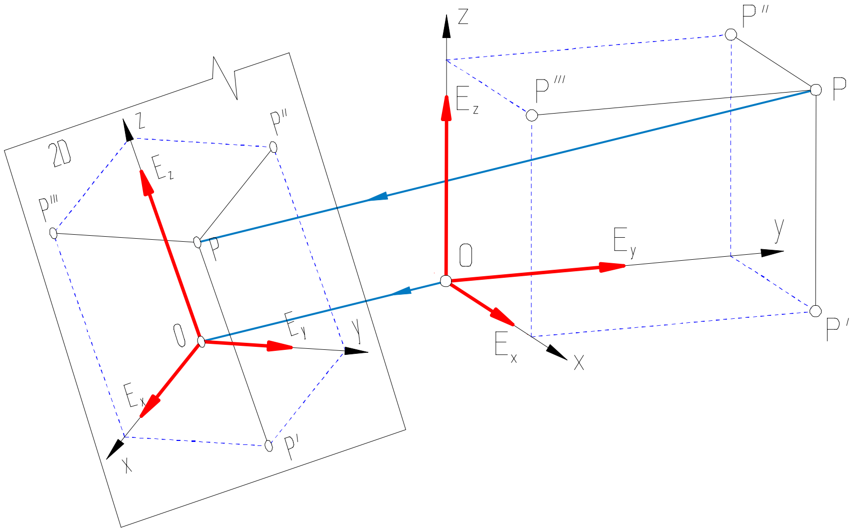
Egy axonometrikus leképezést a bázisvektoroknak (más szóval: az origónak és a tengelyek egységpontjainak) az axonometrikus képeivel, vagy a tengelyek irányával és a rövidülésekkel adunk meg. Ezt az axonometrikus alapalakzatot *el nem fajulónak* nevezzük, ha a bázisvektorok axonometrikus képei zérustól különbözőek és egymástól különböző irányúak.



7.2. ábra. Az axonometrikus leképezés elve



7.3. ábra. Az axonometrikus alapalakzat



7.4. ábra. Pohlke tétele

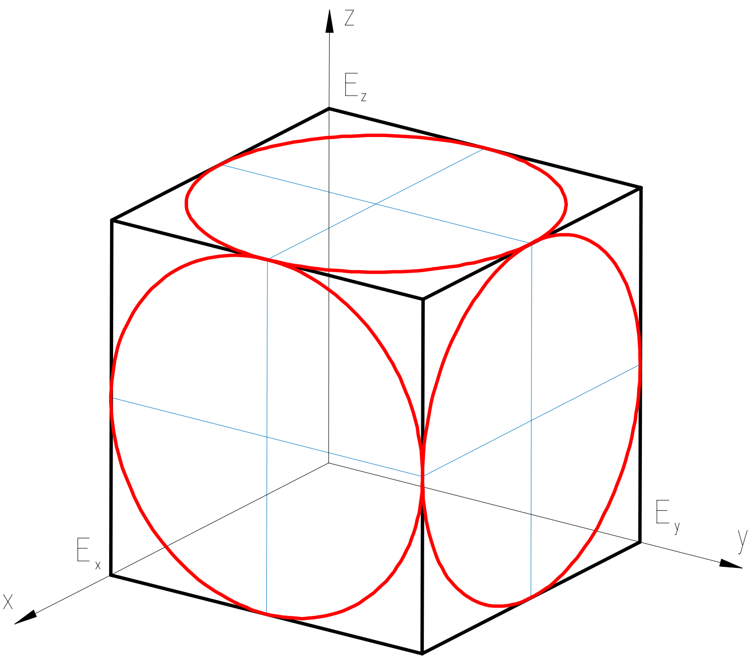
Pohlke tétele (7.3., 7.4. ábra):

Egy tetszőleges el nem fajuló axonometrikus alapalakzathoz meghatározható egy vetítési irány és egy képsík állás úgy, hogy a vetített kép az alapalakzattal származtatott képhez hasonló legyen.

Következmények:

- mivel a párhuzamos vetítéssel szemben a párhuzamosság és az osztóviszony invariáns, azért az axonometriában is az;

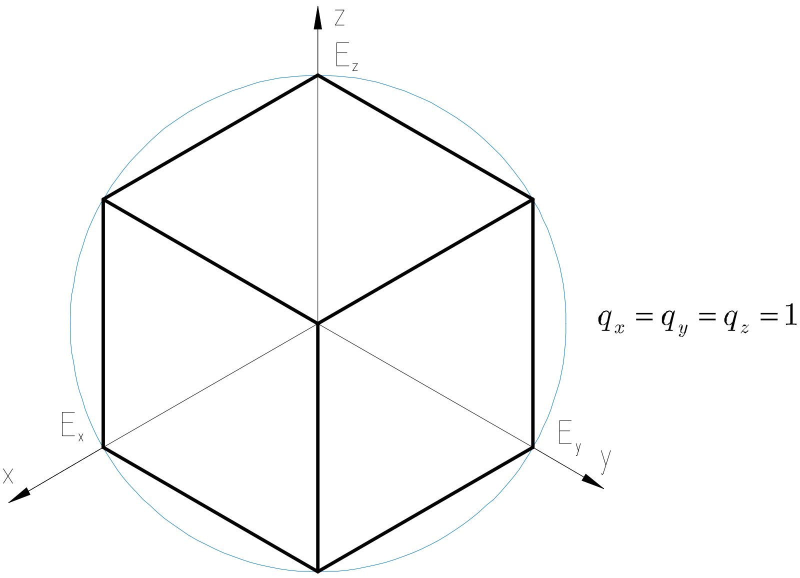
- egy parallelogramma (speciálisan négyzet) axonometrikus képe parallelogramma;
- egy négyzetbe írt kör képe olyan ellipszis, amely a négyzet parallelogramma képét az oldalak felezőpontjaiban érinti, ezen felezőpontokat összekötő átmérők az ellipszisnek egy *konjugált* (kapcsolt) átmérőpárját alkotják (7.5. ábra).



7.5. ábra. Kocka axonometrikus képe az oldallapjaira rajzolt körökkel

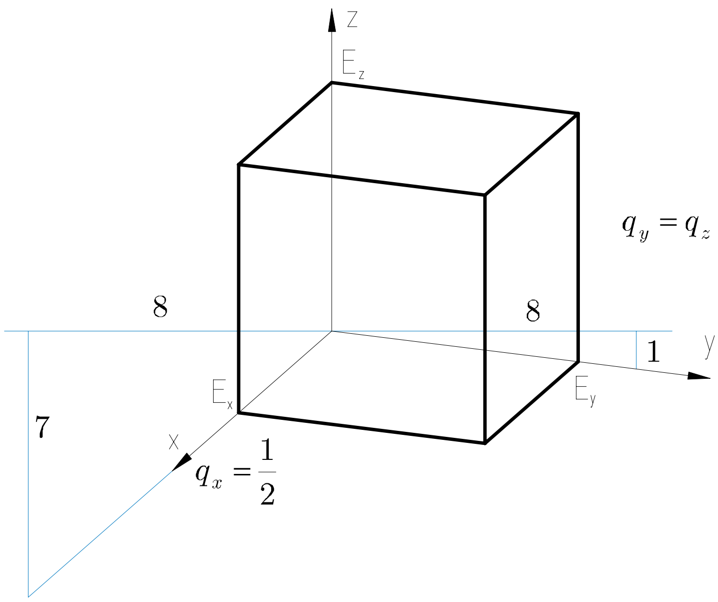
7.2. Szabványos axonometriák

A géprajzban szokásos axonometriák alapalakzatai:



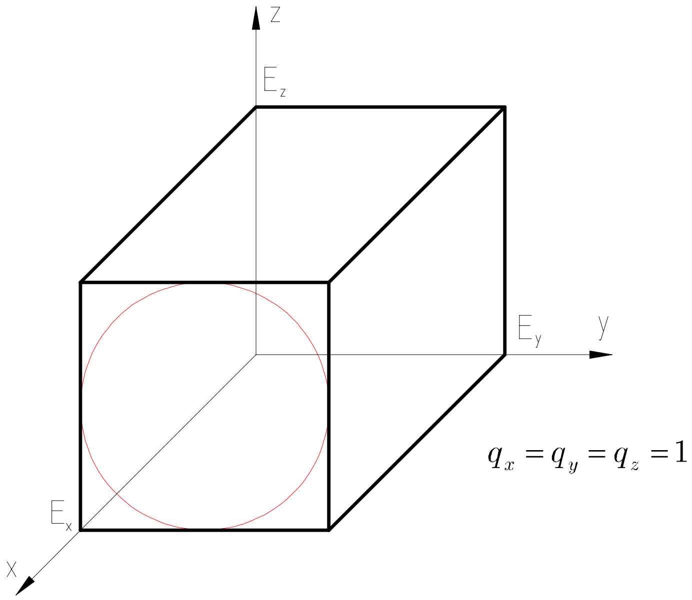
7.6. ábra. Szabványos axonometriák: egyméretű (izometrikus) axonometria

- *egyméretű* (izometrikus) axonometria: a tengelyek axonometrikus képei 120^o-os szögeket zárnak be és valamennyi rövidülés: $q_x = q_y = q_z = 1$ (7.6. ábra)



7.7. ábra. Szabványos axonometriák: kétméretű (dimetrikus) axonometria

- *kétméretű* (dimetrikus) axonometria: az **x** tengely axonometrikus képének az iránytényezője $-7 : -8$, az **y** tengelyé $-1 : 8$, a **z** tengely függőleges; az **x** tengely rövidülése: $q_x = 1/2$, a többié: $q_y = q_z = 1$ (7.7. ábra);



7.8. ábra. Szabványos axonometriák: kavalieri axonometria

- *ferdeszögű* (kavalier) axonometria: az **y** és a **z** tengelyek illeszkednek a rajz síkjára, az **x** tengely axonometrikus képe ezekkel 135^o-os szögeket zár be; az **x** tengely rövidülése: $q_x = 1$, vagy $q_x = 1/2$, a többié: $q_y = q_z = 1$ (7.8. ábra).

A kavalier-axonometria nagy előnye, hogy az (**yz**) sík, vagyis a frontális képsík és az azzal párhuzamos alakzatok valódi nagyságban látszanak az axonometrikus képen. Ilyen tulajdonságú axonometriát kapunk, ha a frontális képsíkot az axonometrikus képsíkkal párhuzamosnak, vagy megegyezőnek vesszük és az axonometrikus képet ferde vetítéssel hozzuk létre. Az ilyen axonometriákat *frontális axonometriának* nevezzük. Hasonlóan értelmezzük a *horizontális axonometriát*, amikor az (**xy**) sík, vagyis a horizontális képsík és az azzal párhuzamos alakzatok látszanak valódi nagyságban az axonometrikus képen.

Ennek a rövid kiegészítésnek csupán a szemléltető axonometrikus vázlatok elvének a megismertetése volt a célja, ezért itt nem foglalkozunk a merőleges és ferde vetítéssel kapott axonometrikus képek szerkesztésével.

7.3. Gyakorló feladatok a 7. témakörhöz

7.1. Ábrázoljon a szabványos egyméretű (izometrikus) axonometriában egy kockát!

7.2. Ábrázoljon a szabványos kétméretű (dimetrikus) axonometriában egy kockát!

7.3. Ábrázoljon a jobbsodrású tengelykereszt képével és a $q_x = 1/2$ rövidüléssel adott frontális axonometriában egy kockát!

7.4. Ábrázoljon a jobbsodrású tengelykereszt képével és a $q_x = 1/2$ rövidüléssel adott frontális axonometriában egy $3, 4, 5cm$ oldalélű téglatestet!

7.5. Ábrázoljon a jobbsodrású tengelykereszt képével és a $q_x = 1/2$ rövidüléssel adott frontális axonometriában az **x** és a **z** tengelyek pozitív felét érintő, adott sugarú kört! Ehhez szerkessze meg az érintési pontokat és a kör képének a tengelyeit is!

7.6. Ábrázoljon a szabványos egyméretű (izometrikus) axonometriában egy kockába írt gömböt a képsíkokkal párhuzamos főköreivel és kontúrjával!

7.7. Ábrázoljon a szabványos kétméretű (dimetrikus) axonometriában egy kockába írt hengert!

7.8. Ábrázoljon a jobbsodrású tengelykereszt képével és a $q_x = 1/2$ rövidüléssel adott frontális axonometriában egy kockába foglalt, az x tengellyel párhuzamos tengelyű forgáshengert!

7.9. Ábrázoljon a jobbsodrású tengelykereszt képével és a $q_x = 1/2$ rövidüléssel adott frontális axonometriában az **x** és a **z** tengelyek pozitív felét érintő kört! Ehhez szerkessze meg az érintési pontokat és a kör képének a tengelyeit is!

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[1] Brauner, Heinrich: *Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie*, Springer-Verlag, Wien, 1986.

[2] Hohenberg, Fritz: *Konstruktive Geometrie in der Technik*, Springer-Verlag, Wien, 1957.

[3] Klingenfeld, F. A.: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, Nürnberg, 1851.

[4] Kólya Dániel: *Ábrázoló geometriai feladatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[5] Kólya Dániel: *Ábrázoló geometria*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995.

[6] Kruppa, Erwin: *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie*, Springer-Verlag, Wien, 1957.

[7] Lőrincz Pál - Petrich Géza: *Ábrázoló geometria*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.

[8] Müller, Emil; Kruppa, Erwin: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, Springer-Verlag, Wien, 1948.

[9] Pál Imre: *Térláttatós ábrázoló mértan*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1959.

[10] Petrich Géza: *Ábrázoló geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.

[11] Pólya György: *A gondolkodás iskolája*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1971.

[12] Reiman István: *Ábrázoló geometria* (gimnáziumi, fakultatív), Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[13] Sain Márton: *Nincs királyi út! Matematikatörténet*, Gondolat, Budapest, 1986.

[14] Strommer Gyula: *Geometria,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[15] Szőkefalvi-Nagy Gyula; Gehér László; Nagy Péter: *Differenciálgeometria*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[16] Vermes Imre: *Geometria útmutató és példatár*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1996.

[17] Vigassy Lajos: *Projektív geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

[18] Wunderlich, Walter: *Darstellende Geometrie I., II.*, Hochschultaschenbücher-Verlag, Mannheim, 1966.

[19] Zigány Ferenc: *Ábrázoló geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.