

Helyzetgeometriai feladatok

Térelemek összekötése, illesztése, metszése

Összekötés

Térelemek összekötése általában nem önálló probléma, mert az ábrázolás és illesztés több feladata nem nélkülözheti az összekötést. Sok esetben két vagy több térelem összekötésével újabb térelemhez jutunk. Lássunk néhány példát:

- Két pont összekötése egyenes: $e(AB)$.
- Pont és rá nem illeszkedő egyenes összekötése sík: $S(P, e)$.
- Három különböző pont összekötése sík: $E(ABC)$.
- Az A_∞ végtelentávoli és a B közösleges pont összekötése olyan B -re illeszkedő egyenes, amely az A_∞ irányával párhuzamos.
- Az e_∞ egyenesnek és a P pontnak az összekötése olyan P -re illeszkedő sík, amely az e_∞ -t meghatározó síkkal párhuzamos.

Illeszkedés

Két különálló térelem illeszkedik egymáshoz, ha az egyik tartalmazza a másikat. Térelemek halmazaira alkalmazva a halmazelméleti terminológiát: az egyik térelem részhalmaza a másiknak. Két egyenes metsző helyzetében is szoktuk alkalmazni az "illeszkedik" szóhasználatot. Noha a térelemek illeszkedése kölcsönös, mégsem közömbös, hogy melyik az adott és melyik az illesztett térelem.

Tekintsük át az alapelemek illeszkedési relációit:

pont - pont,

pont - egyenes,

pont - sík,

egyenes - pont,

egyenes - egyenes,

egyenes - sík,

sík - pont,

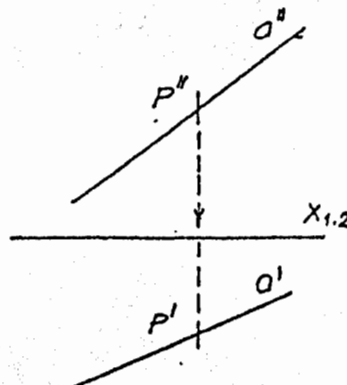
sík - egyenes,

sík - sík.

Pont illesztése egyenesre

Ha egy pont illeszkedik egy egyenesre, akkor a pont képei illeszkednek az egyenes megfelelő képeire.

A P pont P'' második képét tetszőlegesen jelöljük ki az a'' -n. A P'' -n átmenő rendezővonal és az a' metszésében kapjuk a P' -t. Hasonlóan járunk el akkor is, ha az első képen kezdjük a szerkesztést.



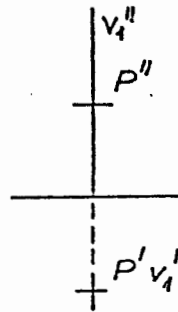
Különleges esetek

Különleges helyzetű egyenesek (vetítősugár, profilegyenes) esetében a rendezés nem vezet célhoz, mert a szóban forgó egyeneseknek a szerkesztéshez szükséges képe éppen rendező irányú.

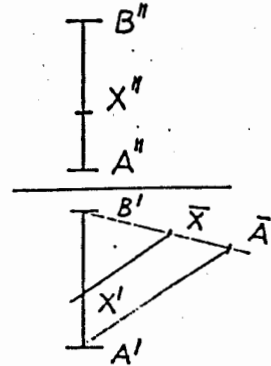
Vetítősugárra illeszkedő pontok valamennyien fedőpontok.

Profilegyenesre pont illesztése az osztóviszony változatlanlanságának alapján hasonlósági szerkesztéssel történik.

Vetítősugár



Profilegyenes



A kétképsík vetület *ortogonális paralel projekció*. A párhuzamos vetítés esetén -a párhuzamos szelők tétele következtében- teljesül az *aránytartó* vagy *osztóviszonytartó affin tulajdonság*.

Egy egyenesre A, X, B sorrendben illeszkedő pontokra vonatkozó *egyszerű viszonyon* vagy *osztóviszonyon* értjük az

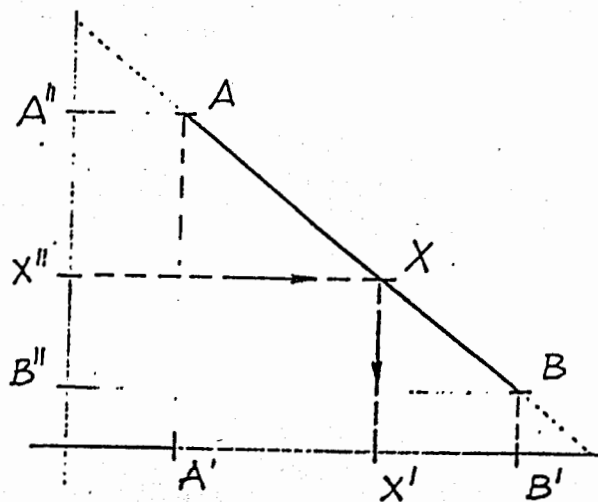
$$(AXB) = \frac{AB}{XB}$$

arányt.

A vetítés után, hivatkozva a párhuzamos szelők tételére:

$$(AXB) = (A''X''B'') = (A'X'B')$$

teljesül. Ezáltal az egyik képen keletkező arány átörököltető a másik képre.



Egyenes illesztése síkra

Egy egyenes illeszkedik egy síkra, ha az egyenes két pontja benne van a síkban.

Adott egy $\underline{S}$ (a b) párhuzamos egyenesekkel meghatározott dőlt helyzetű sík.

Szerkesszük meg egy olyan g egyenesnek az első és második képét, amely illeszkedik az $\underline{S}$ síkra. / g –o– $\underline{S}$ /

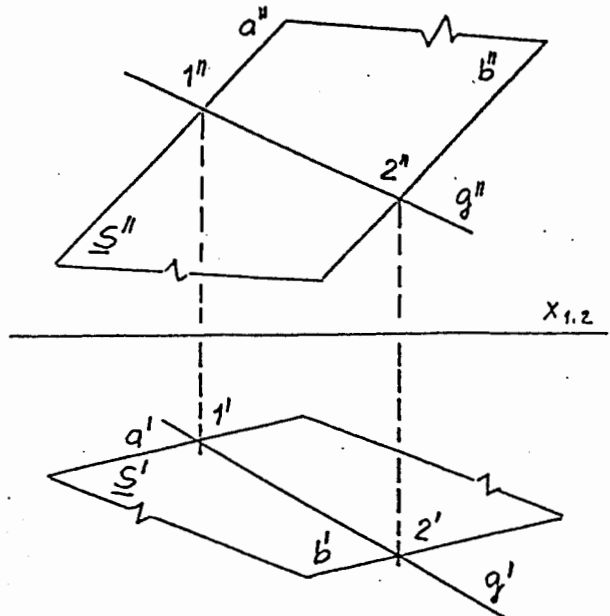
Megoldás:

-A g'' -t tetszőlegesen vegyük fel úgy, hogy messe a síkbeli a és b egyeneseket.

-Mivel g benne van a síkban, az 1 és 2 pontokban metszi a síkot meghatározó a és b egyeneseket. / $g''(1'' 2'')$ /

-Rendezéssel adódik az $1', 2'$.

-A g egyenes első képét az $1'$ és $2'$ összekötésével kapjuk. / $g'(1' 2')$ /



Pont illesztése síkra

Pontot tartó egyenesével illesztünk síkra.

Adott: $\underline{S}$ (a b)

Szerkesztendő: P –o– $\underline{S}$

Megoldás:

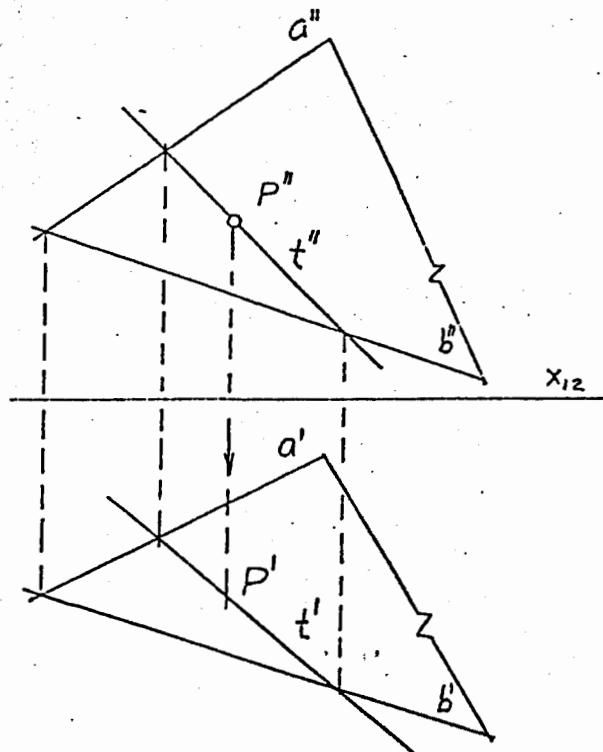
P'' tetszőleges

t'' –o– P''

t : tartó egyenes

$t(t' t'')$ –o– $\underline{S}$

$P' -o- t'$



A sík különleges egyenesei

A sík különleges egyenesének tekintjük azokat, amelyek a képsíkokhoz képest vagy a sík más egyeneséhez képest bizonyos párhuzamossági vagy merőlegességi tulajdonsággal rendelkeznek.

Első fővonal: síkra illeszkedő, horizontális egyenes /párhuzamos a $\underline{K}_1$ képsíkkal/

Második fővonal: síkra illeszkedő, frontális egyenes /párhuzamos $\underline{K}_2$ képsíkkal /

Első nyomvonal: a síknak az első képsíkkal alkotott metszésvonala /a K_1 első képsíkbeli horizontális egyenese/

Második nyomvonal: a síknak a második képsíkkal alkotott metszésvonala /a K_2 második képsíkbeli frontális egyenese/

Első esésvonal: síkra illeszkedő olyan egyenes, amely merőleges a sík első fővonalaira.

Második esésvonal: síkra illeszkedő olyan egyenes, amely merőleges a sík második fővonalaira.

Profil egyenes a síkban: síkra illeszkedő profilegyenes.

A sík különleges egyeneseinek ábrázolása:

Az $S(aP)$ síkban ábrázoljunk különleges egyeneseket!

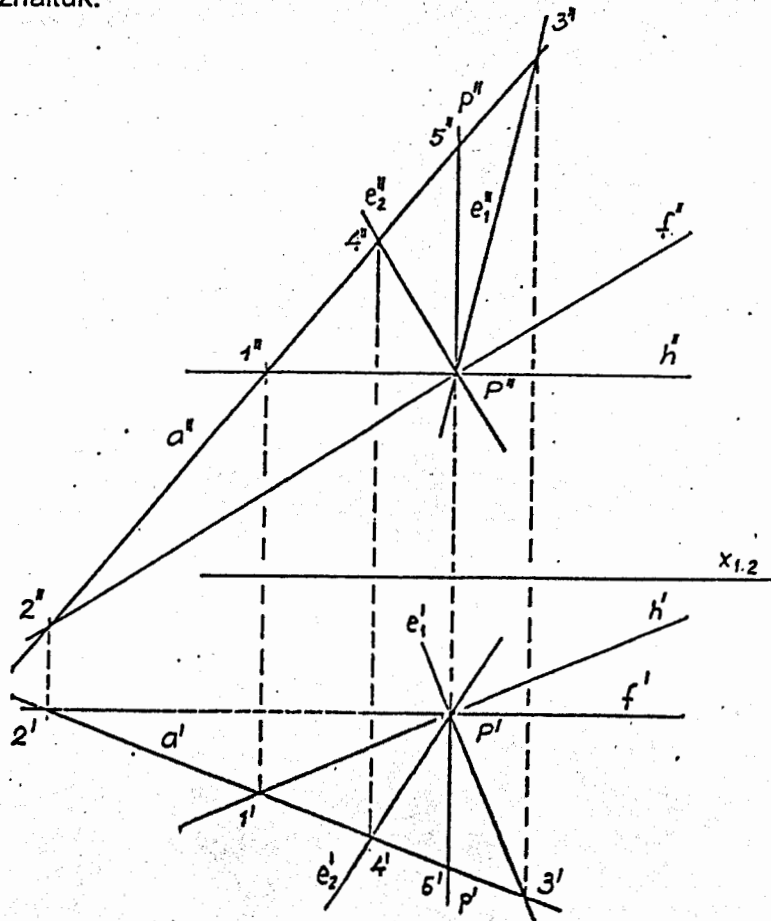
A h első fővonalnak először a második képét vesszük fel a képtengellyel párhuzamosan, majd a ráilleszkedő P és 1 pontok segítségével illesztéssel határozzuk meg az első képet.

Az f második fővonalnak először az első képét vesszük fel a képtengellyel párhuzamosan, majd a ráilleszkedő P és 2 pontok segítségével illesztéssel határozzuk meg a második képet.

Az esésvonalak ábrázolásakor alkalmazzuk a derékszög képeire vonatkozó ismeretet, mivel egy sík valamely esésvonala és az ugyanolyan nevű fővonala egy derékszög szárait képezik. *Derékszög képe változatlanul derékszög, ha a szög szárai közül legalább az egyik párhuzamos a képsíkkal.*

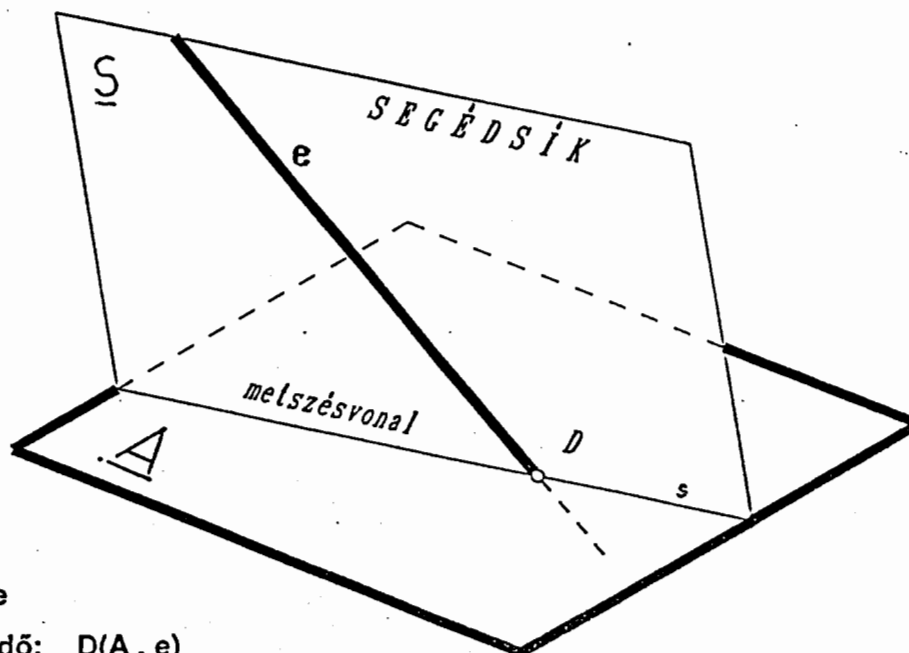
Első esésvonal első képe merőleges az első fővonal első képére, a második képét a síkra történő illesztéssel szerkesztjük meg. Az e_1 első esésvonal illesztésekor a P és 3 pontokat használtuk.

Második esésvonal második képe merőleges a második fővonal második képére, az első képét a síkra illesztéssel szerkesztjük meg. Az e_2 második esésvonal illesztésekor a P és 4 pontokat használtuk.



Egyenes és sík metszése

Egy adott sík és egy vele nem párhuzamos egyenes dőléspontjának elkészítéséhez az egyenesre *tetszőleges segédsíkot* fektetünk, majd meghatározzuk a segédsíknak az adott síkkal való metszésvonalát, s ez a metszésvonal metszi ki a dőlő egyenesből a metszéspontot. (Rendezett nézeteken való szerkesztéskor a segédsík általában a metsző egyenes valamely vetítősíkja.)



Adott: A, e

Szerkesztendő: $D(A, e)$

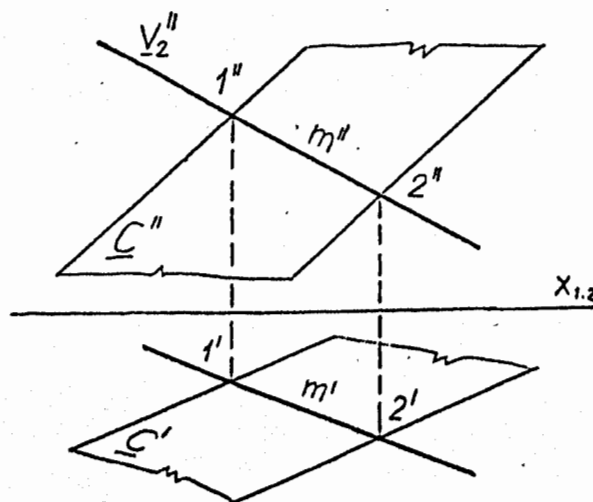
Megoldás:

1. $\underline{S} - o - e,$
2. $s(\underline{A} \underline{S}),$
3. $D(e s).$

Az ismertetett eljárás második lépésében az adott sík és a segédsík metszésvonalát kell elkészíteni. Általános esetben viszont két sík metszése a dőléspont szerkesztésre épülhet. Azonban különleges esetben, ha a két sík közül legalább az egyik vetítősík, a metszés elvégzése valójában illesztési probléma. Ekkor ugyanis a metszésvonal egyik képe -az ahol a vetítősík élben látszik- közvetlenül felismerhető, a metszésvonal másik képe pedig illesztéssel meghatározható, mivel a metszésvonal a két sík közös egyenese.

Két sík metszése abban az esetben, ha az egyik sík vetítősík.

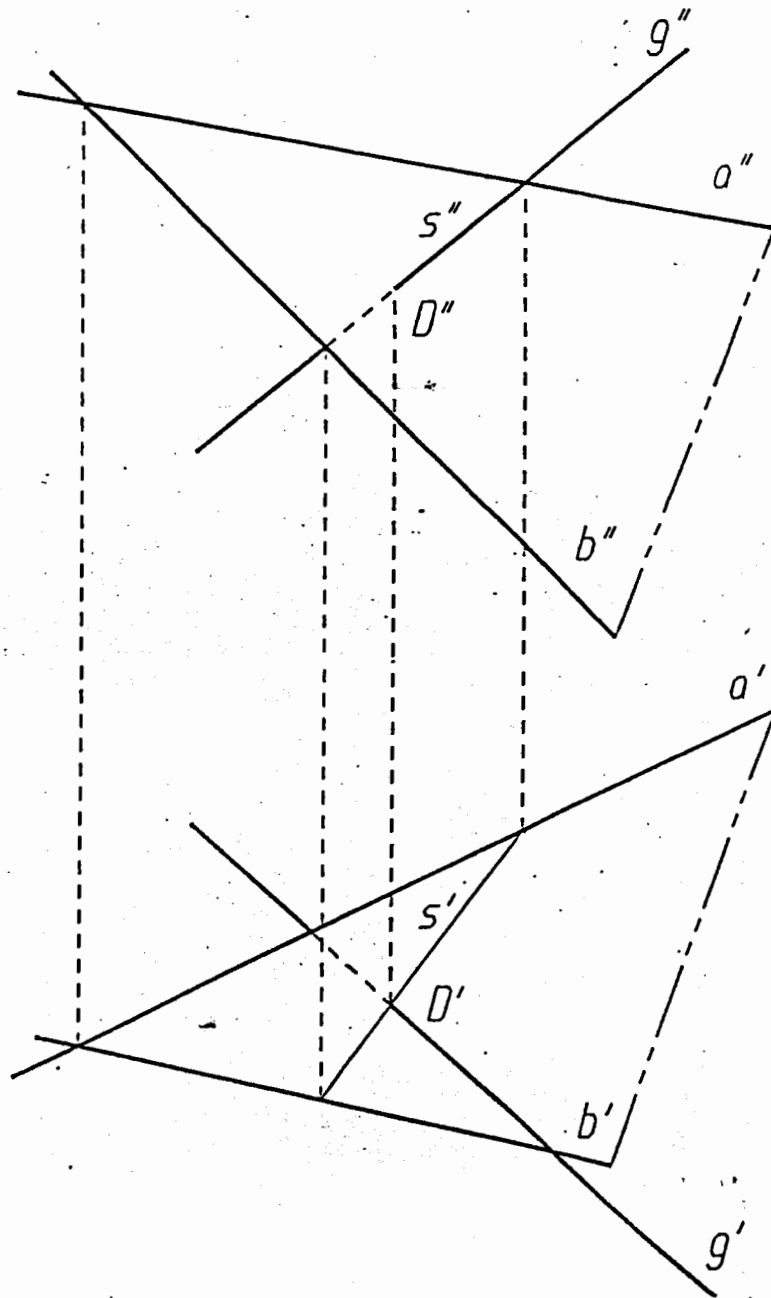
A $\underline{C}(ab)$ párhuzamos egyenesekkel adott dőlt helyzetű síkot messük a $\underline{V}_2$ második vetítősíkkal. A metszésvonal $m''(1''2'')$ második képe közvetlenül felismerhető, az $m'(1'2')$ első kép elkészítése pedig az 1 és 2 pontnak $\underline{C}$ síkra való illesztésével megoldható.



Sík és egyenes dőléspontjának szerkesztése

Az $\underline{S(ab)}$ metsző egyenesekkel adott sík és a g egyenes dőléspontjának elkészítéséhez segédsíknak használjuk a g egyenes V_2 második vetítősíkját. Ez a sík az $\underline{S}$ síkot a g egyenessel második fedésben lévő s egyenesben metszi. Az s fedőegyenes s' első képét az $\underline{S}$ síkra való illesztéssel kapjuk. Az s' és g' metszéspontjában találjuk a dőléspont D' első képét, amelyet rendezve a második képre adódik a D'' .

A láthatóság eldöntését az $\underline{S}$ síkbeli a vagy b , illetve a hozzájuk képest kitérő g egyenes fedettségi vizsgálatával végezzük.

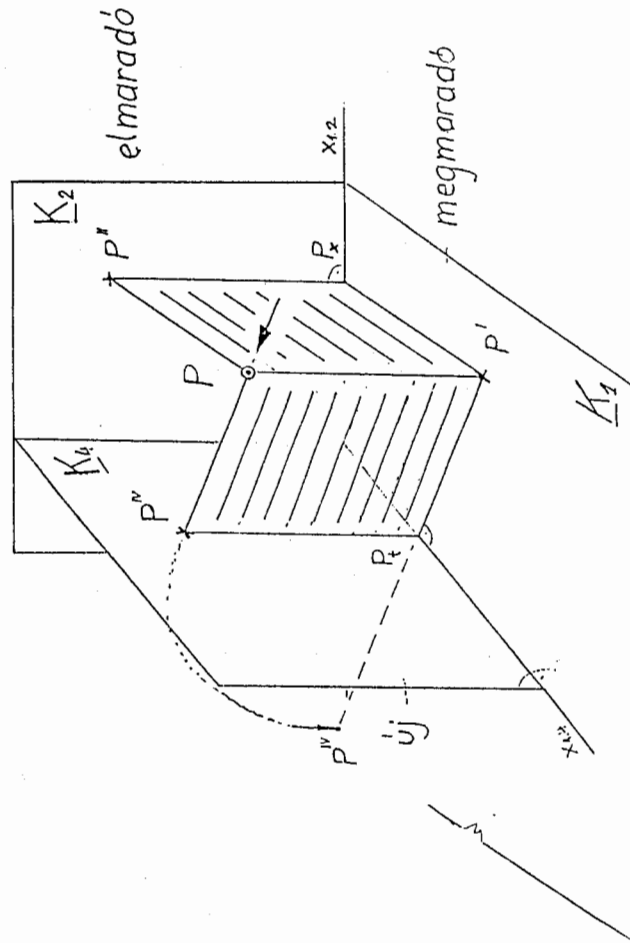


TRANSZFORMÁCIÓ

/Képsíkrendszer transzformáció/

A látatás, a jól szemléltető ábrázolás és a mérhető (valódi nagyságú) képek szerkesztése sok esetben egymást kizáró körülmények. Új képsíkok bevezetésével, képsíkrendszer transzformációval, az egyik helyzetből a másikba való átmenet célszerűen megvalósítható. Ha a vetítési irányt nézési iránynak fogjuk fel, akkor a képsíkrendszer transzformációt röviden transzformációt úgy is értelmezhetjük, hogy az alakzatot más irányból nézzük. Az új nézési irányból való szemlélés történhet vagy olyan célból, hogy szemléletesebb, képies képet nyerjünk, vagy azért, hogy például egy síklapú alakzat valamely élét, illetve határoló lapját valódi nagyságban lássuk. Ha egy alakzat egyenesit és síkjait különleges, egyszerű helyzetben ábrázoljuk, számos feladat -különös tekintettel a méretfeladatok- megoldása könnyebben elvégezhető. A különleges helyzeteket oly módon értjük el, hogy közben a tárgy térbeli helyzete változatlan maradjon, s a képsíkrendszer változik. A képsíkrendszert választjuk meg az alakzathoz képest alkalmas új helyzetben, céltranszformációt végzünk.

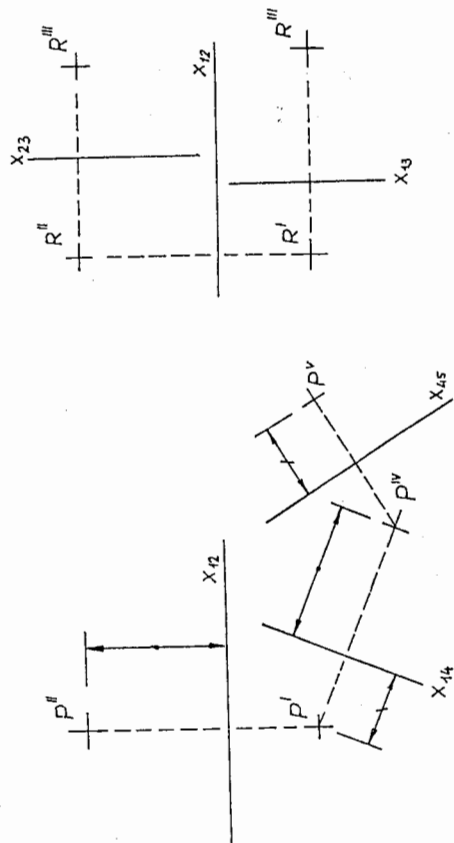
A képsíkrendszer transzformáció térben az új képsík felvételét és az új kép elkészítését jelenti. Az új kép vetítés és képsíkvesztés után jön létre.



A P pont K_1K_2 képsíkrendszerbeli $PP''P'$ vetítő téglalapjának $P''P_x$ oldala egyenlő hosszúságú a K_1K_4 képsíkrendszerbeli $PP''P'$ vetítő téglalapjának a $P''P_t$ oldalával (mindkettő egyenlő hosszúságú a PP' -vel), ezért a pont elmaradó rendezője megegyezik a pont új rendezőjével nagyságra és előjeltre nézve.

Képsíktranszformáció szerkesztési lépései:

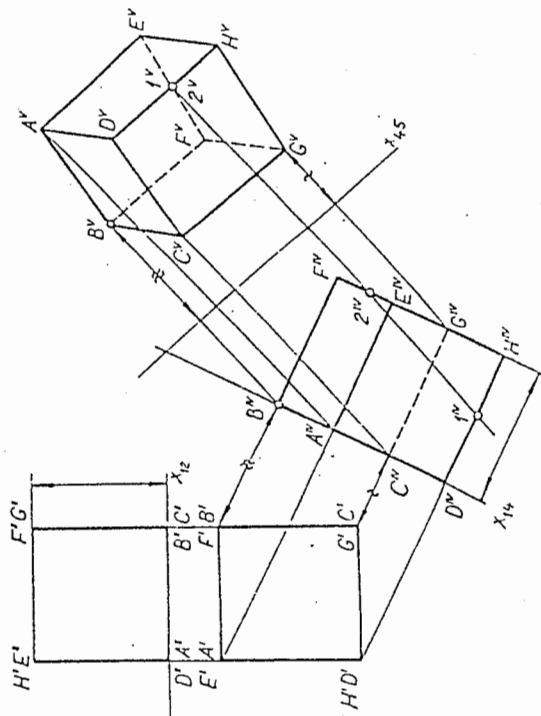
1. az új képtengely felvétele,
2. a pont megmaradó képéből az új rendezőegyenest megrajzolás az új tengelyre merőlegesen,
3. az új rendező felmérése az új tengelytől nagyság és előjele szerint.



A képsíkrendszer transzformáció célja:

1. Különleges helyzetű alakzatokról képies kép szerkesztése (... ábra)
2. Általános helyzetű tételek (egyenesek, síkok) célszerűen választott új képsík(ok) segítségével különleges helyzetbe transzformálása

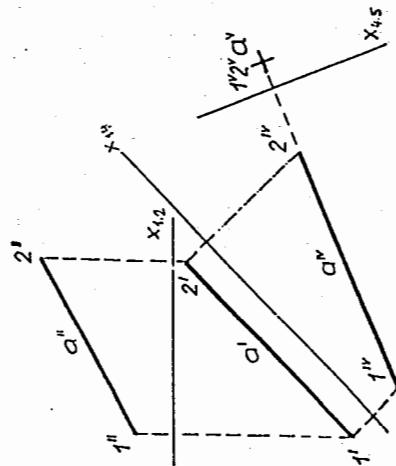
Képies kép szerkesztése



Egyenes transzformálása különleges helyzetekbe

A K_1K_2 képsíkrendszerben adott a egyenest először az új K_1K_4 képsíkrendszerben a K_4 negyedik képsíkkal párhuzamos helyzetbe hozzuk. Ehhez a K_4 képsíkot az egyenes első vetítőkijával párhuzamosan vesszük fel, s a vetületben az $x_{1,4}$ tengely az a -vel párhuzamos. Második lépésben, miután az a egyenes már párhuzamos a K_4 negyedik képsíkkal, a K_4 képsíkhöz kapcsolt K_5 ötödik képsíkot az egyenesre merőlegesen vesszük fel, s az $x_{1,5}$ tengely az a'' -re merőleges. Ezáltal a K_1K_5 képsíkrendszerben általános helyzetű a egyenes a K_1K_4 -ben képsíkkal párhuzamos egyenesként, a K_4K_5 képsíkrendszerben pedig vetítősugárként viselkedik.

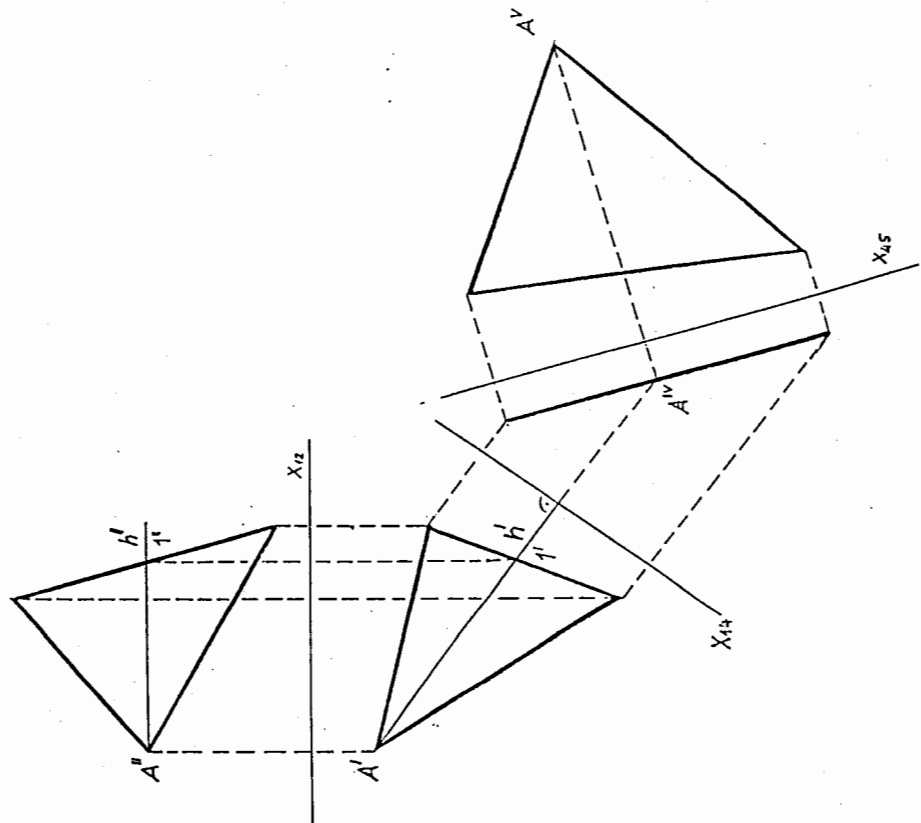
Egyenes esetében egy kiinduló általános helyzetből az első transzformáció képsíkkal párhuzamos, a második transzformáció képsíkra merőleges helyzetet eredményez.



Sík transzformálása különleges helyzetekbe (Háromszög valódi nagyságának szerkesztése)

A K_1K_2 képsíkrendszerben általános helyzetű $\underline{S}(ABC)$ síkot először egy új képsíkrendszerben az új K_4 képsíkra merőleges helyzetbe hozzuk. Ehhez a K_4 képsíkot az $\underline{S}$ sík valamely fővonalára merőlegesen vesszük fel. Esetünkben a K_4 merőleges a $\underline{S}$ első fővonalára h -ra. Ezáltal elérhető, hogy az új képsík az adott síkra és az első képsíkra is merőleges lesz, s a K_1K_4 képsíkrendszerben az $\underline{S}$ sík negyedik vetítőkijává válik, azt mondjuk, hogy a sík "élben látszik". Első lépésben tehát az új $x_{1,4}$ képtengely a sík h fővonalára merőleges. Másodszorra, ha a sík már képsíkra merőleges, az új K_5 ötödik képsíkot az adott síkkal párhuzamosan vesszük fel. A vetületben az $x_{1,5}$ tengely a sík negyedik, élben megjelenő képével párhuzamos. A K_4K_5 képsíkrendszerben az $\underline{S}$ sík párhuzamos a K_4 ötödik képsíkkal, ahol a síkbeli valódi méretek torzulásmentesen lemeríthetők.

Sík esetében egy kiinduló általános helyzetből az első transzformáció képsíkra merőleges, a második transzformáció képsíkkal párhuzamos helyzetet eredményez.



IV. ELŐADÁS

Képsíkrendszer transzformáció alkalmazásai

Méretfeladatok megoldása transzformációval Távolságfeladatok

Két pont távolsága

Két pont távolságán a két pontot összekötő szakasz hosszát értjük

Megszerkesztést olyan egyszerű képsíktranszformációval végezzük, amikor az új képsík a szakasz valamelyik végpontjával párhuzamos. A képtengely elhagyásával, ha a szakasz valamely végpontjától számítjuk a transzformációs rendezőket, akkor a megoldás egy ún. különbségi derékszögű háromszög szerkesztésére egyszerűsödik.

A különbségi derékszögű háromszög oldalai a következők:

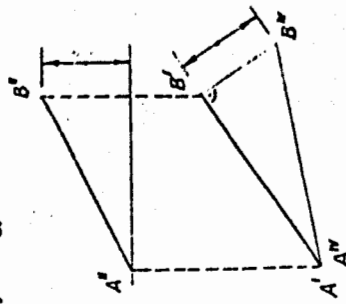
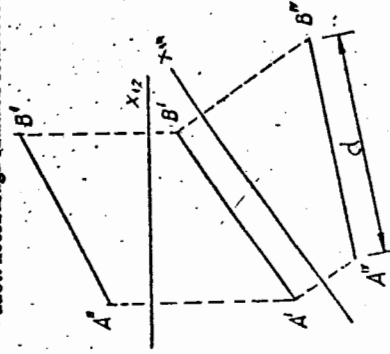
egyik befogó: a szakasz egyik képe,

másik befogó: a hozzákapcsolódó rendezeti képről a szakasz végpontjainak rendező különbsége,

az átfogó hossza megegyezik a szakasz valódi nagyságával.

A különbségi derékszögű háromszög felhasználható

- szakasz valódi nagyságának meghatározására,
- szakasz /egyenes/ képsíkszögének elkészítéséhez,
- adott hosszúságú szakasz felmérése általános helyzetű egyenesre.

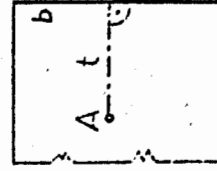


Pont és egyenes távolsága

Pont és egyenes távolságán a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hosszát értjük

1. megoldás

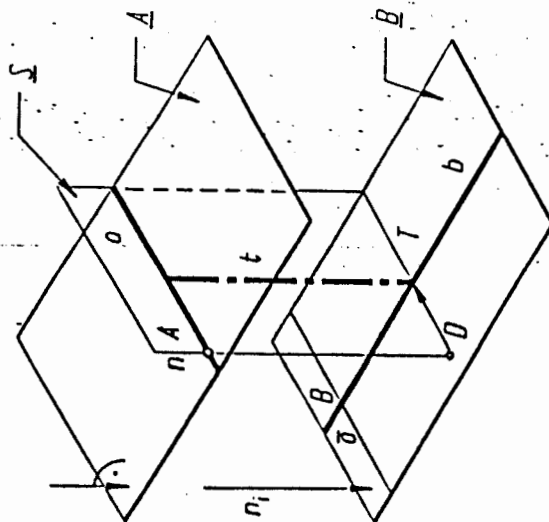
Pont és egyenes távolsága a pont és az egyenes összekötő síkjában a pontból az egyenesre merőlegesen állított szakasz hosszával mérhető. A szakasz egyik végpontja maga a pont, a másik végpont pedig az adott pontból az adott egyenesre merőlegesen állított egyenesnek az adott egyenessel alkotott metszéspontja. A feladatot általában az adott egyenes és pont összekötő síkjának föllépésbe fordításával egyszerű megoldani. A forgatás az összekötő sík első fővonala körül történik.



összekötő sík

Két kitérő egyenes távolsága /normáltranszverzális/

Két kitérő egyenes távolságán értjük a rájuk illeszkedő párhuzamos síkok távolságát. A két sík között a távolság bárhol mérhető. Ennek a távolságnak a mérése a kitérő egyenesek között azon a szabázon is történhet, amely mindkét egyenest merőlegesen köti össze. Ezt az összekötést nevezzük normáltranszverzálisnak.

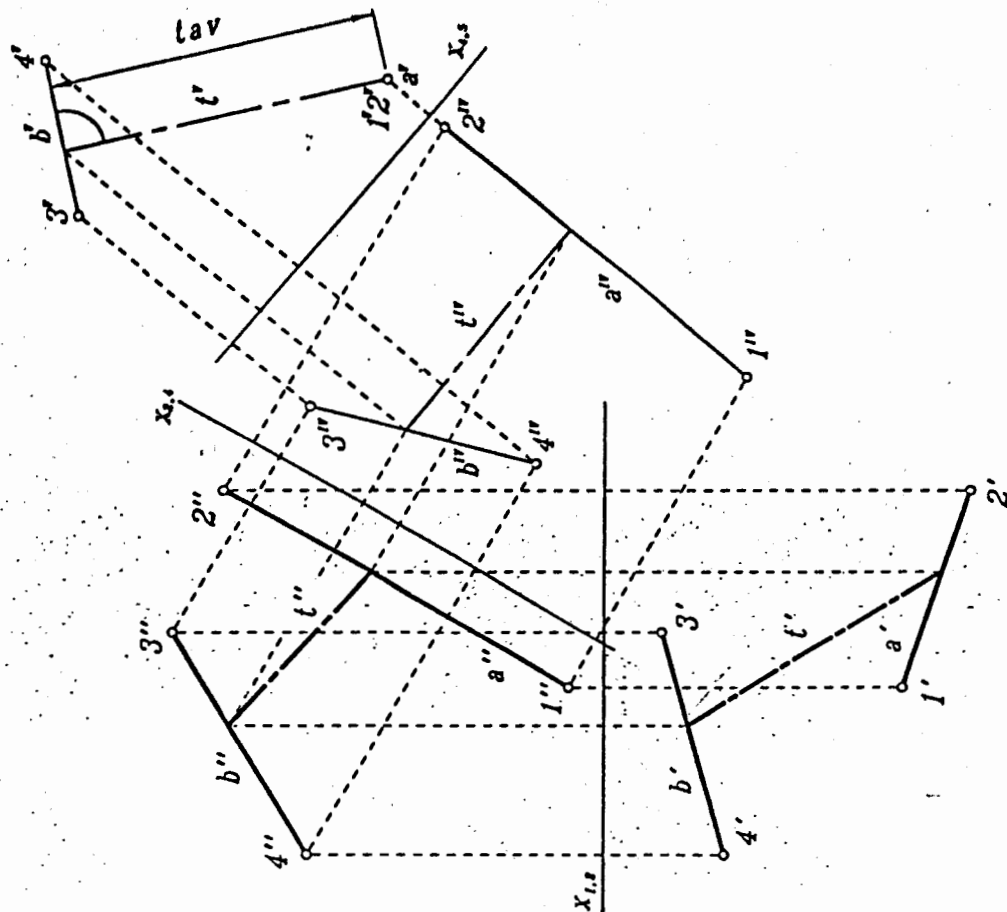


Adott: a, b kitérő egyenespár
Szerk: t normáltranszverzális
/mindkettőre merőleges/

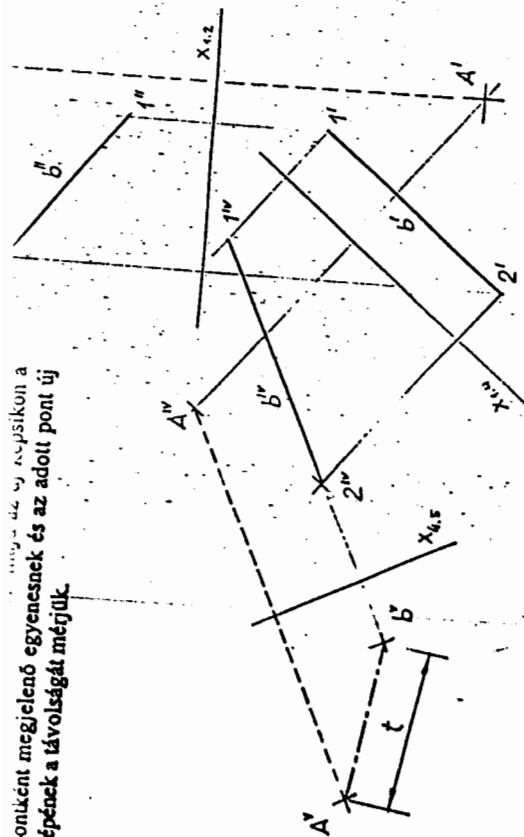
Megoldás:

1. $B(b\bar{a}), \bar{a} \parallel a$
2. $n_i \perp B$
3. $S(a n_i)$
4. $T(S b)$
5. $t: (t \leftrightarrow T) \cap (t \parallel n_i)$

Két kitérő egyenes normáltranszverzálisa

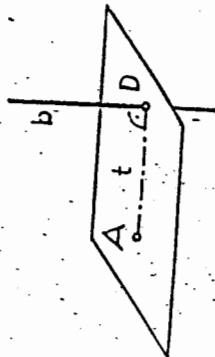
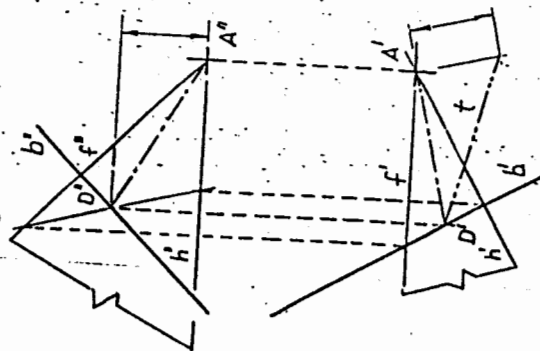


ponként megjelenő egyenesnek és az adott pont új képének a távolságát mérjük.



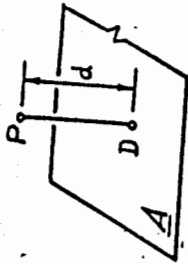
3. megoldás

Az adott pontból az adott egyenesre merőleges síkot állítunk, majd ezen síknak az adott egyenessel való dőléspontját szerkesztjük meg. A dőléspontnak az adott ponttól való kérdésbeli távolságát különbségi háromszöggel szerkesztjük meg.

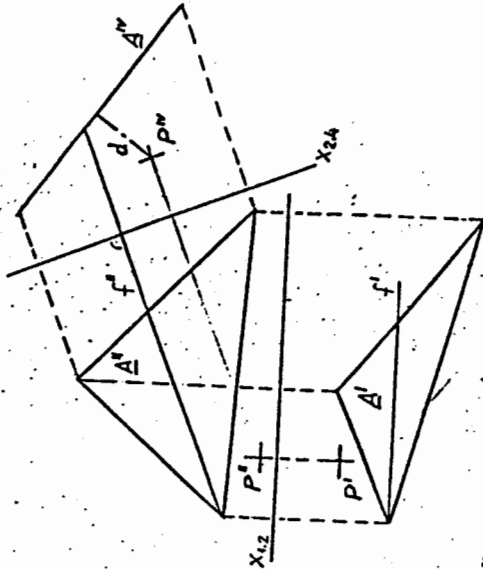


1. pont és sík távolságán a pontból a síkra merőlegesen állított szakasz hosszát értjük.

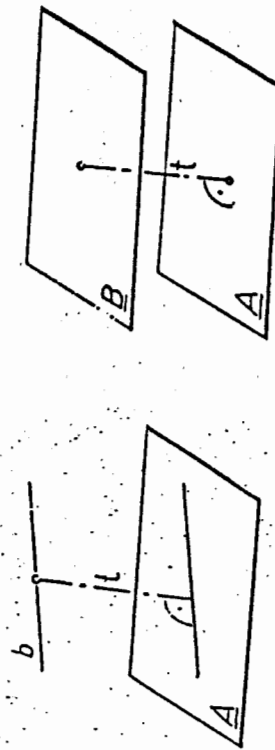
A síkra merőlegesen állított szakasz egyik végpontja az adott pont, a másik végpontja pedig a normálisnak az adott síkkal való metszéspontja.



A síkot valamelyik fővonalára merőlegesen vetítéssé transzformálva, az új képen a távolság közvetlenül mérhető az ében látszó sík és a pont új képe között.



Sík és vele párhuzamos egyenes valamint két párhuzamos sík távolsága
Mindkét feladat megoldása közvetlenül következik a pont és sík távolságából, ugyanis egy síkkal párhuzamos egyenes valamint párhuzamos sík minden pontja ugyanolyan távolságra van az adott síktól.



VII. ELŐADÁS

Poliéderek

Gúla és hasáb metszése egyenessel és síkkal

POLIÉDEREK

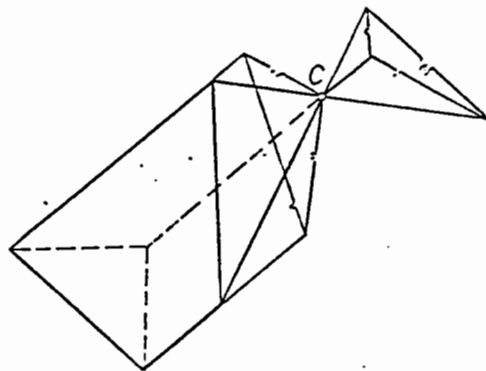
Sokszögek által határolt síkrészek összességét soklapnak, poliédernek nevezzük, ha a határoló sokszögek mindegyik oldala ugyanakkor egy másik határsokszögnek is oldala.

A sokszögek által határolt síkrészek a poliéder határlapjai, *oldallapjai*. Két-két sokszög közös oldala a poliéder *éle*, az élek végpontjai a poliéder csúcspontjai, vagy *csúcsai*. Ugyanazon a lapon lévő szomszédos csúcspontokat összekötő szakaszok az *élek*, a nem szomszédos csúcspontokat pedig *lapátlók* kötik össze.

A poliéder lapjai által határolt térrészt *síklapú testnek* nevezzük. A nem ugyanazon a lapon lévő csúcspontokat összekötő átló a *testátló*.

Összefoglalva: a poliédert lapjai, a lapjait élei, az éleit csúcsai határolják. Minden él legalább két lap határán van rajta és minden csúcspontban legalább három él találkozik. Minden poliédernek legalább négy csúcsa és négy lapja van.

A poliéderen /testen/ az egy csúcsba befutó élek és lapok szögletet /testszögletet/, a párhuzamos élek és a hozzájuk tartozó lapok pedig övet alkotnak. A szöglethez és övhöz tartozó palástrészek és testrészek gúla- illetve hasábpalást illetve testrészek. Emiatt különös figyelmet fordítunk a gúlák és hasábok tanulmányozására.



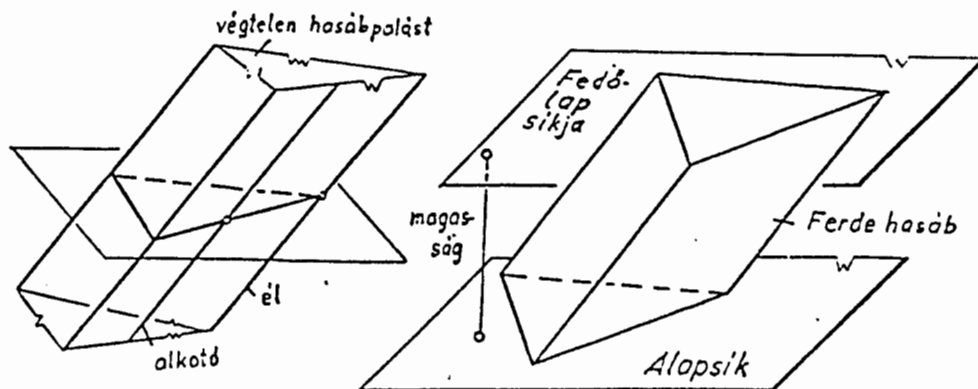
Poliéderek, síklapú testek ábrázolása

A poliéder illetve síklapú test, képét a csúcsai és élei képeinek az összessége alkotja. A képsíkhöz képest általános helyzetű él vetítősíkja a teret két részre osztja. Egy kiválasztott élben metsződő két lap vagy ugyanabban, vagy különböző térrészben fekszik. Az első esetben az illető él kontúrél.

A hasáb

Egy adott sokszög határpontjain át a sokszög síkjára nem illeszkedő egyenessel párhuzamosan húzott egyenesek *végtelen hasábfelületet* alkotnak. A párhuzamos egyenesek a hasábfelület alkotói, ha csúcson mennek át, akkor élei (oldalélei). A végtelen hasábfelületnek két párhuzamos és valamennyi élt metsző sík közé eső részét *hasábnak* nevezzük. A párhuzamos síkokban lévő sokszögek (metszetek) a hasáb alapjai (alaplapp, fedőlap).

Az alapoknak egymástól mért távolsága a hasáb magassága. Ha a hasáb oldalélei az alap síkjára merőlegesek, akkor a hasáb egyenes, különben ferde. Az olyan egyenes hasábot, amelynek alapja szabályos sokszög, *szabályos hasábnak* nevezzük.



Euler tétel egyszerű poliederekre: $c + l = e + 2$

Szabályos testek:

n	m	c	e	l	
3	3	4	6	4	tetraéder (a)
4	3	8	12	6	hexaéder (b)
3	4	6	12	8	oktaéder (c)
5	3	20	30	12	dodekaéder (d)
3	5	12	30	20	ikoznaéder (e)

n : egy lapon lévő oldalcszám

m : egy csúcsba futó lapszám

c : csúcsok száma

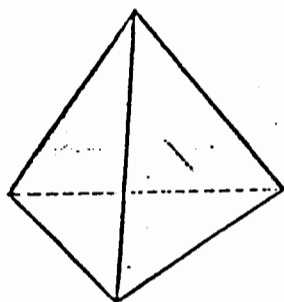
e : élek száma

l : lapok száma

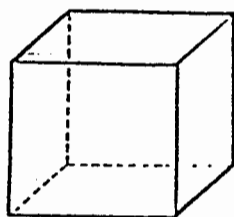
$$l \cdot n = 2e, \quad cm = 2e$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}; \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}; \quad (n-2) \cdot (m-2) < 4 \quad / 1, 2, 3/$$

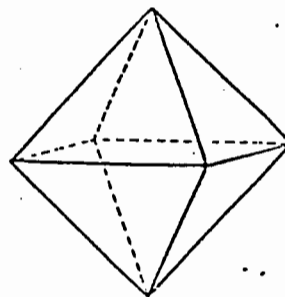
$$1 \cdot 1, 2 \cdot 1, 1 \cdot 2, 3 \cdot 1, 1 \cdot 3$$



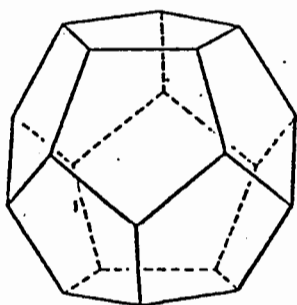
a)



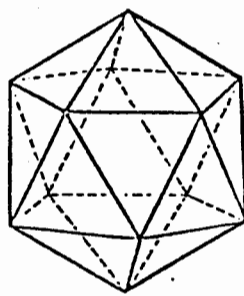
b)



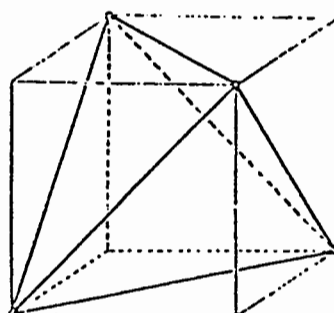
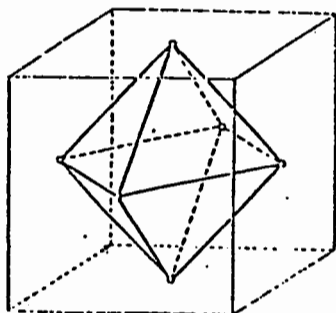
c)



d)



e)

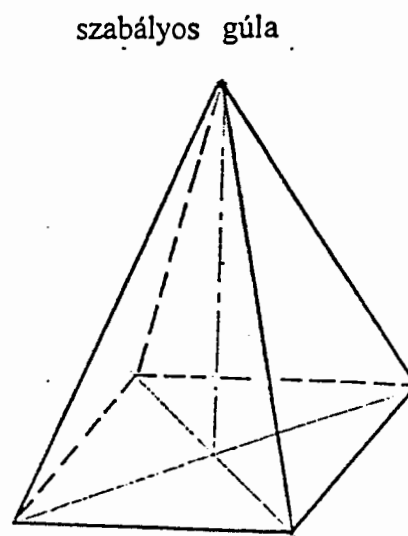
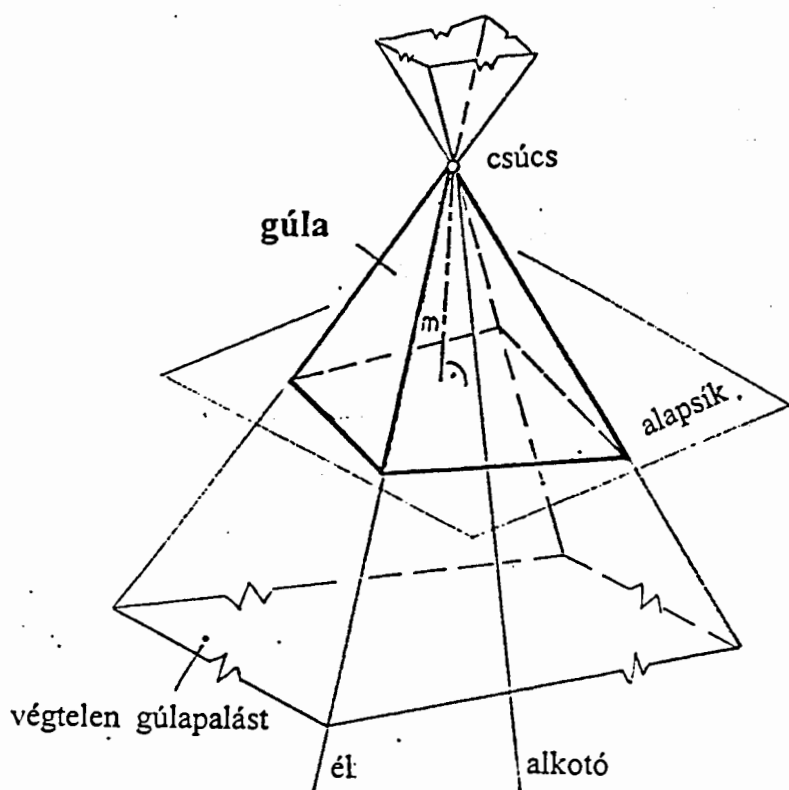


A gúla

Egy adott sokszög pontjait egy a sokszög síkján kívül fekvő ponttal összekötő egyenesek *végtelen gúlafelületet* alkotnak. A külső pont a gúla csúcsa, maguk az összekötő egyenesek a gúlafelület alkotói. Ha az alkotó a sokszög csúcsán halad át, akkor élnek (oldalélnek) nevezzük.

A végtelen gúlapalástnak a sokszög síkja és a csúcs közötti részét *gúlának* nevezzük. A sokszög oldalszáma alapján megkülönböztetünk három, négyoldalú, gúlát. Az alapsík és a csúcs távolsága a gúla magassága.

Ha az alapidom szabályos sokszög és a gúla magasságának talppontja a szabályos sokszög középpontja, akkor a gúlát szabályosnak nevezzük. Ennek oldallapjai egybevágó egyenlőszárú háromszögek.



Gúla és hasáb metszése egyenessel

Gúla és hasáb egyenessel való metszéspontjait az egyenesnek a gúla illetve hasáblapokkal való dőféspontjai képezik, ha ezek a metszésponatok a határoló sokszögeken belül vannak. A felesleges szerkesztőmunka elkerülése céljából a metszésponatok meghatározásához alkalmas segédsíkokat használunk. Ezek a síkok általában olyanok, amelyek a felületekből könnyen elkészíthető metszeteket eredményeznek. Gúlánál, hasáboknál arra törekszünk, hogy a segédsík által keletkező metszetük alkotók legyenek. Másik alkalmas segédsík választás a metszőegyenest valamelyik vetítősíkja. Gúla és hasáb egyenessel való metszésponatjait a segédsík által kimetszett töröttvonalnak és az egyenesnek a közös pontjai alkotják.

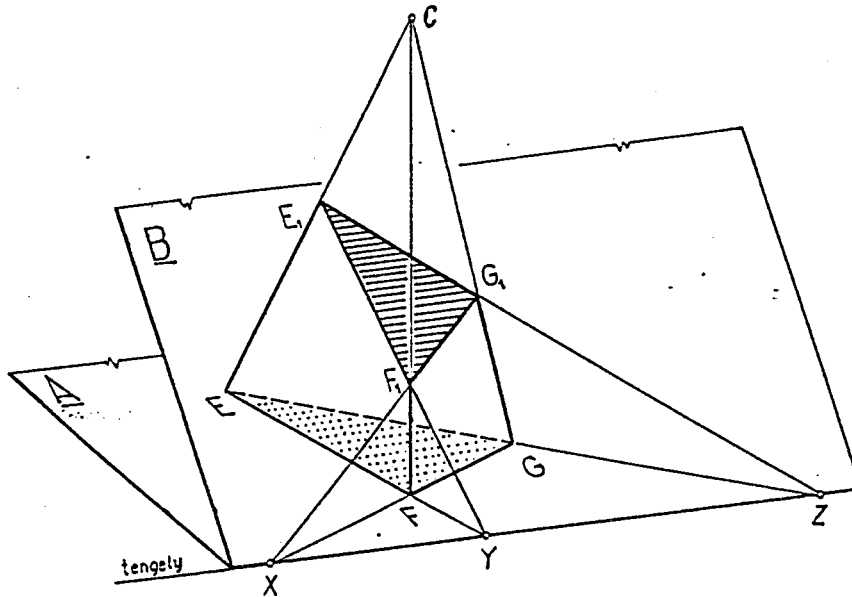
További megoldások:

Gúla síkmetszése centrális kollineációval

Desargues tétele kimondja, hogy ha két háromszög csúcsaira nézve perspektív, akkor oldalaira nézve is perspektív.

Az EFG és $E_1F_1G_1$ háromszög olyan, hogy ha az EE_1 , FF_1 és GG_1 csúcsokat összekötő egyenesek egyetlen C pontra illeszkednek, akkor az FG és F_1G_1 , az EF és E_1F_1 valamint az EG és E_1G_1 oldalak meghosszabbításának X, Y, Z metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek. Az ábrán szereplő konfiguráció ugyanakkor egy EFG háromszög alapú gúla $E_1F_1G_1$ síkmetszetét szemlélteti, a metszetek között fennálló centrális kollineációval.

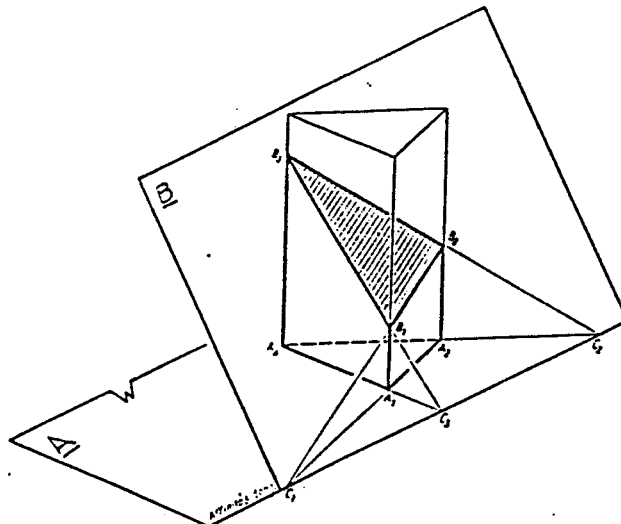
Egy centrális kollineációt centruma, tengelye és pontpárja határozza meg.



Gúla síkmetszésekor a kollineáció centruma a gúla C csúcsa, tengelye a gúla alapsíkjának a metszősíkkal való metszészvonala, pontpárja a gúla egy élére illeszkedő alaplapon lévő csúcspont és metszetcsúcspont, például E, E_1 .

Hasáb síkmetszése perspektív affinitással

Az affinitás tengelye a hasáb alapsíkjának a metszősíkkal való metszészvonala, pontpárja a hasáb egy élére illeszkedő alaplapon lévő csúcspont és metszetcsúcspont.

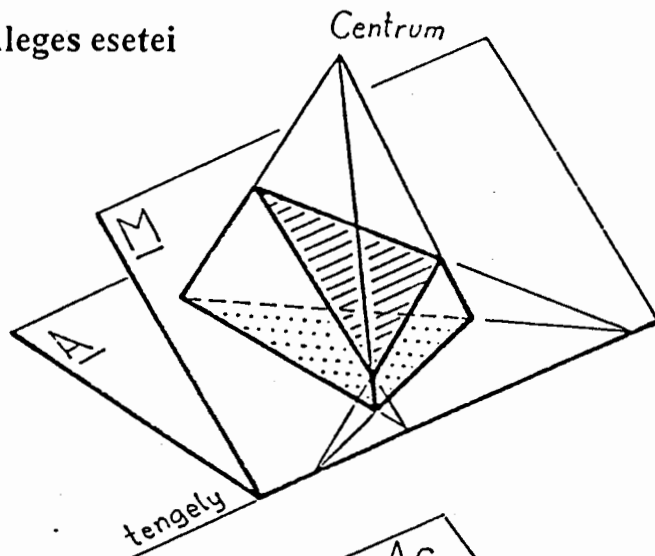


A centrális kollineáció és különleges esetei

1.) Centrális kollineáció

Centrum: közös pont
Tengely: közös egyenes

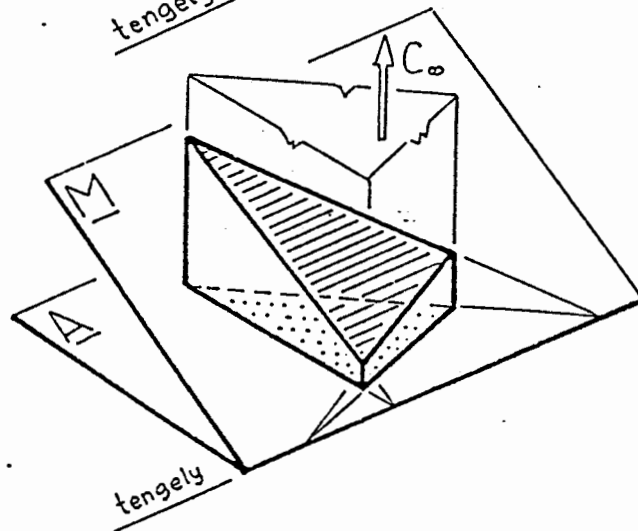
Előfordul: a gúla két nem párhuzamos síkmetszete között



2.) Perspektív, tengelves affinitás

Centrum: ideális pont
Tengely: közös egyenes

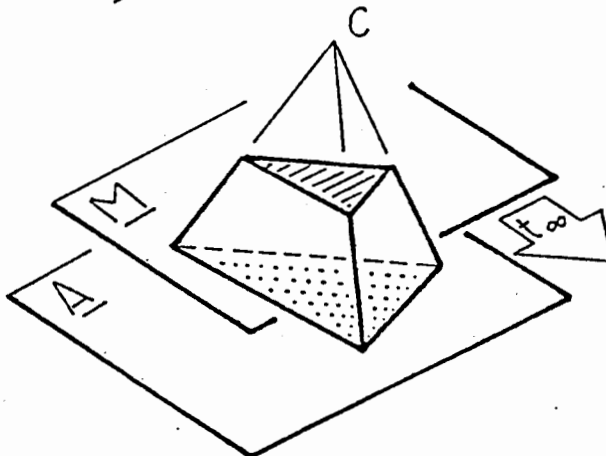
Előfordul: a hasáb két nem párhuzamos síkmetszete között



3.) Centrális hasonlóság

Centrum: közös pont
Tengely: ideális egyenes

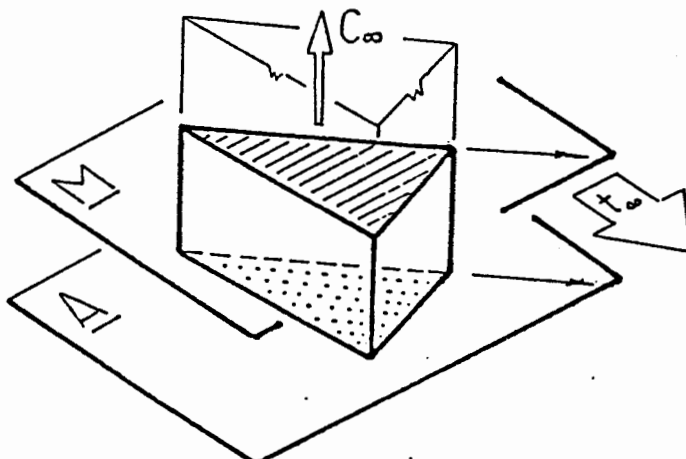
Előfordul: a gúla két párhuzamos síkmetszete között



4.) Egybevágóság

Centrum: ideális pont
Tengely: ideális egyenes

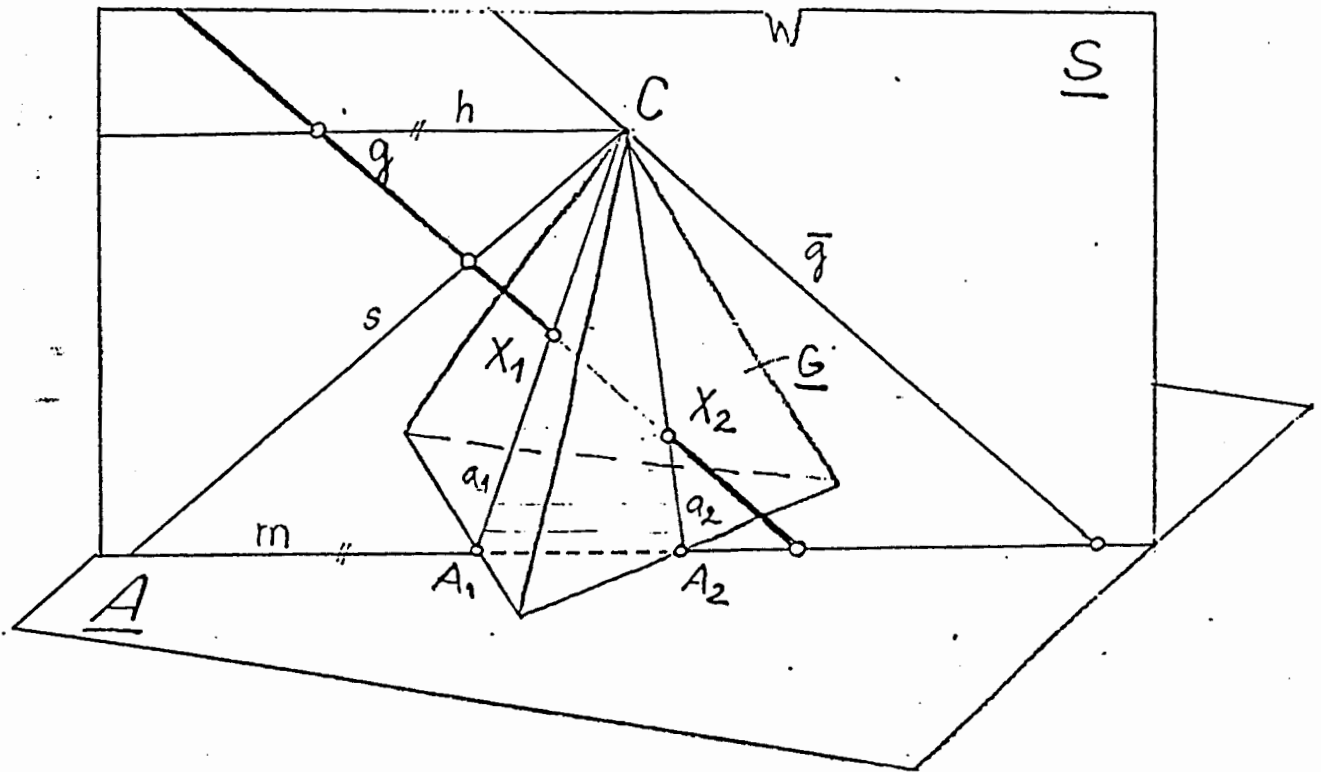
Előfordul: a hasáb két párhuzamos síkmetszete között



Gúla metszése egyenessel

Gúla egyenessel való metszését az egyenesre illesztett segédsíkkal végezzük.

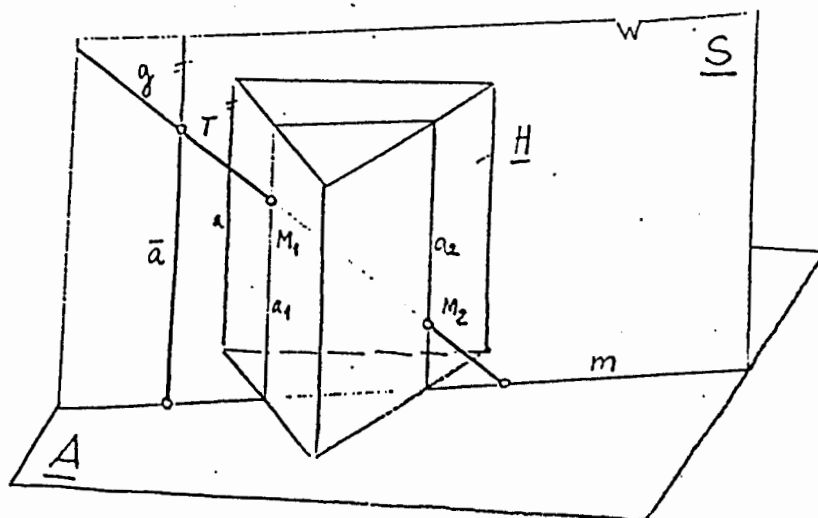
Gúla és egyenes metszéséhez alkalmas segédsík lehet azaz $\underline{S}(gC)$ sík, amely a g metsző egyenesre illeszkedik és keresztülmegy a gúla C csúcsán. A csúcsra illeszkedő segédsík a gúlát alkotókban metszi. A kimetszett alkotók talppontjait a segédsíknak a gúla alapsíkjával való m metszésvonala metszi ki a gúla alapsokszögéből. Végül a segédsíkban fekvő a_1 és a_2 gúlaalkotók metszik ki a g egyenesből az X_1 és X_2 metszéspontokat.



Hasáb metszése egyenessel

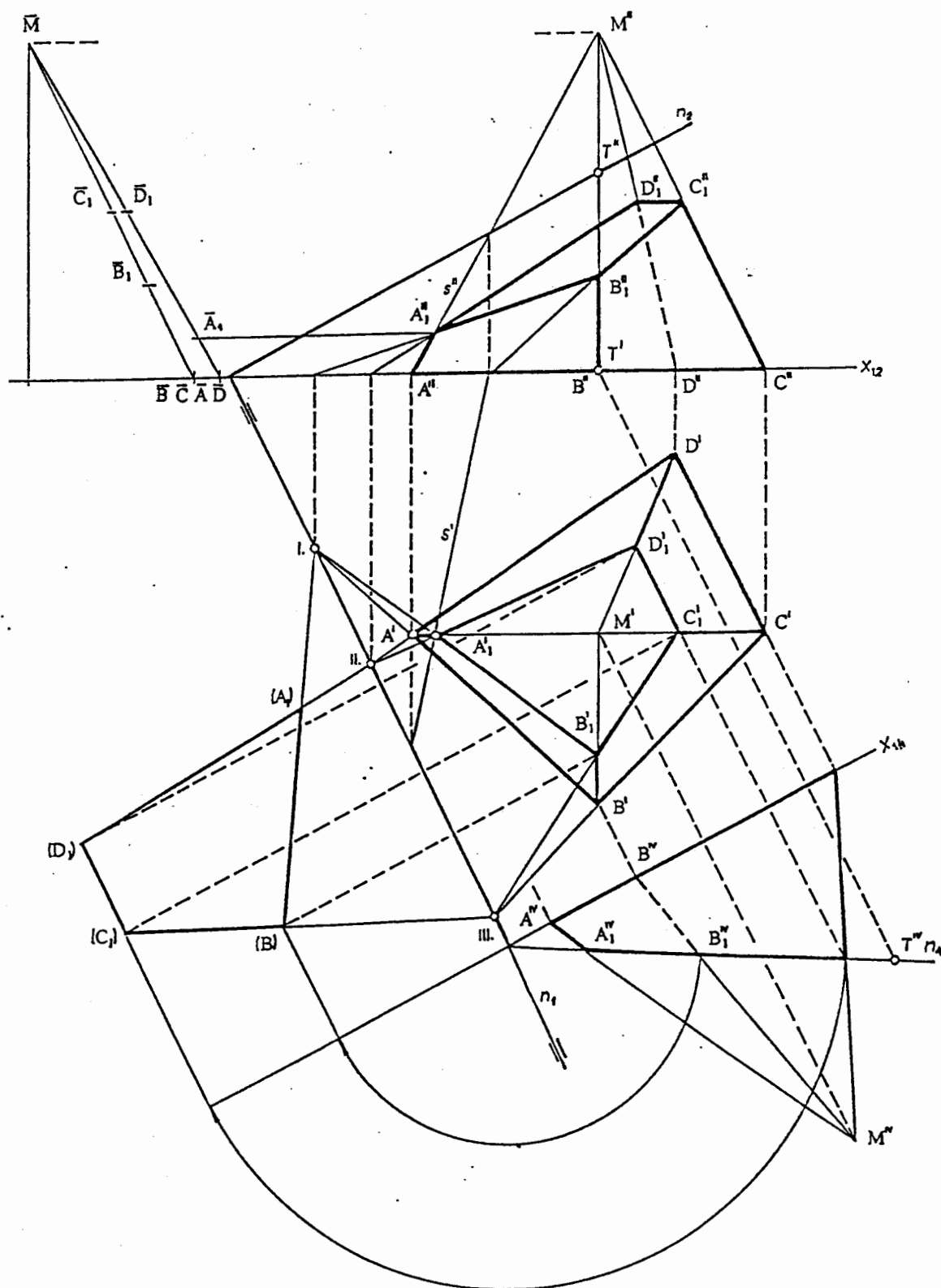
Hasáb egyenessel való metszését az egyenesre illesztett segédsíkkal végezzük.

Hasáb esetében alkalmas segédsík lehet a metszőegyenesre fektetett azon sík, amely a hasáb élével párhuzamos. A módszer lényege ugyanaz, mint a gúlánál volt. (Az analógiát gondoljuk végig úgy, hogy a hasáb felfogható olyan gúlaként, amelynek csúcspontja a végtelenben van.)



Gúla metszése általános helyzetű síkkal

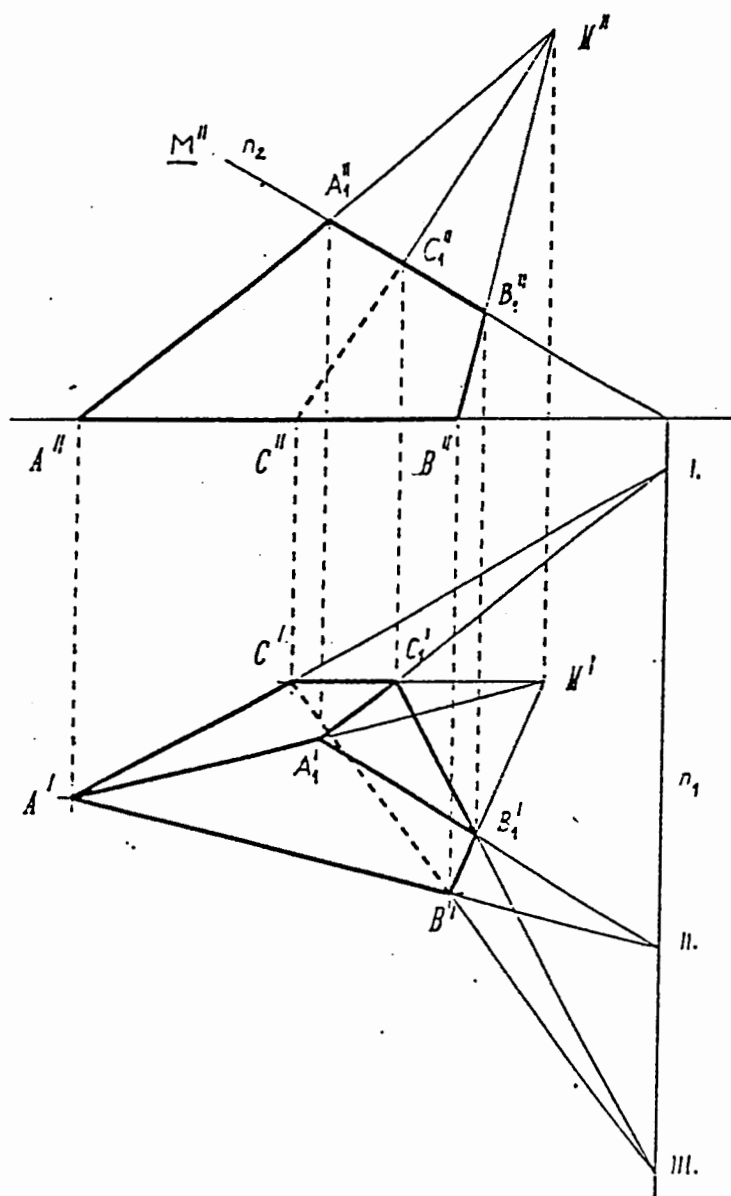
Az első képsíkon álló általános négyszög alapú gúlát a nyomvonalával adott $\underline{S}(n_1 n_2)$ dőlt síkkal metszük. A szerkesztést képsík transzformációval és centrális kollineációval is elvégezzük. Az $\underline{S}$ síkkal csonkolt gúla palástjának kiterítéséhez meghatározzuk a szükséges a gúlaélek valódi nagyságát, valamint a metszet valódi nagyságát, a metszet első képe és az első főállásba forgatottja között fennálló perspektív affinitást felhasználva.



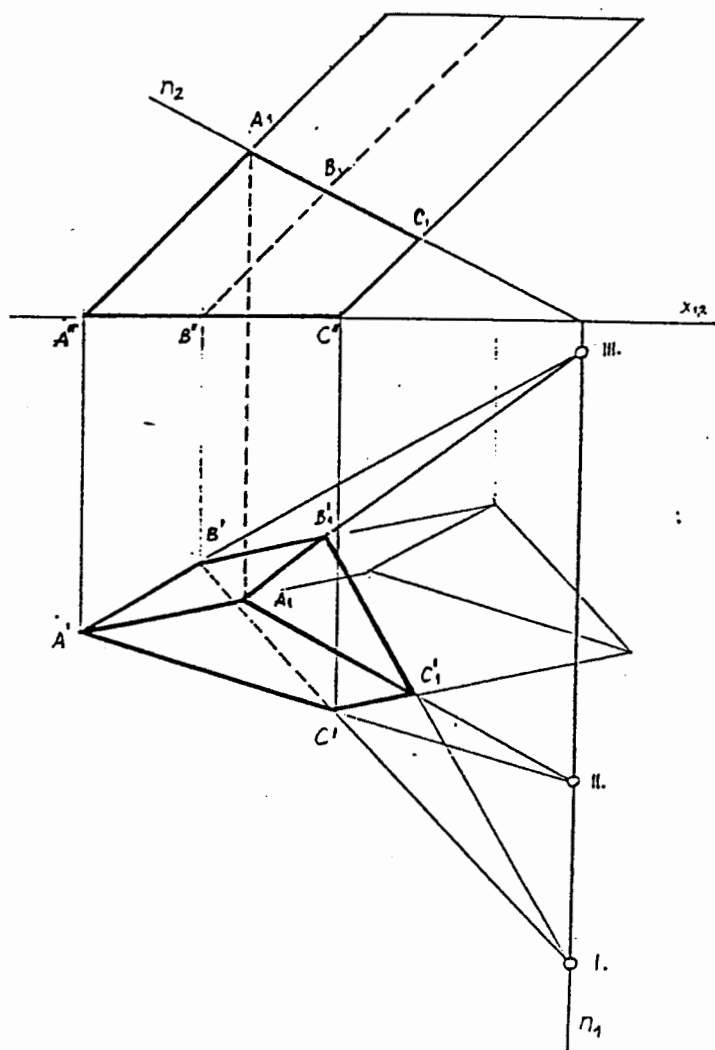
Gúla és hasáb metszése síkkal

Gúla és hasáb síkmetszete a vetületből közvetlenül felismerhető, ha a metszősík valamely vetítősík, s a további képek rendezéssel adódnak.

Gúla metszése vetítősíkkal



Hasáb metszése vetítősíkkal



Amennyiben a metszősík általános helyzetű, úgy egyetlen alkalmas képsík transzformációval a metszősík vetítősíkká tehető.

VIII. ELŐADÁS

A KÖR ÁBRÁZOLÁSA

1. A kör a sík azon pontjainak halmaza, amelyek egy adott ponttól, a kör középpontjától egyenlő távolságra (sugárra) vannak. A kört síkja, középpontja és sugara határozza meg: $k^2(\underline{S}, \underline{K}, r)$
2. A forgó mozgás pályagörbéi körök.
3. A kör derékszögű koordinátarendszerben $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ egyenlettel megadható görbe.

A kör paralel vetülete:

- **kör**, ha a síkja képsíkkal párhuzamos,
- **egyenes szakasz**, ha a kör síkja vetítősík,
- **ellipszis**, ha a kör síkja általános helyzetű a képsíkhöz képest.

Az ellipszis mint a kör affin képe

Adjunk meg egy V_2 második vetítősíkra illeszkedő O középpontú r sugarú kört. A kör második képe átmérőnyi szakasz, az első képe ellipszis. A kör síkjának első fővonalán lévő AB átmérőből származik majd az első képellipszis nagytengelye, s a rá merőleges első esésvonalra illeszkedő CD átmérő vetülete lesz a kistengely. Forgassuk a kör síkját az O középponton átmenő h első fővonala körül az első képsíkkal párhuzamos helyzetbe.

A sík első fő- és esésvonalának felülnézete által alkotott derékszögű koordinátarendszerben a leforgatott kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

A sík leforgatása kapcsán létrejövő perspektív affinitás tengelye a forgástengely h' első képe, pontpárja pedig $D'(D)$, s az affinitás algebrailag a $\lambda = b/a$ aránnyal jellemezhető, ahol a a nagytengely fele, b a kistengely fele.

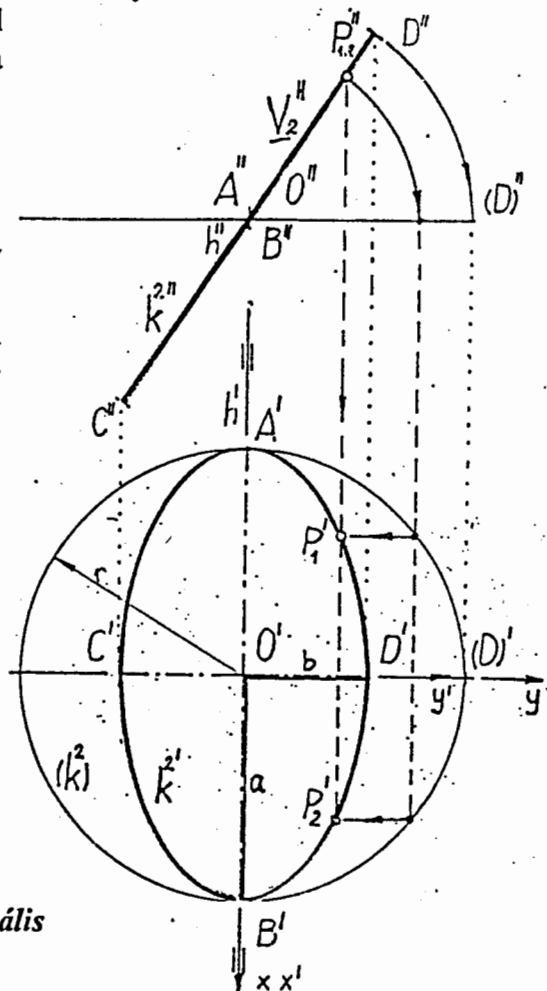
A kör és vetülete között fellépő affin transzformáció egyenletrendszere:

$$x' = x, \quad y' = \frac{b}{a} y.$$

Ezeket behelyettesítve a kör egyenletébe, adódik az ellipszis ismert egyenlete:

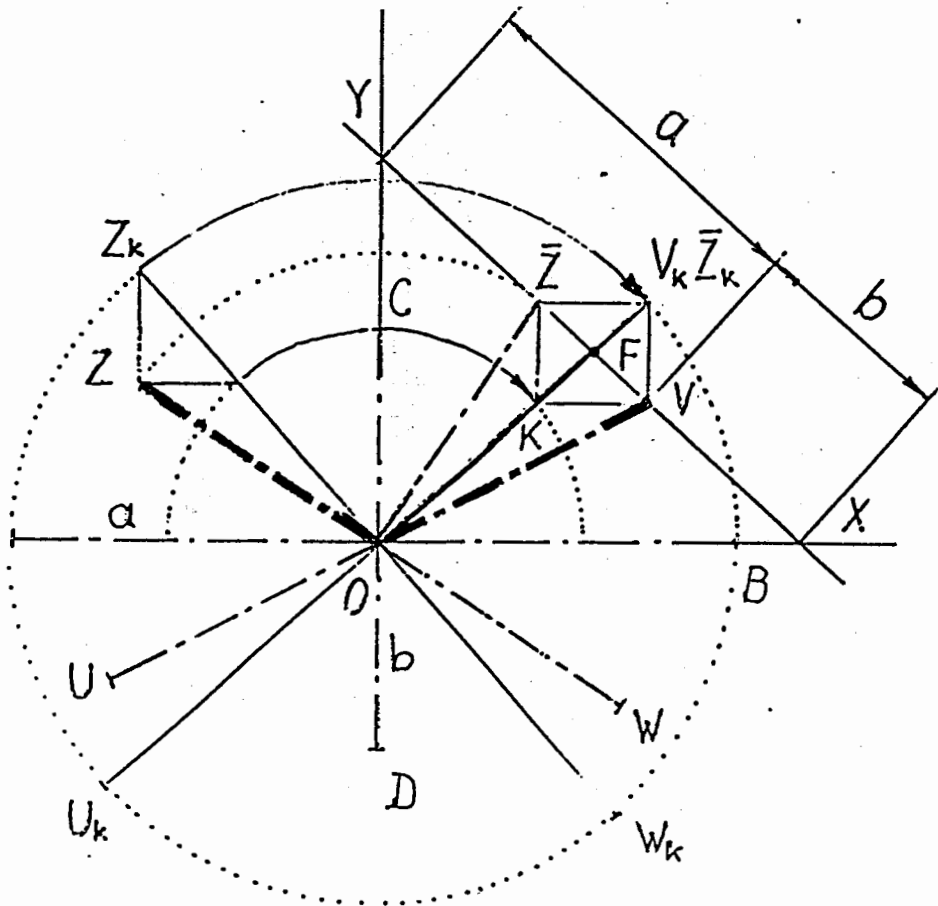
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Párhuzamos vetítéssel, így a Monge-féle ortogonális paralel leképezés esetén is a kör képe ellipszis.



Az ellipszis tengelyeinek szerkesztése konjugált átmérőpárból (Rytz-szerkesztés)

A Rytz-szerkesztéssel adott OZ és OV konjugált félátmérőpárból az ellipszis nagy- és kistengelyét szerkesztjük meg.



Az OFX_Δ egyenlőszárú, tehát $OK=VX=b$.

Az OFY_Δ egyenlőszárú, tehát

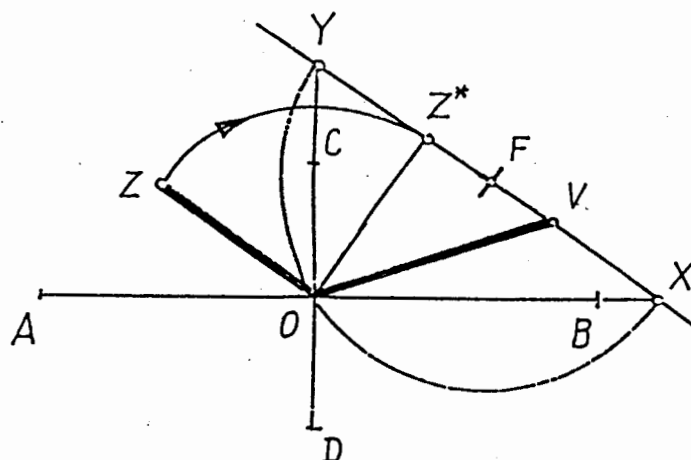
$OF+FV_k=YF+FV$,
 $YV=a$.

A szerkesztés lépései:

1. Forgassuk el az OZ -t O körül 90° -al, új helyzetében OZ^* .
2. A Z^*V szakasz F felezéspontja körül $r=FO$ sugárral rajzoljunk körívet.
3. Ennek a körívnek a Z^*V egyenessel való metszéspontjai X és Y .
4. Thálész tétele értelmében az OX és OY egyenesek egymásra merőlegesek, s ezek képezik az ellipszis tengelyeinek egyeneseit.
5. Mérjük fel a tengelyek hosszát: $a=|VY|$, $b=|VX|$.

Adott: OZ, OV

Szerkesztendő: AB, CD



Megoldás:

A kör $\underline{S(hf)}$ általános helyzetű síkját a h horizontális fővonala körül az E pontot felhasználva első főállásba fordítjuk, hogy a fővonalat érintő kört valódi nagyságban megrajzoljuk. A leforgatott helyzetben először az $(A)(B)$ és $(C)(D)$ egymásra merőleges átmérőket vettük fel úgy, hogy az $(A)(B)$ a h -val párhuzamos legyen. Az első képre visszaállítva ez a két átmérő képezi az első képellipszis nagy- és kistengelyét. *(A kör n -dik képén az ellipszis vetület tengelyei n -dik fővonala és n -dik esésvonalra illeszkedő átmérőkből származnak.)* Az első kép átmérőinek második képei, a második képellipszisnek konjugált átmérői lesznek. A kör második képe olyan ellipszis, amelynek tengelyei a kör síkjának második fővonalára és második esésvonalára illeszkednek. A kör megrajzolását segíti a tengelyvégpontokban megrajzolt simulókörknek (*hiperoszkuláló körök*) az elkészítése. Az O_1 és O_2 középpontjaikat az $A'O'C'T'$ téglalap $A'C'$ átlójára merőleges egyenes metszi ki a tengelyekből. Sugaraik az O_1A' és O_2C' szakaszok.

(Konjugált átmérőpár: az ellipszis két átmérője egymáshoz konjugált, ha az egyik végpontjaiba húzott érintők a másikkal párhuzamosak. Affin vonatkozás kapcsán a konjugált átmérők kör rendszerbeli affin megfelelői a körnek merőleges átmérőpárját képezik.)

Feladat:

Ábrázoljuk azt a körlapot, amelynek síkja az adott t egyenesre merőleges, középpontja a t egyenesre illeszkedő O pont és a kör sugara $r=45\text{mm}$!

Megoldás:

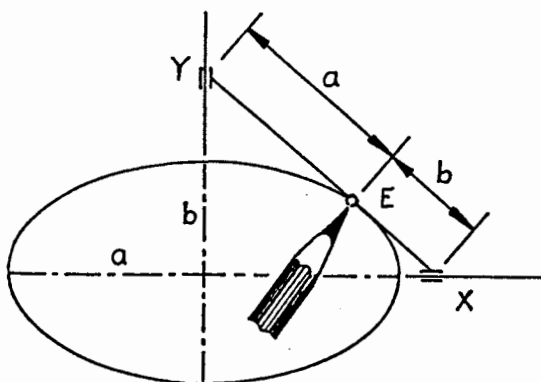
Először szerkesszük meg a körnek azokat az átmérőit mindkét képen, amelyek az első- illetve a második képellipszis nagytengelyét képezik. A körkép ellipszisek nagytengelyei a kör síkjának fővonalaira illeszkednek, az első képen $A'B'$, a másodikon $E''F''$, és a kör átmérőjével megegyező hosszúságúak. A kistengelyek ($C'D'$, $G''H''$) a sík első és második esésvonalára illeszkednek. Ha valamely kép nagytengelyének a másik képét is elkészítjük, akkor a másik képen az ottani ellipszisnek az egyik konjugált átmérőjét kapjuk, s az átmérő végpontja az ellipszisének egy pontja lesz. Ennek a pontnak és a nagytengelynek az ismeretében a papírcsíkos "a+b módszer" alkalmazásával a kistengely hossza meghatározható. Az első képellipszis E' pontjából a kistengely egyenesét $O'A'$ sugarú körívvel elmetssze kapjuk az X' pontot. Az $X'Y'$ szakasz a+b hosszúságú, így az első kép kistengelye $b=Y'E'$. A kistengely hiányzó képe síkra vonatkozó illesztéssel készíthető el.

Affinitással megszerkesztjük a kör profilátmérőjének P végpontját. A második képellipszishez merőleges affinitással az $E''F''$ átmérőjű kört rendeljük. Ennek az affinitásnak tengelye az $E''F''$ egyenes, pontpárja pedig $H''H$. A $p''(O''2'')$ profilátmérő egyenesének a körbeli megfelelőjét a kistengely végpontbeli e'' érintő felhasználásával szerkesztjük. A profilátmérő végpontja $\bar{P}$ a kör rendszerében, amelyet affinitással és illesztéssel keresünk meg a visszaállított képeken.

Ellipszispontok készítése "a+b" papírcsíkos módszerrel

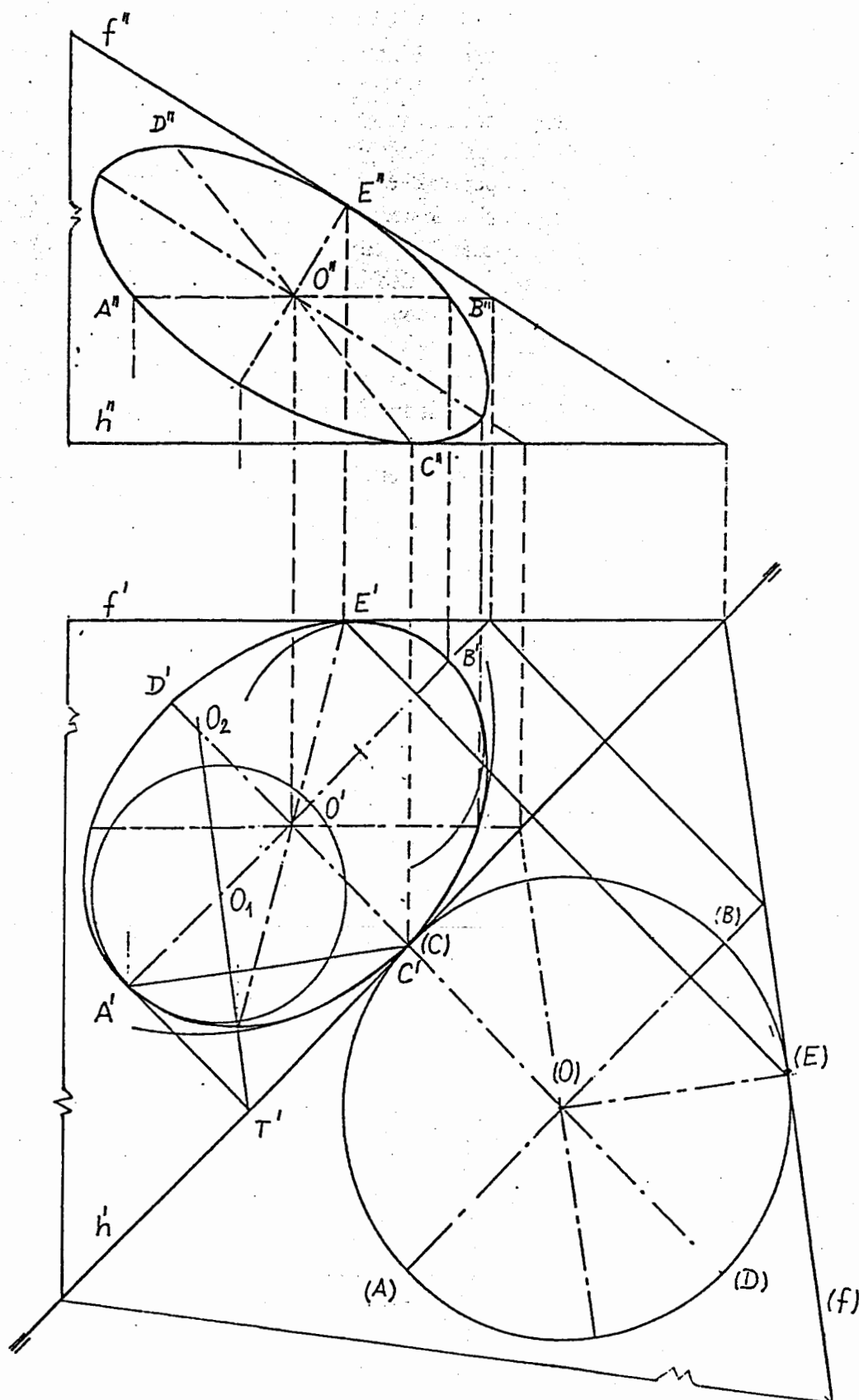
A Rytz-szerkesztésből következően az ellipszis tengelyei közé befektetett e egyenes E pontja a nagytengely X pontjától b , a kistengely Y pontjától a távolságra van. Ezen összefüggés alapján ellipszispontok készíthetők. Egy papírcsíkra felmérve az $a+b$ szakaszt, miközben a szakasz végpontjait a megfelelő tengelyeken mozgatjuk, az a, b szakaszok E határpontja ellipszisévet ír le.

Ugyanakkor ez a módszer az ellipszis kistengelyének elkészítésére egy rendkívül egyszerű eljárást kínál, ha ismerjük a nagytengelyt és az ellipszis egy pontját. Ugyanis, ha az ismert pontból egy a sugarú körívvel bemetsszük a kistengely egyenesét, az összekötő egyenesnek az adott ponttól a nagytengelyig terjedő kiegészítő szakasza éppen b hosszúságú.



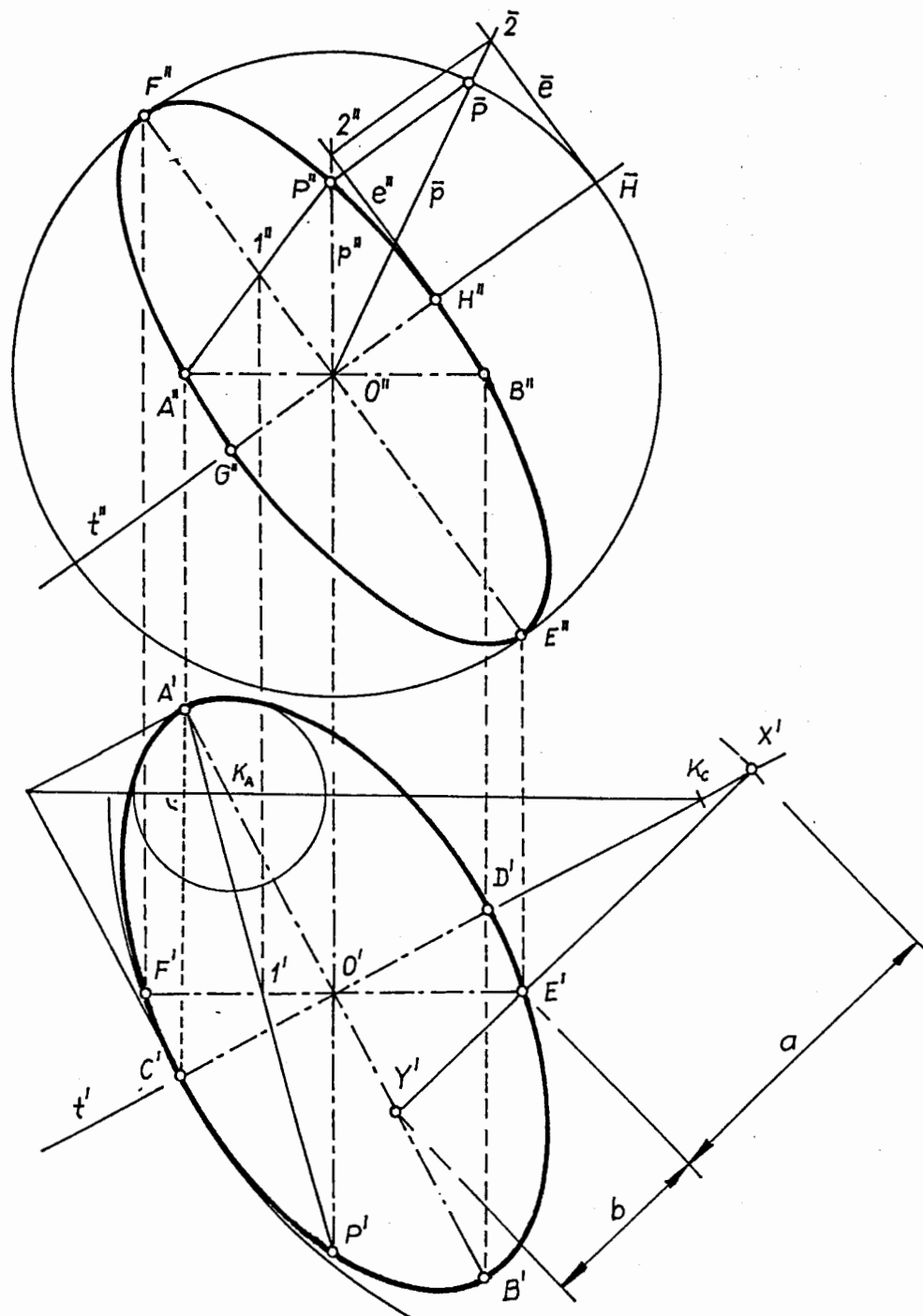
Kör ábrázolása általános helyzetű síkon

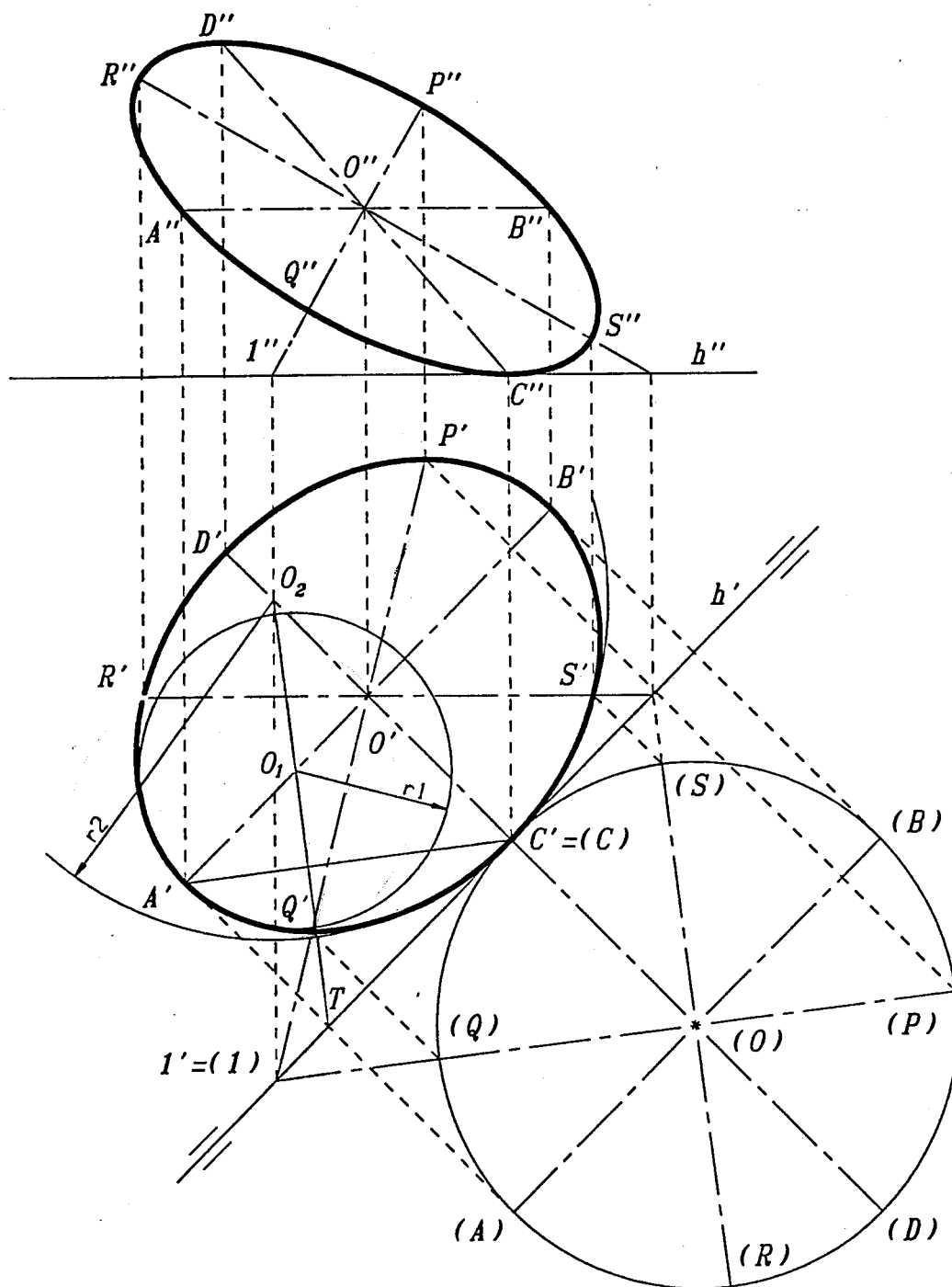
Adott egy $\underline{S}(h,f)$ sík h horizontális és f frontális fővonalával, valamint a frontális fővonalra illeszkedő E pont. Szerkesszük meg az $\underline{S}$ síkra illeszkedő azon körnek a képeit, amely a fővonalakat érinti, az f -t az E pontban.

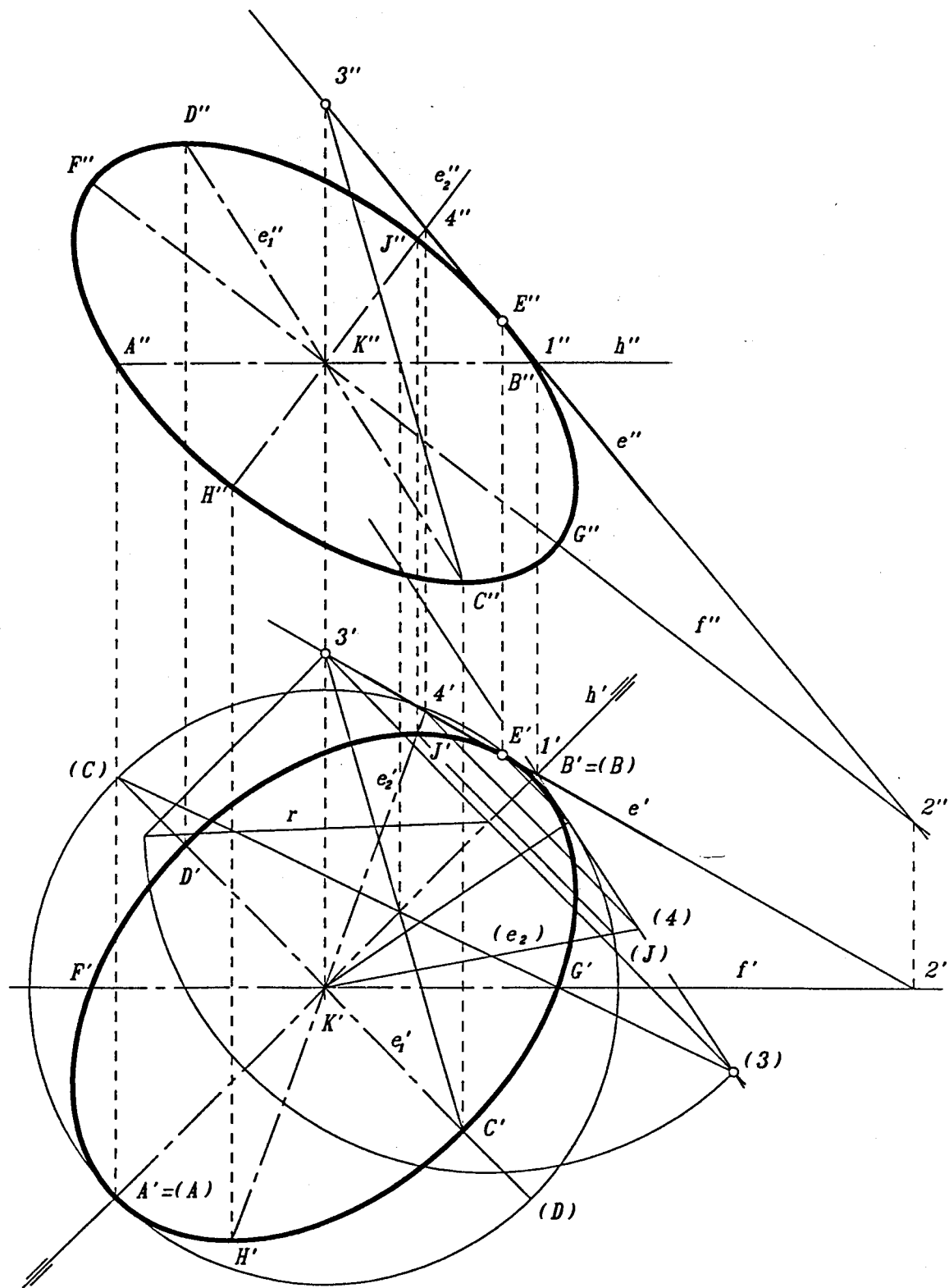


Feladat:

Ábrázoljuk azt a körlapot, amelynek síkja az adott t egyenesre merőleges, középpontja a t egyenesre illeszkedő O pont és a kör sugara $r=45\text{mm}$!







KÖR ÉS ELLIPSZIS AFFIN KAPCSOLATA

AZ ELLIPSZIS NÉHÁNY METSZÉSI ÉS ÉRINTÉSI FELADATA

Síkgeometriai szerkesztések során az ellipszissel kapcsolatban gyakran felvetődnek a következő alfeladatok:

1. Ellipszispontok szerkesztése
2. Az ellipszis adott pontjában érintő szerkesztése
3. Ellipszis és egyenes metszéspontjainak megszerkesztése
4. Ellipszishoz adott irányú érintő szerkesztése (henger ábrázolása)
5. Ellipszishoz adott külső pontból érintő szerkesztése (kúp ábrázolása)

A felsorolt feladatok megoldásának vázlata affinitás alkalmazásával:

1. Az adott ellipszishoz -a meghatározó adatoktól függően- merőleges vagy ferde perspektív affinitást rendelünk. /Az ellipszis tengelyeinek ismeretében merőleges affinitást, konjugált átmérőinek ismeretében ferde affinitást célszerű használni./
2. Az ellipszishoz rendelt kör rendszerében elkészítjük a megadott elemek affin megfelelőit.
3. A kör rendszerében a kitűzött feladatot megoldjuk.
4. Az eredményt az affinitással visszahelyezzük az ellipszis rendszerébe: elkészítjük a kör rendszerében megszerkesztett geometriai elemek ellipszis rendszerbeli affin megfelelőit.

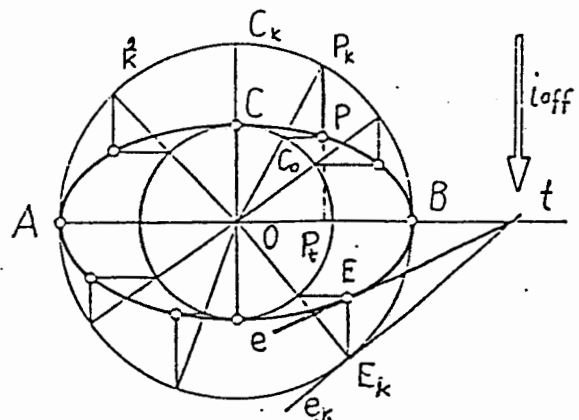
1. Ellipszispontok szerkesztése kétkörös módszerrel

Legyen adott az ellipszis AB nagy- és CD kistengelyével. Az AB nagytengety fölé rajzoljuk meg a k^2 affin kört! Ezáltal olyan affinitást értelmezünk az ellipszis és a kör között, amelynek tengelye az AB egyenes, iránya a tengelyre merőleges, azaz pontpárja $CC_k: \mathbb{A}\{t=AB, CC_k\}$. Szerkesszünk affin pontpárt: egy körpontnak megfelelő ellipszispontot! Vegyük fel a kör egy tetszőleges P pontját és határozzuk meg az ellipszis rendszerbeli megfelelőjét. Az OCC_k sugarat forgassuk el az OC_0P helyzetbe. A forgás során a C pont befutja a kistengely fölé rajzolható kört, a C_k pedig a k^2 affin kört. Az OP_kP_t szög szárai között teljesül a párhuzamos szelők tétele, könnyen ellenőrizhető az affinitásbeli osztóviszony változatlanság (invariáns tulajdonság): $(C_kCO)=(OC_0P_k)=(P_kPP_t)$. /A CPP_t háromszög derékszögnél lévő csúcsa tehát ellipszispont./

Ezután a szerkesztés lépései:

Rajzoljuk meg az ellipszis nagy- és kistengelye fölé a köröket, majd egy sugáregyenest. A sugárnak a nagytengety fölé rajzolt körrel alkotott metszéspontjából húzzunk párhuzamost a kistengellyel, a kiskörrel való metszéspontjából a nagytengetyvel. Ezek az egyenesek ellipszispontban metsződnek.

Megszerkesztettük az E általános pontban az ellipszis érintőjét. Ehhez először az E affin megfelelőjében E_k -ban megszerkesztjük a kör e_k érintőjét. Az ellipszis e érintője a kör e_k érintőjének affin megfelelője.

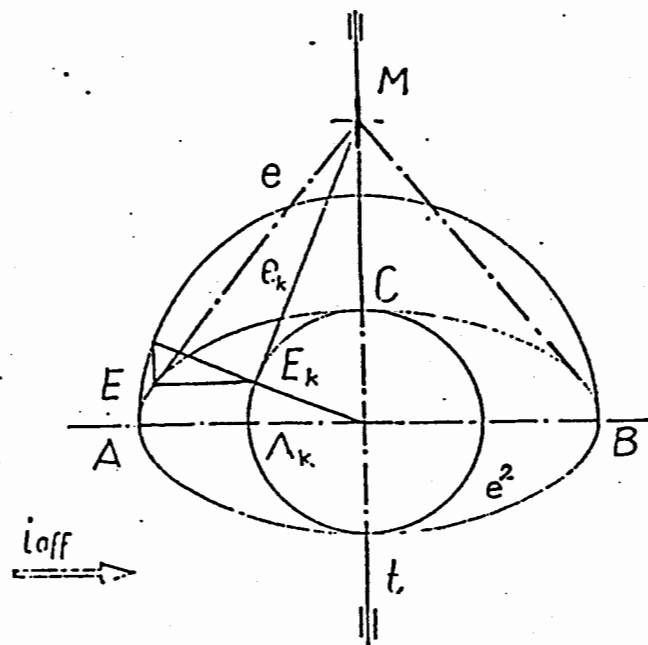


5. Ellipszishez adott külső pontból

érintő szerkesztése (kúp)

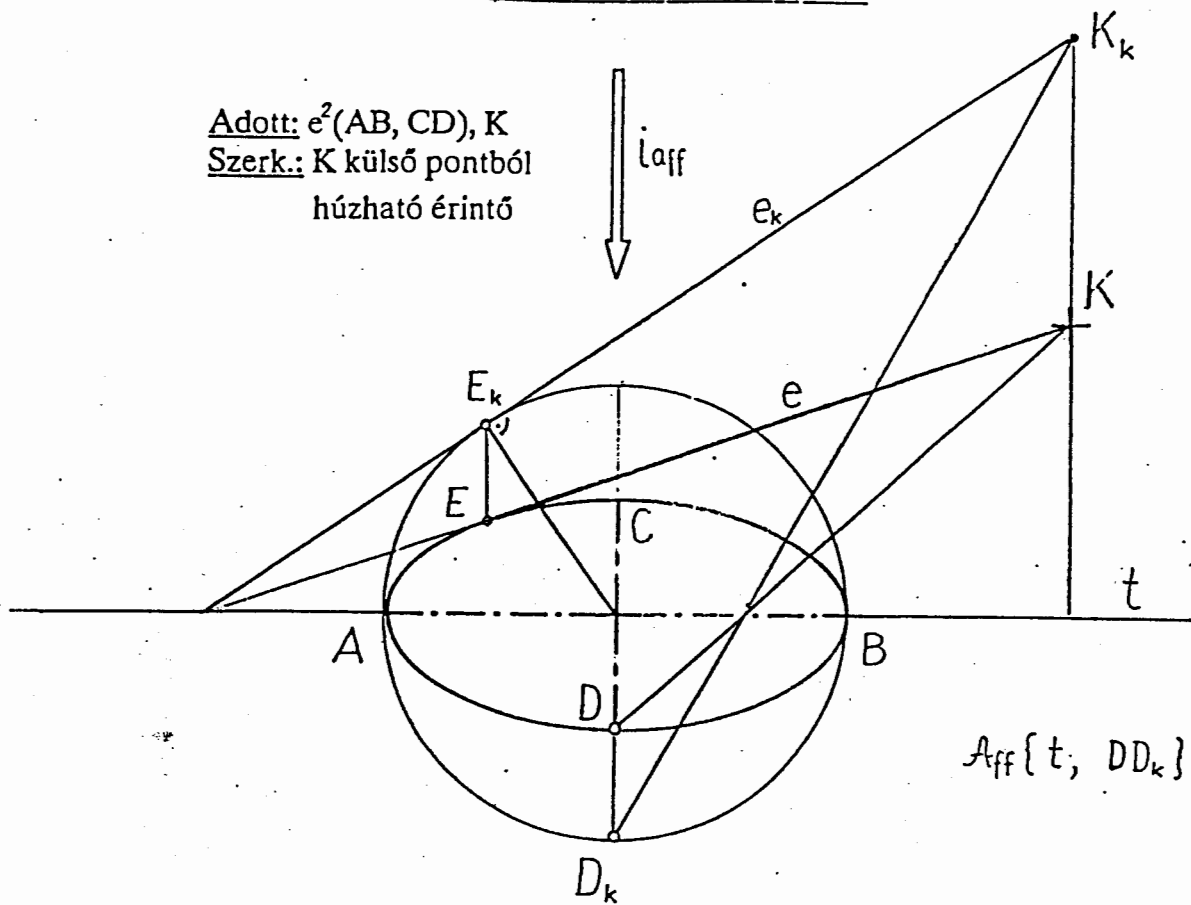
Adott: $e^2(AB, CD)$, M

Szerk.: M pontból húzható érintő

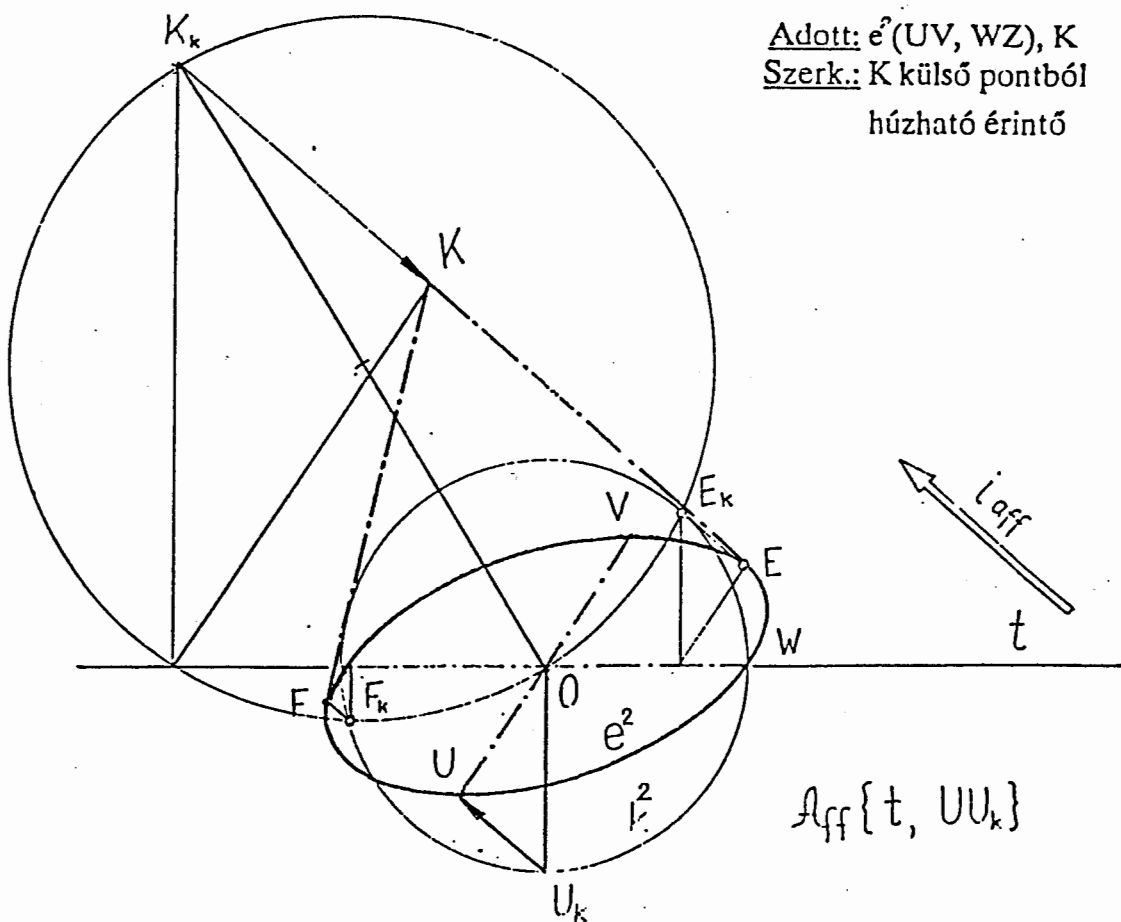


5. Külső pontból érintő szerkesztése

Adott: $e^2(AB, CD)$, K
Szerk.: K külső pontból
 húzható érintő

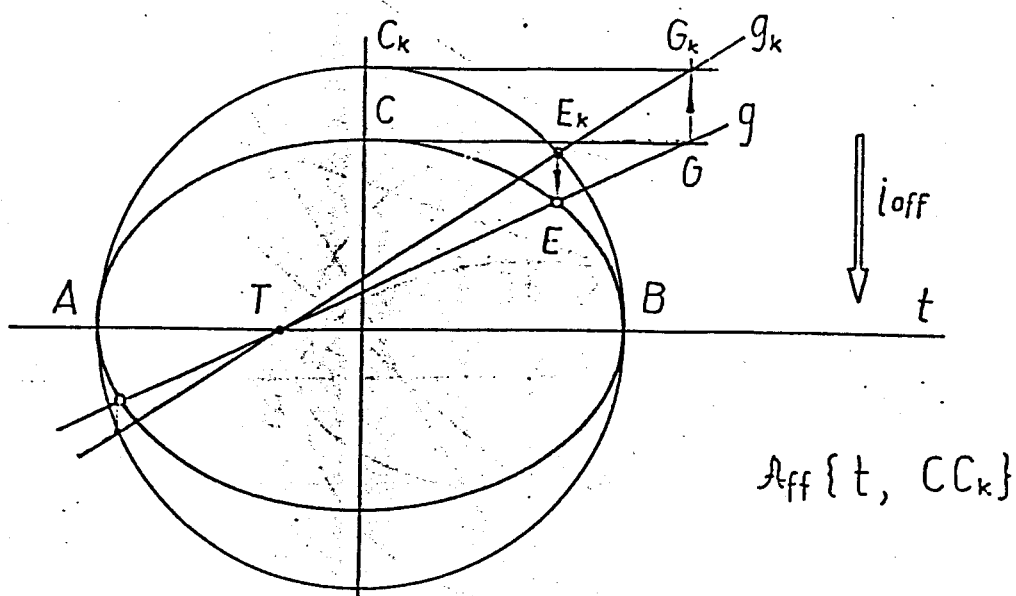


Adott: $e^2(UV, WZ)$, K
Szerk.: K külső pontból
 húzható érintő



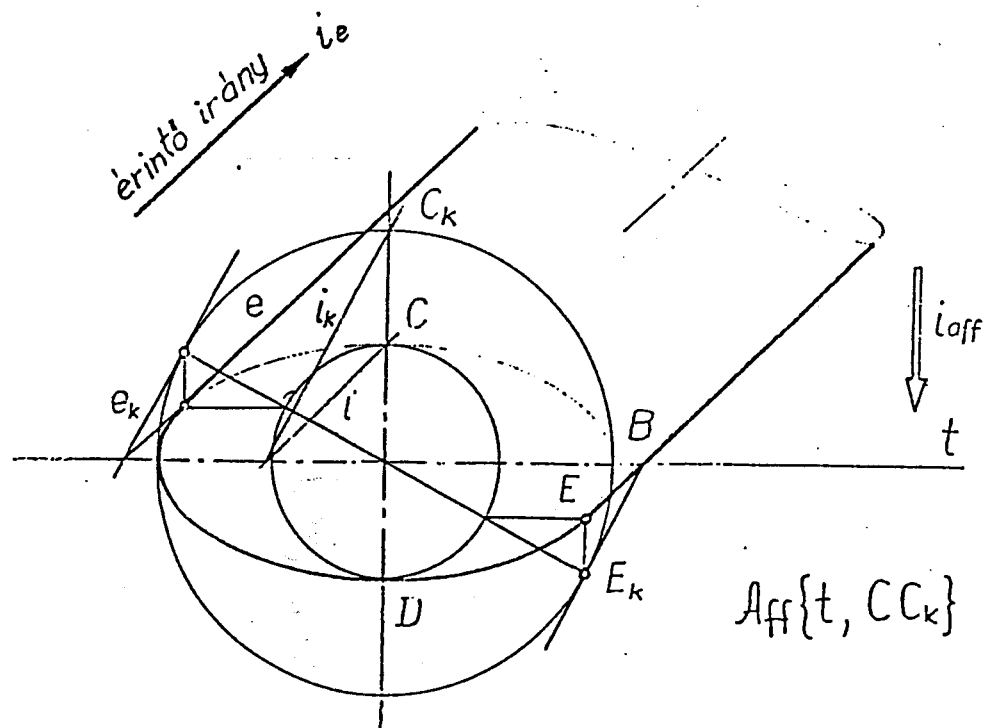
3. Ellipszis és egyenes metszése

Adott: $e^2(AB, CD), g$
Szerk.: e^2 és g metszéspontjai

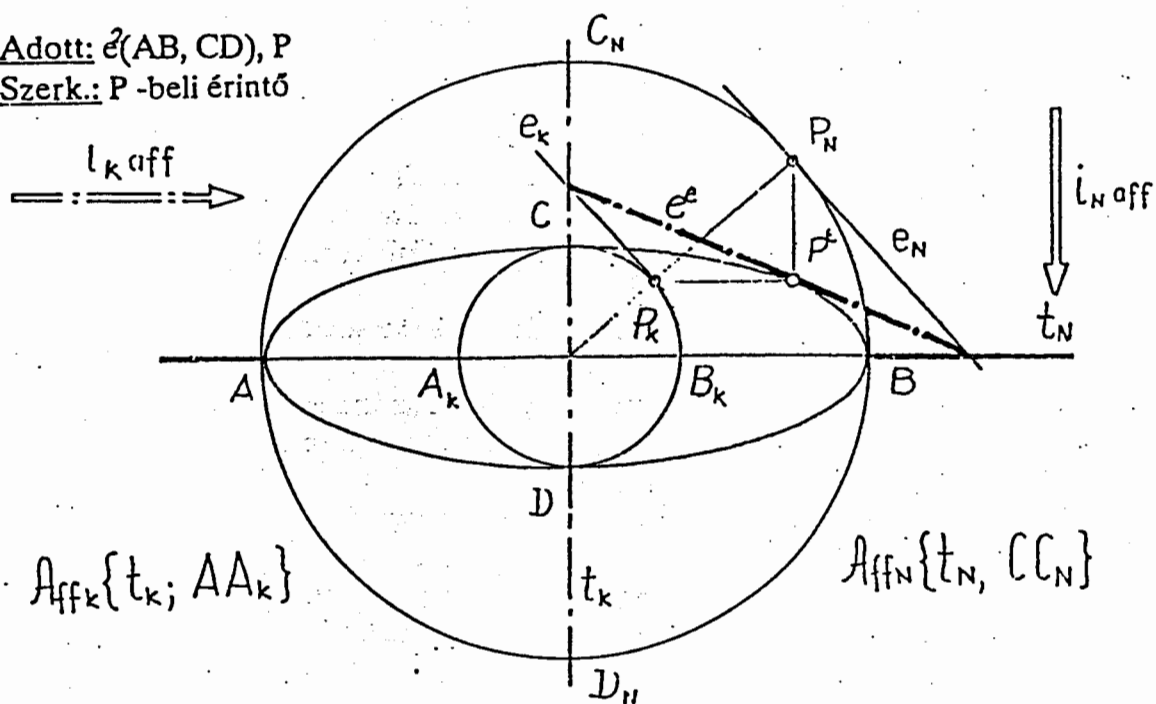


4. Írányral párhuzamos érintő szerkesztése

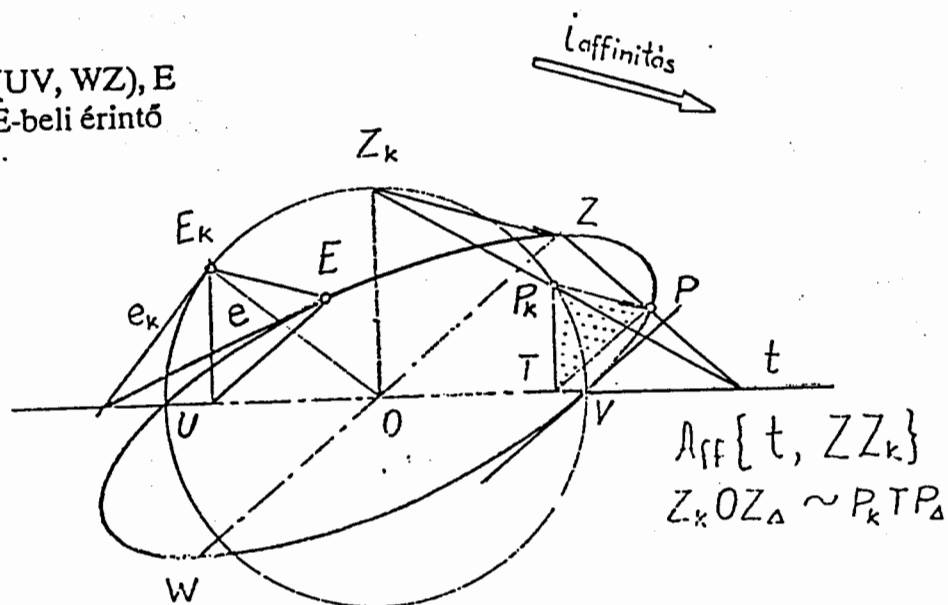
Adott: $e^2(AB, CD), i$
Szerk.: e^2 i -vel párhuzamos érintői



Szerk.: P -beli érintő



Szerk.: E-beli érintő



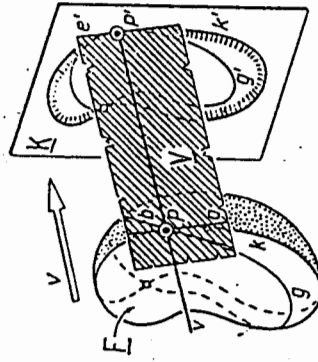
Gömb meghatározása és ábrázolása

A gömb felületének pontjai azon pontok halmaza a térben, amelyek egy adott ponttól - a gömb középpontjától- egyenlő távolságra, sugárra vannak. Egy $\underline{G}(O,r)$ gömböt O középpontja és r sugara határozza meg. A gömb minden síkmetszete kör, közülük a legnagyobb sugarúak a *főkörök*, a többi *gömbi kiskörnek* nevezzük. Valamely képsíkkal párhuzamos síkokban elhelyezkedő körök a paralelkörök. A paralelkörök fontos szerepet játszanak a gömb és felületi pontjainak ábrázolásában, mert képsíkkal párhuzamos síkbeli kör vetülete is kör.

Egy felületi pontot a pontra illeszkedő paralelkör segítségével ábrázolunk. Rendezett merőleges vetületen a gömb képe a sugárral megegyező sugarú kör, ugyanis a gömb kontúrja a képsíkkal párhuzamos síkban elhelyezkedő főkör, s a főkör vetülete a képhatár, szintén r sugarú kör.

Egy felületi pontban az érintősíkot a ponton átmenő egyik, illetve másik képsíkkal párhuzamos paralelkör érintője határozza meg. A paralelkörök érintői az érintősíknak fővonalai.

Az érintősík normálisa egyben a gömb normálisa átmeny a gömb középpontján.



Felület kontúrja, képhatára

A felület ábrázolásakor fontos szerepet játszanak a felületnek azok a pontjai, amelyekben az érintősík a vetítési irányval párhuzamos, vagyis mindazok a pontok, amelyekben az érintő vetítősugár. Ezeknek a pontoknak az érintőegyenesei egy vetítőhenger felületet alkotnak, amelynek az eredeti felülettel közös érintkezési vonala a felületnek a vetítési irányhoz tartozó k kontúrja. A K képsíkon az $\underline{E}$ felület P pontjában az érintősík a $\underline{V}$ vetítősík, így a P pont a felületnek egy kontúrponcija, a pont P' képe pedig a felület K' képhatárának egy pontja.

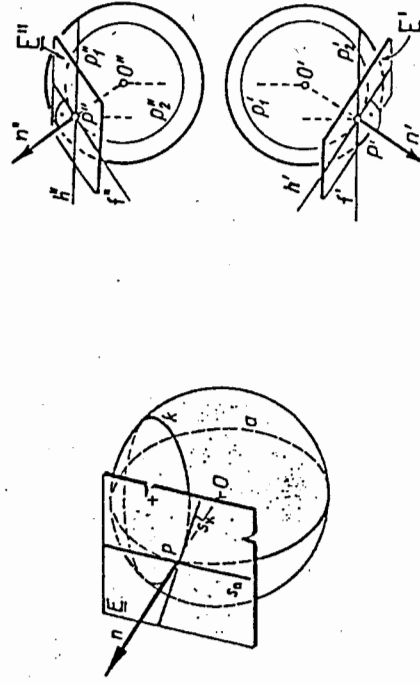
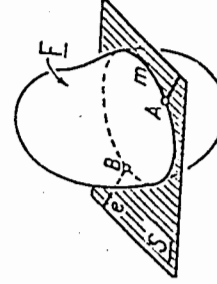
Az $\underline{E}$ felület k kontúrja a felület azon pontjainak halmaza, amelyekben az érintősík vetítősík, illetve merőleges vetítés esetén azon pontok halmaza, amelyekben a felület normálisa a képsíkkal párhuzamos.

A kontúr vetülete általában a képhatár.

Felület és egyenes metszése

Felület és egyenes metszésének ötletét a sík és egyenes dőfspontjának szerkesztéséből merítjük:

1. az adott egyenesre egy alkalmas $\underline{S}$ segédsíkot fektetünk,
2. megszerkesztjük az $\underline{S}$ segédsíknak és az $\underline{E}$ felületnek az m metszésvonalát,
3. megszerkesztjük az e egyenesnek és az m görbének a közös pontjait (A, B). Ezek egyben az egyenes és a felület dőfspontjai.



Gömb metszése vetítősíkkal

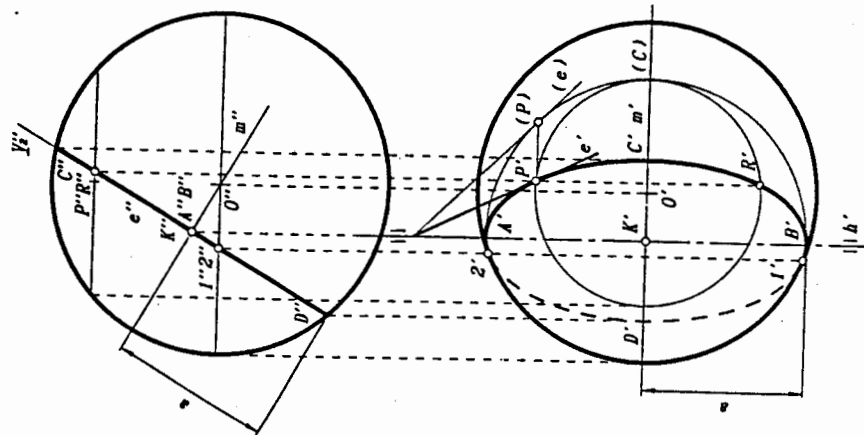
O középpontjával és r sugarával adott gömböt ábrázoltunk, amelyet elmesztünk egy V_2 második vetítősíkkal.

A gömb minden síkmetszete kör. A V_2 vetítősíkbeli kör K középpontját a síknak a gömb O középpontjára illeszkedő m normálisa metszi ki a síkból, az a sugarát pedig az OK befogóból és az r gömbsugarából Pitagorász tétele alapján számíthatjuk. A metszet második képe közvetlenül felismerhető, a $C'D''$ hürként jelenik meg, amely a metszékör átmérőjével megegyező hosszúságú. A metszet első képe ellipszis, amelynek tengelyei $A'B'$, $C'D'$ rendezéssel megszerkeszthetők. Elkészítjük a metszet 1, 2 első kontúrponyjait. Az $1'2''$ ott van, ahol az első kontúrfőkörnek és a metszősíknak a második képe metszi egymást. Ezekben az első képen a metszetet az első kontúrfőkör érinti, s a láthatóság meghatározásakor ezek a pontok választják el egymástól a metszetnek a látható illetve a takart ívét.

A metszet érintője a gömb adott pontbeli érintősíkjának a metszősíkkal alkotott metszésvonala.

Az érintő második képe közvetlenül felismerhető, az első képét az érintősíkra való illesztéssel határozható meg.

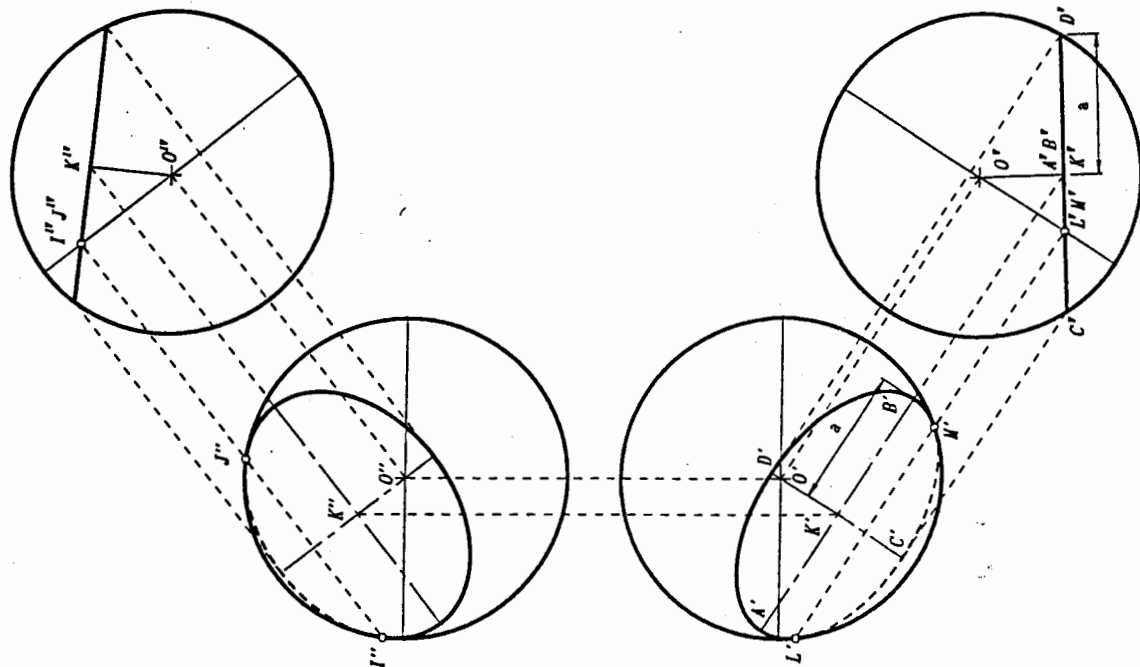
Az ábrán a P pontbeli e érintő szerkesztését a vetület ellipszis és affinitással hozzárendelt kör segítségével végeztük.



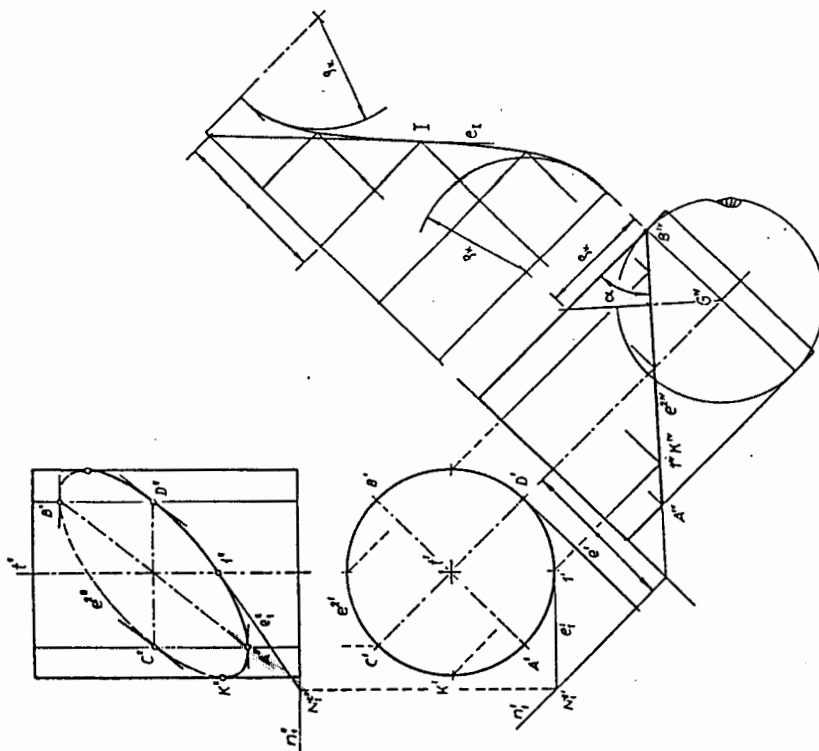
Gömb metszése általános helyzetű síkkal

Megszerkesztjük a $G^2(O, r)$ gömb azon síkmetszetét, amelynek középpontja a gömb belsejében adott K pont.

A metszékör síkja merőleges az OK egyenesre, a sugara pedig egy OK befogójú r átfogójú derékszögű háromszög másik befogója. A síkmetszet képeinek elkészítését képsíktranszformációval végezzük. Az első majd a második képsíkhöz kapcsolt új képsíkok segítségével a metszősíkot élbe transzformálva a K_1K_2 illetve a K_3K_4 képsíkrendszerben így vetítjük és gömb metszését kell megszerkesztetni.

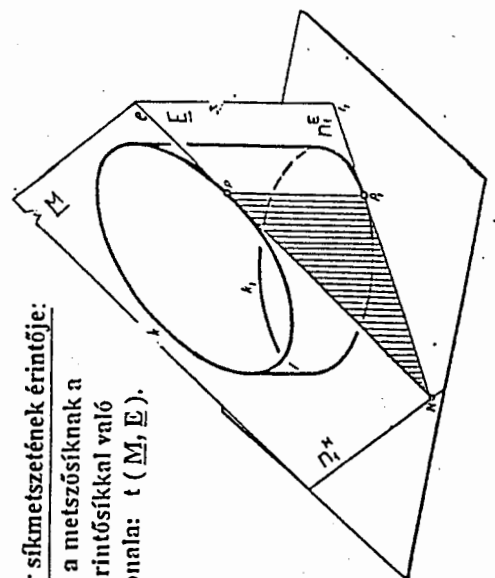


Forgáshenger síkmetszete: ellipszis

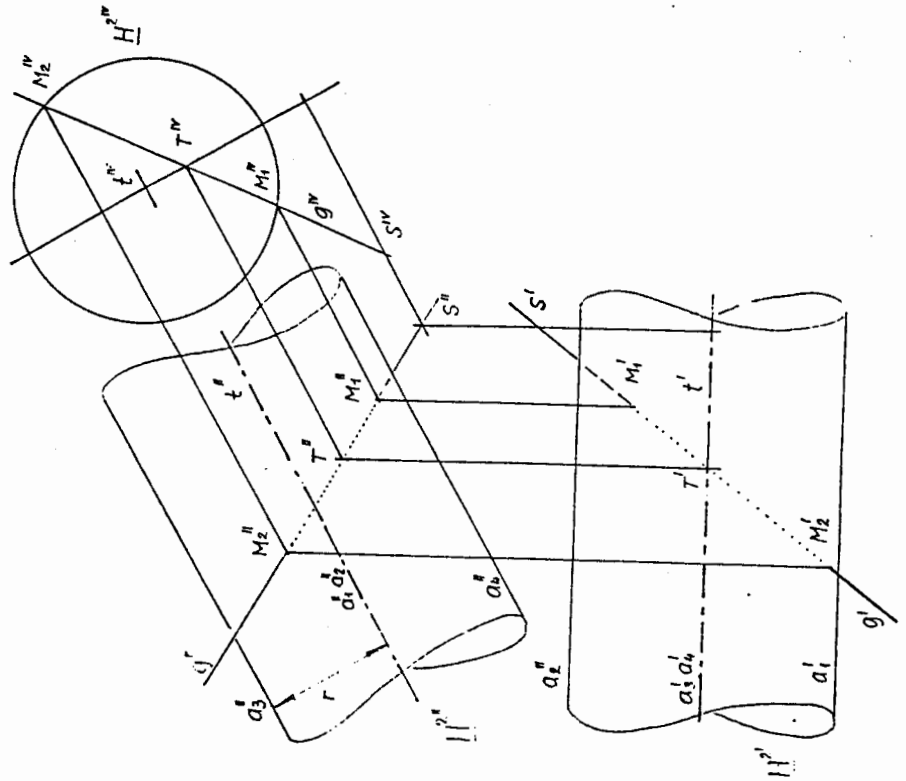
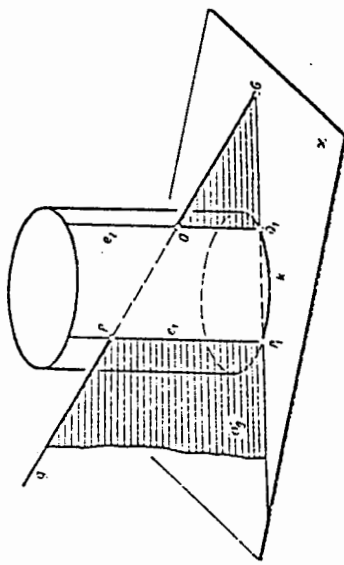


Forgáshenger síkmetszetének érintője:

Az érintő a metszősíkknak a pontbeli érintősíkkal való metszésvonala: $t(M, \underline{E})$.



Forgáshenger metszése egyenessel

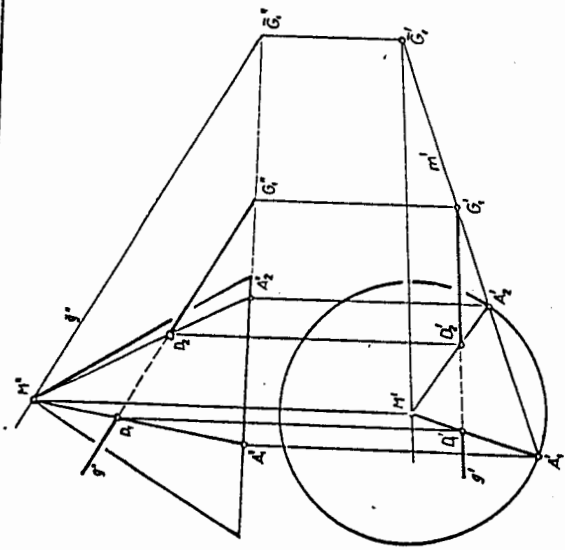
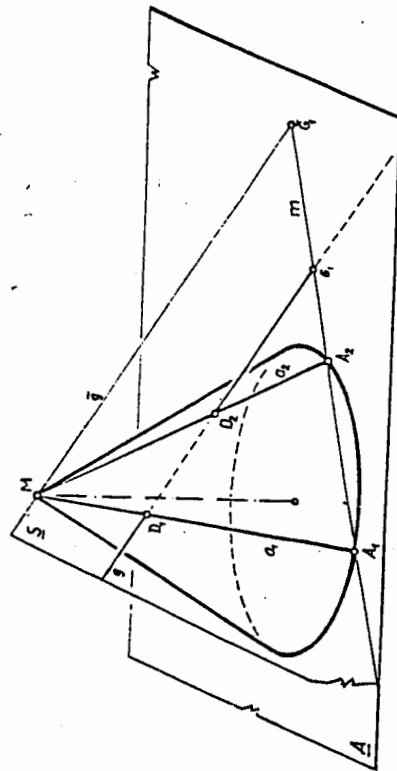


Forgáskúp síkmetszetei

Kúp metszése egyenessel

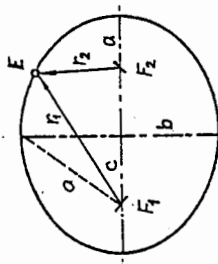
A kúpot metsző egyenesre azt a segédsíkot helyezzük, amelyik illeszkedik a kúp csúcsára. Ennek a segédsíknak a kúppal alkotott metszete általában két alkotó, amelyek az adott egyenest a keresett döféspontokban metszik.

Ábránkon a kúpot döfő g egyenesre az $S(gM)$ síkot fektettük. A D_1 és D_2 döféspontokon átmenő a_1 és a_2 alkotók A_1 és A_2 talpontiakat a segédsíknak és az alapsíknak az m metszésvonalára metszi ki a kúp alapköréből. Mivel a kúp az első képsíkon áll, ezért az m egyenes a segédsík első nyomvonala. Az m nyomvonal a g egyenes G_1 és a g -vel párhuzamos g' egyenes G_1' első nyomponján megy keresztül.



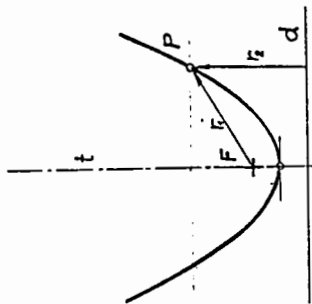
Ellipszis

$$r_1 + r_2 = 2a$$



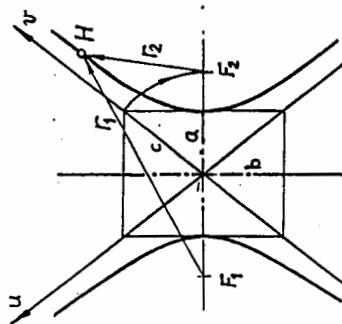
Parabola

$$\overline{PF} = \overline{Pd}$$

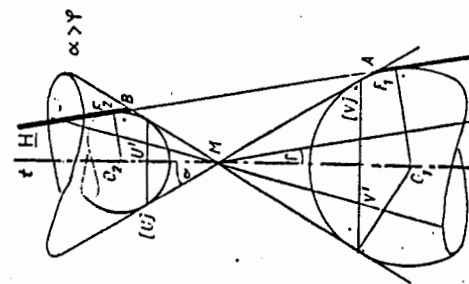
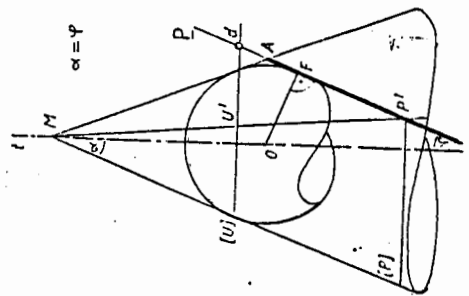
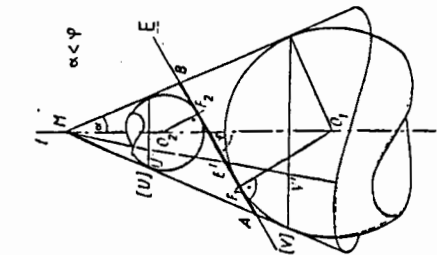
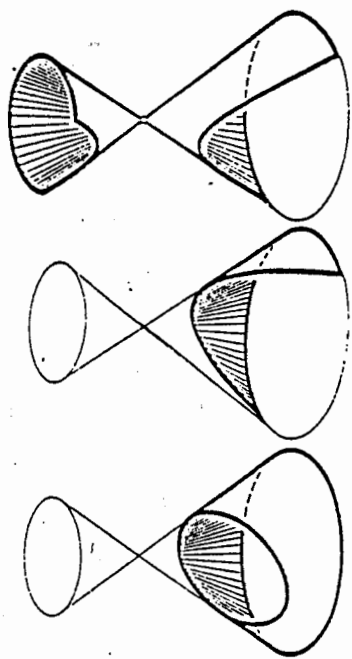
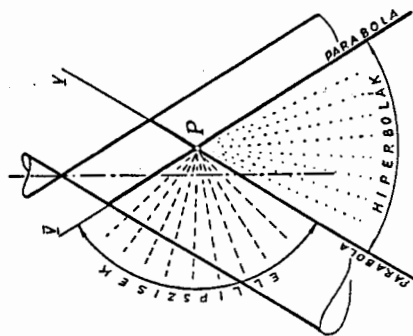


Hiperbola

$$r_1 - r_2 = 2a$$



Forgáskúp metszéskialai

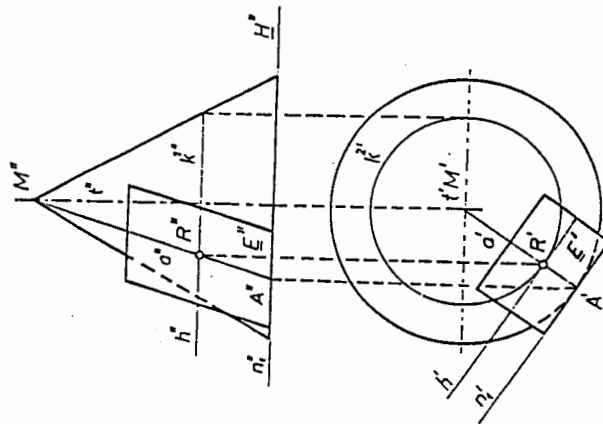
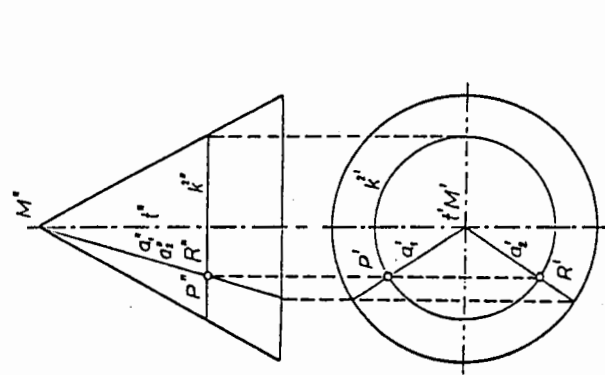


FORGÁSKÚP

Forgáskúp származtatása, ábrázolása

Egy t tengellyel hegyesszöget bezáró a egyenes a tengely körül forogva forgáskúp felületet sűröl. Az a egyenes a kúpnak alkotója. A forgás közben az alkotó minden egyes pontja egy-egy kört ír le a felületen, amely köröknek a síkja a tengelyre merőleges, tehát egymással párhuzamos, innen a paralellkör elnevezésük.

Forgáskúpon felületi pontot paralellkör vagy alkotó segítségével veszünk fel. A K^2 forgáskúp P és R felületi pontjait a pontokon átmenő k^2 paralellkör vagy az a_1 és a_2 alkotó illesztésével ábrázoljuk.



Forgáskúp érintő síkjá

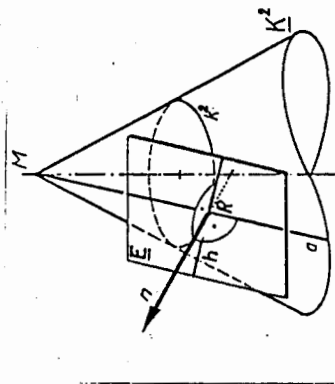
A kúp R pontbeli E érintő síkját a pontra illeszkedő a alkotó és a ponton átmenő k^2 paralellkör h érintője képezi. Rajzoljuk meg az a alkotó A talppontjában az alapkör n_1 érintőjét, amely az érintő sík H alapsíkbeli nyomvonalára lesz. Így az n_1 nyomvonal és az a alkotó az érintő sík első fő és esésvonalát alkotják.

A kúp egy adott pontbeli érintő síkját a ponton átmenő alkotó és az alkotó talppontjában az alapkör érintője határozza meg.

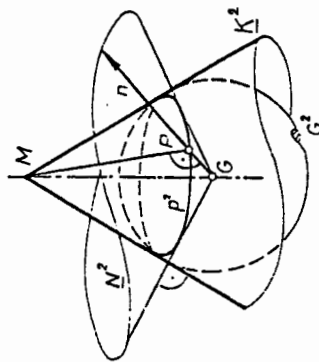
A forgáskúp normálisa

Egy felület normálisa egyben a kiválasztott pontbeli érintő síkjának is normálisa. Kúp esetében az E érintő síkot a ponton átmenő a alkotó és a p^2 paralellkör h érintője alkotja, s az n normális az $E(ah)$ síkra merőleges. (1. ábra) A normális képei az érintő sík megfelelő fővonalainak a normálissal azonos nevű képeire merőlegesek.

Forgásfelületeknél, így a forgáskúpnál is, beírt gömböt is használhatunk a normális elkészítéséhez. A K^2 forgáskúp kiválasztott P pontjának p^2 paralellkör mentén érintő beírt G^2 gömb p^2 paralellkör menti normálisai megegyeznek a forgáskúp normálisaival. Az n normális a P pontot a gömb G középpontjával köti össze és merőleges a P ponton átmenő kúpalkotóra is. A forgáskúp származtatása során az a alkotóval együtt forgassuk a t tengely körül az n normális is. Miközben az a alkotó leírja az eredeti kúpot, s a P pont befutja a p^2 paralellkört, az n normális egy G csúcspontú N^2 másik kúpot képez, amelynek alkotói egyenként merőlegesek az eredeti kúp alkotóira. Ez a kúp az eredeti kúp normálalkúpja. A forgáskúp normálisa a normálalkúpjának alkotója. (2. ábra)



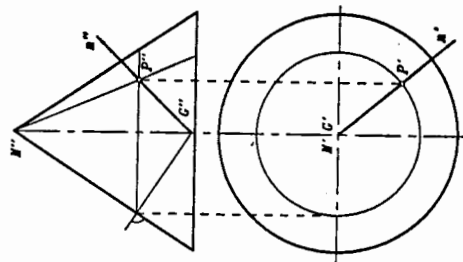
1. ábra



2. ábra

Forgáskúp normálisának szerkesztése normálalkúp segítségével

A K^2 forgáskúp N^2 normálalkúpjának G csúcspontját a kiválasztott P pont p^2 paralellkörének L kontúrponkjában az eredeti kúp kontúralkotójára állított merőleges egyenes metszi ki a kúp tengelyéből. A forgáskúp normálisának képét úgy készítjük el, hogy a szóbanforgó pont képét összekötjük a normálalkúp csúcspontjának megfelelő képevel.



3. ábra

FORGÁSHENGER

A forgáshenger meghatározása és ábrázolása

Ha egy egyenest egy vele párhuzamos egyenes, mint tengely körül megforgatunk forgáshenger palást keletkezik. A forgáshenger felületének pontjai azon pontok halmaza a térben, amelyek egy adott egyenestől - a forgáshenger tengelyétől - adott távolságra, sugárra vannak. Egy $H^2(t,r)$ forgáshengert t tengelye és r sugara határozza meg. A forgáshengernek a tengelyére merőleges síkmetszetei egymással párhuzamos körök, amelyeket paralelköröknek nevezünk. A tengellyel párhuzamos síkmetszeteik alkotók.

A forgáshengeren egy felületi pontot a pontra illeszkedő paralelkör vagy alkotó segítségével ábrázolunk.

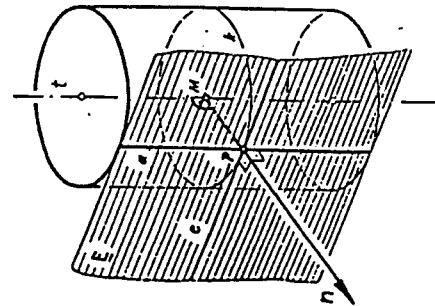
Rendezett nézeteken a forgáshenger legegyszerűbb vetületei akkor keletkeznek, ha a henger tengelye valamely vetítősugar, mert ekkor a henger azon képe, ahol a tengely pontként jelenik meg, a henger sugarával megegyező sugarú kör. (2. ábra)

Ha a henger képsíkkal párhuzamos, akkor a tengelyre merőleges újabb képsík felvételével (a tengelyre merőleges síkban fekvő kör leforgatásával) az ábrázolás könnyen elvégezhető. (3. ábra)

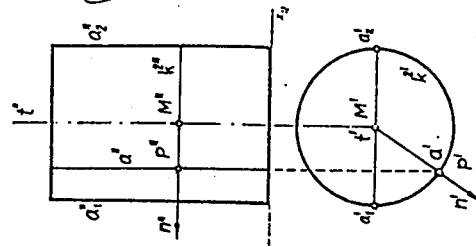
Egy felületi pontban az érintősfokot a ponton átmenő alkotó és a paralelkör érintője határozzák meg.

Az érintősfk normálisa egyben a forgáshenger normálisa is, amely merőleges a tengelyre és metszi a tengelyt. A normálisat a szöbforgó pont és a tengellyel alkotott metszéspontja határozza meg. (Az ábrán szereplő n normális a P ponton és a tengellyel alkotott M metszésponton megy keresztül.)

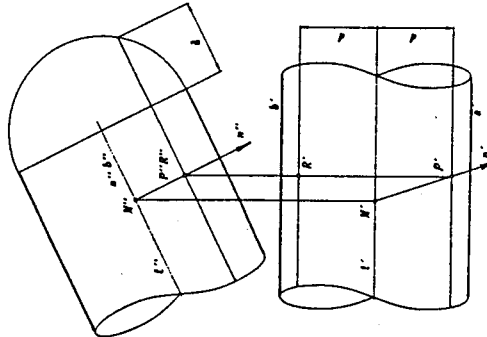
Forgáshenger érintősfkja, normálisa



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Forgáshenger síkmetszete ellipszis

Az ellipszis azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek két adott ponttól, - a két fókuszától - mért távolságaik összege állandó: $r_1 + r_2 = 2a$. A két vezérsugar összege egyenlő a nagytengely hosszával.

Dandelin /1822./ nyomán a V metszősíkot, valamint a H^2 hengert betülről érintő D_1 és D_2 gömbök berajzolásával igazoljuk a fenti összefüggést.

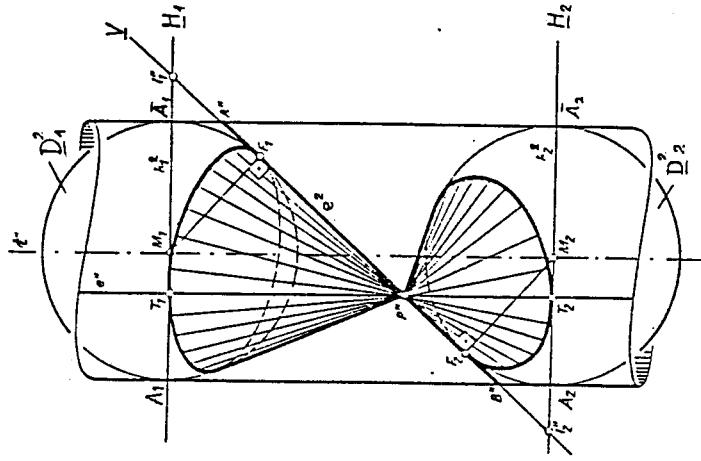
A P pontra nézve:

$$PF_1 = PF_2 \text{ illetve } PF_1 = PT_1,$$

(mert gömbhöz külső pontból egyenlő hosszú érintőszakaszok húzhatók)

$$PF_1 + PF_2 = PT_1 + PT_2 = \text{állandó} = 2a,$$

amely a henger és az érintő gömbök közös köreinek távolsága, a nagytengely hossza.

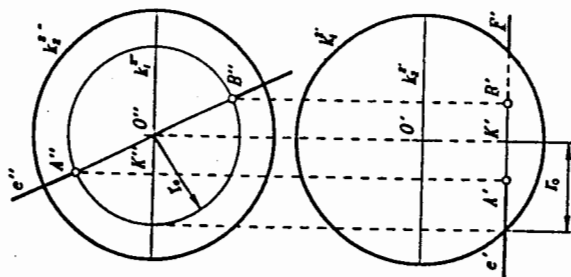


Forgáshenger síkmetszeteinek érintője

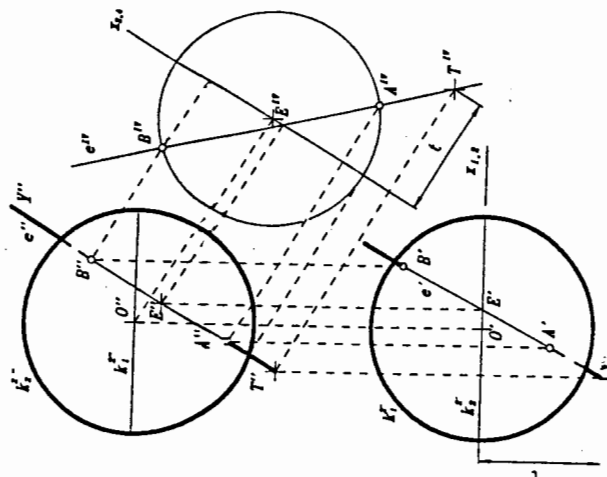
Az A síkon álló H^2 forgáshenger paláston lévő e^2 ellipszismetszet P pontjában készítsük el a metszet e érintőjét! Az e érintő egyrészt benne van a metszet görbé M síkjában; másrészt a henger P pontbeli E érintősfkjában, ezért az érintő a metszetsíknak az érintősfkjal alkotott metszévonal: $e(M \cap E)$. Az e érintőegyenest két pontja határozza meg: a P érintési pont valamint az A síkbeli N pont. Ha az A sík valamely képsík, akkor az N pont az érintő nyompontja. Az N nyompont így az M metszetsík és az E érintősfk nyomvonalainak metszéspontja.

Gömb és egyenes metszése

Az alábbi ábrákon adott egy-egy $G^2(O, r)$ gömb, valamint egy frontális illetve egy-egy általános helyzetű egyenes. Szerkesszük meg az egyenesek és a gömb dőfélpontjait!



A $G^2(O, r)$ gömböt metsző e egyenes frontális helyzetű. Az e egyenesre F frontális helyzetű segédírt illesztünk. Ez a sík az r_0 sugarú paralelkört metszi ki a gömből, amelynek második képe változatlanul kör. A kimetszett körnek és az e egyenesnek a metszéspontjai az A és B dőfélpontok.

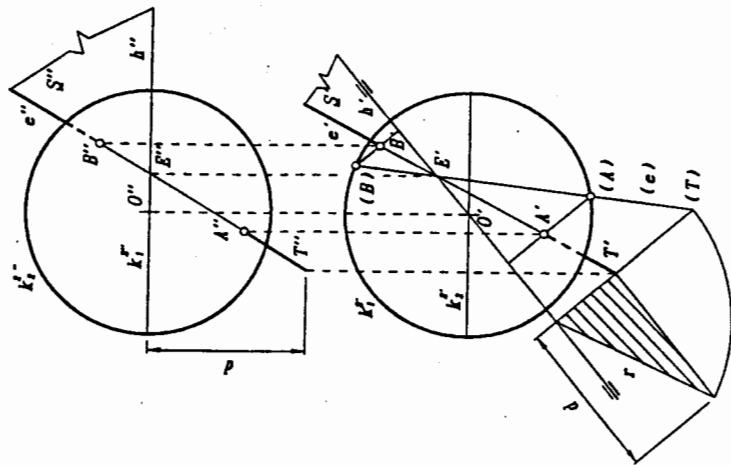


A $G^2(O, r)$ gömböt metsző e egyenes általános helyzetű.

A egyenesre illesztett segédírt legyen az e egyenes V_1 második vetítésikje. A szerkesztést a V_2 második vetítésikkal párhuzamos új képsíkon végezzük, ezáltal az előbbi feladatban tárgyalt helyzetet hozunk létre. A metszéspontok megszerkesztése így a K_2K_1 rendszerben képsík transzformációval történik.

A gömböt metsző e általános egyenesre illesztett segédírt legyen az $S(Oe)$ főkör síkja.

Ezt a főkört a h fővonala körül az első képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatva az metszéspont-leforgatott-helyzetében éppen fedésbe kerül az első kontúrkörrel. Így valójában csak a e egyenest kell leforgatni. A metszéspontok: A és B.

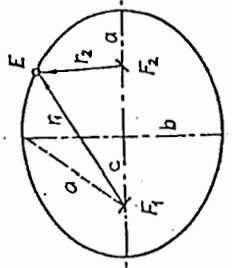


Forgáskúp síkmetszetei

Ellipszis

$$r_1 + r_2 = 2a$$

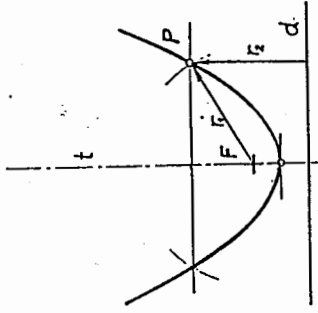
$$a^2 = b^2 + c^2$$



Parabola

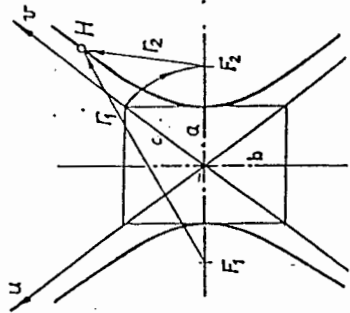
$$PF = Pd$$

$$r_1 = r_2$$

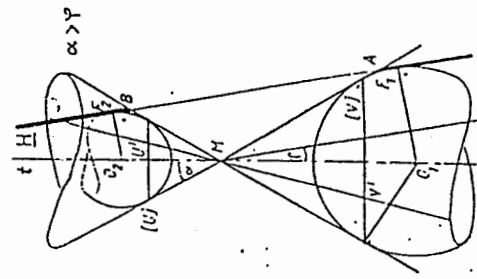
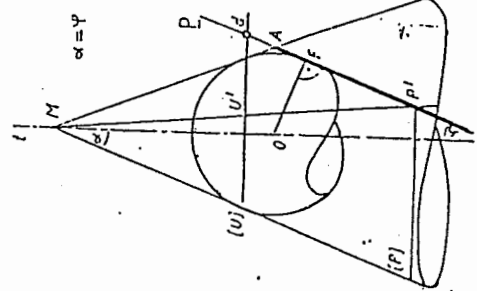
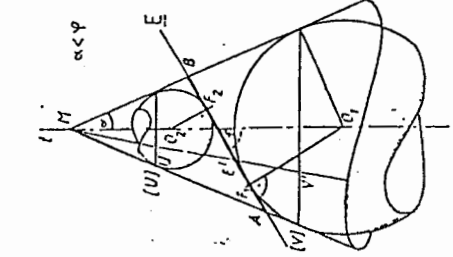
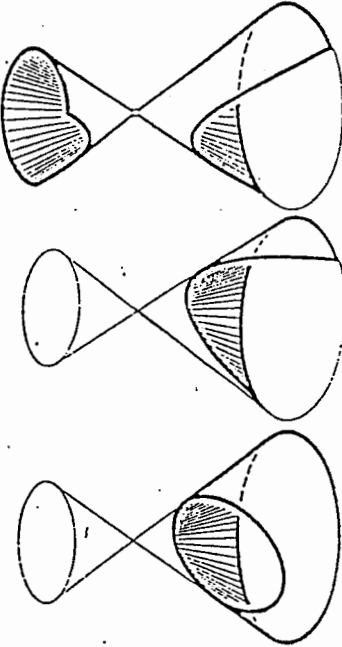
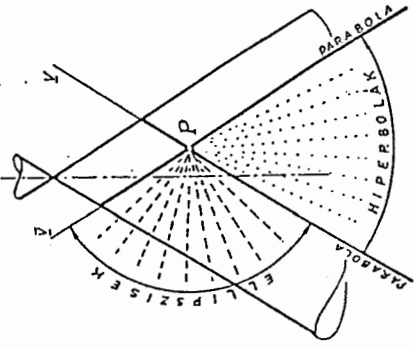


Hiperbola

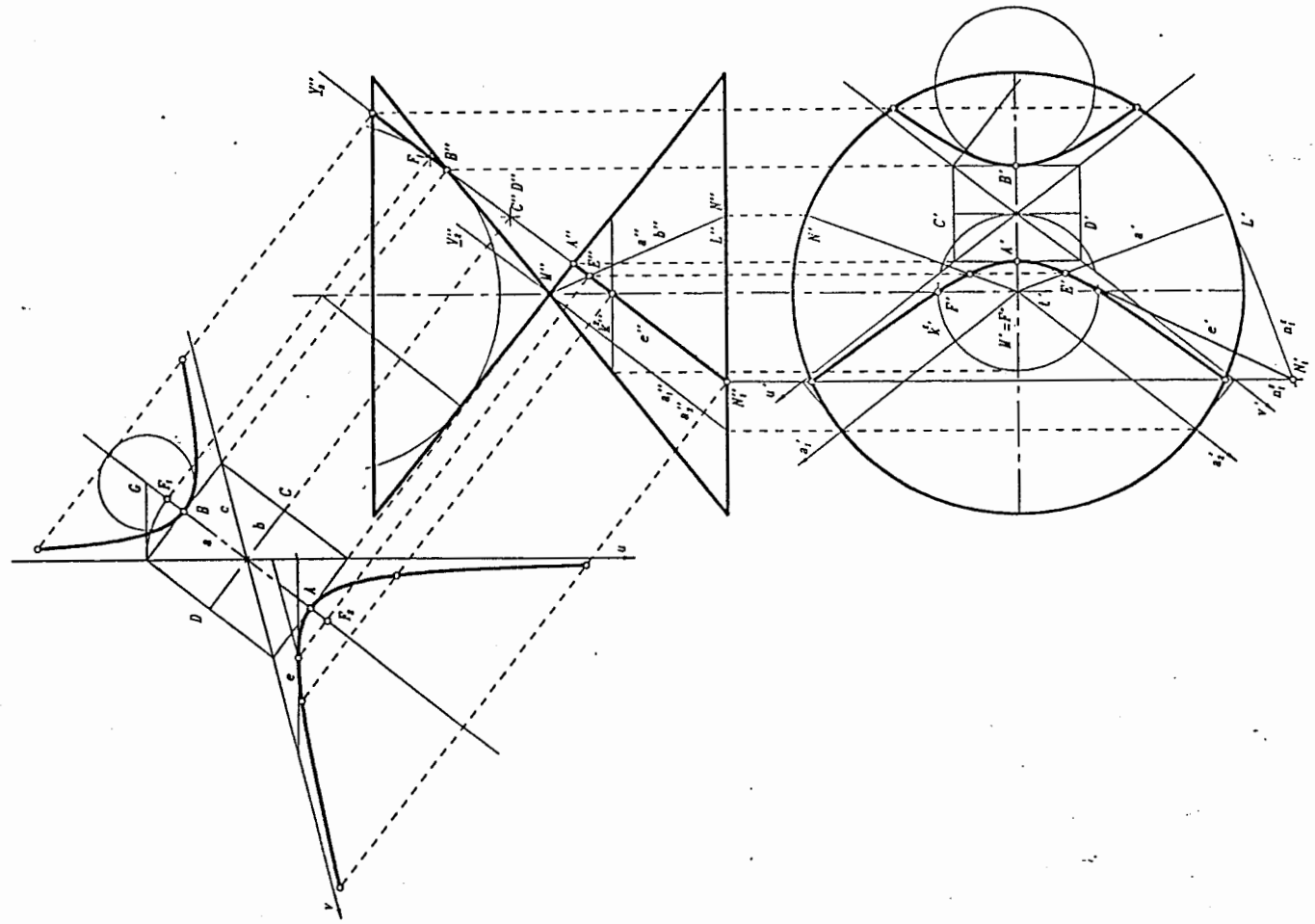
$$r_1 - r_2 = 2a$$



Forgáskúp metszősíkjai



Forgáskúp hiperbola metszete



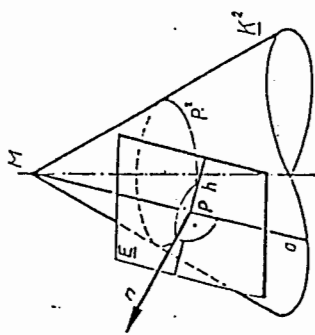
A forgáskúp normálisa

Egy felület normálisa egyben a kiválasztott pontbeli érintőjének is normálisa. Kúp esetében az $\underline{E}$ érintősíkot a ponton átmenő a alkotó és a p^* paralelkör h érintője képezi, s az n normális az $\underline{E}(ah)$ síkra merőleges. A normális képei így az érintősík megfelelő fővonalainak a normálissal azonos nevű képeire merőlegesek (1. ábra).

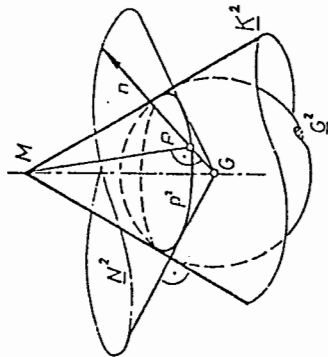
Forgásfelületeknél, így a forgáskúpnál is, beírt gömböt is használhatunk a normális elkészítéséhez. A $\underline{K}^2$ forgáskúp kiválasztott P pontjának p^3 paralelkörre mentén érintő beírt $\underline{G}^2$ gömb n normálisa megegyezik a forgáskúp normálisával. Az n normális a P pontot a gömb G középpontjával köti össze és merőleges a P ponton átmenő kúpalkotóra is. Az eredeti kúp származtatása során az a alkotóval együtt forgassuk körül az n normális is. Miközben az a alkotó leírja az eredeti kúpot, s a P pont befutja a p^2 paralelkört, a normális pedig egy G csúcspontú $\underline{N}^2$ másik kúpot képez, amelynek alkotói egyenként merőlegesek az eredeti kúp alkotóira. Ez a kúp az eredeti kúp normálkúpja.

A forgáskúp normálisa a normálkúpjának alkotója. (2. ábra)

A normálkúp csúcspontját a pont paralelkörének kontúrpontyában az eredeti kúp kontúralkotójára állított merőleges egyenes metszi ki a kúp tengelyéből. A forgáskúp normálisának képét úgy készítjük el, hogy a szóbanforgó pont képét összekötjük a normálkúp csúcspontjának megfelelő képevel.

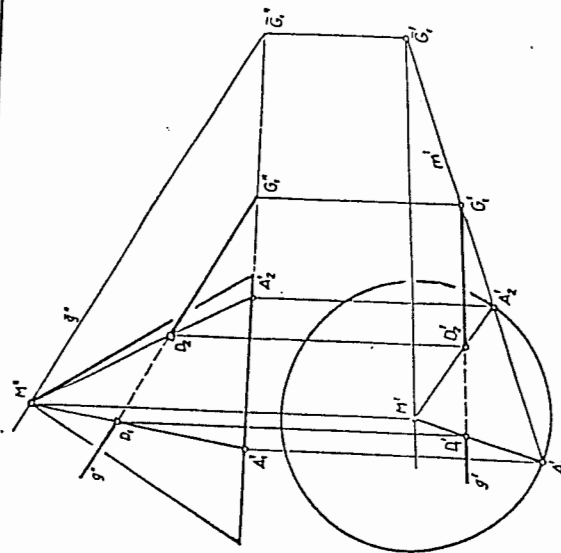
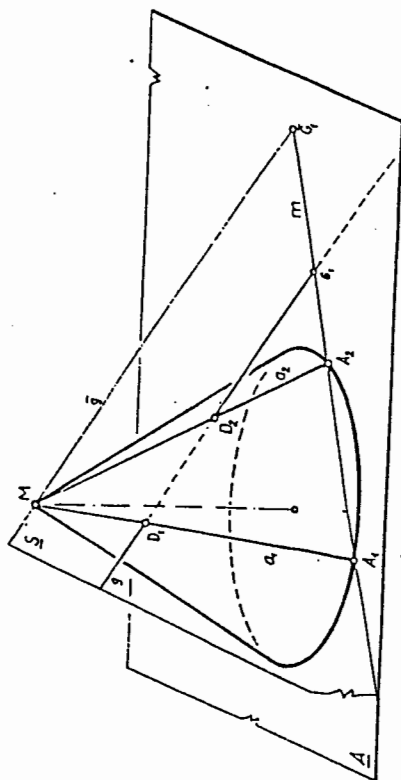


1. ábra



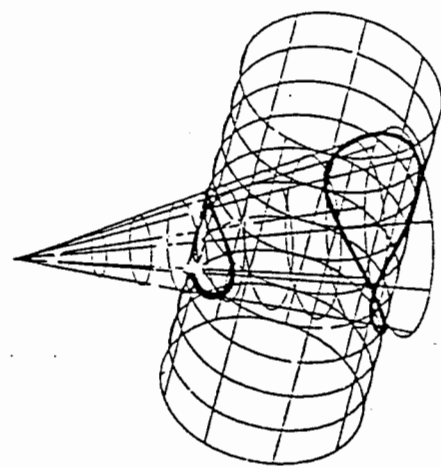
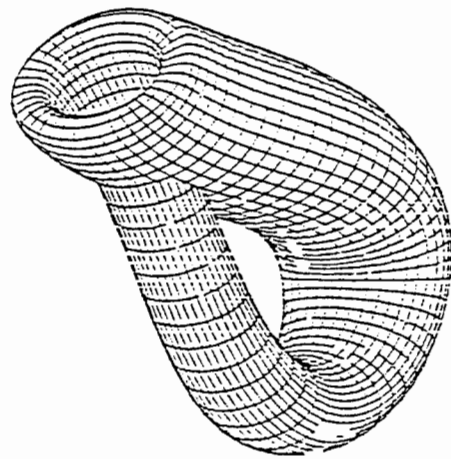
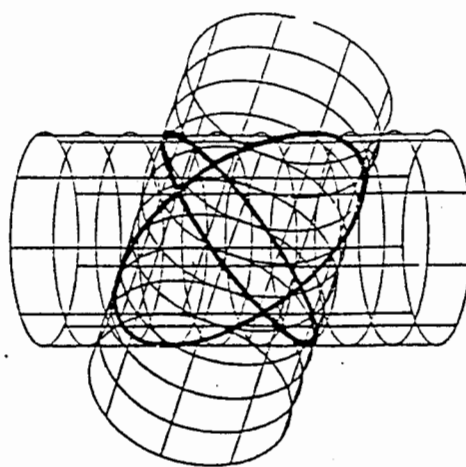
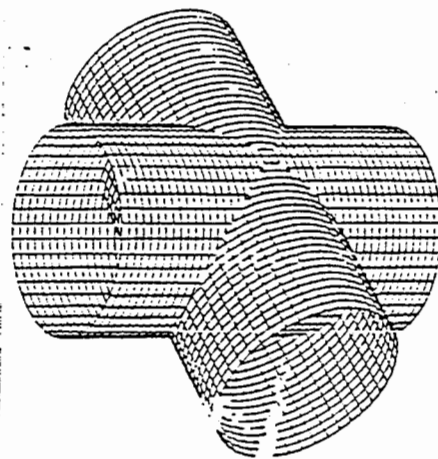
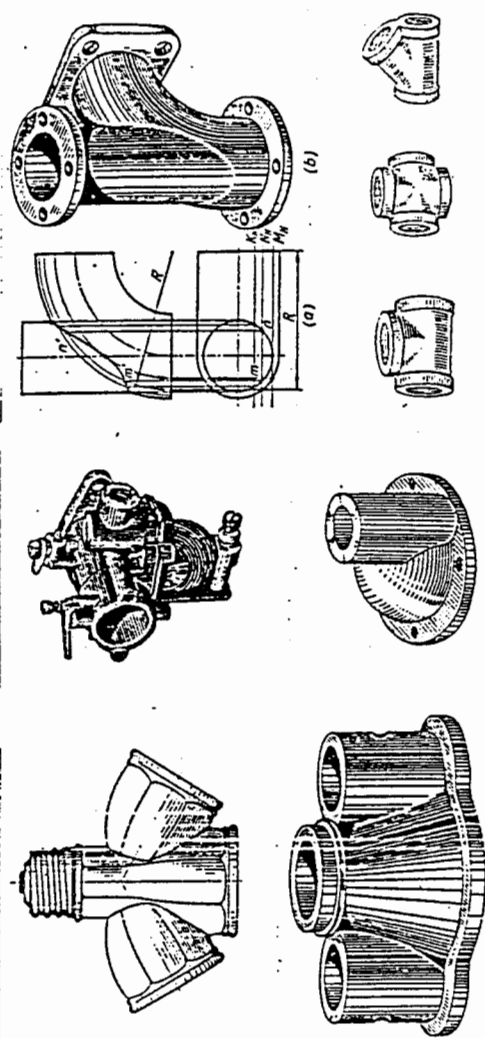
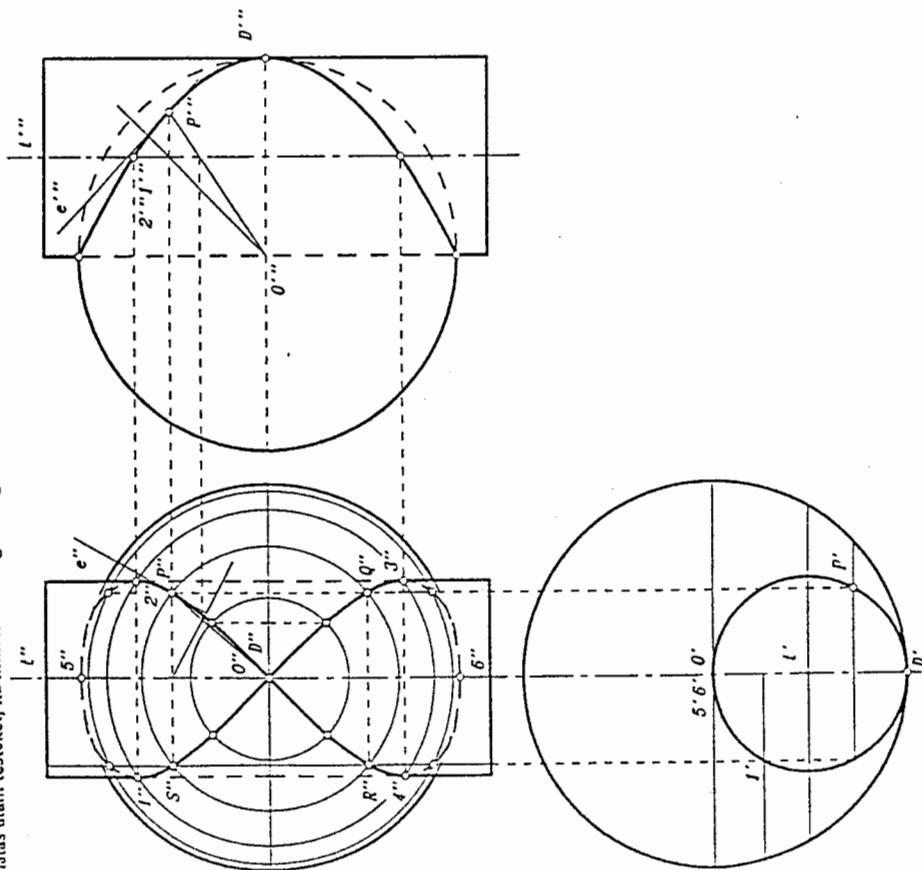
2. ábra

Kúp metszése egyenessel



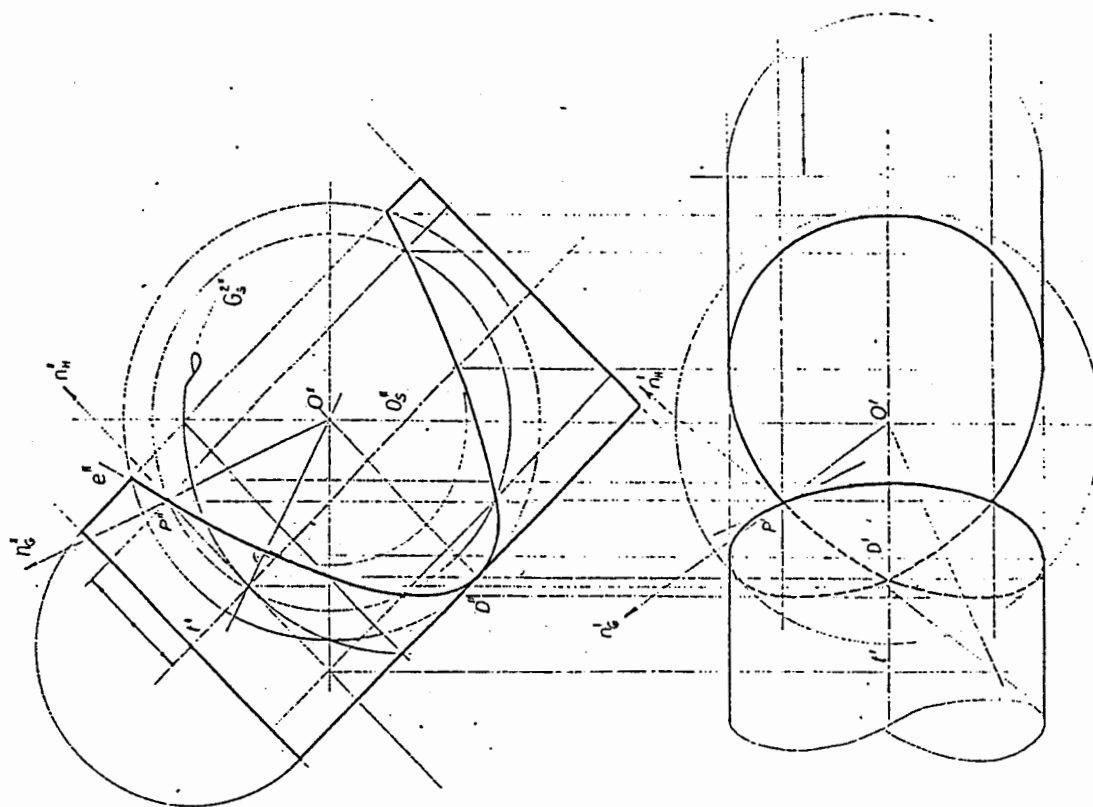
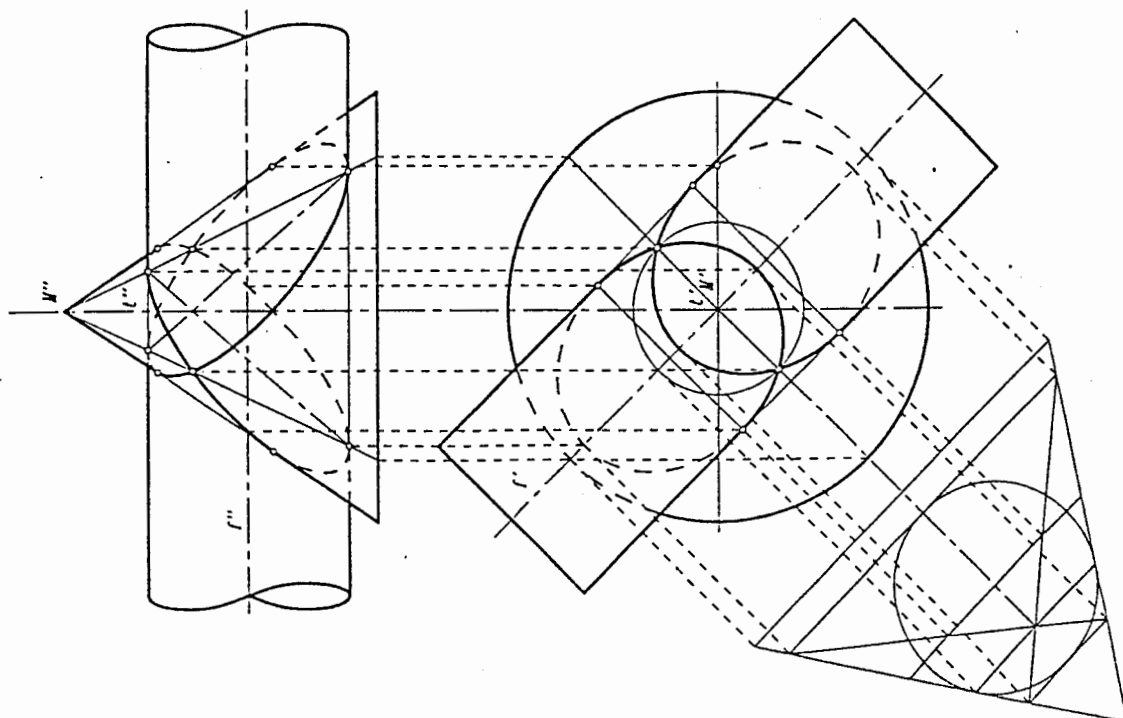
Viviani görbéként ismeretes olyan gömbnek és forgáshengernek az áthatási görbéje, amely az alábbi ábrán szerepel. (Vincenzo Viviani, 1622-1703) Nem részletezzük az összes felületi, de kiemeljük, hogy a henger átmérője akkora, mint a gömb sugara és a két felületnek van közös érintősíkjá. Szerkesztjük meg (a harmadik képen is) az adott gömb és forgáshenger áthatási görbéjének

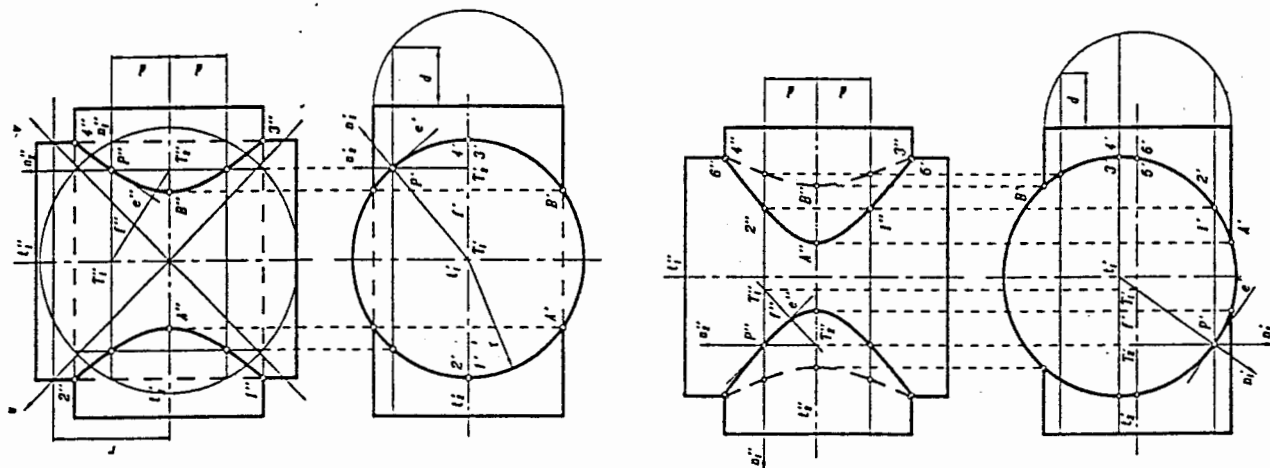
- az önmetszéspontját D-vel jelölve,
 - a henger második kontúrjára illeszkedő (1,2,3,4) pontjait,
 - a gömb második kontúrjára illeszkedő (5,6) pontjait,
 - azon P,R,S,T pontjait, amelyek a gömb középpontján átmenő frontális sík előtt 26mm-re vannak, s közliük a jobb oldali felsőben a görbe érintőjét!
- Rajzoljuk meg az áthatási görbe második- és harmadik képét is, majd ábrázoljuk láthatóság szerint az áthatás utáni testeket, ha mindkettőt megtartva gondoljuk!



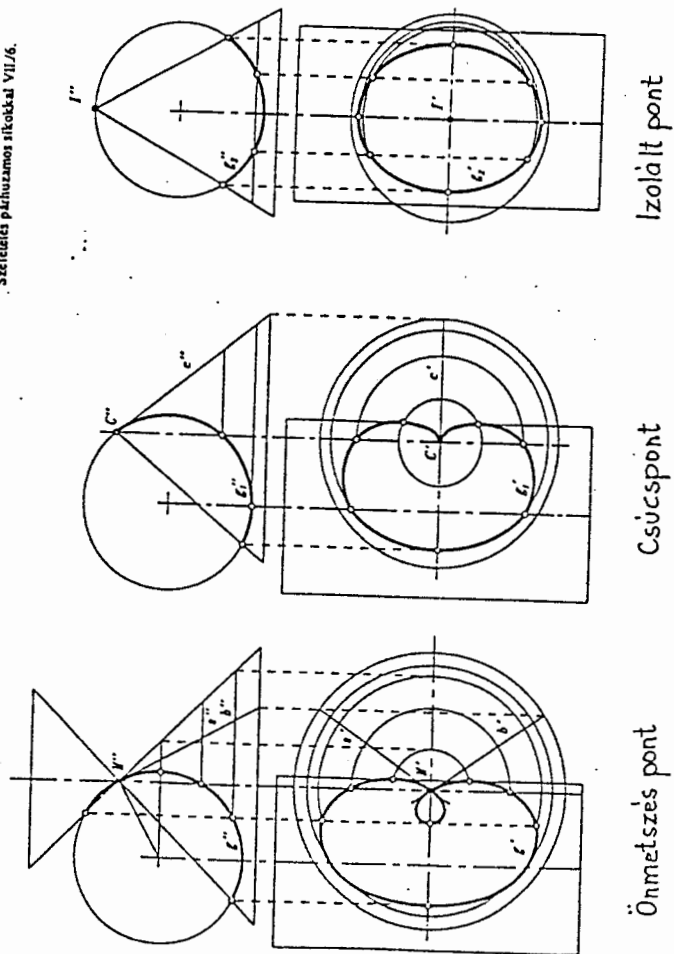
Gömb és forgáshenger áthatása

A két felület egyik szimmetriasíkja a második képsíkkal párhuzamos, így az áthatási görbe a második képen kettősvetületben jelenik meg, amely esetben *parabola*. Közös érintő sík létezése miatt a görbének egy kettőspontja van.





Geiger J.: Ábr. Geom. VII. Éa.: Ábr. I.
Szétszelés párhuzamos síkokkal VII/6.



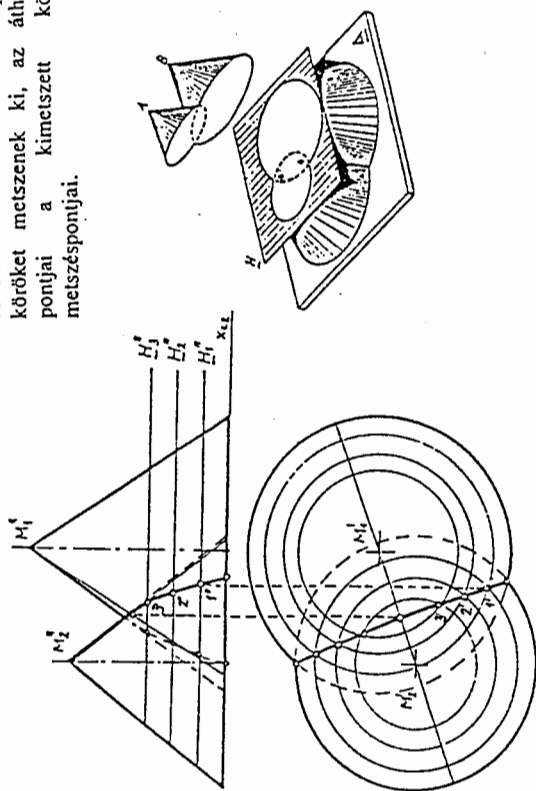
Önmetszés pont

Csúcs pont

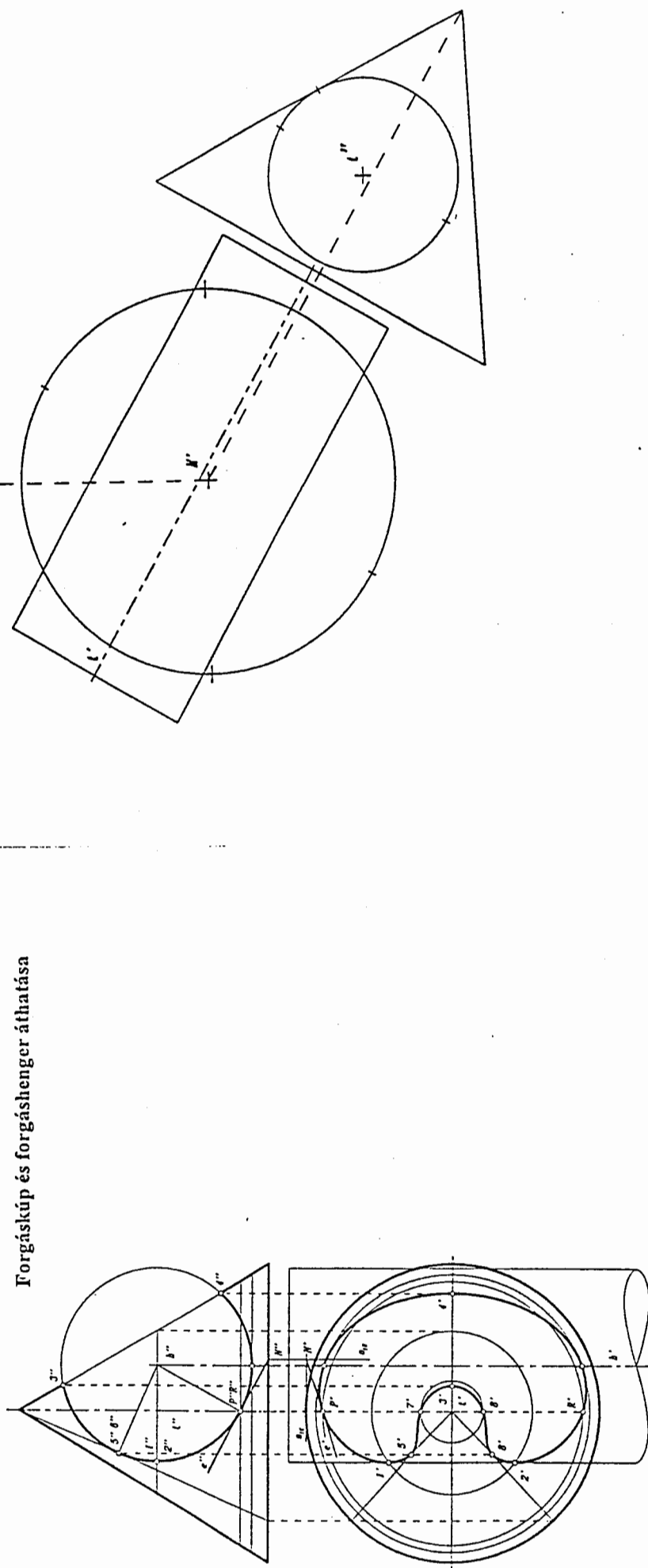
Izolált pont

I.1. Szeletelés párhuzamos síkokkal

A szeletelő síkok mindkét kúpboi köröket metszenek ki, az áthatás pontjai a kimetszett körök metszéspontjai.



Forgáskúp és forgástenger áthatása



Az áthatási pontok szerkesztése

I. Szeletelés síkokkal

I.1. Szeletelés párhuzamos (paralel) síkokkal

A két felületet célszerűen választott olyan egymással párhuzamos segéd síkokkal szeleteljük, amelyek a felületekből egyenes alkotókat vagy köröket metszenek ki. Az áthatás pontjai ezáltal a felvett szeletelésekben keletkezett egyenesek és/vagy körök metszésként jönnek létre. A megszerkesztett pontokat az egymásután következő segéd síkok sorrendjében folytonos vonallal kövjük össze.

I.2. Szerkesztés sorzással

A módszer kúpok és/vagy hengerek esetén alkalmazható és kúpok illetve hengerek egyenestől való döfésén alapul. Kúpok és/vagy hengerek esetén található síkoknak olyan serege, amely mindkét felületből alkotókat metsz ki. Ezáltal az áthatás pontjai egyenesek metszésként áll elő. (Például kúp és henger esetében a szeletelés a kúp csúcsára illeszkedik és a henger alkotóival párhuzamos.) Az alkalmas segéd síkok egy végesbeli vagy végtelenárvóli sorozóegyesre illeszkednek, sorsort alkotnak, innen a módszer elnevezése: szerkesztés sorzással.

A sorzással történő szerkesztés algoritmusai:

a, megvizsgáljuk az alapsíkokat:

- közös az alapsík,
- különböző alapsíkok esetén megszerkesztjük a metszésvonalakat: $m(\Delta_1, \Delta_2)$

b, a sorozóegyes megszerkesztése:

- kúp-kúp esetén: $s(M_1, M_2)$, $/M_1, M_2$ a kúpok csúcspontjai/
- kúp-henger esetén: $s(M_k, M_{H\infty})$, $/M_{H\infty}$ a henger végtelenárvóli 'csúcsa' /
- henger-henger esetén: $s(M_{H1\infty}, M_{H2\infty})$.

c, a sorozópont(ok) megszerkesztése (A sorozópont a sorozóegyesnek az alapsíkkal alkotott döféspontja):

- közös alapsík esetén: $S(\Delta, s)$,
- különböző alapsíkok esetén: $S_1(\Delta_1, s), S_2(\Delta_2, s)$.

d, az áthatási pontok szerkesztése.

II. Áthatási pontok szerkesztése transzformációval

Rendezett nézetek esetén, ha az áthatásban résztvevő felületek közül legalább az egyik henger, akkor a henger tengelyére merőleges vetületen, az áthatási görbe képe közvetlenül felismerhető, s az áthatás szerkesztése valójában illesztési feladat.

III. Szeletelés gömbökkel

Metsző tengelyű forgásfelületek esetében az áthatás megszerkesztéséhez szeletelő felületeként gömbök seregét is használhatjuk. Egy alkalmas segédgömb mindkét felületről köröket metsz ki, amelyeknek közös pontjai az áthatási görbe pontjait képezik.

Az áthatás szerkesztésének algoritmusai

1. Figyelembe véve a két felület relatív helyzetét és a képsíkrendszerben elfoglalt helyzetét, az áthatás pontjainak szerkesztéséhez alkalmas módszert választunk
2. Az áthatási görbe kontúrponyjainak megszerkesztése
3. Az áthatási görbének és vetületének különleges (szinguláris) pontjai (önmetszéspont, csúcspont, ...)
4. Az áthatási görbe azon pontjainak megszerkesztése, amelyekben alkotó vagy paralelkör érinti a görbét
5. Általános pontok szerkesztése érintővel
6. A megszerkesztett pontokon keresztül a görbe vetületének megrajzolása

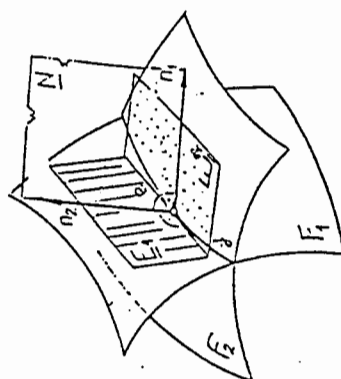
Az áthatási görbe érintője

Szerkesztés érintősíkok módszerével

Az áthatási görbe érintője a felületek vizsgált pontbeli érintősíkjainak metszésvonala.

Szerkesztés normálisok módszerével

Az áthatási görbe érintője a felületek vizsgált pontbeli normálisainak síkjára merőleges egyenes. Az érintő a felületi normálisok síkjának normálisa.



$$\textcircled{1} \quad e(\underline{E}_1, \underline{E}_2) \quad \text{vagy} \quad \textcircled{2} \quad e \perp \underline{N}(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$$

ÁTHATÁS I.

Másodrendű hengerek, kúpok és a gömb metszéséből származó negyedrendű térgörbék és ábrázolásuk

Két görbe felület közös pontjai általában egy térbeli görbe vonalat képeznek, a két felület metszésvonalát vagy áthatási vonalát, röviden áthatását. Egy n -ed rendű és egy m -ed rendű felületnek az áthatása $n \cdot m$ -ed rendű térgörbe. Másodrendű felületek áthatása negyedrendű térgörbe. A negyedrendű térgörbét egy síkkal elmszve négy metszéspont keletkezik.

Két felület áthatásának meghatározása visszavezethető felületek síkkal való metszésére oly módon, hogy célszerűen választott segéd síkokkal mindkét felületet elmszve, a metszégörbék közös pontjait meghatározzuk, majd a kapott pontokat a segéd síkok sorrendjében összekötjük. Azokat a síkokat tekintjük alkalmas segéd síkoknak, amelyeknek a felületekkel alkotott metszésvonalai vagy azok vetületei könnyen rajzolható vonalak, általában egyenesek vagy körök.

Az áthatásban résztvevő felületepárokhoz mindig találhatók

parallel szeletelő síkok (párhuzamos síkok halmazán), és/vagy sorozó síkok (egy sorozóegyenese illeszkedő síkok)

halmaza, amelyek a felületeket egyenesekben (alkotókban) és/vagy körökben metszik.

IHa a segéd síkkal a metszet két alkotó, akkor ez az egyenespár két valós vagy konjugált komplex egyenesből, két egybeeső egyenesből állhat, s a kímetszett körök is lehetnek valósak vagy képzetesek illetve nullkör. Így az áthatási görbe pontjai egyenesek, egyenes és kör, illetve körök metszéseként adódnak.

Bizonyos esetekben szeletelő felületeként gömbök seregét használjuk. Forgásfelületek esetében ugyanis található olyan segédgömb, amely mindkét felületből köröket metsz ki, amelyeknek közös pontjai az áthatási görbe pontjait képezik. Ez a segédgömbök módszer.

Az áthatás elemzése

Az áthatás szerkesztése előtt célszerű elemzést végezni azért, hogy előzetesen tájékozódjunk a görbéknek illetve vetületeknek alakjáról és tulajdonságairól.

1. Elemizzük a két felület relatív helyzetét,

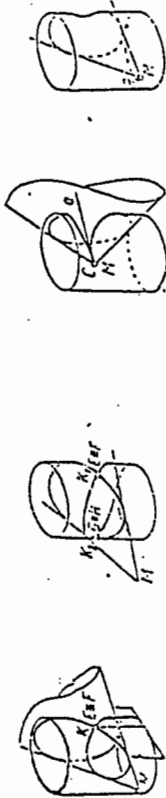
- a szimmetria tulajdonságokat,
 - a két felület esetleges közös vonalait,
 - a két felület érintkezését,
- hogy következzünk az áthatási görbe tulajdonságaira, nevezetesen hogy
- különleges szinguláris pontok léteznek-e,
 - két részből áll-e.

Különleges (szinguláris) pontok az áthatási görbén

Önmetszéspont vagy kettőspont keletkezik az áthatási görbén, ha a két felületnek az illető pontban ugyanaz az érintő síkja. Továbbá kettőspont keletkezik akkor is, ha például kúp-kúp vagy kúp-henger esetében a kúp csúcsa a másik felületnek közös pontja és ebben a pontban a másik felület érintő síkja a kúp két alkotóban metszi. Ez a két alkotó a kettőspontbeli két érintő. IHa ezen érintőik ugyanakkor a másik felületnek is érintő síkja, akkor a kúp csúcsa az áthatási görbének csúcspontja lesz és az érintkezési alkotó egyben a csúcspontbeli érintő is.

Végül, ha az érintő sík nem metszi és nem is érinti a kúpot, amelynek a csúcsa illeszkedik a másik felületre, akkor izolált pont keletkezik.

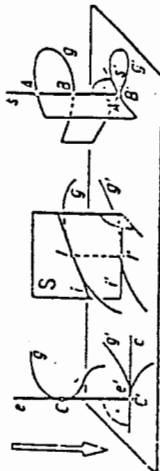
Két önmetszéspont esetén az áthatási görbe szétesik alacsonyabb rendszámú görbékre.



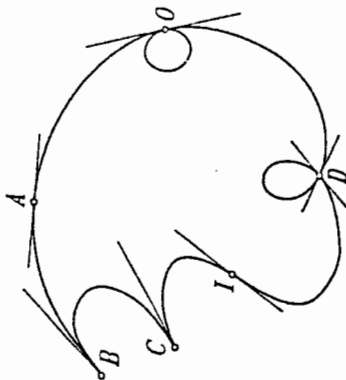
2. Elemizzük az alakzatnak az ábrázolási rendszerben (a képsíkrendszerben) elfoglalt helyzetét

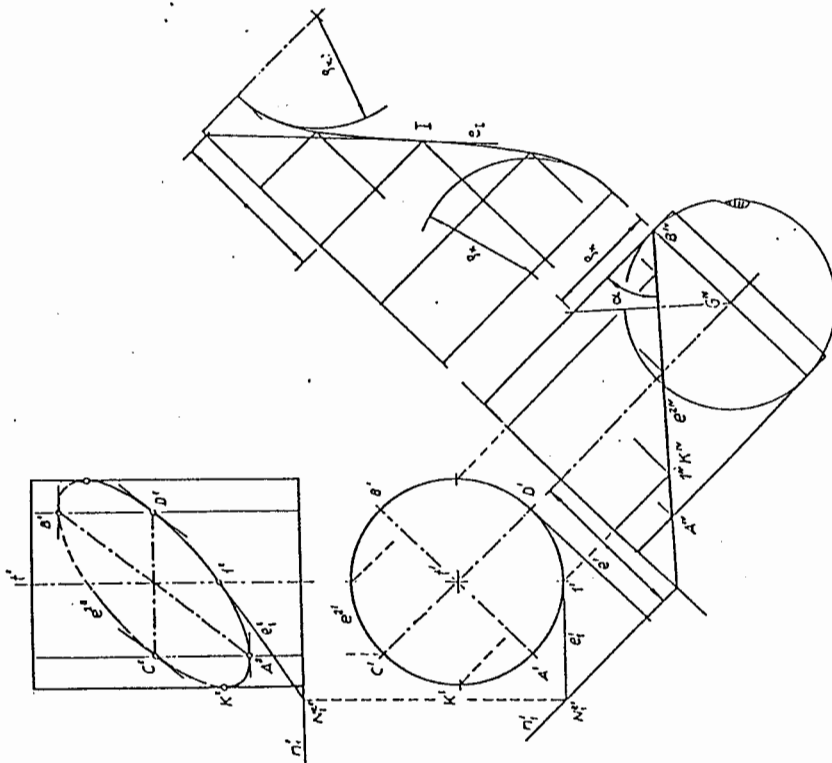
Az áthatási görbe képének az elhelyezkedéséből következő különleges tulajdonságai:

- vetületi önmetszés keletkezik, ha a görbe valamely kettősszelője vetítősugár, $/A^*=B^*$, $s(A,B)^*$
- kettősvetület keletkezik, ha az egyik felület vetítőhenger, ill. az áthatási görbe szimmetriasíkja valamely képsíkkal párhuzamos,
- vetületi csúcs pont keletkezik, ha a görbe valamely érintője vetítősugár, $/C^*, c-o-C^*$
- vetületi inflexió pont keletkezik, ha a görbe valamely pontbeli simulósíkja vetítősík, de az érintő abban a pontban nem vetítősugár. $/I^*, \underline{s}-o-I^*, i-o-I^*$



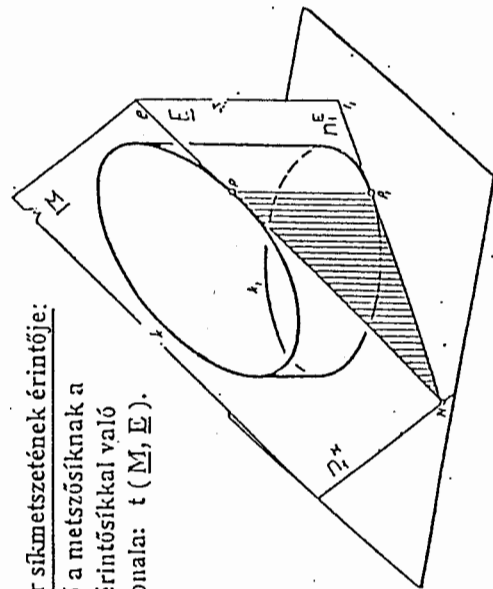
Egyszerű ívekből álló síkgörbe közös pontja: A, különleges (szinguláris) pontjai: elsőfajú csúcs pont: C, másodikfajú csúcs pont: B, inflexió pont: I, önmetszéspont, kettőspont: D, önmetszéspont: O. Az egyes pontokban megajzoltuk az érintőket is.





Forgáshenger síkmetszetének érintője:

Az érintő a metszősíkban a pontbeli érintőszíkkal való metszésvonala: $t(M, E)$.

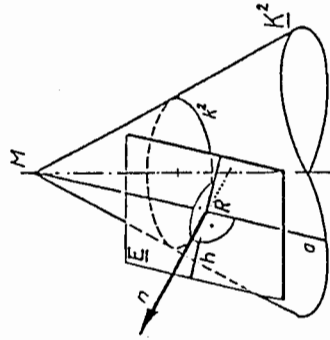


FORGÁSKÚP

Forgáskúp származtatása, ábrázolása

Egy t tengellyel hegyesszöget bezáró a egyenes a tengely körül forogva forgáskúp felületet sűrűl. Az a egyenes a kúpnak alkotója. A forgás közben az alkotó minden egyes pontja egy-egy kört ír le a felületen, amely köröknek a síkja a tengelyre merőleges, tehát egymással párhuzamos, innen a paralelkör elnevezésük.

Forgáskúpon felületi pontot paralelkör vagy alkotó segítségével veszünk fel. A K^2 forgáskúp P és R felületi pontjait a pontokon átmenő k^2 paralelkör vagy az a_1 és a_2 alkotó illesztésével ábrázoljuk.

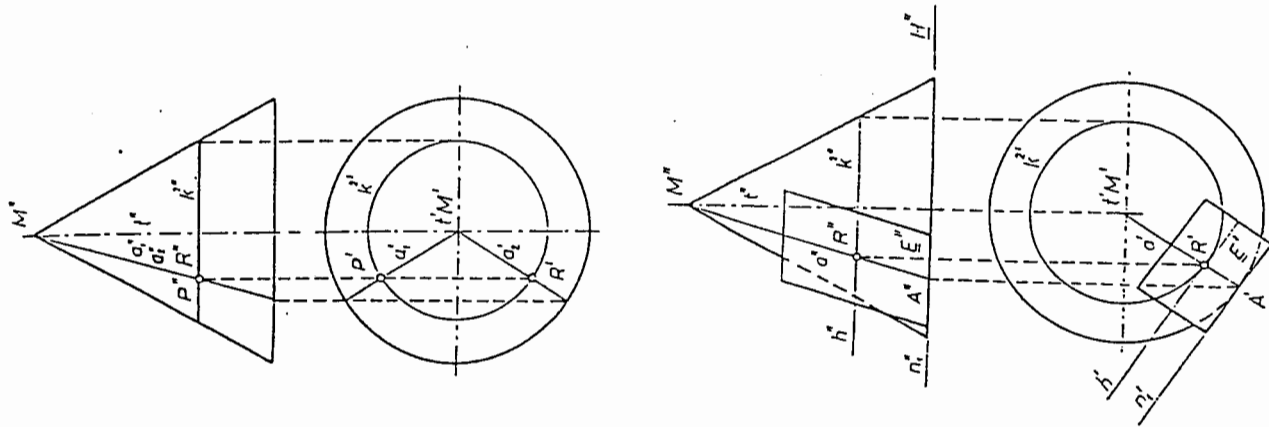


Forgáskúp érintősiója és normálisa

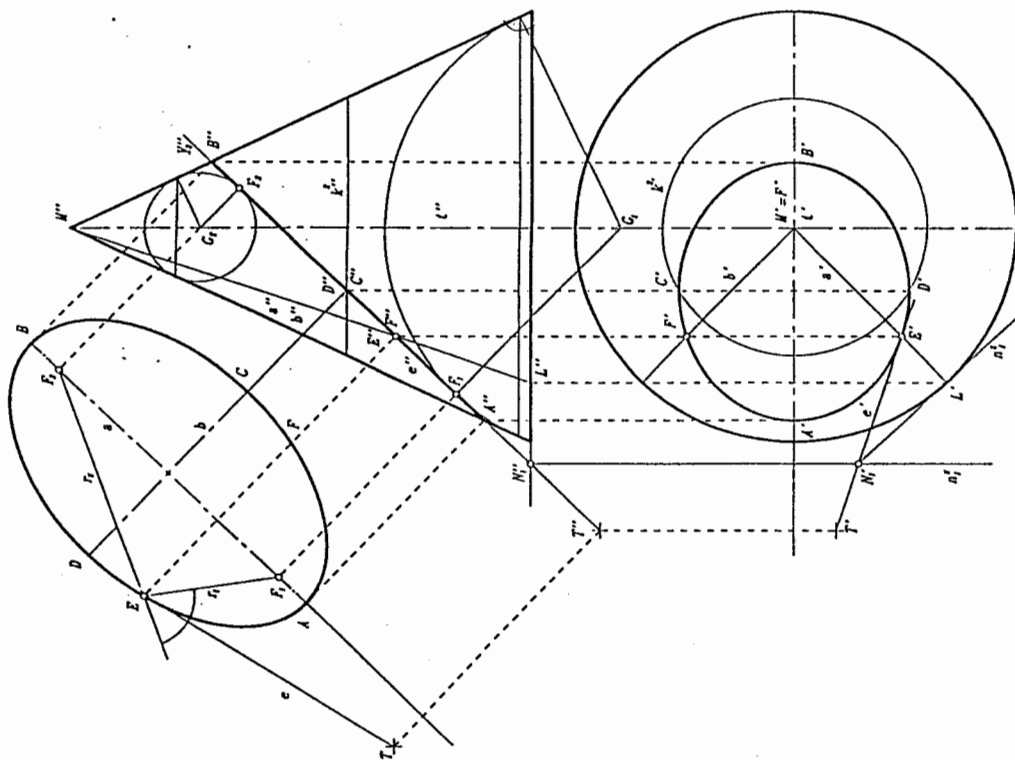
Egy felület érintősióját a felületi ponton átmenő két felületi vonal érintője határozza meg.

A kúp R pontbeli E érintősióját a pontra illeszkedő a alkotó és a ponton átmenő k^2 paralelkör h érintője képezi. Rajzoljuk meg az a alkotó A talppontjában az alapkör n_1 érintőjét, amely az érintősiók H alapsíkbeli nyomvonala lesz. Így az n_1 nyomvonal és az a alkotó az érintősiók első fő esésvonalát alkotják.

A kúp egy adott pontbeli érintősióját a ponton átmenő alkotó és az alkotó talppontjában az alapkör érintője határozza meg.



Forgáskúp ellipszis metszete



Forgáskúp parabola metszete

