FIZIKA I. Mechanika, Hõtan.

Table of Contents

FIZIKA I. Mechanika, Hõtan.....1

Pontmechanikai alapok.....3

Kinematika.....5

Dinamika.....18

Newton törvényei.....19

A dinamika tételei.....28

Impulzustétel.....29

A munka, munkatétel.....29

Perdületi tétel.....40

A mozgásegyenlet, speciális mozgások.....45

A harmonikus rezgõmozgás.....49

Csillapított rezgõmozgás.....51

Gerjesztett rezgés, rezonancia.....54

Rezgések összegzése.....57

Egyirányú, különbözõ frekvenciájú, egyenlõ amplitudójú rezgések összegzése.....60

Pontrendszerek dinamikájának elemei.....65

Ütközések.....69

A rakéta.....72

Kontinuummechanikai alapok.....77

Extenzív mennyiségek mérlegegyenlete.....79

Megmaradó mennyiségek.....84

Ideális folyadékok áramlása.....85

Hidrosztatika.....92

Monokromatikus síkhullám homogén izotróp közegben.....95

Linearizált egyenletek, a hullámegyenlet.....101

Hõtani alapok.....111

Termodinamikai rendszer és a 0.−ik fõtétel.....115

Az I. fõtétel.....117

Table of Contents

Körfolyamatok.....119
A II. fõtétel.....121
Ideális gáz speciális állapotváltozásai.....123
Carnot féle körfolyamat.....127
A hõvezetés differenciálegyenlete.....130

Függelék.....134
Vizsgatematika.....134
1K apró kérdés.....136
Tárgymutató.....138

FIZIKA I.
Mechanika, Hõtan.

Vitéz Gábor
Miskolci Egyetem, Fizikai Tanszék

fizvitez@uni−miskolc.hu

- Pontmechanikai alapok
  - Kinematika
  - Dinamika
    - Newton törvényei.
    - A dinamika tételei
    - Impulzustétel
    - A munka, munkatétel
    - Perdületi tétel
    - A mozgásegyenlet, speciális mozgások
    - A harmonikus rezgõmozgás
    - Csillapított rezgõmozgás
    - Gerjesztett rezgés, rezonancia
    - Rezgések összegzése
    - Egyirányú, különbözõ frekvenciájú, egyenlõ amplitudójú rezgések összegzése.
  - Pontrendszerek dinamikájának elemei
    - Ütközések
    - A rakéta
- Kontinuummechanikai alapok
  - Extenzív mennyiségek mérlegegyenlete.
  - Megmaradó mennyiségek

- Ideális folyadékok áramlása
  - Hidrosztatika
- Monokromatikus síkhullám homogén izotróp közegben.
  - Linearizált egyenletek, a hullámegyenlet.

- Hõtani alapok
  - Termodinamikai rendszer és a 0.−ik fõtétel.
  - Az I. fõtétel
    - Körfolyamatok
  - A II. fõtétel
  - Ideális gáz speciális állapotváltozásai.
    - Carnot féle körfolyamat
  - A hõvezetés differenciálegyenlete

- Függelék
  - Vizsgatematika
  - 1K apró kérdés
  - Tárgymutató

- Index

Pontmechanikai alapok

A mechanika testek mozgásával, a mozgás leírásával, a mozgás okaival és fizikai jellemzésével foglalkozik. Azokat az alapvetõ fogalmakat, amelyeket más természet− és mûszaki− tudományok is széleskörûen alkalmaznak, a mechanika alapozza meg.

A mozgás leírásával, geometriai jellemzõivel a ***kinematika*** foglalkozik. Nem foglalkozik a kinematika azonban a mozgás okával, az adott tipusú mozgás létrejöttének feltételeivel.

A mozgással kapcsolatos alapfogalmakat a legegyszerûbb ``test" − a tömegpont − mozgásának tárgyalása kapcsán vezetjük be. A tömegpont egy absztrakciós folyamat végterméke. Ha a feladatunk a krétahajigálás vizsgálata, hamar rájövünk, hogy nem kell külön vizsgálatokat folytatnunk a kék, a sárga, a fehér stb. krétákra. Vizsgálatunk szempontjai a vizsgált test tulajdonságait két csoportra bontják: a *vizsgálat szempontjából* lényeges és lényegtelen tuljdonságokra. A lényegtelennek bizonyuló tulajdonságokat elhagyva, már csak egy absztrakt valamink marad, a testmozgás vizsgálata esetén általában csak a test tömege (tömegeloszlása), alakja, méretei maradnak meg. Ha a test méretei a mozgás méreteihez viszonyítva elhanyagolhatóan kicsinyek akkor azt tömegpontként kezelhetjük. Ugyancsak tömegpontként kezelhetõ egy kiterjedt test akkor is ha a mozgás típusa olyan, hogy a test helyzetét egyetlen pontja is egyértelmûen meghatározza. Tömegpontként kezelhetõ a Földünk Nap körüli mozgásának vizsgálata során, de nem kezelhetõ tömegpontként pl. egy megpörgetett pénzérme.

Testek mozgását más testekhez viszonyítva tudjuk leírni. Azt a merevnek tekintett testet, amelyhez más testek mozgását viszonyítjuk, ***vonatkoztatási rendszer***nek nevezzük. Hogy a testek helyzetét pontosan meg tudjuk adni, koordinátarendszert kötünk a vonatkoztatási rendszerhez. A koordinátarendszerbeli pontok helyét számhármasokkal − ***koordinátákkal*** −adjuk meg úgy, hogy közeli pontoknak, közeli koordinátaértékek feleljenek meg. A vonatkoztatási rendszer fizikai, a koordinátarendszer tisztán matematikai konstrukció. A koorinátarendszert szabadon választhatjuk meg, célszerû azonban a probléma szimmetriája által diktált rendszer

használata.

Mechanika alapfogalmaink bevezetéséhez a legegyszerûbb koordinátarendszert, a DESCARTES −féle koordinátarendszert használjuk. E koordinátarendszert az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ páronként merõleges egységvektorok feszítik fel. Ezek rendre az x, y, z tengelyek pozitiv irányaiba mutatnak. Fizikai szempontból lényeges az a tény, hogy ezen egységvektorok idõben állandók. Egy tömegpont ***x*** koordinátája az ***(y, z)*** síktól mért −az $\vec{i}$ egységvektor irányítása alpján− elõjellel elátott távolsága.

Az emberek megállapodása alpján bevezetett hosszúság egységnek neve a ***méter***. Ennek definiciója néhány fejlõdési szakaszon ment át. Elõször a Föld méretéhez kötötték (a Föld pólusa és egyenlítõje közötti távolság 10 000 km), majd az egyre pontosodó mérések miatt ismétlõdõ korrekciók váltak szükségessé, ezért egy õsméter rúdjának karcolatai közötti távolságként definiálták, ma pedig atomi energiaszintek közötti átmenet során kibocsátott elektromágneses hullám hullámhosszának darabszámával határozzák meg. Vegyük észre, hogy ez utóbbi egységdefinició lehetõvé teszi, hogy a hosszegységet pusztán információ továbbitás alapján is reprodukálni lehessen.

Bevezetett egységeink jellemzõje az emberi méretek tükrõzõdése, vagyis ezen egységekkel az ember és szûkebb környezetének méretei nem túl nagy és nem túl kicsi számokkal fejezhetõk ki.

A kinematika alapfogalmaihoz még az idõ egységére is szükségünk van. Az idõmérés külön érdekessége, hogy alkalmazott egységein átdereng egy igen õsi 60−as alapú aritmetika. Egysége a másodperc (***sec***, vagy ***s*** jelöléssel), az egy nap 86400−ad része. Úgy tartják, hogy az ***1 sec*** a "most" fogalmának néhány percén belül felbontható (megkülönböztethetõ) legkisebb intervalluma átlagos ember számára. Minthogy az egy nap idõtartam a Föld forgásához kapcsolódik, az alapegységnek választott ***1 sec*** eredeti definiciója is a Föld forgásához kötõdött. Természetesen ma ez az egység is sokkal stabilabb, és pontosabban reprodukálható atomfizikai alapokon nyugszik.

Subsections

- Kinematika
- Dinamika
  - Newton törvényei.
  - A dinamika tételei
  - Impulzustétel
  - A munka, munkatétel
  - Perdületi tétel
  - A mozgásegyenlet, speciális mozgások
  - A harmonikus rezgõmozgás
  - Csillapított rezgõmozgás
  - Gerjesztett rezgés, rezonancia
  - Rezgések összegzése
  - Egyirányú, különbözõ frekvenciájú, egyenlõ amplitudójú rezgések összegzése.
- Pontrendszerek dinamikájának elemei
  - Ütközések
  - A rakéta

Kinematika

A vizsgált tömegpont helyzetét a koordinátarendszer kezdõpontjából − az ***origóból*** − az illetõ ponthoz húzott ***helyvektorral*** határozzuk meg. A helyvektort, így a tömegpont helyzetét is, három skaláris adattal, −koordinátákkal − adhatjuk meg. A helyvektor szokásos írásmódjai:

$$\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Az ***x, y*** és ***z*** skaláris mennyiségeket koordinátáknak, az $x\vec{i}$ vagy éppen a $z\vec{k}$ vektorokat pedig komponenseknek nevezzük. Ezek az elnevezési szabályok más típusú vektoroknál is fönnálnak, így beszélhetünk az erõ ***x*** koordinátájáról (skalár) vagy valamilyen sebességkomponensrõl (amely tehát vektor).

A helyvektor végpontja követi a tömegpont mozgását, vagyis a helyvektor, valamint a koordináták az idõ függvényei lesznek. Ezt az idõfüggést mindig fölteszszük, habár az egyszerûbb írásmód kedvéért esetleg ezt nem is jelöljük.

Mozgástörvénynek nevezzük a tömegpont mozgását leíró $\vec{r}(t)$ függvényt. A tömegpont mozgása során egy térgörbét ír le, ezt nevezzük a tömegpont ***pályájá***nak.

Ha a tömegpont (lásd az 1−es rajzot). a t_1 idõpillanatban az $\vec{r}_1$ helyvektor által meghatározott ***P1*** pontban tartózkodott (.. ponton haladt át) és Δt idõtartammal késõbb, vagyis a $t_2 = t_1 + \Delta t$ idõpontban a ***P2*** pontban, akkor azt mondjuk, hogy a tömegpont Δt idõtartam alatti ***elmozdulása*** $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Ha tömegpont egyenes mentén mozog −legyen ez az ***x*** tengely− akkor helyzetét egyetlen adat, az ***x*** koordinátája meghatározza ezért ezt 1 dimenziós (***1D***) mozgásnak nevezzük. Annak jellemzésére, hogy a tömegpont milyen gyorsan változtatja helyzetét bevezetünk egy új fizikai mennyiséget −a sebességet− a helykordináta változásának, és a változáshoz szükséges idõtartam hányadosaként.

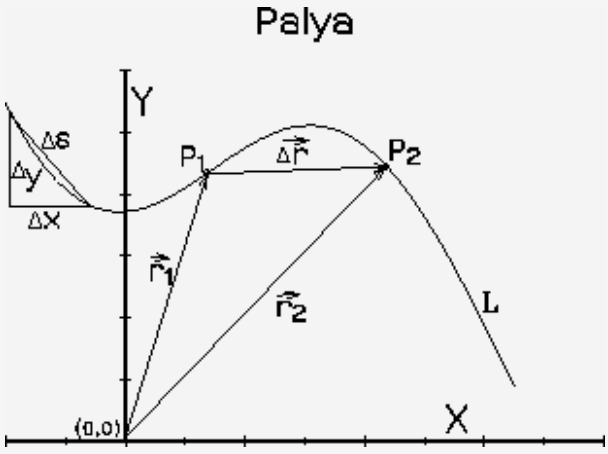
$$\hat{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Ez a Δt idõtartamta vonatkozó átlagsebesség (itt ***vx*** kalapkája az átlagot jelöli) , pillanatnyi sebességet akkor kapunk, ha helykoordináta idõszerinti deriváltját −a fenti differenciakifejezés határértékét képezzük.

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

A sebesség egysége a fenti értelmezés alapján $[m/s]$, ugyanis az egységekkel ugyanazok a mûveletek végezhetõk el ami a magukkal a fizikai mennyiségekkel.

Figure: Tömegpont kinematikájának alapfogalmai



Térbeli mozgás esetén a korábban definiált elmozdulásvektort osztjuk az elmozduláshoz szükséges idõtartammal: $\Delta\vec{r}/\Delta t$, ennek a $\Delta t \to 0$ határátmenetre adódó határértéke a sebességvektor. A sebességvektor tehát a helyvektor idõszerinti elsõ deriváltja. Ez a sebesség − a szerkesztésbõl látható − a pálya érintõje irányába mutat.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

A sebesség idõbeli változását −változási sebességét− a gyorsulással jellemezzük, ezt a helyvektor idõszerinti második deriváltjaként állíthatjuk elõ.

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

A gyorsulás arról ad tájékoztatást, hogy a sebesség másodpercenként hány méter /sec−al változik meg, s egysége a fentiek alapján $[m/s^2]$. Gyorsulás akkor is van, ha csupán a sebesség iránya változik meg változatlan sebességnagyság mellett.

A fenti vektoregyenlõségek általában három skaláris −a koordinátákra felírt− egyenlõséggel egyenértékûek. EZ DESCARTES koordinátarendszer esetén a következõket jelenti.

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right) \implies v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}$$

Ugyanígy darabolható föl a gyorsulásvektor is gyorsuláskoordinátákra.

Talán már Newton óta szokás az idõderiváltakat, a derivált mennyiség felé rakott pöttyel jelölni. Igy aztán számos, jelentésében azonos, de jelölésben különbözõ forma adható meg ugyanazon fizikai mennyiségre. Álljon itt intõ példaként a gyorsulás ***x*** koorinátájának néhány formája :

$$a_x \equiv \dot{v}_x \equiv \ddot{x} \equiv d^2x/dt^2 \equiv dv_x/dt$$

Harmadik deriváltat már nem szokás keresni, ennek pedig az az oka, hogy a tömegpont, környezetével való kölcsönhatását − ezt késõbb erõnek nevezzük − Newton törvénye a második deriválttal kapcsolja össze, így a harmadik deriváltra már nincs is szükség (klasszikus mechanikában).

Térbeli mozgásra a sebességvektor (a pálya érintõ irányú vektora), a gyorsulásvektor, valamint ezen vektorok abszolut értékei egyszerûen megadhatók.

$$v(t) \equiv |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}$$

A fenti sebesség−abszolutértéket pályasebességnek nevezzük (ugyanis ismerünk más sebességtípusokat is, pl szögsebesség, területi sebesség).

Az (1) ábra szerint a Δs ívelem hosszát a húr hosszával közelítjük. A sebességdefinició átrendezése $\Delta x \cong v_x * \Delta t$, valamint a Pithagorasz tétele alapján

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}\ \Delta t$$

A (t_o, t_1) idõpontok között megtett ***út*** tehát az L pályagörbe P1, P2 pontok közé esõ pályaszakaszának ívhossza:

$$s(t_o, t_1) = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}\, dt$$

A mozgásörvényböl idõszerinti differenciálással, más szóval idõderiválással következtettünk a sebességre, gyorsulásra.

$$x(t) \rightarrow v_x(t) \rightarrow a_x(t)$$

A pontmechanika egy másik fontos feladatcsoportja a derivált ismeretében állítja elõ a mozgástörvényt. Ezt az idõ szerinti differenciálás (deriválás) inverz mûveletével, azaz integrálással követhetjük el.

Ha az ***x*** helykoordináta második deriváltja, azaz a gyorsulás ***x*** koordinátája $a_x(t)$, mint az idõ függvénye ismert, akkor az ***x(t)*** mozgástörvényt e második derivált idõszerinti

integrálásával kaphatjuk vissza. A második derivált kétszeres idõintegrált igényel. Az elsõ idõszerinti integrálás a sebességkoordinátát szolgáltatja:

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x(t) \qquad / \int dt$$

A határozatlan integrál egy integrációs állandó megjelenéséhez vezet.

Az eredmény: $v_x(t) = \int a_x(t)dt + C_1$

A ***C1*** integrációs állandó meghatározásához ismernem kell a $v_x(t)$ sebességkoordináta valamely ***to*** idõpillanathoz tartozó értékét. Ezt az ismert, az adot feladat által elõírt értéket nevezzük az adott sebességkoordinátára vonatkozó kezdeti feltételnek. Kezdeti feltétel ***Vx*** −re $v_x(t_o) = v_{xo}$ egyértelmûvé teszi a ***C1*** integrációs állandó értékét.

Másrészt, az integrációs állandó teszi lehetõvé a megoldás tetszõleges kezdeti feltételekhez történõ hozzávarrását. A következõ lépés hasonlóan történik:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_x(t) \qquad / \int dt$$

Ebbõl kapjuk az x koordinátát $x(t) = \int v_x(t)dt + C2$. Mivel a második deriváltból következtettünk az eredeti függvényre, azaz a ``0"−ik deriváltra, összesen koordinátánként kettõ integrációs állandó jelenik meg, térbeli (3D−s) mozgásnál 6 db.

A gyorsulásból csak azon ritka esetekben tudjuk ilyen egyszerû integrálásokkal meghatározni a mozgástörvényt, ha a gyorsulás csak az idõtõl függ. Ha a tömegpont gyorsulása a helytõl (pl. az x koordinátától), vagy a sebességtõl (is) függ, akkor a fenti módszer nem alkalmazható. Ezen esetekben egyszerû integrálás helyett, differenciálegyenlet megoldás vezet célhoz.

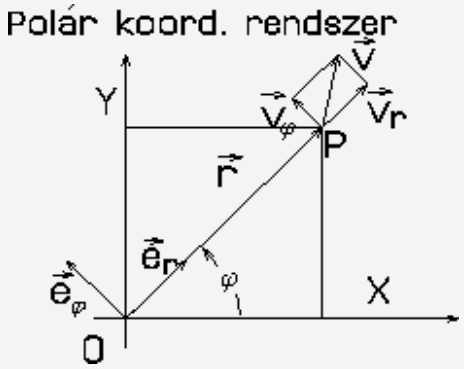
Síkpolár és a henger koordinátarendszer

Egyes fizikai jelenségek leírása jelentõsen egyszerûsödik, ha a jelenség szimmetriáját tükrözõ koordinátarendszert alkalmazunk. Alkalmanként a a leíráshoz szükséges változók száma, más szóval a feladvány dimenziószáma csökken. Például Descartes rendszerben a körmozgás leírásához ***x(t)*** és ***y(t)*** függvények kellenek, síkpolár koordinátarendszerben pedig ugyanehhez egyetlen függvény, a $\varphi(t)$ ismerete is elegendõ.

A továbbiakban tömegpont sebesség, és gyorsulás kifejezéseit adjuk meg síkpolár, majd hengerkoordináta rendszerben.

Síkpolár koordinátarendszerben a tömegpontok helyzetét ***x, y*** koordináták helyett két másik adattal adjuk meg. Ezek egyike az ***r,*** a pont origótól mért távolsága, a másik, a helyvektor és egy önkényesen fölvett irány által bezárt φ szög. Ez az önkényes irány rendszerint a segédrendszerként majdnem mindig fölrajzolt Descaretes koordinátarendszer ***x*** tengelye. Megállapodás szerint a φ szög az óra járásával ellentétes irányban növekszik. Ahhoz, hogy az egyik koordinátarendszerben felírt összefüggéseinket a másikra át tudjuk írni, ismernünk kell a két rendszer koordinátái közötti transzformációt. Ezek a transzformációs szabályok az (2) ábrából kiolvashatók.

Figure: Vektorok síkpolár koordinátarendszerben.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad r \geq 0, \quad x = r\cos(\varphi) \quad y = r\sin(\varphi)$$

A φ értékét a következõkbõl nyerhetjük: $\cos(\varphi) = x/r \quad \sin(\varphi) = y/r$

A síkpolár koordináta rendszer (lásd az 2 ábrát) két egymásra merõleges egységvektort alkalmaz, ezek az $\vec{r}$ irányába mutató $\vec{e}_r$ az un. radiális egységvektor, és az arra merõleges $\vec{e}_\varphi$. A továbbiakban, az egyszerûbb írásmód céljából az $\vec{e}$ egységvektorok vektorjeleit elhagyjuk.

A helyvektor tehát így adható meg: $\vec{r} = r\,e_r$.

A sebesség ennek idõszerinti elsõ deriváltja:

$$\vec{v} = \dot{r}e_r + r\dot{e}_r \tag{1}$$

Az egységvektorok, habár hosszúságukat megtartva ugyan egységvektorok maradnak, de mert irányuk követi a pont mozgását, idõben nem tekinthetõk állandónak. Abból a ténybõl, hogy az egységvektor hossza állandó az következik, hogy a derivált és az eredeti egységvektor merõlegesek:

$$(e_r\,e_r) = 1 \qquad d/dt\,(e_r\,e_r) = 0 \qquad 2e_r\dot{e}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad e_r \perp \dot{e}_r$$

Az e_r egységvektor deriváltja tehát e_φ irányú, igy $\dot{e}_r = \ldots e_\varphi$ alakban írható, ahol ... egy skalár együtthatót képvisel.

Ha a φ koordinátát megnöveljük Δt idõtartam alatt $\varphi + \Delta\varphi$ −re, akkor az egységvektor végpontok az egységkörön $\Delta s = r_e * \Delta\varphi = 1 * \Delta\varphi$ ívhossznyival kerülnek arrébb, s

ahogy az szokásos, az egységvektor végpontok elmozdulását képviselõ húrt helyettesítjük a vele közelítõleg egyenlõ ívvel. Ez a közelítés annál pontosabb, minél kisebb a szóbanforgó $\Delta\varphi$ szögnövekmény. Az eddigieket összeírva adódik:

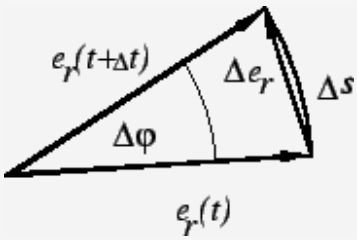
$$\frac{\Delta e_r}{\Delta t} \cong \frac{\Delta s}{\Delta t} e_\varphi = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} e_\varphi$$

Látható, hogy az e_φ növekményének geometriája a 90^o−os elforgatástól eltekintve azonos az e_r geometriájával, így az e_r−re kapott eredmények különösebb lelkiélet nélkül átírhatók e_φ−re.

A számtanórán tanult rituális ``***lim***'' után kapjuk alábbi formulákat.

$\dot{e}_r = \dot{\varphi} e_\varphi \quad \dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi} e_r$ Az utóbbi negatív elõjel eredete a rajzból nyilvánvaló, a szög növekedtével e_φ növekménye $-e_r$ irányába mutat.

Figure: Egységvektor elfordulása



Itt megjelent egy új mennyiség, a $\dot{\varphi}$ ***szögsebesség***, amely a helyvektor $\Delta\varphi$ szögelfordulása, és az elforduláshoz szükséges Δt idõtartam hányadosaként értelmeztünk. (pontosabban ennek határértékeként). $\dot{\varphi}\ [1/sec]$ adja meg az idõegységenként bekövetkezõ, radiánban mért szögelfordulást. Ha a szögsebesség állandó, akkor mindegy, hogy melyik idõpillanatban és mekkora $\Delta\varphi$ szögnövekményt alkalmazunk a szögsebesség meghatározásához. Ilyen esetekben egy teljes

körülfordulást $\Delta\varphi = 2\pi$ és a hozzá szükséges ***T*** idõtartam hányadosát tekintjük, vagyis $\dot{\varphi} = 2\pi/T$. Ez mellesleg azonos a reáltanodában tanult ω szögsebességgel. Mivel ***T*** idõ alatt a pont visszajutott (legalábbis φ szempontjából) eredeti helyzetébe, ilyen periódusidõvel ismétlõdhet a mozgás. Az ***1 s*** (a mûszaki gyakorlatban **1 min**) alatt lezajló körülfordulások számát ***fordulatszám***nak nevezzük. Ha ***1 s*** alatt ***n*** azonos idõtartamú esemény játszódik le, akkor egy esemény idõtartama ***T=1/n***.

Az egységvektor deriváltak ismeretében a sebesség és gyorsulás kifejezései már automatikusan adódnak. $\dot{e}_\varphi$ kifejezését behelyettesítve (1) kapjuk a sebesség polárkoordinátarendszerbeli formáját:

$$\vec{v} = \dot{r}\,e_r + r\,\dot{\varphi}e_\varphi$$

Az ábrán bejelölt vektorkomponensek megfelelõi:
$\vec{v}_r = \dot{r}e_r \quad \vec{v}_\varphi = r\dot{\varphi}e_\varphi \; \vec{a} = \ddot{r}\,e_r + \dot{r}\,\dot{e}_r + \dot{r}\,\dot{\varphi}e_\varphi + r\ddot{\varphi}e_\varphi + r\,\dot{\varphi}\dot{e}_\varphi$ alkalmazva $\dot{e}_r$ és $\dot{e}_\varphi$ deriváltak korábbi kifejezéseit kapjuk:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})e_\varphi$$

Az egységvektor deriváltjainak megjelenése bonyolítja a sebesség és gyorsulás kifejezéseit és némileg az értelmezésüket is. Vegyük észre, hogy DESCARTES féle koordinátarendszerben a gyorsulás/sebesség vektor koordinátái és a koordináta deriváltak megegyeznek, azaz az $\ddot{x}$ jelenti egyrészt az $x(t)$ koordináta második deriváltját, de egyúttal a gyorsulás ***x*** koordinátáját is. Síkpolár koordinátarendszernél (henger− és szférikus− vagy más néven gömbi koordinátarendszereknél is) szétválik a koordináta derivált és helyvektor derivált megfelelõ koordinátájának megjelenési formája. Ennél az r, φ koordináták deriváltjai $\dot{r}, \dot{\varphi}$, illetve $\ddot{r}, \ddot{\varphi}$, azonban a helyvektor elsõ, illetve második deriváltjának (tehát a sebesség, illetve gyorsulásvektorok) e_r (radiális), illetve e_φ −nek megfelelõ koordinátái $v_r = \dot{r}, \; v_\varphi = r\,\dot{\varphi}$, illetve $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$. Összefoglalva:

a kiszemelt koordináta	x	φ
a koordináta második deriváltja	$\ddot{x}$	$\ddot{\varphi}$
a gyorsulás megfelelõ koordinátája	$\ddot{x}$	$2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}$

Az egységvektorok merõlegessége folytán a vektorhosszakra a Pithagorasz tétel alkalmazható, azaz a sebesség és a gyorsulás nagyságát (abszolut−értékeit) ismert módon számíthatjuk pl. $a=\sqrt{(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)^2+(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})^2}$

A fentiek alapján könnyen felidézhetjük az egyenletes körmozgásról tanultakat. Kör esetén $r=konst,\ \dot{r}=0,\ \ddot{r}=0$, az állandó szögsebesség jelölése $\omega=\dot{\varphi}=konst,\ \ddot{\varphi}=0$. Ezek alkalmazásával kapjuk a körhöz tangenciális sebességet $\vec{v}=r\,\omega\,e_\varphi$ és radiális un. centripetális gyorsulást: $\vec{a}=-r\,\omega^2 e_r$

A hengerkoordináta rendszert úgy kapjuk a sikpolár koordinátarendszerbõl, hogy a sikpolár origójába, a koordinátarendszer síkjára merõlegesen odarakunk egy $\vec{k},$ idõben állandó irányítású egységvektort (így fogjuk õt jelölni $e_z(=\vec{k})$) Ebbe az irányba mérjük a ***z*** kordináta értékeit. Az egyértelmûbb jelölésmód kedvéért a síkbeli rendszer ***r*** koordinátáját átnevezzük a következõképpen $r\ \rightarrow\ \rho$. Intenzívebb lelkiélet nélkül írhatjuk a hengerkoordinátrendszerbeli sebesség, gyorsuláskifejezéseket.

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \rho e_\rho + z e_z \\ \vec{v} &= \dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\varphi} e_\varphi + \dot{z} e_z \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)e_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})e_\varphi + \ddot{z} e_z\end{aligned}$$

A síkpolár koordinátarendszert (a henger, s gömbi koordinátarendszert is) un. ***görbevonalú koordinátarendszer***nek nevezzük. Az elnevezés onnan ered, hogy koordináta paramétervonalai között vannak görbevonalúak, Ez azt jelenti, hogy amíg a DESCARTES koordinátarendszerben, ha bármely két koordinátát rögzítjük (pl. ***x=C1, y=C1***) és a harmadik szabadon fut (pl. ***z***), akkor mindig egyeneseket kapunk, azonban síkpolár koordinátarendszerben rögzített ***r*** sugár és szabadon változó φ esetén köríveket.

Természetes koordinátarendszer

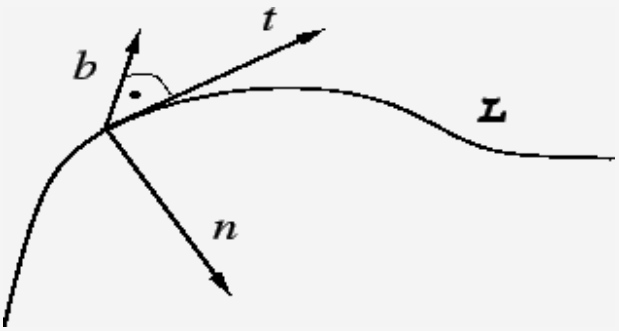
A mozgás némely sajátságait elõnyösen tanulmányozhatjuk egy, a mozgó tömegponthoz kötött, a tömegponttal együttmozgó koordináta rendszerben. Ebben a koordinátarendszerben tehát a helyvektor nem is jelenik meg.

A koordinátarendszer egységvektorait a mozgás kinematikai adatai alpján állítjuk elõ. Tudjuk, hogy a sebességvektor a pályagörbe érintõje. Ez alapján definiáljuk a ***t*** tangenciális egységvektort a következõk szerint:

$$\vec{t} = \vec{v}/v \quad vagy \quad \vec{v} = v\vec{t}$$

A sebességvektort a sebesség abszolutértékével osztva kapjuk a sebességirányú egységvektort, amely egyúttal a pályagörbe érintõirányú (***t*** azaz tangenciális) egységvektora. A jelölések egyszerûbb használata céljából a továbbiakban ***t***−t, a bevezetendõ ***n*** normális és ***b*** binormális egységvektorokat vektorjel nélkül használjuk.

Figure: A természetes koordinátarendszer



egységvektorai.

A gyorsulást a $\vec{v} = vt$ sebességvektor idõszerinti differenciálásával kapjuk

$$\vec{a} = \dot{v}t + v\dot{t}$$

A ***t*** egységvektor hossza idõben állandó, idõbeli változása az egységvektor elfordulásához kötõdik. Mint ahogy ezt a síkpolár koordinátarendszer ***er*** radiális egységvektora deriválásakor láttuk, az egységvektor deriváltja merõleges az erdeti egységvektorra. A ***t*** tangenciális egységvektor deriváltjának irányába mutató ***n*** egységvektort érthetõ okokból normális vektornak nevezzük.

$$\dot{t} = \dot{\varphi}n = v/Rn$$

Ezen ***n*** vektor a pillanatnyi simulókör középpontja felé mutat, s a deriváltban megjelenõ szögsebességet −a körmozgásnál megismert $V = R\omega$ alpján − ***V/R*** formájában adjuk meg. Itt ***R*** a görbe görbületi sugara, vagy másképpen a simulókör sugara. Ezeket visszaírva kapjuk

$$\vec{a} = \dot{v}t + v\dot{\varphi}t = \dot{v}t + v^2/Rn$$

Érdemes megjegyeznünk, hogy az ***1/R*** mennyiséget görbületnek nevezik.

A gyorsulás elsõ kifejezése ad számot a sebesség nagyságának megváltozásáról, a második az irányváltozással kapcsolatos gyorsulásról.

Binormális egységvektornak nevezzük a $b = t \times n$ vektorszorzással definiált egységvektort.

E három, páronként merõleges egységvektor alkotta rendszer együtt mozog a vizsgált ponttal. Erre utal elnevezése is : kisérõ triéder, vagy kisérõ háromél nevet viselik.

Dinamika

Subsections

- Newton törvényei.
- A dinamika tételei
- Impulzustétel

- A munka, munkatétel
- Perdületi tétel
- A mozgásegyenlet, speciális mozgások
- A harmonikus rezgõmozgás
- Csillapított rezgõmozgás
- Gerjesztett rezgés, rezonancia
- Rezgések összegzése
- Egyirányú, különbözõ frekvenciájú, egyenlõ amplitudójú rezgések összegzése.

Newton törvényei.

A fizika és más tudományok tárgyalásmódjai többé−kevésbé a következõ két alaptípus valamelyikéhez köthetõk.

Az ***induktív módszer*** a sok apró kisérleti ténybõl, jelenségbõl felismeri, felépíti e jelenségekben megnyilvánuló közös és általános törvényszerûségeket − ez pl. a kisérleti fizika módszere. ***Axiómák*** összegzik az egyes tudományterületek alapvetõ törvényszerûségeit. Az axiómákat a megfigyelt tények általánosításaként mondjuk ki, s általában nem vezethetõk le, nem vezethetõk vissza alapvetõbb igazságokra. Helyességüket (természettudományokban) a tapasztalat igazolja. A belõlük leszûrt következtetések összhangban vannak a megfigyelt tényekkel, s egyetlen tapasztalatokkal ellentmondó következtetést sem tudunk kimutatni. Hagyományosan ezen alaptörvények elnevezése más, más lehet. A hõtan (Termodinamika) a ***fõtétel***, elektrodinamika a Maxwell ***egyenletek*** elnevezést használja axiómái neveként.

Axiómák az elméleti − deduktív tárgyalásmód kiindulópontjai. A ***deduktív módszer*** fordított utat követ, az illetõ tudományterület axiómáiból −alaptörvényeibõl− kiindulva, levezeti, származtatja az adott terület speciális esetekre vonatkozó törvényeit, s gyakran új −a kisérleti fizika által még nem vizsgált − jelenségeket is megjósol. E módszer leginkább az elméleti fizikára jellemzõ.

A kisérleti fizika oktatása meglehetõsen széleskörû kisérleti, laboratóriumi, demonstrációs eszköztárat igényel az oktató tanszéktõl. A deduktív, elméleti fizika oktatása viszont széleskörûen megalapozott matematikai eszköztárat a hallgatóktól.

Ahol elegendõ idõ áll rendelkezésre fizika okításra, ott elõször a kisérleti fizika keretein belül ismertetik meg az illetõ terület alapfogalmait, jelenségeit, majd ugyanezen tudományterület axiomatikus − deduktív tárgyalása következik. Jelen kurzus drasztikus idõkorlátai nem teszik lehetõvé ezen letisztult tárgyalásmódok követését.

A mechanika élén álló axiómákat Newton törvényeknek nevezzük. Ezeknek a törvényeknek számos jelentõs elõfutára volt, azonban máig érvényes összefüggõ megfogalmazásukat Newton adta meg 1686−ban.

− Newton I −

Newton elsõ törvényét esetenként Galilei féle tehetelenségi törvényként is emlegetik.

Az eredeti megfogalmazás szerint: − Minden test megtartja nyugalmi állapotát, vagy egyenesvonalú egyenletes mozgását mindaddig, amig más testek ennek megváltoztatására nem kényszerítik.−

Mozgásállapot alatt a test nyugalmi állapotát (0 sebességét), vagy haladó mozgásának sebességét értjük.

Elegendõ meghúzni egy gyorsvonat vészfékét ahhoz, hogy belássuk, ebben a gyorsuló (lassuló) rendszerben nem úgy mûködik a fizika, ahogy azt ez az axióma állítja. Éppen ezért ezt az axiómát ***kiválasztási axiómának*** nevezik. Eszerint −

van olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben a magárahagyott testek megtartják eredeti mozgásállapotukat. Ezeket a vonatkoztatási

rendszereket **inerciarendszerek**nek nevezzük.

Ha találtunk egy inerciarendszert, amelyben az I. axióma érvényes, akkor minden más, ehhez a rendszerhez viszonyítva egyenesvonalú, egyenletes transzlációt (haladó mozgást) végzõ vonatkoztatási rendszer is inerciarendszer. Ezek az inerciarendszerek egyenértékûek, nincs kitüntetett inerciarendszer. Az egyenértékûség azt jelenti, hogy a fizikai jelenségek ugyanúgy zajlanak le bennük.

A továbbiakban mindig föltesszük, hogy inerciarendszerben vagyunk, még akkor is, ha ezt külön nem emítjük.

Meg kell jegyeznünk, hogy Newton I. törvényének, kiválasztási axiómaként való beállítása nem Newtontól származik. Ez a viszonylag újkeletû módosítás, az un. Galilei féle relativitási elv, vagy Galilei transzformácó (lásd Newton II után 4) ismeretében válik megalapozottá. Newton maga egy abszolut térben −azaz abszolut vonatkoztatási rendszerben − és abszolut idõben gondolta érvényesnek törvényeit.

Newton PRINCIPIA−jában a következõ olvasható:

> Az abszolut tér magában véve, bármely külsõ valamihez való vonatkoztatás nélkül, mindig hasonló és mozdulatlan marad. Az abszolut, igazi és matematikai idõ, magában véve és természeténél fogva egyenletesen folyik bármely külsõ valamihez való vonatkoztatás nélkül.

Ma már tudjuk, hogy az abszolut idõ, és tér, valamint az ezt megtestesítõ mindent kitöltõ, mindenen áthatoló éter nem létezik.

Newton I. axiómájának egyik mondanivalója az, hogy az egyenesvonalú, egyenletes mozgás a testek valamilyen természetes állapota, vagyis ezen mozgásállapot fenntartásához semmilyen környezettõl származó hatás nem szükséges. Környezettõl származó hatás −ezt késõbb erõnek nevezzük− ezen mozgásállapot megváltoztatásához szükséges. Ezzel foglalkozik Newton II.

−Newton II − Tömeg és erõ bevezetése.

Ha piciny ujjunkkal megpöckölünk egy kisebb pénzérmét, akkor azt látjuk, hogy az elrepül, ha most egy villanymozdonyt pöckölünk meg ujjunkkal, akkor .. nos azt látjuk, hogy a közelítõleg azonos külsõ hatásra a különbözõ testek, különbözõ mértékû reakciót mutatnak. Vannak olyan testek, amelyek kevésbé hajlandóak eredeti mozgásállapotuk megváltoztatására, vagyis nagyobb mértékben ragaszkodnak eredeti mozgásállapotukhoz, s vannak olyanok, amelyek kevésbé. Az olyan testeket, amelyek kevésbé hajlandók mozgásállapotuk megváltoztatására tehetetlenebbnek nevezzük. A tehetetlenség mértékének számszerû jellemzésére a tehetetlen tömeget használjuk.

Ha két testet ugyanazon ``környezet által kifejtett" hatásnak tesszük ki, akkor a létrejött sebességváltozással mérni (összehasonlítani) tudjuk a testek tömegét. Az idõegység alatti sebességváltozás mértékének a gyorsulást fogadjuk el. Ekkor az egyes testek tehetetlenségét kifejezõ tömeg fordítottan arányos az ugyanazon hatás −ezt nevezzük erõnek− által létrehozott gyosrsulással.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

E kisérlet legegyszerûbben úgy képzelhetõ el, hogy pl. összenyomott rúgó két végére helyezünk egy−egy tömeget. Az elengedett rúgó által szétlökött testek sebességeinek (amelyek most egyúttal a sebességváltozást is jelentik) mérése tehát tömegeikre enged következtetni. Ha önkényesen elõírjuk a tömeg egységét, akkor a fentiek alapján már megmérhetjük más testek tömegét. Eredetileg $1\,dm^3$ Szajnavíz tömegeként definiálták a ***kg*** tömegegységet.

Ha ezen kisérleteket többször eljátszuk különbözõ testekkel − egyedi testekkel, két test egyesítésével kapott testtel, valamely test szétvágásával kapott testekkel − akkor a tömegrõl a következõket ismereteket szerezzük: a testek tömege pozitív skaláris mennyiség, két test egyesítésével kapott új test tömege, a két eredeti test tömegének

összege. Az olyan fizikai mennyiségeket, amelyekre ezen összegzési szabály érvényes, extenzív mennyiségeknek nevezzük. Azt is tapasztaljuk, hogy a tömeg megmaradó mennyiségként viselkedik, amely az jelenti, hogy egy test tömege csak akkor, és oly módon változhat meg, hogy hozzáteszünk, vagy elveszünk belõle.

Mozgásmennyiségnek (impulzusnak vagy lendületnek is) nevezzük az $\vec{I} = m\vec{v}$ által definiált mennyiséget. Ennek egysége ***kgm/s.*** Mozgásállapot megváltozása, az impulzus megváltozásával jár. Newton II. törvényének eredeti szöveges megfogalmazása, és matematikai alakja is erre vonatkozik. – A mozgásmennyiség megváltozása arányos a ható erõvel, és annak irányába mutat –

$$\Delta\vec{I} = \vec{F}\Delta t \qquad \frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F} \tag{2}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{3}$$

Az eredeti forma az általánosabb, a közismertebb második forma csak állandó tömeg esetén alkalmazható.

Az erõ tehát egy, a környezettõl származó hatás, s egy tömegpont csak ezen környezeti hatás következtében változtathatja meg mozgásállapotát.

Az erõk összegzése, az eredõ erõ bevezetése után /IV. axioma/ újra elõvesszük ezen axiómát.

Newton törvényének (3) alakja egyúttal az erõ definíciójául is szolgál. Egységnyi erõ, az 1 kg tömegû testet 1 m/s^2 gyosulással mozgatja. Ezen egység neve az 1 Newton, vagy röviden 1*N*.

Galilei relativitási elv, Galilei transzformáció.

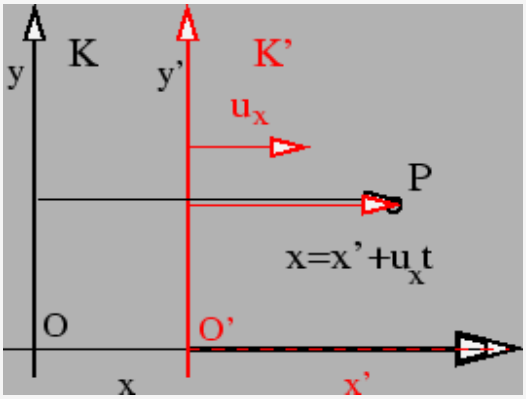
A Galilei féle relativitás elve azt mondja ki, hogy egymáshoz képest egyenesvonalú, egyenletes transzlációt (haladó mozgást) végzõ vonatkoztatási rendszerek között mechanikai kisérletekkel nem tudunk különbséget tenni, azaz ezek egyenértékûek.

Mint ahogy sok nevesített fizikai törvény esetében, itt is a névadó Galilei csupán egy állomás volt a törvény fejlõdéstörténetében. Már Galilei elõdei is többé−kevésbé körülírták e felismert tötvényszerûséget, s a ma használatos formája sem Galileitõl származik.

Legyen ***K*** egy inerciarendszer, ehhez képest a ***K'*** rendszer egyenletesen mozog ***ux*** sebességgel a közös ***x, x'*** tengely mentén. Ha a ***t=0*** idõpontban a két origó egybesett, akkor a ***K'*** beli ***P*** pont ***K*** rendszerbeli ***x*** koordinátája a következõképpen írható föl:

$$x = x' + u_x t \qquad v_x = v'_x + u_x \qquad a_x = a'_x + 0 \tag{4}$$

Figure: Galilei Transzformáció



A két rendszerbeli idõmérés azonossága folytán az idõszerint deriválások egyszerûen következnek a koordináta transzformációból. Ezek következménye a gyorsulások egyenlõsége a két rendszerben.

$$a_x = a'_x \qquad ma_x = ma'_x \qquad F_x = F'_x$$

Newton II. törvénye szerint ekkor az erõk is megegyeznek (F=ma). Tudjuk, az erõtörvény Newton II−be írva adja a mozgásegyenletet, azaz a két rendszerben ugyanazon mozgásegyenletet kapjuk. ez jelenti azt, hogy a mechanikai jelenségek a két rendszerben azonos módon zajlanak le.

Ma már tudjuk, hogy ez a transzformáció, csak a csendes sunyisággal elkövetett extra feltevések mellett igaz. Általában nem igaz az idõmérés azonossága e két rendszerben, s a ***K'*** rendszerbeli tömeg sem egyezik a ***K***−bel tömeggel. A klasszikás fizikában elõforduló kis sebességek esetében azonban ezek az extra föltevések jó közelítéssel −de csak közelítéssel− teljesülnek

− Newton III − Hatás, ellenhatás törvénye.

Ezen axiómát az ``erõ, ellenerõ" törvényeként is szokás emlegetni.

Ha az ***A*** test a ***B*** testre egy ***Fab*** erõt fejt ki, akkor a ***B*** test is erõt fejt ki az ***A*** testre. Ezen ***Fba*** erõ azonos nagyságú, de ellentétes irányú az eredeti ***Fab*** erõvel.Fontos azt hangsúlyozni, hogy e két erõ különbözõ testeken hat.

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$$

− Newton IV erõhatások függetlensége, a szuperpozició elve−

Ha az anyagi pont egyidejûleg több hatásnak is ki van téve, azaz több erõ hat, akkor együttes hatásuk egyetlen u.n. eredõ erõvel helyettesíthetõ. Eredõ erõ az egyes erõk vektori összege.

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

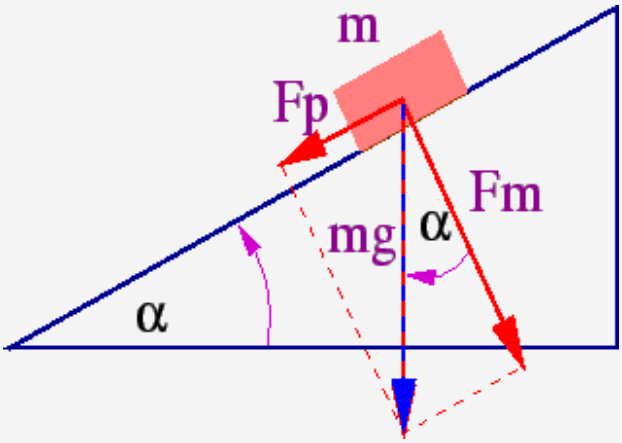
Az eredõ

fogalma a fizikában elég széleskörûen alkalmazott fogalom. Az eredõ ***akármi*** azt az egyetlen ***akármit*** jelenti, amely hatásában helyettesít az ***akármik*** szóbanforgó rendszerét. A mondat zavarossága azonnal oldódni látszik, ha az ***akármi***−t az alkalomhoz illõ konkrét fizikai fogalommal helyettesítjük pl. ellenállás, kapacitás, erõ, .. stb.

Az ugyanezen néven futó egy másik állítás az erõhatások függetlenségének elve. Eszerint ha az a és b pontszerû testek $\vec{F}_{ap}$ valamint $\vec{F}_{bp}$ erõket fejtenek ki a p pontra külön − külön (a másik távollétében), akkor egyidejû fellépésük esetén esetén az eredeti $\vec{F}_{ap}$ és $\vec{F}_{bp}$ erõk nem változnak (?).

Ezen törvény teszi lehetõvé, hogy erõk hogy összegzésével, erõk rendszere helyett egyetlen erõvel az un. eredõ erõvel végezzük számításainkat. Legalább ennyire fontos és hasznos ugyanezen törvény visszafelé olvasása is, amely az erõk felbontását teszi lehetõvé. Eszerint bármely erõ helyettesíthetõ olyan erõkkel, amelyek vektori összege az eredeti erõt szolgáltatja. Klasszikus példa erre egy lejtõre helyezett testre ható nehézségi erõ (súlyerõ) felbontása a lejtõre merõleges ***Fm***, és egy lejtõvel párhuzamos ***Fp*** összetevõre. Itt a két erõ $Fm = mg\cos(\alpha)$ $Fp = mg\sin(\alpha)$ hatásában helyettesíti a

függõleges ***mg*** súlyerõt.



Néhány szó neminerciarendszerbeli módosításokról, −tehetetlenségi erõk, − ellenerõ.

Newton törvényeinek itt említett formái inerciarendszerben érvényesek. Newton II. törvénye nem−inerciarendszerbeli alakjába be kell vennünk olyan, u.n. tehetelenségi erõket (pl. Coriolis, centrifugális erõk) amelyekre pl. Newton III. (hatás − ellenhatás) törvénye nem érvényes. Tudjuk, ez azt állítja, hogy ha az ***A*** test hat ***B*** testre egy $\vec{F}_{A,B}$ erõvel, akkor a ***B*** test ugyanakkora de ellentétes erõt fejt ki ***A***−ra. Ha beülünk egy centrifugába, bizony még azt sem tudjuk megmondani, hogy melyik az az ***A*** test amely az un. centrifugális erõt ezen forgó vonatkoztatási rendszerben ránk kifejti, nemhogy mi illõképpen viszonozzuk ezt valamely $\vec{F}_{B,A}$ erõvel.

Egyszerûbb alkalmazások

A dinamika alapegyenletének is nevezett Newton II−t alkalmazzuk a természetes koordinátarendszerbeli gyorsulás kifejezésre. A pontra ható eredõ erõt felbontjuk ***Ft*** sebességirányú, és arra merõleges ***Fn*** komponensre:

$$\vec{F}_e = m\vec{a} = m\dot{v}\,t + mv\dot{\varphi}\,n = F_t t + F_n n$$

A megfelelõ egységvektorok együtthatóinak egyenlõsége alapján kapjuk a következõket:

$$\dot{v} = \frac{F_t}{m} \qquad \dot{\varphi} = \frac{F_n}{mv}$$

Vagyis az erõ tangenciális (pályagörbe irányú vagyis sebességirányú) összetevõje, ***Ft*** felelõs a sebesség nagyságának változásáért, a sebességre merõleges ***Fn*** erõ pedig a mozgás irányát (és csak azt) változtatja meg. A sebesség nagyságát nem befolyásolja a normális erõkomponens, s a tangenciális erõ pedig nem változtatja meg a sebesség irányát.

A dinamika tételei

Newton törvényeibõl kiindulva juthatunk el a mechanika legalapvetõbb tételeihez. Ezek az impulzustétel, a munkatétel és az impulzusnyomatéki (perdületi) tételek. Amíg azonban az axiómákat megfigyelt tapasztalati tények általánosításaként, másra nem visszavezethetõ alapigazságoknak ismerünk el, a tételekben megfogalmazott állításokat, megengedett logikai lépésekkel (matematikai levezetésekkel) az axiómákra vezetjük vissza, illetve azokból vezetjük le.

A fent fölsorolt tételek speciális esetekben megmaradási tételekké egyszerûsödnek. Ezek az impulzusmegmaradás, energiamegmaradás, perdületmegmaradás tételek.

Impulzustétel

Newton II. axiómájának a $d\vec{I}/dt = \vec{F}_e$ alakját szokás impulzustételnek is nevezni. Ennek megmaradási tétel változatát a nulla eredõ erõ esetében kapjuk.

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{I} = \vec{c}$$

Ha a pontra ható eredõ erõ nulla, akkor a tömegpont impulzusa (lendülete) $\vec{c}$ állandó vektor.

A munka, munkatétel

Az $\vec{F}$ erõ $d\vec{s}$ elmozdulás során végzett δW elemi munkáját a következõ módon definiáljuk:

$$\delta W = \vec{F} d\vec{s} = F\, ds\, cos(\alpha) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

A munka egysége: ***Nm*** vagy ***J*** (a Joule rövidítéseként). Vigyázat: a forgatónyomaték (lásd késõbb) egysége is ***Nm***. (Fent csupán az egységek neveivel játszadoztunk. Valójában a következõk szerint kellene megadnunk az egységet: $\boldsymbol{W = F\ s = m\ a\ s} \Longrightarrow kg\, m/s^2\, m = kg\, m^2 s^{-2}$ ezen alapegységekkel kifejezett egységet nevezzük 1 Joule −nak)

Ha az elmozdulás és az erõ merõlegesek, akkor a munkavégzés nulla azaz:
$\vec{F} \perp d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \delta W = 0$

Ha a $d\vec{s}$ elmozdulások sorozata során egy Γ pályagörbét futunk be, akkor az egyes elemi elmozdulások (ezek a görbe ívelemei) során végzett elemi munkákat összegeznünk kell. Ez az összegzés végül integrál formáját ölti. A Γ pályagörbe egy szakaszán végzett munka tehát −görbementi integrál:

$$W_\Gamma(a,b) = \int_{\Gamma a}^{b} \vec{F}(\vec{r})d\vec{s}$$

Amennyiben az ***s*** út során az ***F*** erõ valamint az erõ és az elmozdulás szöge is állandó, akkor a munkavégzés számítása egyszerûbb formában is elvégezhetõ: $F\,s\,cos(\alpha)$.

A munkavégzés sebességét, vagyis egységnyi idõ alatt végzett munkát a ***P*** teljesítménnyel jellemezzük.

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$

Egysége $1\,[Joule/sec] = 1\,Watt$. Ha a teljesítményt az idõ függvényeként ismerjük, akkor a ***t1, t2*** idõpontok által kijelölt idõintervallumban végzett munka, a teljesítmény idõintegráljaként állítható elõ:

$$W(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt$$

A testek helyzetéhez, mozgásához, deformált állapotához, stb. kapcsolódó munkavégzõ képességet energiának nevezzük.

Egysége tehát megegyezik a munka egységével, azaz Joule egységekben mérjük.

A testek mozgásához kapcslódó munkavégzõ képesség: a mozgási, vagy kinetikus energia:

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

A továbbiakban egy fontos tételt, a pontmechanika munkatételét, illetve teljesítménytételét vezetjük le.

A kinetikus energia idõderiváltja a következõ:

$$\frac{dW_k}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}m\,2\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Newton II szerint azonban:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_e$$

amelyet a pont ***V*** sebességével skalárisan szorozva a következõt kapjuk :

$$\frac{dW_k}{dt} = \vec{F}_e\vec{v}$$

A továbbiakban $P_e = \vec{F}_e\vec{v}$ az eredõ erõ teljesítményét jelöli . Ezekkel a jelölésekkel a teljesítménytétel a következõ:

$$\dot{W}_k = P_e$$

Tömegpont mozgási energiájának idõderiváltja (az idõderiválást most egy pont jelöli) ***egyenlõ a pontra ható eredõ erõ teljesítményével*** −ezt az állítást nevezzük teljesítménytételnek.

Idõ szerinti integrálással kapjuk a teljesítménytételbõl a munkatételt:

$$W_k(t_2) - W_k(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} P_e(t)dt = \int_{Lp_1}^{Lp_2} \vec{F}_e(\vec{r})d\vec{r} \qquad (5)$$

Tömegpont mozgási energiájának megváltozása egyenlõ az pontra ható eredõ erõ munkájával.

A munkatétel fizikai tartalma ugyanaz mint a teljesítménytételé, csak az állítás nem idõpontra, hanem véges idõtartamra vonatkozik. A munkatételhez tartalmilag hasonló állítások a fizika különbözõ területein megjelennek, ilyenek pl. − hõtan I. fõtétele − energia mérleg elektrodinamikában stb.

Erõtér, térerõ.

Ha a vizsgált tértartomány minden pontjához hozzárendelünk egy vektort, amely az oda behelyezett pontszerû testre ható erõt adja meg, akkor ezt a vektorteret erõtérnek nevezzük. (vannak akik a mezõ elnevezést kedvelik) Idõben állandó erõtereket statikus, erõtereknek vagy más elnevezéssel statikus mezõknek nevezzük. Ezen mezõk szemléltetésére az u.n. erõvonalakat használjuk. Ilyen vektorterek −esetleg idõben változó formában − a fizika más területein is szerepet játszanak. Ilyen például az áramló közeg sebességtere is. Az alább elmondottak bizonyos szavak lecserélésétõl eltekintve ugyanazok pl. a sebességterek áramvonalakkal történõ szemléltetése esetén is.

Az erõvonalak, és a vektortér közötti −megállapodás szerinti− kapcsolat a következõ.

Az erõvonalhoz húzott érintõ iránya párhuzamos az ugyanebben a pontban ható erõvel. Az erõvonalak sûrûsége − az erõvonalakra merõleges egységnyi felületen áthaladó erõvonalak ``száma'' (fluxusa) − arányos az ebben a pontban ható erõ nagyságával. E definició alapján az erõvonalakat meghatározó differenciálegyenlet a párhuzamosságot kifejezõ vektorszorzat $d\vec{r} \times \vec{F} = 0$ kifejtésével írható fel. 2 dimenziós esetben az ***y(x)*** görbe differenciálegyenlete az egyszerû ***dy/dx = Fy/Fx*** alakhoz vezet.

Az ***m1, m2*** tömegeket behelyezzük a tér ***A***, és ***B*** pontjába. A tömegekre ható $\vec{F}_{1A}, \vec{F}_{2A}, \vec{F}_{1B}, \vec{F}_{2B}$ erõk vizsgálata tapasztalataink szerint a következõkhöz vezet: a tömegpontokra ható erõ felbontható egy csak a helytõl függõ vektormennviség és egy csak a behelyezett testre jellemzõ skaláris mennyiség szorzatára: $\vec{F} = m * \vec{f}(\vec{r})$. Az $\vec{f}(\vec{r})$ vektorteret térerõsségnek nevezzük, az egységnyi tömegre kifejtett erõ irányát és nagyságát határozza meg.

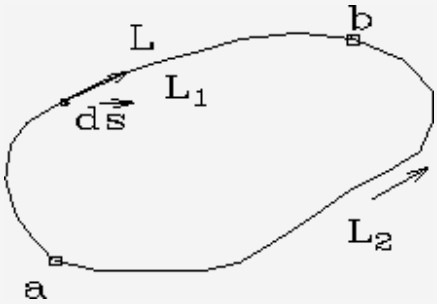
A fenti felismerésre akként jutunk el, hogy észrevesszük, hogy az $\vec{F}_{1A}, \vec{F}_{2A}$ erõk párhuzamosak, s ugyancsak párhuzamosak az $\vec{F}_{1B}, \vec{F}_{2B}$ erõk is. Az is szemet szúr nekünk, hogy az m1 és m2 testekre ható erõk aránya a helytõl függetlenül ugyanaz mind az A, mind pedig a B helyen. Azaz az $\vec{F}_{1A}, \vec{F}_{2A}$ erõk aránya ugyanannyinak bizonyul, mint az $\vec{F}_{1B}, \vec{F}_{2B}$ erõk aránya. Ez egyébként a két m1, és m2 tömeg arányát adja meg. Ez utal arra, hogy az erõ kifejezését megadó összefüggésben szorzóként egy, az aktuális testre jellemzõ mennyiségnek (tömegnek) kell lennie. Az erõk helyfüggéséhez az elõbbi erõket más párosításban vizsgáljuk. Az $\vec{F}_{1A}, \vec{F}_{1B}$ erõk irányai és aránya az $\vec{F}_{2A}, \vec{F}_{2B}$ erõk irányaival, illetve arányaival egyezik. Ez a térbeli pozicióra jellemzõ vektormennyiség jelenlétére utal az erõ kifejezését megadó összefüggésben.

A fizikában központi szerepet játszanak egy specális tulajdonságot mutató mezõk, az un. konzervatív mezõk. Alapvetõ megfigyelésünk az, hogy bizonyos mezõkben a mezõ (más néven erõtér) által, tetszõleges zárt görbe mentén végzett munka 0. Az ilyen tulajdonságokat mutató mezõket konzervatív mezõknek nevezzük.

Konzervativ térben tehát $\oint_L \vec{f}\,d\vec{s} = 0$

A mezõ térerõsségének tetszõleges, zárt görbére vett görbementi integrálja nulla. Ugyanezt most elmondanánk fizikául is: az konzervatív mezõ tetszõleges zárt görbe mentén végzett munkája nulla. Azt könnyen belátjuk hogy az erõ és térerõ közötti $\vec{F} = m * \vec{f}(\vec{r})$ kapcsolat miatt ez a tulajdonság mind az erõre, mind pedig a térerõsségre is fönnáll. A mezõ konzervatív volta egyetlen tulajdonságot jelent, azonban ennek számos, egymástól különbözõ matematikai megfogalmazása van. A továbbiakban a konzervatív mezõk tuljdonságait sorolnánk föl.

Figure: Zárt görbe és földarabolása két görbére. ***L2*** mentén a ***ds*** ívelem megfordítása az integrál elõjelváltásához vezet.



Az ***L*** zárt görbe menti integrál föltrancsírozható egy ***a*** −tól ***b*** −ig haladó ***L1*** és egy ***b*** −tõl a −ig haladó ***L2*** menti integrállá. Ez utóbbin −egy elõjelváltás árán − fölcseréljük az alsó és felsõ határokat. Az integrálok tölteléke mindenütt ugyanaz az $\vec{f}\,d\vec{s}$, ezért ezeket az alábbiakban nem is írjuk.

$$\oint_L .. = \int_{L_1 a}^{b} .. + \int_{L_2 b}^{a} .. = \int_{L_1 a}^{b} .. - \int_{L_2 a}^{b} .. = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{L_1 a}^{b} .. = \int_{L_2 a}^{b} ..$$

Mivel ***L1***−re és a minusz ***L2*** −re elkövetett integrál együttesen nullát ad, így az átrendezés azt mondja, hogy ugyanazt a munkavégzést kapjuk akár ***L1***, akár ***L2*** mentén

megyünk ***a*** −ból ***b*** −be. Abból a ténybõl, hogy akármilyen ***a*** −ból ***b***−be haladó ***Li*** görbékre ugyanezt kapjuk, a konzervatív tulajdonság egy újabb megfogalmazásához jutunk, nevezetesen: konzervatív mezõ által végzett munka független az úttól, a munkavégzést a görbe (azaz az integrációs útvonal) kezdõ és végpontja egyértelmûen meghatározza.

$$\int_{L_1 a}^{b} .. = \int_{L_2 a}^{b} .. = -(W_b - W_a)$$

Ezt a tulajdonságot csak úgy tudjuk kielégíteni, hogy ha a munkavégzést a kezdõ és végponthoz tartozó skalármennyiségek különbségeként állítjuk elõ. Vagy álatlában, tetszõleges két pont közötti munkavégzést a két ponthoz hozzárendelt skalármennyiségek különbségeként kaphatjuk meg. Ki van tehát tapétázva a konzervatív vektorterünk egy $W(\vec{r})$ skalártérrel is. Õt úgy nevezzük, hogy potenciális energia. Ehhez még visszatérünk.

Más.

A zárt görbe menti integrál Stokes integrál−trafo alpján átalakítható a görbe által körülölelt felületre képzett felületi integrállá:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{A(\Gamma)} rot(\vec{F})\, d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad rot(\vec{F}) = 0$$

Az integrandus tehát mindenütt nulla, mivel az integrál értéke tetszõleges felületre nullát ad. Ebbõl adódik a mezõ kozervatív tulajdonságának egy lokális (pontbeli) megfogalmazása nevezetesen $rot(\vec{F}) = 0$. Vagyis a kozervatív mezõ erõtere örvénymentes vektortér. Számtanórán tanultuk, hogy minden olyan vektortér, amely egy skalártér gradienseként áll elõ, örvénymentes, egyszerûbben $rot\, grad\, f(\vec{r}) = \vec{0}$, vagy ha valakinek jobban tetszik: $[\nabla \times (\nabla f(\vec{r}))] = \vec{0}$.

Mielõtt továbblépnénk még egy matematikai csacskaságot kell tisztáznunk. Azt vizsgáljuk hogyan változik meg az ***f*** függvényérték, ha az $\vec{r}$ argumentum kicsiny $d\vec{r}$ −el megváltozik. A "kicsiny" kifejezés itt azt jelenti, hogy a lineáris növekmények mellett a magasabb hatványokat tartalmazó tagok már elhanyagolhatóan kicsiny járulékot adnak. Különbözõ emberekerõl elnevezett sörfejtés szerint:

$$f(\vec{r}+d\vec{r}) = f(\vec{r}) + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \dots$$

A növekmény $df = f(\vec{r}+d\vec{r}) - f(\vec{r})$ lineáris részét teljes differenciálnak nevezzük, s fentiek alpján −felismervén a ***gradiens f*** és a ***dr*** skaláris szorzatát −a következõképpen adható meg:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \nabla f\, d\vec{r}$$

Fizikához visszatérve, a konzervatív mezõ felsorolt tulajdonságai maradéktalanul kielégíthetõk, ha a térbe elhelyezett ponteszerû testre kifejtett erõt egy un. potenciális energia függvény negatív gradienseként állítjuk elõ:

$$\vec{F} = -\nabla W_p(\vec{r})$$

Természetesen, ha valaki jobban szereti, a ***grad(Wp)*** formát is használhatja.

Ez erõ ezen elõállítási formája azt jelenti, hogy az erõ három koordinátáját megadó függvények helyett elegendõ egyetlen skaláris függvényt megadnunk, amelybõl származtathatjuk az erõ koordinátáit. Egyébként azt is látjuk, hogy ha találtunk egy olyan ***Wp*** potenciálfüggvényt amely a ***F*** erõteret állítja elõ, akkor minden olyan más

W'p függvény is amely az eredeti ***Wp*** −tõl egy additív konstansban különbözik, azaz ***W'p=Wp+Konst,*** ugyanazt az ***F*** erõteret szolgáltatja, mivel bármely konstans deriváltja (itt gradiense) nulla. A potenciálfüggvény tehát csak egy additív konstanstól eltekintve egyértelmûen meghatározott. Mivel a fizikai problémáknál rendszerint a potenciális energiák különbsége játszik szerepet, az additív konstans így rendszerint kiesik. Egyébként e tetszõleges konstans teszi lehetõvé, hogy az potenciális energia zérushelyét úgy válasszuk, meg ahogy az illetõ probléma szempontjából a legkényelmesebb.

A fenti elõállítás következménye, hogy az elemi munka konzervatív térben

$$\delta W = \vec{F} d\vec{r} = -\nabla W_p(\vec{r})\, d\vec{r} = -dWp$$

a fentiek alapján teljes differenciál. Az elemi munka egyenlõ a potenciális energia negativ megváltozásával.Egy véges ***L*** görbedarab ***r1*** és ***r2*** pontja között a munkavégzés alakja:

$$W_{1,2} = \int_{Lr1}^{Lr2} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{Lr1}^{Lr2} dWp = -(Wp(\vec{r}_2) - Wp(\vec{r}_1))$$

Ha a tömegpontra ható ***eredõ erõ*** egy konzervatív és egy nem konzervatív erõ összegeként áll elõ, vagyis $\vec{F}_e = \vec{F}_{nk} - \nabla W_p$, akkor az eredõ erõ munkája az egyes erõösszetevõk munkájaként számítható:

$$We_{1,2} = \int_{Lr1}^{Lr2} \vec{F}_{nk} d\vec{r} - (Wp(\vec{r}_2) - Wp(\vec{r}_1))$$

A munkatétel azt mondotta nékünk, hogy az eredõ erõ munkájával egyenlõ a

tömegpont ***Wk*** mozgási energiájának növekménye:

$$We_{1,2} = W_k(2) - W_k(1)$$

Ebbe beleírván az eredõ erõ munkáját kapjuk a munkatétel következõ formáját.

$$W_k(2) - W_k(1) = \int_{Lr1}^{Lr2} \vec{F}_{nk} d\vec{r} - (Wp(\vec{r}_2) - Wp(\vec{r}_1))$$

Mechanikai energia (össz−energia) alatt értjük $W_{kinetikus} + W_{potencialis}$ összeget. A munkatétel szerint ennek megváltozása egyenlõ a tömegpontra ható nemkonzervatív erõk (***Wnk***) munkájával.

$$(W_k(2) + W_p(2)) - (W_k(1) + W_p(1)) = W_{nk}(1,2)$$

Ha a nem konzervativ erõk munkája 0, pl. ha csak kozervatív erõk hatnak, akkor a potenciális (más néven helyzeti), és a kinetikus (azaz mozgási) energiák összege állandó. Ez azt jelenti, hogy az adott test mozgásának valamely idõpillanatában ismerjük ezt az összeget, akkor e mozgás bármely más idõpillanatában is ugyanez lesz a két energia összege.

A mechanikai energia konzerválódik konzervatív mezõben való mozgás során, s az konzervatív mezõ elnevezés eredete is innen származik.

Matematikai legendárium szerint a ***gradiens(f)*** megadja az ***f*** függvény leggyorsabb változásának irányát, abszolutértéke pedig azt, hogy a függvényérték mennyit változik, ha az elõbbi irányban egységnyivel elõrelépünk. Ez egyébként a növekményt megadó formulából olvasható ki:

$$dWp = \nabla W_p(\vec{r})\, d\vec{r}$$

Ha ***dr*** irányát merõlegesnek választjuk a ∇W_p irányára, akkor a skaláris szorzat ismert tulajdonsága miatt nullát kapunk ***dWp*** −re. Ha ***dWp*** annak ellenére nulla, hogy a ***dr*** elmozdulás nem nulla, akkor a ***Wp=Konst*** ekvipotenciális felületen mozogtunk. Az ekvipotenciális felület mentén az ***Fdr=−dWp*** munkavégzés nulla, s az erõk (s az erõvonalak) merõlegesek az ekvipotenciális felületekre.

Korábban említettük, hogy pl . gravitációs térben az ***m*** tömegû tömegpontra kifejtett erõ az $\vec{F} = m\vec{f}$ formában adható meg, ahol ***f*** csak a térre jellemzõ vektormennyiséget térerõnek, vagy térerõsségnek nevezzük. A potenciális energia kapcsán is bevezethetünk egy, csak a térre jellemzõ $U(\vec{r})$ skalárértékû függvényt, amelyet potenciálfüggvénynek nevezünk, s kapcsolata a potenciális energiával ***Wp=m*U.***

$\vec{F} = -\nabla W_p(\vec{r})$ ***m*** −való osztás után marad $\vec{f}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$

Az ***F*** erõ konkrét ***m*** tömegû tömegpontra kifejtett erõt jelenti. Más, más ***m*** tömeget ugyanabba a térbeli pontba helyezve más, más nagyságú erõt, s más más értékû ***Wp*** potenciális energát kapunk. Az ***f*** térerõsség és az ***U*** potenciálfüggvény már nem tartalmaznak a behelyezett testre jellemzõ, adatokat, õk már csak a teret jellemzõ függvények.

Könnyen igazolható néhány erõtörvény potenciálfüggvénye. (Egyes részletekkel késõbb foglalkozunk).

F= −Dx lineáris erõtörvénnyel leírt rúgóerõ. Az ehhez tarozó potenciális energia függvénye $Wp = Dx^2/2$.

A Föld felszínének közelében a homogén gravitácós vonzóerõ $F_z = -mg$. Ehhez a ***Wp= mgz*** potenciális energiafüggvény tartozik.

A pontszerû (vagy kiterjedt, de gömbszimmetrikus tömegeloszlású) ***M*** tömeg pontszerû ***m*** tömegre kifejtett gravitációs (tömegvonzási) ereje:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{r}_o$$

Az ***M*** tömegû test gravitációjának potenciálfüggvénye pedig:

$$U = -G\frac{M}{r}$$

Perdületi tétel

Ez a tétel névmagyarosítása elõtt az *impulzusmomentum tétele* néven volt közismert.

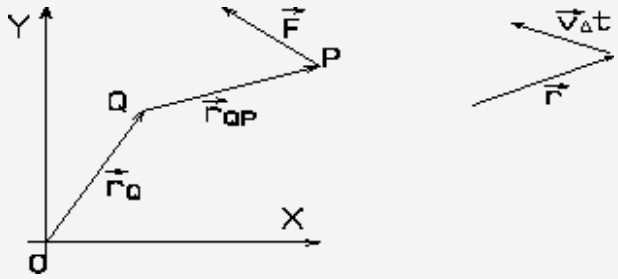
Elõzetesként néhány fizikai mennyiség definícióját adjuk meg.

A ***P*** pontra ható $\vec{F}$ erõ, ***Q*** pontra vonatkozó ***nyomatéka*** alatt az $\vec{M} = \vec{r}_{QP} \times \vec{F}$ vektori szorzatot értjük. Ez nem más mint a jól ismert forgatónyomaték, amelyet a reáltanodában mint az ``*erõ és karjának szorzata*"−t állítottunk elõ. A ***Q*** pontot gyakran az origóba helyezzük, így a fenti $\vec{r}_{QP}$ szerepét az egyszerû helyvektor veszi át. A forgatónyomatékra, a vektorszorzat tulajdonságaiból következõen az alábbiak azonnal adódnak: a forgatónyomaték vektora a tényezõvektorok síkjára, azaz a helyvektor és a pontra ható erõ síkjára merõleges, nagysága $M = r\,F\,\sin(\alpha)$. Ha az erõ hatásvonala átmegy a helyvektor kezdõpontján ``a forgástengelyen" akkor zérus nyomatékot kapunk.

A nyomaték, vagy más néven *momentum* számítása más vektorok esetén is hasonlóan történik. Használatos a ***P*** pont $m\,\vec{v}$ impulzusának (lendületének) nyomatéka, az impulzusmomentum: $\vec{N} = \vec{r}_{QP} \times m\,\vec{v}$. Új−magyarul ez a mennyiség a perdület nevet viseli. A perdülethez egy szemléletes geometriai jelentés kapcsolható, ezt

tárgyaljuk most .

Figure: Ábra az erõmomentum definiciójához, a területi sebességhez.



A (7) ábra kis rajzocskáján az $\vec{r}$ vektor végpontja Δt idõtartam alatt $\vec{v}\Delta t$ −vel mozdul el. Az $\vec{r}\times\vec{v}\Delta t$ vektorszorzat az $\vec{r}$ és $\vec{v}\Delta t$ vektorok felfeszítette paralelogramma területét adja meg amely éppen kétszerese annak a háromszög területnek, amelyet az $\vec{r}$ helyvektor Δt idõtartam alatt súrol. E terület irányítása merõleges a tényezõvektorok által felfeszített síkra.

$$\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}=\frac{1}{2m}\vec{r}\times m\vec{v}=\frac{1}{2m}\vec{N}$$

Vagyis a perdület az ***1/(2m)*** szorzótól eltekintve a helyvektor által súrolt területet adja meg.

A perdületi tétel levezetését a perdület idõ szerinti deriválásával kezdjük.

$$\frac{d\vec{N}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

A jobboldal elsõ tagja nulla, mivel a párhuzamos vektorok vektori szorzata nulla eredményt ad. (itt sebesség vektori szorzata a sebességgel). A második tagban szereplõ

$m\,d\vec{v}/dt$ pedig Newton II. törvénye értelmében a tömegpontra ható eredõ erõvel egyenlõ.

Az $\vec{M}_e = \vec{r} \times \vec{F}_e$ jelöléssel a ***perdületi tétel*** így írható:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}_e$$

Vagyis tömegpont perdületének idõderiváltja egyenlõ az e pontra ható erõk eredõjének nyomatékával.

A vektorokra vonatkozó egyenlõség szétszedhetõ −általában három− a koordinátákra szóló egyenlõségre. A tétel tehát koordinátánként is olvasható.

Ha az eredõ erõ nyomatéka nulla, akkor a perdület állandó vektor. A koordinátánkénti olvasat itt is fontos. Pl. ha az eredõ erõ nyomatékának ***x*** koordinátája nulla, akkor perdület ***x*** koordinátája állandó, a perdület többi koordinátája ettõl még akárhogyan is változhat.

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \overrightarrow{konst}$$

Centrálisnak nevezzük azt az erõteret, amelyben az erõk hatásvonala (tartóegyenese) egy ponton megy át. Ezt a pontot erõcentrumnak nevezzük, s koordinátarendszerünk origóját is ide helyezzük. A centrális erõ egy radiális egységvektor, és egy skaláris ***f*** függvény szorzataként állítható elõ: $\vec{F}_c = f(\vec{r})\,\vec{r}_o$ Ennek az erõnek a centrumra vonatkozó nyomatéka nulla hiszen párhuzamos vektorok vektori szorzata nulla.

$$\vec{M} = f(\vec{r})\,\vec{r} \times \vec{r}_o = 0$$

A perdületi tétel szerint ekkor a perdület állandó vektor, tehát nagysága is, iránya is állandó. A perdület vektora a helyvektor és a sebességvektor által felfeszített síkra merõleges. Ez azt jelenti, hogy centrális erõtérben mozgó tömegpont mozgása síkmozgás, és a tömegponthoz húzott helyvektor egyenlõ idõközök alatt egyenlõ területeket súrol. Kepler a bolygók Nap körüli mozgására ugyanezen szabályszerûségeket fogalmazta meg a bolygók megfigyelési adatai alapján.

Egy elemi kisérlet, és magyarázata. Egy bácsika ül megforgatott forgószékben. Kinyújtott kezében súlyzó, amelyet ha behúz, forgása felgyorsul. Ennek magyarázatához egy végtelenül lepucérított modellt használunk. Egy ***m*** tömegû pontszerû test körmozgása (keringése) esetén a sebesség merõleges a kör sugarára. A perdület ekkor egyszerûen kifejthetõ $N = |\vec{r} \times m\vec{v}| = r\,m\,r\,\omega = mr^2\omega$. Az ***m*** tömeget 'behúzzuk' a kör középpontja felé mondjuk az eredeti sugár érték felére. Az alkalmazott erõ centrális volt, így a perdület nem változik. $m\,r^2\omega = m\,(r/2)^2\omega_1$ Az új szögsebesség tehát $\omega_1 = 4\omega$. Érdekes ez esetben a mozgási energia változása is, amely természetesen a tömegek behúzása során végzett munka következménye. Az eredeti $W_o = 1/2m\,(r\omega)^2$, s az új $W_1 = 1/2m\,(r/2 * 4\omega)^2 = 4\,W_o$

E jelenség egy különösen érdekes megnyílvánulása a pulzároknál tapasztalható.

Kiterjedt, merev testek rögzített tengely körüli forgásánál is alkalmazhatjuk a fenti fogalmakat. Ez esetben a merev test minden térfogateleme ugyanazon szögsebességgel forog (helyesebben kering). Folytonos térkitöltésû anyagokkal un. kontinuumokkal még nem foglalkoztunk, így közelítésképp a kicsiny térfogatelemekbe foglalt tömegeket tömegpontokként kezeljük. A forgó test perdületét az õt alkotó tömegelemek perdületeinek öszege alkotja.

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = (\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2)\,\omega = \Theta\,\omega$$

Itt ***ri*** jelenti az ***i***−edik (összesen ***n*** darab) ***mi*** tömegelem forgástengelytõl mért távolságát. A $(\sum_{i=1} m_i r_i^2) = \Theta$ mennyiséget a test, az aktuális forgástengelyre vontkozó tehetetlenségi nyomatékának nevezzük. Számításához folytonos térkitöltésû testek esetében a fenti szummázás helyett valójában térfogati integrált kell elkövetnünk. Látjuk, hogy Θ−t a test forgástengelyhez viszonyított tömegeloszlása határozza meg, úgy, hogy a távolabb levõ tömegek sokkal nagyobb súllyal szerepelnek az összegben. Naprendszerünkben a bolygók össztömege szinte elhanyagolhatóan kicsi a Nap tömegéhez viszonyítva, viszont a naprendszer összperdülete szinte kizárólag a bolygóktól származik.

A tehetelenségi nyomaték forgó mozgásnál ugyanazt a szerepet játsza, mint a haladó mozgásnál a tehetetlen tömeg. A perdületi tétel, a merev test e rögzített tengely körüli forgására a következõképpen írható át:

$$M = \dot{N} = \Theta\,\dot{\omega}$$

Fölismerhetõ egy igen kényelmes analógia illetve megfeleltetés az egyenesvonalú haladó, és a rögzített tengely körül forgó test mozgását jellemzõ mennyiségek között. Ezeket itt most további ideológiai ujjgyakorlatok nélkül közöljük:

m	Θ
x	φ
$v_x = \dot{x}$	$\omega = \dot{\varphi}$
$a_x = \dot{v}_x$	$\beta = \dot{\omega}$
$I = mv$	$N = \Theta\,\omega$
$F = m\dot{v}_x$	$M = \Theta\,\dot{\omega}$
$W_k = 1/2 mv^2$	$W_k = 1/2\,\Theta\,\omega^2$

A mozgásegyenlet, speciális mozgások

Newton II. törvényében, a vizsgált tömegpontra ható erõk eredõje, az $\vec{F}_e$ szerepel. ***Azt a függvényt, amely megadja, hogy az eredõ erõ hogyan függ a tömegpont helyvektorától, sebességétõl, s az idõtõl, erõtörvénynek nevezzük.*** Az $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$ függvény tehát az erõtörvény nevet viseli.

Newton II. leggyakrabban használt formája a következõ:

$$m\vec{a} = \vec{F}_e$$

Ezt a dinamika alapegyenletének is szokás nevezni. Impulzustétel néven ismert ennek a következõ alakja $d\vec{I}/dt = \vec{F}_e$. A dinamika alaptörvénye kapcsán jelentkezõ alapfeladatok:

− Statika, (vagy sztatika) tárgya az egyensúly, és az egyensúly feltételeinek vizsgálata. A tömegpont egyensúlyi helyzetét az eredõ zérus értéke tünteti ki. Az egyensúlyi helyzet stabilitásának vizsgálata már a dinamika és a statika közé esõ terület.

− Dinamika a környezet hatását jellemzõ erõ és a tömegpont mozgásának kapcsolatát vizsgálja. Két irányban alkalmazhatjuk ekkor a dinamikai alaptörvényt.

* Ismert $\vec{r}(t)$ mozgástörvény esetén a pontra ható eredõ erõ (illetve komponensei) az $m\vec{a}$ alapján megkereshetõ.

* Ha adott a tömegpontra ható eredõ erõ, mint a tömegpont helyvektorának, sebességének és az idõnek a függvénye, akkor ennek alapján a tömegpont mozgására

következtethetünk, azaz az $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$ erõtörvénybõl kiindulva az adott m tömeg $\vec{r}(t)$ mozgástörvénye a mozgásegyenletbõl meghatározható:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt},t) \qquad (6)$$

A fenti egyenlet az un. ***mozgásegyenlet. Kapcsolatot állapít meg a az ismeretlen*** $\vec{r}(t)$***, függvény, annak deriváltjai és az idõ között.*** A vektoregyenlet koordinátás olvasata alpján ez három darab másodrendû, differenciálegyenlet a meghatározandó $\vec{r}(t)$ vektor koordinátái számára.

A kétszeri integrálás koordinátánként 2 integrációs állandót termel. Kezdeti feltételekkel –$\vec{r}(t_0)$, $\vec{v}(t_0)$ – ezen állandók meghatározhatók − illetve ezen integrációs állandók teszik lehetõvé a megoldások hozzávarrását tetszõleges kezdeti feltételekhez. Térbeli (3D azaz 3 dimenziós) mozgás esetében a mozgásegyenlet egyértelmû megoldásához meg kell adnunk 6 db. adatot. Ezek rendszerint valamely kezdõ idõpillanathoz tartozó koordináta és sebesség értékek. A kezdeti idõpont rendszerint a ***t=0*** idõpillanat. Ezt többnyire önkényesen megtehetjük, hiszen csupán arról van szó, hogy a stopperóránk gombját mikor nyomjuk meg. Az ezen idõpillanatban mért (Descartes koordinátarendszerben***) Vxo,Vyo,Vzo, xo, yo, zo,*** sebesség és koordinátaértékek tehát a kezdeti feltételek.

Ha a mozgásegyenlet megoldásával meghatároztuk a tömegpont mozgását leíró $\vec{r}(t)$, mozgástörvényt, akkor "mindent" tudunk a tömegpontról, hiszen $\vec{r}(t)$ −bõl kiindulva minden, az adott tömegpontra, és annak mozgására jellemzõ fizikai mennyiséget származtatni tudunk (finomabb részletezés nélkül fölsoroljuk ezeket: sebesség, gyorsulás, lendület, perdület, területi sebesség, mozgási energia, helyzeti energia, teljesítmény, munkavégzés).

A mozgástörvény ismerete lehetõvé teszi a munkavégzés kiszámításánál felmerülõ homály tisztázását. A homály abban van, hogy az erõtörvény általában a hely, a sebesség, és az idõ függvénye: $\vec{F}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t)$, a munkavégzés számítására viszont a következõ formulákat adtuk meg:

$$W_\Gamma(a,b) = \int_{\Gamma a}^{b} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{s} \qquad W(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt$$

Az elsõ formula szerint a munkavégzést akkor tudjuk kiszámolni, ha az erõ ***csak*** a helyvektortól függ és tudjuk milyen pályát fut be a tömegpont, de sebességtõl vagy idõtõl függõ erõk esetében már nem. A teljesítmény idõintegráljával számított munkavégzéshez az erõt leíró $\vec{F}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t)$ függvényt ``csõre'' kell töltenünk a mozgástörvény $\vec{r}(t)$ és $\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt$ származékaival.

$$P(t) = \vec{F}(t)\,\vec{v}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)\,\vec{v}(t)$$

Ekkor már valóban tettleg inzultálható a $P(t)\,dt$ idõintegrál.

Példa: ***1D*** −s mozgás, sebességgel arányos fékezõ erõ, m tömeg. Adott $v_0, \quad x_0 = 0$ (Ehhez fûzhetõ kvalitatív népmese: egy csolnakot, melyre sebességével arányos fékezõerõ hat, meglökünk Vo sebességgel ...)

$$F = -kv, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{k}{m}dt \ \ldots$$

$$ln(v) = -\frac{k}{m}t + ln(C) \qquad v(t) = Ce^{(-\frac{k}{m}t)}$$

Itt az integrációs állandót ***ln(C)*** alakban vettük föl. Ez elõnyös minden olyan esetben, amikor a keresett függvény is ***ln*** mögé bújt.

Vo jelöli a ***to=0*** idõponthoz tartozó sebességet, úgy kell tehát megválasztanunk a ***C*** értékét, hogy a függvény erre a pillanatra is helyesen adja meg a sebességet. Ehhez beírjuk a megoldásba a független változó és függõ változó összetartozó értékeit.

$$Vo = Ce^{(-\frac{k}{m}to)} = Ce^{0} = C$$

$$v(t) = Voe^{(-\frac{k}{m}t)}$$

Ennek idõintegrálja szolgáltatja a mozgástörvényt. Ebben az 1D−s mozgásban ez az ***x(t)*** függvény.

Az integrál a következõt eredményezi:

$$x(t) = C1 - \frac{m}{k}Voe^{(-\frac{m}{k}t)}$$

Ha a tömegpont a ***t=0*** idõpillanatban az origóban volt, akkor az ***x(t)*** függvény is ezt kell, hogy adja, azaz ***x(0)=0***.

$$0 = C_1 - \frac{m}{k}Vo, \qquad C_1 = \frac{m}{k}Vo, \qquad x(t) = \frac{m}{k}Vo\,[1 - e^{(-\frac{m}{k}t)}]$$

− Ez még hiányos −

A harmonikus rezgõmozgás

Rugalmas (kvázielasztikus) erõk ***lineáris erõtörvén***nyel írhatók le, vagyis a nyugalmi (erõmentes) helyzettõl mért ***x*** kitéréssel egyenesen arányos a visszatérítõ erõ. Ilyen pl. a rúgóerõ, de jó közelítéssel ugyanilyen erõ jelenik meg minden stabil egyensúlyi helyzetben levõ tömegpont esetében, ha a tömegpont egyensúlyi helyzettõl való **x** kitérése nem túl nagy. A továbbiakban azt kívánjuk vizsgálni, hogy ilyen erõ hatására milyen típusú mozgás alakul ki. Az egyszerûbb tárgyalás kedvéért egy dimenziós mozgással foglalkozunk. A rúgóerõt leíró függvény alakja ekkor a következõ:

$$F = -D\,x$$

A ***D*** ***(N/m)*** mennyiséget rúgóállandónak nevezhetjük. Nagyobb ***D***−értékkel jellemzett rúgót nagyobb erõvel tudjuk ugyanannyival megnyújtani. A konzervatív mezõknél tanultuk, hogy ez az erõ konzervatív s a potenciális energia kifejezését $W_p = 1/2\,Dx^2$ formában adhatjuk meg.

Newton második törvénye $m\ddot{x} = F_e$, az aktuális erõtörvénnyel együtt vezet a mozgásegyenlethez. . Ez esetünkben a következõt eredményezi: $m\ddot{x} = -D\,x$. Az $\omega = \sqrt{D/m}.$ jelölés, némi átrendezéssel társulva a harmónikus rezgõmozgás differenciálegyenletét szolgáltatja

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (7)$$

Ez tehát a mozgásegyenlet a meghatározandó **x(t)** függvény számára:

Ennek az általános megoldása

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{8}$$

Ezt úgy kapjuk, hogy az $x = e^{\lambda t}$ alakú megoldást feltéve $x - et,\ valamint\ \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ −et (7) egyenletbe helyettesítjük. Ekkor a következõ karakterisztikus polinomot kapjuk: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. Ennek két megoldása $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ alapján az általános megoldás a független megoldások lineáris kombinációja $x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$. A ***C1***, ***C2*** konstansokat két másikkal váltjuk föl. A $C_1 = Ae^{i\varphi}/2$, illetve a $C_2 = Ae^{-i\varphi}$ konstans átírással a kapjuk az (8) alakot.

$$x(t) = A/2\,(e^{i(\omega t+\varphi)} + e^{-i(\omega t+\varphi)}) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A (8) által leírt mozgástípus nem csak harmónikus rezgõmozgást végzõ tömegpontra jellemzõ. Más tartalommal ugyan, de hasonló alakban jelenik meg a fizika más területein is, így a váltakozó áramoknál, hanghullámoknál stb.

Az ***x*** kitérés maximális értéke, az ***A*** amplitudó. A $\Phi = \omega t + \varphi$ mennyiséget a rezgés fázisának nevezzük. A fizikai mennyiség értékét (itt ez a kitérés, a sebesség, ..) a fázis aktuális értéke határozza meg.

Az (8) által leírt mozgás tipikusan ***periodikus mozgás,*** vagyis van olyan ***T*** u.n. periódusidõ, amelyre ***x(t) = x(t+T).*** A mozgás bármely ***T*** hosszúságú szakasza ugyanilyen idõtartamonként szabályosan ismétlõdik. A ***cos*** függvény 2π periódushossza alapján tehát ***T*** idõtartam alatt a fázis 2π −vel növekszik, vagyis $\omega T = 2\pi$, illetve $\omega = 2\pi/T$. Ha a mozgás egy periódusának hossza pl. ***T = 0.1 sec*** akkor ***1sec*** alatt 10 rezgési esemény játszódik le. Az $f = 1/T$ mennyiség tehát megadja az 1 sec alatt lejátszódó rezgések számát. Ezt frekvenciának nevezzük,

egysége ***1/sec*** vagy egy Hertz nevû fizikus után az ***1 Hz.*** Ennek 2π −vel szorzott változata a körfrekvencia $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ ennek egysége szintén ***1/sec*** azonban erre sohasem használjuk a ***Hz*** nevet. Könnyen belátható, hogy a körfrekvencia és a szögsebesség szoros rokonságban levõ fogalmak. Az ω mennyiséget mint jelölést vezettük be (7)−nél $\omega^2 = D/m$ alapján. ω szerepe alpján látjuk, hogy a rezgés frekvenciája a rezgõ redszertõl függ, nevezetesen attól, hogy milyen rúgóra milyen tömeget rakunk.

Mivel a második deriváltból következtetünk az eredeti függvényre, ez −még akkor is ha formálisan nem is jelenik meg az integrál jele− kétszeres idõszerinti integrált jelent az ennek megfelelõ kettõ darab integrációs állandóval együtt. Ezen állandókat a kezdeti feltételek rögzítik, illetve ezen konstansok teszik lehetõvé a megoldás tetszõleges kezedeti feltételhez való illesztését. A φ kezdõfázis, vagy más néven a fázisállandó az ***A*** amplitudóval egyetemben a kezdeti feltételekbõl határozható meg, vagyis abból, milyen kezdeti kitérésbõl, milyen kezdeti sebességgel indítottuk útjára a rezgõmozgást.

Az alkalmazott kezdeti feltételek: ***to = 0*** −ban adott a kitérés, és és a sebesség, tehát x_o, V_o . A ***A***−t és φ −t kell úgy megválasztanunk, hogy a megoldásfüggvény ezeket az értékeket is helyesen adja vissza. $x(0) = x_o = A\cos(\varphi)$, a sebesség kifejezése alapján $\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$ kapjuk a másik egyenlet $v_o = -A\omega\sin(\varphi)$. Ezekbõl kapjuk négyzetre emeléssel az amplitudót: $A = \sqrt{x_o^2 + (V_o/\omega)^2}$ A kezdõfázist (a fázisállandót) a $\cos(\varphi) = x_o/A$ és a $\sin(\varphi) = -V_o/(A\omega)$ függvényértékekbõl számíthatjuk ki.

Csillapított rezgõmozgás

A rúgóerõn túl a tömegpontra most a ***sebességével arányos***, azzal ellentétes irányú ***fékezõerõ*** is hat: $F_{cs} = -kV_x$. Ilyen tipusú erõ hat például viszkózus közegben mozgó, nem túl nagy sebességû testre. Az ezen erõ következtében fellépõ jelenséget általában csillapításnak nevezzük, s magát az erõt is alkalmanként csillapítóerõként

emlegetjük. Ennek az erõnek a teljesítménye negatív: $P = \vec{F}\vec{V} = -kV^2$, s ha a teljesítménytételre gondolunk, belátjuk, hogy ezen erõ a mozgási energiát csökkenti.

Az ismert koreográfiával jutunk a mozgásegyenlethez −Newton másodikba betöltjük az eredõ erõt−: $m\ddot{x} = -Dx - kV \quad / \equiv F_e /$. Az $\omega_o^2 = D/m$, és az újabb $2\beta = k/m$ jelölés bevezetésével, átrendezés után kapjuk a csillapított rezgõmozgás differenciálegyenletét.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

Az ránézésre világos, hogy fizikailag lényegesen különbözõ mozgástipust kapunk akkor, ha az $\omega_o^2 x$ képviselte rúgóerõ a meghatározó vagy pedig a $2\beta\dot{x}$ csillapítóerõ.

A megoldást itt is $x = e^{\lambda t}$ alakban keressük, s ha találtunk λ_1, λ_2 érékeket, amelyeknél a föltételezett függvényforma megoldása a differenciálegyenletnek, akkor a diffegyenlet általános megoldása $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$. Behelyettesítve ***x(t)*** megadott alakját, valamint deriváltjait a csillapított rezgõmozgás differenciál egyenletébe, a következõ karakterisztikus polinomot kapjuk: $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_o^2 = 0$. Ennek megoldása

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}$$

A diszkrimináns elõjelétõl függõen különbözõ megoldástípusokat kapunk.

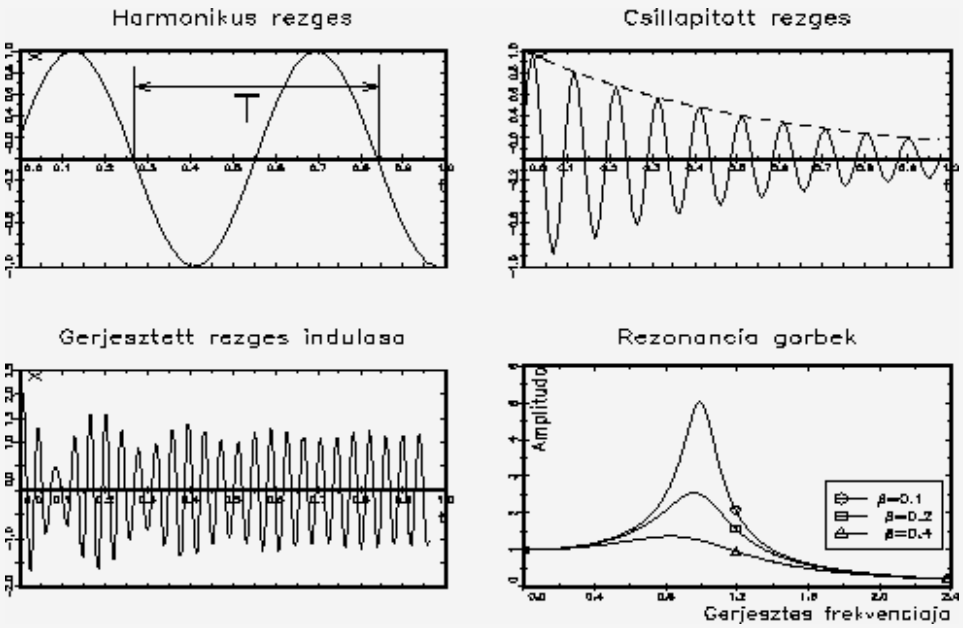
Ha $\beta^2 > \omega_o^2$, akkor a gyökjel alatt pozitív mennyiség áll. Ezt az esetet nevezzük ***erõs csillapítás***nak. Az általános megoldás alakja ekkor a következõ

$$x = e^{-\beta t}[C_1 e^{(\sqrt{\beta^2-\omega_o^2})t} + C_2 e^{(-\sqrt{\beta^2-\omega_o^2})t}]$$

Ebben a mozgásban már semmi rezgésszerû nincs, ***x*** végül exponenciálisan tart zérushoz.

Kritikus csillapításról beszélünk akkor, ha diszkrimináns zérus. Az általános megoldás alakja ekkor $x = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t}$. Célszerû ezen esetet csupán olyan határesetnek tekinteni, amely a két fizikailag megvalósítható esetet választja szét.

Figure: Csillapítatlan és gyengén csillapított rezgés látható a felsõ ábrasorban. Az alsó sor a gerjesztett rezgés indulását, valamint a különbözõ csillapításokhoz tartozó rezonanciagörbéket mutatja.



Gyenge csillapításról akkor beszélünk, ha $\omega_o^2 > \beta^2$, ekkor $i = \sqrt{-1}$ −et kiemelve a diszkriminánsból, kapjuk $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$. Itt az $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$ jelölést alkalmaztuk. A csillapítatlan rezgõmozgásnál alkalmazott eljárást követve kapjuk az általános megoldást: $x = A e^{-\beta t} cos(\omega t + \varphi)$. Kezdeti feltételek határozzák meg az amplitudót és a fázisállandót, a rezgõ rendszer paraméterei pedig a csillapítást $-\beta-$ és rezgés körfrekvenciáját. Vegyük észre, hogy a csillapított rezgõ rendszer ω körfrekvenciája

kisebb a csillapítatlan rendszer ω_o körfrekvenciájánál.

Gerjesztett rezgés, rezonancia

Gerjesztett rezgés (kényszerrezgés) akkor jön létre, ha a tömegpontra a rúgóerõn és a sebességgel arányos fékezõerõn túl, periódikus ***gerjesztõerõ*** is hat. A gerjesztõerõt tiszta cosinuszos (vagy szinuszos) alakúnak tesszük föl: $F_g = F_o \cos(\Omega t)$. Ilyen ``erõ" hat például egyszínû fénnyel megvilágított atomok elektronjaira, de kiegyensúlyoztlan forgó motoralkatrészek is ilyen típusú erõket keltenek. Az itt figyelmbe vett gerjesztõerõ egyetlen Ω körfrekvenciát tartalmaz, s ez látszólag indokolatlanul leszûkíti a figyelembe vehetõ gerjesztõerõ függvényalakokat. Tudjuk azonban a Fourier sörök elméletébõl, hogy tiszta sinuszos / cosinuszos függvényekbõl elég széles függvényosztály rakható össze. Így, ha ismerjük a tömegpont mozgását különbözõ gerjesztõ frekvenciák esetére, akkor ezen mozgások szuperpoziciójával bonyolultabb gerjesztõ függvényekhez is össze tudjuk rakni a tömegpont mozgását leíró függvényt. Ezt egyébként a (9) mozgásegyenlet linearitása teszi lehetõvé.

Az eredõ erõt leíró erõtörvény tehát:

$$F_e = -D\,x - k\,V + F_o \cos(\Omega\,t)$$

Az elõbbi erõ hatására létrejövõ mozgást kívánjuk meghatározni, vagyis keressük a tömegpont helyzetét leíró ***x(t)*** függvényt. Newton második törvénye alapján az ***x(t)*** függvényre vonatkozó mozgásegyenlet a következõ:

$$m\,\ddot{x} = -D\,x - k\,V + F_o \cos(\Omega\,t)$$

Az újabb: $f_o = F_o/m$, valamint a $k/m = 2\beta$ jelölést is alkalmazva kapjuk

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = f_o cos(\Omega t) \tag{9}$$

Most pedig fölsoroljuk ezen diffegyenlet minden címét, rangját és egyéb sallangjait. A számtanórán tanult elnevezési szabályok alapján õ egy közönséges (annyira azért nem, csupán egyváltozós), másodrendû, konstans együtthatójú, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet az ismeretlen ***x(t)*** mozgástörvény számára. Az inomogenitás az $f_o cos(\Omega t)$ −tól van. Ha ezt 0−val helyettesítjük, akkor a differenciálegyenlet homogén részét kapjuk.

Az inhomogén differenciálegyenletének $x_{ih.alt}$ általános megoldását. $x_{ih.alt} = x_{h.alt} + x_{ih.part}$ alakban keressük, ahol $x_{h.alt}$ a homogén egyenlet általános megoldása, $x_{ih.part}$ pedig az inhomogén egyenlet valamilyen partikuláris (speciális, nem általános) megoldása. A partikuláris megoldást ugyanolyan jellegû trigonometrikus alakban keressük, amilyen maga a gerjesztõerõ. $x_{ih.part} = A\,cos(\Omega t + \vartheta)$.

Föltesszük tehát, hogy a kialakuló gerjesztett rezgés, a gerjesztõerõtõl örökli a frekvenciáját. A homogén egyenlet általános megoldása $e^{-\beta t}$ függvény szerint tart nullához, így elegendõ idõ eltelte után csak az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása marad meg. A gerjesztett rezgés kezdeti, idõvel kihunyó része a ***tranziens jelenség***ek köréhez sorolható. Tranziens −átmeneti− jelenségek akkor játszódnak le, ha egy rendszer valamilyen paraméterét hirtelen megváltoztatjuk, bekapcsoljuk, valamilyen kezdeti feltétellel elindítjuk, stb. Ilyenkor a késõbb stacionáriussá váló (idõben állandósuló) megoldást, és a kezdeti érékeket, egy idõben lecsengõ − rendszerint exponenciálisan csökkenõ függvény − köti össze. Esetünkben ezt az $x_{h.alt}$ írja le. A homogén egyenlet általános megoldása az $x_{h.alt}$ tartalmazza azokat az integrációs állandókat, amelyekkel a megoldást tetszõleges kezdeti feltételekhez hozzá

tudjuk igazítani. A megoldásnak ez a része zérushoz tart, így a rendszer szép lassan elfelejti milyen kezdeti feltételekbõl indult is el.

A továbbiakban csak az állandósult megoldással foglalkozunk, s a rövidebb írásmód kedvéért az $x \equiv x_{ih.part}$ egyszerûbb jelölést alkalmazzuk.

Az $x = A\cos(\Omega t + \vartheta)$ alakú partikuláris megoldásra azt kell megállapítanunk, hogy milyen A és ϑ értékek esetén lesz a függvény megoldása az inhomogogén egyenletnek. Itt tehát A és ϑ nem a kezdeti feltételekbõl, hanem a differenciálegyenletbe való behelyettesítésbõl számítható. Behelyettesítéshez szükségünk van a derivált függvényekre, valamint az összegfüggvények kifejtésére.

$$\dot{x} = -A\,\Omega\sin(\Omega t + \vartheta) \qquad \ddot{x} = -A\,\Omega^2\cos(\Omega t + \vartheta)$$
$$\cos(\Omega t + \vartheta) = \cos(\Omega t)\cos(\vartheta) - \sin(\Omega t)\sin(\vartheta)$$

A ***sin*** függvény kifejtését az olvasóra bízzuk. Behelyettesítve ezeket az (9) egyenletbe baloldalon külön kigyûjtjük a $\cos(\Omega t)$ függvény együtthatóit valamint külön a $\sin(\Omega t)$ együtthatóit, s azt mondjuk: a jobb és baloldali trigonometrikus kifejezés tetszõleges idõpontra akkor lesz egyenlõ, ha megfelelõ trigonometrikus függvények együtthatói jobb és baloldalon megegyeznek. Ez a $\cos(\Omega t)$ valamint a $\sin(\Omega t)$ együtthatóira kirótt követelmény a következõkhöz vezet:

$$A\,(\omega_o^2 - \Omega^2)\cos(\vartheta) - 2\,A\,\beta\,\Omega\sin(\vartheta) = f_o$$
$$-A\,(\omega_o^2 - \Omega^2)\sin(\vartheta) - 2\,A\,\beta\,\Omega\cos(\vartheta) = 0$$

Négyzetre emelés és összeadás után az amplitudóra a következõ kifejezést kapjuk:

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\beta^2\,\Omega^2}}$$

Adott rezgõrendszer esetén (azaz f_o, ω_o, β rögzített értékek) az amplitudó függését a gerjesztõerõ (kör)frekvenciájától az () ábrán láthatjuk. Ezt az $A(\Omega)$ görbét ***rezonanciagörbé***nek nevezzük. Látható, hogy a csillapítás csökkentésével a rezonanciagörbe egyre élesebbé válik. A görbék maximuma a rezgõrendszer sajátfrekvenciája közelében van, vagyis egy rezgõ rendszer azon frekvenciájú gerjesztésbõl hajlandó sok energiát elnyelni, amellyel maga is képes rezegni. Ez a jelenség meglehetõsen általános a fizika számos területén, atom és magfizikától kezdve, a rozzant autóbuszok ablakainak berezgéséig, de rádiónkon a rádióállomások kiválasztása is a rezonancia jelenségén alapul.

Az egyenletekbõl a ϑ szög is meghatározható, de ezzel nem foglalkozunk részletesen. Ennek szokásos kifejezése:

$$tan(\vartheta) = \frac{-2\,\beta\,\Omega}{(\omega_o^2 - \Omega^2)}$$

Rezgések összegzése

Gyakran elõfordul, hogy egy tömegpont különbözõ hatások következtében egyidejûleg több rezgést is végez. A feladatunk az, hogy a rezgések szuperpoziciójából (összetevésébõl, egymásraültetésébõl) keletkezõ eredõ mozgás jellegzetességeit tisztázzuk. A rezgésösszegzések egyik alaptípusa az ***egyirányú rezgések összegzése***. Ekkor a tömegpont ugyanazon ***x*** tengely mentén egy $x_1(t)$ és egy $x_2(t)$ függvényekkel leirt harmónikus rezgõmozgást végez. Föltesszük (megköveteljük), hogy az eredõ mozgás pillanatnyi kitérése a két függvény által meghatározott pillanatnyi kitérés

összege legyen, vagyis $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Ez a kikötés nem magától értetõdõ dolog. Ha a rúgóhoz biggyesztett test egyik mozgásának amplitudója mondjuk 10 cm, s legyen a másik mozgásra is ugyanez, akkor lehet hogy az eredõ mozgáshoz tartozó maximális kitérésnél az a rúgó már nem egy rúgó. Lehet hogy kettõ −azaz eltörik −, de lehet, hogy a deformáció csupán túllépi azt a határt, amelynél még a lineáris erõtörvényt követi. Ekkor már nem egyszerû összegzéssel kapjuk az eredõ mozgást. Ez utóbbi beteges eseteket tehát kizárjuk.

Egyirányú, azonos frekvenciájú, különbözõ amplitudójú rezgések összegzése.

$$x_1(t) = A_1 cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x_1(t) = A_1 cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Az eredõ rezgést a következõ formában keressük: $x(t) = Acos(\omega t + \varphi).$

$$A\,cos(\omega t + \varphi) = A_1 cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 cos(\omega t + \varphi_2) \tag{10}$$

Föltesszük, hogy az eredõ mozgás örökli a (kör−)frekvenciáját az azonos frekvenciájú összetevõktõl. A mozgástörvény egyértelmû meghatározásához az ***A*** amplitudó, és fázisállandó értékei szükségesek.

Ismert a lenti trigonometriai nagy varázslat.

$$x_1(t) = A_1 cos(\omega t + \varphi_1) = A_1 cos(\omega t)\, cos(\varphi_1) - A_1 sin(\omega t)\, sin(\varphi_1) \tag{11}$$

Ennek megfelelõen kifejtjük (10) mindkét oldalát: baloldalon az eredõ rezgés,

jobboldalon a két összetevõ függvényeit. Egyenletünk mindkét oldalán megjelenõ trigonometrikus kifejezések tetszõleges idõpontra akkor lesznek egyenlõek, ha a megfelelõ idõfüggõ trigonometrikus függvények együtthatói jobb és baloldalon egyenlõek. A $\cos(\omega t))$ függvények együtthatóinak egyenlõsége a következõkhöz vezet:

$$A\cos(\varphi) = A_1\cos(\varphi_1) + A_2\cos(\varphi_2)$$

A sin függvény együtthatóinak egyenlõsége szolgáltatja a következõ egyenletet:

$$A\sin(\varphi) = A_1\sin(\varphi_1) + A_2\sin(\varphi_2)$$

A két egyenlet négyztreemelés utáni összeaadásával −alkalmazva néhány együgyû trigonometria azonosságot − kapjuk az eredõ rezgés amplitudóját:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A1\,A2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (12)$$

Rögtön látható, hogy az azonos fázisú összegzés az amplitudók összeadásához vezet, ellentétes fázisú ($\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$) szuperpozició pedig az amplitudók különbségéhez ($A = |A_1 - A_2|$). Egyenlõ amplitudók, −ez utóbbi esetben− az eredõ rezgés amplitudójául 0−t eredményeznek, Összefoglalva: egyenlõ frekvenciájú azonos fázisú rezgések erõsítik egymást, az ellentétes fázisúak gyengítik, s ezen belül az egyenlõ amplitudójúak kioltják egymást. Az itt elkövetett meggondolások a hullámok interferenciajelenségeinél is majdnem egy az egyben alkalmazhatóak.

Az ***A*** amplitudó ismeretében az eredõ rezgés fázisának sinusa és cosinusa kiszámítható, így magát a fázisszöget is meg tudjuk adni.

Egyirányú, különbözõ frekvenciájú, egyenlõ amplitudójú rezgések összegzése.

Egyirányú, egyenlõ amplitudójú rezgések szuperpozicióját vizsgáljuk. Az amplitudók egyenlõségét ugyan nem kellene elõírnunk, de ha tisztán a frekvenciák különbözõségének következményeit kívánjuk tisztázni, akkor más paramétereket azonos értékeken célszerû tartani.

Itt is megköveteljük, hogy az eredõ mozgás pillanatnyi kitérése a két rezgés pillanatnyi kitérésének összege legyen.

$$x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad x_1(t) = A\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Vagyis az eredõ kitérés pillanatnyi értéke: $x(t) = A\left[\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right]$. Erre az eredõ kitérésre szeretnénk valamilyen könnyebben értelmezhetõ, zártabb formulát találni.

Némely trigonometriai fekvõtámaszok a következõkhöz vezetnek:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \hline \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) &= 2\cos(\alpha)\cos(\beta) \end{aligned}$$

A fenti két sor összeadásával kapjuk az utolsó sort. Itt már sejlik valamilyen rokonság az eredõ kitéréssel. Ez utóbbi egyenlõséget szorozzuk majd az ***A*** amplitudóval, elõbb

azonban a következõ azonosításokat, vagy ha úgy tetszik, jelöléseket vezetjük be:

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= \omega_1 t+\varphi_1 \\ \underline{\alpha-\beta &= \omega_2 t+\varphi_2} \\ \alpha &= (\omega_2+\omega_1)/2\,t+(\varphi_2+\varphi_1)/2 \\ \beta &= (\omega_2-\omega_1)/2\,t+(\varphi_2-\varphi_1)/2 \end{aligned}$$

Az elsõ két sor összeadásával/kivonásával kapjuk az utóbbi két sort. Ezeket a trigonometriai varázslat végeredményébe behelyettesítve kapjuk az eredõ kitérés új formáját:

$$x(t) = \underbrace{2\,A\cos[(\omega_2-\omega_1)/2\,t+(\varphi_2-\varphi_1)/2]}\,\overbrace{\cos[(\omega_2+\omega_1)/2\,t+(\varphi_2+\varphi_1)/2]}$$

Érdekes speciális esetet adódik akkor, ha a két frekvencia közel esik egymáshoz.

Ekkor, egy idõben lassan változó amplitudójú rezgést kapunk. Ezen amplitudóváltozás körfrekvenciája $(\omega_2-\omega_1)/2$. E lassan változó amplitudó (elsõ−alsó kapcsos zárójel) van modulálva a nagy(obb) $(\omega_2+\omega_1)/2$ frekvenciával. Az amplitudó tehát a különbségi frekvenciának megfelelõ frekvenciával 0−vá válik, illetve az amplitudók összegének megfelelõ maximumot veszi fel. A jelenséget lebegésnek nevezzük.

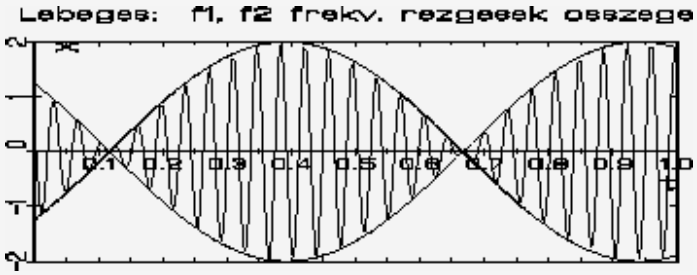
Ha két hangszer kissé el van hangolva, akkor a hallható lebegés alapján összhangolhatjuk õket. A jelenség rádiótechnikában is széleskörûen alkalmazott, pl. mûsorszóró mûholdak nagyfrekvenciás jeléhez hozzákevernek egy adott frekvenciájú jelet, s a kapott kisebb frekvenciájú jel az amit a 'beltéri egység' már kezelni tud.

Egyes televízióadók adásuk megkezdése elõtt tartósan 1000 Hz−es füttyöt eregetnek ki. Ha a készülékhez közel mi is fütyölni kezdünk, némileg elhangolva fütttyünk frekvenciáját, akkor a különbségi frekvenciának megfelelõ, szaporább, vagy lassabb pergést hallunk. Egyébként nagylelkûen bocsássuk meg környezetünknek, ha a

televízióval való duett−fütyülés miatt hülyének néznek minket.

Ha az amplitudók nem egyenlõek, $(A_1 \neq A_2)$ akkor a darázsderék nem fûzõdik be teljesen. Az amplitudó alkalmilag sem válik nullává, hanem a minimális $|A_1 - A_2|$ és a maximális $A_1 + A_2$ között változik. Minimális kézügyességgel igazolható, hogy az amplitudó idõfüggését megkaphatjuk (12) alkalmazásával, amennyiben az ott szereplõ $\varphi_2 - \varphi_1$ helyébe $(\omega_2 - \omega_1)\,t + (\varphi_2 - \varphi_1)$ írunk.

Figure: Két közel egyenlõ frekvenciájú rezgés összegzése esetén megjelenõ lebegés.



Egymásra merõleges rezgések összegzése.

Azt vizsgáljuk, hogy két, egymásra merõleges, azonos frekvenciájú rezgés eredõjeként milyen mozgás jön létre. Az eredeti, egymásra merõleges rezgések a következõk:

$$x(t) = A\cos(\omega t) \qquad y(t) = B\cos(\omega t + \varphi) \qquad \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

Az rögtön nyilvánvaló, hogy a tömegpont a két rezgésösszetevõ frekvenciájától függetlenül az $-A \leq x \leq A,\ -B \leq y \leq B$ téglalapban éli le életét.

Lemondva az idõbeli leírásról, csupán a pálya alakját kívánjuk meghatározni. Az eredõ mozgás pályájának meghatározásához ***y/B*** szétcincált formájába behelyettesítjük ***x/A*** −t.

$$y/B = cos(\omega t)cos(\varphi) - sin(\omega t)sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad y/B = x/A\,cos(\varphi) - \sqrt{1-(x/A)^2}\,sin(\varphi)$$

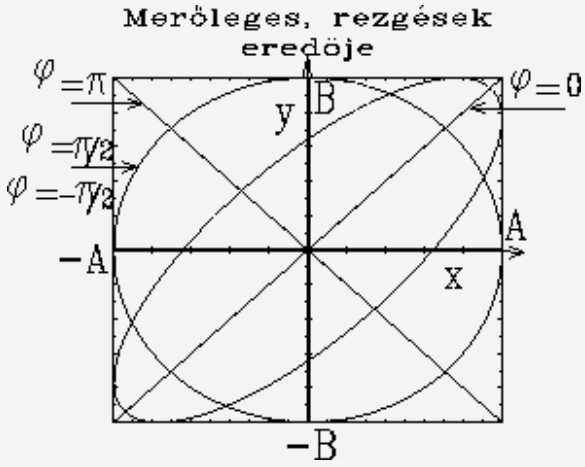
Az utóbbi formula átrendezése és négyzetre emelése után jutunk a következõ alakhoz:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}cos(\varphi) = sin^2(\varphi) \tag{13}$$

Kihasználtuk a Pithagorasz tételbõl adódó $1 = sin^2(\varphi) + cos^2(\varphi)$ összefüggést.

(13) egy origó 'középpontú' ellipszist ír le. A két rezgés közötti φ fáziskülönbség különbözõ értékei az eredõ mozgás speciális pályaalakjaihoz vezetnek.

Figure: Azonos frekvenciájú, merõleges rezgések összegzésének speciális esetei.



$\varphi = 0$ azonos fázis esetén az eredõ rezgés pályája egyenes szakasz:

$$\left(\frac{x}{A}-\frac{y}{B}\right)^2=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{B}{A}x$$

Ugyancsak egyenes szakaszt kapunk az eredõ rezgés pályájául a $\varphi=\pi$, ellentétes fázisú szuperpozició esetén. E két egyenes a meredekség elõjelében különbözik:

$$\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}\right)^2=0 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{B}{A}x$$

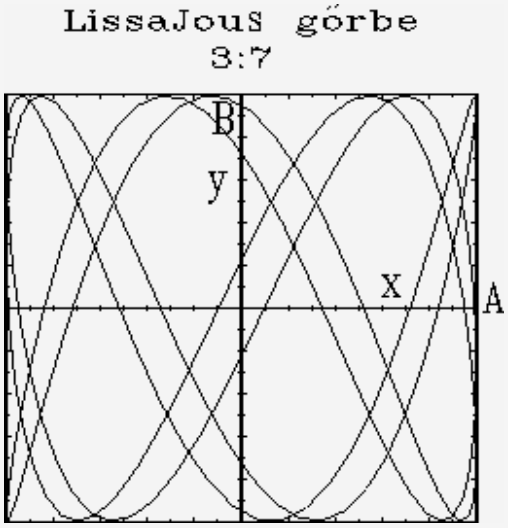
A $\varphi=\pi/2$ és a $\varphi=-\pi/2 \ \ (vagy\, 3\pi/2)$ fázisszögek ugyanazon ellipszispályához vezetnek, különbség az ellentétes körüljárási irányban adódik.

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

E fázisszögek egyenlõ amplitudók esetén körpályát eredményeznek. Ha tehát két azonos frekveciájú, egyenlõ amplitudójú egymásra merõleges rezgést, $\varphi=\pi/2$ vagy $\varphi=-\pi/2$ fáziskülönbséggel összegzünk, eredõ mozgásként egyenletes körmozgást kapunk.

A rezgések szuperpoziciójával kapcsolatos jelenségek a fizika más területein is jelentkeznek, például ez utóbbi merõleges rezgésösszetevés speciális eseteinek megfelelõen beszélünk lineárisan poláros, elliptikusan és cirkulárisan poláros fényrõl.

Ha a merõlegesen szuperponált rezgések frekvenciái nem egyenlõek, akkor a kialakuló eredõ mozgás pályái igen czifrák lehetnek. Ha az x és y irányú rezgések frekvenciái racionális arányúak, akkor a pályák zárt görbék. Ezen görbék egyébként az un. Lissajous görbék. Irracionális frekvenciarány esetén a pályagörbe a teljes téglalapot ``lefedi", olyan értelemben, hogy a mozgó tömegpont, a mozgása során a téglalap bármely pontjához tetszõlegesen közel kerül.



Pontrendszerek dinamikájának elemei

Pontrendszernek nevezzük az egymással és környezetükkel kölcsönhatásban levõ pontok halmazát. Önkényesen választhatjuk meg, hogy az adott probléma során mely pontokat soroljuk a pontrendszerhez tartozóknak, és mely pontokat a környezethez.

A pontrendszerek leírásánál egy tudatosan elnagyolt írásmód jelenik meg. A tömegpontok mozgásának részletei helyett, − a tömegközéppont fogalmának bevezetésével − megjelenik egy, az egész rendszert globálisan jellemzõ fogalom. Ez a globális jellemzés a termodinamikában és a statisztikus mechanikában általános.

Az n elemböl álló ***pontrendszer tömegközéppontj***ába, vagy súlypontjába mutató helyvektort a következõképpen definiáljuk:

$$\vec{r_s}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i * \vec{r_i}(t)}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (14)$$

ahol a pontrendszer ***i***−edik elemének tömege m_i, helyvektora $\vec{r}_i$. Hogy az olvasóban némileg rögzüljön, itt is megemlítjük, hogy a fenti vektor egyenlõség, három skaláris −az egyes koorinátákra vonatkozó− egyenlõségre szedhetõ szét. Ezek egyikét írjuk csupán fel, a tömegközéppont ***x*** koorinátáját:

$$x_s(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i * x_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Vegyük észre, hogy ez a tömegpontok ***x*** koordinátáinak súlyozott átlaga, vagyis a nagyobb tömegû tömegpont ***x*** koordinátája tömegével arányosan nagyobb mértékben járul az átlagérték kialakításához.

Habár a sûrûség (20) definíciója csak késõbb következik, megadjuk a tömegközéppont definícióját nem diszkrét (hanem folytonos) tömegeloszlású testekre is:

$$\vec{r}_s(t) = \frac{\int_V \rho(\vec{r})\,\vec{r}\,dV}{\int_V \rho(\vec{r})\,dV}$$

A pontrendszer össztömegére az $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ jelölést alkalmazva, az idõszerinti második derivált a következõkhöz vezet:

$$M\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} m_i * \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \qquad (15)$$

Az ***i***−edik tömegpontra ható erõ származik egyrészt a pontrendszer környezetétõl, ezt külsõ erõnek nevezzük: $\vec{F}_i^{(k)}$, valamint erõt fejthet ki a kiszemelt tömegpontra a pontrendszer összes többi eleme is, így az eredõ a következõképpen írható:

$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{i,k}$. Föltesszük, hogy a tömegpont nem fejt ki erõt önmagára, vagyis $\vec{F}_{i,i} = \vec{0}$. Ezen eredõvel az i−edik tömegpont mozgásegyenlete a következõ:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{i,k}$$

Összegezve az összes elemre az egyedi mozgásegyenleteket a következõkhöz jutunk:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{i,k}$$

Az utóbbi kettõs összegzésben minden erõnek megtalálható a megfelelõ párja, mint például $\cdots + \vec{F}_{3,5} + \cdots + \vec{F}_{5,3} + \cdots$ s ezek Newton III. szerint egyenlõ nagyságúak, de ellentétes elõjelûek ($\vec{F}_{3,5} = -\vec{F}_{5,3}$). A kettõs összeg tehát ***0***−t eredményez. (15) egyenlet és ezen utóbbi egyenlet maradványainak összerakásából kapjuk:

$$M \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(k)}$$

Pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a pontrendszer össztömegét ebbe a (képzeletbeli) pontba koncentráltuk volna, s a külsõ erõk összege erre a pontra hatna. Igen lényeges az a tény, hogy az állításból, a pontrendszerre igencsak jellemzõ belsõ kölcsönhatások illetve az azokat jellemzõ erõk teljesen kimaradtak. Ez azt jelenti, hogy az összegzés során a belsõ erõk eltûnnek, így ***a pontrendszer tömegközéppontjának mozgását a belsõ erõk nem befolyásolják.***

A tömegközéppont mozgására vonatkozó törvénynek ez az oldala talán fontosabb, mint az eredeti −a külsõ erõk összegével kapcsolatos − állítás. Olyan esetekben, amikor csak belsõ erõk hatnak a pontrendszer összimpulzusa (lendülete) nem változik. Tipikusan

ilyen események az ütközések.

A termodinamika irányába mutat a pontrendszerek mozgási energiájára vonatkozó következõ állítás: a pontrendszer W_m összes mozgási energiája, a pontrendszer tömegközéppontja mozgásához kapcsolódó W_s, és a részecskék tömegközépponthoz viszonyított sebessége kapcsán megjelenõ W^* mozgási energiák összegeként adható meg. Itt a mechanikában e a két mozgási energiát egyformán mechanikai energiának mondjuk, de a termodinamika kinetikus gázelmélet felõli megközelítésénél az utóbbi energiát már a gáz belsõ energiájának fogjuk nevezni, amely a gáz hõmérsékletével arányos.

Az i−edik tömegpont helyvektorát a tömegközéppont $\vec{r}_s$ helyvektora, és a tömegpont, tömegközépponthoz viszonyított helyzetét jellemzõ $\vec{r}_i^*$ vektor összegével adjuk meg $\vec{r}_i = \vec{r}_s + \vec{r}_i^*$. Ekkor fönnáll a következõ összefüggés:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{r}_s + \vec{r}_i^*) = M \vec{r}_s + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^* = M \vec{r}_s$$

Ugyanis a tömegközéppont (14) definiciója alapján $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_s$. így a fenti egyenlõség alapján $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^* = 0$. Ez ugyan nem nagy varázslat, hiszen eddig csak azt kaptuk meg, hogy ha a tömegközéppontot választjuk alkalmi koorinátarendszerünk kezdõpontjának, akkor ebben a rendszerben a tömegközéppont az origóba esik (!). Ezt az összefüggést alábbiakban használjuk majd föl.

Pontrendszer összes mozgási energiája, a pontrendszert alkotó tömegpontok mozgási enrgiáinak összegeként áll elõ:

$$W_{(m)} = \sum_{i=1}^{n} 1/2\, m_i (\vec{v}_s + \vec{v}_i^*)^2 = 1/2 * (\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_s^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i^{*2} + \sum_{i=1}^{n} 2\, m_i \vec{v}_s \vec{v}_i^*) \qquad (16)$$

Az utolsó kifejezés $\sum_{i=1}^{n} 2 m_i \vec{v}_s \vec{v}_i = 2\vec{v}_s \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i^* = 0$ mivel a korábbi levezetés alpján $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^* = 0$, így ennek deriváltja is 0. A pontrendszer globális mozgásához kapcsolódó mozgási energia kifejezhetõ mint $W_s = 1/2\, M \vec{v}_s^2$. A tömegpontok tömegközépponthoz viszonyított mozgása a következõ energiakifejezést szolgáltatja $W^* = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i^{*2}$. E jelölésekkel (16) röviden a következõt jelenti $W_{(m)} = W_s + W^*$ amit egyébként igazolni akartunk. Szétválik tehát a pontrendszer globális mozgásához kapcsolódó energia, és a pontrendszer belsõ (un. rendezetlen) mozgás energiája. Ha tehát egy gázpalackkal a hónunk alatt elkezdünk szaladni ettõl a benne levõ gáz nem lesz melegebb.

Subsections

- Ütközések
- A rakéta

Ütközések

Láttuk azt, hogy ha pontrendszerben csak belsõ erõk hatnak, a pontrendszer összimpulzusa (lendülete) nem változik.

Két golyó (gömb) ütközését vizsgáljuk. Az egyszerûbb tárgyalásmód kedvéért mozogjon a két golyó tömegközéppontja egy egyenes mentén, vagyis a golyók sebességevektora ütközés elõtt is és után is illeszkedjen erre az egyenesre. Ezt az ütközéstipust centrális, egyenes ütközésnek nevezzük. Az ütközés során csak az ütközõ

testek hatnak egymásra, vagyis csak belsõ erõk hatnak, a pontrendszer összimpulzusa tehát nem változik, vagyis :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Itt v_1', v_2' −vel jelöljük az ***1***−es illetve a ***2***−es testek ütközés utáni sebességét.

Tökéletesen ***rugalmatlan***nak nevezzük az ***ütközés***t akkor, ha a két test az ütközést követõen mint egyetlen új test mozog a kialakult közös v sebességgel. Az ütközés elõtti, és a az ütközést utáni összimpulzus egyenlõsége ekkor így írható: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$. Az ütközés utáni sebesség ennek alapján:

$$v = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2)$$

Az ütközés során a mozgási energia megváltozik (lecsökken), egyszerûen megmutatható, hogy az energicsökkenés $(v_1 - v_2)^2$ −el (a relatív /azaz az egymáshoz viszonyított/ sebesség négyzetével) arányos.

Az ütközést tökéletesen rugalmasnak nevezzük, ha az impulzus megmaradásán túl a mozgási energia is megmarad az ütközés során. A valóságos ütközések e két szélsõ ütközésforma (tökéletesen rugalmas, illetve tökéletesen rugalmatlan) közé esnek.

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ 1/2\, m_1 v_1^2 + 1/2\, m_2 v_2^2 &= 1/2\, m_1 v_1'^2 + 1/2\, m_2 v_2'^2 \end{aligned} \qquad (17)$$

Mindkét egyenletet ugyanolyan módon rendezzük át, a különbözõ testekre vonatkozó adatok az egyenletek különbözõ oldalaira kerülnek.

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$$
$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

Ez utóbbi nevezetes szorzatot szétbontva, majd az elsõ egyenlettel osztva a következõket kapjuk

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

Ebbõl már kifacsarhatunk némi fizikát is, ugyanis egy átrendezés a következõt állítja: $v_2' - v_1' = v_1 - v_2$, azaz a rugalmasan (centrális, egyenes ütközésben) ütközõ testek sebességkülönbsége az ütközés során (csupán) elõjelet vált. Ha a két test tökéletesen rugalmatlanul ütközik, akkor a két test sebességkülönbsége nullává válik. Az ütközések rugalmas / rugalmatlan voltát egy dimeziótlan $\eta = (v_2' - v_1')/(v_1 - v_2)$ paraméterrel jellemezhetjük. Ennek értéke tökéletesen rugalmas ütközésnél 1 rugalmatlan ütközésnél 0, acélgolyók ütközésére kb. 0.6, elefántcsont golyókra kb. 0.9.

Visszatérünk a tökéletesen rugalmas ütközésekhez. A kapott $v_2' = v_1' + v_1 - v_2$ −t (17) elsõ sorába helyettesítve kapjuk: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2\,v_1' + m_2v_1 - m_2v_2$. Ez utóbbi egyenletet v_1' −re átrendezve kapjuk tehát az 1−es test ütközés utáni sebességét:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \qquad (18)$$

A 2−es test ütközés utáni sebességének számításához egyszerûen a fenti összefüggésben szereplõ 1−es és 2−es számokat cseréljük fel.

(18) lehetõvé teszi néhány fizikailag érdekes eset vizsgálatát.

− azonos tömegü golyók centrális, egyenes ütközése során a két test sebessége

kicserélõdik. Egyszerû behelyettesítéssel adódik az $m_1 = m_2$ esetre a $v_1' = v_2$ eredmény.

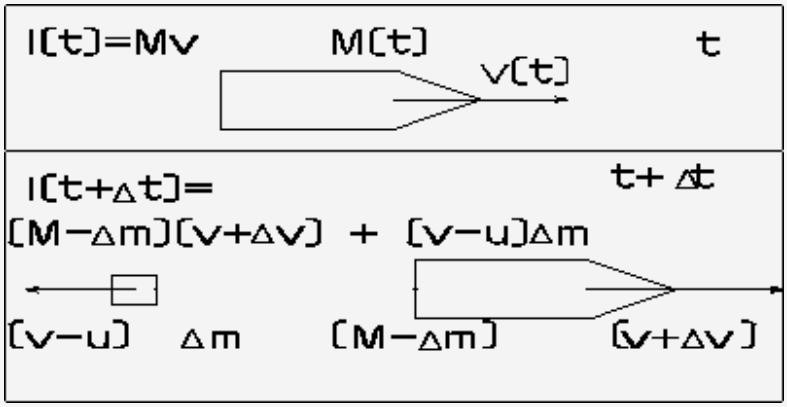
− betonfalnak ütközõ ping−pong labda ugyanolyan sebességgel pattan vissza. Föltesszük, hogy a betonfal tömege m_2 sokkal nagyobb a labda tömegénél, vagyis ahol ***m1*** szerepel ***m2*** mellett pl. ***m1+m2*** formában, ott ***m1*** elhagyható: $m_1 + m_2 \cong m_2$. A betonfal sebessége ***v2=0***. A pp. labda ütközés utáni sebessége ezek alapján:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \cong \frac{-m_2}{m_2} v_1 = -v_1$$

Tartályba zárt gázok nyomást fejtenek ki tartály falára. A gázt alkotó molekulák impulzusának falra merõleges összetevõje a fallal való ütközés során a fentiek szerint tehát megváltozik $\Delta I = mv_\perp - (-mv_\perp) = 2 * mv_\perp$. Ez az impulzusváltozás Newton II. törvénye alapján azt jelenti, hogy a fal erõt fejtett ki az ütközõ molekulára, miközben Newton III. szerint a molekula is erõt gyakorolt az edény falára. Ez a nagyszámú ütközés során fellépõ felületen elosztott erõ jelenik meg nyomás formájában gázoknál.

A rakéta

Figure: Impulzusváltozások rakéta hajtásnál.



Ha elsütünk egy kezdetben nyugalomban levõ ***M*** tömegû puskát, amelybõl egy ***m*** tömegû lövedék repül ki, akkor a puska a kilõtt lövedékkel ellentétes irányú ***U*** sebességre tesz szert. Mivel a golyó − puska elemekbõl álló pontrendszer kezdetben nyugalomban, volt s az elsütés során csak belsõ erõ hatott, a rendszer összimpulzusa (lendülete) lövést követõen is nulla marad:

$$0 = m\vec{v} + M\vec{U} \qquad \vec{U} = -m/M\,\vec{v}$$

Ezt a ``visszalökést'' számos jelenségben megfigyelhetjük, pl. γ sugárzás kibocsátásakor az atommag visszalökõdik, így a γ sugár által elvitt energia kisebb, mint a bomlás energiája, de ugyanezen alapul a rakéta hajtás elve is. A visszalökött ***M*** tömegû test sebessége, és az általa elvitt mozgási energia $1/2\,MU^2 = 1/2\,(mv)^2/M$ láthatóan fordítottan arányos a visszlökött test tömegével.

Modellünkben a rakéta −a magával vitt üzemanyag és oxidálószer elégetésével− idõegységenként $dm/dt = \mu$ (kg/s) tömeget lövell ki a rakétatesthez viszonyított állandó ***u*** sebességgel. A rakéta sebessége, de a rakétatömeg is idõben változik $M(t) = M_o - \mu\,t$. Egyenes mentén tötrénõ (tehát 1 dimenziós) mozgást vizsgálunk. Ha a rakétára ***F*** külsõ erõ hat, akkor a pontrendszer összimpulzusára Newton II.−t alkalmzva írhtajuk: $dI/dt = F$. Ennek kissé laza erkölcsû változata könnyebben kezelhetõ:

$$I(t+\Delta t) - I(t) = F\Delta t \tag{19}$$

Az (11) ábráról leolvashatjuk a Δt idõtartam alatt bekövetkezõ (lendület) impulzusváltozást.

$$I(t+\Delta t) - I(t) = (M-\Delta m)(v+\Delta v) + \Delta m\,(v-u) - M\,v = M\,\Delta v - \Delta m\,u$$

A szorzatok kifejtése meglehetõsen terjedelmes listához vezet, azonban a számolás egyszerû végeredménye azt mutatja, hogy menet közben számosan eltûntek. Itt minden eltûnt áldozatnak megvolt a maga negatív párja, így együttes elhalálozásuk indokolt. Amint azt az olvasó is bizonyára észlelte, egy tagot látszólag csupán magánszorgalomból tüntettünk el. Ez a tag a $-\Delta m\,\Delta v$. Vegyük észre, hogy amíg a túlélõ tagok un. elsõ rendben picinyek (egy Δ), addig ez utóbbi, mivel két piciny szorzatából áll, az un. másodrendben kicsiny mennyiségek köréhez tartozik, azaz, ha Δt−vel nullához tartunk, akkor a másodrendben kicsiny tagok sokkal rohamosabban tartanak nullához mint az elsõ rendben picinyek, így tehát elhagyásuk indokolt. A maradványokat (19)−be berakva a következõkhöz jutunk:

$$M\,\Delta v - \Delta m\,u = F\Delta t$$

Ha a rakéta a Föld nehézségi erõterében mozog, és a koordináta tengelyünket fölfelé irányítjuk (azaz $\boldsymbol{F=-Mg}$), akkor a következõ differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{dv}{dt} = u\frac{dm/dt}{M} - g$$

Menet közben elõször osztottunk $M\,\Delta t$−vel, majd ráolvastuk a számtanórán tanult igét:

$\lim_{\Delta t \to 0}$. Kiolvashatjuk az ***M*** tömegû test ``lebegtetésének'' (***dv/dt=0***) feltételét:

$M\,g = \mu\,u$. Még egy módosítást kell elkövetnünk, nevezetesen a rakéta által kiszórt tömeg a rakéta tömegcsökkenését jelenti, vagyis $\Delta m = -\Delta M$.

$$\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM/dt}{M} - g$$

A differenciálegyenlet közvetlen integrálása elõtt a kezdeti feltételeket is meg kell adnunk. A ***t=0*** idõpontban legyen a sebesség nulla, a rakéta kezdeti tömege pedig ***Mo.*** Mindkét oldalra alkalmazzuk az idõszerinti integrálást, −itt és most formailag mint határozott integrált ***t=0*** és ***t=t'*** határok között. Eredményünket a felsõ határ függvényeként kapjuk. Különösebb indoklást az nem igényel, hogy az $\dot{x}/x$ tipusú integrandus idõintegrálja ***ln*** függvényt eredményez. Ez utóbbinál fölcseréljük az alsó és az $M(t) = M_o - \mu t$ felsõ határokat, s ez elõjel váltáshoz vezet az ***ln*** függvénynél.

Elhagyva a ' jelet ***t***−rõl, a rakéta sebességét leíró függvényként a következõ adódik:

$$v(t) = u\,ln\left(\frac{M_o}{M_o - \mu t}\right) - g\,t$$

A fenti un. Ciolkovszkij egyenlet szerint a rakéta végsebességét az ***u*** kiáramlási sebesség, valamint a rakéta kezdõ tömegének és kiégés utáni végtömegének aránya határozza meg. A ***dx/dt=v(t)*** függvény integrálásával kaphatjuk rakéta pozicióját megadó ***x(t)*** függvényt, ezzel azonban itt nem foglalkozunk. Érdemes megjegyeznünk azt a tényt, hogy a rakétahajtás az egyedüli olyan ``hajtás'' amelynek nincs szüksége más közeg ``közremûködésére''. Néhány vízi állat is fölfedezte ezt a helyváltoztatási módot, de még az elszabadult locsolótömlõ tekergésének is ez az un. reaktiv erõ az oka.

Kontinuummechanikai alapok

Kontinuumok ***folytonosan*** töltik ki az elfoglalt teret. Gázok a teljes rendelekezésre álló teret kitöltik, így amikor gáztérfogatról beszélünk, igazából a tartóedény térfogatára gondolunk. Kontinuumok ezen modellje nem vesz tudomást az anyag atomos, molekuláris szerkezetérõl. A folytonos térkitöltésre alapozott egyenletek alkalmazhatósága korlátozott, vagyis olyan mérettartományokra, amelyeknél elõbukik az anyag szemcsés szerkezete, már más írásmódot kell választanunk.

Kontinuumok mozgásának leírására alkalmazott forma nem egyenességi folytatása a tömegpontnál megalapozott kinematikának. A pontmechanikai szemlélet azt sugallja, hogy a kontinuum ΔV térfogatelemeit mintegy tömegpontként kezelve, ezek mozgását kövessük. Ehelyett a kontinuum által kitöltött térrészben minden ponthoz megadjuk az ott tartózkodó (áthaladó) anyag eredeti helyétõl mért kitérését (deformációtér), vagy sebességét (sebességtér). Vizsgálataink középpontjában ezen vektorterek állanak, pl. folyadékok, gázok (közös néven, fluidumok) esetén tehát a $\vec{v}(\vec{r}, t)$, a kontinuum helytõl és idõtõl függõ sebességtere áll. Mindazok a fogalmak, szemléltetések, osztályozási szempontok, amelyek a már tárgyalt vektortereknél, erõtereknél (van aki mezõnek szereti) megjelentek, importálhatók −alkalmanként jelentõs tartalom módosítással− az itt használatos sebességterekre is.

A ρ ***sûrûség*** a térfogategységbe foglalt tömeg mennyiségét jellemzi. Formai definiciója a következõ:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{20}$$

A matematikában szokásos $\Delta V \to 0$ határátmenet itt nem alkalmazható az anyagok atomos szerkezete miatt. Csak olyan kicsiny ΔV térfogatelemig mehetünk le, amelyben elegendõen sok anyag van még ahhoz, hogy a térfogatelem kicsiny

megváltozása esetén a bennfoglalt tömeg is csak kicsit változzék meg. E megszorítás az összefüggések alkalmazhatóságára nyilvánvaló méretkorlátot jelent.

A sûrûség definíciója alapján egy ***V*** térfogatba foglalt ***m*** tömeg a sûrûségfüggvény térfogati integráljaként számítható:

$$m = \int_V \rho(\vec{r})\, dV$$

Általános esetben a sûrûség a hely és idõfüggõ, azaz $\rho = \rho(\vec{r}, t)$. Homogén közegben a fenti összefüggések népiesh változatait kapjuk: $\rho = m/V,\ \ m = \rho * V$

Illik tudni néhány alapvetõ anyag sûrûségét:

a levegõ sûrûsége normál állapotban ($0\,C^o$, 101325 Pa) 1.293 kg/m^3

víz ($0\,C^o$) 1000 kg/m^3, jég ($0\,C^o$) 920 kg/m^3

Subsections

- Extenzív mennyiségek mérlegegyenlete.
- Megmaradó mennyiségek
- Ideális folyadékok áramlása
  - Hidrosztatika
- Monokromatikus síkhullám homogén izotróp közegben.
  - Linearizált egyenletek, a hullámegyenlet.

Extenzív mennyiségek mérlegegyenlete.

Extenzív mennyiségeknek nevezzük azon fizikai mennyiségeket amelyek két fizikai rendszer egyesítésekor összeadódnak, vagyis az új rendszerre jellemzõ értékük az eredeti rendszerekre jellemzõ mennyiségek összegeként áll elõ.Ha két szobát összenyitva kapunk egy új ``fizikai rendszert", akkor az új rendszerre jellemzõ tömeg, atomok − molekulák száma, energia, térfogat, stb az eredeti rendszerekre jellemzõ értékek összege lesz. Ezek tehát extenzív mennyiségek. Vektoriális extenziv mennyiségek esetén −ilyen például az impulzus (lendület)− az összegzés koordinátánként értendõ. A következõ laza megfogalmazás rávilágít az elnevezés eredetére : az extenzív mennyiségek a fizikai rendszer kiterjedésével (extenzitásával), azaz térfogatával arányosak.

Lényegesen eltérõ viselkedést mutatnak azonban a következõ un. *intenziv* mennyiségek: nyomás, hõmérséklet, atomok koncentrációja, sûrûség. Ezek értéke az új, egyesített rendszerre nem adható meg az eredeti részrendszerekre jellemzõ értékek összegeként, ezek természetével a termodinamikában foglalkozunk.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogyan és mennyivel változik egy merev, zárt felülettel határolt térfogatban valamely extenziv mennyiség értéke. Az errõl számotadó egyenlettípust mérlegegyenletnek nevezzük. Vizsgálata azért fontos, mert egyetlen csokorba fogja a fizika különbözõ területein megjelenõ igen fontos, azonos tipusú egyenleteket. Néhányat megemlítünk ezek közül:

−a tömegmegmaradást, töltésmegmaradást kifejezezõ u.n. kontinúitási egyenletek.

−az elektromágneses tér energia−mérlegegyenlete,

−folyadékok, gázok áramlását leíró Euler valamint a Navier−Stokes egyenlete (impulzus mérlegegyenletek).

−kvantummechanikai kontinuitási egyenlet, stb.

A mérlegegyenletekbe foglalt állítás nagyon egyszerûen megfogalmazható: egy A zárt felülettel határolt V térfogatba foglalt extenziv mennyiség a következõk együttes hatására változik meg:

- a határoló zárt felületen keresztül ki/be áramlik a hordozó közeg (gáz, folyadék). E közeg az áramlása során magával hordozza a hozzátartozó extenzív mennyiségeket is, ezt a szállítást az extenzív mennyiség áramának nevezzük. Ha több áramlik be mint ki, akkor ez pl. növeli a belül levõ extenziv mennyiségét.
- az illetõ extenzív mennyiség keletkezhet, eltûnhet. Azt függvényt, amely megadja, hogy idõegység alatt, térfogategységben a szóbanforgó extenzivbõl mennyi keletkezik, *forráserõsség*nek nevezzük. Negativ forráserõsség az u.n. *nyelõket* jellemzi, itt az extenzív mennyiség eltûnik. A forráserõsség teljes térfogatra számitott elõjeles összege (integrálja) megadja a bennfoglalt extenzív mennyiség források okozta növekményét. Néhány példa: az erõ az impulzus forrása, munkavégzés az energia forrása. Megmaradó extenzívekre (tömeg, elektromos töltés) ez a függvény mindenütt nulla.

A továbbiakban ezen állítás matematikai megfogalmazását adjuk meg, fizikai tartalma tehát már nem bõvül. A matematika forma lehetõvé teszi néhány következmény célszerûbb megfogalmazását, mint pl. Kirchoff csomóponti törvénye, folyadékok inkompresszibílitásának megfogalmazása.

Mivel tartalmilag minden extenzivre ugyanaz az egyenletforma érvényes, levezetéseinkben nem kötjük magunkat egyetlen kiválasztott extenzívhez sem. Így pl. egyenleteinkben a ρ sûrûség jelentheti:

- a $\rho = dm/dv$ tömegsûrûséget
- a $\rho_{px} = d\,mv_x/dv = \rho v_x$ impulzus x koordinátájának sûrûségét, ugyanez a z, vagy éppen az y koorinátára $\rho_{py} = d\,mv_y/dv = \rho v_x$,
- a közeg mozgási energiájának sûrûségét, $\rho_{wm} = d(mv^2/2)/dv = \rho\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2$.
- az elektromágneses tér energiasûrûségét, $\rho_{wEM} = \vec{E}\,\vec{D}/2 + \vec{H}\,\vec{B}/2$

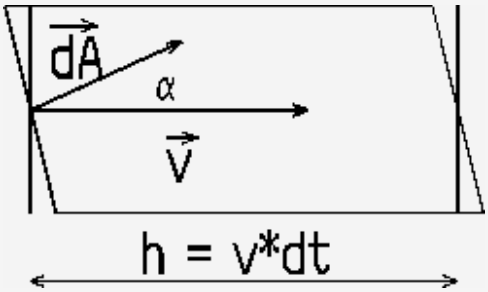
A mérlegegyenlet matemetikai megfogalmazáshoz bevezetünk néhány fogalmat: az extenzív mennyiség árama, áramerõssége, áramsûrûsége, konvektív és konduktív áramok.

A figyelembe vett felületen idõegység alatt átáramló extenzív mennyiség az ***áramerõsség***. Így például a tömegáram erõssége ***Im = dm/dt*** (kg/s), a ***q*** elektromos töltés áramerõssége ***I = dq/dt*** .

A $\vec{V}(\vec{r},t)$ áramlási térben föllépõ tömegáramot tekintjük példaként. (pl a vízvezeték csövében áramlik a víz) A $\vec{dA}$ felületelemen létrehozott áramerõsséget az (12) ábra segítségével a következõk szerint számíthatjuk. Azok az anyagi részecskék, amelyek ***t=0*** idõpillanatban a $\vec{dA}$ felületelemen tarózkodtak, ***dt*** idõtartam alatt ***h =V*dt*** távolságot tettek meg $\vec{V}$ irányában, mialatt a $\vec{dA}$ felületelemen áthaladt a teljes $dA\cos(\alpha)\,h$ hengertérfogat. Egyszerûbben is írhatjuk e térfogatot: $\vec{V}\,\vec{dA}\,dt$. Ezzel együtt természetesen a $\vec{dA}$ felületelemen áthaladt a hengertérfogatba foglalt összes extenzív mennyiség is. Ha az extenziv mennyiség sûrûsége $\rho=\rho(r,t)$ akkor a $\vec{dA}$ −n idõegység alatt áthaladt tömeg, vagyis a létrehozott áramerõsség $\rho\vec{V}\,\vec{dA}$. A $\vec{j}=\rho\vec{V}$ mennyiséget ***áramsûrûség***nek nevezzük, az áramlás irányára merõleges egységnyi felületen idõegység alatt áthaladó extenzív mennyiségét adja meg. Ha nem egy elemi felület, hanem egy véges ***A*** felület áramát keressük, akkor az A−t lefedõ összes $\vec{dA}$ felületelem járulékát figyelembe kell vennünk, vagyis az áramerõsség:

$$I=\int_A \vec{j}d\vec{A}$$

Figure: *v* sebességû áramlás konvektiv árama *dA* felületelemen.



Mivel a zárt felület felületi normálisa megállapodás szerint kifelé mutat. a befelé folyó $\vec{j} = \rho\vec{V}$ áramsûrûség ***dA*** felületelemen létrhozott $\vec{j}d\vec{A}$ elemi árama, $-\vec{j}d\vec{A}$ elõjelezés esetén növeli a zárt felületen belüli össztömeget.

Az A felületet, merevnek, idõben állandónak választjuk. A mérlegegyenlet szavakban megfogalmazott tartalmának a következõ matematikai alak felel meg:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dv = -\oint_{A(V)} \rho\vec{V}\,\vec{dA} + \int_V f\,dv \qquad (21)$$

Ez az extenzív mennyiségek mérlegegyenletének integrális alakja. Mondandóját itt is, újra (meg újra) elismételjük. Az extenzív mennyiség sûrûségének tétfogati integrálja $\int_V \rho dv$, a V térfogatba foglalt össztömeget (össz extenzív menniséget) adja meg.

Ennek idõderiváltja azt mondja nekünk, hogy ez a bennfoglalt mennyiség mennyivel változik idõegységenként. A jobboldal arról ad számot, hogy mi okozza ezt a változást. Itt két jelenséget lehet figyelembe vennünk, az extenzív mennyiség szállítását, és keletkezését/eltûnését. A zártfelületi integrál −ahogy azt az elõbbiekben megmutattuk− a térfogatba idõegység alatt beszállított extenzív mennyiségét adja meg, a térfogati integál pedig megadja a teljes térfogatban idõegység alatt keletkezõ extenzív mennyiségét.

Habár gyakran nem jelöljük, mindig feltesszük, hogy az integrálokban szereplõ mennyiségek általában a hely és az idõ függvényei. (pl. "ró" sûrûség $\rho = \rho(\vec{r}, t)$).

Az (21) egyenlet baloldalán az idõszerinti differenciálás és a térfogati integálás sorrendje fölcserélhetõ mivel az integrálás merev − idõben állandó − V tartományra történik. Gauss tétele segítségével a zártfelületi integrál térfogati integrállá alakítható, így az összes integrál egyetlen térfogati integrál mögé költöztethetõ.

$$\int_V (\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V}) - f) dv = 0 \qquad (22)$$

Az (22)−ben megfogalmazott állitás tetszõlegesen választott térfogatra fönnáll. Az integrál csak akkor adhat tetszõleges térfogatra 0−t, ha az integrandus − nullmértékû halmaztól eltekintve − mindenütt zérus, vagyis minden pontban fönnál a következõ összefüggés:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V}) = f \qquad (23)$$

Ez itt a mérlegegyenlet differenciális más szóval lokális vagyis a tér minden pontjára érényes megfogalmazása.

Sok esetben − mint ahogy azt itt is megfigyelhetjük − ugyanazon fizikai állításnak egy véges térrészre vonatkozó integrális (globális), és egy differenciális (lokális, pontbeli) megfogalmazási formája van. (vagy éppen: véges idõtartamra valamint idõpontra). A fizikai tartalmuk megegyezik, használati formájuk azonban lényegesen különbözik. Az integrális forma jelentése szemléletes, könnyen értelmezhetõ, mivel azonban a differenciál−egyenletek megoldási módszerei kidolgozottabbak, a konkrét számolási eljárások szinte kizárólag a differenciális alakot alkalmazzák.

Vegyük észre, hogy az itt elkövett "levezetés", nem "levezetés" a szónak abban az értelmében, hogy megengedett logikai (matematikai) lépésekkel már igazolt, még alapvetõbb igazságokra, esetleg axiómákra vezetjük vissza állításunkat. Itt egyszerûen matematikai megfogalmazást −matematikai formát− adtunk a tartalmilag eleve elfogadott ``triviális" állításnak.

Megmaradó mennyiségek

Tapasztalataink szerint a tömeg, az elektromos töltés nem keletkezik, nem tûnik el vagyis a forráserõsséget jellemzõ függvény ***f = 0***.

Egyenleteink formája ekkor a következõ:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dv = -\oint_{A(V)} \rho \vec{V}\, \vec{dA}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V}) = 0$$

Vagyis zárt felületen belül, a megmaradó extenzív mennyisége csak az által változhat meg, hogy a határoló felületen ki, illetve be áramlik. A fenti egyenletek tehát a ***tömegmegmaradás***t fogalmazzák meg, ha ρ a tömegsûrûséget jelenti, illetve az elektromos töltésmegmaradást, ha az elektromos töltéssûrûséget.

Az eddig tárgyalt áramot, amely a közeg makroszkópikus mozgásához kapcsolódik, ***konvektiv áram***nak nevezzük. Extenzív mennyiségek transzportjában jelentõs szerepe van az áramok egy másik csoportjának, a ***konduktiv (vezetési) áram***oknak is.

Konduktív áramot az adott extenziv mennyiséghez tartrozó intenziv mennyiség inhomogenitása (gradiense) hajthatja, amennyiben az illetõ közeg ``vezetõképes'' a szóbanforgó extenziv mennyiségre nézve. Ebbe a kategóriába tartoznak:

- a "hõvezetés (belsõ energia árama)"− ezt a hõmérséklet inhomogenitása (gradiense) hajtja

$$\vec{q} = -\lambda\, grad(T) = -\lambda \nabla T$$

- elektromos vezetés − az elektromos töltés konduktív áramát az elektromos potenciál gradiense, az elektromos térerõsség tartja fönt.

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma\, grad(U) = -\gamma\, \nabla U$$

- diffúzió, az itt kialakuló tömegáramot az illetõ anyagfajta koncentrációgradiense hozza létre

A továbbiakban áram alatt a teljes áramot, −a konduktív és konvektív áram összegét− értjük

---

Ideális folyadékok áramlása

.

Folyadékok, gázok mozgását − áramlását − sebességterükkel jellemezzük, tehát a $\vec{v}(\vec{r}, t)$ vektortérrel. A sebességtér mozgásának törvényszerûségeit meghatározó dinamikai egyenletet Newton második törvényének átirása alapján kapjuk. Kezdetben csupán a legegyszerûbb folyadékokra, az un. ideális folyadákokra szorítkozunk.

Ha reggelizés közben egy kést beledöfünk a mézbe és azt nem túl lassan kihúzzuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy jelentõs mennyiségû méz tapad a késre, úgy, hogy a késhez közelebbi −a késpengével párhuzamos − rétegek magasabban vannak, mint a távolabbiak. Ha a mutatványt a teánkkal kívánjuk megismételni, akkor a sikertelenség miatt lelki sérültek leszünk. Alkalmi megfigyelésünk szerint vannak olyan folyadékok amelyek rétegei erõt fejtenek ki a velük szomszédos rétegekre, ha azok eltérõ sebességgel mozognak, és vannak olyanok, amelyeknél e jelenség kevésbé figyelhetõ meg. A jelenség a folyadékok belsõ súrlódására −viszkozitására− vezethetõ vissza. Azokat a folyadékokat, amelyeknél a jelenség megfigyelhetõ viszkózus folyadékoknak nevezzük. Az ideálisnak tekintett folyadékok nem mutatják e jelenséget, azaz az

egymás mellett különbözõ sebességgel elhaladó folyadékrétegek nem fejtenek ki a rétegeket (képzeletben) határoló fallal párhuzamos (tangenciális, vagyis érintõirányú erõt) . A továbbiakban ezen ideális folyadékok viselkedésével foglalkozunk.

Folyadékok mozgását meghatározó dinamikai egyenlet a $\vec{v}(\vec{r},t)$ sebességtérre vonatkozó Parciális−Differenciál−Egyenlet (PDE). Legegyszerûbb egyenletet ideális folyadékokra kapjuk, Õ az un, Euler egyenlet:

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v}=-\nabla p+\rho\,\vec{f} \qquad (24)$$

Euler egyenletét többféle módon is származtathatjuk.

Leggyakrabban Newton II. törvényét írják át kontinuumokra alkalmazható formára, s ez vezet Euler és más néven futó egyenletekhez. Baloldalon található Newton II.−bõl az ``***ma***'' folyadékokra átidomított változata. amelyben két tagot fedezhetünk föl. Az elsõben még fel is felismerhetõ az említett ``***ma***'', amely akkor él, ha a sebességtér explicite függ az idõtõl. A második tag már kevésbé ismerõs, õt nevezzük konvektiv gyorsulásnak. Fizikai jelentése azonban meglepõen könnyen emészthetõ. Idõben állandósult −stacionárius− áramlás esetén is gyorsulnak a folyadéktömegek, miközben a folyadék elemek egy $\vec{v}_1$ sebességû helyrõl az áramlási tér egy $\vec{v}_2$ sebességgel jellemzett helyére jutnak. Errõl a gyorsulásról ad számot a $(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v}$ konvektív derivált. Legszemléletesebben talán a (13) ábrán látszik ez a gyorsulás, midõn a folyadék az ***A1*** keresztmetszetû ***v1*** sebességû helyérõl az szûkület ***A2*** keresztmetszetû, nagyobb ***v2*** sebességû helyére jut. A kiszemelt térfogatelem gyorsulásának vizsgálatánál tehát nem csak az explicit idõfüggés játszik szerepet, hanem a térfogatelem ***x(t), y(t), z(t)*** helykoordinátáin keresztüli közvetett idõfüggés is.

A gyorsulás ***x*** koordinátájának kiszámításánál tehát a $v_x(x(t),\,y(t),\,z(t),\,t)$ függvényalakból indulunk ki. Ennek deriváltja a következõ:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Tömörebb írásmódot használva a lenti alakot kapjuk:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)v_x \qquad (25)$$

Vagyis a következõ

$$(\vec{v}\nabla) = \{v_x, v_y, v_z\}\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\} = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

mûveleti utasítást alkalmaztuk a mögötte álló sebességkoordinátára.

Az eredõ erõ megfelelõje egyenlet jobboldalán áll. A térfogatelemre eredetét tekintve két erõtipus hat.

Az egyik, az un. térfogati erõ a térfogatelem minden belsõ pontjában fölléphet. Ilyen erõ pl. a gravitációs erõ, amely a test tömegével arányos, de ilyen pl. az elektromos töltéssel arányos erõ is. Térfogategységre jutó részét adja meg a $\rho\vec{f}$ kifejezés. Itt $\vec{f}$ a korábbról megismert térerõsséget jelöli. Ha a Föld felszín közelében lezailó áramlásról van szó, és a ***z*** tengelyt fölfelé irányítjuk, akkor konkrét alakja: $\rho\vec{f} = -\rho g\vec{k}$.

A térfogati erõkön túl a térfogatelemre a térfogatelemet határoló szomszédos tárfogatelemek is erõt fejthetnek ki a határoló felületeken keresztül. Két tipusra bonthatjuk ezen erõket: normális, illetve tangenciális (nyíró) erõkre. A megkülönböztetés aszerint történik, hogy az erõ a határoló felületelem normálisa

irányába hat, illetve a határoló felületttel párhuzamosan lép fel. Ideális folyadékokat csak normális irányú felületi erõk jellemzik. A felületen eloszló, a felületre merõlegesen fellépõ erõ egységnyi felületre jutó részét nyomásnak nevezzük.

$$p = F/A \qquad 1Pa = 1N/m^2$$

Egységét ***Pascal***−nak nevezzük és ***Pa***−val jelöljük. Gyakorlatban használatos egységének neve ***bar*** $1bar = 10^5 Pa$. A normál légköri nyomás közelítõleg ***1 bar***, meteorológiai körülményektõl függõen változik. A nyomás a folyadék (gáz) térben a hely és idõ függvénye lehet. $p(\vec{r}, t)$. A nyomás éréke az illetõ közeg más tulajdonságaival (sûrûség, hõmérséklet, áramlási sebesség) kölcsönös kapcsolatban áll.

Egy irányított ***dA*** felületelemre kifejtett erõt $\vec{F}(d\vec{A}) = -pd\vec{A}$ −ként adhatjuk meg. Azaz nyomás következtében fellépõ erõ a felületelemre merõleges nyomóerõ. Ennek irányítása tehát a felületelem irányításától függ, arra mindig merõleges, nagysága viszont független a felületelem irányításától. Kiterjedt felületre kifejtett erõt a felületelemre felírt összefüggés felületi integráljával számíthatjuk.

Viszkózus (belsõ súrlódás) Navier−Stokes egyenlet.

Porózus közegekben áramló (szivárgó) folyadékok − Darci egyenlet.

Vezetõképes ionizált gázok (pl. a Nap anyaga), fémolvadékok áramlásánál a Lorentz erõ megjelenése a MagnetoHidroDinamika (MHD) egyenleteihez vezeti át a folyadékok Euler egyenletét.

Euler egyenlete ideális, áramló folyadékok sebességterének meghatározására szolgál. Az (24) egyenlet a következõ ***5*** ismeretlen függvényt tartalmazza: a három sebességkoordináta, v_x, v_y, v_z , a tömegsûrûség ρ, és a ***p*** nyomás. Ezek mindegyike a hely és az idõ függvénye lehet, mint pl. $v_x(x, y, z, t)$. Az (1)−es Euler egyenlet csupán három egyenletet jelent (a három sebességkoordinátára szétszedve). Ezek egyikét mutatjuk meg, a többi koordinátára hsonlóan írhajuk föl.

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}+\rho(\vec{v}\,\nabla)\,v_x=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\,f_x$$

További két egyenletet jelentenek a már megismert tömegmegmaradást kifejezõ kontinúitási egyenlet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+div(\rho\vec{v})=0$$

valamint egy, a nyomás és a sûrûség között fönnálló un. állapotegyenlet. Ez, a közeg anyagi tulajdonságait valamint az állapotváltozás jellegét is tükrözõ kapcsolatot fejez ki a (nem független) termodinamikai állapothatározók között. Hogy véletlenül se jelenjen meg a hõmérséklet egyenleteinkben, csak speciális állapotegyenleteket engedünk meg, vagy az inkompresszibilis közegre jellemzõ konstans sûrûséget, vagy az un. barotrop állapotegyenleteket. ***Barotrop*** állapotegyenleteknél a sürûség csak a nyomás egyértékû, invertálható függvénye. Két változatát fogjuk alkalmazni, az izoterm (állandó hõmérsekletû) és az adiabatikus állapotegyenleteket. Az izoterm $p/\rho = konst$ változat a Boyle−Mariott $p\,v = p_o v_o$ törvény következménye, az adiabatikus $p/\rho^{\kappa} = konst$ pedig a $p\,v^{\kappa} = p_o v_o^{\kappa}$ un. Poisson egyenlet folyománya. Az itt felsorolt ***5*** egyenlet már alkalmas arra, hogy a sebességtér, nyomás és sûrûség függvényeket a megfelelõ kezdeti és peremfeltételek segítségével elõállítsuk. Az ideális folyadékok fenti egyenleteinek következményeit a késõbbiekben három speciális esetre tárgyaljuk. Ezek a következõk:

- hidrosztatika.
- ideális folyadék (gáz) stacionárius, örvénymentes áramlása konzervatív erõtérben. Ez vezet a széleskörûen ismert Bernoulli egyenlethez.
- kis perturbációkra linearizált egyenletek a homogén hullámegyenletet hozzák világra.

Ideális, barotrop folyadék (gáz) stacionárius (idõben állandósult) áramlására a Bernoulli egyenlet érvényes, amelyet egyébként az Euler egyenletbõl származtathatunk. Az alábbiakban Π az un. nyomáspotenciált jelöli, u pedig a konzervatív mezõ potrnciálja:

$$\Pi = \int \frac{dp}{\rho(p)} \tag{26}$$

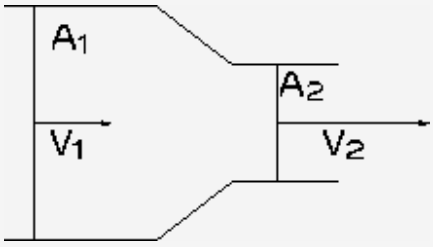
$$\Pi + \frac{v^2}{2} + u = konstans \tag{27}$$

Ha az áramlási tér egy pontjában ismerjük (27)−ban a baloldali összeget, akkor az adott áramlási tér bármely más pontjára ugyanezt az összeget kapjuk, habár az összegben szereplõ egyes tagok értéke más és más lehet.

Az (27) egyenlet legegyszerûbb fomáját inkompresszibílis közegek áramlása esetén kapjuk.

$$p + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z = konst$$

Figure: Ugyanazon folyadékáram fönntartásához a szûkületben nagyobb sebesség szükséges.



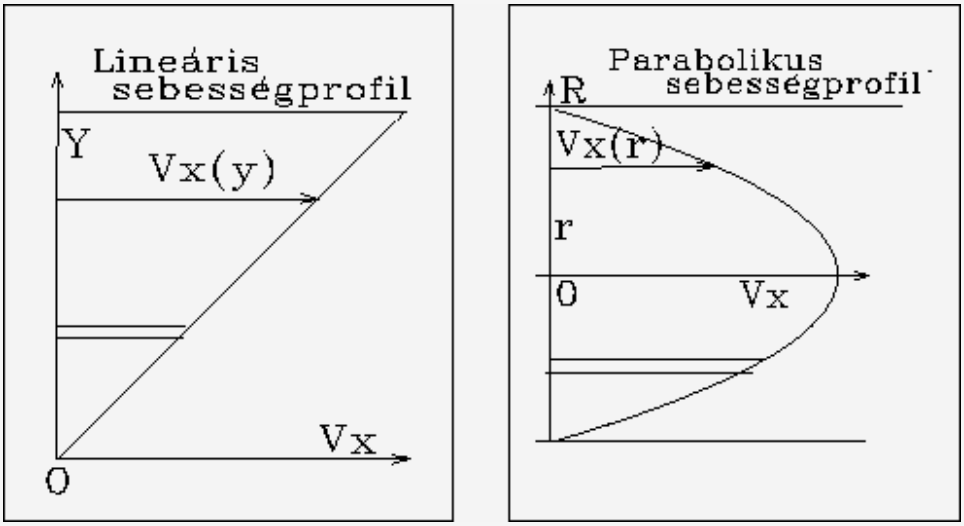
$v_1 * A_1 = v_2 * A_2$

Az áramlásokat a $\vec{v}(\vec{r},t)$ áramlási tér tulajdonságai alapján osztályozzuk:

Réteges (lamináris) az áramlás akkor, ha az áramlási tér olyan rétegekre bontható, amely rétegeken belül a sebesség azonos értékû, a szomszédos rétegek azonban némileg különbözõ sebességgel haladnak.

Örvénymentes az áramlás, ha a $rot(\vec{v})$ mindenütt 0, ellenkezõ esetben az áramlást örvényesnek nevezzük. Az örvény fizikai−matematikai fogalma nem egyezik meg a hétköznapi örvény fogalommal. Örvényes például az (14) ábra lineáris sebességprofilú áramlása is. Mint ahogy konzervatív erõterek esetében, úgy itt is származtathatjuk a sebességteret egy skaláris potenciálfüggvényböl gradiensképzéssel, feltéve hogy örvénymentes a sebességtér.

Figure: Két egyszerû lamináris áramlás sebességprofilja.



Inkompresszibilis (összenyomhatatlan) közeg esetén a térfogat nem változik a nyomásváltozás ellenére sem, a sûrûség állandó marad. Ez a (23) kontinuitási egyenlet speciális alakjához vezet: $div(\vec{v}) = 0$. Megjegyezzük, hogy az inkompresszibilitás nem feltétlenül az áramló közeg anyagi tulajdonságának következménye, lehet az áramlás olyan, hogy az egyébként összenyomható közeg (pl. gáz) ebben az áramlásban összenyomhatatlanként viselkedik.

Az áramlási teret görbesereggel (áramvonal, örvényvonal) szemléltethetjük. Itt is ugyanazok a megállapodás szerinti értelmezések érvényesek, amelyeket az erõvonalak tájékán használtunk, azaz a görbesereg sûrûsége a sebesség nagyságát, a görbék iránya a sebesség irányát jellemzi. Az erõvonalakat célszerû csupán szemléltetéshez használatos segédeszköznek tekinteni.

Subsections

- Hidrosztatika

Hidrosztatika

Hidrosztatika folyadékok, gázok nyugalmi állapotának feltételeivel, illetve a nyugvó folyadékokban, gázokban kialakuló nyomás és sûrûségviszonyokkal foglalkozik. A folydékot (gázt) nyugalomban levõnek mondjuk, ha sebessége 0, vagy a folyadéksebesség minden pontban ugyanaz az állandó vektor. Ekkor az (24) −es Euler egyenlet baloldala 0. Kapjuk tehát a hidrosztatika alapegyenletét:

$$0 = -\nabla p + \rho \vec{f} \tag{28}$$

A felületi erõk (∇p képviseli õket) és a térfogati erõk (ezt a $\rho \vec{f}$ reprezentálja) egyensúlyban vannak.

Súlytalan közegben Pascal törvényét kapjuk. $\nabla p = 0.$ Elterjedt e törvénynek egy olyan megfogalmazása, amely szerint a nyomás súlytalan közegben gyengítetlenül terjed. A

sztatika és a terjed fogalmak egyidejû használata nem ajánlott. Egyszerûen: súlytalan közeg minden pontjában ugyanaz a nyomás értéke. A súlytalan közeg fogalma egy összehasonlításból adódó elhanyagolás alpján jelenik meg: súlytalannak kezelhetõ a közeg akkor, ha a térfogati erõk elhanyagolhatóan kicsinyek a felületi erõkhöz viszonyítva.

Meg kell jegyeznünk, hogy a hidrosztatika (28) egyenletét az ideális folyadékok Euler egyenletébõl kaptuk, azonban érvényes minden olyan nem ideális folyadéktipusra is amely sebesség (különbségek) kapcsán megjelenõ felületi erõkkel jellemezhetõ, így viszkózus folyadékokra is. (tehát a méz hidrosztatikája megegyezik pl a víz hidrosztatikájával)

A Föld gravitációs terében fölfelé mutató ***z*** tengely esetén a térerõ alakja: $\vec{f} = -g\vec{k}$. Tehát az (28) koorinátánként kiírva . $\partial p/\partial x = 0, \quad \partial p/\partial y = 0$. Eszerint a ***z = konst*** síkok izobár felületek, a nyomás csak ***z***−tõl függ:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{29}$$

Ezen forma egy nagyon egyszerû meggondolás alapján is származtatható. Képzeletben, azt az erõt vizsgáljuk, amelyet egy légoszlop, vagy vízoszlop, az oszlop ***A*** keresztmetszetû alapjára kifejt **z** magasságban. Ez ***A*p(z)*** formában adható meg, és a $z + \Delta z$ magasságban mérhetõ $A * p(z + \Delta z)$ erõtõl nyilván annyiban különbözik, amennyi az ***A*** alapú Δz magasságú hengerbe zárt levegõ súlya, vagyis $A * p(z) = A * p(z + \Delta z) + \rho g A \Delta z$. Ez vezet el a következõ formához, amely az (29) egyenlet némileg laza átirata:

$$\frac{p(z) - p(z + \Delta z)}{\Delta z} = \rho g$$

Állandó sûrûségû folyadékban a nyomás függését a ***z*** mélységtõl a $dp/dz = \rho g$ egyenletbõl állapíthatjuk meg. Ennél a példánál szokás szerint lefelé irányítjuk a z tengelyt, s az origót a viz felszínre tesszük. Figyelembe véve a felszínen mérhetõ ***po*** nyomást is az integrálás a következõ közismert összefüggéshez vezet: $p = p_0 + \rho g z$. E mélységgel arányos hidrosztatikai nyomásnak számos következménye van pl. a közismert Arhimedesz törvény, a közlekedõ−edényekben kialakuló egyensúlyok stb.

A Föld légkörében kialakuló nyomás és sürüségviszonyokat az un. atmoszféra modelleken keresztül vizsgálhatjuk. Eddigi ismereteink alapján mi két végletekig leegyszerûsített modellt tudunk végigszámolni az izotermikust (a legkönnyebben számítható de a legkevésbé realisztikus) és az adiabatikust. Az adiabatikus állapotegyenlet a következõ kapcsolatot jelenti a sûrûség és a nyomás között: $p/\rho^{\kappa} = p_o/\rho_o^{\kappa}$. A κ adiabatikus kitevõ levegõre elfogadott értéke $\kappa = 1.4$. Ebbõl kifejezhetõ ρ: $\rho = \rho_o(p/p_o)^{1/\kappa}$. Itt $p_o,\ \rho_o$ jelentse a föld felszínen mérehetõ nyomás és sûrûség értékeket. Ekkor a hidrosztatika alapegyenletének (29) egyszerûsített változatából adódó differenciálegyenletet integrálhatjuk:

$$\int_{p_o}^{p(z)} p^{-1/k} dp = -\rho_o g / p_o^{1/\kappa} \int_o^z dz'$$

Az integrál kiszámítása és némi egyenletrendezés után kapjuk az adiabatikus atmoszférára az un. barometrikus magasságformulát:

$$p(z) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \sqrt{p_o^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\rho_o g}{p_o^{1/\kappa}} z}$$

Különös érdekessége ennek a magasságformulának az, hogy a légkör egy meghatározott z' magasságnál egyszerûen megszûnik, azaz $p(z') = 0.$ Egyszerû

számítással adódik erre a magasságra: $z' = \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_o}{\rho_o g}\ (\cong 27\ km)$

Monokromatikus síkhullám homogén izotróp közegben.

Hullámok a fizika több területén is fontos szerepet játszanak. Hullámjelenségek körébe tartoznak például a hanghullámok, elektromágneses hullámok (fényhullámok, rádióhullámok, stb.), egyéb mechanika hullámok, pl. földrengéshullámok. Kvantummechanikában és csatolt részeiben egy részecske hullámfüggvénye ugyanolyan központi fogalom, mint a pontmechanikában a tömegpont fogalma.

A hullámterjedés során a közegben − amely elektromágneses hullámok esetén lehet vákuum is − valamilyen fizikai állapot és számos fizikai mennyiség is terjed (pl energia, impulzus). Hogy világosan elkülöníthessük a közeg (anyagi részecskéinek) sebességét és a közegben haladó fizikai állapot (−változás) haladási sebességét, egy nagyon egyszerû példát vizsgálunk. Képzeljünk el egy piros lámpa elõtt várakozó hosszú kocsisort. Amikor a lámpa zöldre vált, az elsõ kocsi vezetõje a gázra lép és elindul, de ebben a pillanatban a második, harmadik, .. kocsi vezetõje még nem teheti ugyanezt. Némi idõ eltelte után a képünk a következõ: a kocsior eleje már elõrehaladt, a vége még áll, s valahol közöttük találjuk azt az ``állapotot'' amely a gázpedálra lépést jelenti. Ez az állapot a kocsisoron végigvonul hátrafelé, miközben (hullámunk terjedési közege) a kocsisor egy része még áll, másik része pedig elõremozog. Ezt a fajta hullámot mellesleg lökéshullámnak nevezhetjük. Élesen szétválik tehát a közeget alkotó anyagi részecskék sebessége és a közegben terjedõ állapot haladási sebessége.

A hullámokkal kapcsolatos alapfogalmakat a legegyszerûbb un. monokromatikus sikhullámok kapcsán vezetjük be. Elõször is föltesszük, hogy a hullám homogén, izotróp közegben halad.

A ***homogenitás*** azt jelenti, hogy a közeg tulajdonságai nem függenek a helytõl, vagyis a tér minden pontjában ugyanazok a jellemzõi. Az elõbbi példánknál maradva, ha a

személyautók sorát egy hosszabb traktorsor követné ebben nyilván megváltozna a ``gázra−taposás" közegbeli sebessége. Ez utóbbi eset az ***inhomogén*** közegre példa amikoris a tulajdonságok függenek a helykoordinátáktól.

A hullámjelenség egyébként tipikus példája az un. kollektív jelenségeknek.

Izotróp közegben minden irány a fizikai viselkedés szempontjából egyenértékû, nincsenek kitüntetett irányok. Izotróp közegek, a folyadékok, gázok, üvegek, bár a felsorolt közegekbe külsõ terek alkalmazásával anizotrópia vihetõ (pl folyadékkristályok). ***Anizotróp*** közegekben a fizikai tulajdonságok irányfüggõek. Kristályokban például −melyek alapvetõen anizotróp tulajdonságúak − a kristálytani tengelyekhez viszonyított különbözõ irányokba terjedõ fényhullámok sebessége általában különbözõ. Megjegyezzük, hogy a közeg inhomogenitása egyúttal anizotrópiát is visz a közegbe.

Monokromatikus síkhullámot vizsgálunk. Komplex írásmódot használva megállapodhatunk abban, hogy a komplex mennyiség valós része írja le a fizikai mennyiségünket: ($e^{i\beta} = cos(\beta) + i\,sin(\beta)$). Alkalomtól függõen a komplex vagy a valós változat használható. Monokromatikus síkhullámot leíró függvény alakja a következõ:

$$\xi(\vec{r},t) = \xi_o e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)} \qquad \xi(\vec{r},t) = \xi_o \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi) \tag{30}$$

Nem kötjük magunkat egyetlen speciális fizikai mennyiséghez sem, mivel számos különbözõ fizikai mennyiség térbeli, idõbeli viselkedését is ugyanezen forma írhatja le. A ξ mennyiség jelentheti hanghullám esetében a sûrûségperturbációt (az állandó és nagyértékû ρ_o alapsûrûségre ráültetett igen kicsiny $\xi \equiv \rho'$ zavart), a nyomásperturbációt vagy éppen elektromágneses hullám bármely tartozékát (***Ex, Hy***, stb). ξ_o jelenti a ξ mennyiség maximális értékét, vagyis a hullám amplitudóját.

A $\Phi(\vec{r},t) = \omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi$ mennyiséget a hullám ***fázisának*** nevezzük. Ennek értékétõl

függ a fizikai mennyiségek értéke . Az ω és a φ funkciói a rezgõmozgásnál megismertekkel azonos, ω a hullám körfrekvenciája, φ pedig a kezdõfázisa.

A fényhullám színét a frekvenciája határozza meg, ezért azokat a hullámokat amelyben csak egyetlen frekvencia van jelen ***monokromatikus*** (egyszínû) hullámnak nevezzük, még akkor is, ha nem fényhullámról van szó. Az a tény, hogy egyetlen frekvenciát tartalmazó hullámot vizsgálunk, túlságosan is beszûkûlt dolognak tûnhet. Tudjuk azonban a Fourier sorok elméletébõl azt, hogy különbözõ frekvenciájú monokromatikus hullámokból meglehetõsen széles függvényosztály építhetõ fel. Így korántsem jelenti az általánosság túlzott megszorítását a monokromatikus hullámok vizsgálata.

A $\vec{k}$ mennyiséget, mint egyébként bármely vektort felírhatjuk a saját irányába mutató $\vec{n}$ egységvektor, és a vektor ***k*** hosszúságának szorzataként. $\vec{k} = k\,\vec{n}$.

Most azt vizsgáljuk, hogy egy rögzített t^o idõpontban az azonos Φ_0 fázisú pontok milyen geometriai alakzat mentén helyezkednek el. $\omega t^o - k\,\vec{n}\,\vec{r} + \varphi = \Phi_0$.

$$\vec{n}\,\vec{r} = (\omega t^o + \varphi - \Phi_0)/k = konst$$

Ez az $\vec{n}\,\vec{r} = konst$ formula a sík Hesse−féle normálalakja, vagyis az állandó fázisú pontok síkot alkotnak, ezért nevezik az (30) alakú hullámot síkhullámnak. Az összefüggésben $\vec{n}$ a konstans fázisú (sík) felület nomál−egység−vektora.

Ezen (30) sikhullám idõben is és térben is periódikus jelenség. Az idõbeli periódicitással kapcsolatos fogalmakat a harmónikus rezgõmozgásnál már részleteztük. Valójában minden, az idõbeli periódicitással kapcsolatos fogalom különösebb nehézség nélkül átvihetõ a térbeli periódicitásra is.

A fázisfelületi merõleges irányában mért azon távolság, amelyhez a fázis

2π növekménye tartozik, a ***hullámhossz***. Ez tehát a térbeli periódicitást jellemzõ periódushossz −a ***T*** periódusidõ térbeli megfelelõje− szokásos jelölése λ. Van egy eredeti fázisértékünk: $\omega t^o - k\vec{n}\vec{r} + \varphi = \Phi_o$, valamint az a fázisérték amely az $\vec{n}$ irányában felmért λ távolságban levõ felületen érvényes $\omega t^o - k\vec{n}(\vec{r} + \lambda\vec{n}) + \varphi = \Phi_o + 2\pi$. E két kifejezés különbsége a következõkhöz vezet: $k\lambda = 2\pi$, amelybõl kapjuk $\lambda = 2\pi/k$. Az $1/\lambda$ mennyiség az ***1 m*** hosszra jutó hullámok számát jelenti. Ez pontos térbeli megfelelõje az idõbeli periódicitás kapcsán bevezetett frekvenciának. Ennek 2π −szerese a körhullámszám, $k = 2\pi/\lambda$ amelyet alkalmanként a fázisfelület normálisa irányába mutató vektorként kezelünk $\vec{k} = k\vec{n}$.

A következõkben a fázisfelület (amely mentén a fázis egy meghatározott értéket vesz föl) mozgását vizsgáljuk. Valamely idõponthoz $\omega t^o - k\vec{n}\vec{r} + \varphi = \Phi_o$ fázisérték tartozik. Azt vizsgáljuk, ha az idõ t^o −ról $t^o + \Delta t$ −re változik mennyivel kell a fázisfelület normálisa irányába elmozdulnunk, hogy a Φ_o fázis értéke ne változzon: $\omega(t^o + \Delta t) - k\vec{n}(\vec{r} + \Delta s\vec{n}) + \varphi = \Phi_o$. Ezzel mintegy rátapadtunk az adott fázisú felületre, amely tehát Δt idõtartam alatt Δs −el mozdult el a normális irányába. A fázisfelület saját síkjában való elcsúszása nem jelent fizikailag új poziciót, ezért tekintjük mindig csak a normális irányú elmozdulásokat. Az eredeti és az új fáziskifejezések összevetése alpján kapjuk $\omega\Delta t - k\Delta s = 0$. Ebben tehát Δs jelenti a fázisfelület Δt idõtartam alatti elmozdulását. A fázisfelület c_f sebessége tehát:

$$c_f = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

Figyelembe véve, hogy $\omega = 2\pi f$ valamint azt, hogy $k = 2\pi/\lambda$ kapjuk a $c_f = \lambda * f$ közismertebb változatot.

A monokromatikus síkhullám komplex írásmódja varázslatos egyszerûsítéseket tesz lehetõvé matematikai mûveleteinkben, némely differenciálási mûveletek algebrai

mûveletekkel helyettesíthetõk. Könnyen ellenõrizhetõ, hogy a síkhullám komplex formájára $\partial\xi/\partial t = i\omega\xi$ vagyis $\partial/\partial t \Rightarrow i\omega$, amely azt jelenti, hogy az idõszerinti deriválás mûvelete egyszerû algebrai szorzássá egyszerûsödik.

A helykoordináták szerinti deriválások még több lehetõséget kínálnak. Figyelembevéve az exponensben szereplõ skaláris szorzás kifejtését $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ az x koordináta szerint parci. deriválás hatása a monokromatikus síkhullám komplex alakjára így írható:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -ik_x \xi_o e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)} = -ik_x \xi$$

Tehát $\partial/\partial x \Rightarrow -ik_x$. A többi, ***y*** és ***z*** koordinátákra hasonló eredményeket kapunk. Ezek összefoglalásával a ***Nabla*** operátor a következõképpen helyettesíthetõ:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_3 = -ik_x\vec{e}_1 - ik_y\vec{e}_2 - ik_z\vec{e}_3 = -i\,\vec{k}$$

Vagyis röviden $\nabla = -i\,\vec{k}$. A jelölések egyértelmûsége céljából itt az $\vec{e}_1, \vec{e}_2,$ .. egységvektor jelöléseket alkalmaztuk a közismertebb $\vec{i}, \vec{j},$ .. jelölések helyett.

Ha a síkhullám által leírt fizikai mennyiség vektormennyiség −pl. elmozdulás, sebesség, elektromos mezõ−, akkor a fizikai viselkedés szempontjából lényeges kérdés az, hogy ez a vektormennyiség milyen szöget zár be a fázissebesség irányába mutató fázisfelületi egységvektorral (azaz a hullám haladási irányával).

Longitudinális hullámban a hullám $\vec{n}$ haladási iránya, és a leírt fizikai mennyiség $\vec{\xi}_o$ amplitudó−vektora párhuzamos. A számtanórán tanultak szerint e két vektor párhuzamosságát vektorszorzattal a következõképen fogalmazhatjuk meg:

$\vec{n} \times \vec{\xi}_o = 0$. Ha egy fémrúd (tekercsrúgó) végére a rúd tengelye irányában ráütünk, akkor a rúdban longitudinális kompressziós hullám halad végig. Longitudinális hullám például a hang is. E hullámban a térfogatelemek eredeti poziciójuk környezetében rezgéseket végeznek, s e rezgések amplitudóvektora a hangullám terjedési irányával párhuzamosak.

Transzverzális a hullám akkor, ha a leírt fizikai mennyiség $\vec{\xi}_o$ amplitudó−vektora merõleges az $\vec{n}$ haladási irányra, vagyis az amplitudóvektor a konstans fázis síkjában fekszik. E merõlegességet a következõ skaláris szorzattal fejezzük ki: $(\vec{n}\,\vec{\xi}_o) = 0$. Ha a transzverzális hullámban a terjedési irányra merõleges irányok közül csak egy kiválasztott irányú amplitudójú hullám van ielen, akkor ezt a hullámot lineárisan ***polarizált*** hullámnak nevezzük. Ekkor az $\vec{n},\ \vec{\xi}_o$ vektorok által meghatározott síkot a polarizáció síkjának nevezzük. Két, egymásra merõleges polarizációs síkú, egyirányban terjedõ, azonos frekvenciájú hullám szuperpoziciója elliptikusan (cikulárisan) poláros hullámot eredményez. Transzverzális hullámok az elektromágneses hullámok, így tehát a fény is az. Ha egy hosszabb kötélre ráütünk, akkor ez a ``zavar'' a kötél mindkét irányában továbbterjed. A kötéldarabkák eredeti nyugalmi helyzetüktõl mért kitérése merõleges a kötélre, amely mellesleg a hullám egyedül lehetséges haladási irányát adja. Ez a hullám tehát transzverzális hullám.

Ezen osztályozási szempontok látszólag értelmetlenek skalár hullámoknál, mint pl. nyomás vagy sûrûség térbeli/idõbeli viselkedését leíró hullámok esetén, azonban skalár mennyiség gradiense máris egy a skalárhullámhoz társuló vektor hullámot hoz elõ.

Rugalmas, összenyomható szilárd közegben (pl fémek, Föld szilárd köpenye) mind transzverzális, mind pedig longitudinális mechanikai hullámok terjedhetnek. Mivel e két hullámtipus eltérö mechanizmus alapján mûködik, fázissebességük is különbözõ. Még ha sikerül is esetleg valamelyik hullámtipust tisztán ``útnak'' ereszteni, a határfelületeken történõ visszaverõdések, rendszerint kevert hullámot eredményeznek.

Most azt igyekszünk tisztázni, hogy a fizikai vektorterek (mezõk) milyen tulajdonságai alapján tudjuk eldönteni, hogy a szóbanforgó fizikai mezõ "hulláma" transzverzális, vagy longitudinális−e. Azt korábban megmutattuk, hogy az (30) tipusú síkhullám

esetén a Nabla vektor mint mûveleti utasítás a hullámszám vektorral helyettesíthetõ: $\nabla = -i\vec{k}$. Emlékezzünk arra, hogy $\vec{k} = k\vec{n}$ alakban is használható. Forrásmentes $\vec{\xi}$ vektortérre a következõket kapjuk:

$$div\,\vec{\xi} \equiv (\nabla\,\vec{\xi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -i(\vec{k}\,\vec{\xi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{n}\,\vec{\xi}) = 0$$

A forrásmentesség tehát a hullám transzverzalitását jelenti. Ha a ***div*** nem nulla, akkor azt is láthatjuk, hogy a hullám longitudinális összetevõje a forráserõsséggel arányos.

Örvénymentes vektortér esetére kapjuk:

$$rot(\vec{\xi}) \equiv [\nabla \times \vec{\xi}] = 0 \qquad -i\,\vec{k} \times \vec{\xi} = 0 \qquad (\vec{n} \times \vec{\xi}) = 0$$

Ez azt jelenti, hogy a vektortér ***n***−re merõleges összetevõje nulla, a hullám tehát longitudinális.

Subsections

- Linearizált egyenletek, a hullámegyenlet.

Linearizált egyenletek, a hullámegyenlet.

Gázok, ideális folyadékok mozgását, állapotát öt darab helytõl és idõtõl függõ függvénnyel írjuk le. A nyomás, a sûrûség és a sebességkoordináta függvények

meghatározásához a következõ öt nemlineáris egyenlet áll rendelkezésünkre. Az elsõ sor az Euler egyenletet tartalmazza, ez egyszerûen szétdarabolható három skaláris egyenletté. A második sor −amelyiket tehát a negyedik egyenletnek nevezhetjük− a tömegmegmaradást kifejezõ kontinúitási egyenlet, s a harmadik sor, az adiabatikus állapotegyenletet tartalmazza gázokra.

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\,(\vec{v}\nabla)\,\vec{v}=-grad(p)+\rho\,\vec{f}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\,\vec{v})=0$$

$$p/\rho^{\kappa}=p_o/\rho_o^{\kappa} \tag{31}$$

Egyenleteinkbe igazi szörnyûséget a nemlineáris kifejezések hoznak be. Ilyenek mint pl. a $(\vec{v}\nabla)\,\vec{v},\ \ div(\rho\,\vec{v})$ ezekben ugyanis az ismeretlen függvények (és származékaik) szorzatai jelennek meg. E nemlinaritások számos bajnak okozói. Egyik gond velük az, hogy kevésbé értünk hozzájuk, a másik pedig az, hogy a nemlinearitások igazán különös viselkedést okoznak a fizikai rendszerben. Alkalmas körülmények között kaotikus, nemdeterminisztikus viselkedésformákhoz, vezetnek. Ezért, − hacsak nem célzottan a nemlinearitásokat vizsgálják − ki hogy tud, igyekszik megszabadulni tõlük. Egy ilyen módszer az egyenletek linearizálása, a továbbiakban tehát ezzel foglalkozunk. E mûveletsorral (31) kiindulási egyenleteinkbõl az un. homogén hullámegyenlethez szeretnénk eljutni, azaz azt szeretnénk megvizsgálni, hogy gázokban, folyadékokban hogyan, és milyen fajta hullámok terjednek.

A linearizálási eljárás kiindulási pontjaként fölteszünk egy stabil, idõben állandó alapmegoldást. Ezek − hanghullámok esetében − ρ_o, p_o , stabil, állandó értékek, és

$\vec{v}_o = 0$, azaz a levegõ sûrûsége, nyomása, és alapsebessége adottak. A sebességet azért választottuk nullának, mert igazából nem kívánunk foglalkozni a fúvó szélben terjedõ hullámokkal, az egyszerûbb esettel is megelégszünk. A tömegerõket reperezentáló kifejezést az Euler egyenlet a jobboldalán elhagyjuk, vagyis súlytalan közegben terjedõ hullámot vizsgálunk. Ezen elhagyást valamivel elegánsabban is ideológizálhatnánk, ha annak hatását a sztatikus alapmegoldásba szerelnénk be. Egyszerûbb azonban a súlytalan közeg föltevésünk, így azt alkalmazzuk.

Az alapmegoldásokat térben is és idõben is állandóknak tekintjük. Közvetlen folyománya az elõbbieknek az, hogy az alapmegoldások bármely változó (***t, x, y, z***) szerinti deriváltja nulla. Ezen alapmegoldásokra kicsiny, helytõl és idõtõl függõ ***perturbációkat*** − zavarótagokat − ültetünk rá. Valamely alapmegoldás perturbációjáról akkor beszélhetünk, ha ez csak kismértékben módosítja az alapmegoldást, az eredeti megoldás mindvégig domináns marad. Egyenleteinkkel ezen perturbációk viselkedését kívánjuk nyomon követni, s ezen perutbációkat fogjuk hanghullámoknak nevezni. Az eddig elmondottakat az alábbiakban összegezhetjük. Vesszõs mennyiségek jelentik a perturbációkat.

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_o + \rho'(\vec{r}, t), \qquad max(\rho'(\vec{r}, t)) \ll \rho_o$$

$$p(\vec{r}, t) = p_o + p'(\vec{r}, t), \qquad max(p'(\vec{r}, t)) \ll p_o$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = 0 + \vec{v}'(\vec{r}, t) \tag{32}$$

Megemlítenénk −csupán az összehasonlítás kedvéért − hang esetére néhány számadatot.

$p_o \approx 1bar = 10^5 Pa$ emberi beszédhang $p' \approx 10^{-7} bar$, hallásküszöb $p' \approx 10^{-9} bar$

Az alapmegoldás, és a perturbáció felsorolt tulajdonságai, a velük végzett mûveletekre sajátos szabályrendszert írnak elõ. Ezek a következõk:

- $\partial p/\partial x = \partial p'/\partial x$ bármely függvény, bármilyen változó szerinti deriváltja helyettesíthetõ a perturbációt leíró függvény megfelelõ deriváltjával, mivel hely és idõfüggést csak az ezek hordoznak. Ez az átírás egzakt, ebben semmiféle közelítés nincs.
- Ha egy összegben nagy érték mellett egy kicsi szerepel akkor ez utóbbi elhagyható például $\rho\,\partial\vec{v}/\partial t \equiv (\rho_o + \rho')\,\partial\vec{v}/\partial t \approx \rho_o\,\partial\vec{v}/\partial t$. Itt érhetõ tetten a linearizálás, hiszen két ismeretlen függvény szorzata helyett egy (nagy érétkû) konstans és egy ismeretlen függvény szorzatát kaptuk. Ez már közelítést jelent, nagyobb perturbáció amplitudó esetén már jelentõs hibát okozhat.
- Két perturbációs (vesszõs) tag szorzata, mint másodrendben kicsiny tag szintén elhagyható.

Elsõként a $grad(p)$ átalakítását követjük el. Barotrop közegrõl lévén szó, megtehetjük, hogy a nyomás helyfüggését a sûrûségen keresztüli, közvetett függvényként kezeljük, azaz $p = p(\rho(\vec{r},t))$. Ennek gradiensét a közvetett függvény deriválási szabályaival állítjuk elõ

$$grad(p) = \frac{dp}{d\rho} grad(\rho')$$

A $p = (p_o/\rho_o^\kappa)\,\rho^\kappa$ barotróp állapotegyenlet fölhasználásával kapjuk:

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p_o}{\rho_o^\kappa}\rho^{\kappa-1} \approx \kappa \frac{p_o}{\rho_o^\kappa}\rho_o^{\kappa-1} = \kappa \frac{p_o}{\rho_o}$$

Van az Euler egyenletben egy nemlineáris tag, a konvektív derivált $(\vec{v}\nabla)\,\vec{v}$. Õszintén ártatlan szemmel azt mondhatnánk, hogy ez, mint két kicsiny tagot (és egyetlen nagyot sem) tartalmazó szorzat, minden további lelki gyötrelem nélkül elhagyható. Ez azonban

sajnos nincs így, hiszen e benne szerplõ ***Nabla*** mûvelet meglepetéseket okozhat. Az általa produkált érték akkor, ha a sebesség rövid távolságon belül nagyon gyorsan növekszik, (csökken), akkor igen tetemesre nõhet. Másik oldalról is megvilágíthatjuk ugyanezen kifejezés elhanyagolhatóságát. Megmutattuk, hogy a ***Nabla*** operátor monokromatikus síkhullámra az $-ik$ szorzással helyettesíthetõ, ezt pedig $k = 2\pi/\lambda$, vagyis igen rövidhullámú hullámok esetében e nemlineáris tag nem hanyagolható el. Most azt hihetnénk, hogy borzasztó okosak voltunk, de csalódnunk kell e vélekedésünkben. Az elhanyagolás sohasem önmagában a kicsi, vagy a nagy érték alapján történik, hanem két érték összehasonlítása alapján. Két gyorsulás tagunk van, az explicit idõfüggésbõl adódó, és a konvektiv deriváltból származó gyorulás. Az összehasonlítás kedvéért egyszerûsített alakjuk a következõ: $\partial V_x/\partial t + (V_x \nabla) V_x$. A kérdés az, hogy mikor ki a (abszolutértékben) nagyobb, esetleg melyik válik olyan kicsivé, hogy a másik mellett elhagyhatjuk. X irányú síkhullámot föltéve $V_x = V_o * exp(i(\omega t - kx))$, a deriválási mûveletek a következõkhöz vezetnek. $i\omega V_x$ az egyik tag $-i(V_x k)V_x$ pedig a másik. Elhagyva az azonos szorzókat a kérdés az, hogy $\omega ? <? >? kv_o$. Figyelembe véve a hullám fázissebességére kapott összefüggést $c_h = \omega/k$, azt kapjuk, hogy a nemlineáris tag akkor hagyható el, ha $1 \gg (V_o/c_h)$, vagyis, ha a perturbácó sebességamplitudója sokkal kisebb mint a hangsebesség. Ez tehát a mi esetünk.

Ezek után az Euler egyenlet roncsai a következõképpen olvashatók:

$$\rho_o \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\kappa \frac{p_o}{\rho_o} grad(\rho') \qquad (33)$$

A tömegmegmaradást kifejezõ kontinúítási egyenlet átalakításai − figyelembe véve a perturbációk kezelésére fölállított szabályainkat − a következõk:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_o \, div(\vec{v}') + (\vec{v}' \, grad(\rho')) = 0$$

A legutolsó tagot, mint amelyik két piciny perturbációt tartalmaz itt is elhanyagolhatóan kicsinynek tekintjük a többihez képest. A gradienssel kapcsolatos korábbi lelkiéletünket itt most nem éljük tovább. Az utóbbi egyenletbõl tehát a következõ maradt:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_o \, div(\vec{v}') = 0$$

Ez utóbbi egyenlet idõderiváltja, az (34) egyenlet divergenciája

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_o \, div(\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t}) = 0$$

$$\rho_o div(\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t}) = -\kappa \frac{p_o}{\rho_o} div \, grad(\rho') \qquad (34)$$

A mûveleteknél a térkoordináták, és az idõ szerint deriválás sorrendjét fölcseréltük, ezt a számtanórán tanultak alapján megtehetjük, ha a szóbanforgó vegyes deriváltak folytonosak. Fölismerjük a két egyenletben egyaránt szereplõ kifejezést, ezek segítségével e két egyenlet összírható.

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \kappa \frac{p_o}{\rho_o} \Delta(\rho') \qquad (35)$$

Õ a homogén hullámegyenlet. Itt a gázokban terjedõ kisamplitudójú zavarok leírására vezttük le, azonban a fizika számos területén elõbukkan.

Megjegyezzük, hogy a Laplace operátor szokásos jelölését alkalmaztuk: $div\, grad = \nabla^2 = \Delta$.

A hullámegyenlet utóbbi alakjába behelyettesítjük a sûrûségperturbációt leíró síkhullám alakot:

$$\rho'(\vec{r},\, t) = \rho'_o e^{i(\omega\, t - \vec{k}\,\vec{r} + \varphi)}$$

kapjuk az alábbi összefüggést:

$$-\omega^2 \rho'(\vec{r},\, t) = -\kappa \frac{p_o}{\rho_o} k^2 \rho'(\vec{r},\, t)$$

Alkalmaztuk a korábbiakban igazolt, síkhullámokra érvényes következõ deriválási szabályokat: $\partial/\partial t \;\Rightarrow\; i\omega$, valamint $\partial/\partial x \;\Rightarrow\; -ik_x$. Az együtthatók egyenlõségébõl, átrendezés után kapjuk a hanghullámok fázissebességére a következõt:

$$V_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\kappa \frac{p_o}{\rho_o}}$$

Levegõre az adatok kb. $\kappa = 1.4 \;\; p_o = 10^5 Pa \;\; \rho_o = 1.29\, kg/m^3 \;\; V_f = 329\, m/s$ hangsebességet szolgáltatnak.

Az egyesített gáztörvény $p\, v = (m/M)\, RT$ alakja a fázissebességre egy másik formát is sugalmaz, nevezetesen:

$$V_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}}$$

Ez azt mondja, hogy (M és κ által) adott anyagi minõségû gázban a hanghullámok terjedési sebessége csak a gáz (abszolut) hõmérsékletétõl függ.

Doppler effektus.

A ***doppler effektus*** akkor jelentkezik, ha vagy a hullámforrás, vagy az észlelõ −esetleg mindkettõ− mozog a másikhoz viszonyítva. Ekkor a forrás által kibocsátott frekvenciától eltérõ frekvenciát észlelünk. Azt vizsgáljuk elsõként az (15) ábra alapján, hogyan módosul az eredeti λ_o hullámhossz miközben az ***F*** forrás az ***É*** észlelõ felé mozog. A hullám ***t = 0*** idõpontban az ***F*** pontból kibocsátott fázisa (ha úgy tetszik rezgésállapota) egy ***T*** periódusidõ alatt ***É***−be érkezik, miközben a forrás az észlelõ felé elmozdult $V_F T$ távolsággal. Az egy rezgési periódus végét már ebben a pontban bocsátja útjára. A megváltozott λ' hullámhossz így írható:

$$\lambda' = \lambda_o - V_F * T$$

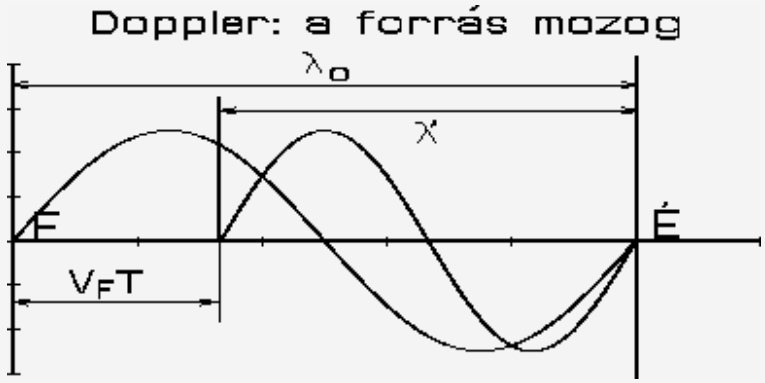
Ha a hang fázissebességét ***Ch***−val jelöljük akkor $\lambda' = C_h / f'$, valamint $f_o = 1/T$ összefüggések alkalmazásával a megváltozott frekvencia a következõképpen adható meg:

$$f' = f_o \frac{C_h}{C_h - V_F}$$

A forrás közeledésekor tehát az eredetinél magasabb frekveciájú hangot hallunk. Távolodó hullámforrás esetén a nevezõben V_F elõjelét ellentétesre változtatjuk, amely

a frekvencia csökkenéséhez vezet.

Figure: A hangforrás ***VF*** sebességgel közeledik az észlelõ felé, az eredeti hullámhossz megváltozik.



Az ábra értelmezésébõl világos, hogy ez a meggondolás ilyen formában csak a ***Ch*** hullám fázissebességnél kisebb sebességû forrás esetén alkalmazható.

Álló hullámforrás, és a forrás felé ***Ve*** sebességgel közeledõ észlelõ esetén annyival több hullámot észlelünk −az állóhelyben észlelhetõ f_o frekvencián túl− amennyi hullám elfér a forrás felé megtett utunkon. Ez az út ***1 s*** alatt ***Ve ,*** az észlelt frelvencia tehát: $f' = f_o + V_e/\lambda_o$ vagy a szokásosabb formája:

$$f' = f_o \frac{C_h + V_e}{C_h}$$

Ugyanezen összefüggések alkalmazhatók a forrás és az észlelõ egyidejû mozgása esetén is. Ilyen esetekben az egyik összefüggés által szolgáltatott f' frekvencia használandó a másik f_o bemenõ frekvenciájaként. Ha az észlelõ nem tisztán a forrás irányába mozog, akkor a sebesség forrás irányú összetevõjét kell ***Ve*** értékeként használnunk. Ugyanez az alapelv alkalmazható, ha a forrás sebessége nem az észlelõ irányába mutat.

Az itt említett Doppler jelenségek mind hanghullámoknál, mind pedig elektromágneses hullámoknál − így a fénynél is − fellépnek, így olyan infomációkat kapunk akár miliárd fényévnyi távolságban levõ galaxisokról is, amelyekhez más módon nem is juthatnánk hozzá.

Hõtani alapok

A termodinamika −a hõtan − a vizsgált termodinamikai rendszer és környezete energetikai kölcsönhatásaival foglalkozik.

Hõtanban a mechanika alap és származtatott mennyiségein túl, a hõtanra jellemzõ mennyiségek bevezetése is szükségessé válik. Alapmennyiségként a hõmérsékletre van szükségünk, azonban a hõmérséklet komoly megalapozását nem vállalhatjuk ezen rövid kurzus során.

Számos jelenséget ismerünk amely a testek hõmérsékletével kapcsolatban fellép. Hõmérsékletnövekedés hatására megváltozik elektromos vezetõképességük, keménységük, színük, alakjuk, akár kémiai összetételük is. Ezek majd mindegyike alkalmas arra, hogy hõmérsékletmérésre alkalmazzuk. Mindennapi alkalmazásban legelterjedtebbek a mechanikai (hõtáguláson alapuló), és az elektromos alapokon nyugvó hõmérõ eszközök. Magasabb hõmérsékletek mérése szinte kizárólag az un. hõmérsékleti sugárzás alapján történik.

Néhány hõmérséklettel kapcsolatos közismert jelenséget foglalnánk össze. Lineáris hõtágulásról a testek lineáris méretének hõmérsékletfüggése kapcsán beszélünk. Így függ pl. egy golyó átmérõje vagy éppen egy vasúti sin hossza is a hõmérséklettõl. Tapasztalataink szerint a szilárd testek hosszméreteinek hõmérsékletfüggése a következõ szabályt követi: $l(t) = l_o(1 + \alpha(t - t_o))$ vagy $l(t) - l_o = \alpha l_o(t - t_o)$

Vegyük észre, hogy ebben még egyszer szerepel a ``lineáris" jelzõ, nevezetesen, hogy a hossznövekedés a hõmérsékletnövekedés lineáris függvénye. Ezt azonban célszerû úgy tekinteni, mint egy általánosabb hõmérsékletfüggés sorfejtésének lineárisra csonkított maradványát. A test anyagára jellemzõ a liníaris hõtágulási együttható:

$$\alpha = \frac{\frac{l(t)-l_o}{l_o}}{t - t_o} \quad \left[\frac{1}{C^o}\right]$$

A jelentése kiolvasható: egységnyi hõmésékletnövekedés hatására bekövetkezõ relatív (azaz az eredeti hosszhoz viszonyított) hosszúságváltozás. Folyadékoknak, gázoknak önálló alakjuk nincs, így a lineáris hõtágulás csak szilárd testeknél értelmezett jelenség,

A lineáris méretek megváltozása miatt megváltoznak a keresztmetszetek, és a térfogatok is. Egy ***lo*** élhosszúságú négyzet ***A*** keresztmetszetének hõmérsékletfüggése:

$$A = l_o^2 (1 + \alpha(t - t_o))^2 = A_o(1 + 2\alpha(t - t_o) + (\alpha(t - t_o))^2)$$

Mivel rendszerint $1 \gg \alpha(t - t_o)$ ennek négyzete elhanyagolható a lineáris (vegyes szorzat) mellett, igy tehát jó közelítésként kapjuk: $A(t) = A_o(1 + 2\alpha(t - t_o))$

Testek térfogatára alkalmazva ugyanezen közelítést $V = V_o(1 + \beta(t - t_o))$ ahol a β az un. köbös (azaz térfogati) hõtágulási együttható. Folyadékoknál ez egy önálló anyagi jellemzõ, szilárd anyagoknál $\beta = 3\alpha$. Néhány számszerû adatot megadunk abban a reményben, hogy legalább a nagyságrendekre emlékezni fogunk. A vas lineáris hõtágulási együtthatója (20 C^o−nál) $\alpha = 1.62\,10^{-5}\,1/C^o$. A víz köbös hõtágulási együtthatója (18 C^o−on) $\beta = 1.3\,10^{-4}\,1/C^o$

A térfogat hõmérsékletfüggése következtében a folyadékok sûrûsége hõmérsékletfüggõ,

$$\rho = m/V = \rho_o/(1 + \beta\,(t - t_o))$$

Ezért melegítjük alúlról a folyadékokat, s nem felülrõl, ugyanis az alsó, felmelegített folyadékréteg sûrûsége lecsökken, az archimedeszi felhajtóerõ e könnyebb folyadékréteget fölhajtja, miközben helyére hideg folyadék áramlik. Az így kialakuló folyadék cirkulációt ***spontán konvekciónak*** nevezzük, s e folyamat indulását, nevezetesen amikor a lenti kisebb sûrûségû folyadék nem képes a tartósan az eredeti helyén maradni, konvektív instabilitásnak nevezzük.

A manapság széles körben használatos Celsius skála, 100 egyenlõ (?mi alapján egyenlõ?) részre osztja a víz forráspontja, és a jég olvadáspontja közötti hõmérsékleti tartományt (normál légköri nyomáson). Ettõl a zéruspont eltolásában különbözik a termodinamikában kötelezõen használandó abszolut, vagy más néven a Kelvin skála. A hõmérséklet különbségek (növekmények) e két skálán megegyeznek. Hõmérséklet különbségek esetében tehát átváltási ceremónia nélkül a C^o és a ***K*** egységek jelei szabadon csereberélhetõk. Hõmérséklet szokványos jelölése ***T*** az abszolut, ***t*** a C^o−ban mért hõmérsékletet jelöli. Nem pontos ugyan, de leggyakrabban ezt használjuk a két skála közötti átjáráshoz: ***T = t + 273.***

A hõtani alapfeladványok másik közismert csoportja a ***kalorimetria*** témakörébe tartozik. A kalorimetria olyan nem mechanikai energiaközlési formával foglalkozik, amelyet hõnek nevezünk. Egy tégladarabot fõlemelhetünk valamilyen magasságra, vagy éppen ugyanezen mennyiségû munkával pl. vízszintesen fölgyorsíthatjuk a testet. Mindkét esetben mechanikai munkát végeztünk. s ez az energiközlés rendezett, makroszkopikus elmozduláshoz, mozgáshoz kapcsolódott. Az energiaközlés eredménye mindkét esetben ``látható".

Van azonban olyan energiaközlési forma, amely a testet alkotó atomok, molekulák rendezettlen mozgásához kapcsolódik, s amelynek sem a folyamatát, s (gyakran) sem az eredményét nem láthatjuk. Ellenben ha megfogjuk az energiaközlés elõtt és után az energiaközlés eredményét a test hõmérsékletemelkedéseként észleljük. Tapasztalataink szerint (általában) adott ***m*** tömegû test hõmérsékletének ***(t1−to)*** mértékû emeléséhez szükséges ***Q*** energia arányos a melegített tömeggel, és a létrehozott hõmérsékletnövekedéssel.

$$Q = c\,m\,(t_1 - t_o) \tag{36}$$

Az itt szereplõ ***c*** arányossági tényezõt ***fajhõnek*** nevezzük, jelentése átrendezés után kiolvasható, egységnyi tömegû anyag hõmérsékletének $1C^o$−al való emeléséhez

szükséges (hõközlés formájú) energiát jelenti. Ezek szerint ***c*** egysége J/kgC^o. Értéke az illetõ anyagra, és alkalmanként az energiaközlés módjára is jellemzõ. Azon esetekben, amikor a hõközlés jelentõs térfogatváltozással jár, a hõközlés formájában közölt energia egy része térfogati munkára fordítódik, így kevesebb energia jut a hõmérsékletnövekedés energia fedezetére.

Alkalmazzuk még a fajhõvel rokon hõkapacitás, és a mólhõ mennyiségeket is. ***Hõkapacitás***nak nevezzük a ***c*m*** szorzatot amely (36) átrendezése alapján közölt hõ (Q), és a hõközlés által létrehozott hõmérsékletváltozás hányadosát adja meg. A nagyobb hõkapacitású test hõmérséklete kevésbé változik meg ugyanazon hõközlés esetén. Késõbb gyakran találkozunk majd a ***hõtartály*** fogalmával. Ez egy nagy, nagy hõkapacitású test, amelynek a hõmérséklete nem változik (lényegesen) akkor sem, ha hõt vonunk el tõle, vagy éppen hõt közlünk vele, −ezzel biztosítunk általában ***izoterm,*** vagyis állandó hõmérsékletû környezetet az ezt igénylõ folyamatok számára.

Egy speciális anyagmennyiség, − 1 mólnyi vagyis ***m=M*** mennyiségû anyag− hõkapacitását ***mólhõ***nek nevezzük. ***C = c M.*** Ennek használatával a kalorimetriai egyenlet más formában is írható:

$$Q = c\,m\,(t_1 - t_o) = cM\,\frac{m}{M}\,(t_1 - t_o) = C\,n\,(t_1 - t_o)$$

Az itt megjelenõ ***n=m/M*** mólszám (vagy móltört), az ***m*** tömegû anyag mennyiségét adja meg mól egységekben.

Ha kaloriméterbe ***c1*** fajhõjû ***m1*** és ***c2*** fajhõjû ***m2*** tömegeket teszünk ***t1*** és ***t2*** kiinduló hõmérsrékletekkel, akkor némi idõ eltelte után egy közös ***to*** hõmérséklet alakul ki. Mivel a kaloriméter kifelé hõszigetelt, a belerakott dolgok egymásnak adhatnak le, illetve egymástól vehetnek föl energiát vagyis a ***Q1+Q2=0*** összefüggést alkalmazhatjuk.

A késõbbiekben látni fogjuk, hogy a kalorimetria (36) alapösszefüggése számos alkalommal nem alkalmazható. Ha összenyomjuk a gázokat, akkor azok

fölmelegszenek még akkor is, ha nem közöltünk hõt a gázzal. Ilyenkor hõközlés nincs, hõmérsékletemelkedés pedig van. Gázok izotermikus expanziójánál (állandó hõmérsékletû kiterjedésekor) a hõmérséklet változatlansága ellenére hõfelvétel történik. Izotermikus hõfelvétellel járó folyamat a közismert (jég) olvadás, és a forralás. E fázisátalakulás (szilárd fázisból folyadék fázisba való átmenet az olvadás) során az ***m*** tömegû jég megolvasztásához szükséges energiát a következõ összefüggésbõl számíthatjuk: $Q = \alpha m$. Ebben α a fázisátalakulási hõ, vagy egyszerûen olvadáshõ, 1 kg tömegû ***0 C'***−os jég ***0 C'***−os vízzé történõ megolvasztásához szükséges energiát jelenti.

Subsections

- Termodinamikai rendszer és a 0.−ik fõtétel.
- Az I. fõtétel
  - ♦ Körfolyamatok
- A II. fõtétel
- Ideális gáz speciális állapotváltozásai.
  - ♦ Carnot féle körfolyamat
- A hõvezetés differenciálegyenlete

Termodinamikai rendszer és a 0.−ik fõtétel.

Természeti környezetünk meghatározott tulajdonságú falakkal leválasztott részét ***termodinamikai rendszer***nek nevezzük. A falak csak meghatározott tipusú kölcsönhatást engednek meg a környezettel. Acélpalackba zárt gáz térfogata nem változik, mechanikai kölcsönhatást ez a fal nem enged meg, de ha a külsõ hõmérséklet megváltozik, hosszabb−rövidebb idõ elteltével a gáz hõmérséklete is követi ezt a változást. Az acélfal lehetõvé teszi a termikus kölcsönhatást.

A termodinamikai rendszer állapotát makrószkópikus állapothatározókkal jellemezzük. Ezen állapothatározók a termodinamikai rendszer egészét jellemzik. Az állapothatározókat az extenzív és intenzív kategóriák valamelyikébe soroljuk. Egy termodinamikai rendszer annyi kölcsönhatásban vehet részt ahány extenzív mennyiség a rendszer jellemzéséhez szükséges. Egy−egy tisztán körülhatárolt kölcsönhatást megengedõ falat egy intenzív és egy extenzív paraméterrel jellemezhetünk. Amennyiben a környezet (amely lehet egy másik termodinamikai rendszer is) és a vizsgált termodinamikai rendszer valamely intenzív paramétere különbözik, és ha a határoló fal megengedi az ezen intenzív paraméterhez tartozó extenzív mennyiség áramlását, akkor megindul ezen extenzív mennyiség árama a két rendszer között. Ekkor azt mondjuk, hogy a két rendszer nincs egyensúlyban. Az áram csökkenti az intenzív paraméterek különbségét.

Példa: Üveggömbbe zárt gázt vékony üvegcsõ köt össze a környezettel. Az üvegcsõben levõ higanycsepp szabadon elmozdulhat, azaz ez a ``fal'' lehetõvé teszi a termodinamikai rendszer és a környezet mechanikai kölcsönhatását. Esetünkben a gömbbe zárt gázmennyiség alkotja a termodinamikai rendszert, az atmoszféra a környezetet, s az üvegcsõben levõ higanycsepp a mechanikai kölcsönhatást megengedõ falat. Ha pl. az üveggömben a nyomás nagyobb az atmoszféra nyomásánál, akkor a higanycsepp addig mozog kifelé, amíg a belsõ és a külsõ gáznyomás ki nem egyenlítõdik. Ezen kölcsönhatás intenzív paramétere tehát a nyomás. A higanycsepp kifelé való mozgása során a környezet térfogatot ad át a termodinamikai rendszernek. E kölcsönhatáshoz tartozó extenzív mennyiség tehát a térfogat.

Két termodinamikai rendszer akkor és csak akkor van egyensúlyban a fal által megengedett kölcsönhatásra nézve, ha a kölcsönhatáshoz tartozó intenzív mennyiség(ek) a két rendszerben megegyeznek. Ez a ***termodinamika 0−ik fõtétele***.

Az ``*akkor és csak akkor*'' rituális kifejezés arra utal, hogy egy oda−vissza olvasható következtetésrõl van szó, jelen esetben ha az intenzivek megegyeznek, akkor egyensúlyban van a két rendszer, illetve az egyensúlyból következik az megfelelõ intenzív állapotjelzõk egyenlõsége.

Némi magyarázatot igényel a tétel nem szokványos elnevezése. Habár a termodinamika fõtételei közül ezt utolsónak fogalmazták meg, logikailag az egész termodinamika élére kívánkozik, így jutott a ***0−ik*** fõtétel elnevezéshez.

Gyakran szereplõ fogalom az ``egy termodinamikai rendszer egyensúlya" is. Egy termodinamikai rendszer akkor van egyensúlyban (önmagával), ha akárhogy is osztjuk képzeletben a termodinamika rendszert részrendszerekre, az így nyert részrendszerek a 0−ik fõtétel szerint minden (az illetõ rendszerre értelmezett) kölcsönhatás tekintetében egyensúlyban vannak. Ez teszi lehetõvé, hogy ilyen jellegû kifejezések jelenjek meg mondatainkban, pl. ``a rendszer hõmérséklete", ``nyomása", vagyis hogy pl. hõmérsékleti térkép helyett egyetlen érték jellemezze az egész termodinamikai rendszert.

Az egyensúly fogalma a sztatikához kötõdik és nem a (termo−) dinamikához. Hogy mégis az ``*egyensúly*" szót egy mondatban emlithessük a ``*termodinamikai rendszer változása*"−ival, be kell vezetni a kvázisztatikus folyamat fogalmát. Ez alatt olyan folyamatot értünk, amelynek minden közbensõ fázisa egyúttal egyensúlyi állapot is. Azt is mondhatnánk, hogy a folyamat olyan lassú, hogy az intenzívek kiegyenlítõdéséhez elegendõ idõ áll rendelkezésre. Megjegyezzük azonban azt, hogy a termodinamikában az ***idõ*** mint változó nem játszik szerepet. (a hõvezetés differenciálegyenletét kivéve)

Az I. fõtétel

A termodinamikai rendszer állapotát extenzív és intenzív állapothatározók jellemzik. Egyensúlyban levõ termodinamikai rendszer intenzív állapothatározói nem függenek a helytõl, minden pontban ugyanaz a hõmérséklet, a nyomás, stb. így típusonként egyetlen intenzív értékkel jellemezzük az egész rendszert. Az extenzív mennyiségek pl. térfogat, tömeg, értelemszerûen az egész rendszert jellemzik. A rendszer valamely állapota, az állapothatározók meghatározott értékeit jelenti. Szokás ezeket makroszkópikus állapothatározóknak is nevezni, mivel a rendszer egészét, globálisan

jellemzik. Van egy nevezetes, a rendszer állapota által egyértelmûen meghatározott extenzív mennyiség, amelyet belsõ energiának nevezünk. Mivel Õ az állapothatározók egyértelmû függvénye, maga is állapothatározónak tekinthetõ. A termodinamika középpontjában a termodinamikai rendszer energetikai kölcsönhatásai állnak, így a belsõ is energia meglehetõsen központi figura ezen a színpadon.

A termodinamika elsõ axiómája, amelyet hagyományosan I. fõtételnek neveznek, egyszerû leltárnak tûnik. Eszerint a termodinamikai rendszer belsõ energiájának változása egyenlõ a rendszerrel közölt hõ és a rendszeren végzett munka összegével.

$$dU = \delta Q + \delta W \tag{37}$$

Ehhez, tartalmilag hasonló állításokkal már találkoztunk, ilyen volt például a munkatétel tömegpontoknál (a mozgási energia megváltozása egyenlõ az eredõ erõ munkájával), de némileg rokon tartalmú az extenzívek mérlegegyenlete is.

(37) a termodinamika I. fõtételének differenciális − kis változásokra érvényes − alakja. Itt föltettük, s a továbbiakban is föltesszük, hogy a termodinamikai rendszerben nem játszódnak le kémiai átalakulások, ellenkezõ esetben μdN (kémiai−potenciál * mólszámváltozás) tipusú tagokat is be kellene vennünk a tételbe. (pl. benzingõz−levegõ keverék elégetésekor). Alább a véges (makroszkopikus, vagy nagybani) állapotváltozásokra érvényes forma látható.

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12} \tag{38}$$

A Q hõközlés és a W munka energiaközlési formák, a munka a makroszkópikus,

rendezett mozgáshoz, a hõközlés pedig atomi szinten jelentkezõ rendezetlen mozgáshoz társul. Ezek csak folyamat során értelmezett mennyiségek. A belsõenergia változását a rendszer kezdõ és végállapota meghatározza, az állapotváltozás során közölt hõ, és végzett munka függ attól is, hogy a rendszer milyen úton (milyen állapotok sorozatán keresztül) jut el a megadott kezdõállapotból a végállapotba.

Subsections

- Körfolyamatok

Körfolyamatok

Körfolyamatnak nevezzük azokat a folyamatokat amelyeknél a termodinamikai rendszer kezdõ és végállapota megegyezik. A körfolyamat lejátszódása után a rendszer eredeti termodinamikai állapotába jut vissza, vagyis a körfolyamat változatlan feltételek mellett újrajátszható, ez teszi lehetõvé a ciklikus mûködést. A körfolyamat azonban változásokat hoz létre a termodinamikai rendszer környezén, pl. hõt von el egy hõtartályból, hõt ad le egy másiknak, munkát végez a környezetén. A környezet tehát nem jut vissza eredeti állapotába a teljes körfolyamat lejátszásakor. Az olyan körfolyamatokat, amelyek (miután egyik irányba végigfutottak) fordított irányú lejátszás során a környezetet is visszajuttatják az eredeti állapotba, ***reverzibílis*** (megfodítható) ***körfolyamat***oknak nevezzük.

A körfolyamat során mivel a rendszer eredeti állapotába jut vissza, az ***E*** belsõenergia változása 0. Ez a tény az I. fõtételnél a következõkhöz vezet:

$$\oint dE = \oint \delta Q + \oint \delta W \quad \Rightarrow \quad -\oint \delta W = \oint \delta Q$$

A termodinamikai rendszer a körfolyamat során $W'^{*} = -\oint \delta W$ munkát végzett a környezetén. $\oint \delta Q$ a rendszer által a körfolyamat során fölvett/leadott hõk elõjeles összegét (integrálját) jelenti. Ezt szét szokás bontani olyan részfolyamatokra, amelyekél a rendszer energiát vesz föl környezetébõl. illetve olyan részfolyamatokra, amelyeknél a rendszer ad le energiát hõ formájában. $Q_+ = \oint \delta Q_+$ jelenti a fölvett hõt, ha a következõ definícióval élünk: $\delta Q_+ = \delta Q$ ha $\delta Q > 0$, egyébként 0. A hasonlóan bevezett Q_-−t is felhasználva a körfolyamatokra átírt I. fõtétel a következõképpen hangzik:

$$W'^{*} = Q_+ + Q_- \tag{39}$$

Érdemes felfigyelnünk arra a tényre, hogy a körfolyamatunkban szemérmetlen egyszerûséggel ``környezet" −nek nevezett valami legalább három különbözõ környezetet jelent. Nyilván nem ugyanabból a környezetbõl vesz fel hõt, amelybe lead, s a mechanikai munkát sem azon a környezeten végzi amibõl pl. a hõt felveszi. Az egyes környezetekkel vagy egymást kizáró módon − felváltva − kerül kapcsolatba a termodinamikai rendszer (pl. Q_+, Q_-), vagy pedig egyidejûleg többel is (pl. W'^{*}, Q_+).

Azt a képzeletbeli gépet, amely energia bevezetése nélkül képes munkát végezni, elsõfajú örökmozgónak (perpeetum mobile) nevezzük. Ez a jelöléseinkkel azt jelentené, hogy

$$Q_+ + Q_- = 0, \quad de \quad W'^{*} \neq 0$$

Az elsõ fõtétel tehát ennek lehetõségét tagadja.

Azt a szintén csak képzeletbeli (ciklikusan mûködõ) gépet, amely egyetlen hõtartályból fölvett energiát azzal egyenértékû mechanikai munkává lenne képes átalakítani, anélkül, hogy a ciklus alatt egy másik hõtartálynak energiát adna le ($Q_- = 0$), másodfajú örökmozgónak nevezzük. Ez a jelöléseinkkel azt jelentené, hogy :

$$Q_- = 0 \qquad W'^* = Q_+$$

Az elsõ fõtétel szerint ugyan energetikai szempontból minden rendben van, azonban a termodinamika II. fõtétele tiltja.

A körfolyamat során végzett mechanikai munka lehet pozitív, $W'^* > 0$ ekkor erõgépi ciklusról beszélünk. Ha a környezet végez munkát a rendszeren, vagyis $W'^* < 0$ akkor attól függõen, hogy (39)−ben mi a fontos nekünk, $Q_+, \; vagy \; Q_-$ más−más elnevezést használunk. Ha a Q_+ fontos számunkra (a rendszer által fölvett, vagyis a környezettõl elvont hõ), akkor õ egy hûtõgép, ha pedig a Q_- a fontos (azaz a rendszer által a környezet felé leadott hõ), akkor azt mondjuk, hogy õ egy hõszivattyú. Ezen gépeket minõsíthetiük azzal, hogy mit kapunk, s milyen áron. Az erõgépi ciklus hatásfoka: $\eta = W'^*/Q_+$ vagyis a termodinamikai rendszer által egy ciklus alatt végzett munka és a rendszerhez vezetett hõ (befektetett energia) aránya. A másik két üzemmód során a környezet mechanikai munkát végez a termodinamikai rendszeren (pl. villanymotor forgatja a hûtõgép kompresszorát), ekkor hatásfok helvett az illetõ berendezés jóságáról beszélünk, pl. hõszivattyú esetén a jóság: $Q_-/|W'^*|$.

A II. fõtétel

Õsi tapasztalat az, hogy ha a nagyfröccsös poharunkba jégkockát teszünk, az elõbb−utóbb elolvad, s a ``folyadék" többi része lehül. A tartós szemlélõdés ellenére sem sikerült tetten érni az ellenkezõ irányú folyamatot, nevezetesen amikor a hideg lötty egy része felmelegszik, miközben magától a pohár valamely részén egy tisztavíz

anyagú jégkocka keletkezik. Ezen elképzelt folyamatra minden eddigi természeti törvényt egzaktul rá tudunk illeszteni, a tömegmegmaradást anyagfajtánként, az I. fõtételt (most ez szimpla kalorimetria), a folyamat mégsem megy ***magától*** ebbe az irányba. Természetesen százával sorolhatnánk azokat a hasonló tapasztalati tényeket, amelyek arra utalnak, hogy a természetben lejátszódó spontán (külsõ kényszer nélkül, magától végbemenõ) folyamatoknak meghatározott iránya van. A termodinamika II. fõtétele különbözõ megfogalmazásokban ezen fõmotívum körül forog. Úgy tûnik, hogy a termodinamikával foglalkozó nagyobb tudósokat nem hagyták addig meghalni amíg a maguk II. fõtétel megfogalmazásait az utókorra nem hagyományozták. Így aztán számos megfogalmazása forog közkézen.

Hõ hidegebb testrõl melegebb testre magától nem megy át.

Planck: Nem lehet olyan periódikusan mûködõ készüléket szerkeszteni, amelynek mûködése kizárólag abból állna, hogy egy hõtartály hõtartalmát (mondjunk inkább belsõ energiát) teljes egészében mechanikai munkává alakítja át. stb.

Zárt termodinamikai rendszer alatt környezetetétõl elszigetelt, a környezettel semmiféle kölcsönhatásban nem álló rendszert értünk. A II. fõttétel egy megfogalmazása szerint zárt rendszerben csak olyan folyamatok mehetnek végbe, amelyek során a rendszer rendezetlensége nem csökken. Ez rendezetlenség növekedést jelent amennyiben folyamatról van szó, illetve a rendezetlenség mértéke nem változik, amennyiben elérte a rendezetlenség maximumát. Ez egészen érdekes következtetésekhez vezet. Ha zárt rendszerünket két, kölcsönhatásban álló részrendszerre bontjuk, és az egyik részrendszer oly módon hat a másik részrendszerre, hogy abban a rendezettség növekszik, akkor abban a rendszerben amely a másik rendezettségét növelte, a rendezetlenség mértéke sokkal nagyobb mértékben kell növekedjen mint a rendezetlenség csökkenése a másik rendszerben. Így kapunk ugyanis a két rendszer alkotta zárt rendszerre rendezetlenség növekedést. (Így tessék rendet rakni a szobában !)

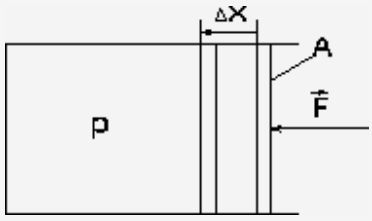
A rendezettlenség mértékét termodinamikában az un. entrópiával adjuk meg. Ez egy eztenzív mennyiség, amely a fentiek alapján nem lehet megmaradó mennyiség.

Ideális gáz speciális állapotváltozásai.

A termodinamika eddigi tárgyalása során még csak említést sem tettünk arról, hogy milyen anyag alkotja termodinamikai rendszerünket. Úgy tartják, hogy a fizikának két olyan területe van, amely az összes többi területre érvényes és kötelezõ kijelentéseket tesz, a termodinamika, és a speciális relativitás elmélete.

A továbbiakban ideális gáz speciális állapotváltozásait vizsgáljuk, s elõállítjuk azokat a speciális folyamatra jellemzõ mennyiségeket, amelyek az I. fõtételben is szerepelnek. A gázmennyiséget az állapotváltozások során állandónak tekintjük, s föltesszük azt is, hogy kémiai átalakulás nem következik be. Két ok miatt foglalkozunk az ideális gázzal. Az egyik ok az, hogy számos mûszaki folyamat munkaközege gáz, a másik nem kevésbé fontos, azonban kevéssé hangsúlyozott ok az, hogy csupán ideális gázok állapotegyenletét ismerjük pontosan.

Figure: Térfogati munka



Az ***A*** alapterületû dugattyú elmozdításakor a gáztömegen végzett munka a megadható mint: $F\,\Delta x = p\,A\,\Delta x = -p\,\Delta V$. Itt ΔV jelöli a bekövetkezett térfogatváltozást. E munkát térfogati munkának nevezzük.

Izobár állapotváltozás során nem változik a gáz nyomása $p,\ V_1,\ T_1$ kiinduló állapotból a $p,\ V_2,\ T_2$ állapotba kerül. Ekkor a gázon végzett térfogati munka integrálás helyett

egyszerû szorzással számítható ki $W_{1,2} = -p\,(V_2 - V_1)$, a folyamat során fölvett hõ $Q_{1,2} = n\,C_p(T_2 - T_1)$ összefüggéssel adható meg, a belsõenergia változása a két állapothoz tartozó belsõenergia különbsége $U_2 - U_1 = n\,C_v(T_2 - T_1)$. Az elsõ fõtétel aktuális alakja tehát

$$U_2 - U_1 = Q_{1,2} + W_{1,2} \qquad n\,C_v\,(T_2 - T_1) = n\,C_p\,(T_2 - T_1) - p\,(V_2 - V_1)$$

A $p\,V_1 = n\,R\,T_1$ összefüggés, és a 2−es állapotra felírt változata alapján $p\,(V_2 - V_1) = n\,R\,(T_2 - T_1)$ formára átírható. Ennek alkalmazásával kapjuk $n\,C_v\,(T_2 - T_1) = n\,C_p\,(T_2 - T_1) - n\,R\,(T_2 - T_1)$, s végül némi együgyûsítés után kapjuk. $C_v = C_p - R$. Ez az állandó nyomás mellett, és állandó térfogat melett mért mólhõk kapcsolata mint ***Robert−Mayer egyenlet*** forog közkézen: $R = C_p - C_v$. Ideális gázok mólhõi tehát nem függetlenek egymástól.

Néhány fizikai, és történeti megjegyzést tennénk az állandó nyomású állapotváltozás kapcsán. Ha állandó nyomás mellett növeljük a hõmérsékletet, akkor a térfogat nõ, a rendszer munkát végez környezetén. A közölt hõ egy része tehát a környezeten végzett munkára fodítódik, s a többi a belsõ energiát növeli.

A hõmérséklet növekedésével egyenes arányban nõ a térfogat, $V = \frac{nR}{p}T$ s ha ezt ábrázoljuk bármilyen hõmérsékleti skálát is alkalmazva, már szobahõmérséklet környéki adatokból következtetni tudunk az abszolut zérusfok létezésére és értékére.

Izochor állapováltozás az állandó térfogat mellett (***dV=0***) bekövetkezõ folyamatot jelenti. A térfogati munka ekkor 0. A rendszerrel közölt hõ teljes mértékben a belsõ energia növelésére fordítódik. $dU = \delta Q = n\,C_v\,dT$

Izoterm az állapotváltozás akkor, ha termodinamikai rendszer hõmérséklete nem változik. Ez idális gázoknál − ahol a belsõ energia csak a hõmérséklettõl függ − a belsõ energia változatlanságát is jelenti, vagyis $dU = 0$. Az I. fõtételbõl ekkor a következõk

maradnak $\delta Q = pdV$. A rendszerrel közölt elemi hõ teljes mértékben a környezeten végzett elemi munkává alakult. Ennek a (rész−) folyamatnak a hatásfoka tehát 1. Ez az állítás nem tévesztendõ össze a II fõtétel ciklikusan mûködõ hõerõgépekre vonatkozó kijelentésével. Megjegyzést célszerû fûzni még ahhoz is, hogy habár a hõmérséklet nem változik, mégis van energiaközlés hõfelvétel formájában, vagyis az a reáltanodás "kalorimetriai egyenlet", amely szerint $Q_{1,2} = c\,m\,(T_2 - T_1)$ itt nem (−sem) érvényes. Ekkor az általános gáztörvény Boyle−Mariott törvényévé egyszerûsödik: $pV = p_1V_1$. Ez utóbbi állandó érték másképpen is kifejezhetõ $p_1V_1 = n\,R\,T_1$. A gáz által végzett térfogati munka $\delta W' = pdV$ kifejezésében a nyomás a térfogat függvényeként megadható, így az integrálás a következõkhöz vezet:

$$Q_{1,2} = W'_{1,2} = n\,R\,T_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = n\,R\,T_1\,ln(\frac{V_2}{V_1})$$

Állandó hõmérsékletû állapotváltozást úgy vélünk megvalósíthatónak, hogy a termodinamikai rendszerünket termikusan hozzákapcsoljuk egy igen nagy hõkapacitású hõtartályhoz. Ennek hõmérséklete energia elvonás esetén sem csökken.

Környezetétõl termikusan elszigetelt rendszer állapotváltozását ***adiabatikus*** állapotváltozásnak nevezzük, vagyis $\delta Q = 0$. Alkalmanként a folyamat gyorsasága az amire hivatkozva a folyamatot adiabatikusként kezeljük, mondván hogy a rendszer nem képes rövid idõ alatt környezetének hõt leadni. Ilyen pl. a hanghullámok esete, amikoris semmiféle szigetelés nincs, mégis az adiabatikus állapotegyenlet adja a jobb eredményt a hangsebességre az izotermikussal szemben.

Az I. fõtétel speciális alakja ekkor: $dU = -pdV = -\delta W'$, ennek makroszkopikus megfelelõje

$$-\int_1^2 p\,dV = U_2 - U_1 = n\,C_v\,(T_2 - T_1)$$

A rendszeren végzett elemi munkával egyenlõ a belsõ energia változása, illetve, ha adiabatikus expanzió során munkát végez a termodinamikai rendszer a környezetén, akkor ezt csak saját belsõ energiája rovására teheti: $\delta W' = -dU$, . Ezek alpján minden formula alkalmazás nélkül is állíthatjuk, hogy az adiabatikusan összenyomott gáz fölmelegszik (lásd: biciklipumpa, a dízelmotorok mûködése), adiabatikusan kitáguló pedig lehül. (lásd a kiszúrt szódavizes patron jegesedése).

Adiabatikus állapotváltozásnál, túl azon hogy az eredeti gáztörvény változatlanul fönnáll, szûkebb kapcsolat is megállapitható az állapothtározók között. Az elsõ fõtétel így hangzik ekkor: $n\,C_v\,dT = -pdV$. Az általános gáztörvényböl $\boldsymbol{p}$−t kifejezhetjük $p = nRT/V$, behelyettesítés, és némi átrendezés után a következõ differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{dT}{T} = -(\frac{R}{C_v})\frac{dV}{V}$$

Ennek integrálásával kapjuk az egyik Poisson egyenletet $T\,V^{\kappa-1} = konst$. Minimális kézügyességgel az elõbbi formula, valamint az általános gáztörvénynek felhasználásával a további két, (más−más változópárok közötti) Poisson egyenlet gyárható. pl $pV^{\kappa} = konst$.

Fölhasználtuk a Robert−Mayer egyenletet $R = C_p - C_v$ valalmint az adiabatikus kitevõ definicióját: $\kappa = C_p/C_v$

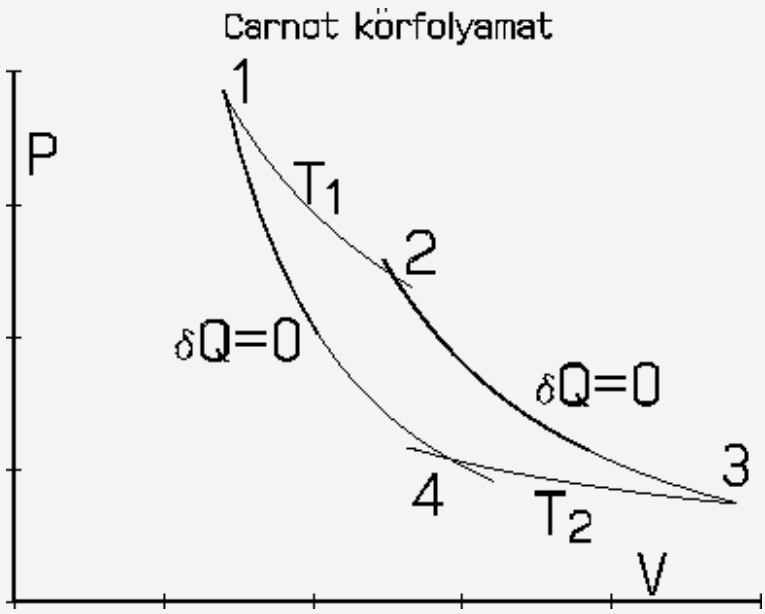
Subsections

- Carnot féle körfolyamat

Carnot féle körfolyamat

Ideális gáz megismert állapotváltozásaiból számos körfolyamatot rakhatunk össze. E körfolyamatok egyike az un. Carnot féle körfolyamat kitüntetett szerepet játszik a hõerõgépek elméletében is, és történetében is.

Figure: Carnot körfolyamat P−V diagramja.



Amint az a (17) ábrából is kiolvasható e körfolyamat, két izoterm és két adiabatikus állapotváltozásból áll össze. Az egyes állapotok sorszámozásának megfelelõ körüljárás (1−2−...) esetén erõgépi ciklusról beszélünk. Fordított körüljárási irány esetén a ciklus hûtõgépként / hõszivattyúként mûködik.

A ***Carnot−féle körfolyamat*** arról nevezetes, hogy **az adott hõmérsékleti határok közö**tt lejátszódó körfolyamatok közül a Carnot körfolyamat hatásfoka a legnagyobb, így tehát elvi felsõ korlátot jelent az adott hõmérsékleti határok között mûködõ más körfolyamatok

hatásfokára.

Az egyes részfolyamatokra elvégzett integrálokból varrjuk össze a körfolyamatra jellemzõ $\oint \delta W$ típusú körintegrálokat. Gázok speciális állapotváltozásainál már kiszámolt folyamat jellemzõ mennyiségeket fogjuk itt hasznosítani..

A ***T1*** (magasabb) hõmérsékletû izoterma mentén az 1−2 expanzió során a rendszer munkát végez környezetén. A fölvett hõ egyúttal a rendszer által végzett munkát is adja:

$$Q_+ \equiv Q_{1,2} = W'_{1,2} = n\,R\,T_1\,ln(\frac{V_2}{V_1})$$

A 2−3 adiabatikus expanzió során a rendszer belsõ energiájának csökkenésével egyenlõ munkát végez környezetén:

$$W'_{2,3} = -(U_2 - U_1) - nC_v(T_2 - T_1)$$

Hõközlés természetesen nincs.

A 3−4 folyamat ***T2*** (***T1***−tõl kisebb) állandó hõmérsékletû kompresszió. A rendszer hõt ad le a ***T2*** alacsonyabb hõmérsékletû környezet felé, a rendszer által végzett munka ekkor negatív.

$$Q_- \equiv Q_{3,4} = W'_{3,4} = n\,R\,T_2\,ln(\frac{V_3}{V_4})$$

A 4−1 adiabatikus folyamattal tér vissza a rendszer eredeti állapotába. A munkavégzés itt is a belsõenergia változással egyenlõ

$$W'_{4,1} = -(U_1 - U_4) = -nC_v(T_1 - T_2)$$

A körfolyamat során felvett hõ $Q_+ \equiv Q_{1,2} = n\,R T_1\,ln(\frac{V_2}{V_1})$

A körfolyamat során felvett hõk elõjeles összege amely a körfolyamat során végzett W'^* munkát adja. :

$$W'^* = Q_+ + Q_- = n\,R T_1\,ln(\tfrac{V_2}{V_1}) + n\,R T_2 ln(\tfrac{V_4}{V_3})$$

Az adiabatikus állapotváltozások során végzett munkák kiestek az azonos nagyságú, ellentétes elõjelû belsõ energia változás okán. A hatásfok a körfolyamat során végzett munka és a bevezetett hõ aránya:

$$\eta = \frac{W'^*}{Q_+} = \frac{n\,R T_1\,ln(\frac{V_2}{V_1}) + n\,R T_2 ln(\frac{V_4}{V_3})}{n\,R T_1\,ln(\frac{V_2}{V_1})}$$

igazán jelentõs egyszerûsítést érhetünk el, a formulában, ha az ln függvény mögötti ***V4/V3*** arányt ***V2/V1*** arányra át tudjuk írni. Az 1−es és 4−es állapotok ugyanazon adiabatán helyezkednek el így írhatjuk $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_4^{\kappa-1}$. Ugyanilyen összefüggés áll fönn 2 és 3 között is. $T_1 V_2^{\kappa-1} = T_2 V_3^{\kappa-1}$. A két egyenlõség osztása a $V_1/V_2 = V_4/V_3$ arányhoz vezet. Ennek visszaírása a hatásfok kifejezésébe a következõt eredményezi:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

A Carnot körfolyamat hatásfoka csak a határoló izotermák hõmérsékletétõl függ.

A Carnot ciklus fordított irányú lejátszása esetén

A hõvezetés differenciálegyenlete

Olyan közegek esetén, amelyek térfogati hõtágulása nem jelentõs, −ilyenek pl. a szilárd anyagok− nem teszünk különbséget az állandó térfogatú, és állandó nyomású hõközlés (cp=cv=c) fajhõi között. Ezt azért tehetjük meg, mert a térfogati munka ilyen esetekben elhanyagolható. Az elsõ fõtétel szerint ha munkavégzés nem történik, akkor a hõközlés a belsõ energiát növeli: $dU = \delta Q$, ahol $\delta Q = c m\, dT$. A belsõ energia változás térfogategységre jutó része $c\,\rho\, dT$. (itt $\rho = dm/dV$ a tömegsûrûség) Idõegység alatti megváltozás ekkor így adható meg: $c\rho\, \partial T/\partial t$. Ebbõl térfogati integrállal kapjuk véges V térfogatba foglalt anyag belsõ energiájának idõegység alatti megváltozását:

$$\int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

A belsõenergia változás a közölt energiával egyenlõ. Munkavégzés kiesett, tehát különféle hõközlési formák jönnek számításba, úgymint konvektív, konduktív, és sugárzási energiatranszport. Itt csupán a konduktív, azaz a hõmérsékletkülönbség által hajtott vezetési energiaárammal foglalkozunk. A $\vec{j}$ hõvezetési áram Fourier I. törvénye szerint:

$$\vec{j} = -\lambda\, grad(T)$$

a hõmérsékletgradienssel arányos és azzal ellentétes irányítású. Mint tudjuk számtanóráról, a gradiens a leggyorsabb növekedés irányát adja meg, nagysága pedig a függvényérték változását, amennyiben az elõbbi irányba egységnyit lépünk. A negatív elõjelrõl külön megemlékezés történik a II. fõttétel egy megfogalmazásában, amely szerint hõ magától csak magasabb hõmérsékletû helyrõl, alacsonyabb hõmérsékletû hely felé áramolhat. A j energiaáramsûrûség egységét $Joule/(m^2 s)$ egységben adhatjuk meg. Jelentése: *j* az áramlás irányára merõleges egységnyi felületen, idõegység alatt

átáramlott energiát adja meg. Általános esetben a hely és idõ függvénye, azaz $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$.

Hõvezetés folytán adott ***A*** felületen idõegység alatt átáramló energiát az áramsûrûség felületi integrálja adja meg

$$I = \int_A \vec{j} d\vec{A}$$

λ hõvezetési együttható a közeg anyagára jellemzõ (korántsem) állandó. Izotróp közegben skaláris mennyiség, anizotróp közegben az irányfüggés miatt már nem adható meg egyetlen számértékkel. Ez utóbbi esetben általában az energiaáramsûrûség vektor nem párhuzamos a hõmérsékletgradienssel.

Ha most összeírjuk eddigi ismereteinket, a következõket kapjuk, a V térfogatba foglalt anyag belsõ energiájának idõegység alatti megváltozása egyenlõ az idõegység alatt közölt energiával. A közölt energiát a V térfogatot magábafoglaló ***A*** zárt felületre számított áramerõsség adja meg. A belsõ energiának forrásai is lehetnek. Ezek hozzájárulását is figyelembe kell vennünk egy térfogati integrállal a teljes leltárhoz.

$$\int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = - \oint_A \vec{j}\, d\vec{A} + \int_V f\, dV$$

Bizonyári mindenki fölismerte az extenzív mennyiségek mérlegegyenletének meséjét, és formáját.

Ahogy általában a mérlegegyenleteknél, úgy itt is fontos hangsúlyoznunk, hogy az állítás tetszõlegesen választott ***V*** térfogatra és az õt lezáró ***A*** felületre igaz.

Az utolsó integrálban ***f*** a belsõenergia (idõegységre jutó) forrás−sûrûségét, vagy részletesebben kifejtve − idõegység alatt térfogategységben keletkezõ belsõ energiát

jelenti. $[W/(m^3 s)]$. Ilyen forrást jelenthet pl. áramátjárta vezetõben megjelenõ elektromos teljesítmény (un. Joule hõ). Ahogy azt majd az elektromágneses tér eneria −mérlegegyenleténél látni fogjuk ugyanezen tag −ellentétes elõjellel− az elektromágneses energia eltûnésérõl ad számot. Ugyancsak forrásként / nyelõként jelentkezik a fázisátalakulási hõ folyadék, szilárd fázis határán.

A zártfelületi integrál térfogati integrállá alakításával kapjuk a fenti kijelentés lokális formáját.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + div\,(\vec{j}) = f$$

Ebbe betöltve a Fourier I. energiaáramsûrûséget megadó törvényét, a következõkhöz jutunk:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + div\,(-\lambda grad(T)) = f$$

Föltesszük, hogy a közeg hõvezetés szempontjából tartományonként homogén, és izotróp. Ez utóbbi fogalmakat korábban már tisztáztuk, itt és most ez azt jelenti, hogy a hõvezetõképesség egy skaláris konstans. .

$$\frac{\partial T}{\partial t} - (\lambda/\rho c)\,\Delta T = f/(\rho c)$$

A speciális esetek könnyen származtathatók. Ha nincs fázisátalakulás (pl. olvadás/fagyás), s nem folyik elektromos áram a vizsgált közegben akkor ***f=0*** .

Idõben állandósult (stacionárius) esetben $\partial/\partial t = 0$. Ekkor a következõket kapjuk:

$$div\,(\vec{j}) = 0 \qquad \Delta T = 0$$

A ***P***arciális ***D***ifferenciál***E***gyenlet (PDE) egyértelmû megoldásához a vizsgált tartomány határain (peremein) elõírásokat kell tennünk.

Levezethetõ, hogy két különbözõ közeg határán, pl. két különbözõ hõvezetõképességû tartomány határán az egyes fizikai mennyiségeknek hogyan kell viselkedniük. Az elõzõ baloldali egyenlet következménye pl:

$$j_{n1} = j_{n2}$$

azaz a ``hõáramsûrûség" normális komponensei folytonosak két különbözõ közeget elválasztó felület mentén. Ez persze úgy is írható, hogy:

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n1} = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n2}$$

Függelék

Subsections

- Vizsgatematika
- 1K apró kérdés
- Tárgymutató

Vizsgatematika

Fizika I. vizsgatételek. II−évf. Bányász hallgatók számára.

1. Kinematikai alapfogalmak. Tömegpont, vonatkoztatási rendszer, koordinátarendszer. Pálya, helyvektor, sebességvektor, gyorsulásvektor, út. Alapmennyiségek és származtott mennyiségek, egységei. Descartes, és a hengerkooridináta−rendszer ismertetetése.

2. Newton I. törvénye, inerciarendszer, a kiválasztási axióma. Tehetelen tömeg, az erõ. Newton II. axiómája.

3. Hatás, ellenhatás, Newton III. törvénye. IV axióma, az erõhatások függetlenségének elve, az eredõ erõ.

4. Mozgásegyenlet (Newton II), integrálása, kezdeti feltételek. Speciális erõtörvények esetében a kialakuló mozgás. Idõtõl függõ erõ, csak sebességtõl függõ erõk esetén.

5. Az erõ munkája, teljesítménye. A munka, mint görbementi integrál és számítása. Mozgási energia. Munkatétel, teljesítménytétel.

6. Erõtér, (mezõ) térerõsség. Erõvonalas szemléltetés. Konzervatív erõtér tulajdonságai.

7. Forgatónyomaték, perdület (impulzusnyomaték) definiciói. Területi sebesség. Impulzusnyomatékra vonatkozó tétel.

8. Lineáris erõtörvény, harmónikus rezgõmozgás. Periódusidõ, frekvecia, körfrekvencia. Csillapított rezgés.

9. Gerjesztett rezgés. Rezgések összegzése.

10. Pontrendszer definiciója, tömegközéppontja. A tömegközéppont mozgására vonatkozó tétel. Pontrendszer mozgási energiája.

11. Rugalmas és rugalmatlan ütközések. Speciális esetek: egyenlõ tömegek és lényegesen különbözõ tömegek rugalmas, centrális ütközése. A rakéta

12. Extenzív mennyiség sûrûsége, árama, áramsûrûsége. Konvektív, konduktív áramok. Extenzív mennyiségek mérlegegyenlete. Integrális és differenciális alak.

13. A mérlegegyenlet megmaradó mennyiségekre érvényes alakja. A tömegmegmaradás és az elektromos töltés megmaradás törvénye. Speciális eset: inkompresszibílis kontinuum.

14. Kontinuumok. Felületi erõk, térfogati erõk. Ideális folyadék, a nyomás. Nyíróerõk nemideális folyadékban. Euler egyenlete ideális folyadékra.

15. Áramlások osztályozása. Bernoulli egyenlete barotrop közegre, alkalmazása. Nyomáspotenciál.

16. Monokromatikus síkhullám. Longitudinális, transzverzális hullámok. Fázisfelület, periódusidõ, frekvencia, körfrekvencia, hullámhossz, hullámszám, fázissebesség.

17. Törölve ****A hidrodinamika egyenleteinek linearizálása kis perturbációkra. Hullámegyenlet, hanghullám sebessége gázokban***** T.

18. Hidrosztatika alapegyenlete. Alkalmazása inkompresszibílis, közegre, valamint egy atmoszféra modellre. Archimedesz törvénye.

19. Hõtani alapjelenségek, lineáris, köbös hõtágulás, folyadékok spontán konvekciója. Kalorimetria alapegyenlete. Fajhõ, hõkapacitás.

20. Termodinamikai rendszer, a rendszert határoló falak és a falak által megengedett kölcsönhatások −a hozzárendelt extenzív és intenzív állapot határozók. A termodinamika 0−ik fõtétele. Egy termodinamikai rendszer egyensúlya, kvázisztatikus folyamatok.

21. Belsõ energia, munkavégzés, hõközles. Termodinamika I. és II. fõtétele. Megemlékezünk a III.−ról.

22. Termodinamikai körfolyamatok. Erõgépi ciklus, hûtõgépi (hõszivattyú) ciklush. Hatásfok, jóság.

23. Az ideális gáz fenomenológiai modellje. Speciális állapotváltozások, I. fõtétel alkalmazása.

24. Carnot körfolyamat.

25. A belsõ energia árama (``hõáram−sûrûség−vektor''). A hõvezetés differenciál egyenlete.

1K apró kérdés

−tömegpont, −vonatkoztatási rendszer, −helyvektor, −pálya, −elmozdulás, −út, −sebességvektor, −gyorsulásvektor, −sebességvektor abszolutértéke, −átlagsebesség, −mozgástörvény, −pálya és a sebességvektor kapcsolata, −Transzformáció síkpolár és Descartes koorinák között. −sebességvektor síkpolárban, −szögsebesség, −gyorsulásvektor síkpolárban −mi a henger koordinátarendszer,

−mi az inerciarendszer, − Newton I. axiómája, −kiválasztási axióma, −tehetetlen tömeg, −súlyos tömeg, −Newton II, −impulzus (lendület) definiciója, −Newton III. −Newton IV., −erõk összege, −erõk felbontása, −eredõ erõ, −erõtörvény, −mozgásegyenlet, −integrációs állandók, −kezdeti feltételek

−erõtér (mezõ), −térerõ, −erõvonalas szemléltetés

−elemi munka, −energia, −mozgási energia, −erõ munkája görbe mentén, −mozgási energia, −sebesség, gyorulás, út, impulzus, energia egysége, −teljesítmény és egysége, − a munkatétel, −teljesítménytétel

−konzervatív erõtér munkavégzés zárt görbe mentén, −két pont között különbözõ görbék mentén munkavégzés, −potenciális energia, −potenciálfüggvény, −rúgóerõ potenciális energia−kifejezése, −tömegvonzás pontszerû testek között, −tömegvonzás potenciális energiája, − I, II szökési sebesség. −(össz) mechanikai energia konzervatív térben.

−erõnyomaték (forgatónyomaték), perdület (impulzusnyomaték), −területi sebesség, −impulzusnyomatéki tétel. −perdületmegmaradás zérus erõnyomatékra, −centrális erõk, mozgás sajátsága centrális térben.

−pontrendszer, tömegközéppont definiciója. −tömegközéppont mozgása, −pontrendszer mozgási energiája, −rakéta hajtás kiinduló egyenlete, −tökéletesen rugalmas ütközés, −tökéletesen rugalmatlan ütközés, −tökéletesen rugalmas ütközés spec. esetek, egyenlõ tömegû, lényegesen különbözõ tömegek ütközése.

−harmónikus rezgõmozgás mozgásegyenlete, −harmónikus rezgõmozgás mozgástörvénye −periódusidõ, −frekvencia, körfrekvencia. −csillapított rezgõmozgás, −rezonancia jelensége, −rezonanciagörbe−

−rezgések összetétele, szuperpozició, −lebegés, −két egymásra merõleges rezgés pályája akkor egyenes ha ....., akkor kör ha .....

−kontinuumok jellemzése, −extenzív mennyiség definicója. −extenzív sûrûrsége, −extenzív konvektív árama, áramsûrûsége, áramerõssége. −mérlegegyenlet integrális alakja, jelentése −mérlegegyenlet differenciális alakja, −megmaradó extenzívek, −tömegmegmaradás, töltésmegmaradás törvénye. −Honnan ered $A_1V_1 = A_2V_2$.

−térfogati erõ, −felületi erõk, −a nyomás, −ideális folyadék, −Euler egyenlete. −konvektív derivált, −kompresszibilis, inkompresszibílis szavak jelentése, −barotrop közeg, −Bernoulli egyenlete, −Bernoulli egyenlete: feltételek, −nyomáspotenciál: izoterm, adiabatikus, −áramlástipusok, −hidrosztatika alapegyenlete, −izoterm atmoszféramodell (kiindulási egyenletei és jellemzése), −adiabatikus atmoszféramodell (kiindulási egyenletei és jellemzése), −Archimedesz törvénye, −Pascal törvénye,

−homogén, inhomogén közeg, −izotróp, anizotróp közeg, −monokromatikus síkhullámban, mi a sík, és mi a monokromatikus −transzverzális / longitudinális hullám, −hullámhossz, −hullámszám, −körhullámszám−vektor −fázissebesség, −Doppler effektus, tipusai, a hanghullám sebessége

−lineáris hõtágulás, −köbös hõtágulás, −folyadéksûrûség hõmérsékletfüggése, −spontán konvekció, −kalorimetriai alapegyenlet és fogalmai, −fajhõ, molhõ, hõkapacitás.

−termodinamikai rendszer, −kölcsönhatások, jellemzõ extenzív és intenzív mennyiségei, −egyensúly, 0. fõtétel, −két rendszer egyensúlya, −a termodinamikai rendszer egyensúlya, −kvázisztatikus folyamatok, −elsõ fõtétel, −állapot/ folyamatjelzõ mennyiségek az I. fõtételben, −térfogati munka, −I. fõtétel körfolyamatokra. −rendszeren/rendszer által végzett munka, −erõgépi ciklus hatásfoka, −hûtõgép, hõszivattyú és jósága, −II. fõtétel különbözõ megfogalmazásai, −elsõfajú, másodfajú örökmozgó. Reverzibílis folyamat

−ideális gáz fenomenológiai modellje, −ideális gáz kinetikus gázelméleti modellje, −adiabatikus állapotváltozás, −izoterm állapotváltozás, −izochor állapotváltozás, −izobár állapotváltozás, −Robert−Mayer egyenlete − állandó nyomású / térfogatú fajhõk különbsége. −Carnot körfolyamata erõgépi ciklus hõfelvétel/leadás, munkavégzés hatásfok, −Carnot körfolyamata hûtõgépi ciklus.

−hõvezetés, −hõáram (belsõ energia árama), hõáramsûrûségvektor, −mérlegegyenlet a belsõ energiára,

−hõvezetés differenciálegyenlete, −hõvezetési együttható

Miskolc. Vitéz G. sk. December 25, 2001

Tárgymutató

aramerosseg

Extenzív mennyiségek mérlegegyenlete.

aramlastipusok

Ideális folyadékok áramlása

aramsuruseg vektor

Extenzív mennyiségek mérlegegyenlete.

barotrop allapotegyenlet

Ideális folyadékok áramlása

Carnot korfolyamat

Carnot féle körfolyamat

centralis eroter

Perdületi tétel

csillapitas

Csillapított rezgõmozgás

deduktiv modszer

Newton törvényei.

Doppler effektus

Linearizált egyenletek, a hullámegyenlet.

elemi munka

A munka, munkatétel

energia

A munka, munkatétel

eroter

A munka, munkatétel

erotorveny

A mozgásegyenlet, speciális mozgások

erovonal

A munka, munkatétel

Euler egyenlet

Ideális folyadékok áramlása

extenziv mennyisegek

Extenzív mennyiségek mérlegegyenlete.

fajho

Hõtani alapok

forgatonyomatek

Perdületi tétel

frekvencia

A harmonikus rezgõmozgás

Galilei transzfomacio

Newton törvényei.

gerjesztoero

Gerjesztett rezgés, rezonancia

gorbevonalu koordinatarendszer

Kinematika

gyenge csillapitas

Csillapított rezgõmozgás

gyorsulas

Kinematika

hangsebesseg

Linearizált egyenletek, a hullámegyenlet.

helyvektor

Kinematika

hidrosztatika

Hidrosztatika

hokapacitas

Hõtani alapok

homogen kozeg

Monokromatikus síkhullám homogén izotróp
hotagulas
Hõtani alapok
hullam fazisa
Monokromatikus síkhullám homogén izotróp
hullamegyenlet homogen
Linearizált egyenletek, a hullámegyenlet.
hullamhossz
Monokromatikus síkhullám homogén izotróp
hullamszam
Monokromatikus síkhullám homogén izotróp
impulzusnyomatek
Perdületi tétel
induktiv modszer
Newton törvényei.
inerciarendszer
Newton törvényei.
izobar allapotvaltozas
Ideális gáz speciális állapotváltozásai.
izotem allapotvaltozas
Ideális gáz speciális állapotváltozásai.
izotrop kozeg
Monokromatikus síkhullám homogén izotróp
kalorimetriai egyenlet
Hõtani alapok
kinematika
Pontmechanikai alapok
kinetikus energia
A munka, munkatétel
kivalasztasi axioma
Newton törvényei.
konduktiv aram
Megmaradó mennyiségek
kontinuitasi egyenlet

Extenzív mennyiségek mérlegegyenlete. | Ideális folyadékok áramlása

kontinuum

Kontinuummechanikai alapok

koordinatarendszer

Pontmechanikai alapok

korfolyamat

Körfolyamatok

korfrekvencia

A harmonikus rezgõmozgás

kozervativ mezo

A munka, munkatétel

lebeges

Egyirányú, különbözõ frekvenciájú, egyenlõ

linearis erotorveny

A harmonikus rezgõmozgás

linearizalt egyenletek

Linearizált egyenletek, a hullámegyenlet.

longitudinalis hullam

Monokromatikus síkhullám homogén izotróp

magassagformula− barometrikus

Hidrosztatika

masodperc

Pontmechanikai alapok

megmaradas tomeg

Megmaradó mennyiségek

merlegegyenlet

Extenzív mennyiségek mérlegegyenlete.

meter

Pontmechanikai alapok

monokromatikus sikhullam

Monokromatikus síkhullám homogén izotróp | Monokromatikus síkhullám homogén izotróp

mozgasegyenlet

A mozgásegyenlet, speciális mozgások

mozgasi energia

A munka, munkatétel

mozgastorveny

Kinematika

munkatetel

A munka, munkatétel

munkavegzes

A munka, munkatétel

Newton torvenyek

Newton törvényei.

Pascal torvenye

Hidrosztatika

perdulet

Perdületi tétel

perduleti tetel

Perdületi tétel

periodikus mozgas

A harmonikus rezgõmozgás

periodusido

A harmonikus rezgõmozgás

perurbacio

Linearizált egyenletek, a hullámegyenlet.

polarizalt hullam

Monokromatikus síkhullám homogén izotróp

pontrendszer

Pontrendszerek dinamikájának elemei

pályagorbe

Kinematika

raketa

no title

raketa mozgasegyenlete

A rakéta

rezgesek osszegzese

no title

rezonanciagorbe

Gerjesztett rezgés, rezonancia

rugalmas utkozes

Ütközések

rugalmatlan utkozes

Ütközések

rugoero

A harmonikus rezgõmozgás

sebesseg

Kinematika

sikpolar koordinatak

Kinematika

spontan konvekcio

Hõtani alapok

suruseg

Kontinuummechanikai alapok

szogsebesseg

Kinematika

teljesitmeny

A munka, munkatétel

teljesitmenytetel

A munka, munkatétel

termodinamika II. fotetele

A II. fõtétel

termodinamikai rendszer

Termodinamikai rendszer és a

teruleti sebesseg

Perdületi tétel

tomegaram

Extenzív mennyiségek mérlegegyenlete.

tomegkozeppont

Pontrendszerek dinamikájának elemei

tomegkozeppont mozgasa

Pontrendszerek dinamikájának elemei

tomegpont

Pontmechanikai alapok

transzverzalis hullam

Monokromatikus síkhullám homogén izotróp

tranziens jelenseg

Gerjesztett rezgés, rezonancia

ut

Kinematika

utkozesek

no title

vezetesi aram

Megmaradó mennyiségek

vonatkoztatasi rendszer

Pontmechanikai alapok

zart termodinamikai rendszer

A II. fõtétel