

9.2 a) A HASÁB SÍKMETSZETE VETÍTŐSÍKKAL

Adott a második képsíkon álló hatoldalú ferdehasáb; alapja az 1234 szabályos hatszög. Adott továbbá a Σ_1 első vetítősíkra illeszkedő ABC háromszög. (Az $|AB|$ oldalegyenese első vetítőegyenese.)

Szerkesszük meg a hasáb és a háromszög-lap metszetét!

(92. ábra)

A szerkesztés menete hasonló a gúla és vetítősík metszetének meghatározásához. (Lásd 9.1 a) feladatal.)

A hasábélek és a Σ_1 vetítősík dőléspontjai az első képen kijelölhetők. A dőléspontok második képeit rendezőkkel metsszük ki a megfelelő hasábéleken. A dőléspontok helyes összekötésével megkapjuk a teljes síkmetszetet. (I-II-III-IV-V-VI. hatszöget.) A hasáb élek III, IV, VI dőléspontjai a háromszög-lapon kívül vannak. Tehát a háromszög-lap nem metszi át a hasáböt. A háromszög BC oldala a P, Q pontokban, az AC oldala az R, S pontokban dőli a hasáb lapjait. A hasáb és a háromszög-lap metszete az I II P Q V S R hétszög.

A láthatóság megrajzolásánál a háromszög-lap átlátszatlan. (Figyeljünk a BC és AC oldalak dőléspontjaira!)

9.2 b) A VETÍTŐHASÁB SÍKMETSZETE

A 93. ábrán egy négyoldalú első vetítőhasáb és az általános helyzetű 1234 paralelogramma metszetét szerkesztettük. (A hasáb az első képsíkon áll, alapja általános négyszög, oldalélei első vetítőegyenese, oldallapjai első vetítősíkok. A hasáb első vetülete az alaplappal egybevágó négyszög.)

A metszet-sokszög oldalai a vetítőhasáb lapjainak az $[1234]$ síkkal alkotott metszésvonalai. A hasáb oldallapjai első vetítősíkok. Így a síkmetszet első képe egybeesik a hasáb alaplappal. (I II III IV = A' B' C' D') A metszet illeszkedik a paralelogramma síkjára. A metszet második vetületét a paralelogramma síkjára illeszkedő k és l oldalegyenésekkel kapjuk. Az ábrán feltüntettük a láthatóságot is.

Ennél a feladatnál a "lapmódszerrel" szerkesztettük meg a síkmetszetet, ugyanis a metsző sík és a hasáb-lapok metszésvonalait határoztuk meg. Ugyanez lenne a szerkesztés menete az eddig használt "élmódszerrel" is.

9.2 c) A HASÁB SÍKMETSZETE ÁLTALÁNOS SÍKKAL

Adott egy négyoldalú ferdehasáb és az 1234 trapéz. Szerkesszük meg a hasáb és a trapézlemez síkmetszetét!

(94. ábra)

(A ferdehasáb az első képsíkon áll. Alaplappja az ABCD általános négyszög. Az A' B' C' D' fedőlapja első fősíokban van. A hasáb oldalélei általános helyzetű egyenesek.)

A metszet megszerkesztéséhez a hasáb éleinek a trapéz síkjával való dőléspontjait kell megszerkeszteni. A hasáb éllei is és a trapéz síkja is általános helyzetűek. A dőléspontokat legegyszerűbben az általános helyzetű $[1234]$ sík vetítősíkká transzformálásával kapjuk. Így a feladatot visszavezetjük az előző 9.2 a)-ban megismert módszerre. (Hasonlóan szerkesztettük a gúla síkmetszetét a 9.1 b) feladataiban.)

Vezessük be a trapéz síkjára merőlegesen a negyedik képsíkot. Célszerű a $K_1 K_4$ képsíkrendszerben dolgozni, mert így könnyű megrajzolni a hasáb negyedik vetületét. Vegyük fel az $[1234]$ sík f_1 első főegyenését; (f_1 átmegy a 3-as ponton). Majd az f_1 -re merőleges negyedik képsík új tengelyét: $x_{14} \perp f_1$. Megrajzoljuk a hasáb és a trapéz negyedik képét. A trapéz negyedik képe élben látszik, így a hasábélek dőléspontjai az új képen kijelölhetők. A dőléspontok első, majd második képeit rendezőkkel metsszük ki a hasábéleken.

Mindkét vetületben összekötjük a dőléspontokat megfelelő sorrendben. A síkmetszet az I II III IV négyszög. A hasáb minden éle dőli a trapéz-lemezt, tehát a trapéz átmetszi a hasáböt.

A 94/b ábrán külön megrajzoltuk a feladatot a láthatóság jelölésével.

9.1 b) A GÚLA SÍKMETSZETE ÁLTALÁNOS SÍKKAL

Adott az általános síkban fekvő KLN háromszög és az $M(ABCDE)$ szabályos ötoldalú gúla. A gúla alapja második fősfőben van, az ME éle profil helyzetű. Szerkesszük meg a gúla és a háromszög-lap metszetét! (90. ábra)

A feladatban a gúla alaplapja párhuzamos a második képsíkkal, tehát az ötszög második vetülete valódi nagyságban szerkeszthető.

A gúla csúcsának második vetülete (M'') egyben a szabályos ötszög középpontja. Az ME profilél második vetülete ($M''E''$) a szabályos ötszög köréírt körének sugara. (A szabályos ötszög szerkesztését lásd a 90/b ábrán. Vö. az I. kötet 20.2 pontjával.)

Első vetületben a gúla m magassága valódi nagyságban látszik.

A metszet szerkesztéséhez az általános helyzetű [KLN] sík és a gúlaélek dőléspontjait kell megkeresni.

A dőléspontokat egyenként fedőegyeneseikkel szerkeszteni (8.2 a) szerint) hosszadalmas lenne. Mivel több egyenes metszi ugyanazt a síkot, így célszerű a síkot vetítősíkká transzformálni.

Transzformáljuk a [KLN] síkot vetítősíkká! Így visszavezetjük a feladatot az előbb (9.1 a)-ban mutatott szerkesztésre. Felvesszük a [KLN] sík f_2 második főegyenését; (f_2 átmegy a háromszög K csúcsán). Majd az f_2 -re merőleges negyedik képsík új tengelyét: $x_{24} \perp f_2$.

Azért dolgozunk második főegyenésre merőleges új képsíkkal, mert így egyszerű a gúla negyedik képét megrajzolni. A gúla alaplapja ugyanis a π_2 második fősfőben van, amely a K_2K_4 -ben negyedik fősfő. A negyedik vetülete párhuzamos az új tengellyel: $\pi_2^{IV} \parallel x_{24}$.

Megrajzoljuk a gúla és a háromszög negyedik képét. A [KLN] sík új képe egyenes. Így a negyedik képen a gúla élek I, II, III, IV, V. dőléspontjai kijelölhetők. A dőléspontok második és első képeit rendezővel kapjuk. Gondot okoz az I-es pont második képe, valamint az V-ös pont első képe. Ezek szerkesztését az ábrán külön jelöltük.

Az I-es pont második képét nem tudjuk új rendezővel kimetszeni az AM élen, mert $A''M''$ majdnem párhuzamos az új rendezővel. Ezért az I-es pont negyedik rendezőjével megkeressük az I-es pont első képét. ($I \rightarrow x_{24} = I \rightarrow x_{12}$); majd abból a második képet rendezővel kapjuk. Az V pont az ME profilélen van. Az első képét a negyedik rendezőjének felmérésével kapjuk.

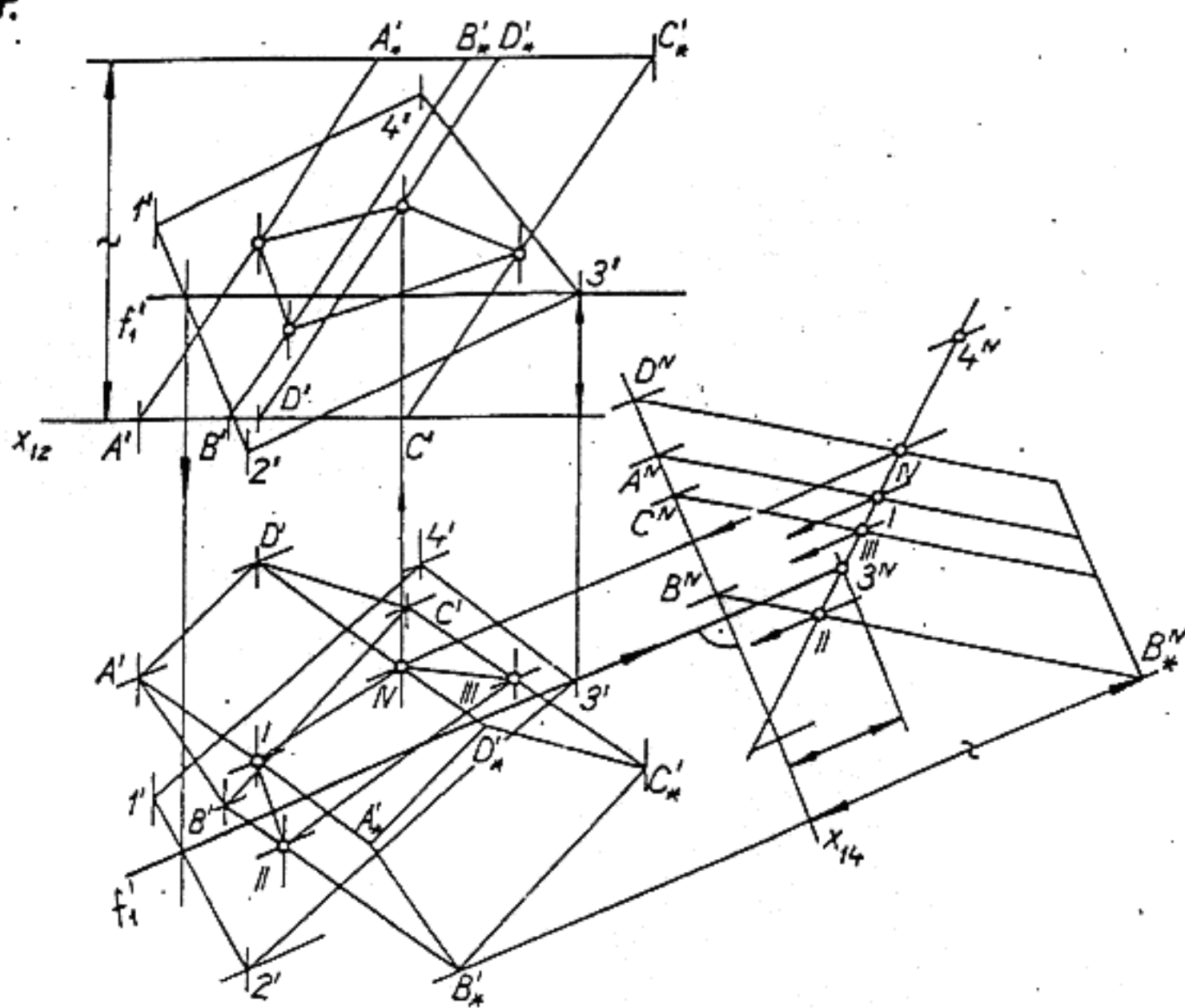
A dőléspontokat lapról-lapra haladva megfelelő sorrendben összekötjük. A teljes síkmetszet az I-II-III-IV-V ötszög. A II-es csúcs nincs a háromszög belsejében, tehát a háromszöglap nem metszi át a gúlát, csak belevág a gúlába. A háromszög KL oldala a P, Q pontokban dőli a gúla lapjait. (Q' és Q'' rendezettek! Ellenőrizni!)

A metszet-sokszög az I-P-Q-III-IV-V hatszög.

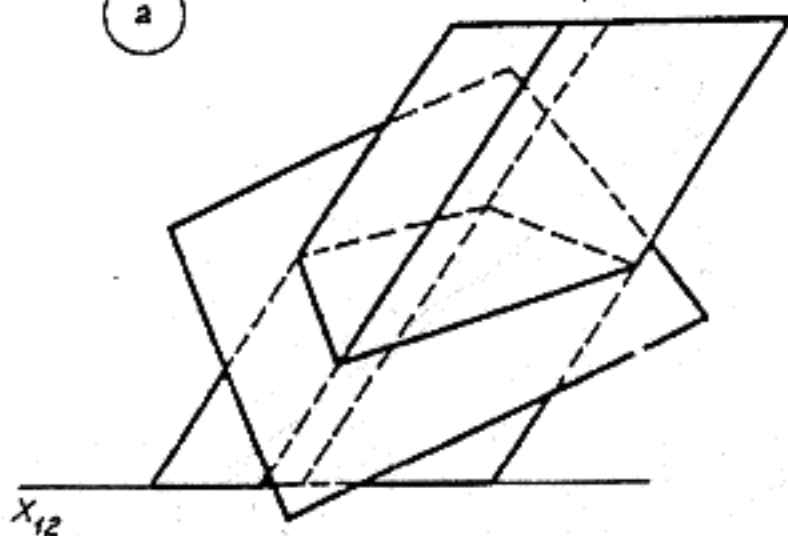
A láthatóság megrajzolásánál a gúla alaplapját eltávolítjuk, a háromszög lapot átlátszatlanak tekintjük.

A 90/c-ábrán újra megrajzoltuk a gúla síkmetszetét, és jelöltük a láthatóságot.

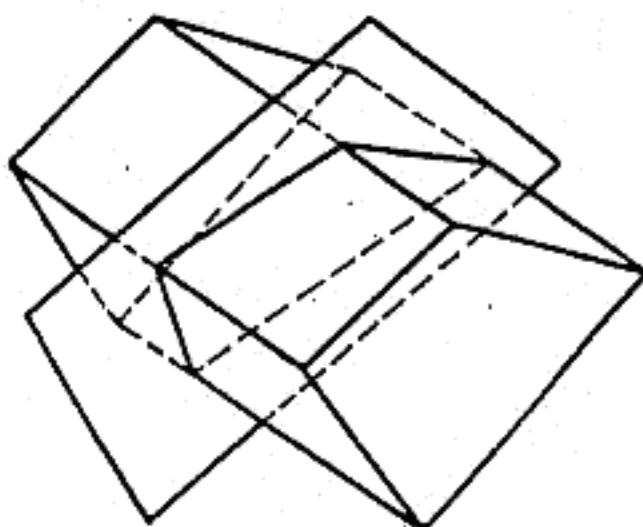
94.



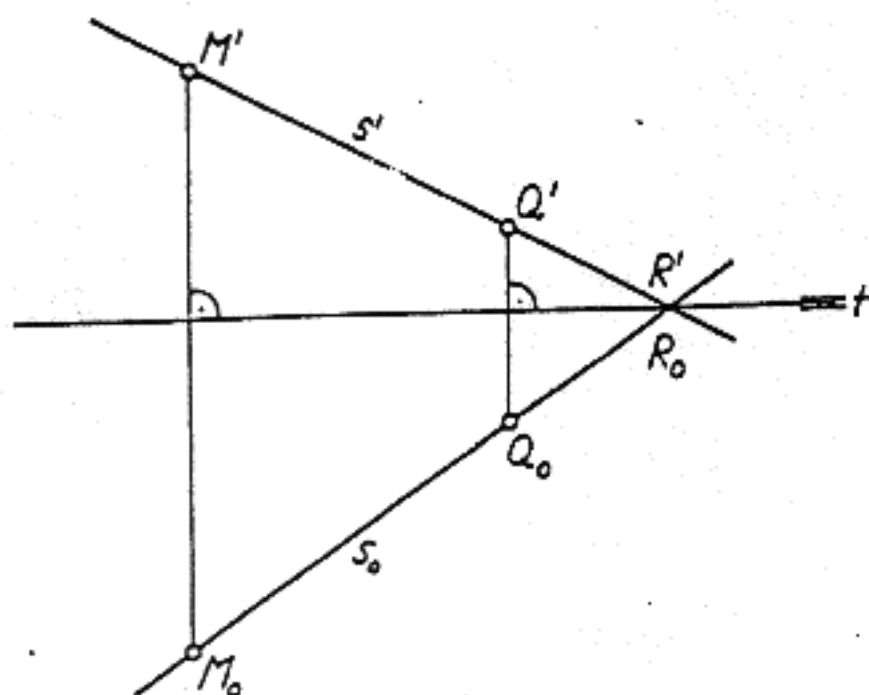
a



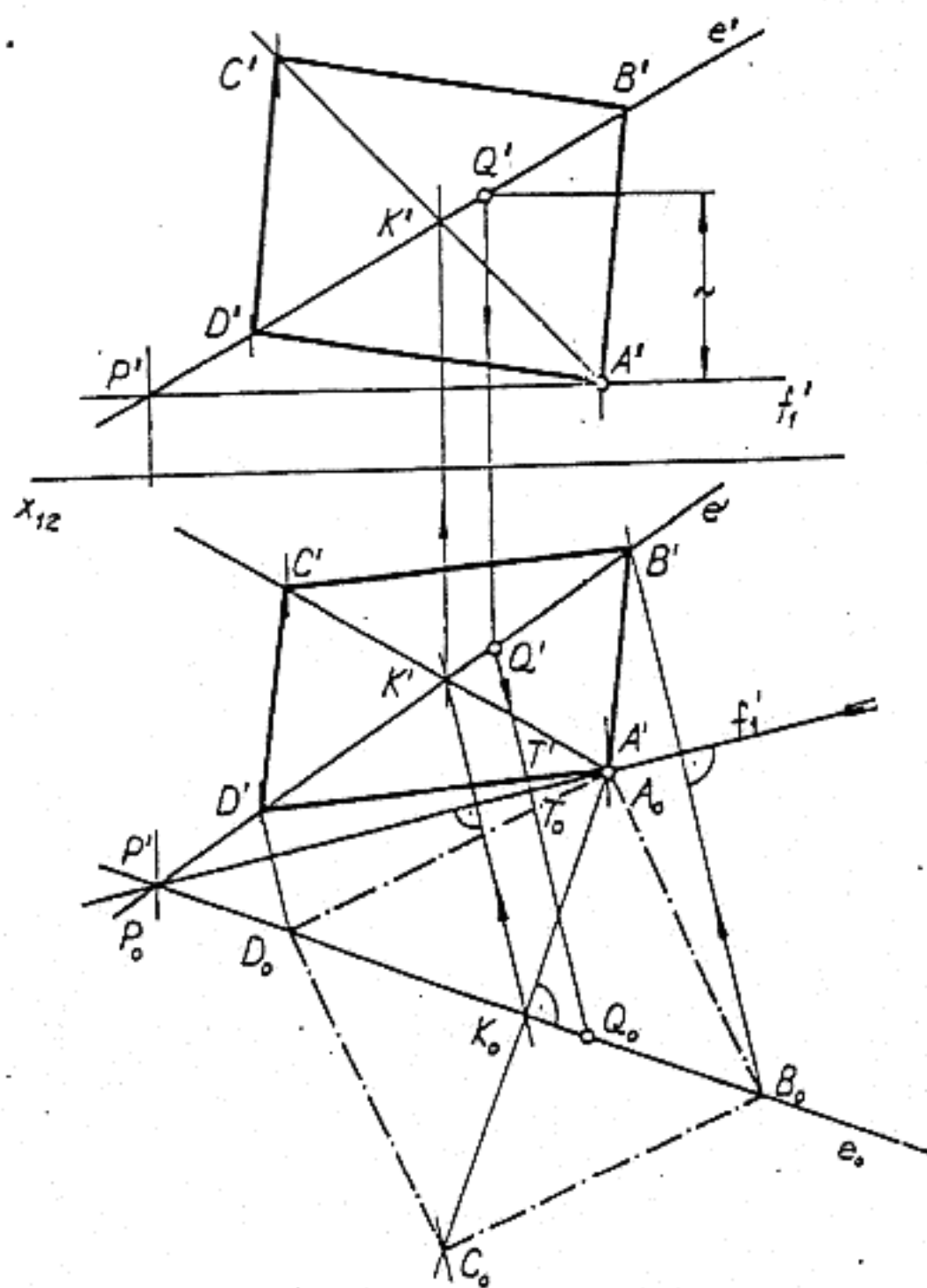
b



117.

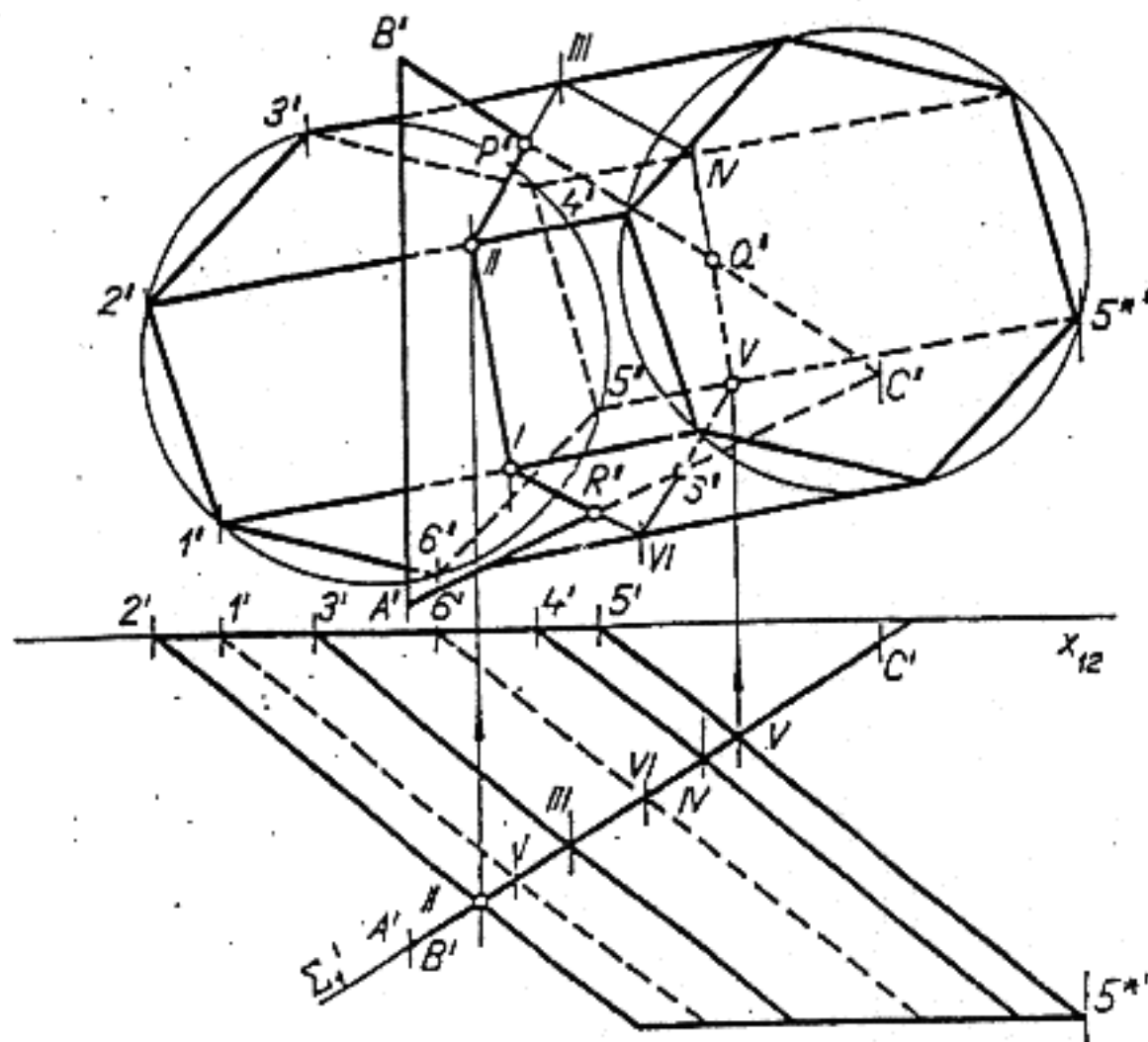


118.

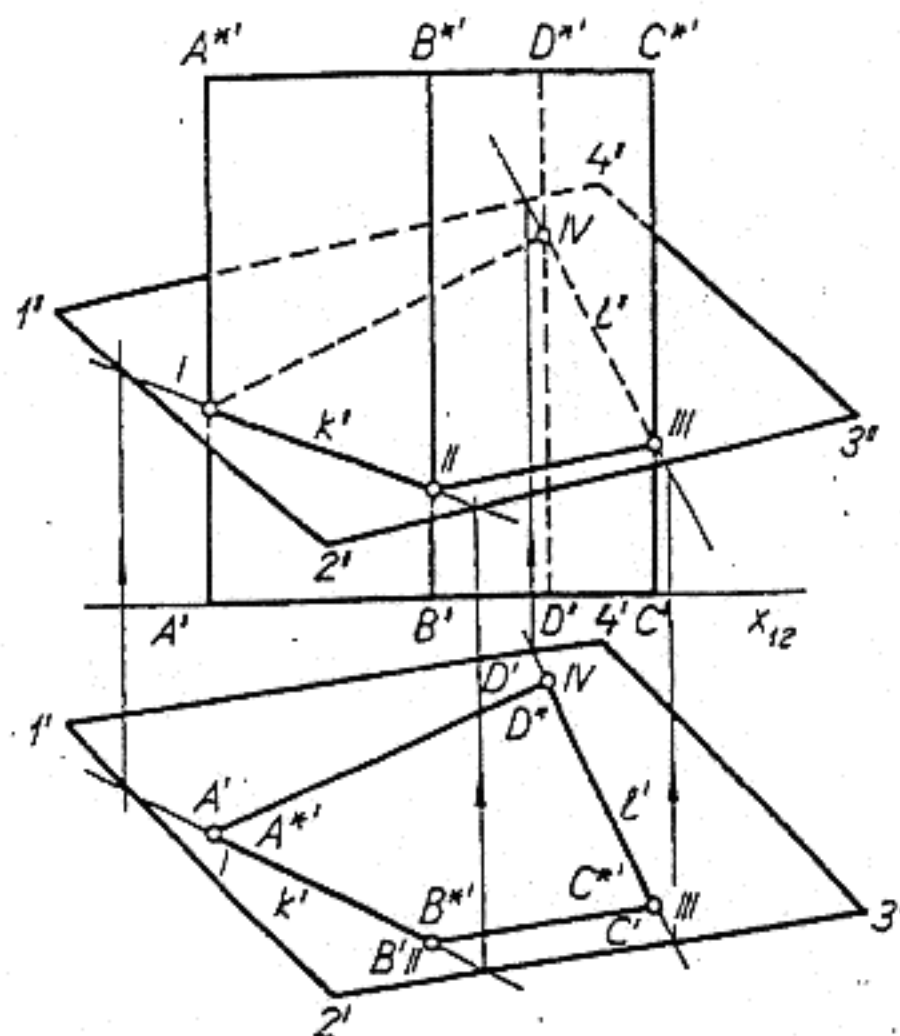


Hasáb síkmetszete

92.

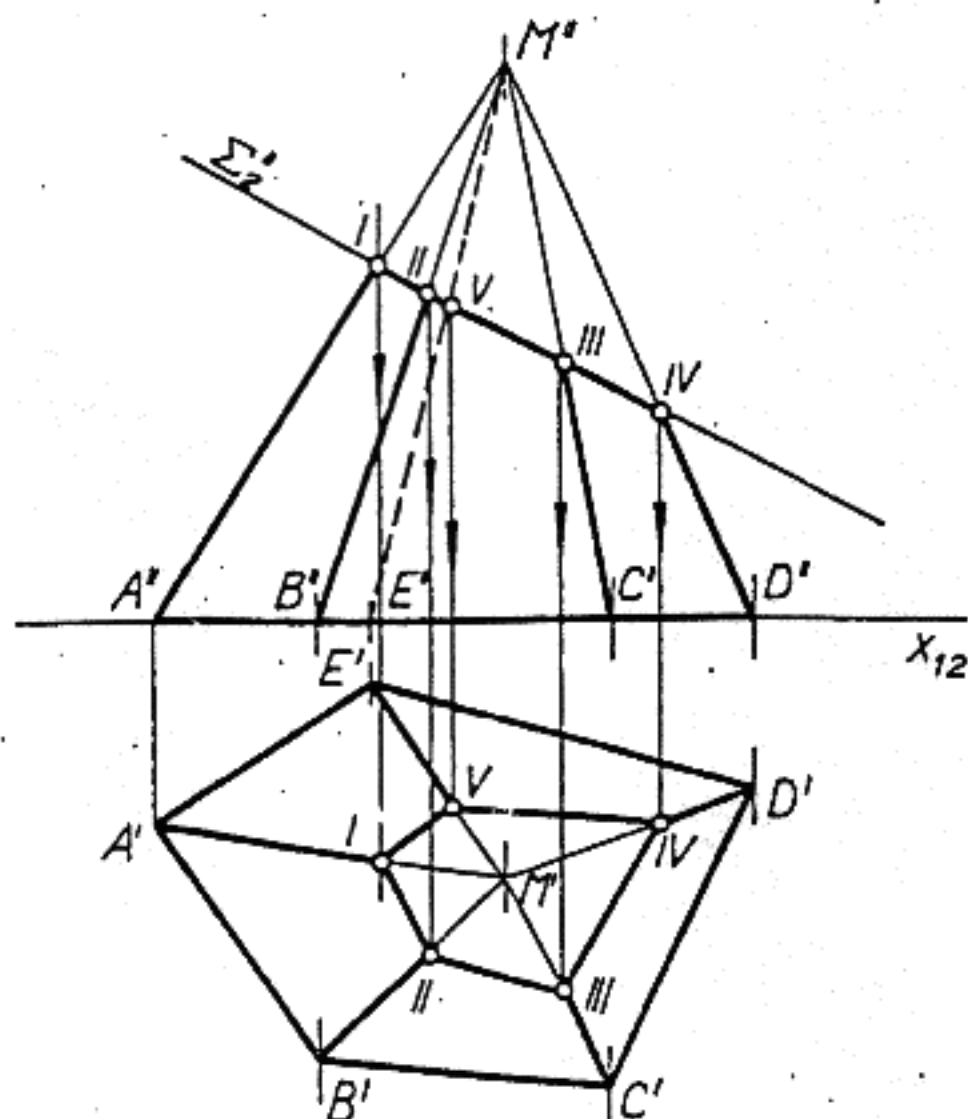


93.

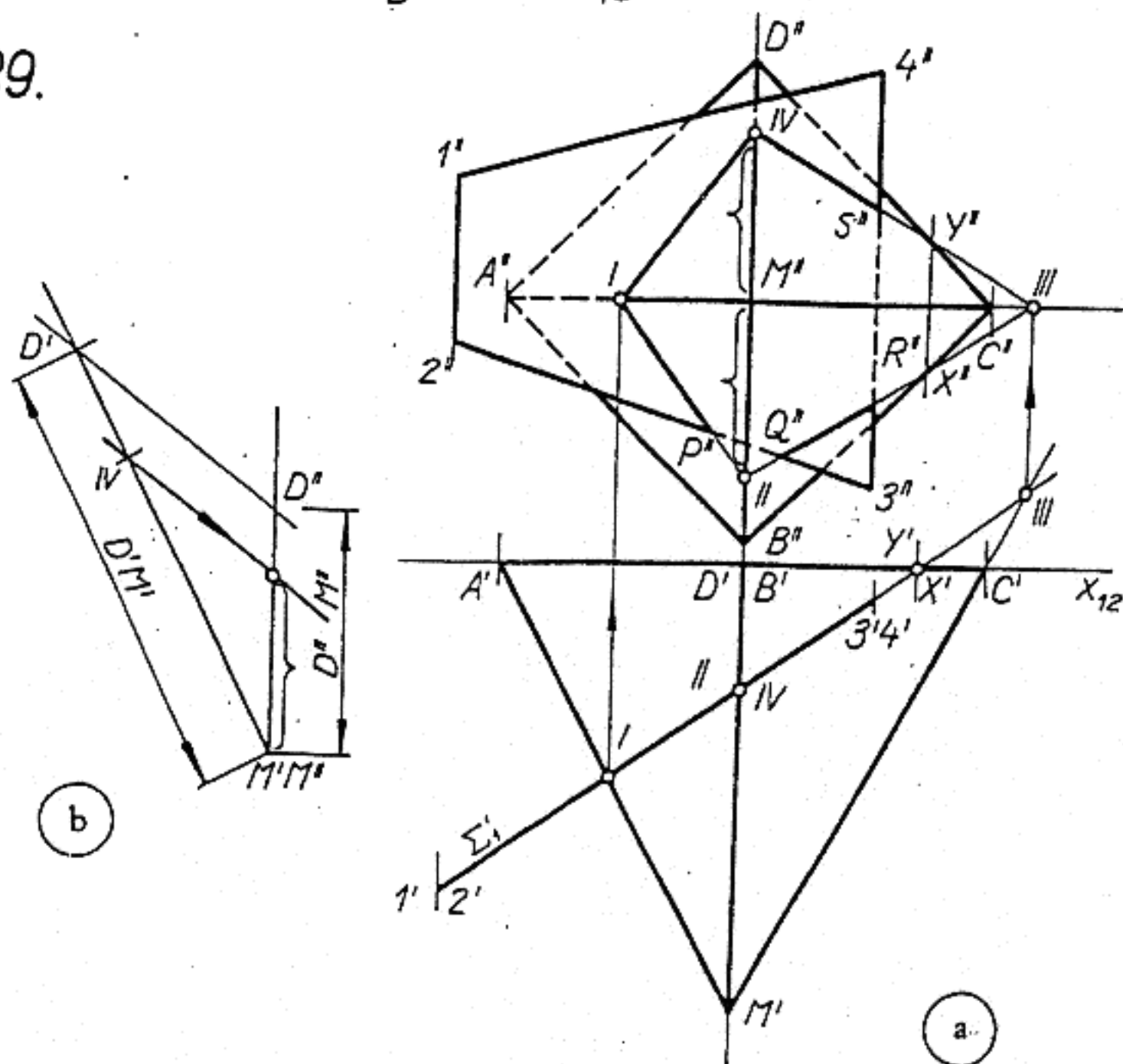


Göla síkmetszete

88.



89.



9.1 A gúla síkmetszete

9.1 a) A GÚLA SÍKMETSZETE VETÍTŐSÍKKAL

Adott az első képsíkon álló $M(ABCDE)$ ötoldalú gúla, alapja általános ötszög. Adott továbbá a gúlát metsző Σ_2 második vetítősík (Σ_2'' -vel).

(88. ábra)

Szerkesszük meg a Σ_2 -vel csonkolt gúla képeit!

A feladathoz a gúla és a vetítősík metszetét kell megszerkeszteni.

A gúla élének a Σ_2 vetítősíkkal alkotott dőféspontja a második képen kijelölhető. (Lásd 8.1 a) Egyenes és vetítősík dőféspontja.) Ezek a dőféspontok a metszet csúcsai: I, II, III, IV, V. (A metszet csúcsait római számokkal szoktuk jelölni, ekkor nem használjuk a képek ' illetve " jeleit.)

A csúcsponatok első képeit rendezőkkel kapjuk a megfelelő gúla él első képein. Ezután a csúcsponokat "megfelelő" sorrendben összekötjük. Például II és III összeköthető, mert mindkettő az MBC lapon van. Az I és a IV pontok nem köthető össze, mert a gúlának nem ugyanazon a lapján vannak.

Végül a láthatóság megrajzolásánál eltávolítjuk a gúla sík feletti részét. (Ügyeljünk a második képen nem látható ME élre.)

A 89. ábrán az $M(ABCD)$ szabályos négyoldalú gúla és az első vetítősíkban fekvő 1234 trapéz-lemez metszetét szerkesztettük.

A gúla alaplapja illeszkedik a második képsíkra. (Második vetülete egy négyzet két átlójával.) A gúla MB és MD élét profillegyenese, a trapéz alapjai vetítőegyenese.

A metszet szerkesztéséhez a trapéz Σ_1 első vetítősíkját használjuk. (Első képen meghosszabbítottuk a trapéz élben látszó képét, Σ_1' -t kaptuk.) Az él és a Σ_1 sík dőféspontjai az első képen kijelölhetők. (Az MC él meghosszabbítása III-ban dőfi a Σ_1 síkot.)

Az I és III dőféspontok második képeit rendezőkkel kapjuk. Az MB és MD profilélek dőféspontjainak második képét keressük meg a negyedik arányos szerkesztésével! (A szerkesztés a 89/b ábrán látható. Vö. 3.2 b) C) - profillegyenésre illeszkedő pont.)

A teljes síkmetszet az X II I IV Y ötszög, de ennek csak a trapéz-lemezen belüli részét tekintjük: az RQPI IV S hatszöget.

A trapéz lemez nem metszi a gúla minden élet, csak belevág a gúlába. A trapéz 23 oldala a P, Q pontokban, a 34 oldala az R, S pontokban dőfi a gúla lapjait.

A láthatóság megrajzolásánál a trapéz-lemezt átlátszatlannak tekintjük és vegyük figyelembe az előbbieket!

A Σ_1 sík a gúla alaplapját $[XY]$ első vetítőegyeneseben metszi. Így az $X'Y'X''Y''$ pontoknak egy rendezőn kell lenniük. Ezt felhasználhatjuk a szerkesztés ellenőrzésére!

1. A forgástengely a sík egy (első) főegyenese, amely a forgatásnál helybenmarad.

2. A sík minden más pontja egy körpályán mozog.

A kör síkja merőleges a tengelyre.

(Itt a kör síkja a Σ_1 első vetítősík, amelynek első képe az f_1 -re merőleges egyenes: $\Sigma_1' \perp f_1'$.)

Tehát a forgatásnál P' a Σ_1' egyenesen mozog.)

A kör középpontja a tengelyen van. ($O \in f_1$)

A kör sugara a P pont és a forgástengely távolsága ($r=PO$), amely a leforgatás után valódi nagyságban látszik. ($r=P'O=P'O'$)

A PO sugár valódi nagyságát a P, O pontok vetületeiből különbségi háromszöggel szerkesztjük. A különbségi háromszög egyik befogója: $P'O' = P' - f_1'$ másik befogója a P, O pontok második rendezőkülönbsége: $P'' - f_1''$.

A P pont forgássugarának valódi nagyságát tehát a P és az f_1 vetületeiből meghatározhatjuk. Ezután kijelölhetjük a P pont P_0 leforgatottját.

3. A sík leforgatásakor elég egy pontját leforgatni.

Egy leforgatott pont és a tengely meghatározzák a leforgatott síkot!

Oldjuk meg a következő feladatot a sík leforgatásával!

Adott az a és b metsző egyenesek két vetülete. Határozzuk meg a két metsző egyenes szögét (valódi nagyságban)! (116. ábra)

Forgassuk le a metsző egyenesek síkját az első képsíkkal párhuzamos helyzetbe. A leforgatott síkban a két egyenes szöge valódi nagyságban látszik.

A szerkesztés menete:

1. Felvesszük a forgástengelyt; az $[ab]$ sík egy első főegyenest: $f_1 \leftarrow [ab]$. (A tengely pontjai helybenmaradnak, így pl. $A' \equiv A_0$, $B' \equiv B_0$.)

2. Megkeressük a sík egy pontjának leforgatottját (itt pl. az M pontnak).

a) Merőlegest állítunk M -ből az f_1 forgástengelyre: $MT \perp f_1$, ahol $MT = r$ forgássugár. Ezek az első képen is merőlegesek: $M'T' \perp f_1'$

Az $|M'T'|$ egyenesen lesz az M pont leforgatottja az M_0 .

b) Megszerkesztjük az M pont forgássugarának valódi nagyságát. (116/b ábra)
(A különbségi háromszög egyik befogója $= M' - f_1' (= M'T')$; a másik befogója $= M'' - f_1''$;
az átfogó $= MT = r$ valódi nagyság.)

c) Felmérjük az $|M'T'|$ egyenesre a $T' = T_0$ pontból a forgássugár valódi nagyságát. Ezzel megkaptuk az M pont leforgatottját az M_0 -t. ($T_0 M_0 = r$)

3. Az f_1 tengely és az M_0 leforgatott pont meghatározzák a leforgatott síkot.

Tehát: a leforgatottja $a_0 = |M_0 A_0|$

b leforgatottja $b_0 = |M_0 B_0|$

A leforgatott egyenesek szöge = a két metsző egyenes szögének a valódi nagysága: $(a_0, b_0) \angle = (a, b) \angle$

Sík forgatása

1. A forgástengely a sík egy (első) főegyenese, amely a forgatásnál helybenmarad.

/ 115. ábra /

2. A sík minden más pontja egy körpályán mozog.

A kör síkja merőleges a tengelyre.

(Itt a kör síkja a Σ_1 első vetítősík, amelynek első képe az f_1 -re merőleges egyenes: $\Sigma_1' \perp f_1$.)

Tehát a forgatásnál P' a Σ_1' egyenesen mozog.)

A kör középpontja a tengelyen van. ($O \in f_1$)

A kör sugara a P pont és a forgástengely távolsága ($r=PO$), amely a leforgatás után valódi nagyságban látszik. ($r=P_0O=P_0'O'$)

A PO sugár valódi nagyságát a P, O pontok vetületeiből különbségi háromszöggel szerkesztjük. A különbségi háromszög egyik befogója: $P'O' = P' \vdash f_1'$ másik befogója a P, O pontok második rendezőkülönbsége: $P'' \vdash f_1'$.

A P pont forgássugarának valódi nagyságát tehát a P és az f_1 vetületeiből meghatározhatjuk. Ezután kijelölhetjük a P pont P_0 leforgatottját.

3. A sík leforgatásakor elég egy pontját leforgatni.

Egy leforgatott pont és a tengely meghatározzák a leforgatott síkot!

Oldjuk meg a következő feladatot a sík leforgatásával!

Adott az a és b metsző egyenesek két vetülete. Határozzuk meg a két metsző egyenes szögét (valódi nagyságban)! (116. ábra)

Forgassuk le a metsző egyenesek síkját az első képsíkkal párhuzamos helyzetbe. A leforgatott síkban a két egyenes szöge valódi nagyságban látszik.

A szerkesztés menete:

1. Felvesszük a forgástengelyt; az $[ab]$ sík egy első főegyenest: $f_1 \leftarrow [ab]$. (A tengely pontjai helybenmaradnak, így pl. $A' \equiv A_0$, $B' \equiv B_0$.)

2. Megkeressük a sík egy pontjának leforgatottját (itt pl. az M pontnak).

a) Merőlegest állítunk M -ből az f_1 forgástengelyre: $MT \perp f_1$, ahol $MT = r$ forgássugár. Ezek az első képen is merőlegesek: $M'T' \perp f_1$

Az $|M'T'|$ egyenesen lesz az M pont leforgatottja az M_0 .

b) Megszerkesztjük az M pont forgássugarának valódi nagyságát. (116/b ábra)

(A különbségi háromszög egyik befogója $= M' \vdash f_1' (= M'T')$; a másik befogója $= M'' \vdash f_1'$; az átfogó $= MT=r$ valódi nagyság.)

c) Felmérjük az $|M'T'|$ egyenesre a $T'=T_0$ pontból a forgássugár valódi nagyságát. Ezzel megkaptuk az M pont leforgatottját az M_0 -t. ($T_0M_0=r$)

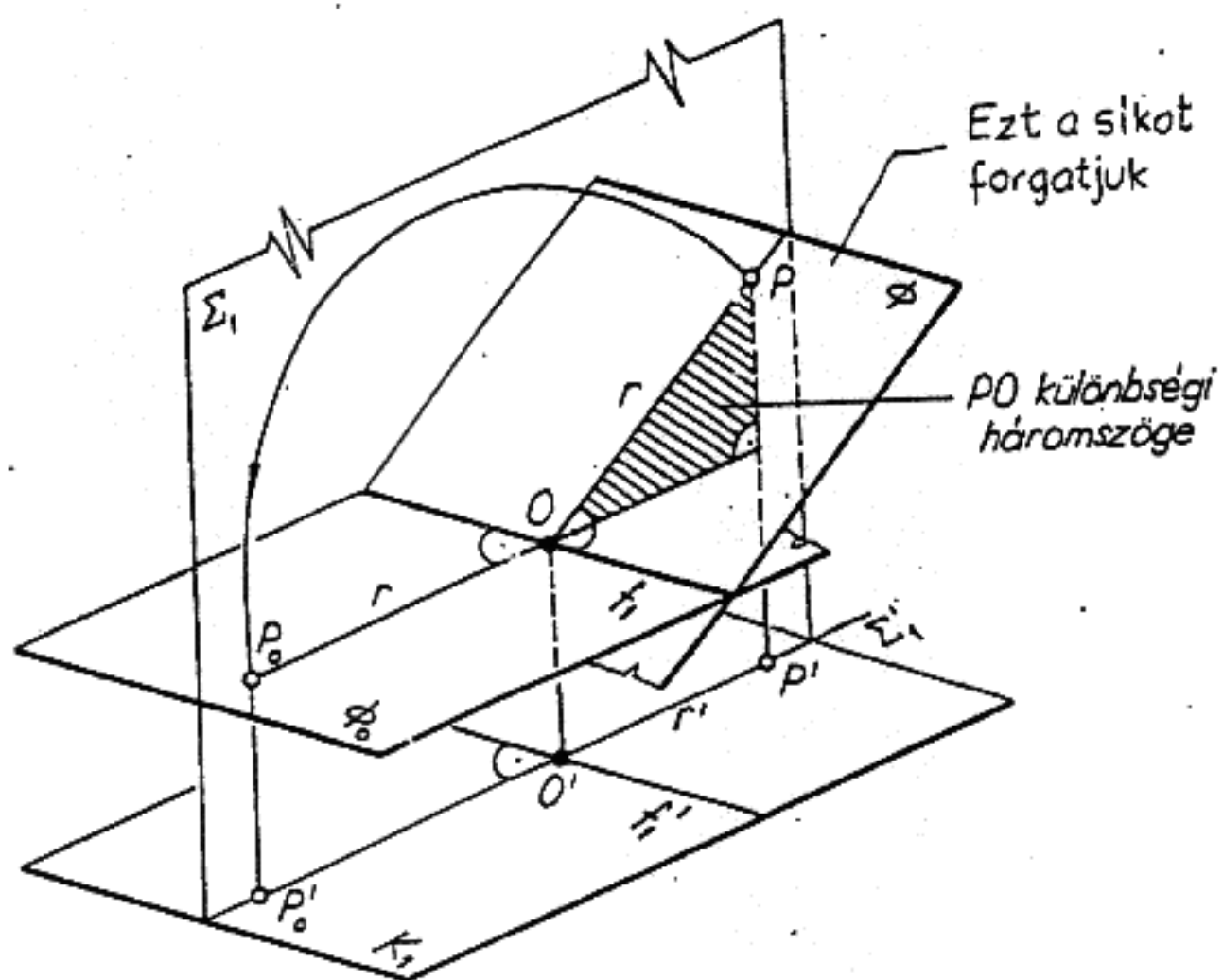
3. Az f_1 tengely és az M_0 leforgatott pont meghatározzák a leforgatott síkot.

Tehát: a leforgatottja $a_0 = |M_0A_0|$

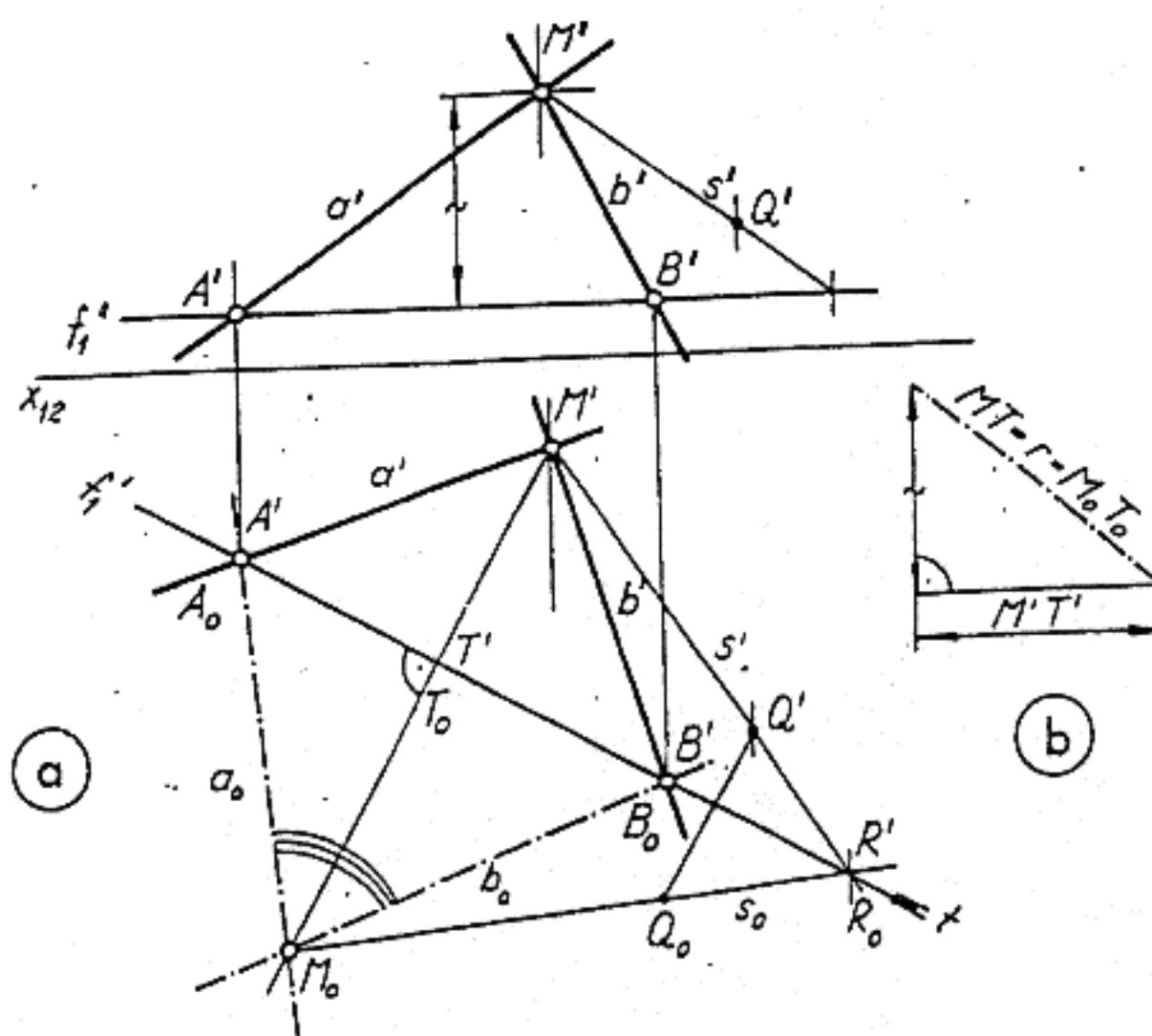
b leforgatottja $b_0 = |M_0B_0|$

A leforgatott egyenesek szöge = a két metsző egyenes szögének a valódi nagysága: $(a_0, b_0) \angle = (a, b) \angle$

115.



116.



Megjegyzés:

A feladatban a leforgatott sík vetületét szerkesztettük meg. Mivel ez fő sík, így alakzatai vetületben valódi nagyságban látszanak. Ezért a továbbiakban nem teszünk különbséget a "leforgatott vetülete" és a "leforgatott" között, nem használjuk a ' jelet sem.

Ha a sík egy pontjának megszerkesztettük a leforgatottját, akkor a többi pontját és egyenesét könnyű leforgatni. A 116. ábrán pl. az $[ab]$ sík egy tetszőleges Q pontjának leforgatását jelöltük. (Q képeit az s segédegyenessel vettük fel.)

A 117. ábrán az előző feladat leforgatásának egy részletét rajzoltuk meg.

Milyen kapcsolat van egy síkbeli alakzat vetülete és leforgatottja között?

a) A vetület minden pontjának egy leforgatott pont felel meg.

A vetület minden egyenesének egy leforgatott egyenes felel meg. ($M' \leftrightarrow M_0; Q' \leftrightarrow Q_0; s' \leftrightarrow s_0$)

b) Ha egy pont illeszkedik az egyenesre, akkor a leforgatott pont illeszkedik a leforgatott egyenesre; és fordítva. ($Q' \rightarrow s' \iff Q_0 \rightarrow s_0$)

Tehát párhuzamos egyenesek leforgatottjai is párhuzamosak egymással.

c) A pont vetületét és leforgatottját összekötő egyenes merőleges a tengelyre.

Tehát a megfelelő pontokat összekötő egyenesek párhuzamosak. ($Q'Q_0 \parallel M'M_0$)

d) Ha egy egyenes vetülete metszi a tengelyt, akkor a leforgatott egyenes ugyanabban a pontban metszi a tengelyt; és fordítva.

Tehát a tengellyel párhuzamos egyenes leforgatottja is tengellyel párhuzamos.

Két síkbeli rendszer ilyen kapcsolatát merőleges affinitásnak nevezzük. A t egyenes (korábban f_1) az affinitás tengelye, a megfelelő pontok összekötő egyenesei az affinitás sugarai (amelyek itt merőlegesek a tengelyre).

Tehát egy síkbeli alakzat vetülete és leforgatottja között a merőleges affinitás kapcsolata van. Az affinitást meghatározza a tengelye és egy megfelelő pontpár.

11.3 b) Sík visszaforgatása

Adott az e egyenes és az A pont két képe. ($A \xrightarrow{e}$) Szerkesszük meg annak a négyzetnek a vetületeit, amelynek az egyik átlója az adott e egyenesen van, és az egyik csúcsa az A pont. (118. ábra)

Az A pont és az e egyenes meghatározza a négyzet síkját.

Forgassuk le az $[Ae]$ síkot első képsíkkal párhuzamos helyzetbe! (Lásd 11.3 a))

Felvesszük a forgástengelyt; az $[Ae]$ sík f_1 főegyenését. ($A \rightarrow f_1 \Rightarrow A' \equiv A_0$)

Leforgatjuk az e egyenes tetszőleges Q pontját. (A szerkesztés az ábráról leolvasható.) Az e egyenes a P pontban metszi a tengelyt: $P' \equiv P_0$. A leforgatott Q_0 pont és a $P' \equiv P_0$ pont meghatározzák a leforgatott e_0 egyenest: $e_0 = [Q_0 P_0]$.

A leforgatott $[e_0 A_0]$ síkban megrajzoljuk a négyzetet valódi nagyságban. Felhasználjuk, hogy az A pontból e -re állított merőleges a négyzet másik átlóegyenese és K a négyzet középpontja ($AK = \frac{1}{2}$ átló).

Visszaforgatjuk az $A_0 B_0 C_0 D_0$ négyzetet!

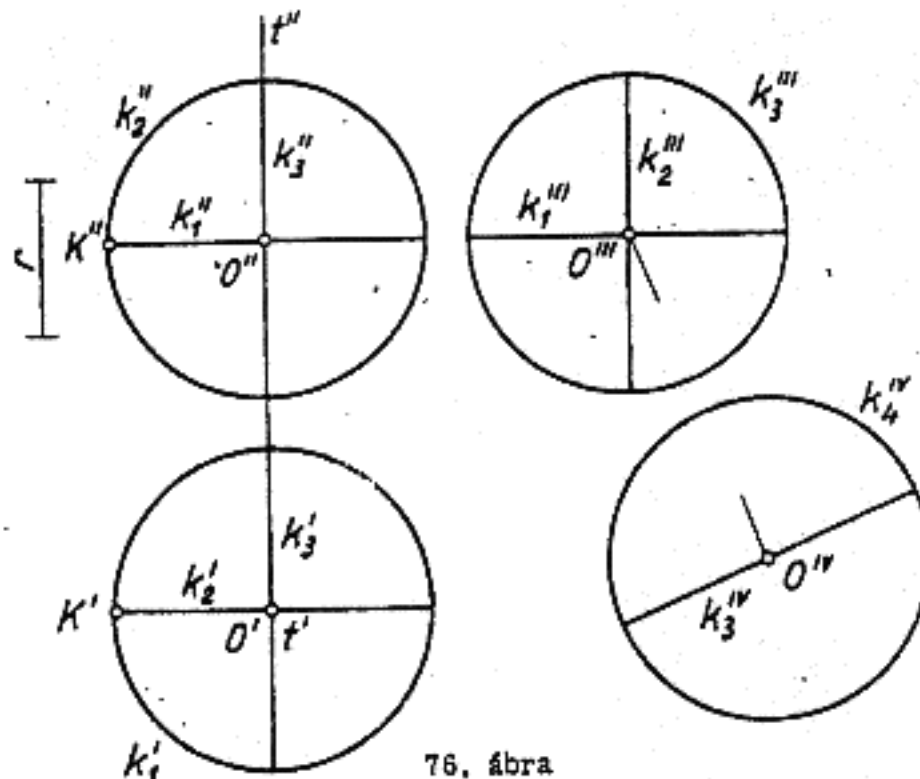
Az $A' \equiv A_0$; a B_0, D_0 pontok illeszkednek e_0 -ra, így a B', D' pontok az e' egyenesre illeszkednek.

A leforgatott pontokat és a vetületeiket tengelyre merőleges egyenesek kötik össze ($B_0 B' \perp f_1$ és $D_0 D' \perp f_1$).

Ugyanígy forgatjuk vissza a K_0 pontot. Az $[A' K']$ egyenesen kapjuk a C' pontot. Az első képekből rendezőkké jelöljük ki a második képet.

(Vegyük észre, hogy a négyzet mindkét képe paralelogramma, amelyeknek K' illetve K'' a szimmetria középpontja!)

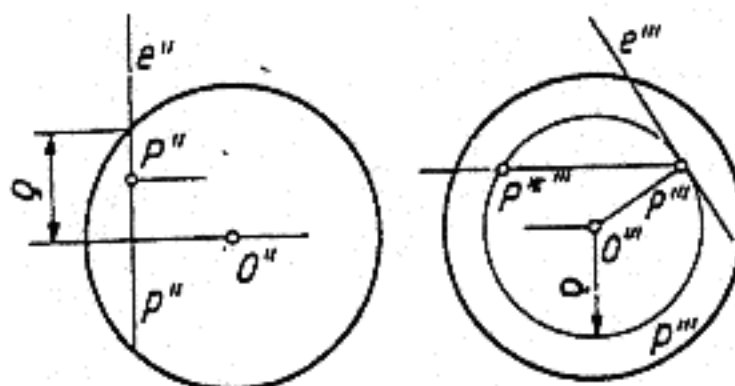
a) Rendezett merőleges vetület. A gömböt O középpontja és r sugara meghatározza. A 76. ábrán az első kontur a felület azon pontjainak a mértani helye, melyekben az érintősík első vetítősík. A t első vetítősugar körül forgó félkörnek a középponttól legtávolabbra eső K pontja (ebben ugyanis az érintősík első vetítősík) írja le a k_1 első konturkört. k_1 síkja O -n megy át, t -re merőleges és az első képsíkkal párhuzamos. k_1 -nek első képe az első képhatár az r sugaru k_1' kör. k_1 második képe vízszintes átmérőben látszik. Ha t -t második, illetőleg harmadik vetítősugárnak választjuk, értelem-szerűen kapjuk a k_2 és k_3 konturokat és azok vetületeit a második és harmadik képhatárt. A gömb rendezett vetületei tehát a gömbsugárral egyenlő sugaru körök. Ezeket a köröket olyan körhengerek metszik ki a képsíkokból, melyek a gömböt érintik. A gömb merőleges vetülete a gömb sugarával egyenlő sugaru kör. Egyszerűen úgy is mondhatjuk, hogy a gömb "képe" kör (pl. a negyedik kép). (A körök természetesen nem ugyanannak a gömbi körnek a képei!) A gömböt egy-egy konturkör két félgömbre, két konturkör négy negyed-gömbre és a három konturkör nyolc nyolcadgömbre osztja. Egy-egy képen a



76. ábra

31. Gömbfelületi pont, érintő, érintősík, normális

A 79. ábrán második és harmadik képével adjuk meg a gömböt. Ábrázoljunk felületi pontot. A P pont második képét P'' -t a második képhatáron belül vesszük fel. Felületen pontot a ponton átmenő felületi vonal segítségével ábrázolunk. Gömb esetében olyan vonalat választunk, mely a képeken könnyen rajzolható. Ilyen a képsíkkal párhuzamos síkban fekvő kör. Az ábrán a harmadik képsíkkal párhuzamos p kört rajzoljuk meg. p'' a P'' -n átmenő húrban és p''' az O''' körül rajzolt p sugaru körben látszik.



79. ábra

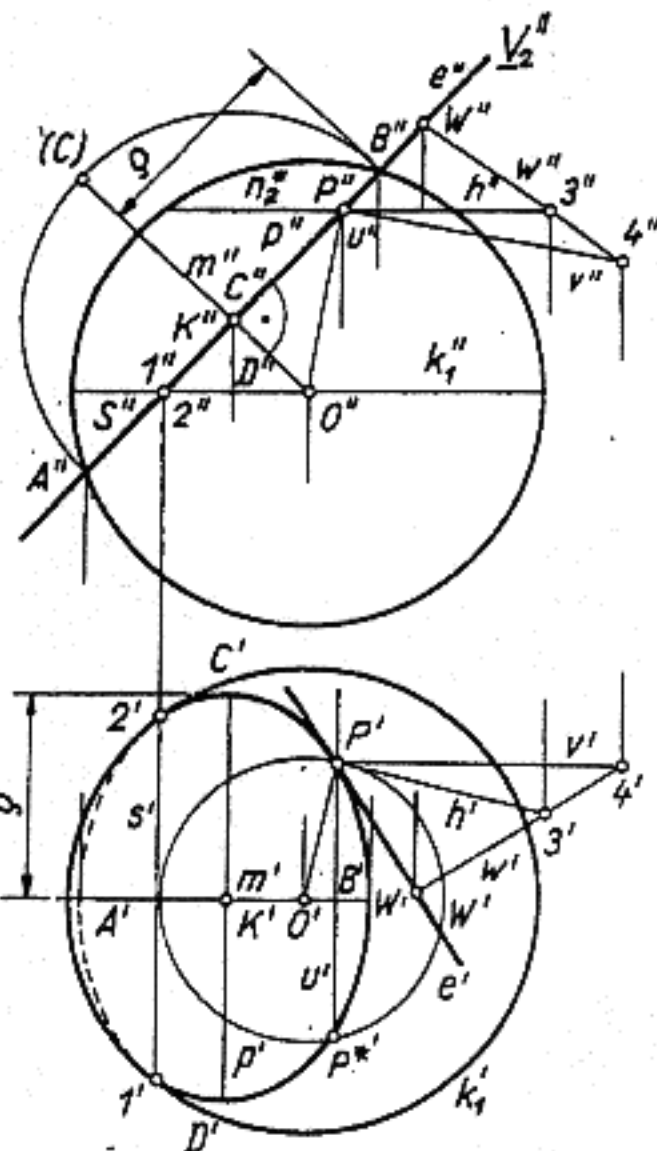
32. A gömb síkmetszése

A 81. ábrán a gömböt V_2 második vetítősíkkal metszjük. A ρ sugaru körmetszet második képe az $A''B''$ egyenesben látszik, mely a képhatárkör burja. A kör K középpontját a síkból az O -n átmenő és a síkra merőleges m egyenes metszi ki. A második kontursík előtti félkört AB körül főállásba forgatjuk. A -ban és B -ben is az érintősík második vetítősík és így bennük a körérintők második vetítésugarak. A velük párhuzamos CD társátmérő az első képen $A'B'$ -re merőleges és valódi (körátmérő) nagyságban látszik. A kör első képe ellipszis, melynek kis-, illetve nagytengelye $A'B'$, illetve $C'D'$. (v. 8. II. 23.)

A metszetnek a k_1 első konturra eső 1 és 2 pontjait a kontursík és metszősík e metszésvonala metszi ki k_1 -ből. (v. 8. II. 28.) Mivel A az alsó félgömb pontja, azért az 1A2 iv az első képen nem látszik.

A síkmetszet egy általános P pontját a tetszőlegesen felvett n_2^* vízszintes síkban keressük fel. A sík a gömböt a p körben, és a metszősík az u egyenesben metszi. p -ből u metszi ki a síkmetszet P és P^* pontjának első képét. A síkmetszés P -beli e érintője a P -beli érintősíkban van és második képe e'' az n_2 -ben látszik. Az e' első képet az érintősík h és v fővonala segítségével szerkesztjük. A w segédegyenes e -t a W -ben metszi és ennek W' első képén megy keresztül e' .

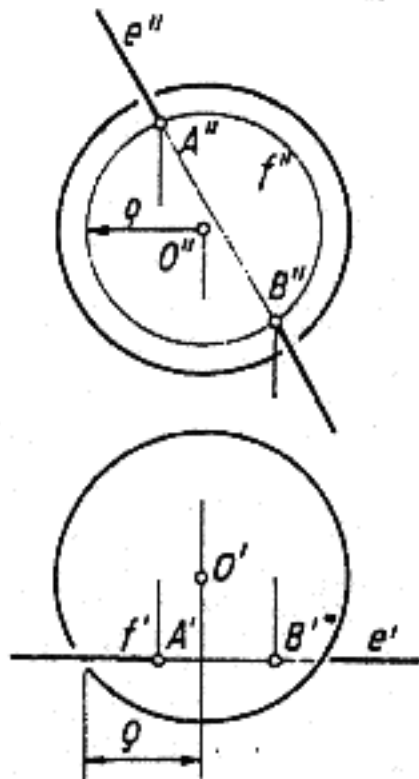
Ha a metszősík általános helyzetű, akkor külön az első és külön a második képhez olyan új képet rendezünk, amelyen a metszősík vetítősík és a kör átmérőben látszik.



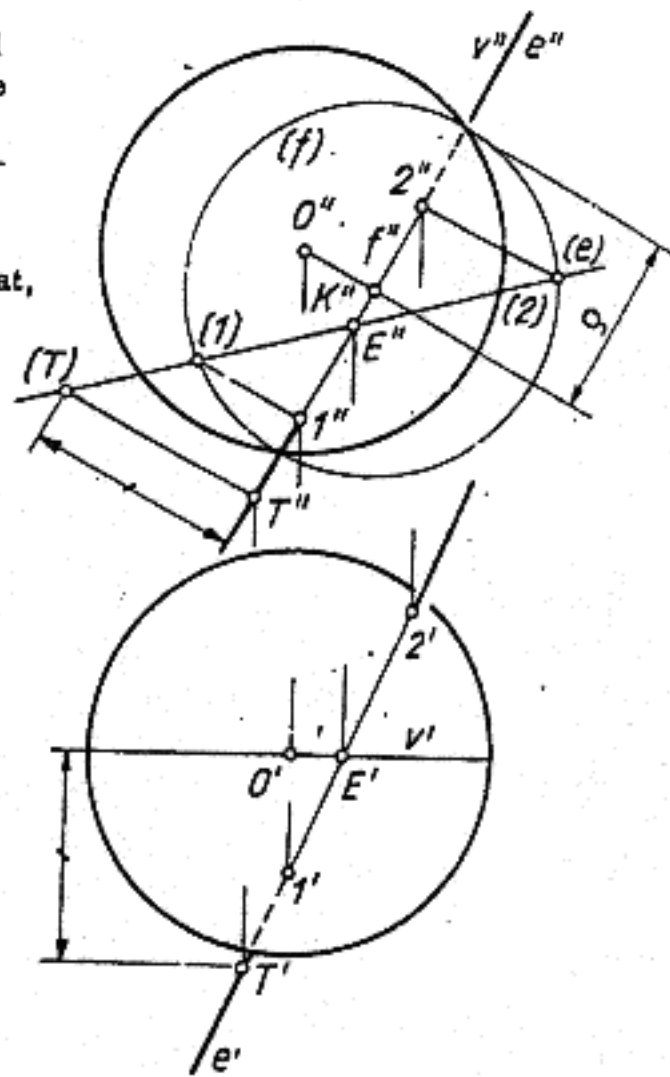
81. ábra

33. Gömb és egyenes metszéspontja

A 83. ábrán gömb és az általános helyzetű e egyenes metszéspontját szerkesztjük meg. A gömbön az e egyenessel második fedésben az f kört találjuk. A kör a második képen az f'' átmérőben látszik. A kör első képe ellipszis, mely e' -t a keresett metszéspontok első képeiben metszi. Ennél a szerkesztésnél egyszerűbb, ha f második vetítősíkját a kör v átmérője körül f -el és e -vel együtt második főállásba forgatjuk. Itt K'' körül ρ sugárral megrajzoljuk (f) -et. v első képe O' -n megy keresztül és vízszintes. Ez metszi e' -t a helybenmaradó E pontjának első képében, (e) tehát egyrészt az E' -n, másrészt e tetszőleges T pontjának leforgatásán, (T) -n megy keresztül. A főállásban (f) -ből (e) metszi ki az (1) és (2) pontokat,



82. ábra

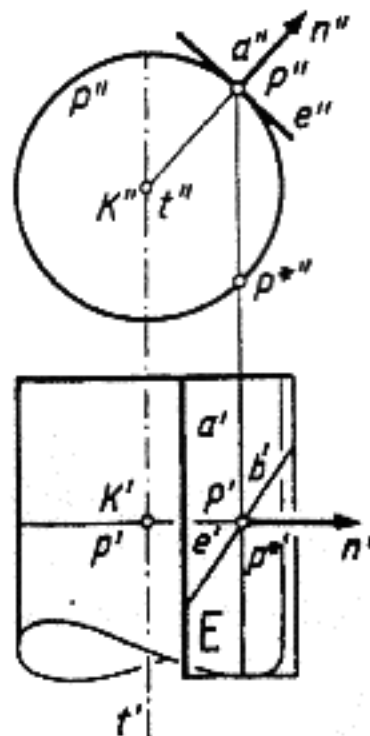


83. ábra

A 82. ábrán gömb és a második képsíkkal párhuzamos e egyenes metszéspontjait szerkesztjük meg.

Az e -n átmenő segédsík célszerűen 1 vetítősík, amely a ρ sugarú kört metszi ki a gömbből.

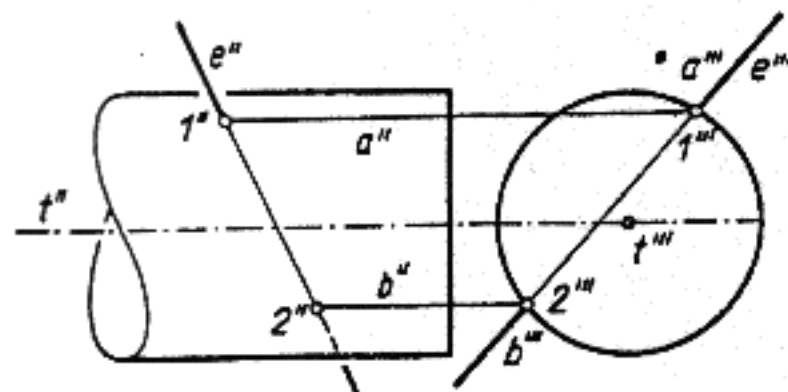
A 91. ábrán második vetítőhengert ábrázolunk. A felületen levő P pont második képe P'' a vezérkörre esik, mert a henger a második képen körben látszik. Az első képét P' -t az a' alkotón bárhol felvehetjük. A P -n átmenő hengerkör az első képen a p' átmérőben látszik. Az E érintősíkot P -ben az a alkotó és a p kör e érintője határozza meg. Az érintősík második vetítésik és e'' -ben látszik. Az n normális E -re merőleges és t -t a p kör K középpontjában metszi. Az E sík tetszőleges b egyenese a henger egyik érintője, P -vel első fedésben van P^* az alsó félhengerre eső pont.



91. ábra

39. Forgáshenger és egyenes metszéspontja

A 92. ábrán harmadik vetítőhengert és az e egyenes metszéspontját határozzuk meg. Az e -n átmenő segéd sík legyen célszerűen harmadik vetítésik. A sík az e''' egyenesben látszik és a hengerből az a és b alkotókat metszi ki. Az alkotók e -t az 1 és 2 metszéspontokban találják. 1 a második képsíkra nézve látható- és 2 nemlátható félhengeren van, tehát e' az 1'-ig és lent csak a képhatártól látszik.



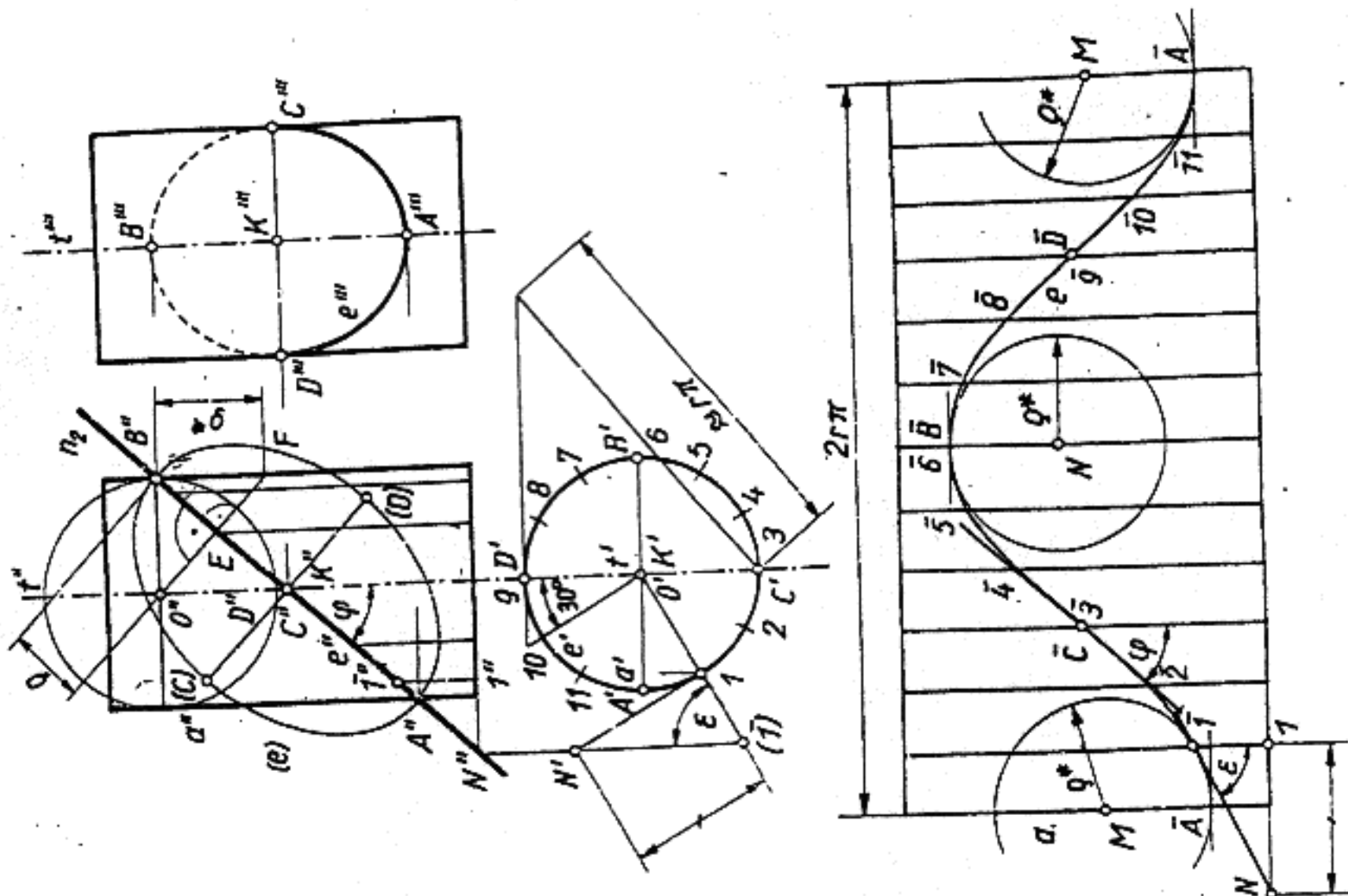
92. ábra

40. Forgáshenger síkmetszése, síkbaterítés

a) Metszés vetítésikkal és síkbaterítés. A 93. ábrán a vízszintes síkon álló forgáshengert az n_2 egyenesben látszó második vetítésikkal metsszük. Mivel n_2 a t -vel zérustól különböző φ szöget zár be, azért a sík a henger valamennyi alkotóját metszi. A metszet az e ellipszis. (Forgáshenger hiperbolában, illetőleg parabolában nem metszhető!) e a második képen az $A''B''$ átmérőben és az első képen a vetítőhenger vezérkörében látszik. A metszősík a K középpontot t metszi ki. A második képen AB valódi nagyságban látszik. Ez a leghosszabb átmérő. Az AB szakasz az ellipszis egyik tengelye, mert végpontjaiban az érintők, melyek második vetítésugarak, rá merőlegesek.

CD a másik tengely, mely AB -re merőleges és a második képen K'' -ben pontként jelenik meg. A CD körül forgó sík minden metszetében CD rövidebb, mint a hozzátartozó AB , azért AB a nagy- és CD a kistengely. A forgáshenger minden ellipszis metszetének kistengelye a henger átmérőjével (vezérkörátmérő) egyenlő hosszú. A nagytengely pedig a henger tengelyének a metszősíkra eső merőleges vetületén van. A harmadik kép ellipszis tengelyei $A'''B'''$ és $C'''D'''$. A látható félhengerre esik a $D'''A'''C'''$ fél-ellipszis. Az ellipszist AB átmérője körül második főállásba forgatjuk és megrajzoljuk valódi nagyságát.

A henger síkbaterítésekor az alap- és fedőkör közötti palástot az A -n átmenő a alkotó mentén felvágva gondoljuk. A palástot belső oldalával fektetjük a rajz síkjára. A palást kiterítése téglalap, melynek egyik párhuzamos oldalpárja az a alkotóval, a másik az alapkör kerületével egyenlő. Az alapkör r φ félkerületét az ábrán közelítően szerkesztjük meg. (v. ö. II. 6.) Azután az e metszetet rajzoljuk a palástira. Ezt az e görbét pontonként rajzoljuk meg. Osszuk fel az alapkört pl. tízenkét egyenlő részre. Az így kapott 12 egyenlő elosztású alkotót rajzoljuk meg a kiterítésben. Az alkotóknak az alapkör és a metszet közötti szakaszait a második képen vehetjük közvetlenül körzöbe. Azután mérjük fel azokat a kiterítésben a megfelelő alkotókra.

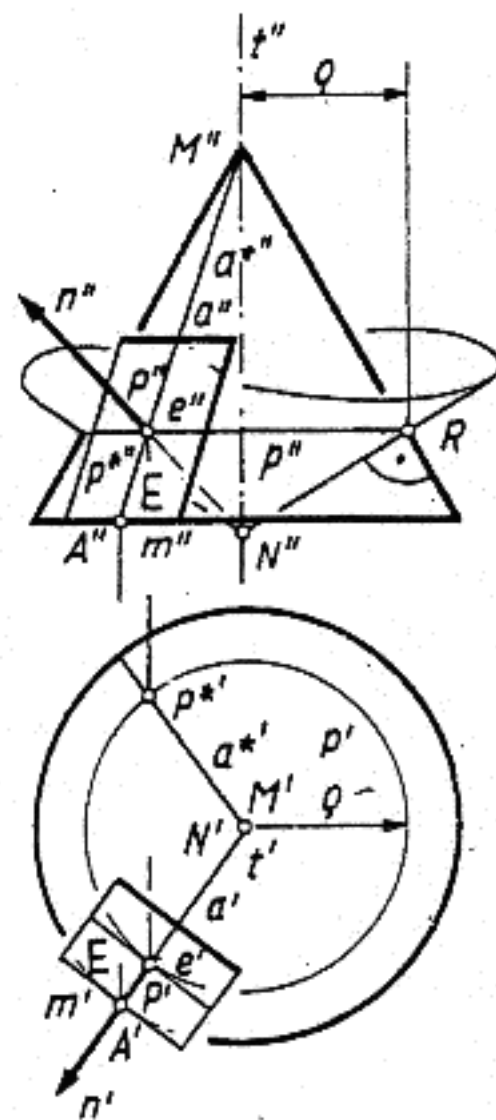


93. ábra

FORGÁSKUP

Felületi pont, érintő, érintő sík, normális

A 101. ábrán vízszintes síkon álló forgáskupot ábrázolunk. A felületen levő P pont P' második képét a képhatáron belül tetszőlegesen vesszük fel. Első képét vagy a rajta keresztülmennő a alkotó, vagy a p paralel kör segítségével keressük fel. Az a'' -ben látszó második vetítés a kupból két alkotót metsz ki. Az a -val fedésben levő a^* a második képen nem látható félkupon van. Az első képeket e szerint rajzoljuk meg. A kupon P -vel P^* második fedésben van. p -nek második képe körátmérőben, első képe q sugaru körben látszik. P -ben p -nek, de a kupnak is e érintője. Mivel a -ra merőleges, azért p az a -t merőlegesen metszi. A kupon az alkotók és a párhuzamos körök egymást merőlegesen metsző két vonalseregét alkotják. P -ben az E érintő síkot a és e határozza meg. Az a -menti E érintő sík a vezérkör síkját az A talpponthez tartozó m érintőben metszi. Az n normális P -ben E -re merőleges. Első képe n' a sík e első fővonalának e' első képére és n'' a sík második fővonalának második képére merőleges.



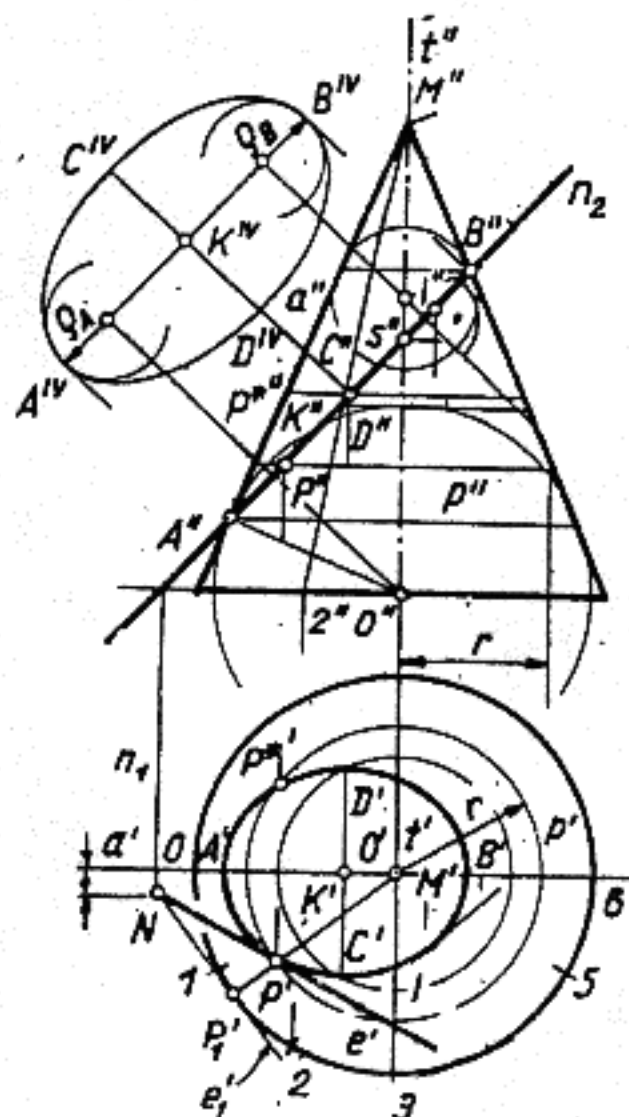
101. ábra

a) Forgáskúp ellipszis metszete A 104. ábrán vízszintes síkon álló forgáskupot az n_2 -ben látszó második vetítősíkkal (a $\varphi > \beta$ esetben) ellipszisen metsszük.

A metszet érintője mind A_1 mind B_2 -ben - második vetítősíkok metszészvonala - második vetítősugár. AB a nagytengely (v.ö. IL 14.) és a felezési pontjuk K az ellipszis középpontja. A középpont nincs a kup tengelyén! K -n megy át a második vetítősugárra eső kistengely. A tengelypontok C'' és D'' képei K'' -vel fedésben vannak. A második képen a metszet az $A''B''$ -ben látszik és kettősvetület. A metszet nagytengelye a síknak arra az egyenesére esik, amelyik a kup tengelyének merőleges vetülete. Esetünkben AB .

Az első kép egyik tengelye $A'B'$ (nagytengely), mert a $C'D'$ társátmérő első képe rá merőleges. A C és D első képét a rajtuk keresztülmenő kupkörrel szerkesztjük. A tengelyek ismeretében az ellipszis első képét meg-rajzoljuk.

A síkmetszés tetszőleges P pontját a rajta átmenő p kupkör segítségével szerkesztjük. A P'' -höz tartozó rendezőből az O'' körül r sugárral rajzolt p'' kör metszi ki P'' -t és P''^* -t. P -ben az e érintő a metszősík és a P -beli érintősík metszészvonala. Az alapékkot e abban az N pontban metszi, mely az alap- és metszősík n_1 és az alap- és a P -beli érintősík e_1 metszészvonalaiknak közös pontja.



104. ábra

d) Parabola metszet. A 107. ábrán vezérkörével a vízszintes síkon álló forgáskupot metsszük parabolában. Az a sík metsz a kupból parabolát, melyre nézve $\varphi = \beta$

A síknak tehát valamelyik érintősíkkal kell párhuzamosnak lenni. Válasszuk - egyszerűség kedvéért - a baloldali b második konturalkotó menti érintősíkkal párhuzamosan az n_2 egyenesben látszó metszősíkot. A második kontursík - az a és b alkotó összekötő síkja - a kupnak és a metszetnek szimmetria síkja. Ez metázi ki a metszősíkban a parabola s tengelyét. Ezen van az A csúcspont. A második kép kettősvetület. Az első képnek a parabola vezérkörére eső 1 és 2 pontjait a vezérkörből n_1 metszi ki. A parabola egy általános P pontját az n_2^* -ben látszó és kört metsző segéd-síkkal szerkesztjük. A p kör első képét t' körül r sugárral rajzoljuk meg. Ebből met-

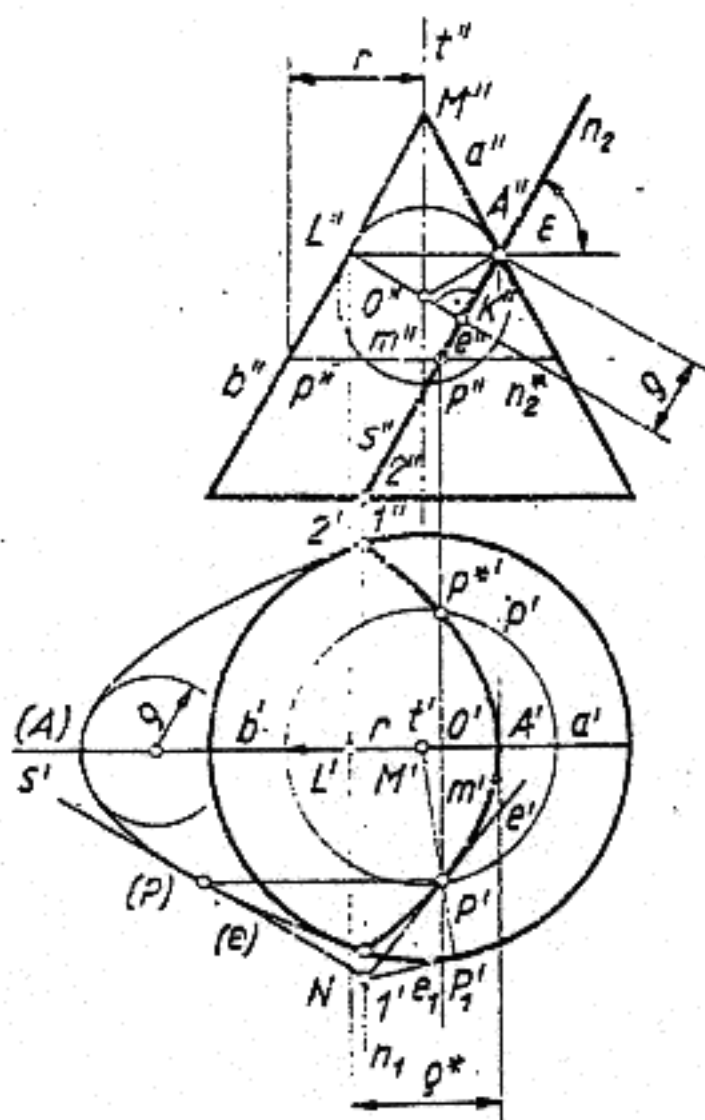
szik ki P' -t a síkok m met-

szészvonalaának m' első képe.

Természetesen s' -re szim-

metrikusan kapjuk még P'' -t is. A P -beli e érintő: a vezérkör síkján levő N pontja segítségével rajzoljuk meg. A P -beli érintősík e_1 és a

metszősík n_1 nyomai metszik egymást N -ben.



107. ábra

metrikusan kapjuk még P'' -t is. A P -beli e érintő: a vezérkör síkján levő N pontja segítségével rajzoljuk meg. A P -beli érintősík e_1 és a metszősík n_1 nyomai metszik egymást N -ben.

Rajzfeladatok

Ábrázoló Geometriából a főiskolai szintű elsőéves gépészmérnök hallgatók számára

1. Síkidomok metszése

Szerkessze meg a GY1. feladatlapon szereplő két-két síkidom metszései közül valamelyiket (csak egyet), majd ábrázolja láthatóság szerint!

2. Poliéder ábrázolása

Ábrázolja a GY2. feladatlapon szereplő gúlát láthatóság szerint!

3. Poliéder ábrázolása és síkmetszése, síkmetszetének valódi nagysága

Ábrázoljon egy első képsíkon álló négyzet alapú egyenes gúlát! A gúla alapnégyzetének oldalhossza $a=60\text{mm}$, s egyik oldalpárja 30° -os szöget zár be a második képsíkkal. A gúla magassága $m=60\text{mm}$. (A gúla csúcsát jelölje M , az alapnégyzet leginkább balra eső csúcsa A , és az óramutató járással megegyező irányban a többi csúcs legyen B, C, D .)

Messe a gúlát az $S(FGH)$ síkkal! (F az AD él felezőpontja, G a BM él felezéspontja és H a CD él C -hez közelebbi harmadolópontja.)

Ábrázolja láthatóság szerint az alapsík és a metszősík közötti gúlatestrészt! Készítse el az $(FGHIJ)$ metszet valódi nagyságát,

4. Képsíktranszformáció alkalmazása méretfeladatok megoldásánál

Adott a PQR alapú M csúcspontú gúla. (A felvétel a GY4. lapon szerepel)

Szerkessze meg (képsíktranszformáció alkalmazásával):

- a PRM oldallap valódi nagyságát a második képsíkhöz kapcsolt új képsík segítségével,
- a PM és RM élek α szögének valódi nagyságát,
- a PQR és PRM lapok által bezárt β szög valódi nagyságát,
- a PQ és RM élek t távolságát,
- az R csúcsnak a PQM laptól mért d távolságát!

5. Kör ábrázolása

Rendezett nézeteken adjon meg egy általános helyzetű síkban fekvő háromszöget úgy, hogy oldalai horizontális és frontális fővonalak és általános helyzetű egyenes legyenek. Ábrázolja a háromszögbe írható körnek a képeit!

Szerkessze meg a kör azon átmérőinek a képeit, amelyek az első- és második képellipszisek kis- és nagytengeletét képezik! (A körképeket hiperoszkuláló körök segítségével rajzolja meg!)

6. Kúp síkmetszése (GY6)

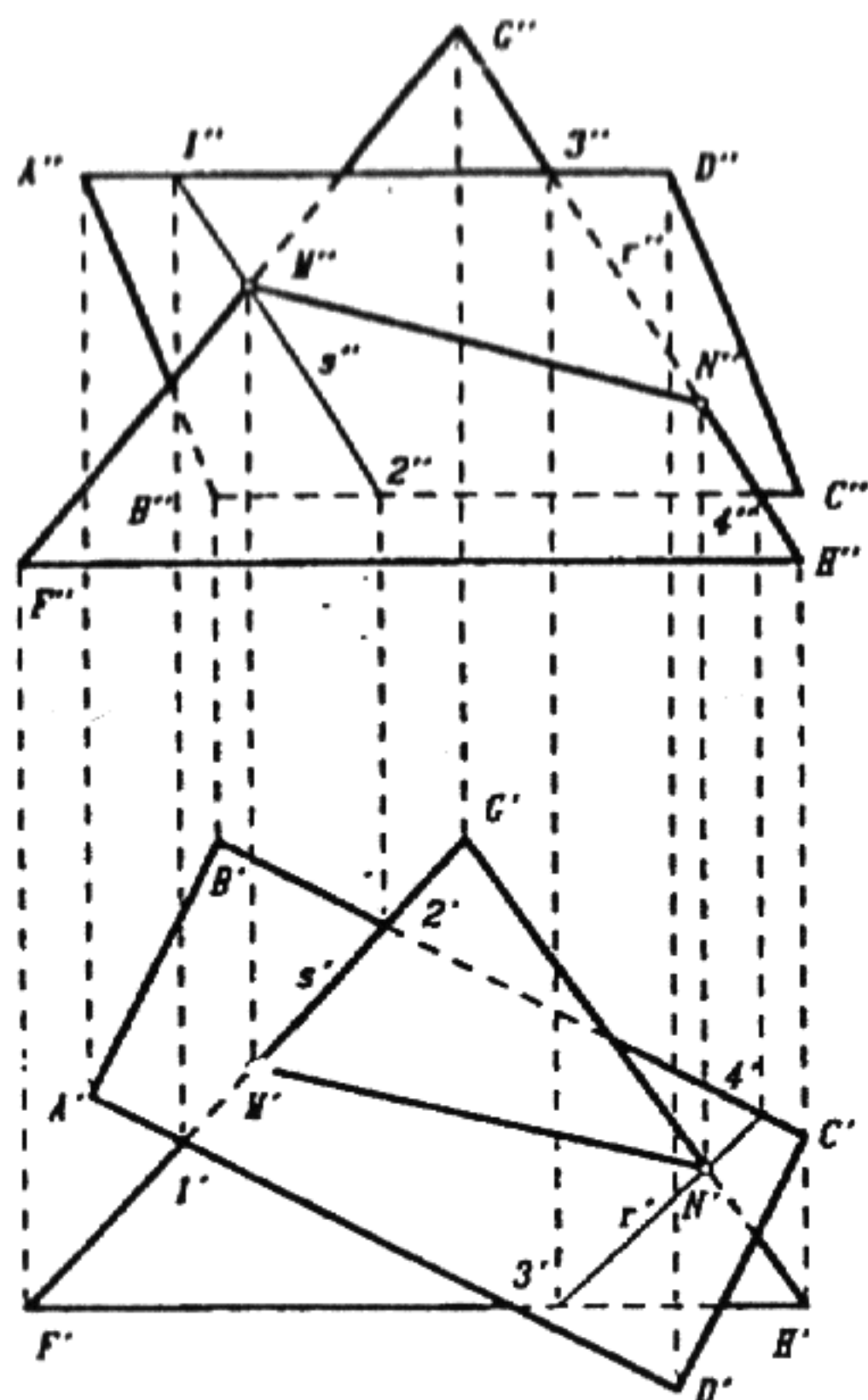
Rendezett nézeteken ábrázoljon egy első képsíkon álló forgáskúpot, majd egy második vetítősíkkal messe el ellipszisben! Szerkessze meg a metszet tengelyeinek képeit, a metszet néhány pontját, s rajzolja meg az ellipszist! Transzformációval készítsen olyan új nézetet ahol a görbe valódi nagyságban jelenik meg.

A feladatokat A4 formátumú rajzlapon a kiadott keretezési és feliratozási minta alapján ~~az 1. és 6. feladatot~~ ~~pauszon tussal kihúzva~~ a 2. 3. 4. 5. feladatot ceruzával kell elkészíteni és beadni az előírt határidőig.

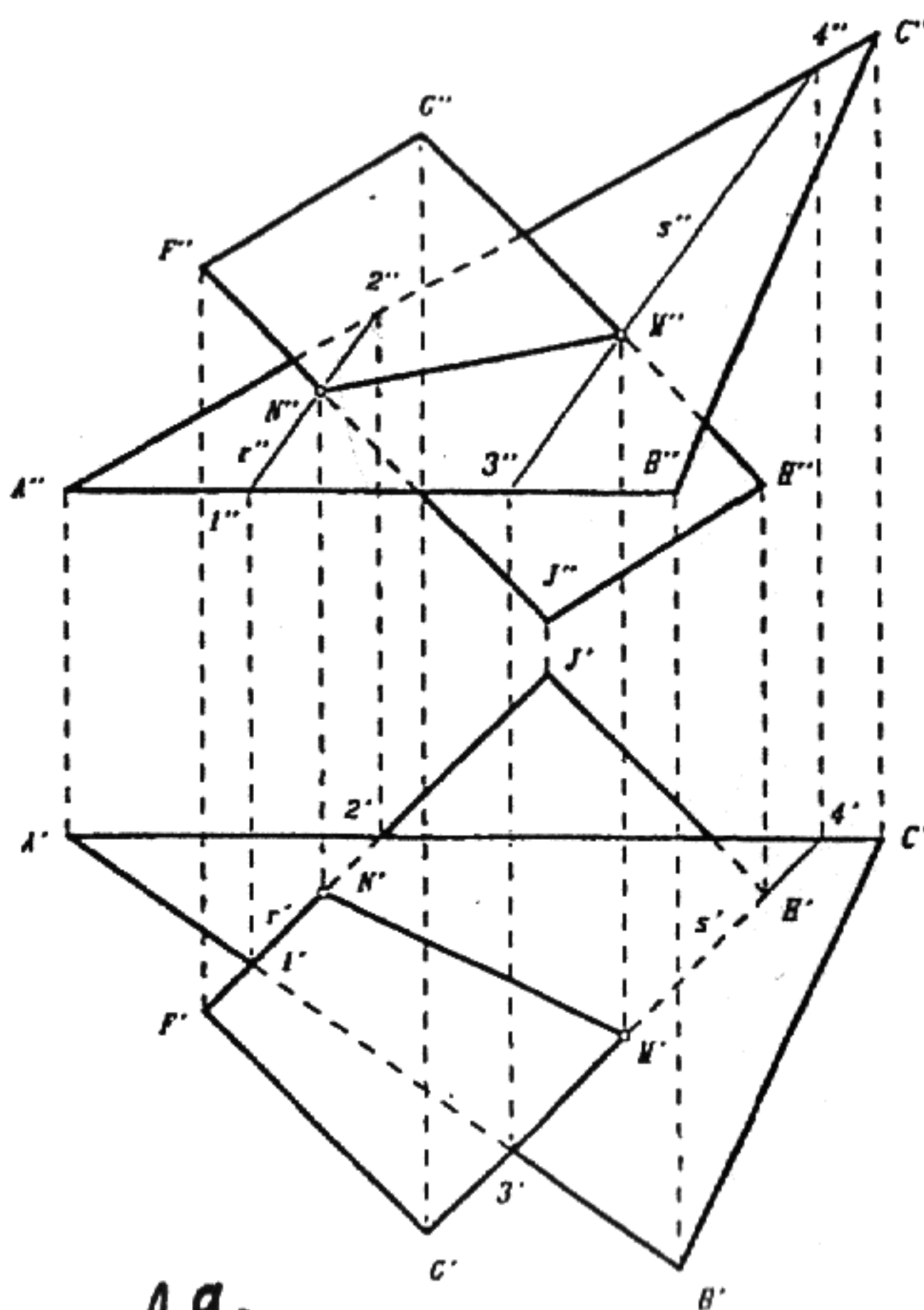
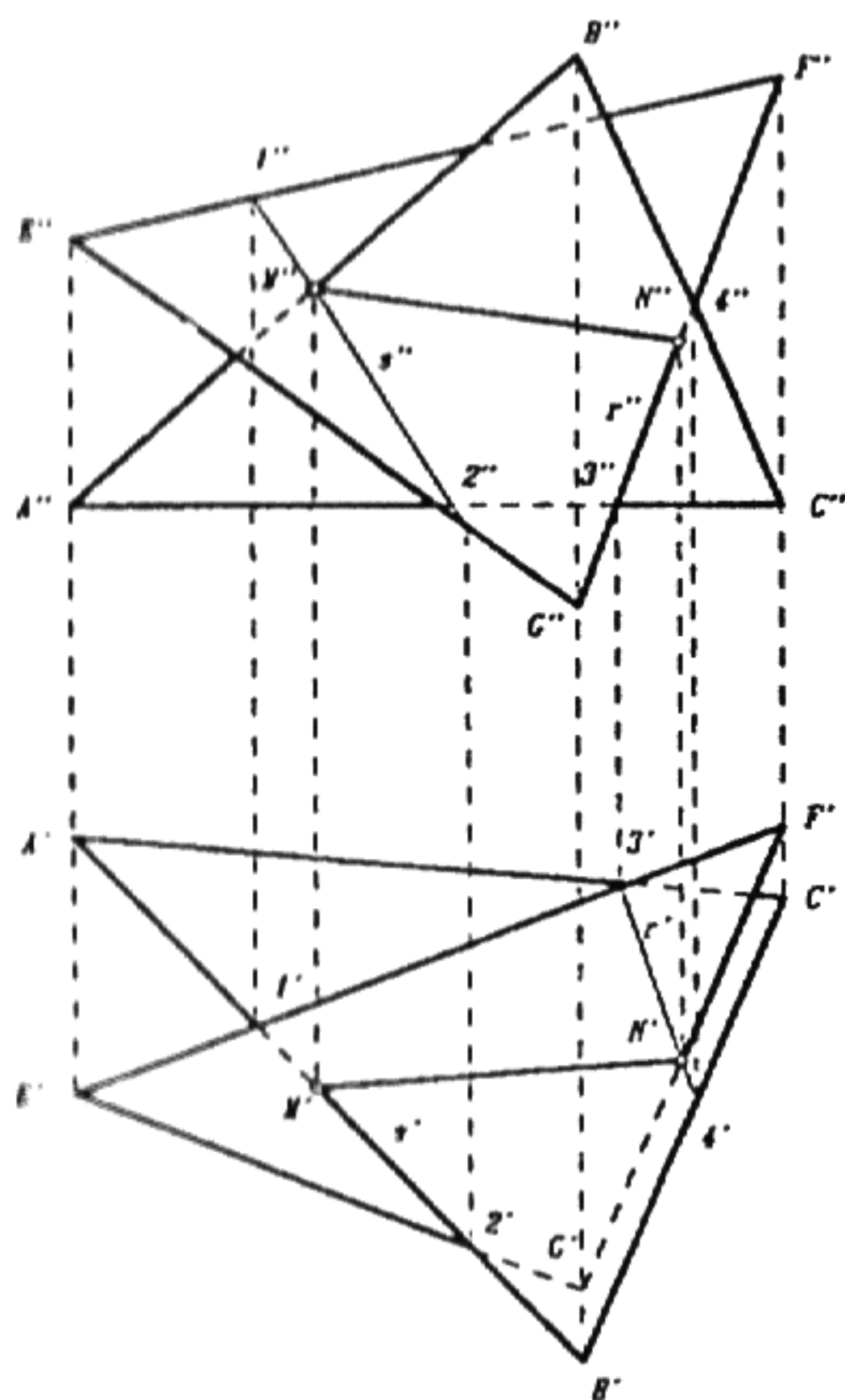
Beadási határidő: 2002. december 1.

Dr. Geiger János
egyetemi docens

1-3



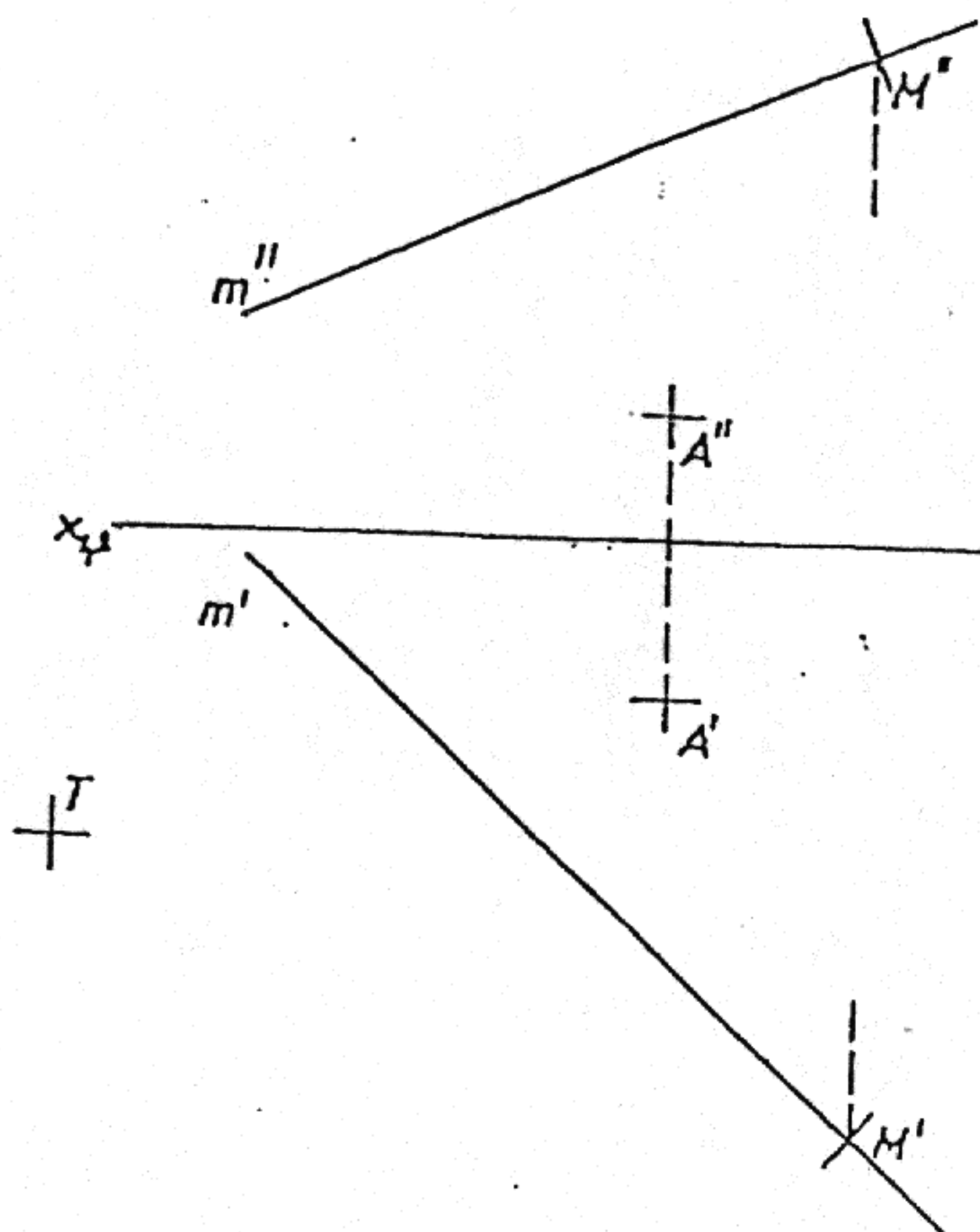
Dr. nelya



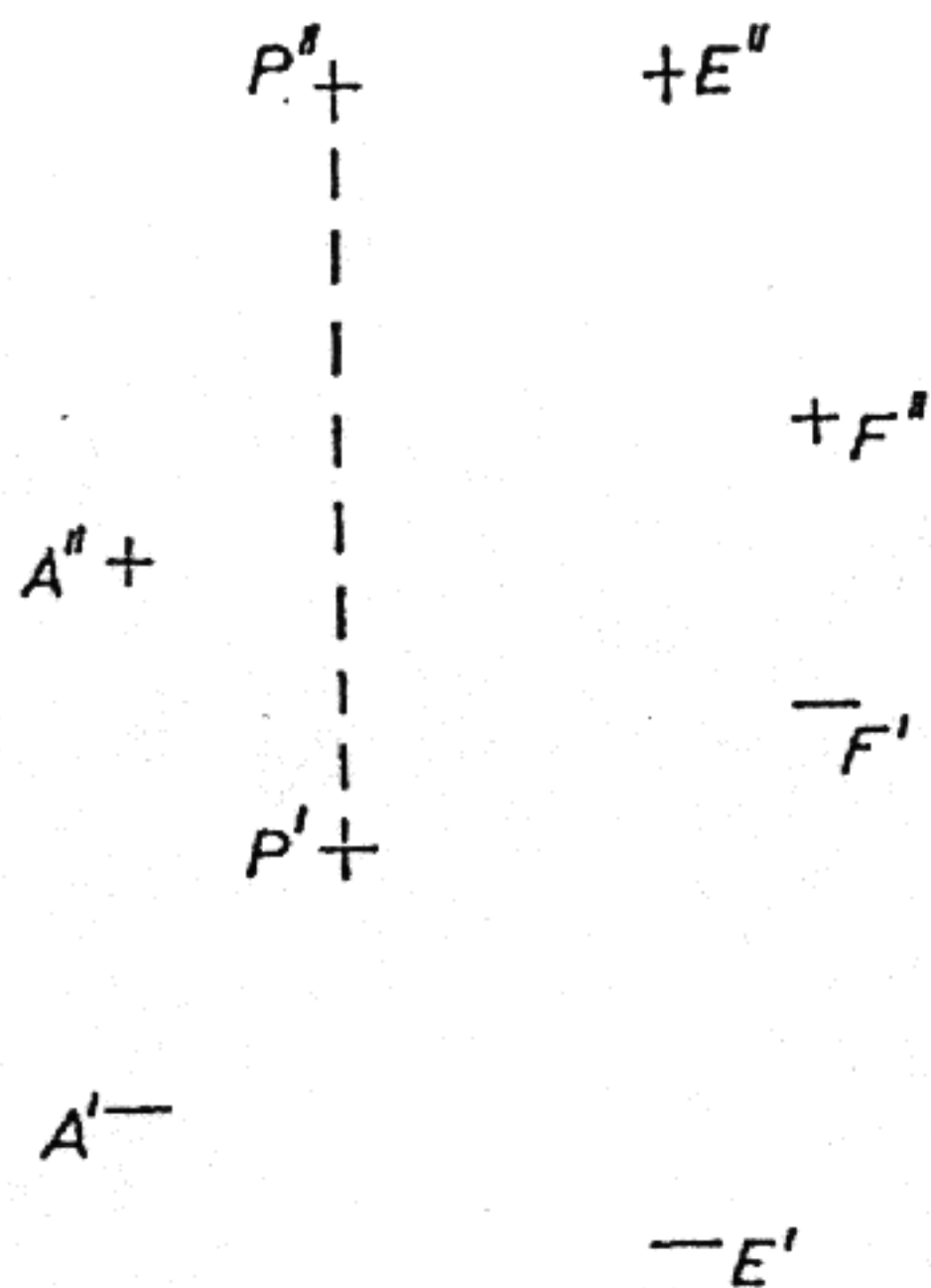
Alkalmas K_1K_2 , K_2K_3 képsíkrendszer transzformációkkal szerkessze meg egy szabályos háromoldalú gúla képeit, majd ábrázolja azt láthatóság szerint!

A gúla magasságvonala m , csúcspontja M , s az alapháromszögének egyik csúcsa A . (Az új képtengelyeket a T ponton keresztül célszerű felvenni.)

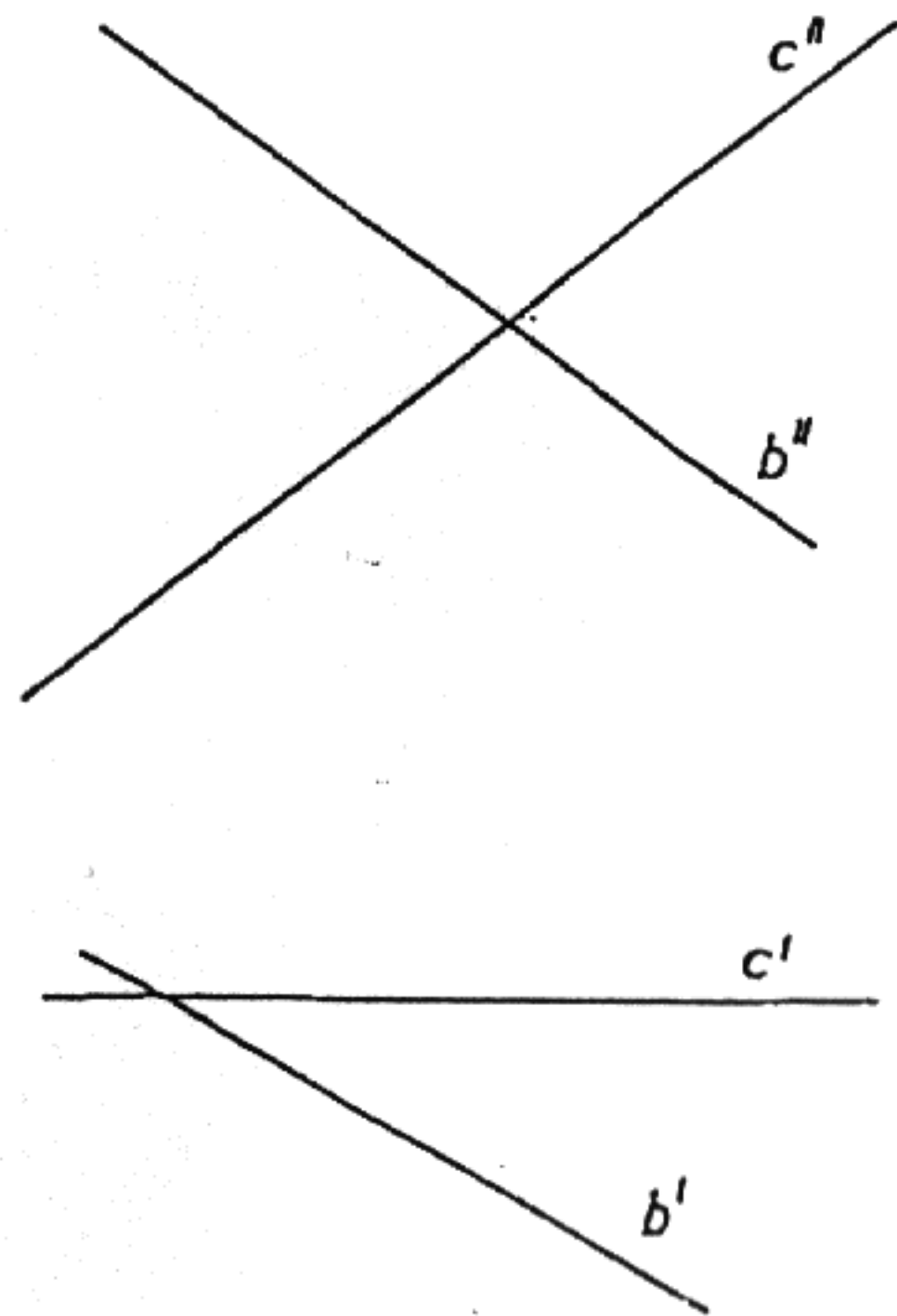
2. d. p.



Szerkessze meg a P pont és az $\underline{S}(AEF)$ sík
távolságát!

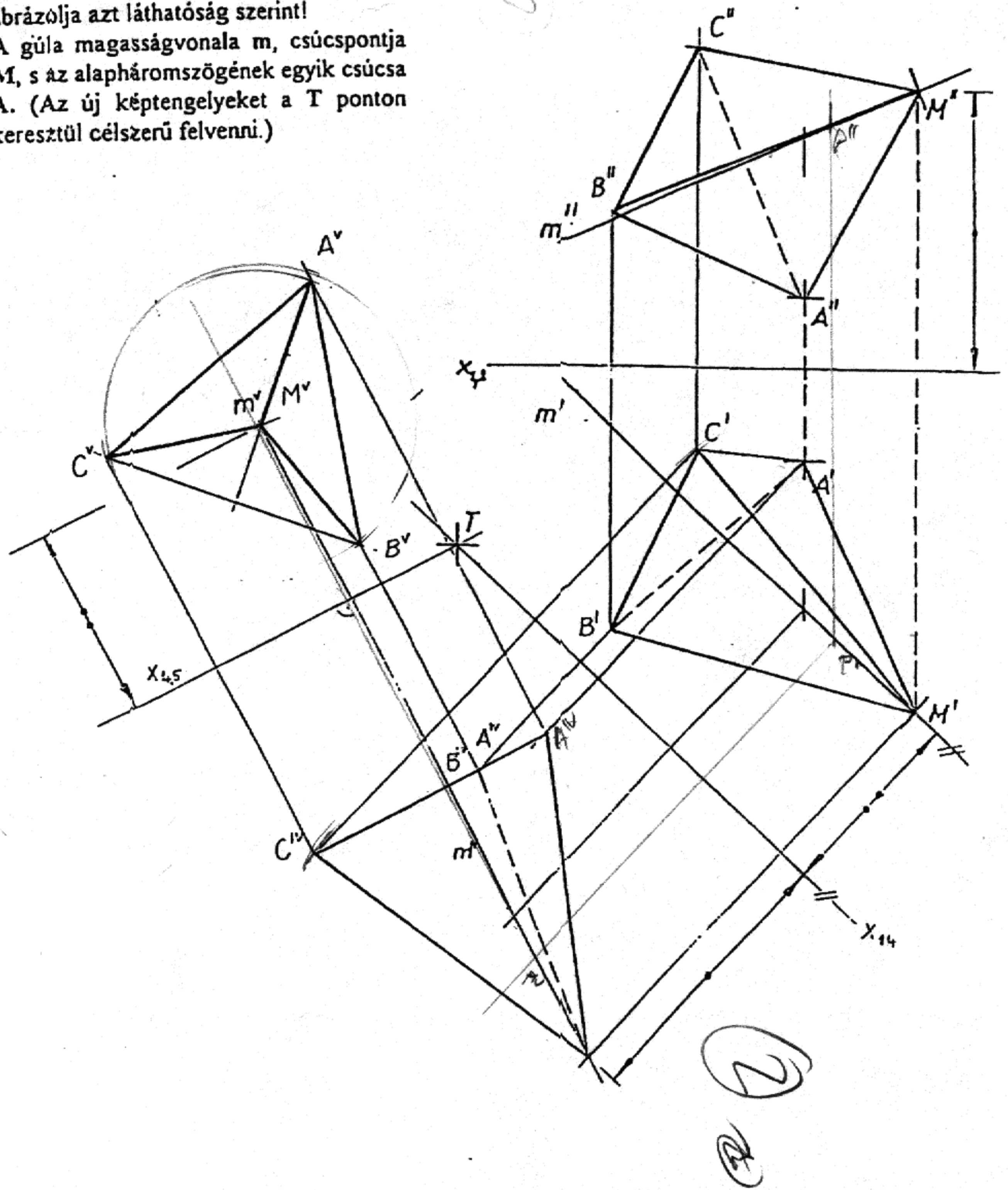


Szerkessze meg az általános helyzetű b
egyenes és a frontális c egyenes távolságát
és szögét!



Alkalmas K_1K_2 , K_2K_3 képsíkrendszer transzformációkkal szerkessze meg egy szabályos háromoldalú gúla képeit, majd ábrázolja azt láthatóság szerint!

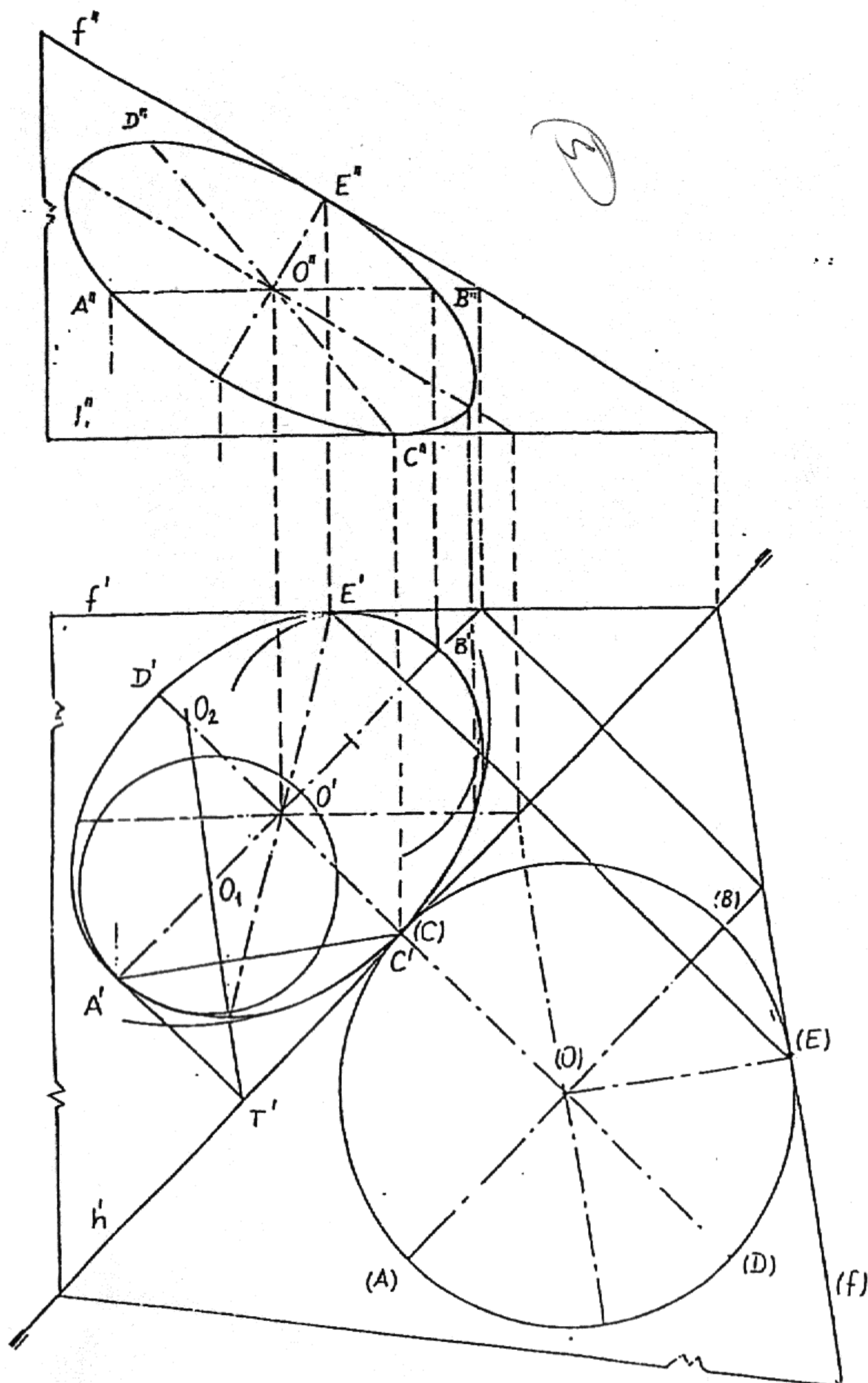
A gúla magasságvonala m , csúcspontja M , s az alapháromszögének egyik csúcsa A . (Az új képtengelyeket a T ponton keresztül célszerű felvenni.)

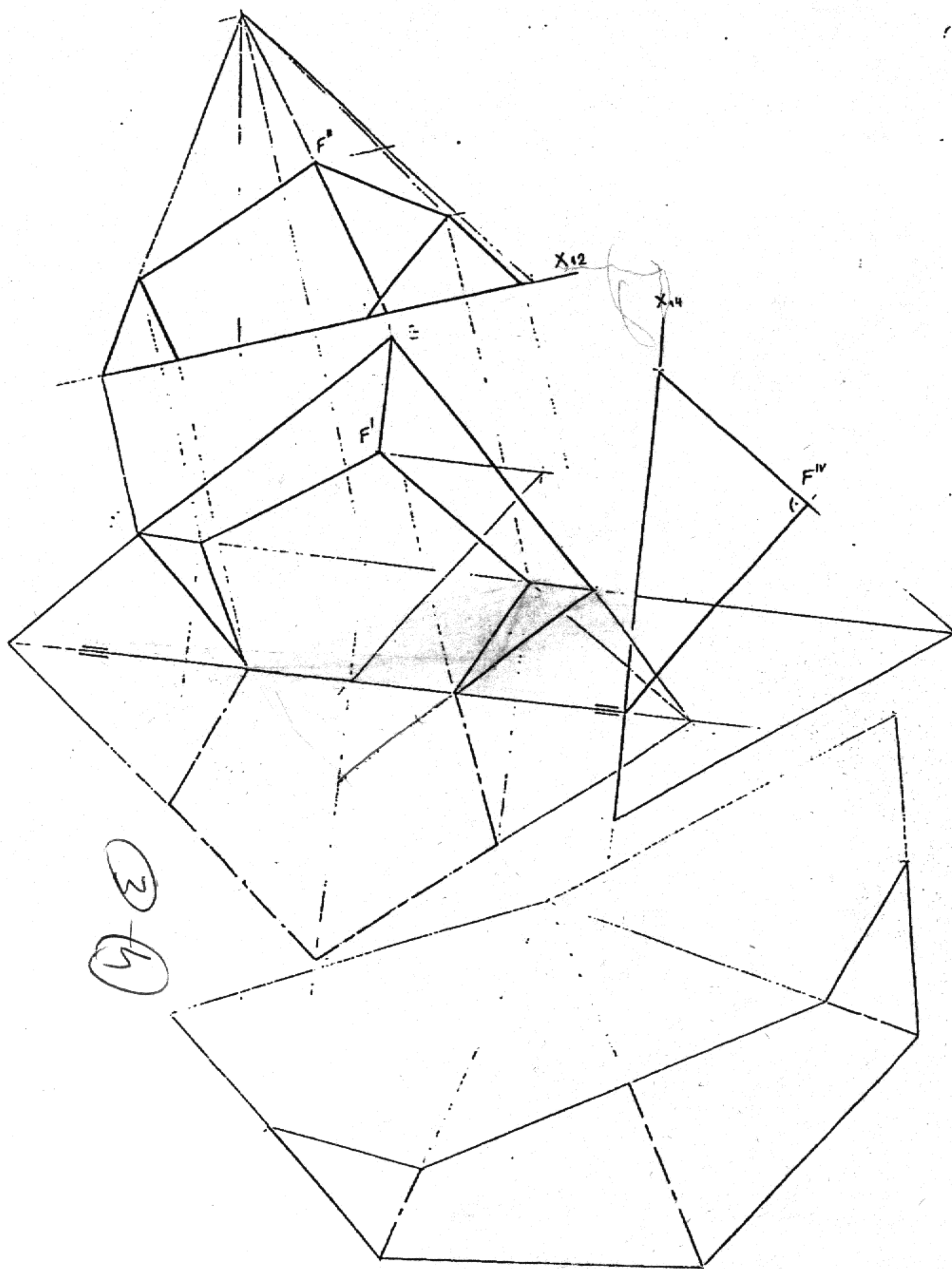


2. Rajzfeladat

Kör ábrázolása általános helyzetű síkon

Adott egy $S(h, f)$ sík h horizontális és f frontális fővonalával, valamint a frontális fővonalra illeszkedő E pont. Szerkesszük meg az S síkra illeszkedő azon körnek a képeit, amely a fővonalakat érinti, az f -t az E pontban.

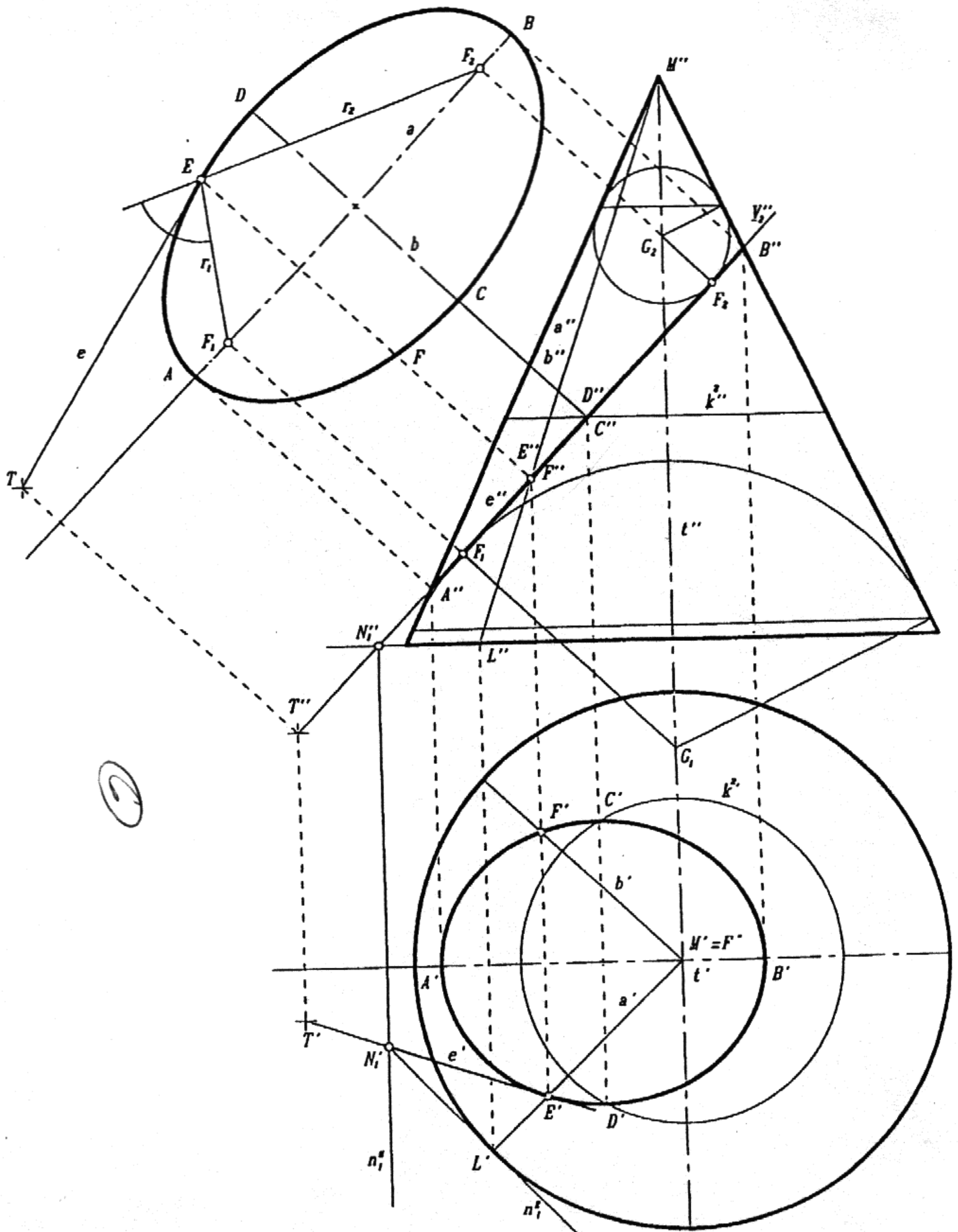




3-4

6.

2-6



I. BEVEZETÉS

Mi az ábrázoló geometria tanulásának célja?

Az ábrázoló geometria a mérnök számára az egyik legfontosabb kommunikációs eszköz, mert egyrészt képessé teszi arra, hogy meglévő alakzatokat ábrázoljon, másrészt a tervezés illetve a megjelenítés eszközeként szolgál.

A tantárgy tanulásának legfőbb célja a térszemlélet fejlesztése, a képből való gondolkodás kialakítása, fejlesztése.

Hogyan tanuljuk az ábrázoló geometriát?

Az ábrázoló geometria a geometria részeként -ügymint alkalmazott geometria- a tantárgy jellegéből fakadóan szigorúan logikus gondolkodást követel, ezért a megértés, a tanulás során a "memóriatréninget" lehetőleg mellőzzük.

Vigyázat, a megértés nem azonos a tudással! Az elméleti anyag áttekintése és megértése után azáltal győződünk meg a biztos tudásról, hogy az ábrát önállóan is elkészítjük. Kezdetben különösen nagy szerepe van a modellezésnek! Kiváltképp a tanulási időszak kezdetén ne hanyagoljuk el a rekonstrukciót -a térbe való visszaállítást- amelyet az elkészített rajzon helyben célszerű közvetlenül elvégezni. Ezáltal kontrollt gyakorlunk gondolkodásunk, modellalkotásunk helyességének megállapítására. A tantárgy folyamatos megértéséhez szükség van a rendszeres tanulásra, mert ha a logikailag egymásra épülő anyagrészek tudásának folytonossága megszakad, a későbbi anyagrészek megértése gondot okoz.

Mivel foglalkozik az ábrázoló geometria?

Szűkebb értelemben az ábrázoló geometria a geometria tudományának az az ága, amely a térbeli háromdimenziós (3D) alakzatoknak a rajz kétdimenziós (2D) síkján vetítés által történő leképezésével foglalkozik.

Mi az ábrázoló geometria célja?

Az ábrázoló geometria célja

- egyrészt grafikai információkat rögzíteni az alakzatról, meghatározni azt alakra, nagyságra, helyzetre nézve síkbeli ábrázolás által,
- másrészt grafikai eszközökkel térgeometriai vagy síkgeometriai feladatokat megoldani szerkesztéssel.

Milyen eljárást értünk a szerkesztéssel?

... olyan eljárást értünk, amellyel a rajz síkján
... ekből,
... -kel,
... -sszámú alkalmazásával,
... evő,

Euklideszi (egzak) szerkesztés

Megengedett szerkesztő eszközök: egyélű vonalzó, körző, iron.

Szerkesztési lépések:

1. Két pont összekötése egyenessel
2. Adott pont körül, adott sugárral kör rajzolása
3. Két egyenes metszéspontjának meghatározása
4. Kör és egyenes metszéspontjainak meghatározása
5. Két kör metszéspontjainak meghatározása

Szerkesztési feladatok megoldása során, ha csak az imént felsorolt ún. euklideszi szerkesztési lépéseket alkalmazzuk, akkor nevezzük a megoldást *egzaktnak*, s ekkor mondjuk, hogy *euklideszi szerkesztést* végzünk. Amikor másféle eszközöket is használunk (pl. két háromszögvonalzót és egyéb rajzoló műveleteket is végzünk, például két vonalzó egymáson való eltolását párhuzamos egyenesek rajzolásához, amelyek meggyorsíthatják illetve megkönnyíthetik a megoldás kivitelezését) akkor az eljárást közelítő megoldásnak tekintjük.

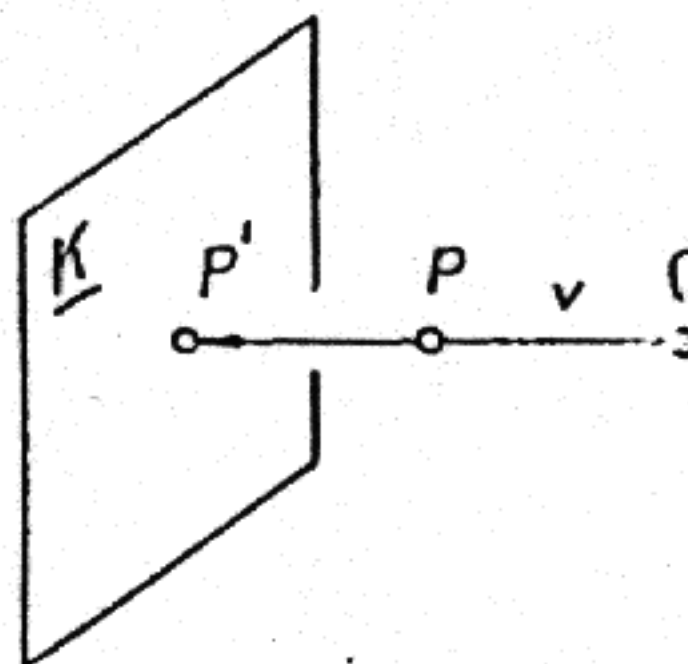
Az ábrázoló geometria módszere

Az ábrázoló geometria a vetítés módszerén alapul. A kép vetítés, projekció által jön létre, mint ahogy egy fényforrással megvilágított tárgy árnyékot vet. Az árnykép felel meg az alakzat képének, vagy vetületének, a fényforrás a vetítés centrumának, a felfogó felület pedig a képsíknak.

Vetítés során az alakzat minden P pontjának megfelel a rajz síkjának egy P' pontja, a térbeli pont vetülete, vagy képe.

A C centrumból a P ponton átfektetett v egyenes a pont *vetítősugara*. E vetítősugárnak a K képsíkkal való metszéspontja a pont P' *képe*. A képpontokat tartalmazó sík a K *képsík*.

(1. ábra)

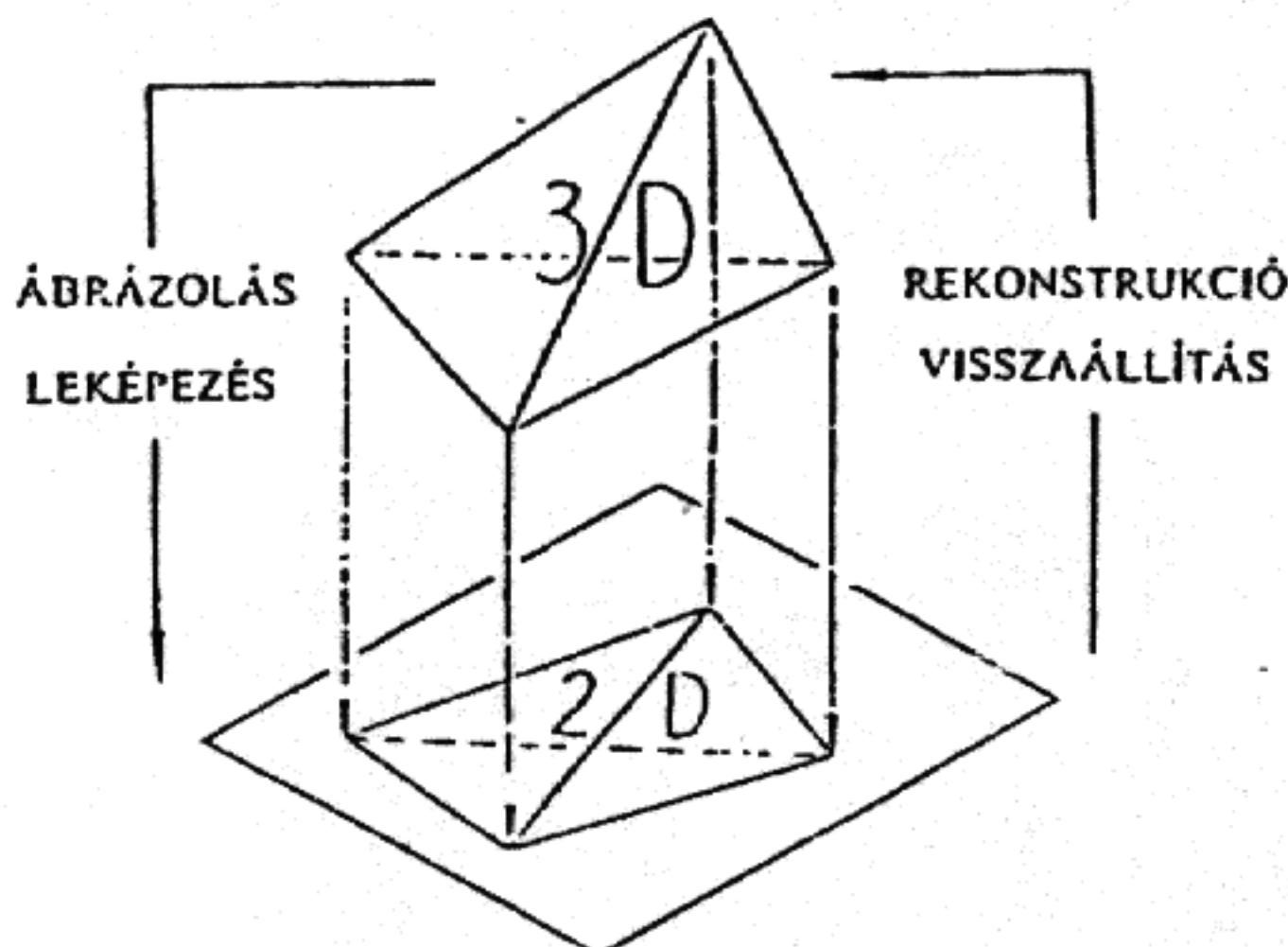


1. ábra

Ábrázoláskor a következő utat járjuk be: Tárgy $\rightarrow$ Vetítés $\rightarrow$ Kép

Az ábrázolás nem lehet öncélú, a vetület legfőbb információértéke az, hogy belőle az alakzat méretre, helyzetre nézve egyértelműen meghatározható, azaz a fenti út fordítva is bejárható kell hogy legyen: ez a folyamat a rekonstrukció vagy visszaállítás. (2. ábra)

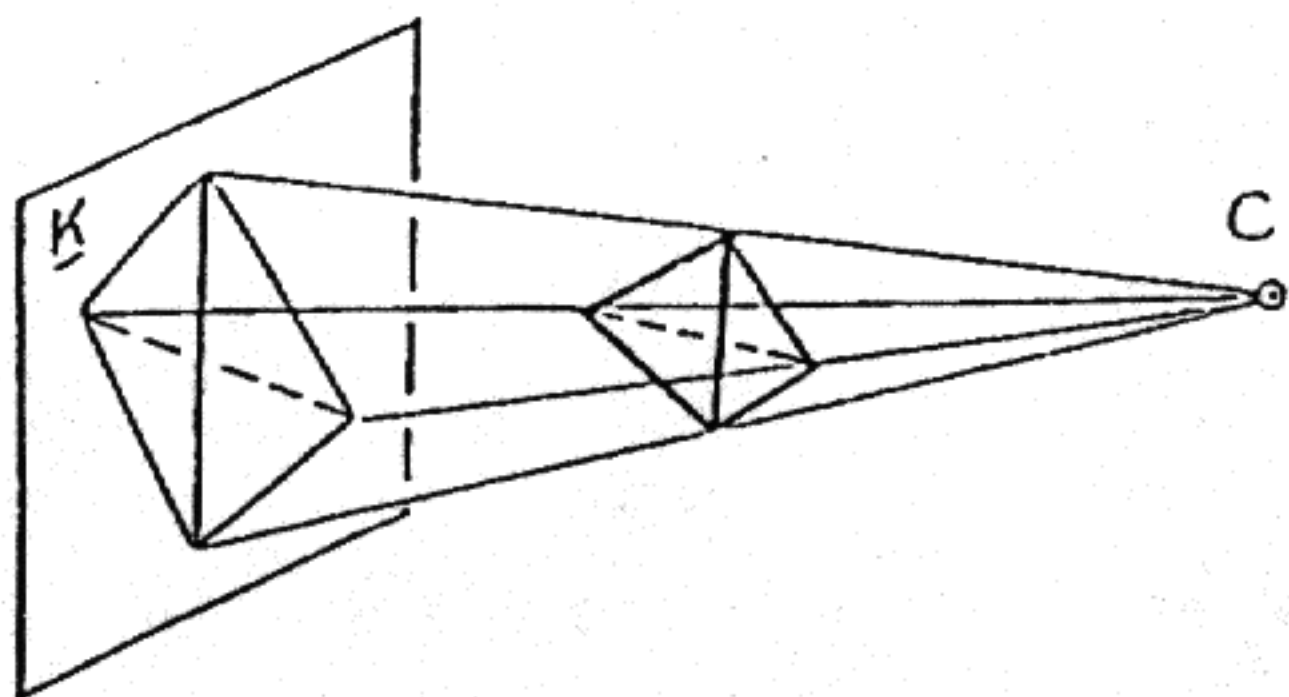
Rekonstrukció során a folyamat sorrendje: Kép $\rightarrow$ Vetítés $\rightarrow$ Tárgy



2. ábra

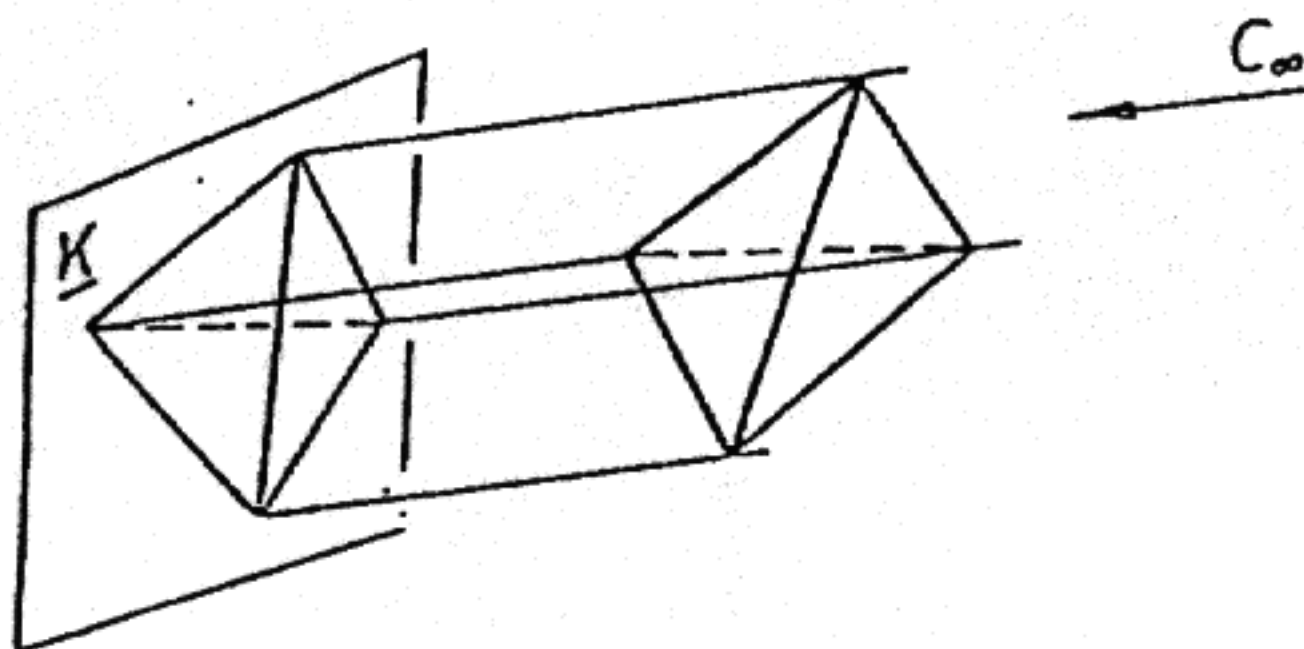
Vetítés

Ha a C vetítési centrum végesbeli, akkor a vetítés centrális.



(3. ábra)

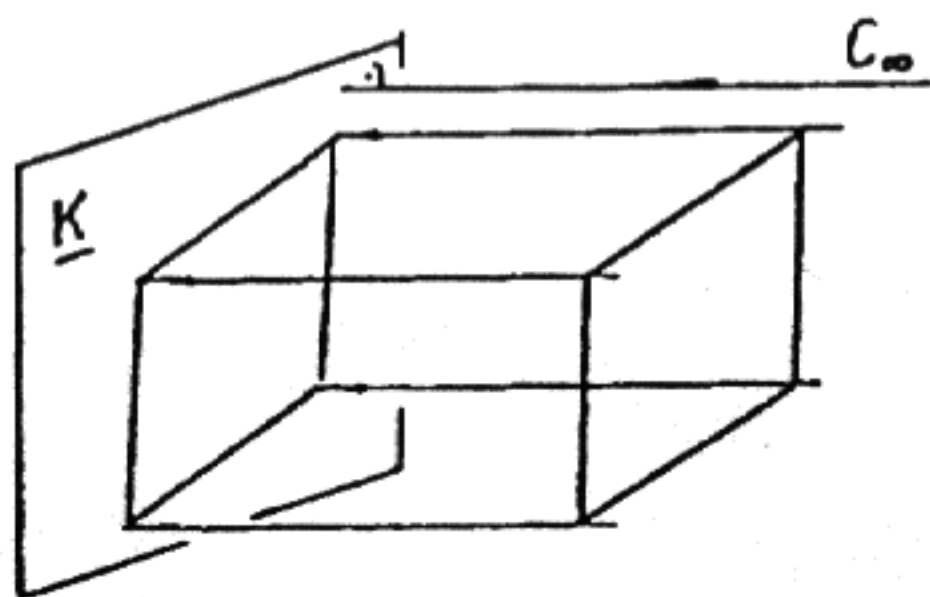
Ha a C vetítési centrum végtelenbeli, az alakzat pontjait vetítő egyenesek egymással párhuzamosak akkor a vetítés párhuzamos vagy paralel.



(4. ábra)

Párhuzamos vetítősugaraknak a képsíkkal bezárt szöge

- ha hegyesszög, akkor ferde (klinogonális) paralel a vetítés,
- ha derékszög, akkor merőleges (ortogonális) paralel a vetítés.



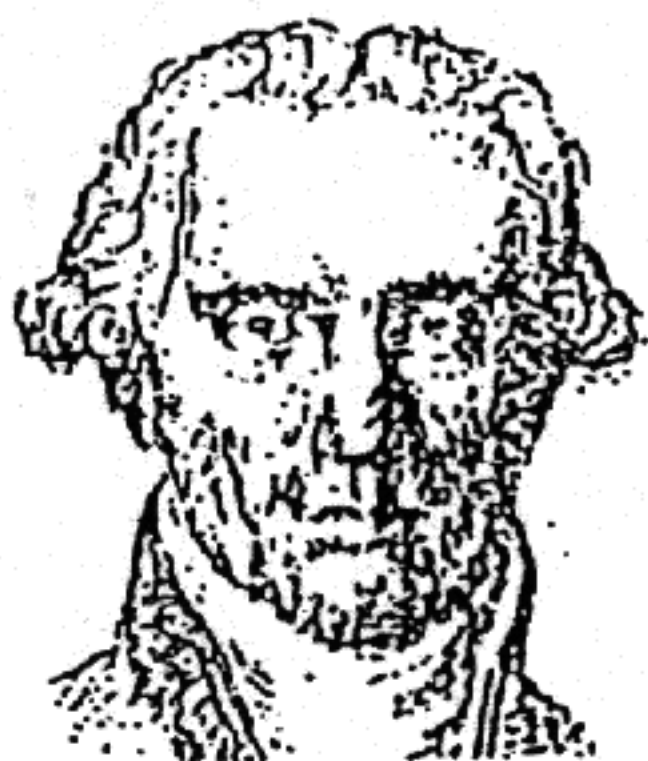
(5. ábra)

II. ÁBRÁZOLÁS RENDEZETT MERŐLEGES VETÜLETEKEN

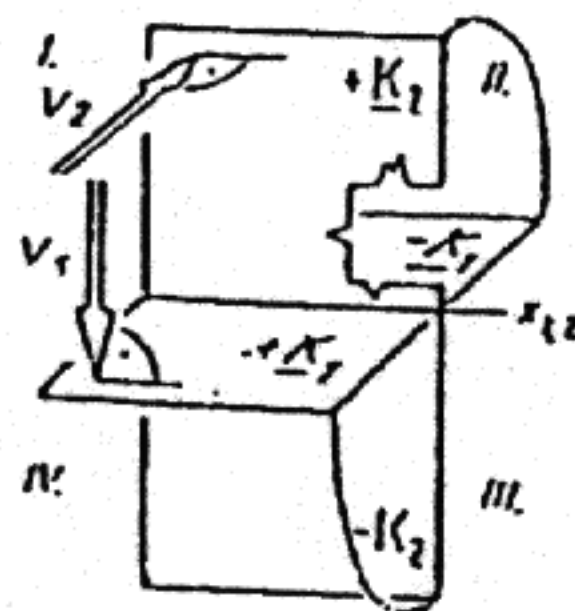
MONGE-féle ábrázolás

A képsíkrendszer

A Monge-féle ábrázolás két egymásra merőleges K_1 K_2 síkból álló képsíkrendszert használ. A K_1 első képsík legyen vízszintes, horizontális helyzetű, ez a felülnézet síkja, míg a K_2 második képsík legyen velünk szemben, frontális helyzetű ez az előlnézet síkja. A v_1 és v_2 vetítősugárral a K_1 illetve K_2 képsíkra merőlegesen történik a vetítés, tehát mindkét képsík esetében *ortogonális paralel* a projekció. A K_1 K_2 képsík az $x_{1,2}$ képtengelyben metszi egymást. A képsíkok a teret négy térsíkjára osztják, a képtengely pedig a képsíkokat osztja pozitív és negatív előjelű félképsíkokra. ($+K_1$ a K_2 előtt, $+K_2$ a K_1 fölött van. Az első térsíkját a $+K_1+K_2$ félképsík, a második térsíkját a $-K_1+K_2$ félképsík határolja, stb.) (6. ábra)



Gaspard MONGE /1746-1818/



6. ábra

A tér leképezése

A tér leképezése két lépésben történik

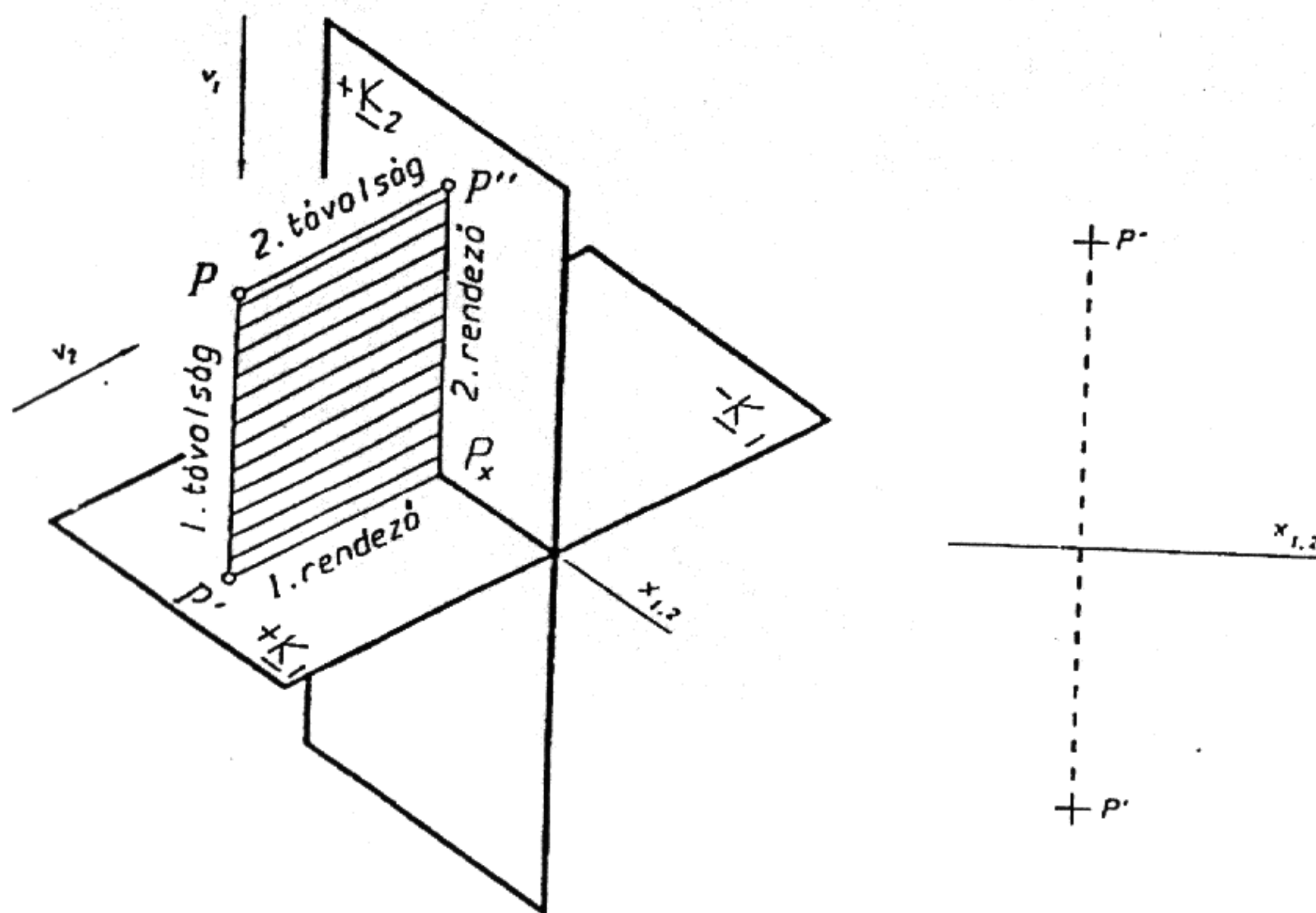
1. A képsíkokon merőleges vetítéssel létrehozuk a képeket (vetületeket, nézeteket).
2. Valamelyik képsíkot a rajz síkjának (munkasíknak) tekintjük és hozzáegyesítjük a másik képsíkot.

A képsíkegyesítés szabálya az, hogy ellentétes előjelű félképsíkok kerüljenek fedésbe. Ezáltal a képsíkok rajzolt fele lesz látható.

A háromdimenziós teret így leképeztük a rajz 2D-s síkjára. Az ábrázolás azonban akkor tekinthető befejezettnek, ha a képekből a rekonstrukció egyértelműen végrehajtható. Megjegyezzük, hogy bizonyos esetekben két rendezett kép nem elegendő az egyértelmű visszaállításhoz.

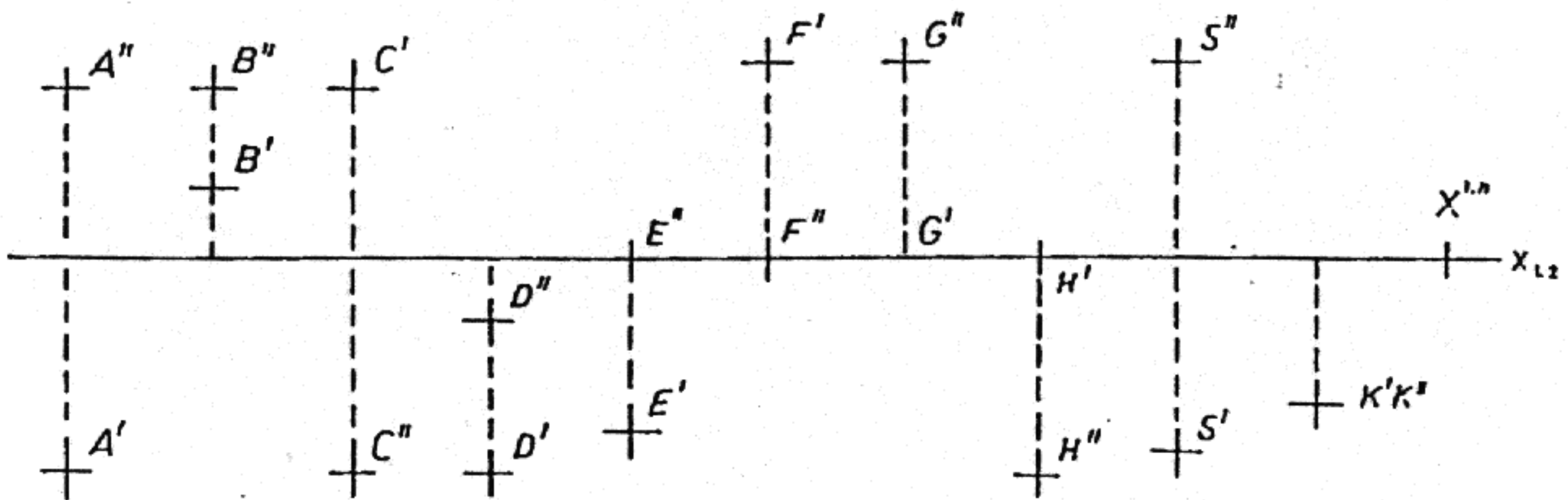
1. Pont ábrázolása

Egy P pont P' első képét a pontra illesztett v_1 első vetítősugár metszi ki a K_1 első képsíkból, s hasonlóan a P pont P'' második képét a pontra illesztett v_2 második vetítősugár metszi ki a K_2 második képsíkból. A vetítés során általában egy $(PP'P_xP'')$ téglalap keletkezik, amelynek az első vetítősugáron lévő PP' oldala mutatja a P pontnak az első képsíktól való távolságát, amely egyenlő hosszúságú a második képsíkban fekvő P_xP'' második rendezővel, illetve a PP'' oldala mutatja a második képsíktól való távolságot, amely egyenlő hosszúságú az első képsíkban fekvő P_xP' első rendezővel. Attól függően, hogy a pont melyik tégnyedben helyezkedik el, az egyes rendezők annak a félképsíknak az előjelét öröklék, amelyben éppen bennefekszenek. (Ezáltal elemezhető, hogy az egyes tégnyedekben elhelyezkedő pontoknak a leképezések következtében kialakuló rendezői milyen előjelűek lesznek.) Mivel a $(PP'P_xP'')$ vetítőtéglalap síkja mindkét képsíkra, s így az $x_{1,2}$ tengelyre is merőleges, a P_x pontban metsződő első- és második rendező is merőleges az $x_{1,2}$ tengelyre. Ezért a képsíkegyesítés után a két rendező egy egyenesbe esik, amely merőleges a képtengelyre. Innen ered a rendezett nézetek elnevezés. (7. ábra)



7. ábra

A pont vetítő téglalapja elfajulhat egy szakasszá, ha a pont illeszkedik valamelyik képsíkra, vagy négyzet alakot vehet fel, ha a pont a képsíkok valamely szögfelezősíkjában (a szimmetriasíokban vagy a koincidenciasíokban) van, illetve összezsugorodhat egy ponttá, ha a pont rajta van a képtengelyen. Különböző helyzetbeli pontokat találunk a 8. ábrán. (A az első térnegyedben, B a második térnegyedben, C a harmadik térnegyedben, D a negyedik térnegyedben, E a $+K_1$ -n, F a $-K_1$ -n, G a $+K_2$ -n, H a $-K_2$ -n, S a szimmetriasík első térnegyedbeli részén, K a koincidenciasík negyedik térnegyedbeli részén, X a képtengelyen helyezkedik el.)



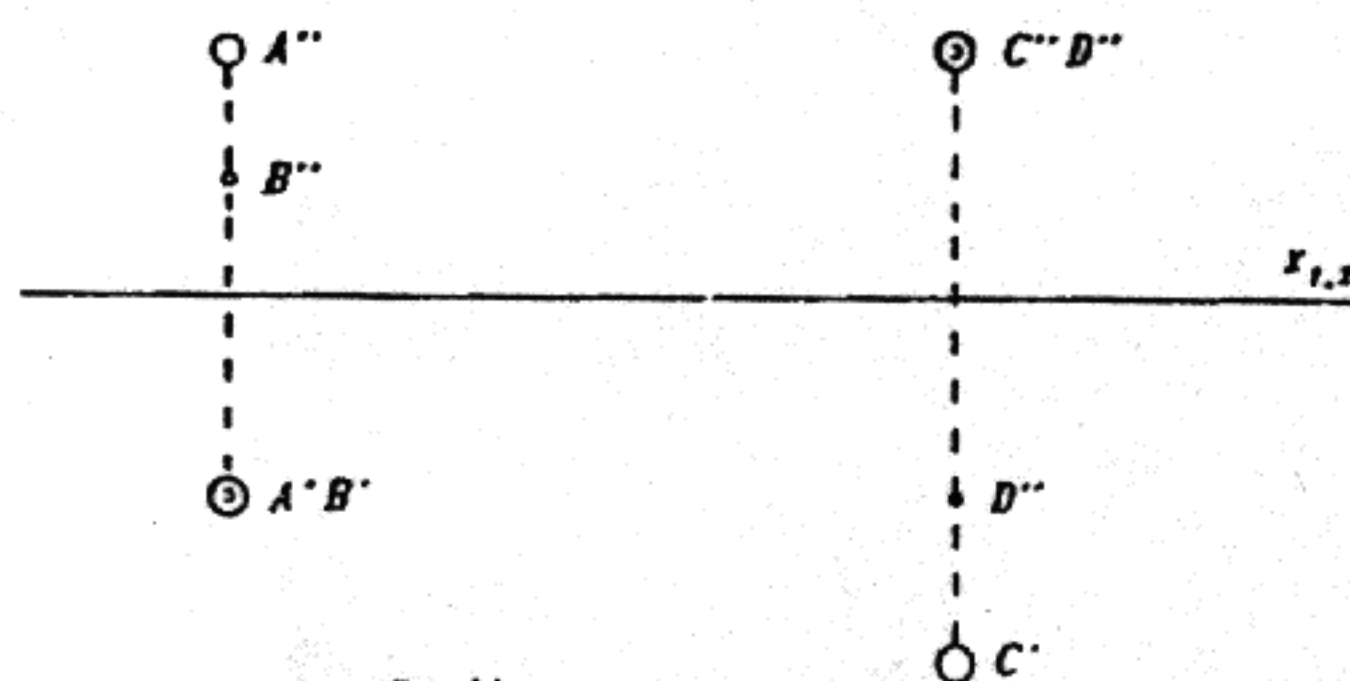
8. ábra

1.2. A pont visszaállítása (rekonstrukciója)

A pont térbeli helyzetének megállapítása kétféleképpen történhet, attól függően, hogy a rajz síkját melyik képsíknak tekintjük. Legyen a rajz síkja az első képsík. Ekkor a pont térbeli helyzete a pont első képében állított első vetítősugáron lesz, a pont első képétől mérve akkora távolságra, mint amekkora a pont második rendezője. Ha a második rendező pozitív, akkor a pont az első képsík fölött, ha a második rendező negatív, akkor a pont az első képsík alatt helyezkedik el. Ha a rajz síkját függőlegesen tartjuk, a munka síkja a második képsík, akkor a rekonstrukciót a második képsíkból kezdve végezzük.

1.3. Fedőpontok

Ha a térben két vagy több pont ugyanarra a vetítősugárra illeszkedik, akkor őket *fedőpontoknak* nevezzük, mert leképezés után valamelyik képük azonos lesz, fedésbe kerül. Közös első vetítősugár esetén az első képek, közös második vetítősugár esetén a második képek kerülnek fedésbe. A 9. ábrán az A és B első fedőpontok, a C és D második fedőpontok. A fedőpontoknak a láthatóság megállapításánál van kiemelt szerepe. Ugyanis két első fedőpont közül az első képen (a felülnézetben) az látható, amelyik a szemlélőhöz közelebb van, tehát amelyiknek előjeles második rendezője nagyobb (a 9. ábrán A fedi B-t), továbbá két második fedőpont közül a második képen (az előlnézetben) az látható, amelyik a szemlélőhöz közelebb van, tehát amelyiknek előjeles első rendezője nagyobb (a 9. ábrán C fedi D-t).

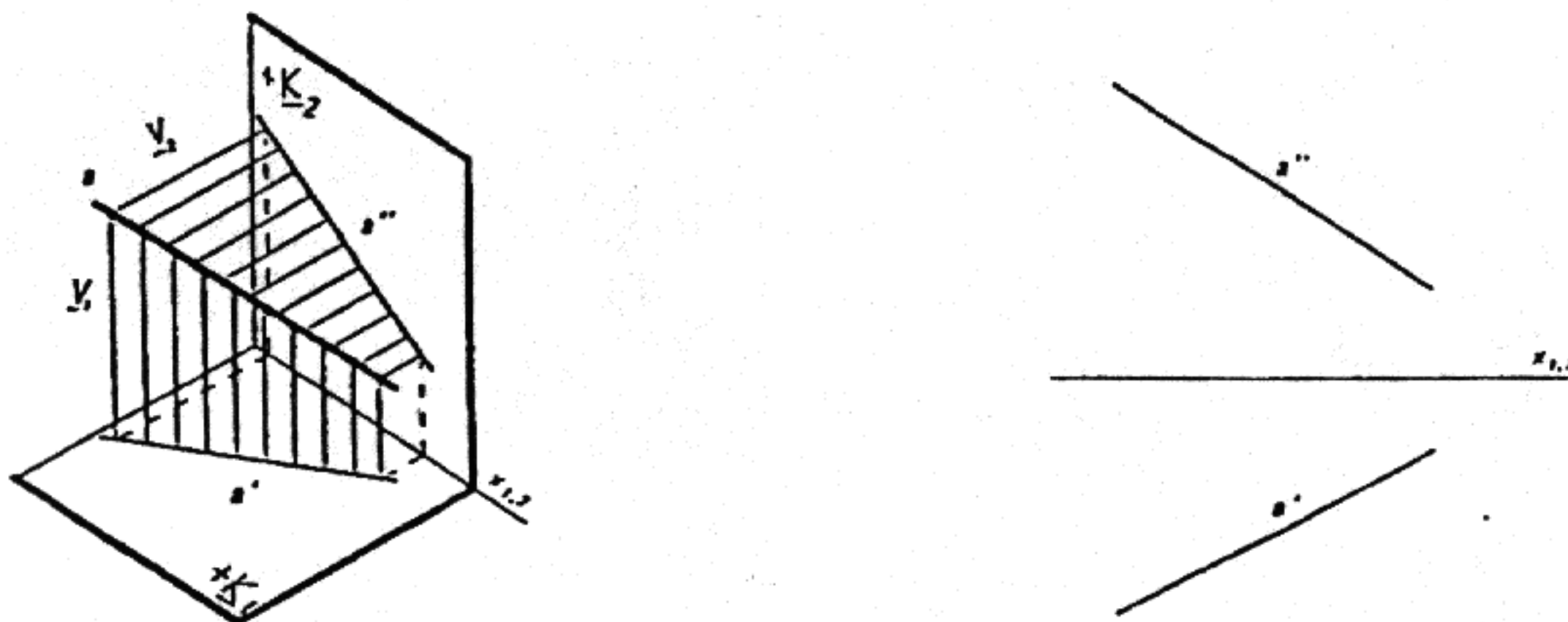


9. ábra

2. Egyenes ábrázolása

Egy egyenes pontjaira illesztett vetítősugarak az egyenes vetítősíkját alkotják. Az egyenes vetítősíkjának a képsíkkal való metszése az egyenes képe. Az egyenes n-dik képét az egyenesre illesztett n-dik vetítősík metszi ki az n-dik képsíkból.

Az egyenes képsíkrendszerbeli elhelyezkedését, első- és második vetítősíkját majd a rendezett képeit szemlélteti a 10. ábra.



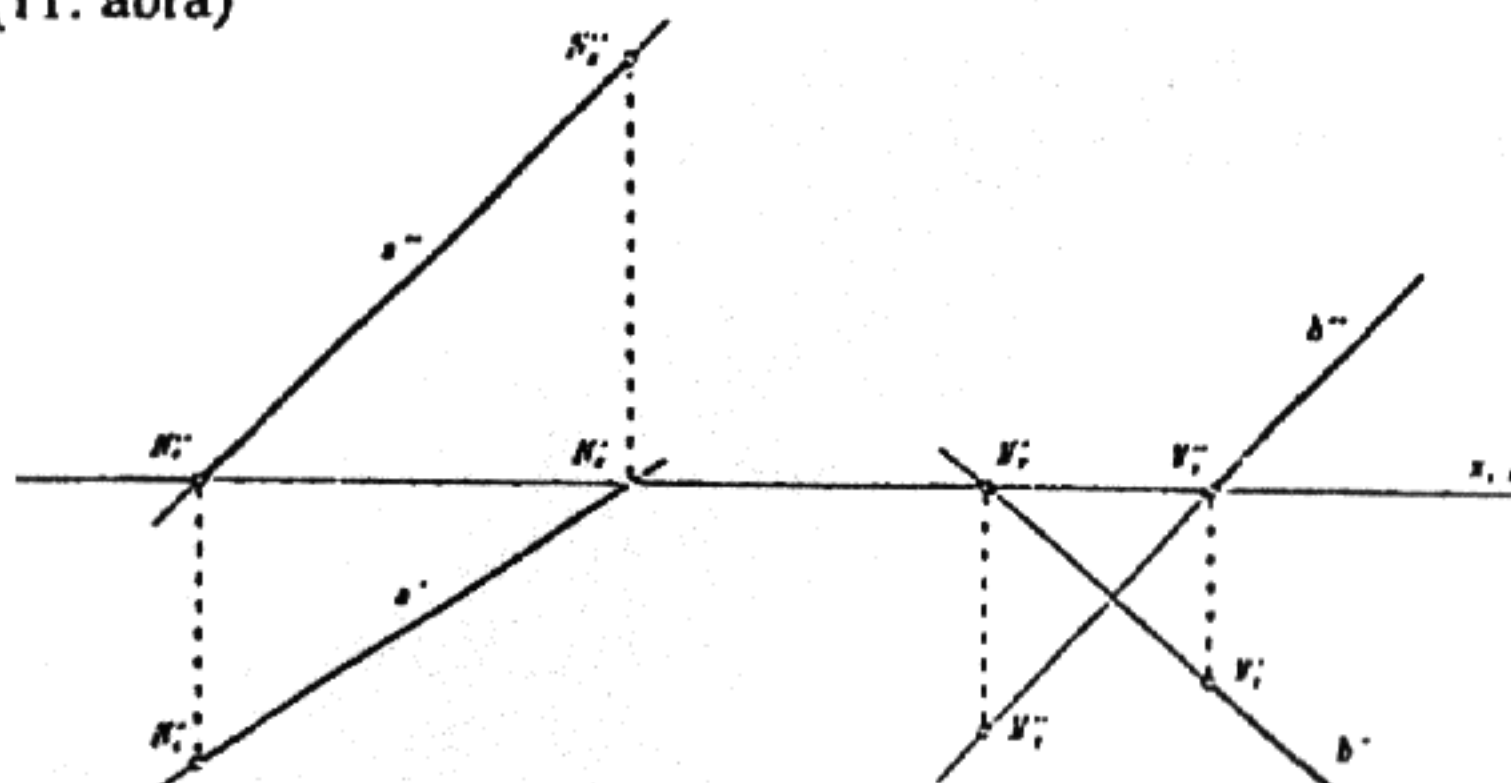
10. ábra

2.1. Az egyenes visszaállítása, rekonstrukciója

A rajz síkját az $x_{1,2}$ tengely mentén derékszögben felhajtva kapjuk a képsíkrendszert. A képsíkokon lévő képekből indított első- és második vetítősík metszésében találjuk a visszaállított térbeli egyenest. Megkönnyíti a visszaállítást az egyenes nyompontjainak ismerete.

2.2. Az egyenes nyompontjai

Egy egyenesre illeszkedő pont első képe az egyenes első képére, a második képe az egyenes második képére illeszkedik. Az egyenes N_1 első nyompontja az a pont, ahol az egyenes metszi az első képsíkot, s hasonlóan az N_2 második nyompont. A nyompontok szerkesztésekor figyelembe vesszük az előbb említett illeszkedési szabályt, valamint azt, hogy a képsíkban lévő pontok egyik képe az $x_{1,2}$ tengelyre illeszkedik. A nyompontok képei tehát azokon a rendezőkön találhatók, amelyek a képeknek a tengellyel való metszéspontjain mennek keresztül. Az a egyenes N_1 első- és N_2 második nyompontja is pozitív félképsíkra illeszkedik, a nyompontok közötti szakasz az első térnegyedben van. A b egyenes az első képsík pozitív és a második képsík negatív felét dőfi, a nyompontok közötti M_1M_2 szakasz a negyedik térnegyedben van. (11. ábra)



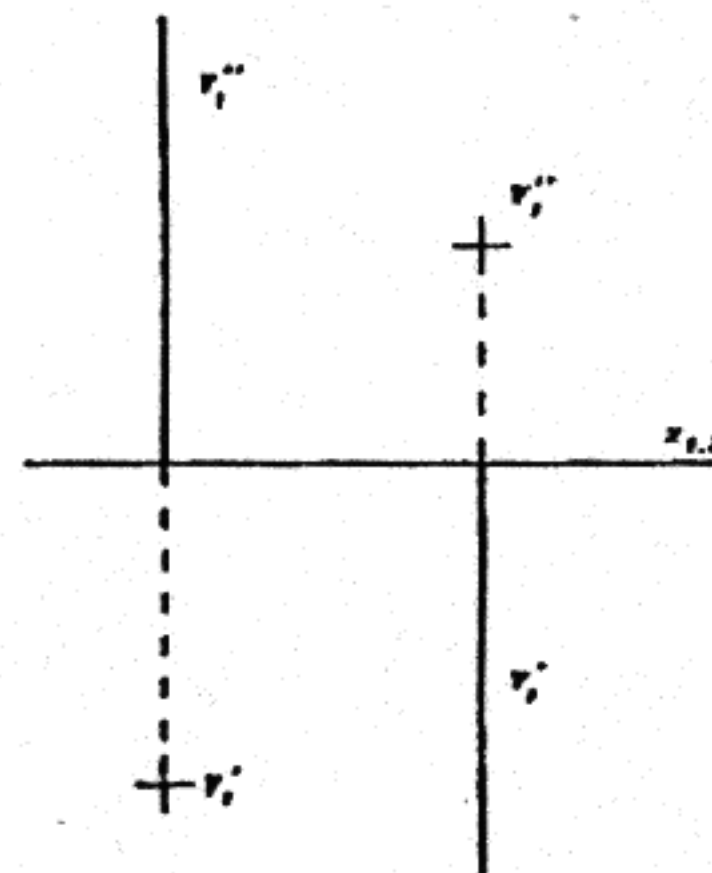
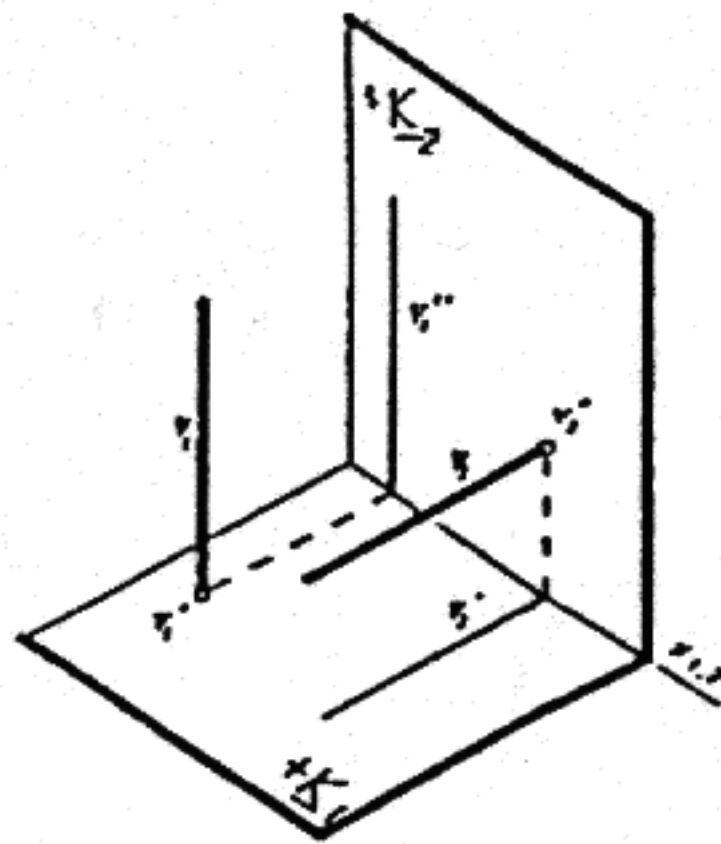
11. ábra

2.3. Különleges helyzetű egyenesek

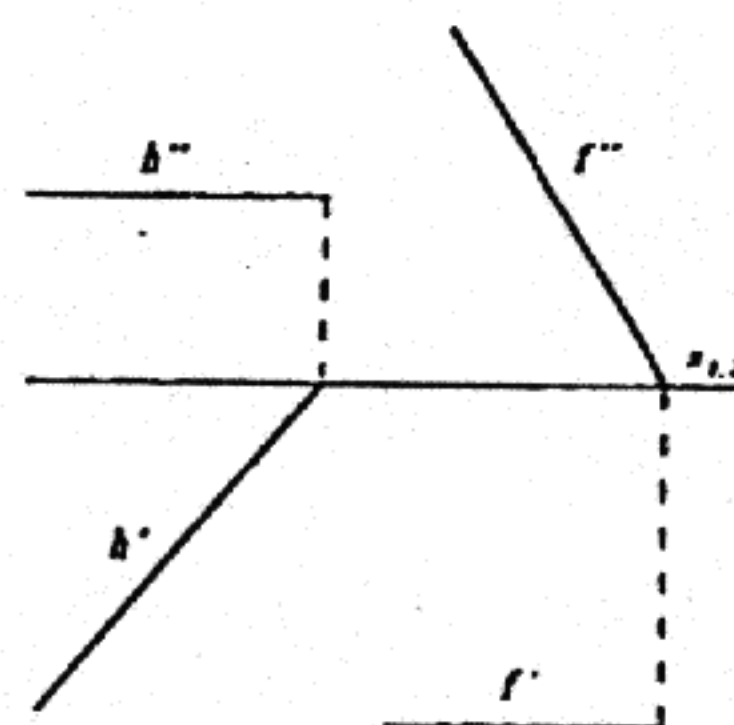
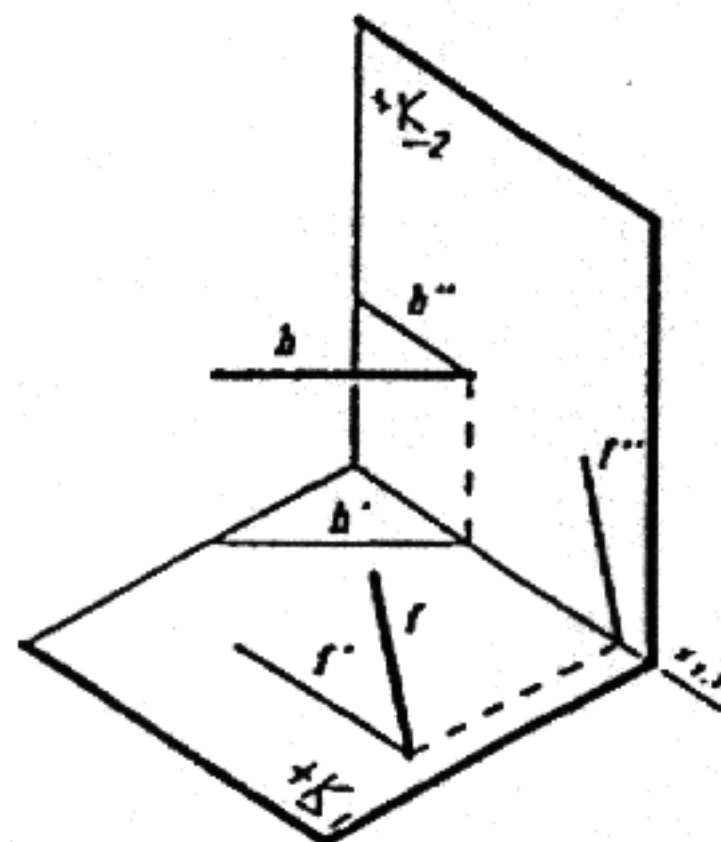
A különlegességet a képsíkokhoz viszonyított párhuzamos vagy merőleges helyzet jelenti.

Képsíkra merőleges egyenesek a vetítősugarak. A 12. ábrán a v_1 első vetítősugár, a v_2 második vetítősugár. A vetítősugár egyik képe pont, a másik képe merőleges a képtengelyre.

Valamely képsíkkal párhuzamos egyenesek a fővonalak. Az első képsíkkal párhuzamos egyenest horizontális egyenesnek, a második képsíkkal párhuzamos egyenest frontális egyenesnek nevezzük. A fővonalak képeit az jellemzi, hogy az egyik képük párhuzamos a képtengellyel. A horizontális egyenesnek a második, frontális egyenesnek az első képe párhuzamos az $x_{1,2}$ tengellyel. Az 13. ábrán a h egyenes horizontális, az f frontális. (Mindkét nézet síkjával párhuzamos egyenes a harmadik képsíkra merőleges, vagy az $x_{1,2}$ tengellyel párhuzamos).

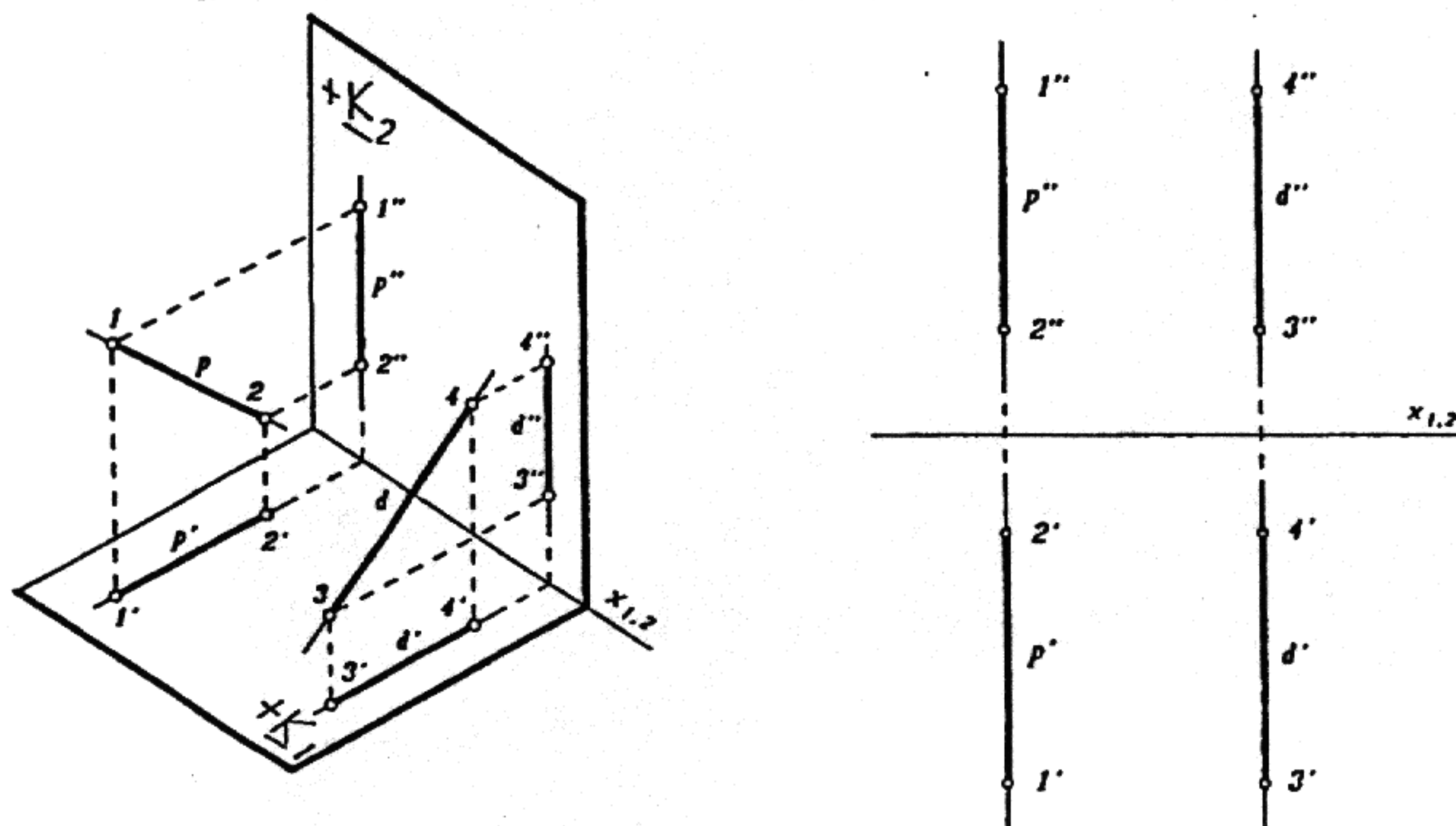


12. ábra



13. ábra

A profilegyenes az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges helyzetű, a harmadik képsíkkal párhuzamos. Mindkét képe merőleges a képtengelyre, s emiatt a képek egybeesnek. A profilegyenes két képből nem rekonstruálható, mert a visszaállítás során az egyenes első és második vetítősíkja egybeesik, nem metszi egymást az egyenes térbeli helyzetében. Így a profilegyenes két képpel nem ábrázolható! Ezért vagy egy harmadik kép vagy ráillesztett két pont felvételével (egy szakaszával) ábrázoljuk. A 14. ábrán a $p(AB)$ profilegyenes dőlt helyzetű, támaszkodik a képsíkok-hoz, a képeken ugyanaz a betűzés sorrendje, az $r(CD)$ profilegyenes feszített helyzetű, a képeken a betűzés sorrendje ellentétes.



14. ábra

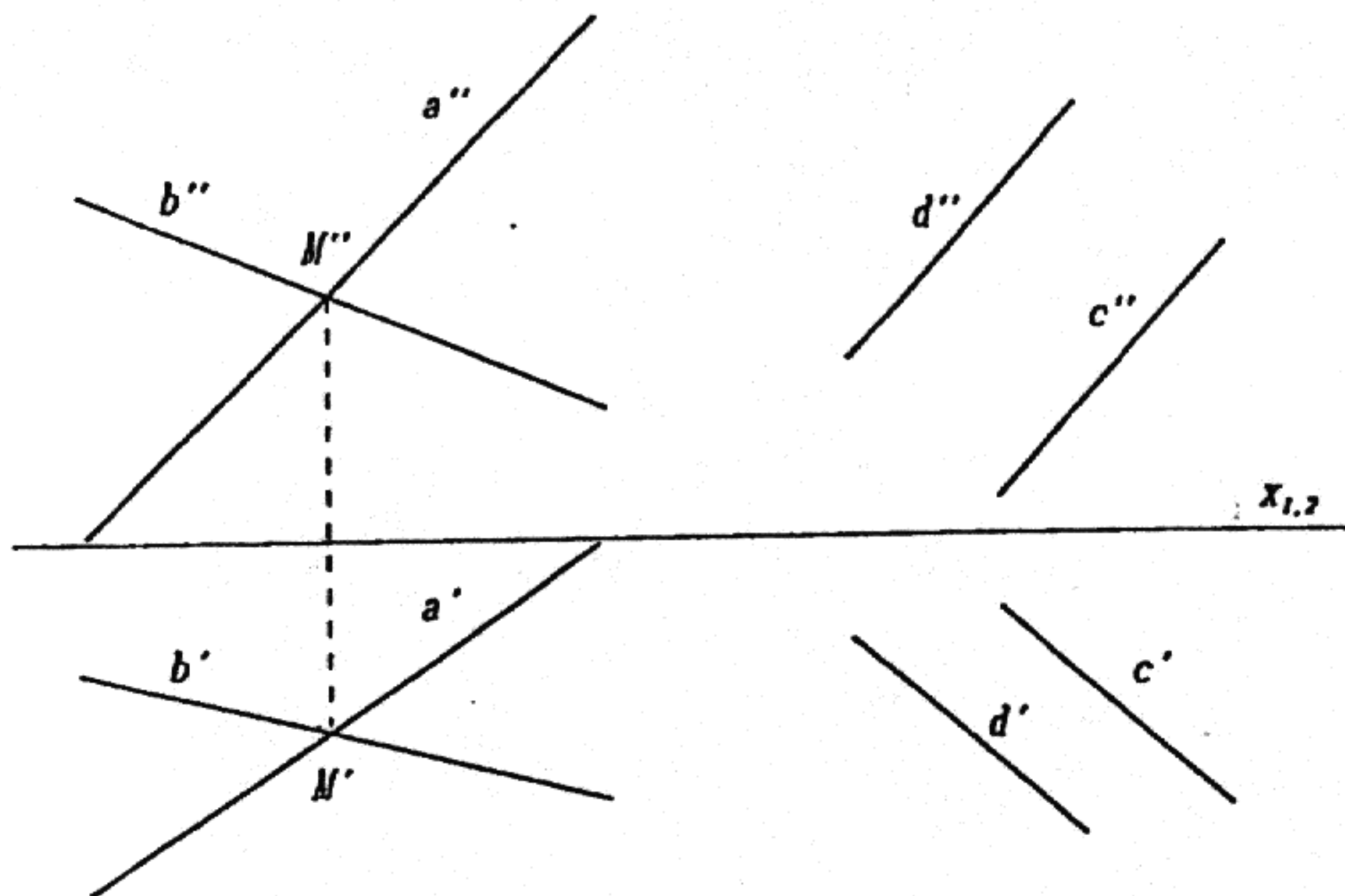
2.4. Két egyenes kölcsönös helyzete

Metsző egyeneseknek egy közös pontjuk van, síkot határoznak meg. A metszéspont első és második képének rendezettnek kell lennie (15. ábra).

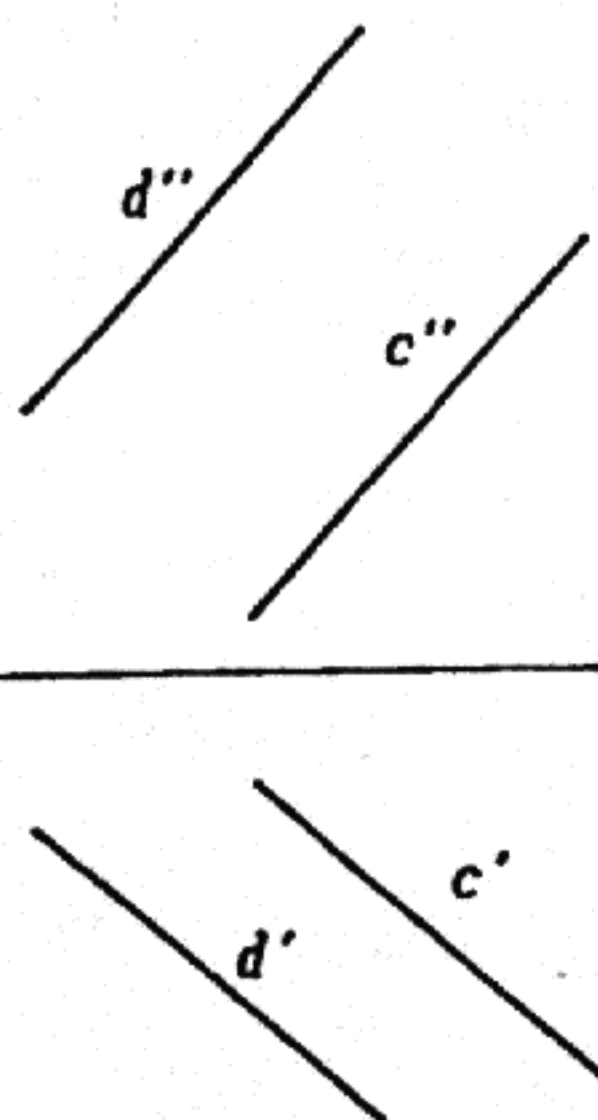
Párhuzamos egyeneseknek van közös síkjuk, de nincs végesbeli közös pontjuk. Párhuzamos egyenesek képei is párhuzamosak. (16. ábra).

Ha két vagy több egyenesnek valamelyik vetítősíkja közös -valamelyik képcik egybeesnek-, akkor fedőegyeneseknek nevezzük őket. A metsző vagy párhuzamos egyenesek lehetnek fedőegyenesek. (17. ábra).

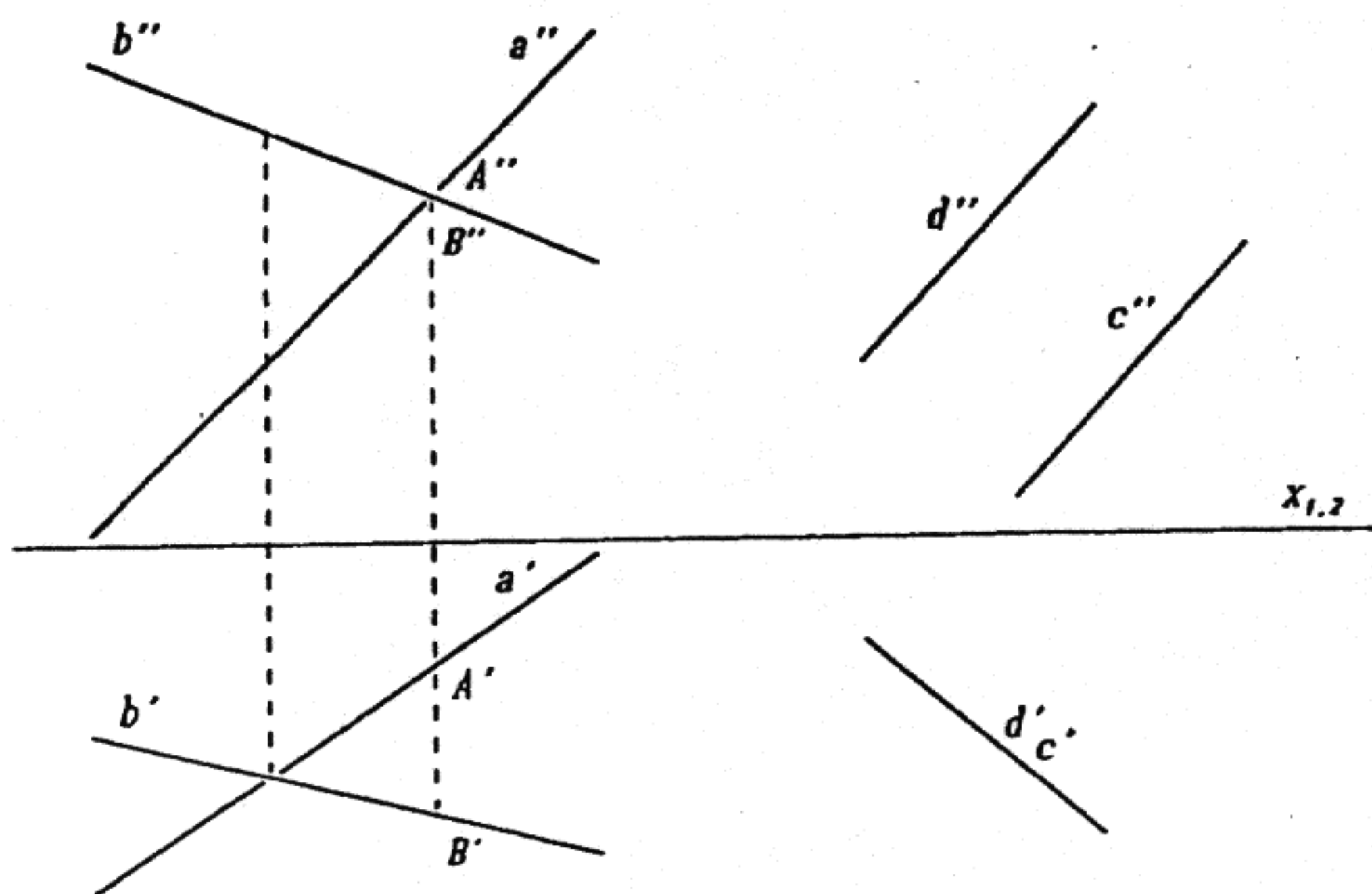
Kitérő egyeneseknek nincs közös pontjuk és nincs közös síkjuk sem. A képek metszéspontja csak fedőpontpár! A vetületi metszés környezetében a fedettség következtében kialakuló láthatóságuk a fedőpontok segítségével meghatározható. Azt az egyenest, amelyik megelőzi a másikat, vagy felül van a másikhoz képest grafikailag folytonos vonallal ábrázoljuk, a másikat pedig megszakítjuk. (18. ábra).



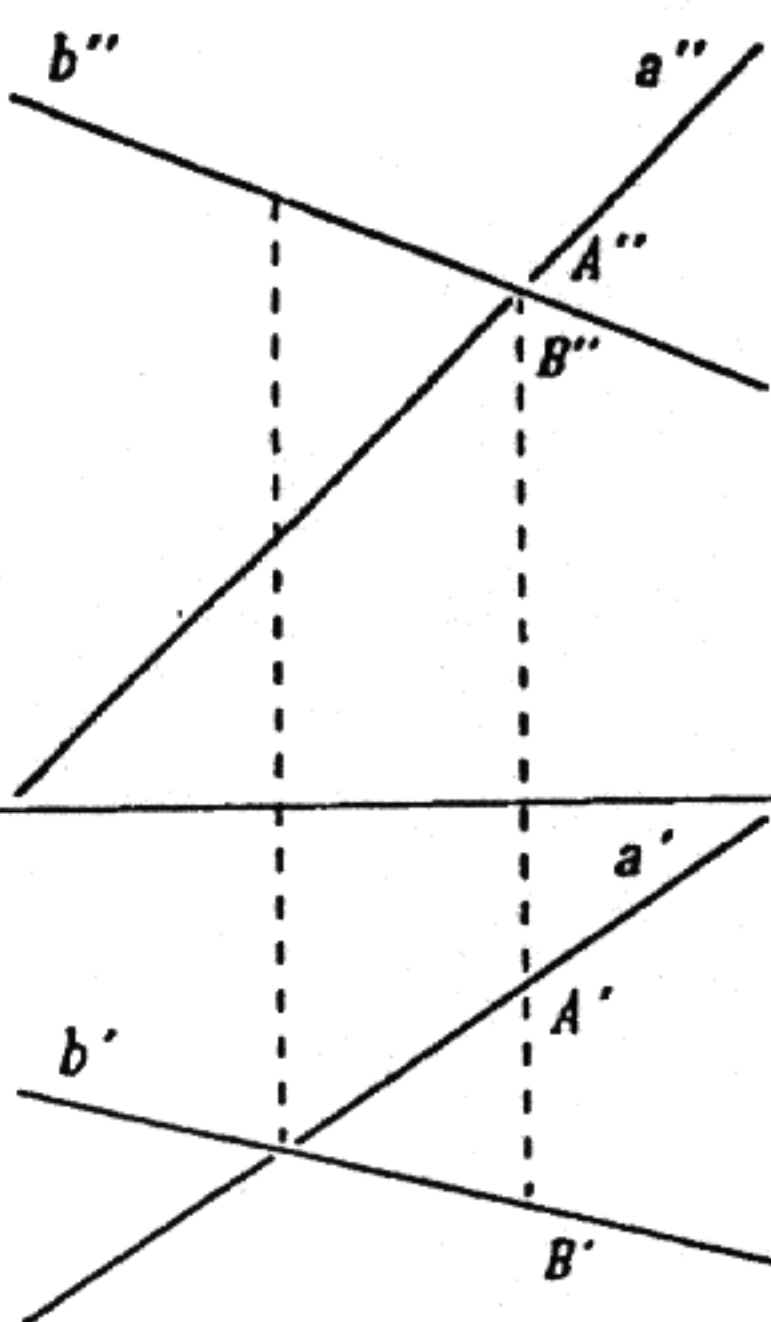
15. ábra



16. ábra



17. ábra



18. ábra

3. Sík ábrázolása

A pont és az egyenes képei a pontot és az egyenes egy szakaszát egyértelműen ábrázolják. Nem ez a helyzet a sík esetében. Egy általános helyzetű síkot a képsíkokra vetítve a teljes K_1 -et és K_2 -t kapjuk vetületként. A K_1 -ből és a K_2 -ből a sík egyértelműen nem rekonstruálható! Ezért a síkot közvetve, az őt meghatározó pontok és egyenesek megadásával ábrázoljuk.

Síkot határoz meg

1. három páronként nem egy egyenesre illeszkedő pont,
2. egy pont és egy rá nem illeszkedő egyenes,
3. párhuzamos egyenespár,
4. metsző egyenespár.

Illeszkedési és metszési feladatok megoldása során a felsorolt esetek közül legelőnyösebb a síkot két egyenesével megadni.

3.1. A sík rekonstrukciója

A sík rekonstrukciója az őt meghatározó visszaállított elemekhez illesztéssel történik.

3.2. Különleges helyzetű síkok

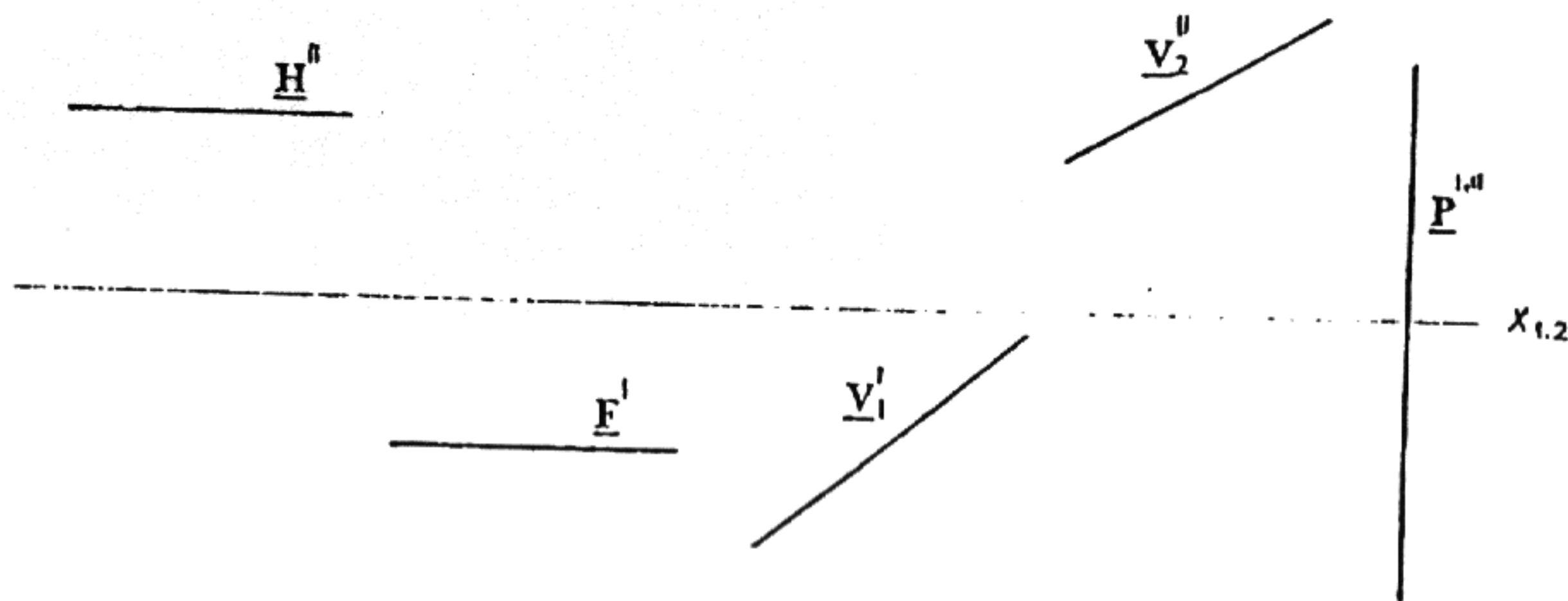
H : első képsíkkal párhuzamos, vagy horizontális sík,

F : második képsíkkal párhuzamos, vagy frontális sík,

V_1 : első vetítősík, amely merőleges az első képsíkra, (az első képen "élben látszik"),

V_2 : második vetítősík, amely merőleges a második képsíkra,

P : profilsík, merőleges az $x_{1,2}$ tengelyre, párhuzamos a harmadik képsíkkal.

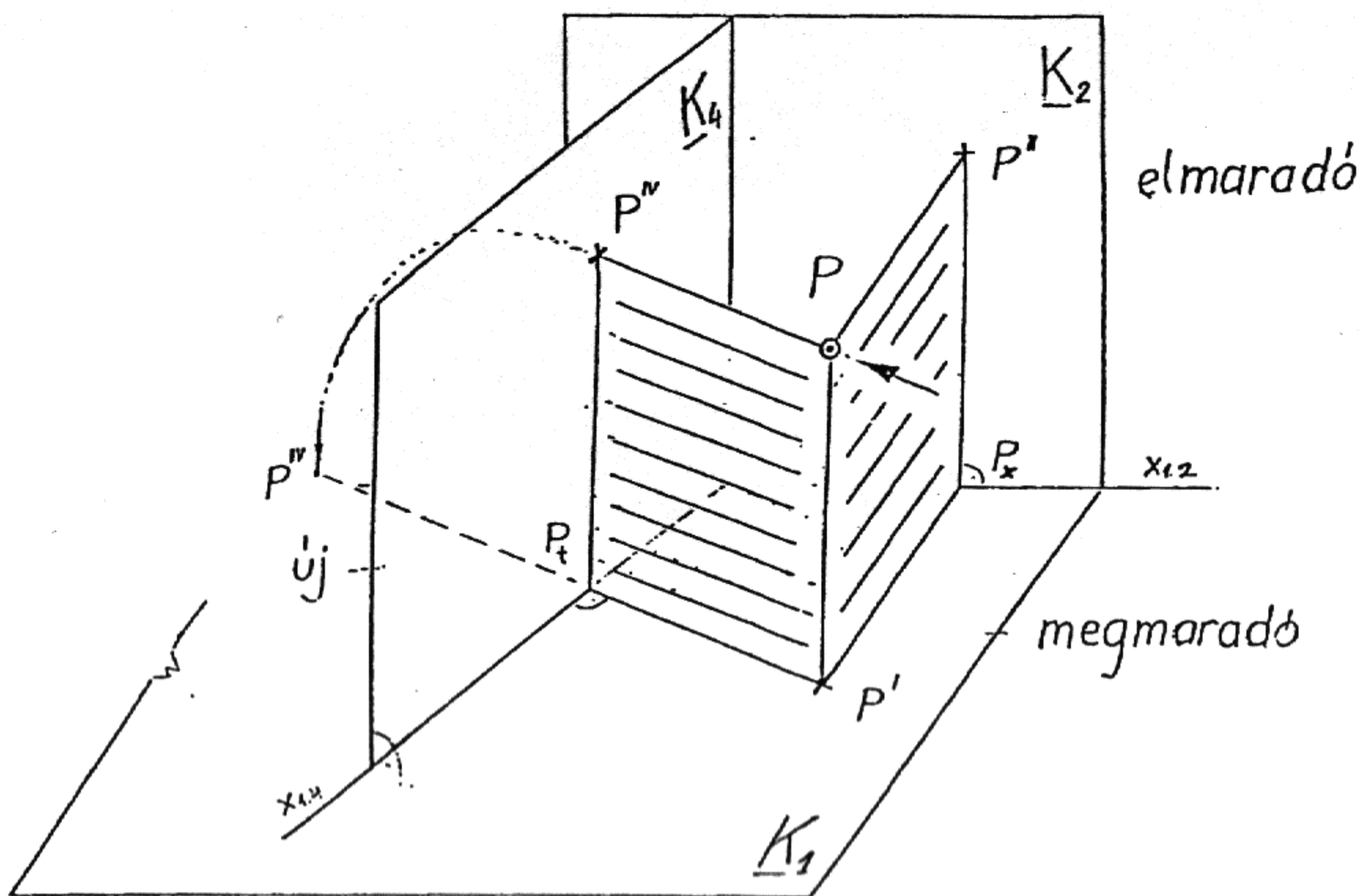


TRANSZFORMÁCIÓ

/Képsíkrendszer transzformáció/

A láttatás, a jól szemléltető ábrázolás és a mérhető (valódi nagyságú) képek szerkesztése sok esetben egymást kizáró körülmények. Új képsíkok bevezetésével, képsíkrendszer transzformációval, az egyik helyzetből a másikba való átmenet célszerűen megvalósítható. Ha a vetítési irányt nézési iránynak fogjuk fel, akkor a képsíkrendszer transzformációt röviden transzformációt úgy is értelmezhetjük, hogy az alakzatot más irányból nézzük. Az új nézési irányból való szemlélés történhet vagy olyan célból, hogy szemléletesebb, képies képet nyerjünk, vagy azért, hogy például egy síklapú alakzat valamely élét, illetve határoló lapját valódi nagyságban lássuk. Ha egy alakzat egyeneseit és síkjait különleges, egyszerű helyzetben ábrázoljuk, számos feladat -különös tekintettel a méretfeladatok- megoldása könnyebben elvégezhető. A különleges helyzeteket oly módon érjük el, hogy közben a tárgy térbeli helyzete változatlan marad, s a képsíkrendszer változik. A képsíkrendszert választjuk meg az alakzathoz képest alkalmas új helyzetben, céltranszformációt végzünk.

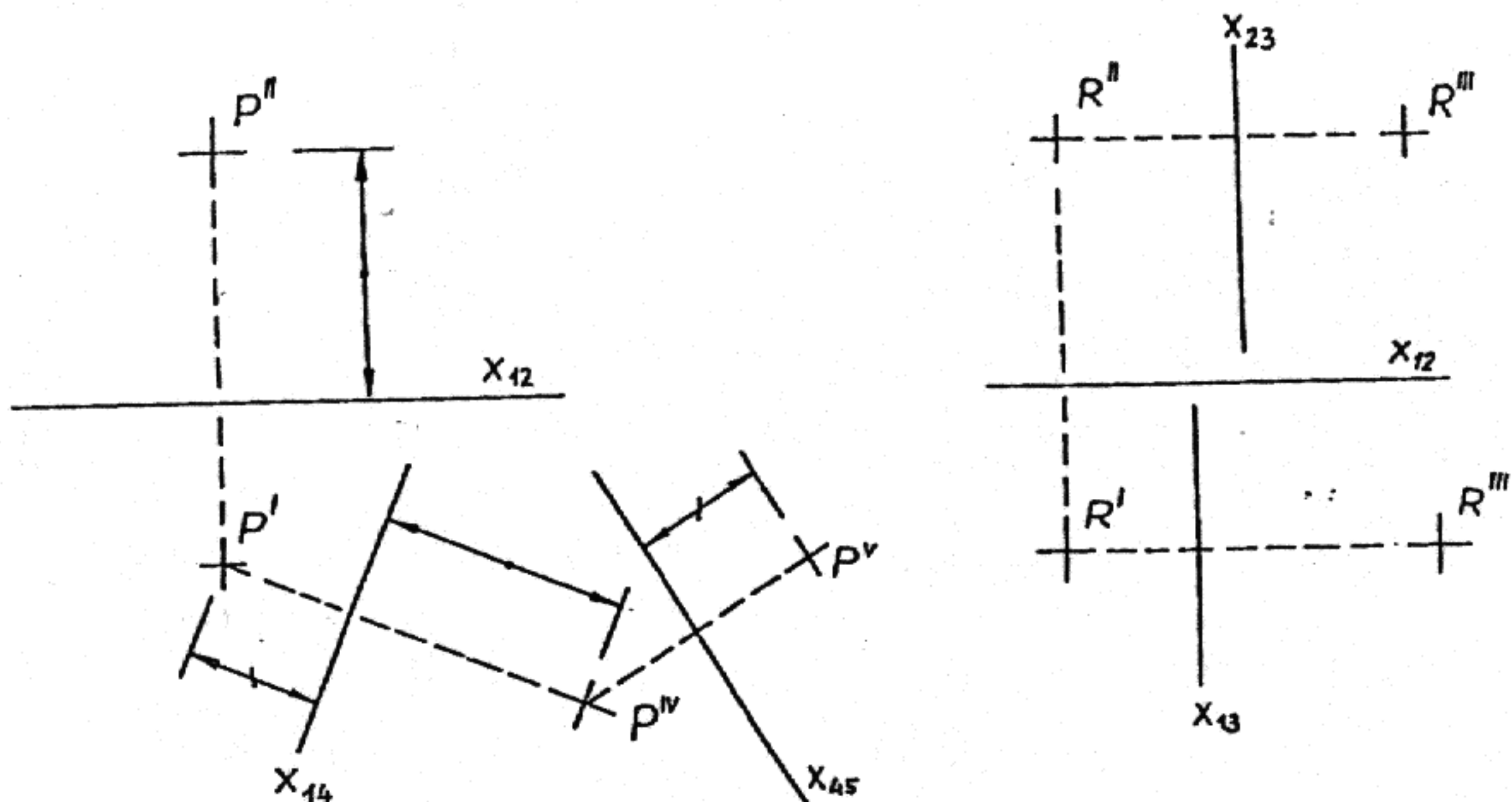
A képsíkrendszer transzformáció térben az új képsík felvételét és az új kép elkészítését jelenti. Az új kép vetítés és képsík egyesítés után jön létre.



A P pont K_1K_2 képsíkrendszerbeli $PP''P_xP'$ vetítő téglalapjának $P''P_x$ oldala egyenlő hosszúságú a K_1K_3 képsíkrendszerbeli $PP''''P_xP'$ vetítő téglalapjának a $P''''P_x$ oldalával (mindkettő egyenlő hosszúságú a PP' -vel), ezért a pont elmaradó rendezője megegyezik a pont új rendezőjével nagyságra és előjelre nézve.

Képsíktranszformáció szerkesztési lépései:

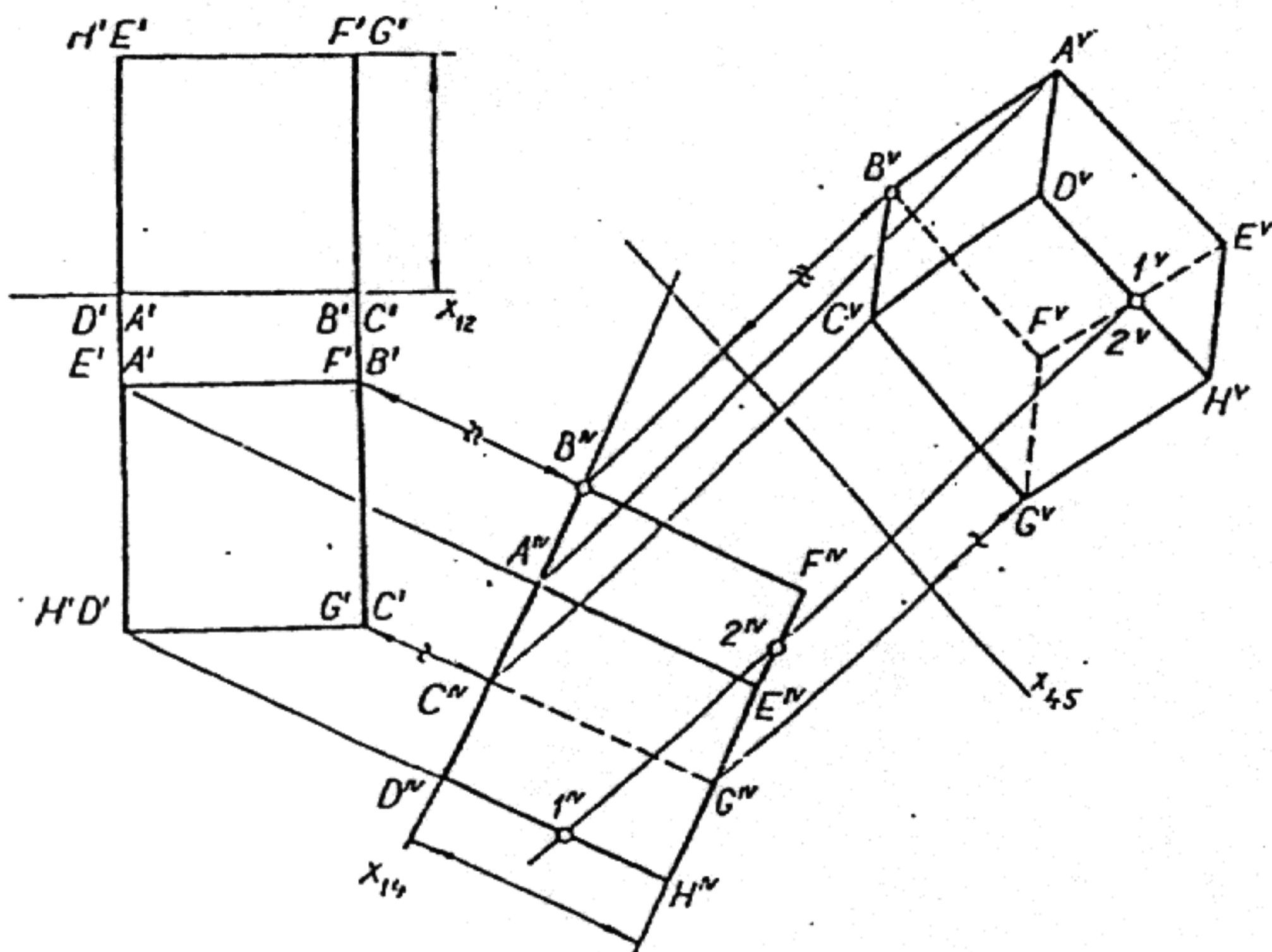
1. az új képtengely felvétele,
2. a pont megmaradó képéből az új rendezőegyenes megrajzolása az új tengelyre merőlegesen,
3. az új rendező felmérése az új tengelytől nagyság és értelem (előjel) szerint.



A képsíkrendszer transzformáció célja:

1. Különleges helyzetű alakzatokról képies kép szerkesztése (... ábra)
2. Általános helyzetű térelemek (egyenesek, síkok) célszerűen választott új képsík(ok) segítségével különleges helyzetbe transzformálása

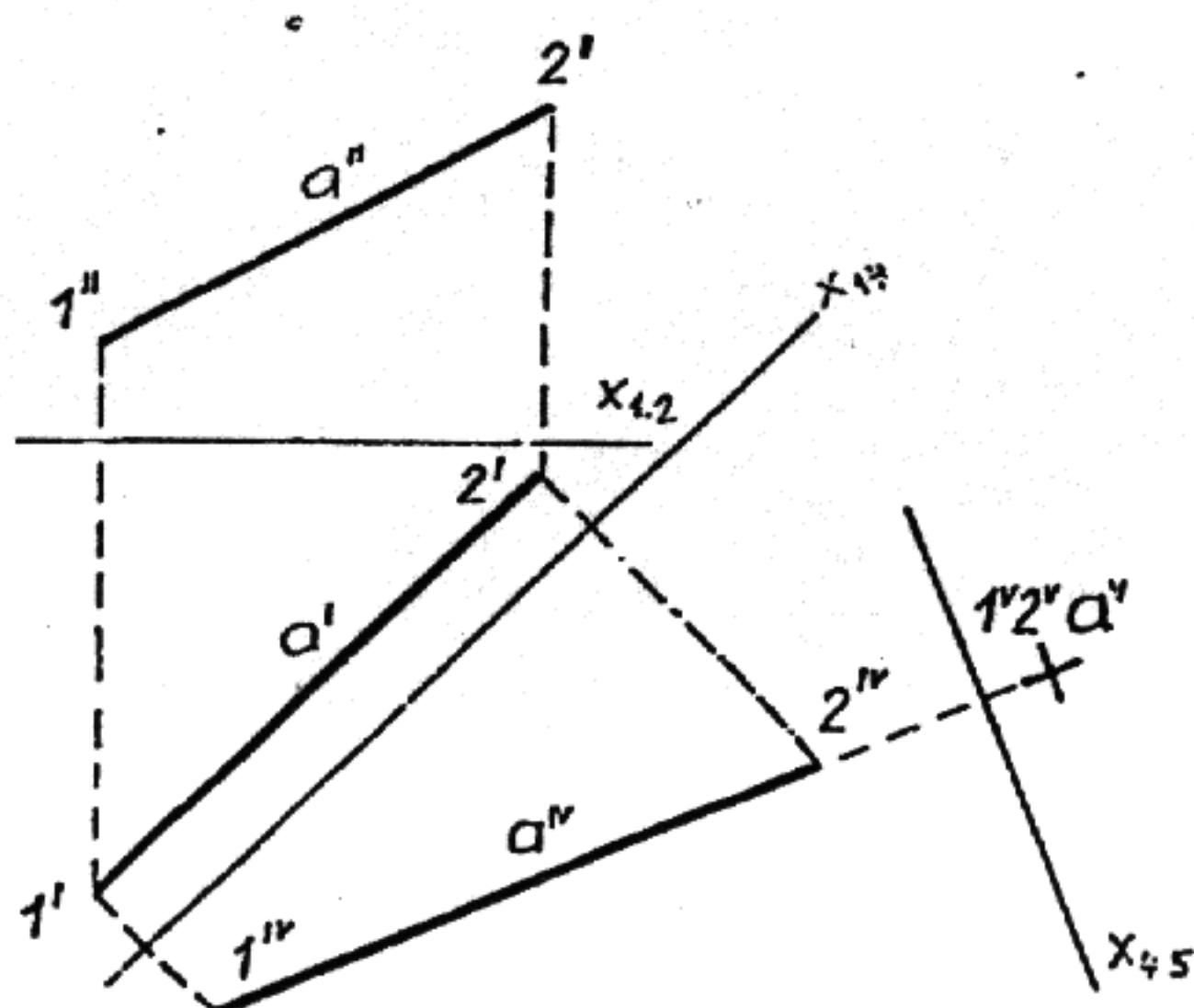
Képies kép szerkesztése



Egyenes transzformálása különleges helyzetekbe

A K_1K_2 képsíkrendszerben adott a egyenest először az új K_1K_4 képsíkrendszerben a K_4 negyedik képsíkkal párhuzamos helyzetbe hozzuk. Ehhez a K_4 képsíkot az egyenes első vetítősíkjával párhuzamosan vesszük fel, s a vetületben az $x_{1,4}$ tengely az a' -vel párhuzamos. Második lépésben, miután az a egyenes már párhuzamos a K_4 negyedik képsíkkal, a K_4 képsíkhöz kapcsolt K_5 ötödik képsíkot az egyenesre merőlegesen vesszük fel, s az $x_{4,5}$ tengely az a'' -re merőleges. Ezáltal a K_1K_2 képsíkrendszerben általános helyzetű a egyenes a K_1K_4 -ben képsíkkal párhuzamos egyenesként, a K_4K_5 képsíkrendszerben pedig vetítősugárként viselkedik.

*Egyenes esetében egy kiinduló általános helyzetből
az első transzformáció képsíkkal párhuzamos,
a második transzformáció képsíkra merőleges
helyzetet eredményez.*

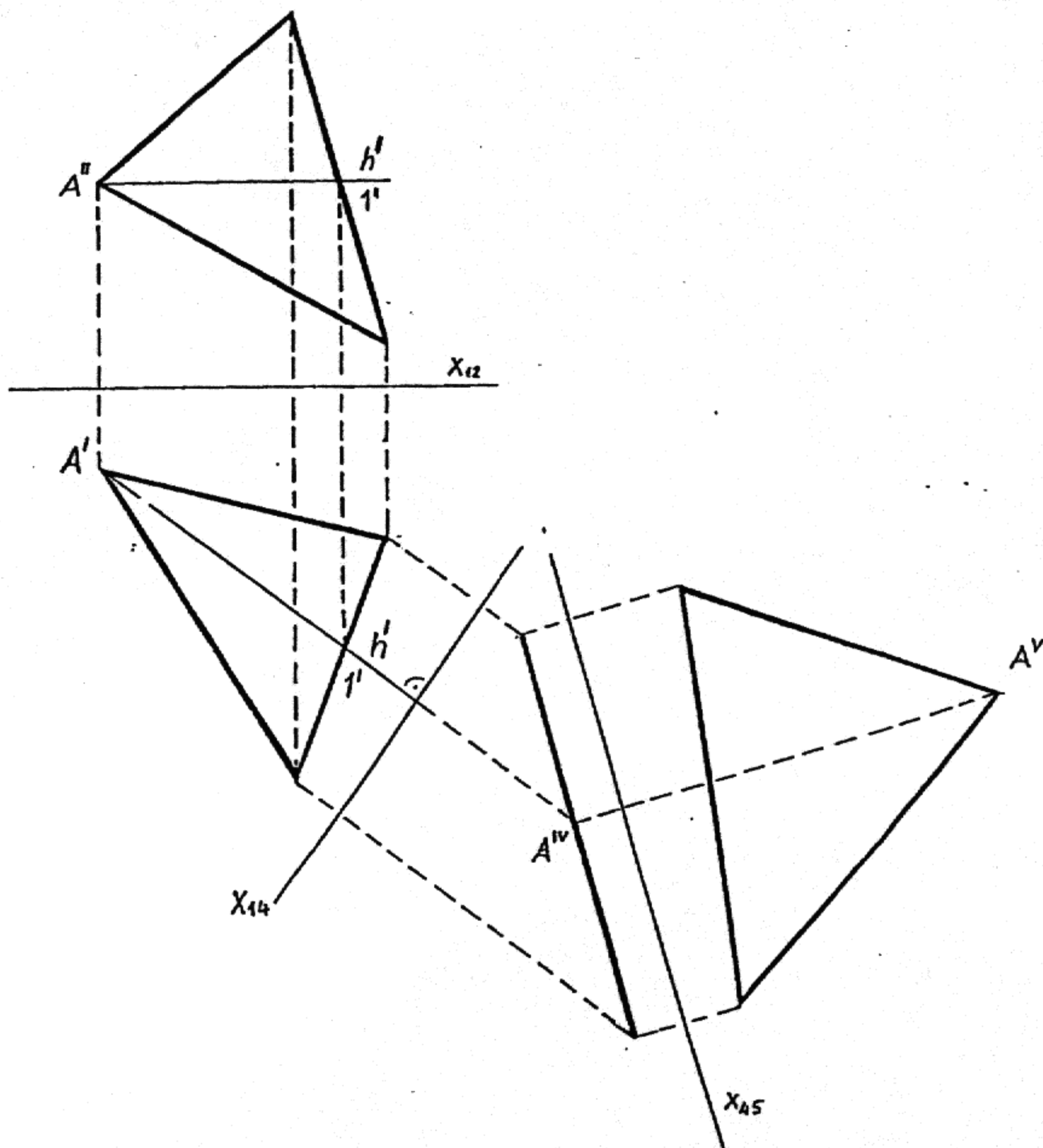


Sík transzformálása különleges helyzetekbe

(Háromszög valódi nagyságának szerkesztése)

A K_1K_2 képsíkrendszerben általános helyzetű $S(ABC)$ síkot először egy új képsíkrendszerben az új K_4 képsíkra merőleges helyzetbe hozzuk. Ehhez a K_4 képsíkot az S sík valamely fővonalára merőlegesen vesszük fel. Esetünkben a K_4 merőleges a sík első fővonalára h -ra. Ezáltal elérhető, hogy az új képsík az adott síkra és az első képsíkra is merőleges lesz, s a K_1K_4 képsíkrendszerben az S sík negyedik vetítősíkká válik, azt mondjuk, hogy a sík "élben látszik". Első lépésben tehát az új $x_{1,4}$ képtengely a sík h fővonalára merőleges. Másodszor, ha a sík már képsíkra merőleges, az új K_5 ötödik képsíkot az adott síkkal párhuzamosan vesszük fel. A vetületben az $x_{4,5}$ tengely a sík negyedik, élben megjelenő képével párhuzamos. A K_4K_5 képsíkrendszerben az S sík párhuzamos a K_5 ötödik képsíkkal, ahol a síkbeli valódi méretek torzulásmentesen lemérhetők.

*Sík esetében egy kiinduló általános helyzetből
az első transzformáció képsíkra merőleges,
a második transzformáció képsíkkal párhuzamos
helyzetet eredményez.*



Helyzetgeometriai feladatokTérelemek összekötése, illesztése, metszéseÖsszekötés

Térelemek összekötése általában nem önálló probléma, mert az ábrázolás és illesztés több feladata nem nélkülözheti az összekötést. Sok esetben két vagy több térelem összekötésével újabb térelemhez jutunk. Lássunk néhány példát:

- Két pont összekötése egyenes: $e(AB)$.
- Pont és rá nem illeszkedő egyenes összekötése sík: $S(P, e)$.
- Három különböző pont összekötése sík: $E(ABC)$.
- Az A_∞ végtelentávolsági és a B közönséges pont összekötése olyan B-re illeszkedő egyenes, amely az A_∞ irányával párhuzamos.
- Az e_∞ egyenesnek és a P pontnak az összekötése olyan P-re illeszkedő sík, amely az e_∞ -t meghatározó síkkal párhuzamos.

Illeszkedés

Két különféle térelem illeszkedik egymáshoz, ha az egyik tartalmazza a másikat. Térelemek halmazaira alkalmazva a halmazelméleti terminológiát: az egyik térelem részhalmaza a másiknak. Két egyenes metsző helyzetében is szoktuk alkalmazni az "illeszkedik" szóhasználatot. Noha a térelemek illeszkedése kölcsönös, mégsem közömbös, hogy melyik az adott és melyik az illesztett térelem.

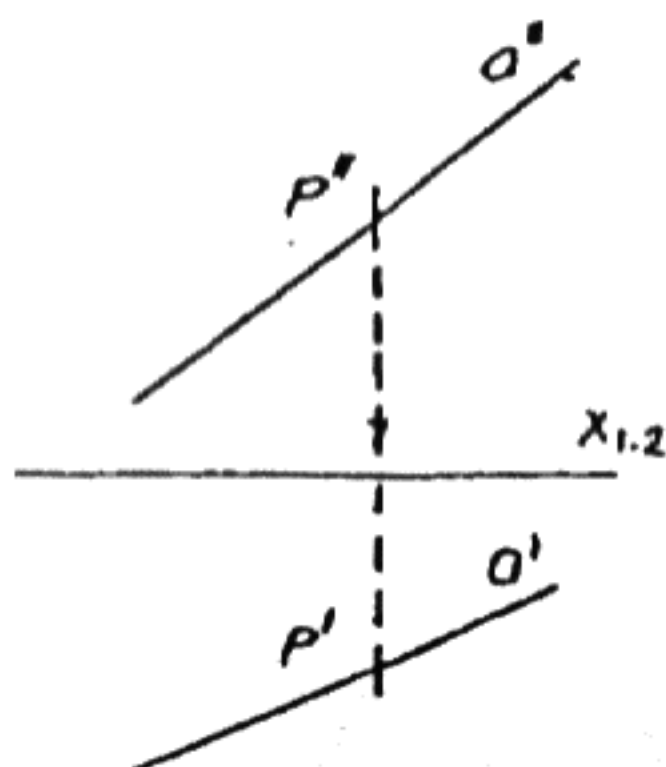
Tekintsük át az alapelemek illeszkedési relációit:

pont - pont,	egyenes - pont,	sík - pont,
pont - egyenes,	egyenes - egyenes,	sík - egyenes,
pont - sík,	egyenes - sík,	sík - sík.

Pont illesztése egyenesre

Ha egy pont illeszkedik egy egyenesre, akkor a pont képei illeszkednek az egyenes megfelelő képeire.

A P pont P'' második képét tetszőlegesen jelöljük ki az a''-n. A P''-n átmenő rendezővonal és az a' metszésében kapjuk a P'-t. Hasonlóan járunk el akkor is, ha az első képen kezdjük a szerkesztést.



-4x

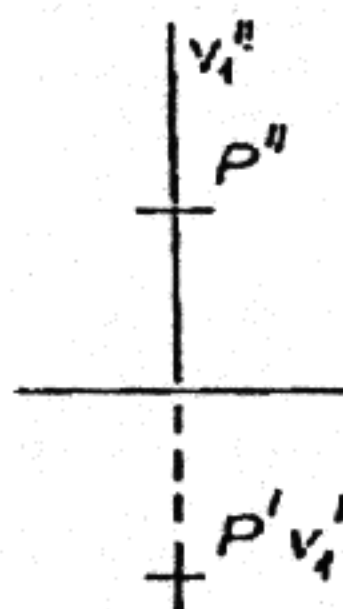
Különleges esetek

Különleges helyzetű egyenesek (vetítősugár, profilegyenes) esetében a rendezés nem vezet célhoz, mert a szóban forgó egyeneseknek a szerkesztéshez szükséges képe éppen rendező irányú.

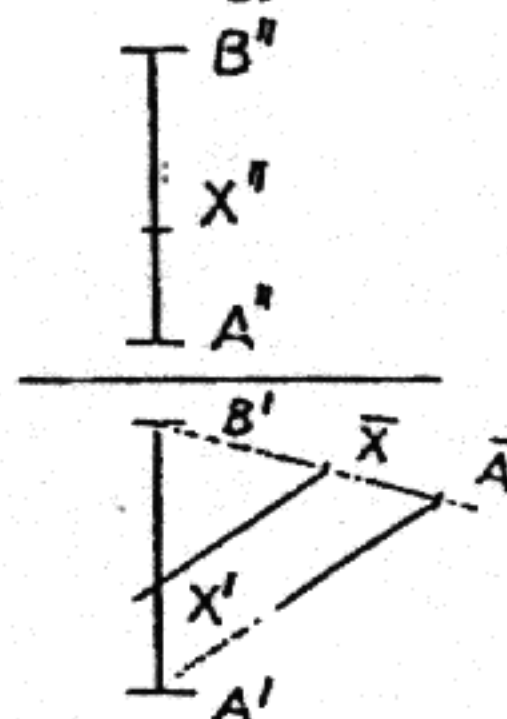
Vetítősugár illeszkedő pontok valamennyien fedőpontok.

Profilegyenesre pont illesztése az osztóviszony változatlanságának alapján hasonlósági szerkesztéssel történik.

Vetítősugár



Profilegyenes



A kétképsíkos terület *ortogonális párhuzal projekció*. A párhuzamos vetítés esetén a párhuzamos szelők tétele következtében teljesül az *aránytartó* vagy *osztóviszonytartó affin tulajdonság*.

Egy egyenesre A, X, B sorrendben illeszkedő pontokra vonatkozó *egyszerű viszonyon* vagy *osztóviszonyon* értjük az

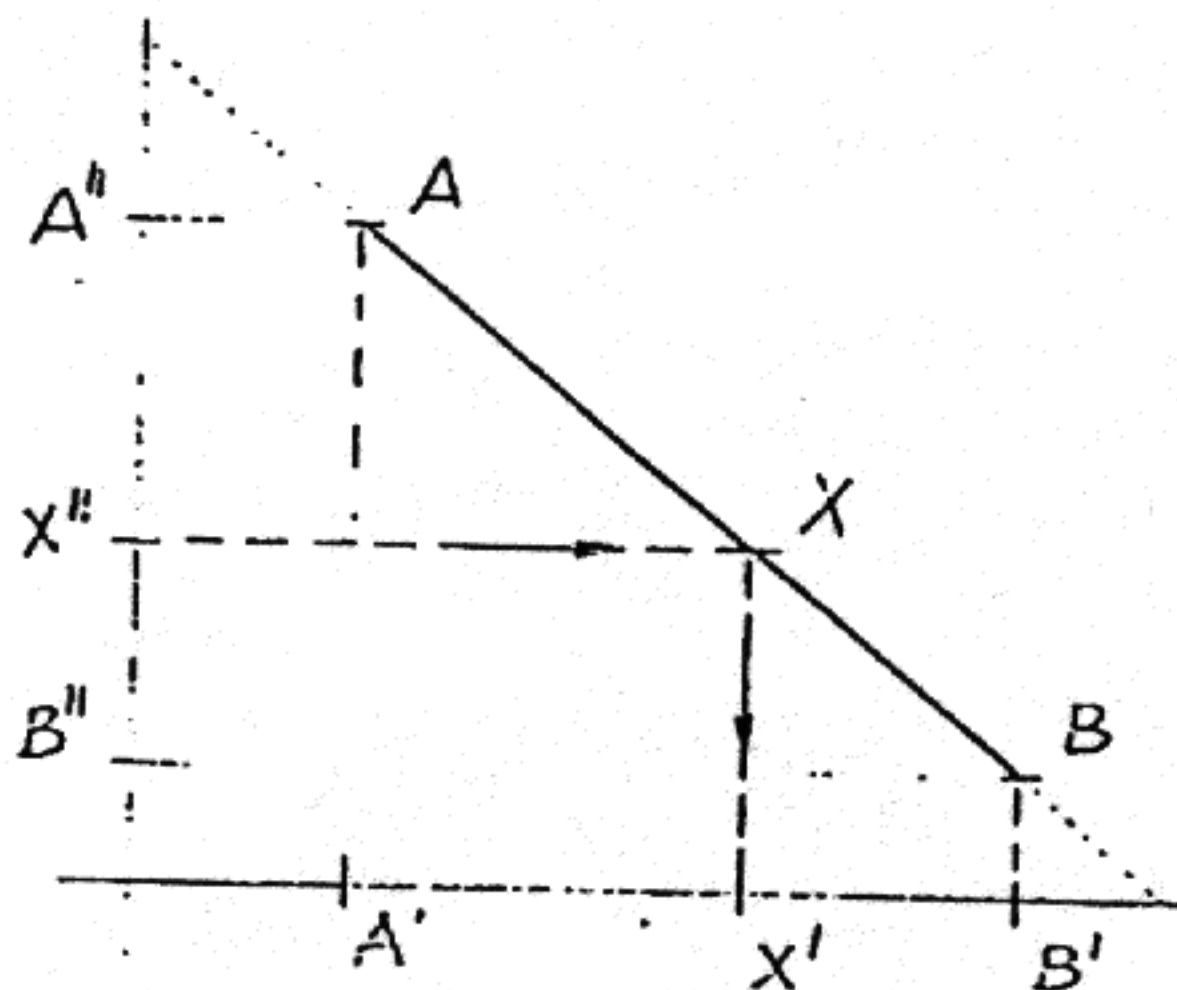
$$(AXB) = \frac{AX}{XB}$$

arányt.

A vetítés után, hivatkozva a párhuzamos szelők tételére:

$$(AXB) = (A''X''B'') = (A'X'B')$$

teljesül. Ezáltal az egyik képen keletkező arány átörökhethető a másik képre.



Egyenes illesztése síkra

Egy egyenes illeszkedik egy síkra, ha az egyenes két pontja benne van a síkban.

Adott egy S (a b) párhuzamos egyenesekkel meghatározott dőlt helyzetű sík.

Szerkesszük meg egy olyan g egyenesnek az első és második képét, amely illeszkedik az S síkra. / $g \rightarrow S$ /

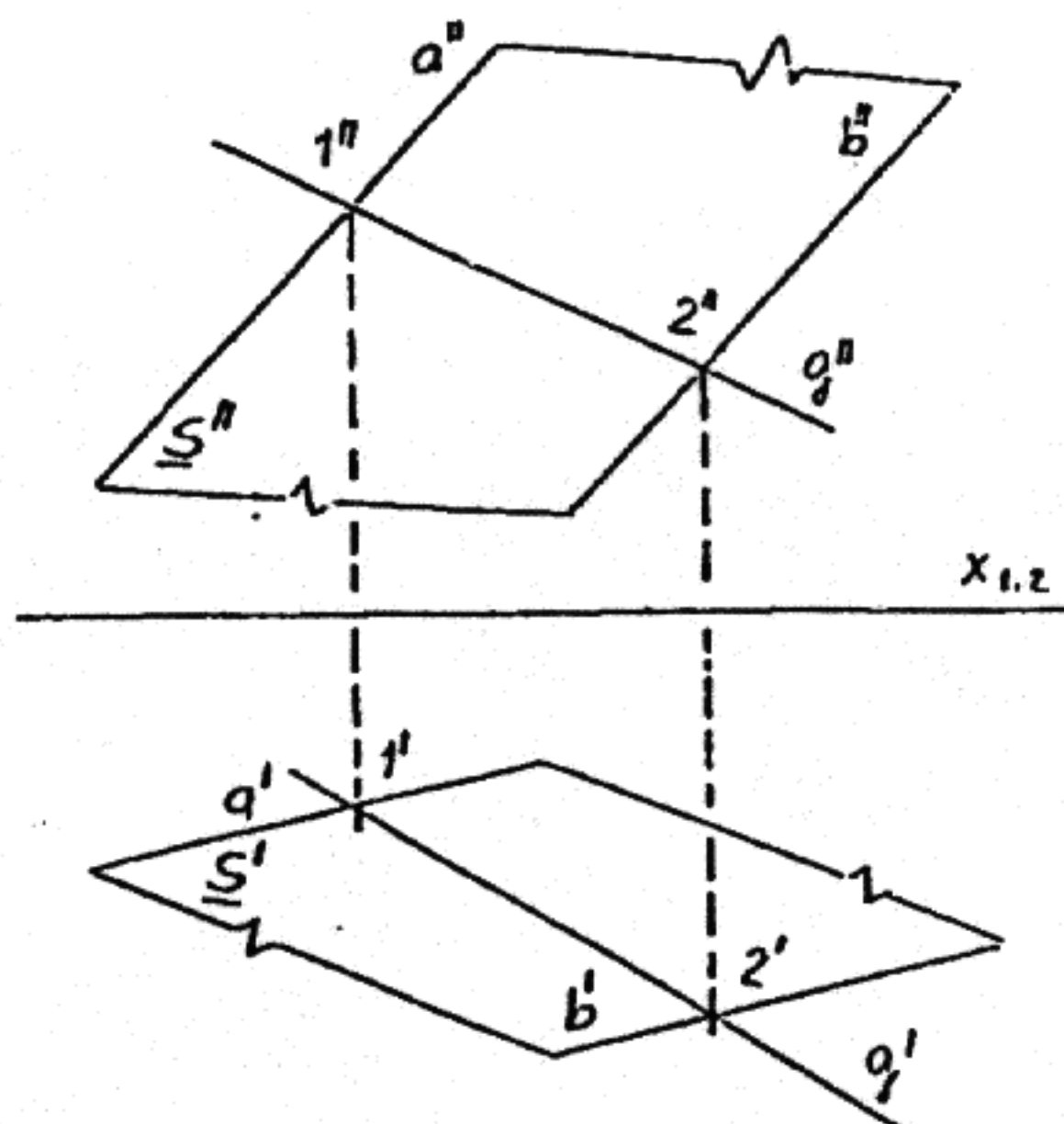
Megoldás:

-A g'' -t tetszőlegesen vegyük fel úgy, hogy messe a síkbeli a és b egyeneseket.

-Mivel g benne van a síkban, az 1 és 2 pontokban metszi a síkot meghatározó a és b egyeneseket. / $g''(1'' 2'')$ /

-Rendezéssel adódik az $1', 2'$.

-A g egyenes első képét az $1'$ és $2'$ összekötésével kapjuk. / $g'(1' 2')$ /



Pont illesztése síkra

Pontot tartóegyenésével illesztünk síkra.

Adott: S (a b)

Szerkesztendő: $P \rightarrow S$

Megoldás:

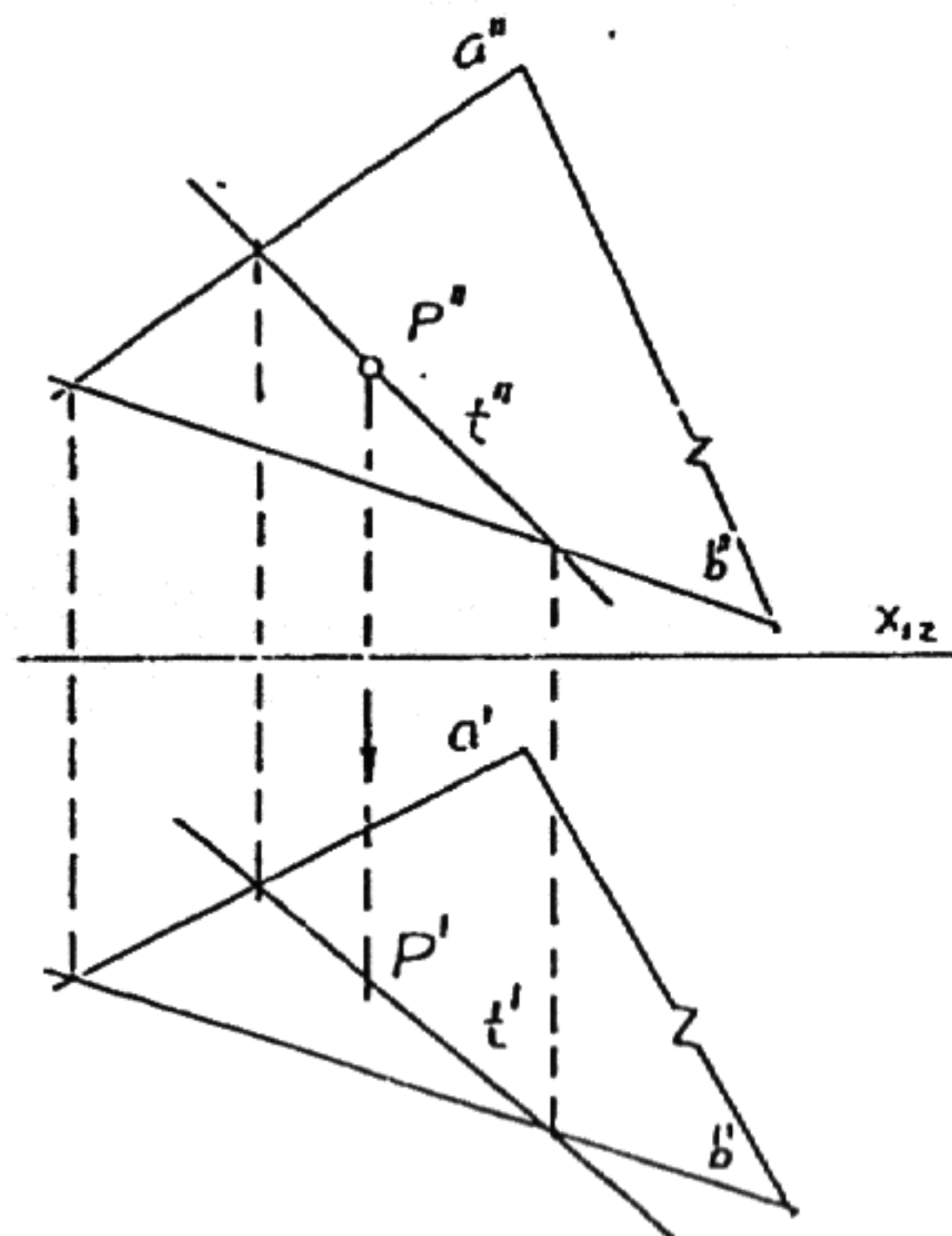
P'' tetszőleges

$t'' \rightarrow P''$

t : tartóegyenes

$t(t' t'') \rightarrow S$

$P' \rightarrow t'$



A sík különleges egyenesei

A sík különleges egyenesének tekintjük azokat, amelyek a képsíkokhoz képest vagy a sík más egyeneséhez képest bizonyos párhuzamossági vagy merőlegességi tulajdonsággal rendelkeznek.

Első fővonal: síkra illeszkedő, horizontális egyenes /párhuzamos a K_1 képsíkkal/

Második fővonal: síkra illeszkedő, frontális egyenes /párhuzamos K_2 képsíkkal/

Első nyomvonal: a síknak az első képsíkkal alkotott metszésvonala /a K_1 első képsíkbeli horizontális egyeneses/

Második nyomvonal: a síknak a második képsíkkal alkotott metszésvonala /a K_2 második képsíkbeli frontális egyeneses/

Első esésvonal: síkra illeszkedő olyan egyenes, amely merőleges a sík első fővonalaira.

Második esésvonal: síkra illeszkedő olyan egyenes, amely merőleges a sík második fővonalaira.

Profil egyenes a síkban: síkra illeszkedő profilegyenes.

A sík különleges egyeneseinek ábrázolása:

Az $S(aP)$ síkban ábrázoljunk különleges egyeneseket!

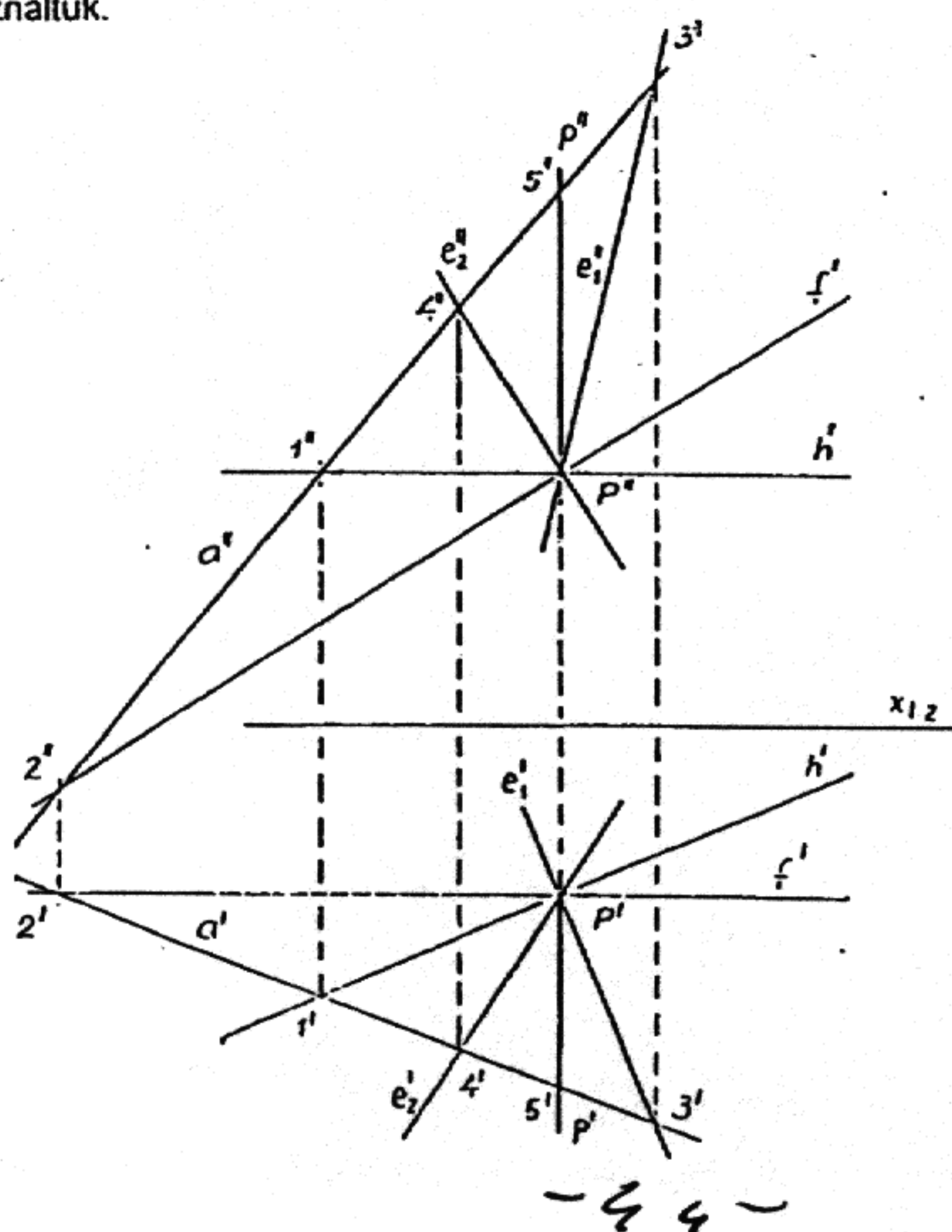
A h első fővonalnak először a második képét vesszük fel a képtengellyel párhuzamosan, majd a ráilleszkedő P és 1 pontok segítségével illesztéssel határozzuk meg az első képet.

Az f második fővonalnak először az első képét vesszük fel a képtengellyel párhuzamosan, majd a ráilleszkedő P és 2 pontok segítségével illesztéssel határozzuk meg a második képet.

Az esésvonalak ábrázolásakor alkalmazzuk a derékszög képeire vonatkozó ismeretet, mivel egy sík valamely esésvonala és az ugyanolyan nevű fővonala egy derékszög szárait képezik. *Derékszög képe változatlanul derékszög, ha a szög szárai közül legalább az egyik párhuzamos a képsíkkal.*

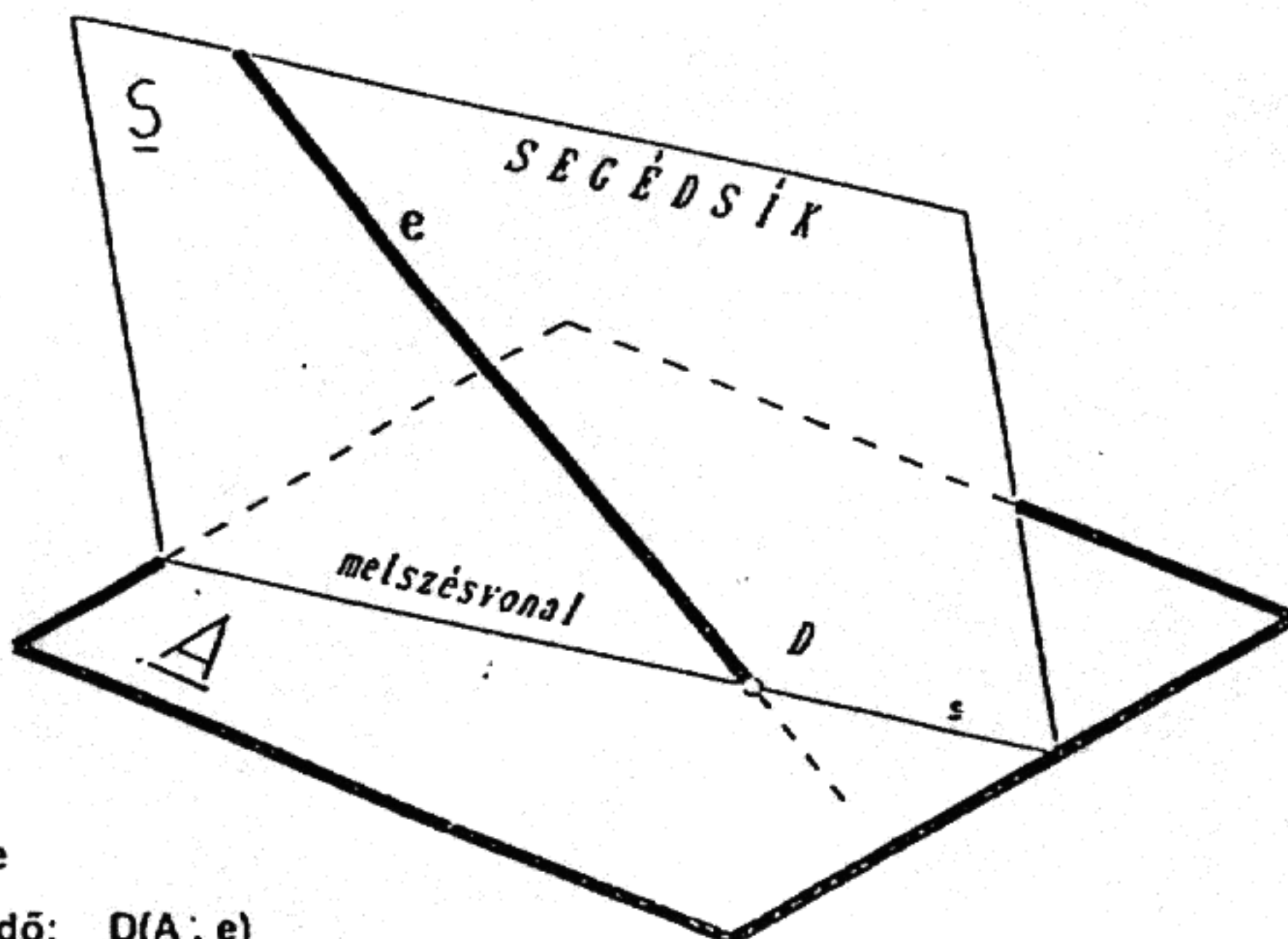
Első esésvonal első képe merőleges az első fővonal első képére, a második képét a síkra lörténő illesztéssel szerkesztjük meg. Az e_1 első esésvonal illesztésekor a P és 3 pontokat használtuk.

Második esésvonal második képe merőleges a második fővonal második képére, az első képét a síkra illesztéssel szerkesztjük meg. Az e_2 második esésvonal illesztésekor a P és 4 pontokat használtuk.



Egyenes és sík metszése

Egy adott sík és egy vele nem párhuzamos egyenes dőléspontjának elkészítéséhez az egyenesre *tetszőleges segédsíkot* fektetünk, majd meghatározzuk a segédsíknak az adott síkkal való metszésvonalát, s ez a metszésvonal metszi ki a dőlő egyenesből a metszéspontot. (Rendezett nézeteken való szerkesztéskor a segédsík általában a metsző egyenes valamely vetítősíkja.)



Adott: A, e

Szerkesztendő: $D(A, e)$

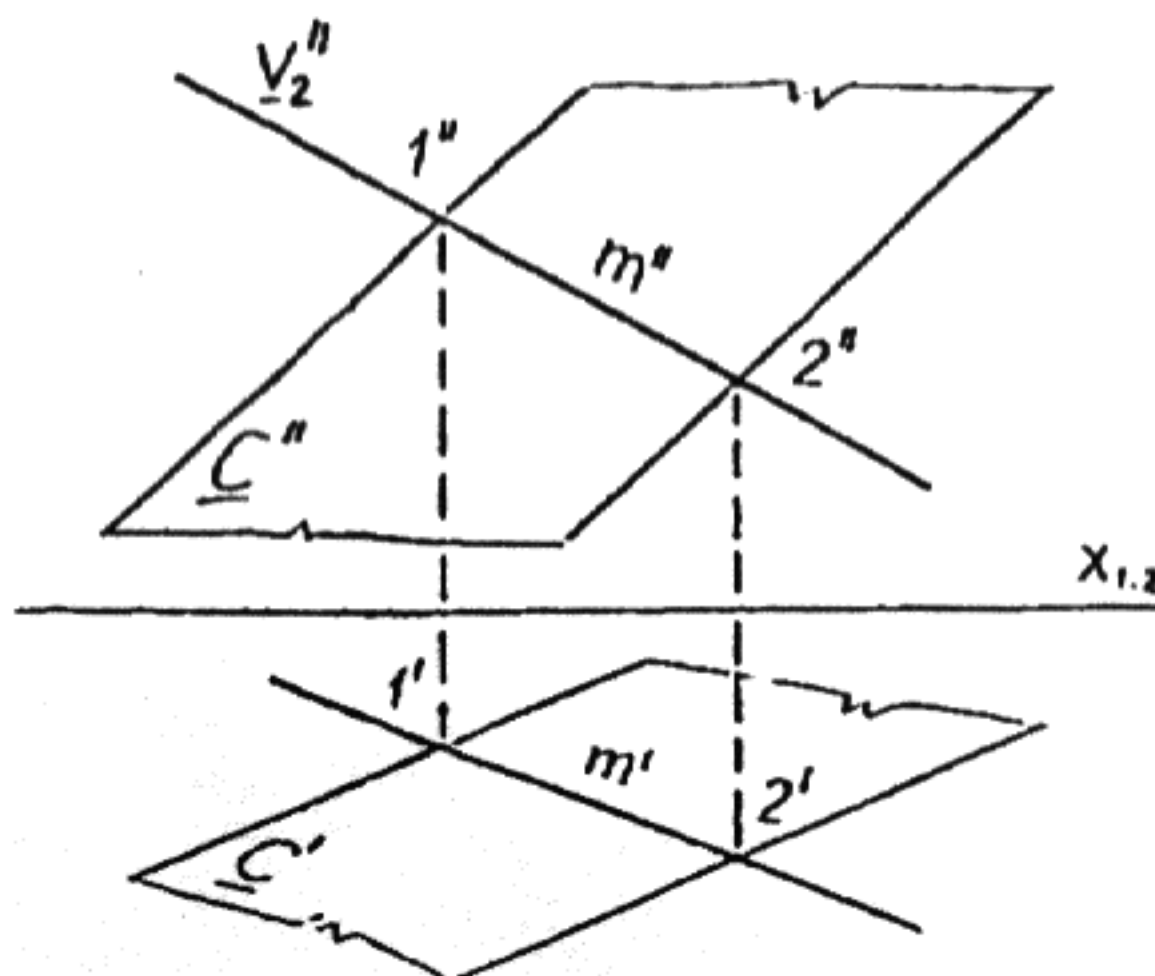
Megoldás:

1. $\underline{S} \rightarrow o - e,$
2. $s(\underline{A} \underline{S}),$
3. $D(e s).$

Az ismertett eljárás második lépésében az adott sík és a segédsík metszésvonalát kell elkészíteni. Általános esetben viszont két sík metszése a dőléspont szerkesztésre épülhet. Azonban különleges esetben, ha a két sík közül legalább az egyik vetítősík, a metszés elvégzése valójában illesztési probléma. Ekkor ugyanis a metszésvonal egyik képe -az ahol a vetítősík élben látszik- közvetlenül felismerhető, a metszésvonal másik képe pedig illesztéssel meghatározható, mivel a metszésvonal a két sík közös egyenese.

Két sík metszése abban az esetben, ha az egyik sík vetítősík.

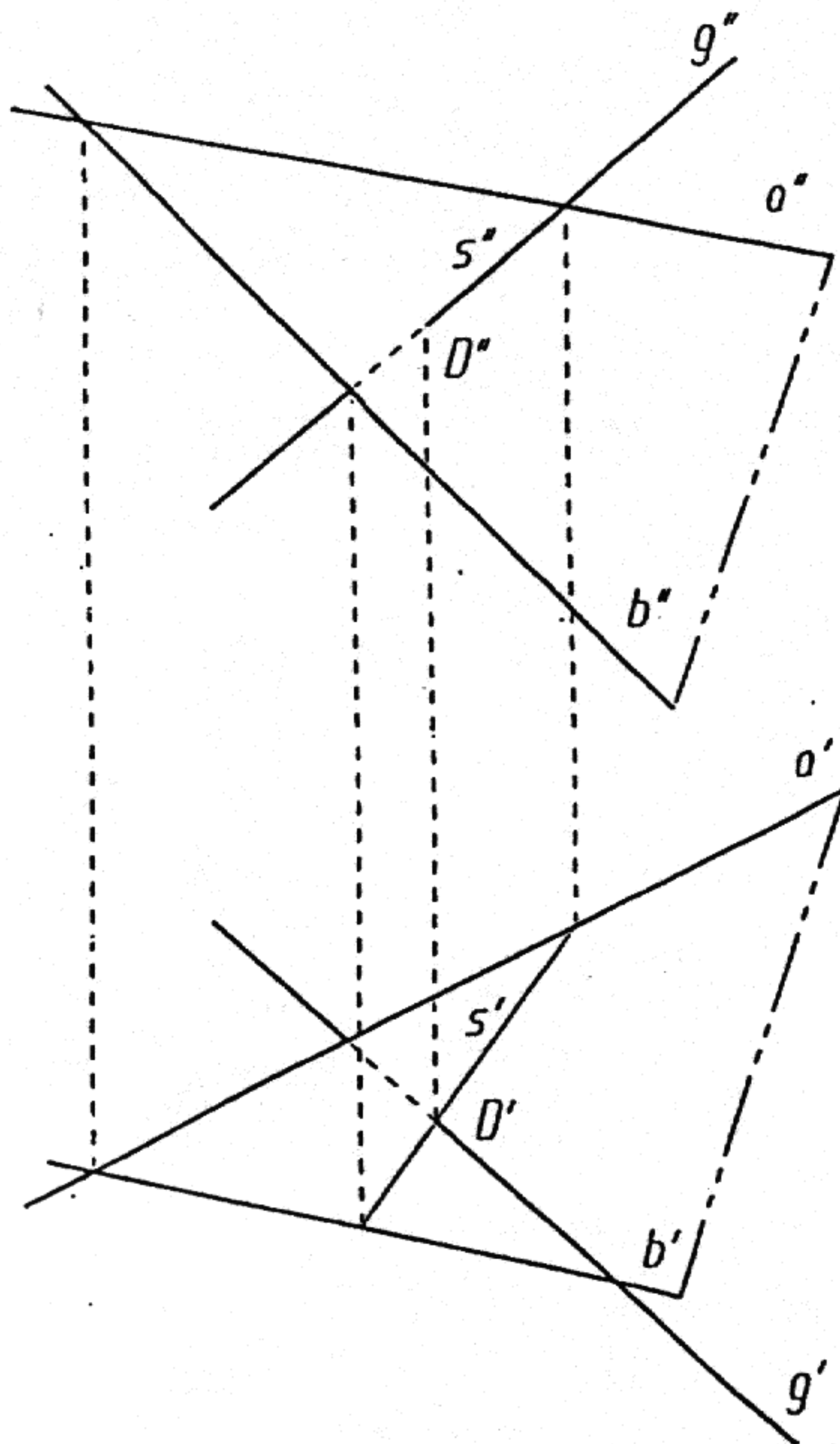
A $\underline{C}(ab)$ párhuzamos egyenesekkel adott dőlt helyzetű síkot messük a $\underline{V}_2$ második vetítősíkkal! A metszésvonal $m''(1''2'')$ második képe közvetlenül felismerhető, az $m'(1'2')$ első kép elkészítése pedig az 1 és 2 pontnak $\underline{C}$ síkra való illesztésével megoldható.



Sík és egyenes dőléspontjának szerkesztése

Az $S(ab)$ metsző egyenesekkel adott sík és a g egyenes dőléspontjának elkészítéséhez segédsíknak használjuk a g egyenes V_2 második vetítősíkját. Ez a sík az S síkot a g egyenessel második fedésben lévő s egyenesben metszi. Az s fedőegyenes s' első képét az S síkra való illesztéssel kapjuk. Az s' és g' metszéspontjában találjuk a dőléspont D' első képét, amelyet rendezve a második képre adódik a D'' .

A láthatóság eldöntését az S síkbeli a vagy b , illetve a hozzájuk képest kitérő g egyenes fedeltségi vizsgálatával végezzük.



Két sík metszésvonala

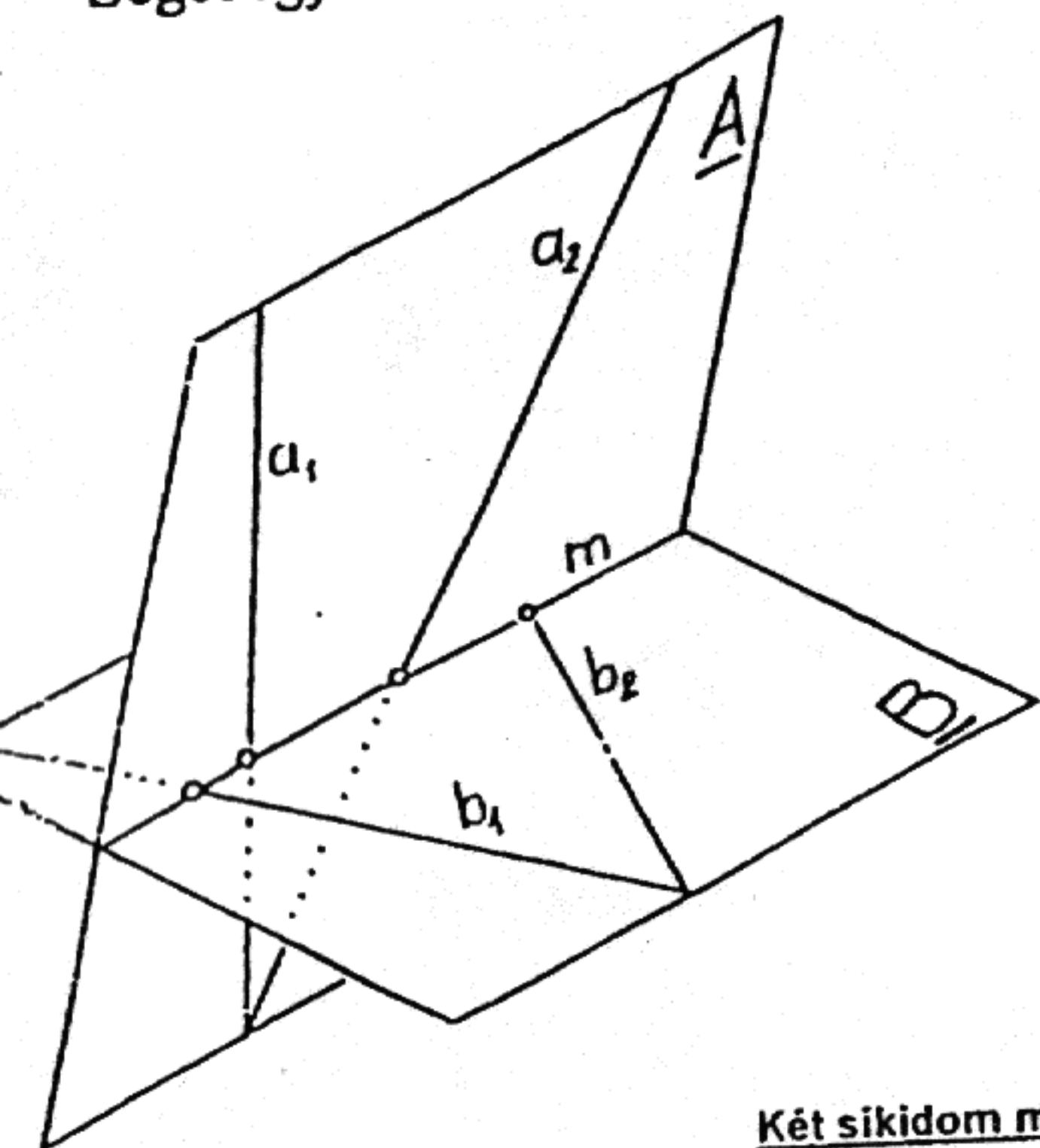
1. Segédegyenesek módszere

Az adott A és B sík m metszésvonalát az A vagy a B síkból választott egy-egy segédegyenes felhasználásával készítjük. Az egyik síkból választott segédegyenesnek a másik síkkal alkotott metszéspontja illeszkedik a metszésvonalra. A metszésvonal két dőléspont összekötésével keletkezik.

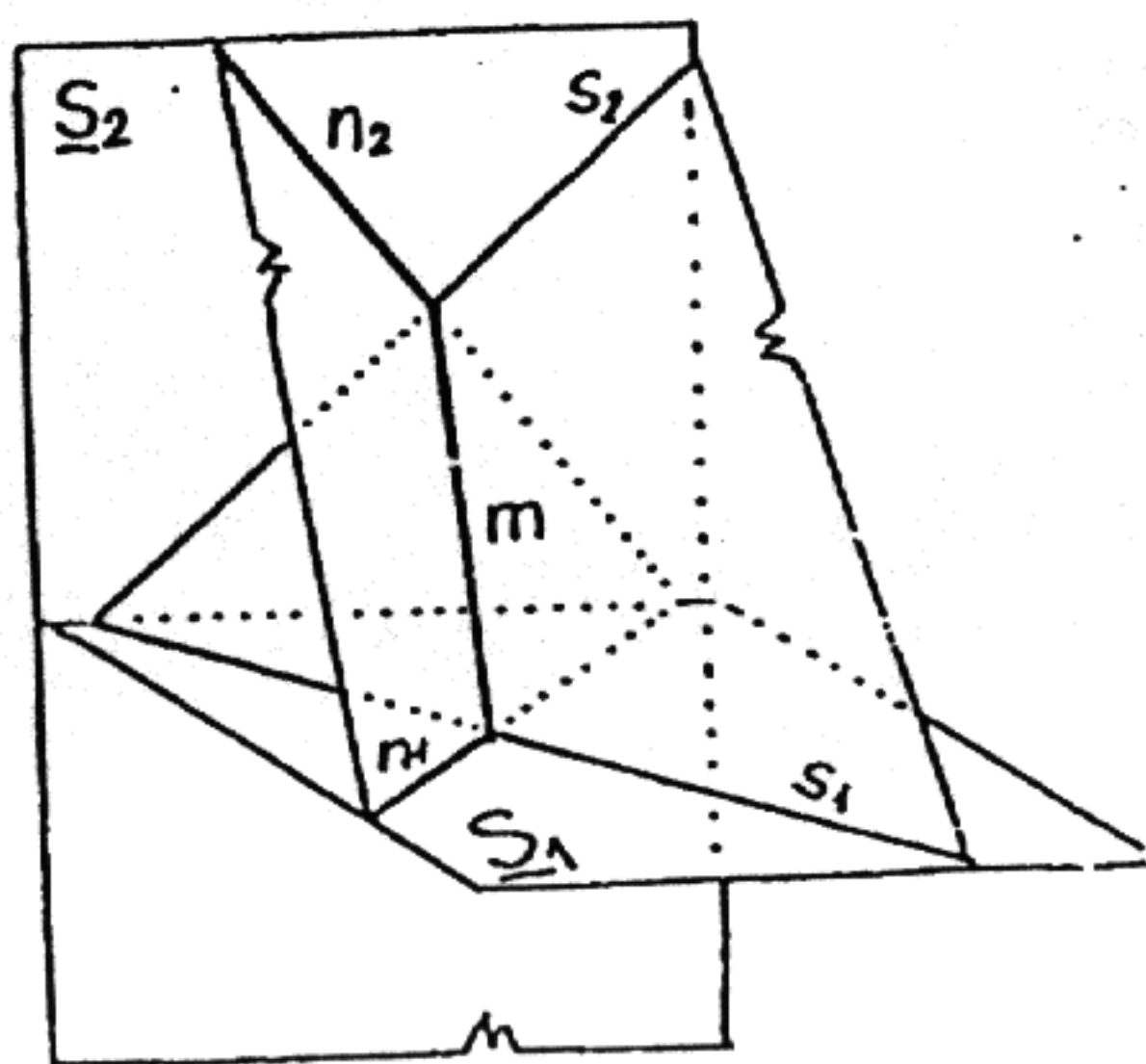
2. Segédsíkok módszere

Az adott A és B sík m metszésvonalának elkészítéséhez vesszük az adott síkokat egy-egy metszőleges S₁ majd S₂ segédsíkkal. A segédsíkoknak az adott síkokkal való a és b metszésvonalai az adott síkok metszésvonalán metsződnek. A metszésvonal két ilyen metszéspont összekötése.

Segédegyenesek módszere



Segédsíkok módszere



Két síkidom metszése

