Tömegpont kinematikája

1. Ha a vonat kerekei sinvégekhez érkeznek kattanást hallunk. Az utas fél perc alatt 40 kattanást számlál meg. Egy sinszál hossza 12 m. Mekkora sebességgel halad a vonat?

Megoldás:

Adatok:
$t = 0,5$ min $= 30$ s

$n = 40$ kattanás

$l = 12$ m

$v = ?$

A vonat sebessége:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{ln}{t} = \frac{12 \cdot 40}{30} = 16 \text{ m/s} =$$

$$= 16 \cdot 3,6 \text{ km/h} = 57,6 \text{ km/h}$$

Egy toronydaru 32 m magasra 1,1 m/s emelősebességgel emeli terhét. Mennyi az emelési idő?

Megoldás:

Adatok: $h = 32$ m, $v = 1,1$ m/s, $t = ?$

A toronydaru emelési ideje:

$$t = \frac{h}{v} = \frac{32}{1,1} = 30 \text{ s}$$

Tehát a toronydaru fél perc alatt emeli fel terhét 32 m magasra.

---

2. Valamely egyenletes gyorsulással mozgó test a tizedik másodpercben 1635 cm-rel nagyobb utat tesz meg, mint az ötödik másodpercben. Határozzuk meg:

a) Az ötödik és a tizedik másodpercben megtett utak nagyságát;

b) A tiz másodperc alatt megtett utat;

c) Az ötödik és a tizedik másodpercben a pillanatnyi sebességek viszonyát.

Megoldás:

Adatok:

$s_{10}-s_5 = 1635$ cm

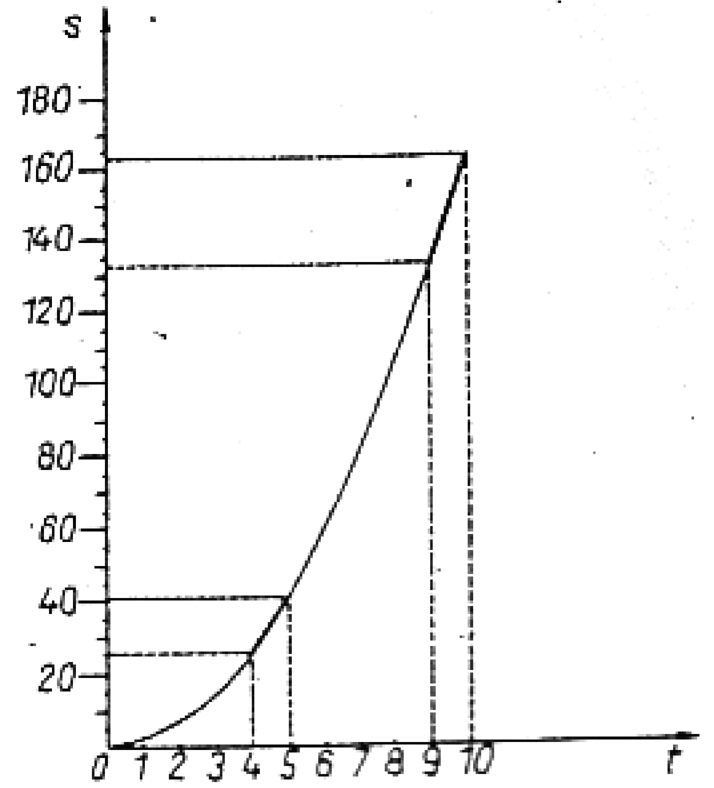
$t_1 = 1$ s

$t_2 = 2$ s

Szükséges képletek:

$s = \frac{a}{2} \cdot t^2$

$v = at$



$t_3 = 3$ s

. .

. .

$t_{10} = 10$ s

$s_5 = ?$

$s_{10} = ?$

$\frac{v_{10}}{v_5} = ?$

a) Az ötödik másodpercben megtett út:

$$s_5 = \frac{a}{2} t_5^2 - \frac{a}{2} t_4^2 = \frac{a}{2} (t_5^2 - t_4^2) = \frac{a}{2} (5^2 - 4^2) = \frac{a}{2} \cdot 9$$

A tizedik másodpercben megtett út:

$$s_{10} = \frac{a}{2} t_{10}^2 - \frac{a}{2} t_9^2 = \frac{a}{2} (t_{10}^2 - t_9^2) = \frac{a}{2} (10^2 - 9^2) = \frac{a}{2} 19$$

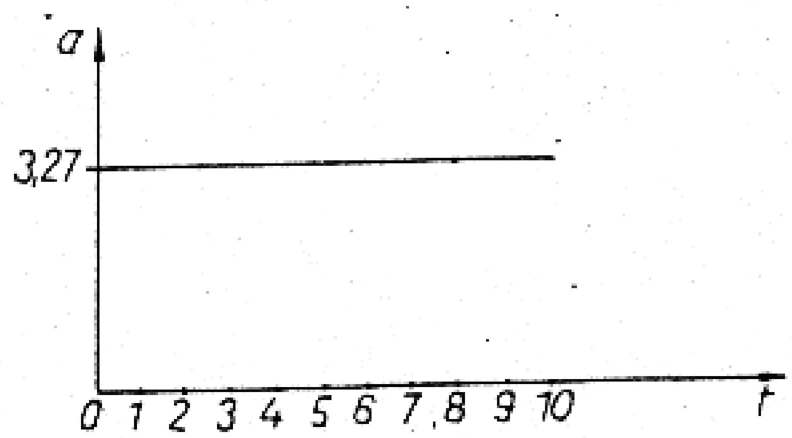
A két egyenletből és a megadott különbségből a gyorsulás:

$s_{10} - s_5 = 1635$

$\frac{a}{2} 19 - \frac{a}{2} 9 = 1635$

$\frac{a}{2} 10 = 1635$

$a = 3,27$ m/s^2 .



Igy az ötödik másodpercben megtett ut:

$$s_5 = \frac{a}{2} 9 = \frac{327}{2} \cdot 9 = \underline{\underline{1471,5 \text{ cm}}}$$

A tizedik másodpercben megtett ut:

$$s_{10} = \frac{a}{2} 19 = \frac{327}{2} \cdot 19 = \underline{\underline{3106,5 \text{ cm}}}$$

b) A tiz másodperc alatt megtett összes utat az egyes másodpercekben megtett utak összege adja:

$$s = s_1 + s_2 + \ldots + s_5 + \ldots + s_{10}$$

$$s = \left(\frac{a}{2} \cdot t_1^2 - \frac{a}{2} t_o^2\right) + \left(\frac{a}{2} t_2^2 - \frac{a}{2} t_1^2\right) + \ldots + \left(\frac{a}{2} t_5^2 - \frac{a}{2} t_4^2\right) + \ldots + \left(\frac{a}{2} t_{10}^2 - \frac{a}{2} t_9^2\right) =$$

$$= \frac{a}{2} t_{10}^2 = \frac{3,27}{2} \cdot 10^2 = 163,5 \text{ m}$$

Tehát a test 10 másodperc alatt 163,5 m utat tesz meg.

c) A pillanatnyi sebességek kiszámitása:

Az ötödik másodperc elején a test pillanatnyi sebessége:

$$v_4 = at_4 = 3,27 \cdot 4 = 13,08 \text{ m/s}$$

Az ötödik másodperc végén a test pillanatnyi sebessége:

$$v_5 = at_5 = 3,27 \cdot 5 = 16,35 \text{ m/s}$$

A tizedik másodperc elején a test pillanatnyi sebessége:

$$v_9 = at_9 = 3,27 \cdot 9 = 29,43 \text{ m/s}$$

A tizedik másodperc végén a test pillanatnyi sebessége:

$$v_{10} = at_{10} = 3,27 \cdot 10 = 32,7 \text{ m/s}$$

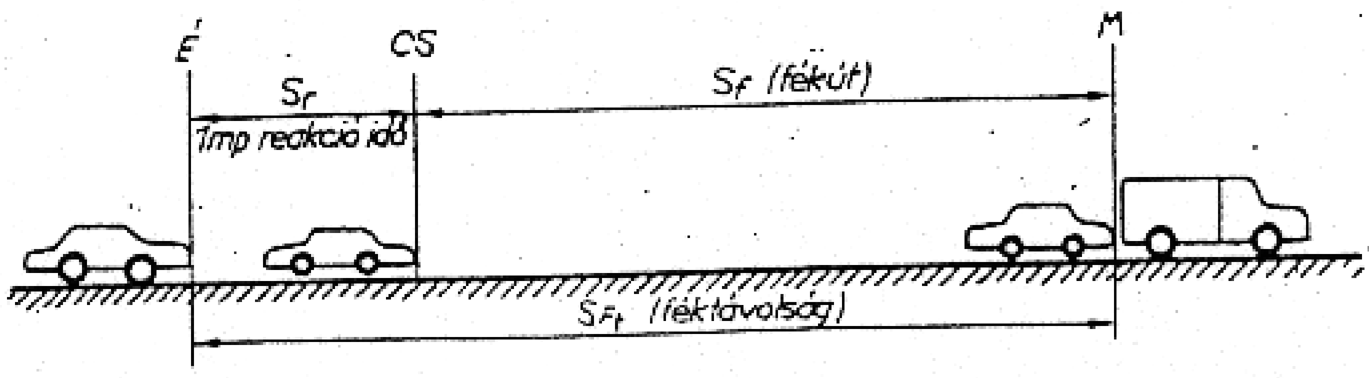
Igy a pillanatnyi sebességek viszonya a tizedik, illetve az ötödik másodperc elején:

$$\frac{v_9}{v_4} = \frac{29,43}{13,08} = 2,25$$

végén:

$$\frac{v_{10}}{v_5} = \frac{32,7}{16,35} = \underline{\underline{2}}$$

3. Az autópályán személygépkocsijával 90 km/h sebességgel követ Ön egy előtte 80 m távolságban haladó tehergépjárművet. A tehergépkocsi valamilyen



akadály miatt hirtelen megáll. Ön észleli a veszélyt és fékezni kezd. A fékezéssel létrehozható lehető legnagyobb negatív gyorsulás (tehát lassulás) 5 m/s^2 (ennél erőteljesebb fékezéskor a kocsi kerekei az uttesten megcsusznának és így a kocsi hosszabb utszakaszon állna meg). Határozza meg, mennyi idő alatt áll Ön meg a kocsijával, illetve nekimegy-e az előtte megállt kocsinak, ha a reakcióidő (azaz az az idő, amely a veszély felismerésének pillanatától a fékpedál benyomásának pillanatáig, tehát az észleléstől a cselekvésig eltelik) 1 másodperc.

Megoldás:

Adatok:

$v_o = 90$ km/h

$s_{köv.táv} = 80$ m

$a = -5\ m/s^2$

$t_r = 1$ s

$t = ?$

$s_{féktáv} = ?$

A megoldáshoz szükséges képletek:

a)

$$v = at$$

b)

$$s = vt$$

c)

$$s = v_o t + \frac{a}{2} t^2$$

d)

$$v = v_o \pm at$$

A veszély észlelésének pillanatától a kocsi megállásáig szükséges idő az a) képlet felhasználásával:

$$t = t_r + \frac{v}{a} = 1 + \frac{\frac{90}{3,6}}{5} = \underline{\underline{6\ sec}}$$

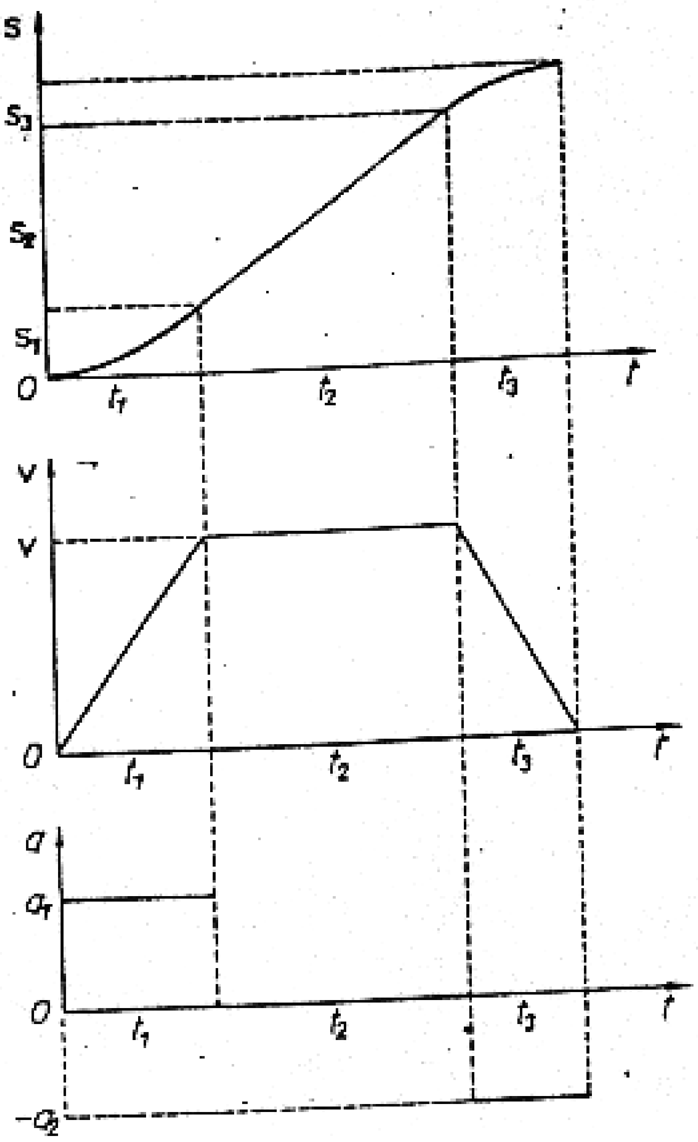
A féktávolság pedig a 8. ábra alapján a b), a c), majd a d) képletek felhasználásával:

$$s_{féktáv} = s_r + s_{fékut} = v_o t_r + v_o t_f - \frac{a}{2} t_f^2 = v_o t_r + \frac{v_o^2}{2a} = \frac{90}{3,6} \cdot 1 + \frac{\left(\frac{90}{3,6}\right)^2}{2,5} = \underline{\underline{87,5\ m}}$$

Normális utviszonyokat feltételezve 6 másodpercre van Önnek szüksége ahhoz, hogy a 90 km/h sebességgel haladó személygépkocsiját 87,5 m legrövidebb távolságon csuszás nélkül megállítsa. Mivel e féktávolság 7,5 m-rel nagyobb a követési távolságnál, így az Ön kocsija nekiütközik az előtte 80 méterre hirtelen megállt tehergépkocsinak. Érdemes megjegyezni, hogy ha gépjárművének sebességét megkétszerezi, illetve megháromszorozza, akkor járművének fékutja négyszeresére illetve kilencszeresére növekszik, mivel a fékut a sebességnövekedéssel négyzetesen arányos!

— . —

4. Az A és B vasutállomások közötti 10 km-es utat egy vonat 10,5 perc alatt tesz meg ugy, hogy A állomásról indulva másfél percig állandó gyorsulással gyorsit, majd a nyilt pályán egyenletes sebességgel halad és végül B állomás előtt 70 másodpercig állandó lassulással fékez és megáll. Határozzuk meg, hány km/h sebességgel halad a vonat a nyilt pályán?



Megoldás:

Adatok:

$s = 10$ km

$t = 10,5$ min

$t_1 = 1,5$ min

$t_3 = 70$ sec

$v = ?$

A megoldáshoz szükséges képletek:

a) Menetidő az ábra alapján:

$$t = t_1 + t_2 + t_3$$

b) A és B közötti távolság:

$$s_1 + s_2 + s_3 = s$$

c) A gyorsitási szakasz utja:

$$s_1 = \frac{a_1}{2} \cdot t_1^2$$

d) Az egyenletes mozgás sebessége:

$$v = a_1 t_1$$

e) Az egyenletes mozgás utja:

$$s_2 = v t_2$$

f) A fékezési szakasz utja:

$$s_3 = v t_3 - \frac{a_3}{2} t_3^2$$

g) A fékezés sebessége:

$v_3 = v - a_3 t_3 = 0$ (a B állomáson való megálláskor a v_3 sebesség zérusra csökken)

A d) egyenletben szereplő v sebesség kiszámításához előbb az a_1 gyorsulást kell meghatározni. Evégből helyettesítsük először a d) egyenletből a v sebességet az e), az f) és a g) egyenletekbe, azután a g) egyenletből az a_3 lassulást az f) egyenletbe, majd végezzük el a c) egyenletből az s_1, az e) egyenletből az s_2 és az f) egyenletből az s_3 utszakaszoknak a b) egyenletbe való behelyettesítését, és ekkor kapjuk:

$$\frac{a_1}{2} t_1^2 + a_1 t_1 t_2 \pm a_1 t_1 t_3 - \frac{a_1}{2} t_1 t_3 = s$$

Elvégezve az összevonást, majd $a_1 t_1$ kiemelése után az a_1 gyorsulást kifejezzük és kapjuk:

$$a_1 = \frac{s}{t_1 \left[\frac{1}{2} (t_1 + t_3) + t_2 \right]}$$

A t_2 időt az a) egyenletből véve, helyettesítjük a kapott a_1 gyorsulást a d) egyenletbe, és t_1 idővel való egyszerüsités után a sebesség

$$v = \frac{s}{t - \frac{1}{2} (t_1 + t_3)}$$

S végül az adatok behelyettesítése és a numerikus számolás elvégzése után

$$v = \frac{10\,000}{630 - \frac{1}{2} (90 + 70)} \cdot 3,6 = \underline{\underline{65,5 \text{ km/h}}}$$

Tehát a nyilt pályán a vonat 65,5 km/h egyenletes sebességgel halad.

5. Egymásután három golyót ejtünk el két-két másodperces időintervallumokban. Határozzuk meg hány másodperc mulva lesz az első és a második golyó közötti távolság a második és a harmadik golyó közötti távolság kétszerese? (L. a, b ábra, köv. oldalon.)

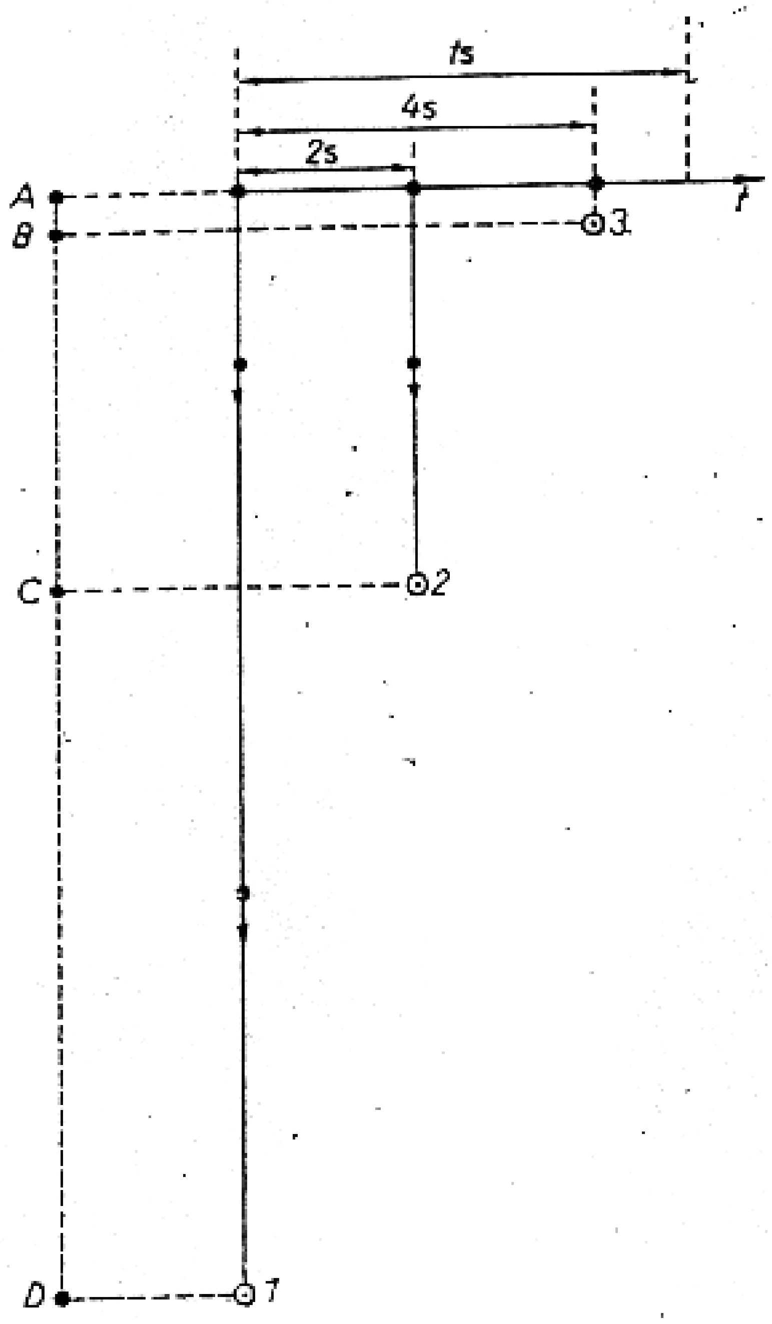
Megoldás:

Adatok:	Felhasznált képletek:
$t_1 = 2$ s	
$t_2 - t_1 = 2$ s	
$t = ?$	$h = \frac{g}{2} t^2$

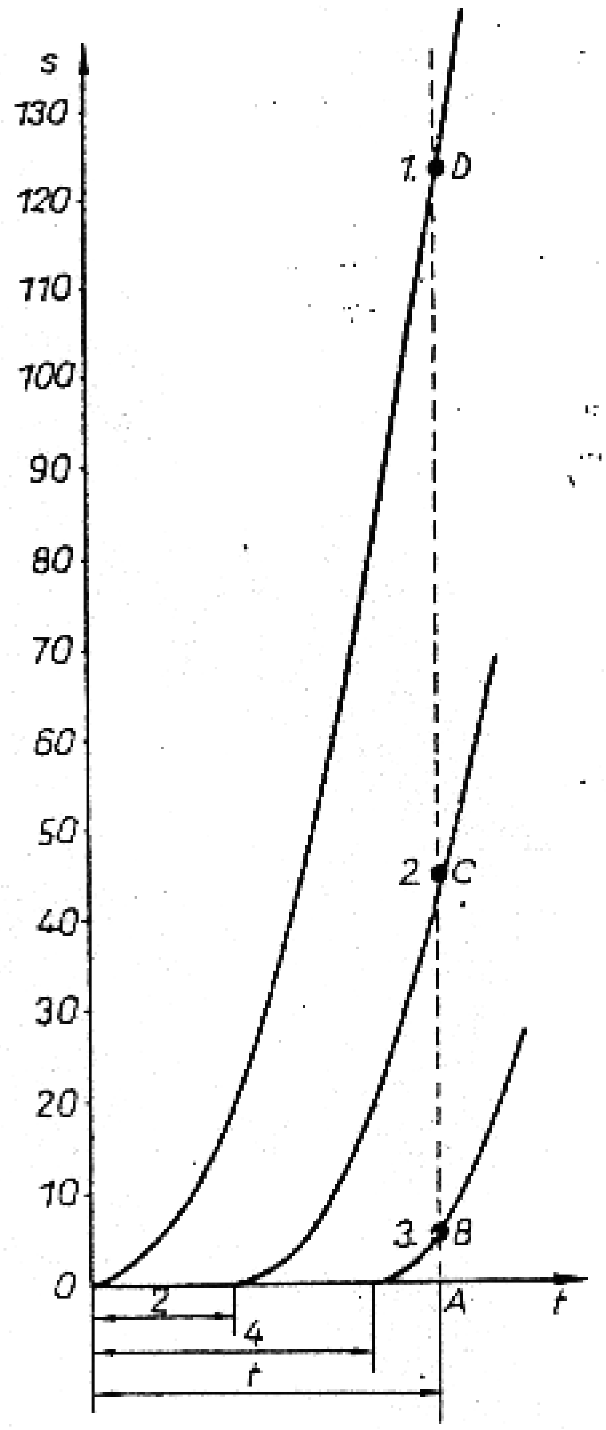
Az első golyó inditásától eltelt t idő végpontjában az egyes golyók által megtett utak a következők:

Első golyó utja: $AD = \frac{g}{2} t^2$

Második golyó utja: $AC = \frac{g}{2} (t - 2)^2$



a)



b)

Harmadik golyó utja: $AB = \frac{g}{2}(t-4)^2$

Az első és második golyó közötti távolság:

$$CD = AD - AC = \frac{g}{2}t^2 - \frac{g}{2}(t-2)^2$$

A második és harmadik golyó közötti távolság:

$$BC = AC - AB = \frac{g}{2}(t-2)^2 - \frac{g}{2}(t-4)^2$$

A feladat szövege szerint viszonyt

$$CD = 2\ BC\ ,$$

igy

$$\frac{g}{2}t^2 - \frac{g}{2}(t-2)^2 = 2\ .\left[\frac{g}{2}(t-2)^2 - \frac{g}{2}(t-4)^2\right]$$

$\frac{g}{2}$ -vel egyszerüsitve, majd elvégezve a négyzetre emeléseket és rendezve:

$$t^2 - t^2 + 4t - 4 = 2t^2 - 8t + 8 - 2t^2 + 16t - 32$$

$$4t = 20$$

ehből

$$t = \underline{\underline{5\ sec}}$$

A mozgás kezdetétől számitva az egyes golyók utjai:

$$AD = \frac{g}{2} t^2 = \frac{9,81}{2} \cdot 5^2 = 122,625 \text{ m}$$

$$AC = \frac{g}{2} (t-2)^2 = \frac{9,81}{2} (5-2)^2 = 44,145 \text{ m}$$

$$AB = \frac{g}{2} (t-4)^2 = \frac{9,81}{2} (5-4)^2 = 4,905 \text{ m}$$

A golyók távolságai:

$$CD = AD - AC = 122,625 - 44,145 = 78,48 \text{ m}$$

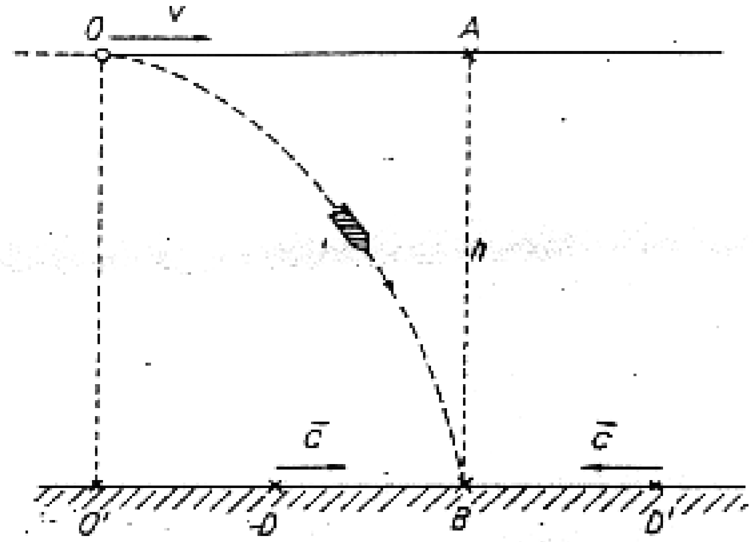
$$BC = AC - AB = 44,145 - 4,905 = 39,24 \text{ m}$$

Valóban:

$$CD = 2\,BC$$

— • —

6. Egy repülőgép h magasságban v sebességgel repül az ugyanabban a függőleges sikban levő célpont (vonat) felett. Hol kell a bombát ledobnia, hogy eltalálja a vonat mozdonyát (1. ábra), ha



a) A vonat c sebességgel párhuzamosan halad a repülőgéppel azonos irányban?

b) A vonat áll?

c) A vonat c sebességgel párhuzamosan halad a repülőgéppel ellentétes irányban?

A közegellenállástól és az esetleges szélnyomástól eltekintünk.

Megoldás:

Adatok:

h, v, c,

$O'D = ?$ $O'B = ?$

$O'D' = ?$

Felhasznált képletek:

a) Szabadesés utja: $h = \frac{g}{2} t^2$

b) Egyenletes mozgás utja: $s = ct$; $s = vt$

Az ábra szerint a bomba mozgása vizszintes hajitásnak felel meg, tehát a pályája parabolaiv. A lövedék t idő alatt érkezik O-ból B-be, és ugyanezen t idő alatt érkezik a repülőgép O-ból A-ba, valamint a mozdony D-ből, illetve D'-ből B-be. Ennek figyelembevételével az a) egyenletből t időt kifejezve és a b) egyenletbe helyettesitve, a kérdések sorrendjében kapjuk:

a) $O'D = OA - DB = vt - ct = (v - c)\sqrt{\frac{2h}{g}}$

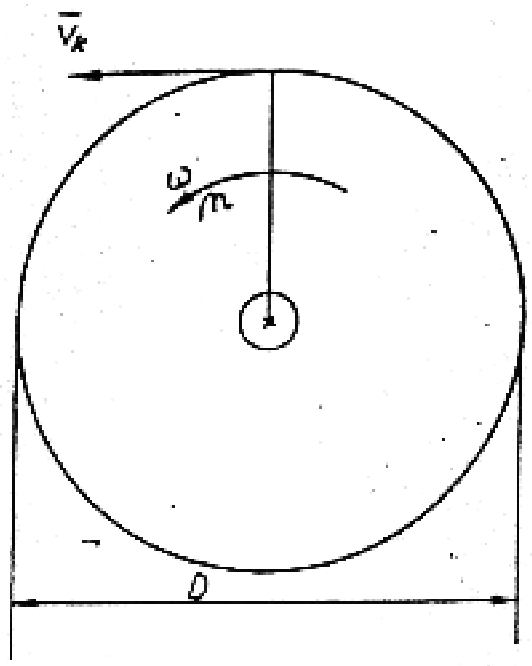
b) $O'B = OA = vt = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$

c) $O'D' = OA + D'B = vt + ct = (v + c)\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Ezzel a problémát paraméteresen megoldottuk.

— • —

7. Egy csiszolókorong átmérője 300 mm, fordulatszáma, 1800 ford/min. Határozzuk meg a korong kerületi sebességét, szögsebességét, periódusidejét.



Megoldás:

Adatok:

$D = 300 \text{ mm} = 0,3 \text{ m}$

$n = 1800 \text{ ford/min} =$
$= 30 \text{ ford/sec}$

$v_k = ?$

$\omega = ?$

$T = ?$

Felhasznált képletek:

a) kerületi sebesség:

$$v_K = D\pi n$$

b) szögsebesség:

$$\omega = \frac{v_k}{R} = 2\pi n$$

c) periódusidő:

$$T = \frac{1}{n}$$

A korong kerületi sebessége:

$$v_k = D\pi n = 0,3 \cdot 3,14 \cdot 30 = \underline{\underline{28,26 \text{ m/s}}}$$

A korong szögsebessége:

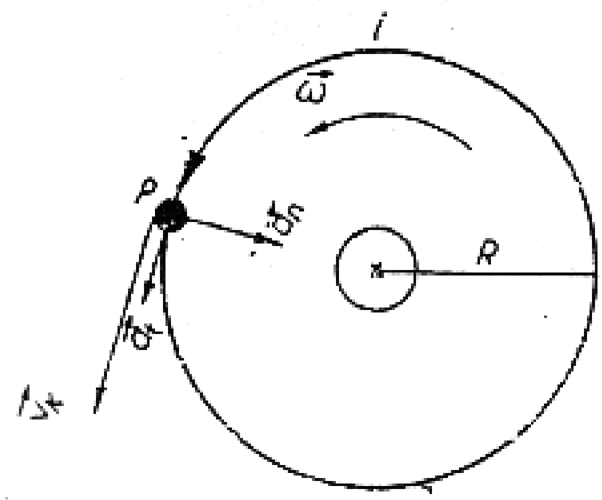
$$\omega = 2\pi n = 2 \cdot 3,14 \cdot 30 = \underline{\underline{188,4 \text{ rad/s}}}$$

A korong periódusideje:

$$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{30} = \underline{\underline{0,033.. \text{ s}}}$$

— . —

8. Egy R = 70 cm sugaru kerék nyugalmi helyzetből indulva gyorsuló mozgással forog, és t = 7 sec mulva éri el maximális állandó sebességét. Egyik kerületi pontjának tengenciális gyorsulásösszetevője: $a_t = 4\ m/s^2$. Határozzuk meg:



a) A vizsgált kerületi pont maximális sebességét,

b) A gyorsulás a_n normális (sugármenti) összetevőjét (centripetális gyorsulás);

c) A vizsgált kerületi pontnak a gyorsulás alatt megtett i utját;

d) Hány fordulatot tett meg a kerék a gyorsulás befejezéséig?

Megoldás:

Adatok:

R = 70 cm = 0,7 m

t = 7 sec

$a_t = 5\ m/sec^2$

$v_o = 0$

$a_n = ?$

$v_t = ?$

i = ?

N = ?

Felhasznált képletek:

a) kerületi sebesség:

$$v_t = a_t \cdot t$$

b) gyorsulás normális összetevője:

$$a_n = \frac{v_t^2}{R}$$

c) befutott ivhossz:

$$i = v_o \cdot t + \frac{a_t}{2} t^2$$

d) körülfordulások száma:

$$N = \frac{i}{2\pi R}$$

a) A vizsgált pont maximális kerületi sebessége:

$$v_t = a_t \cdot t = 5 \cdot 7 = \underline{\underline{35\ m/s}}$$

b) gyorsulásának normális összetevője (centripetális gyorsulás):

$$a_n = \frac{v_t^2}{R} = \frac{35^2}{0,7} = \underline{\underline{1750\ m/s^2}}$$

c) A kerületi pont gyorsulás alatti, a körpálya mentén befutott utja:

$$i = v_o t + \frac{a_t}{2} t^2 = 0,7 + \frac{5}{2} 7^2 = \underline{\underline{123\ m}}$$

d) A kerék körülfordulásainak száma a gyorsulás alatt:

$$N = \frac{i}{2\pi R} = \frac{123}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,7} = 27,8 \approx \underline{\underline{28}}$$

9. Egy 5400 ford/min fordulatszámmal forgó villamosmotort kikapcsolunk, és a motor 2 min alatt állandó szöglassulással lassulva megáll. Határozzuk meg:

a) Mekkora β szöglassulás szükséges a megálláshoz?

b) Mekkora lesz a megállásig megtett szögelfordulás radiánban?

c) Hány fordulatot tesz meg a motor a kikapcsolástól a megállásig?

Megoldás:

Adatok:

$n = 5400$ ford/min $=$

$= 90$ ford/sec $= 565{,}2$ rad/sec

$t = 2$ min $=$

$= 120$ sec

$\omega = 0$

$\beta = ?$

$\varphi = ?$

Felhasznált képletek

a) kezdőszögsebesség:

$$\omega_0 = 2\pi n$$

b) szöglassulás:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

c) szögelfordulás:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\beta}{2} t^2$$

d) körülfordulások száma:

$$N = \frac{\varphi_{rad}}{2\pi}$$

A) A motor megállásához szükséges szöglassulás b) pont alapján:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 2\pi \cdot n}{t} = -\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 90}{120} = \underline{\underline{-4{,}71\ \text{rad/sec}^2}}$$

B) A motor lassulás alatti szögelfordulása c) és a) alapján:

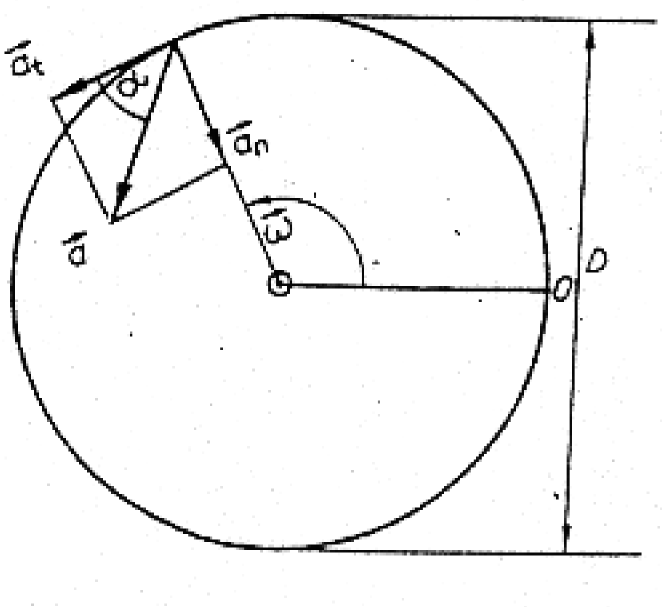
$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\beta}{2} t^2 = 2\pi n t + \frac{\beta}{2} t^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 90 \cdot 120 + \frac{-4{,}71}{2} \cdot 120^2 =$$

$$= \underline{33\ 912\ \text{radián}}$$

C) A kikapcsolás pillanatától a megállásig eltelt idő alatti körülfordulások száma d) alapján

$$N = \frac{\varphi_{rad}}{2\pi} = \frac{33912}{2 \cdot 3{,}14} = \underline{\underline{5400\ \text{fordulat}}}$$

10. Egy gépkocsi kerekeinek átmérője 75 cm. A kocsi álló helyzetből indul és kerekeinek szöggyorsulása 3 rad/sec^2. Mennyi $\underline{t}$ idő mulva lesz a kerekek kerületi pontjainak sugár és pályamenti gyorsulásösszetevője, $\underline{a}_n$ és $\underline{a}_t$ egyenlő értékű? Mekkora ebben az időpontban a kerekek teljes $\underline{a}$ gyorsulásának nagysága és iránya?



1.

Megoldás:

Adatok:

$D = 75\ \text{cm} = 0,75\ \text{m}$

$\beta = 3\ \text{rad/s}^2$

$\omega_o = 0$

$t = ?$

$a = ?$

$\alpha = ?$

Felhasznált képletek:

a) szögsebesség:

$$\omega = \beta \cdot t$$

b) gyorsulás sugármenti összetevője:

$$a_n = R\omega^2$$

c) gyorsulás pályamenti összetevője:

$$a_t = R\beta$$

d) haladó gyorsulás:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

e) haladó gyorsulás iránya:

$$\cos\alpha = \frac{a_t}{a}$$

A t idő kiszámításához a)-ból a szögsebességet b) jobb oldalába helyettesítjük, majd b) és c) pont bal oldalaik egyenlőségéből következik jobb oldalaik egyenlősége, amiből a t idő meghatározható:

$$a_n = R\omega^2 = R\beta^2 \cdot t^2$$

$$a_t = R\beta$$

$$a_n = a_t$$

miatt

$$R\beta^2 t^2 = R\beta$$

ebből

$$t = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577\ \text{s}$$

A haladó gyorsulás nagyságának kiszámítása b) alapján:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{R^2\beta^4 t^4 + R^2\beta^2} = \sqrt{2} \cdot R\beta = 1,414 \cdot \frac{0,75}{2} \cdot 3 =$$

$$= \underline{\underline{1,59\ \text{m/sec}^2}}$$

A haladó gyorsulás vektorának irányát a t időpontban e)-ből kapjuk meg:

$$\alpha = \text{arc}\cos\frac{a_t}{a} = \text{arc}\cos\frac{R\beta}{\sqrt{2}\,R\beta} = \text{arc}\cos\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{45^\circ}}$$

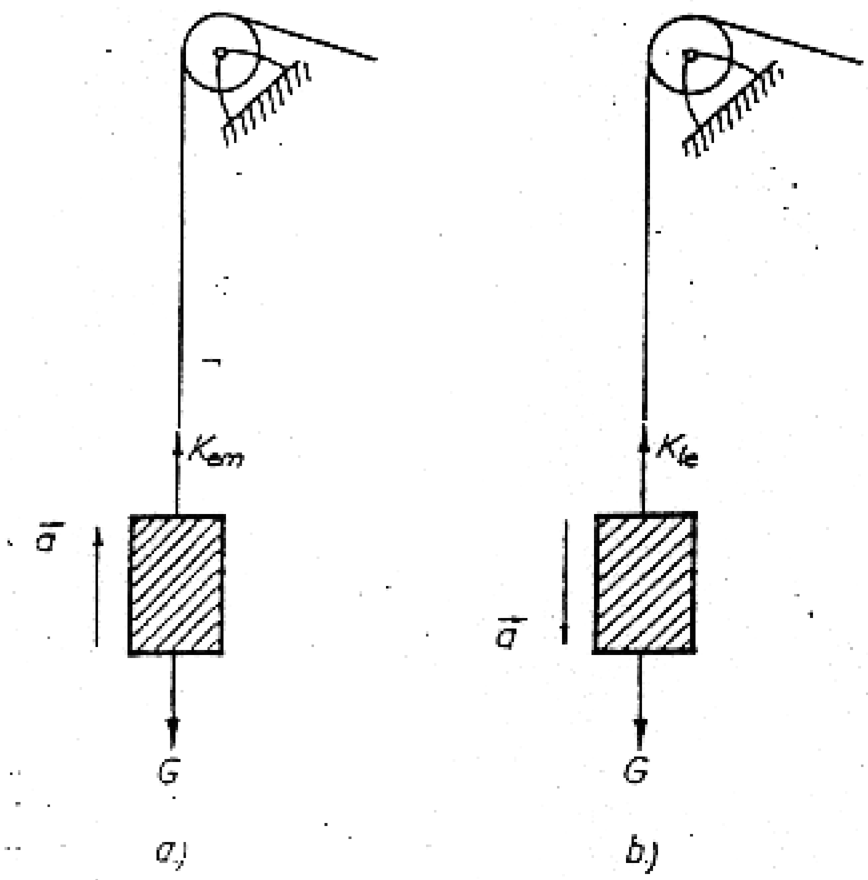
— · —

Tömegpont dinamikája

11. Emelődaru drótkötelén 2 tonna tömegű teher függ. Hogyan változik a kötélben ébredő reakcióerő

a) a teher emelésekor illetve

b) leengedéskor, ha a gyorsulás mindkét esetben $\frac{1}{4}$ g?



Megoldás:

Adatok:

$m = 2t = 2000$ kg

$a = \frac{1}{4} g$

$g = 9,81\ m/s^2$

$K_{em} = ?$

$K_{le} = ?$

Felhasznált képletek:

a) Testre ható erők eredője:

$$F = ma$$

Emeléskor a teher felfelé gyorsul, tehát az a) egyenlet alapján (a. ábra)

$$K_{em} - G = ma$$

ebből

$$K_{em} = G + m\,a = m\left(g + \frac{1}{4}g\right) = \frac{5}{4}\,mg = \frac{5}{4}\cdot 2000\cdot 9,81 = \underline{\underline{24,525\ kN}}$$

b) leengedéskor a teher lefelé gyorsul, tehát az a) egyenlet alapján (b. ábra)

$$G - K_{le} = m\,a$$

ebből

$$K_{le} = G - ma = m\left(g - \frac{1}{4}g\right) = \frac{3}{4}\,mg = \frac{3}{4}\cdot 2000\cdot 9,81 = \underline{\underline{14,715\ kN}}$$

Mint látható a kötélben ébredő reakcióerő nagyságának változása a nyugalmi helyzethez képest:

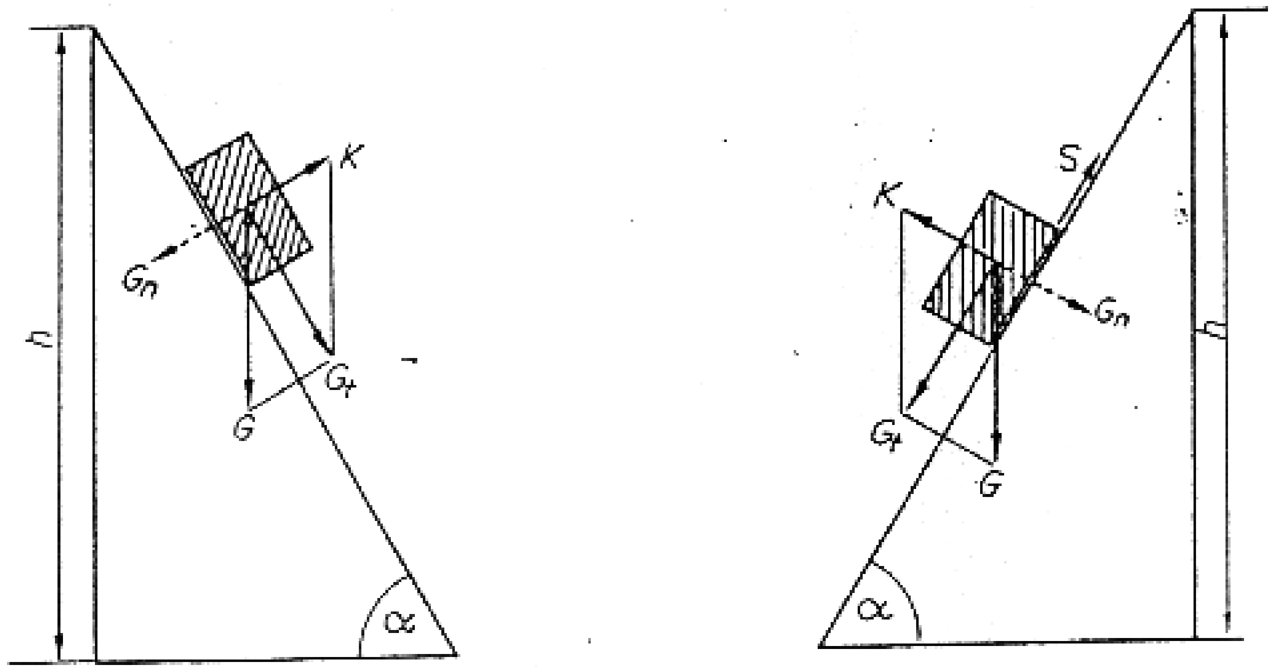
$$\Delta K = K_{em} - K = K - K_{le} = 4,905\ KN$$

az emelés és leengedés között pedig

$$\Delta K = K_{em} - K_{le} = 9,81\ KN.$$

12. h = 10 m magas $\alpha = 60^o$ hajlásszögű lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül csuszik le egy test. Mekkora sebességgel és mennyi idő alatt ér a lejtő aljára, ha

a) a lejtő surlódásmentes
b) a lejtő és a test közötti csuszási surlódási együttható 0,5?



a) b)

Megoldás:

Adatok:

h = 10 m

$\alpha = 60^o$

$\mu = 0,5$

$v_a = ?$

$t_a = ?$

$v_b = ?$

$t_b = ?$

A számitáshoz felhasznált képletek:

a) ut:

$$s = \frac{a}{2} t^2$$

b) sebesség:

$$v = at$$

c) lejtő hossza:

$$s = \frac{h}{\sin\alpha}$$

d) testre ható erők eredője:

$$F = m\,a$$

e) surlódási erő:

$$s = \mu N$$

a) Surlódásmentes esetre v és t kiszámitásához először a d) egyenletből meghatározzuk az a gyorsulás:
(a. ábra)

$$G_t = m\,a$$

azaz

$$\sin\alpha \,.\, m\,g = m\,a$$

ebből

$$a = \sin\alpha \,.\, g$$

Ezután az a) egyenletből a t időt a b) egyenletbe helyettesitjük

$$v = at = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2as}$$

majd a kapott a gyorsulást és a c) egyenletből az s utat helyettesítve kapjuk:

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \sin\alpha \; g \frac{h}{\sin\alpha}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2.9,81.10} = \underline{\underline{14\ m/s}}$$

Az idő pedig az a) egyenletből a gyorsulás és az ut helyettesítésével:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\frac{h}{\sin\alpha}}{\sin\alpha\ .\ g}} = \sqrt{\frac{2\ h}{\sin^2\alpha\ .\ g}} = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}} =$$

$$= \frac{1}{\sin 60^o}\sqrt{\frac{2.10}{9,81}} = \underline{\underline{1,65\ s}}$$

b) surlódásos esetre v és t kiszámításához először a d) egyenletből meghatározzuk az a gyorsulást az e) egyenlet felhasználásával (6. ábra).

$$G_t - F_s = m\ a$$

azaz $$\sin\alpha\ .\ mg - \cos\alpha\ .\ \mu\ mg = m\ a$$

ebből $$a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha\ )\ g$$

ezután az a) egyenletből a t időt a b) egyenletbe helyettesítjük,

$$v = at = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2as}$$

majd a kapott a gyorsulást és a c) egyenletből az s utat helyettesítve kapjuk:

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2\ (\sin\alpha - \mu\cos\alpha\ )g\ .\ \frac{h}{\sin\alpha}} = \sqrt{2(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)gh} =$$

$$= \sqrt{2\ (1 - 0,5\ \mathrm{ctg}\ 60^o)\ 9,81\ .\ 10} = \underline{\underline{11,8\ m/s}}.$$

Az idő pedig az a) egyenletből a gyorsulás és az ut helyettesítésével:

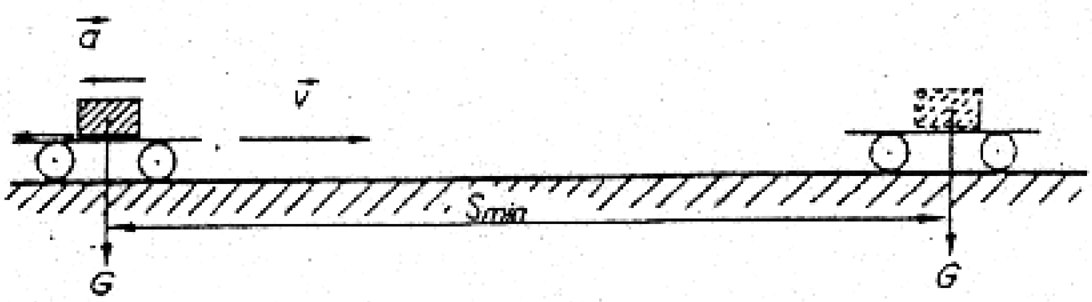
$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\frac{h}{\sin\alpha}}{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\ )g}} = \sqrt{\frac{2\ h}{\sin\alpha\ (\sin\alpha - \mu\cos\alpha\ )g}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2.10}{\sin 60^o(\sin 60^o - 0,5\cos 60^o)9,81}} = 1,96\ s$$

Tehát surlódás nélkül 14 m/s sebességgel 1,65 s alatt surlódással pedig 11,8 m/s sebességgel 1,96 s alatt ér a test a lejtő aljára.

---

13. – Vasuti kocsi 90 km/h sebességgel halad. Mekkora az a legrövidebb távolság, amelyen belül a kocsit a rakomány megcsuszásának veszélye nélkül állíthatjuk meg, ha a kocsi padlója és a rakomány közötti csuszási surlódási együttható 0,25?



Megoldás:

Adatok:

$v = 90$ km/h = 25 m/s

$\mu = 0,25$

$g = 9,81\ m/s^2$

$s_{min} = ?$

A számításhoz felhasznált képletek:

a) Testre ható erők eredője (surlódási erő):

$$s \geqq m\,a$$

b) Egyenletesen változó mozgás utja:

$$s = v_o t \pm \frac{a}{2} t^2$$

c) Egyenletesen változó mozgás sebessége:

$$v = v_o \pm at$$

d) Surlódási erő:

$$s = \mu G = \mu mg$$

A b) egyenletben szereplő t idő eliminálása végett a c) egyenletet egyenlővé tesszük zérussal (a kocsi lefékeződik és megáll), majd innen a t időt a b) egyenletbe helyettesitjük:

$$v = v_o - at = 0$$

ebből

$$t = \frac{v_o}{a}$$

s igy

$$s_{min} = v_o t - \frac{a}{2} t^2 = v_o \cdot \frac{v_o}{a} - \frac{a}{2} \frac{v_o^2}{a^2} = \frac{v_o^2}{2a}$$

az ismeretlen a gyorsulást a d) egyenletnek az a) egyenletbe történő helyettesitésével kapjuk:

$$\mu mg \geqq m\,a$$

amiből

$$a \leqq \mu g$$

végül az ut

$$s_{min} = \frac{v_o^2}{2a} \geqq \frac{v_o^2}{2\mu g} = \frac{25^2}{2.0,25.9,81} = 127,4\ m$$

Rezgéstan, lengéstan

17. A spirális rugó a végére akasztott 0,2 kg tömegű test hatására megnyulik, majd magára hagyva, rezgő mozgást végez. Határozzuk meg a direkciós erőt, a rezgésidőt, a frekvenciát, a körfrekvenciát, a maximális sebességet, a maximális gyorsulást, a maximális visszatérítőerőt, a kitérést, sebességet, gyorsulást az idő függvényében, ha a legnagyobb kitérése 10 cm. (A rugó tömegét elhanyagoljuk.)

Megoldás:

A direkciós erő nagysága:

$$D = \frac{F}{A} = \frac{0,2\ \text{kp}}{0,1\ \text{m}} = 2\ \text{kp/m} \approx 20\ \text{N/m} = 20\ \text{kg/s}^2$$

A rezgésidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,2\ \text{kg}}{20\ \text{kg/s}^2}} = 0,628\ \text{s}.$$

A frekvencia és a körfrekvencia:

$$f = \frac{1}{T} = 1,6\ \text{Hz} \quad \text{és} \quad \omega = 2\pi f = 10\ \text{Hz}.$$

Kitérés, sebesség, gyorsulás:

$$x = A \sin \omega t = 0.1 \sin 10t \qquad [x] = \text{m}$$

$$v = A\omega \cos \omega t = \cos 10t \qquad [v] = \text{m sec}^{-1}$$

$$a = -A\omega^2 \sin\omega t = -10 \sin 10t \qquad [a] = \text{m sec}^{-2}$$

Maximumok:

$$v_{max} = A\omega = 0,1\ \text{m} \cdot 10\ \text{sec}^{-1} = 1\ \text{msec}^{-1}$$

$$a_{max} = A\omega^2 = 0,1\ \text{m} \cdot 100\ \text{sec}^{-2} = 10\ \text{msec}^{-2}$$

$$F_{max} = DA = 20\ \text{N/m} \cdot 0,1\ \text{m} = 2\ \text{N}.$$

18. Két tömegpont azonos frekvenciával harmonikus rezgést végez. Amikor az egyik az egyensuly helyzetén halad át, a másik az előbbi sebességének irányába eső legnagyobb kitérésnél tart. Mekkora a két rezgés fáziskülönbsége?

Megoldás:

Egyik tömegpont kitérése:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$$

Másik tömegpont kitérése:

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$$

Fáziskülönbségük:

$$\varphi = (\omega t + \alpha_1) - (\omega t + \alpha_2).$$

Legyen $v > 0$ amikor az első tömegpont áthalad az egyensulyi helyzetén.

Áthaladáskor $\quad x_1 = 0 \implies \sin(\omega t_0 + \alpha_1) = 0$

vagyis $\quad (\omega t_0 + \alpha_1) = 0 + 2k\pi$

Ugyanekkor a másik kitérés maximális.

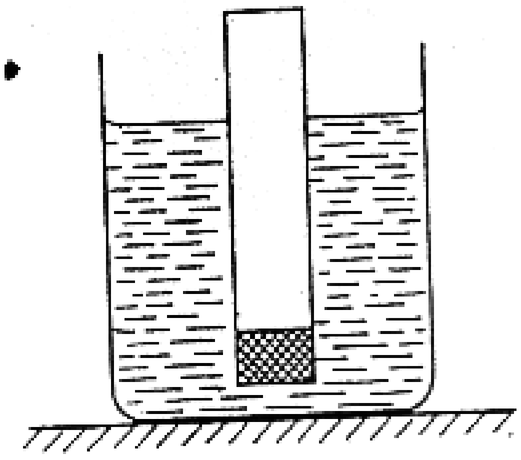
$$x_2 = \max \implies \sin(\omega t_0 + \alpha_2) = 1$$

vagyis $\quad (\omega t_0 + \alpha_2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Ezek figyelembevételével $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Tehát a második rezgés fázisa $\frac{\pi}{2}$ -vel megelőzi az elsőt.

19.



Egy q keresztmetszetü, alsó végén nehezékkel megterhelt hengeres rudat (areométert) vizzel töltött edénybe állitunk. A rud a vizben függőleges helyzetben uszik (. ábra). Az aerométert h-val az egyensulyi helyzete alá nyomjuk és ott hirtelen elengedjük. Bizonyitsuk be, hogy a magárahagyott areométer harmonikus rezgőmozgást végez. (A viz ellenállásától eltekintünk.) Adjuk meg a rezgés kitérés-idő függvényét is, ha az areométer tömege m!

Megoldás:

Egyensulyi helyzetben a felhajtóerő egyensulyt tart a rud sulyával:

$$F_f = G$$

de:

$$\varrho\, g\, q\, x_0 = mg,$$

ahol x_0 a rud merülési mélysége egyensulyi helyzetben,

q a rud keresztmetszete,

ϱ a viz sürüsége,

g a nehézségi gyorsulás,

m a rud tömege.

($G = mg$ illetve $F_f = \gamma\, V = \varrho\, g\, V = \varrho\, g\, q\, x_0$)

Ha a rud $x_0 + x$ mélységig merül a folyadékban, a rudra felfelé irányuló

$$F_{x_0+x} = \varrho\, g\, q\,(x_0 + x) - mg,$$

ha a rud $x_0 - x$ mélységig merül a folyadékban, a rudra lefelé irányuló

$$F_{x_0-x} = mg - \varrho\, g\, q\,(x_0 - x) \text{ eredő erő hat.}$$

Az egyensulyi feltételt figyelembevéve:

$$F_{x_0+x} = \varrho\, g\, q\, x \text{ (felfelé)}$$

$$F_{x_0-x} = \varrho\, g\, q\, x \text{ (lefelé)}$$ vagyis $D = \varrho\, g\, q$ eredményre jutunk.

Tehát beláttuk, hogy mindkét esetben a kitéréssel arányos, de ellentétes irányu visszatérítő erő hat; a rud harmonikus rezgőmozgást végez.

Igy: $$x = A \sin(\omega t + \varphi),$$

ahol: $$A = h$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{\varrho\, g\, q}{m}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$x = h \sin\left(\sqrt{\frac{\varrho g q}{m}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = h \cos \sqrt{\frac{\varrho g q}{m}} \cdot t$$

tehát:

$$x = h \cos \sqrt{\frac{\varrho g q}{m}} \cdot t \;.$$

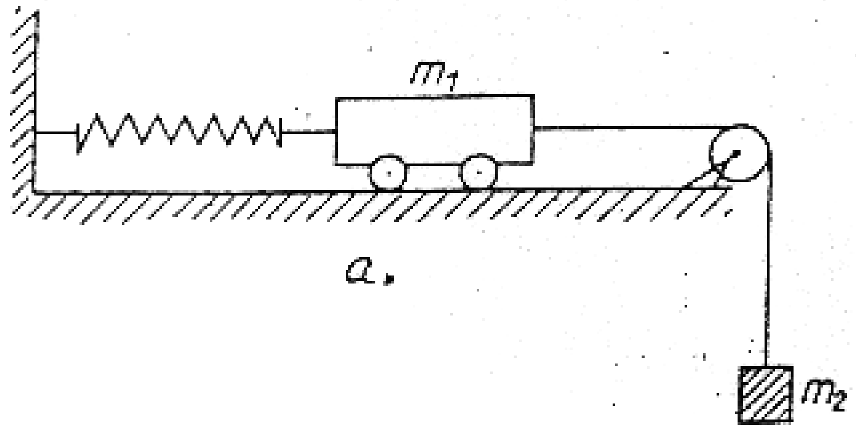
20. Vizszintes lapon álló m_1 tömegü kis kocsit egyik végén rögzitett rugóhoz kötjük. A kocsi másik végéhez csigán átvetett fonalat kötünk, és annak végére m_2 tömegü testet függesztünk. A kocsit a rugó nyujtatlan állapotában megrögzitjük, majd hirtelen elengedjük. Irjuk le a kocsi mozgását! (A rugó és a fonal tömegétől, surlódás és közegellenállástól eltekintünk.) (a. ábra)

Megoldás:

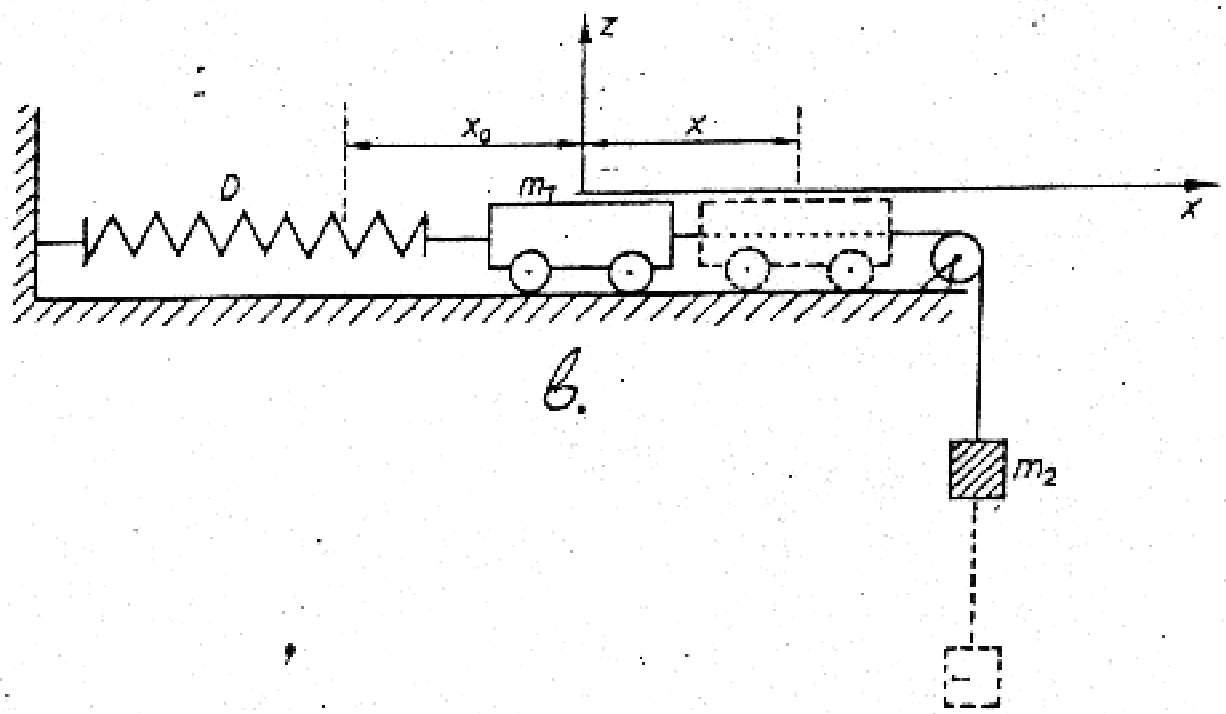
A kocsira és a hozzákötött m_2 tömegü testre ható erők a kocsi kezdeti helyzetétől

$$x_o = \frac{m_2 g}{D}$$

távolságban tartanak egyensulyt (b. ábra).



a.



b.

Koordináta-rendszerünk kezdőpontját helyezzük az x_o pontba. Igy ha a kocsi az origótól x-el elmozdul:

$$-D(x_o + x) + m_2 g = -Dx,$$

illetve

$$D(x_o - x) - m_2 g = -Dx \;.$$

Tehát a kitéréssel arányos visszatérítő erő lép fel.
A kocsi és a hozzákötött test harmonikus rezgő mozgást végez:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \text{ ahol}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}}$$

Az amplitudó az x_0-tól mért azon legnagyobb kitérés, amennyire a kezdőhelyzetben hirtelen elengedett kocsi elmozdul. Mozduljon el az eredeti helyzettől h távolságra, ekkor az energiákra

$$m_2 gh = \frac{1}{2} D h^2 ,$$

ebből

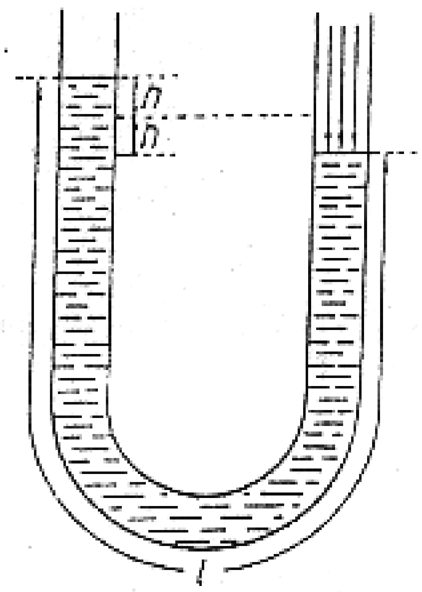
$$h = \frac{2m_2 g}{D} = 2x_0 ; \text{ vagyis az amplitudó } A = x_0 .$$

$$A = \frac{m_2 g}{D} .$$

Végül ω és A behelyettesítésével

$$x = \frac{m_2 g}{D} \sin \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}} \cdot t \text{ egyenletű lesz az } x_0$$

pont körül rezgő kocsink kitérése.



21, Egyenletes keresztmetszetű U alakú csőben folyadék van. A cső egyik szárába felülről levegő áramot fujunk, aminek következtében a folyadékszint ebben a szárban h-val az eredeti szint alá süllyed. A levegőáram befuvását megszüntetve a folyadékoszlop rezgőmozgásba jön. Mekkora a rezgésidő? A folyadékoszlop teljes hossza l. (A surlódástól és közegellenállástól eltekintünk.)

Megoldás:

Ha a folyadékszint az egyik szárban x-el süllyed, a másikban ugyanannyival emelkedik. A folyadékoszlop 2x magasságú folyadékoszlop sulya visszatérítő erőként müködik.

$$F = \gamma V = \rho g . V = \rho g . 2xq ,$$

ahol ρ a folyadék sürüsége,
g a nehézségi gyorsulás,
q a cső keresztmetszete.

Bevezetve a $D = 2 \rho gq$ jelölést

$F = Dx$ összefüggést kapjuk.

Tehát a folyadékoszlop rezgőmozgást végez:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} .$$

Figyelembevéve a $D = 2 \rho gq$ és $m = \rho l q$ összefüggéseket:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho l q}{2 \rho gq}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} .$$

22. Egy 5, 5. $10^3 \frac{N}{m}$ rugóállandóju rugóra 5 kg tömegü golyót ejtünk. Az elengedés pillanatában a golyó alja 2 méterrel van magasabban, mint a rugó felső széle. Legfeljebb mekkora lehet a rugó összenyomódása?

($g = 10\ m\ sec^{-2}$ értékével számoljunk!)

Megoldás:

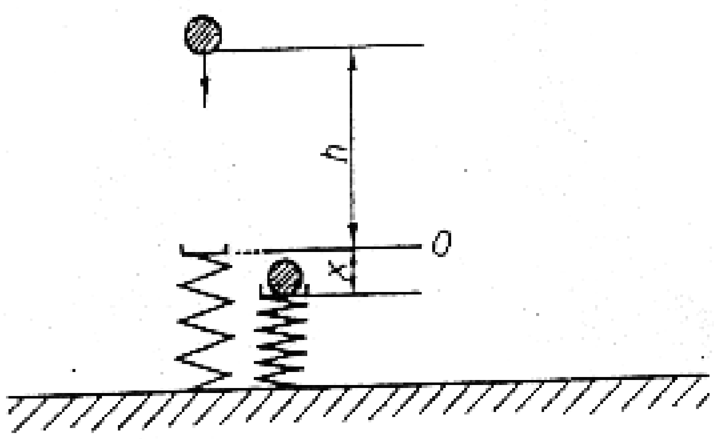
Tételezzük fel, hogy a rugó tömege a test tömegéhez képest elhanyagolhatóan kicsi. Rugalmatlan ütközést feltételezve az energiaveszteség elhanyagolható a fenti feltételezésük következményeként.

A munkatétel szerint: $\sum W = \Delta E_{mozg}$, ahol

$\sum W$ a golyón végzett munkák összege,

ΔE_{mozg} a golyó kinetikus energiájának változása.

Kezdő és végállapotnak válasszuk a golyó elindulásának pillanatát, illetve azt a pillanatot, amikor a golyó egy pillanatra megáll az összenyomott rugón.



A nehézségi erőtér munkája a golyón:

$$W_{neh} = mg\,(h + x)$$

A rugó munkája a golyón:

$$W_{rugó} = -\frac{1}{2}kx^2$$

$$\sum W = W_{neh} + W_{rugó} = mg\,(h + x) - \frac{1}{2}kx^2$$

A golyó mozgási energiájának változása $\Delta E_{mozg} = 0$.

Ezek figyelembevételével $\sum W = \Delta E_{mozg}$-ból

$$mg\,(h + x) - \frac{1}{2}kx^2 = 0\,.$$

Egyenletünket x-re megoldva, $x = 0,2$ m eredményre jutunk.

— o —

Elektrosztatika

23. Hányszor nagyobb két proton között az elektromos taszítás, mint a gravitációs vonzás? Határozza meg ezt az arányt két elektronra, ill. egy elektronra és egy protonra is!

a) A proton tömege: $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg,

töltése: $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C.

Két proton között a gravitációs erő:

$$F_g = \gamma \frac{m_p^2}{r^2}.$$

Az elektromos taszítóerő:

$$F_e = k\frac{e^2}{r^2},$$

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k e^2}{\gamma m_p^2} = \underline{1{,}2386\cdot 10^{36}}.$$

b) Az elekron tömege: $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg,

töltése: $e = -1{,}6\cdot 10^{-19}$ C.

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k e^2}{\gamma m_e^2} = \underline{4{,}1713\cdot 10^{42}}.$$

c) $$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k e^2}{\gamma m_e m_p} = \underline{2{,}273\cdot 10^{39}}.$$

Megjegyzés

Az elektron és a proton között természetesen vonzó- és ("negatív taszítás").

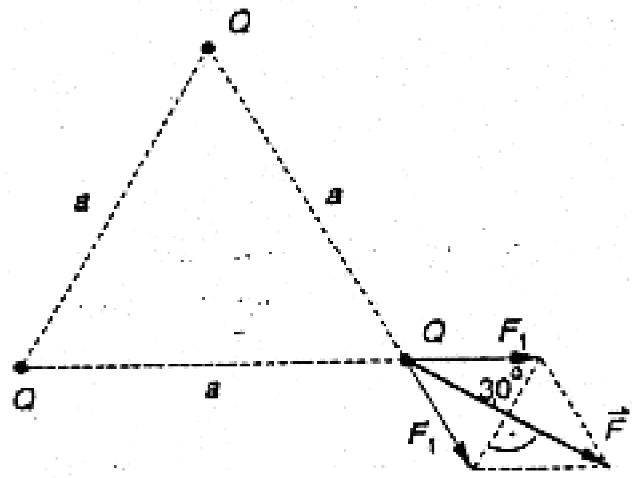
24. Mekkora erő hat egy egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban elhelyezett három, egyenként 10^{-6} C nagyságú pontszerű töltés mindegyikére, ha a háromszög oldala 10 cm?

$Q = 10^{-6}$ C, $a = 0{,}1$ m.

$$F_1 = k\frac{Q^2}{a^2},$$

$F = 2F_1 \cos 30^\circ = \underline{1{,}5588\ \text{N}}.$

A másik két töltésre a szimmetria miatt ugyanekkora eredő erő hat.



25. Mekkora erő hat egy négyzet csúcsaiban elhelyezett négy, egyenként 10^{-6} C nagyságú pontszerű töltés mindegyikére, ha a négyzet oldala 10 cm?

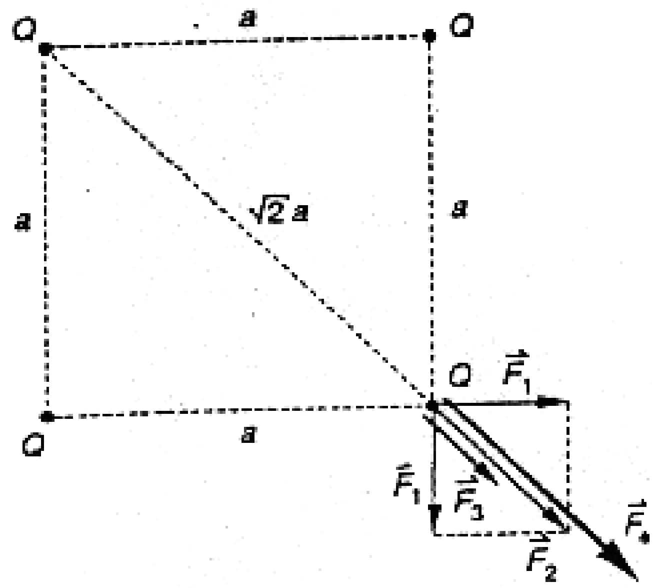
$Q = 10^{-6}$ C, $a = 0{,}1$ m.

$$F_1 = k\frac{Q^2}{a^2}, \quad F_2 = \sqrt{2}F_1,$$

$$F_3 = k\frac{Q^2}{\left(\sqrt{2}a\right)^2},$$

$$F_e = F_2 + F_3 \implies$$

$$\implies F_e = k\frac{Q^2}{a^2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = \underline{1{,}7288\text{ N}}.$$



A másik három töltésre a szimmetria miatt ugyanekkora eredő erő hat.

26. Mekkora erő hat egy szabályos tetraéder csúcsaiban elhelyezett, egyenként 10^{-6} C nagyságú pontszerű töltés mindegyikére, ha a tetraéder élhossza 10 cm?

$Q = 10^{-6}$ C, $a = 0{,}1$ m.

A B pontban lévő Q töltésre az A és a C pontban elhelyezett töltések F_0 nagyságú erővel hatnak (v.ö. **11.19.** feladat):

$$F_0 = 2k\frac{Q^2}{a^2}\cos 30°.$$

A D pontban lévő töltés F_1 nagyságú erővel hat a B-beli töltésre:

$$F_1 = k\frac{Q^2}{a^2}.$$

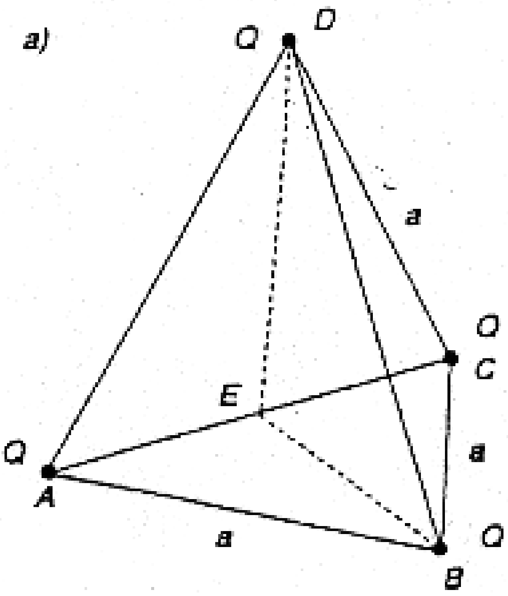
Az F_0 és F_1 erők hatásvonala a BDE síkban van.

A koszinusztétel szerint:

$$F^2 = F_0^2 + F_1^2 - 2F_0F_1\cos\alpha.$$

A $b)$ ábra alapján:

$$\cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Mivel $\alpha + \beta = 180°$,

így $\cos\alpha = \cos(180° - \beta) =$

24

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Behelyettesítés és rendezés után:

$$F^2 = 6\cdot\left(k\frac{Q^2}{a^2}\right)^2 \Longrightarrow F = \underline{2{,}204\ \text{N}}.$$

Más megoldás: A három él – és így a 3 db F_0 nagyságú erővektor is – a magasságvonallal azonos szöget zár be, ezért

$$F = 3F_0 \cos\varphi.$$

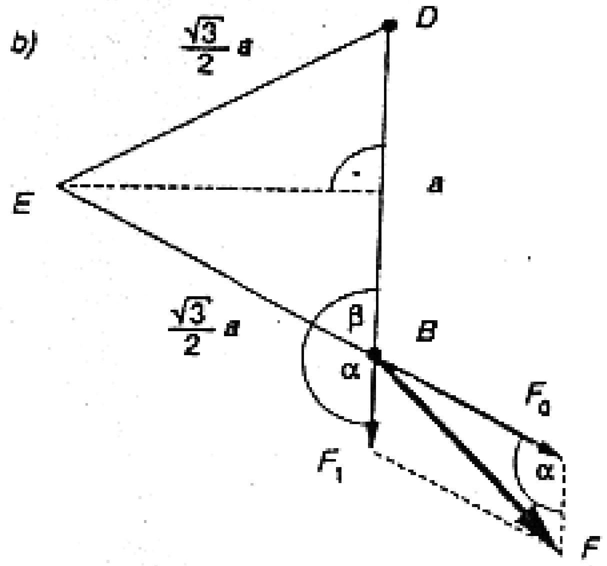
Az ábra alapján:

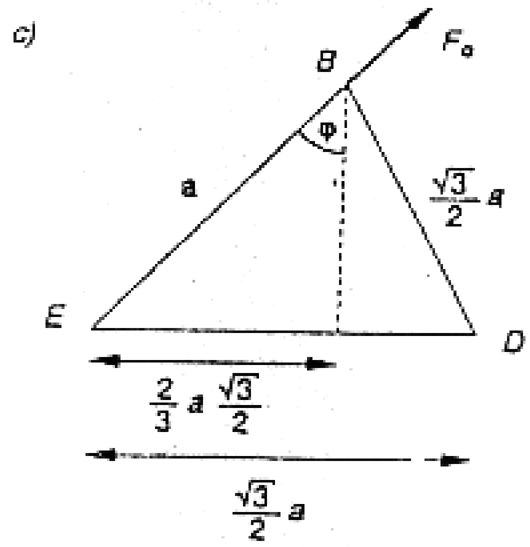
$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{így } \cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ezzel a keresett erő:

$$F = 3F_0\sqrt{\frac{2}{3}} = F_0\sqrt{6} =$$

$$= \sqrt{6}\,k\frac{Q^2}{a^2} = \underline{2{,}204\ \text{N}}.$$



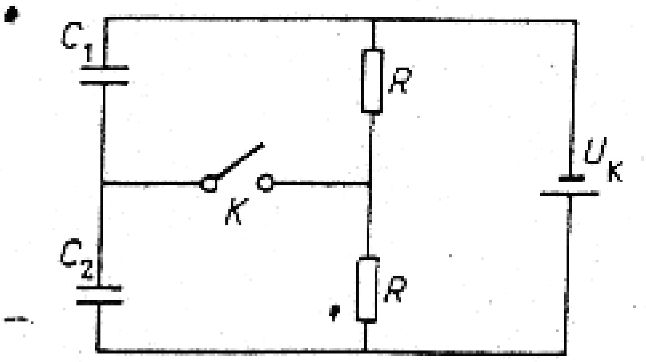


Feszültség, potenciál, kapacitás, az elektromos mező energiája

A fejezet során gyakran előforduló adatok:

$$k = 9\cdot 10^9\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}8542\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}.$$ } !

27.



Az ábra szerinti kapcsolásban a kapocsfeszültség 25 V, az R ellenállás 10 kΩ, a kondenzátorok kapacitása $C_1 = 0{,}5$ μF, ill. $C_2 = 2$ μF. Határozza meg a kondenzátorok energiáját a kapcsoló zárása előtt és után!

$U = 25$ V, $\quad R = 10\,000\ \Omega$, $\quad C_1 = 5\cdot 10^{-7}$, $\quad C_2 = 2\cdot 10^{-6}$ F.

Az áramkörnek a kondenzátorokat tartalmazó ágában a teljes feltöltődést követően nem folyik áram. A feszültségeket az ellenállások állítják be. A kondenzátor feszültsége a vele párhuzamosan kötött ellenálláson kialakuló feszültséggel egyenlő.

a) A kapcsoló nyitott állásánál a sorosan kapcsolt két kondenzátor és a sorosan kapcsolt két ellenállás van egymással párhuzamosan összekapcsolva. A kondenzátorok lemezein a töltéseket az elektromos megosztás hozza létre, ezért az minden lemezen azonos.

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 4 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{F}, \qquad Q = C_e U = 10^{-5}\ \mathrm{C}.$$

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1} = \underline{10^{-4}\ \mathrm{J}}, \qquad W_2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}.$$

b) A kapcsoló zárásakor mindkét kondenzátor párhuzamosan kapcsolódik egy-egy ellenállással. Az ellenállások sorosan összekötve kapcsolódnak az áramforrásra. Az ellenállások soros kapcsolása következtében a telep feszültsége az ellenállások arányában oszlik meg. Mivel $R_1 = R_2$, ezért $U_1 = U_2$. A kondenzátorok feszültsége tehát $U_1 = U_2 = 12{,}5$ V lesz.

$$W'_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \underline{3{,}9 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}}, \qquad W'_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = \underline{1{,}56 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}}.$$

---

28. Egy kondenzátort 500 V-ra, egy másikat pedig 250 V-ra töltöttünk fel. A két kondenzátort azonos polaritással párhuzamosan kapcsolva 300 V feszültséget mérünk rajtuk.

a) Határozza meg a kondenzátorok kapacitásának arányát!

b) Csökkent, azonos maradt vagy nőtt a rendszer elektrosztatikus energiája az összekapcsolás során? Indokolja válaszát!

$U_1 = 500$ V, $U_2 = 250$ V, $U_3 = 300$ V.

a) $$500\ \mathrm{V} = \frac{Q_1}{C_1}.$$

$$250\ \mathrm{V} = \frac{Q_2}{C_2}.$$

$$300\ \mathrm{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}.$$

Az egyenletrendszerből $\underline{C_1 : C_2 = 1 : 4}$.

A folyamat során a rendszer összes töltésmennyisége nem változik meg, viszont az egyes kondenzátorok töltése igen. A két kondenzátor összekapcsolása előtt az azonos polaritású lemezek között potenciálkülönbség van. Amikor tehát a kondenzátorokat összekapcsoljuk, a vezetéken keresztül olyan töltésmozgás indul meg, amelynek során az egymással érintkező fémek ekvipotenciálisak lesznek, és a két kondenzátor feszültsége megegyezik. A rendszer úgy viselkedik, mint amikor két különböző feszültségű telepet kapcsolunk össze.

b) A rendszer energiája az összekapcsolás előtt:

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 + \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = C_1 \cdot 2{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{V}^2.$$

A rendszer energiája az összekapcsolás után:

$$W_2 = \frac{1}{2} C_1 U_3^2 + \frac{1}{2} C_2 U_3^2 = C_1 \cdot 2{,}25 \cdot 10^5\ \mathrm{V}^2.$$

$\frac{W_2}{W_1} = 0{,}9$ (1-nél kisebb), tehát a rendszer energiája csökkent 10 %-kal.

Töltött részecskék mozgása elektrosztatikus mezőben

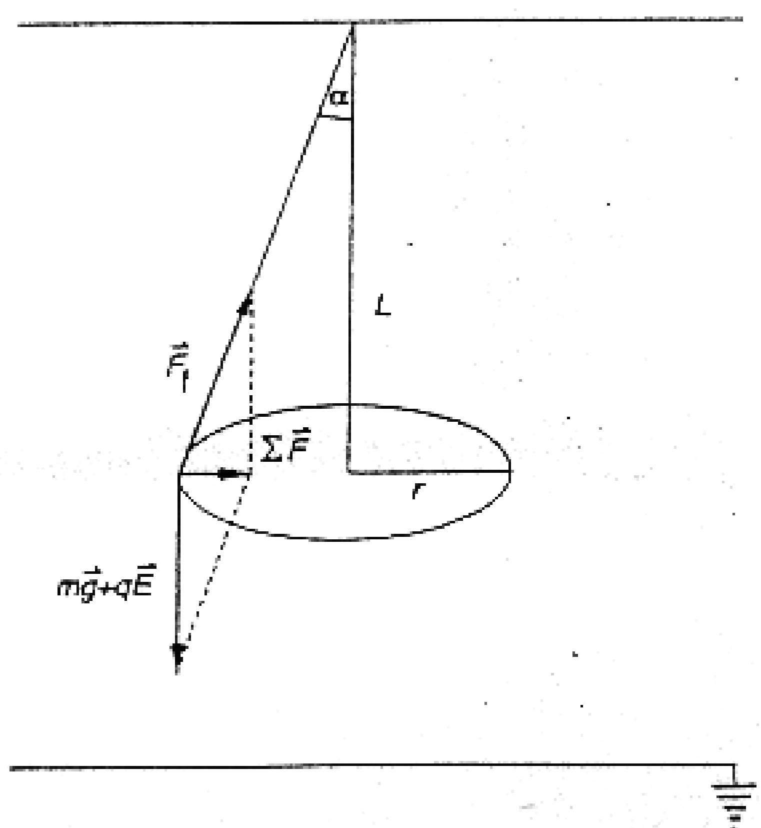
29. Két vízszintes, egymással párhuzamos, szemben álló fémlemez egyikét leföldeljük, a másiknak $6 \cdot 10^{-7}$ C töltést adtunk. A lemezek területe 500 cm². A lemezek között középen 5 cm hosszú fonálon függő, 4 g tömegű, $2 \cdot 10^{-9}$ C töltésű elektrosztatikai inga gömbje köröz vízszintes síkban. A fonál a függőlegessel 30°-os szöget zár be. Határozza meg a gömb mozgási energiáját, és a fonál által kifejtett erőt!

A kondenzátor lemezei között vákuum van, amelynek:
$\varepsilon_0 \cong 8{,}8 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

$Q = 6 \cdot 10^{-7}$ C, $A = 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$, $L = 5 \cdot 10^{-2}$ m,
$m = 4 \cdot 10^{-3}$ kg, $q = 2 \cdot 10^{-9}$ C, $\alpha = 30°$.

A testre ható erők eredője a körpálya síkjában a kör középpontja felé mutat, ez az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele.
A térerősség a kondenzátor lemezei között:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}.$$



Az ábra szerint:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sum F}{Eq+mg} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum F = (Eq+mg)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

A test mozgásegyenlete:

$$\sum F = m\frac{v^2}{r},$$

$$\frac{mv^2}{r} = (Eq+mg)\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad (*)$$

Ha a körpálya sugara r, akkor az ábra szerint:

$$\sin\alpha = \frac{r}{L}, \qquad \text{ahonnan}$$

$$r = L\sin\alpha.$$

A (*)-gal jelölt összefüggésből:

$$mv^2 = r(Eq+mg)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

A test mozgási energiája:

$$W_m = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}r\,(Eq+mg)\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}L\sin\alpha\,(Eq+mg)\,\mathrm{tg}\,\alpha = \underline{3{,}08 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}}.$$

Az ábrából leolvasva:

$$\cos\alpha = \frac{mg+Eq}{F_f},$$

innen a fonálerő:

$$F_f = \underline{4{,}93 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N}}.$$

30. Mekkora sebességre gyorsul fel az $U_{AB} = 30\,000$ V feszültségű pontok között egy, a nagyobb potenciálú ponton $2 \cdot 10^2 \frac{m}{s}$ nagyságú sebességgel áthaladó, $5 \cdot 10^{-6}$ g tömegű, $8 \cdot 10^{-7}$ C töltésű testecske? (A gravitáció hatásától tekintsen el!)

$U_{AB} = 30\,000$ V, $v = 2 \cdot 10^2 \frac{m}{s}$, $m = 5 \cdot 10^{-9}$ kg, $q = 8 \cdot 10^{-7}$ C.

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + qU_{AB} = \frac{1}{2} m v^2,$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qU_{AB}}{m}} = \underline{3{,}1 \cdot 10^3 \frac{m}{s}}.$$

A kezdeti sebesség nem befolyásolja számottevően a végső sebességet, ez a négyzetgyökjel alatti összegből jól látszik.

---

31. Két egymással szemben álló, párhuzamos, egymástól átmérőjükhöz képest elhanyagolható távolságban ($d \ll D$) levő fémből készült körlemez mindegyikének középpontjában egy kis lyuk van fúrva. Az egyik lemezt a máskhoz viszonyítva U feszültségre töltjük fel. (A lemezek mindentől távol vannak.) Az egyik lemeztől $5D$ távolságból egy elektront indítunk v_0 nagyságú sebességgel úgy, hogy az mindkét lyukon átrepül. Mekkora lesz az elektron sebessége a lyukakon való áthaladás után, amikor ismét $5D$ távolságra kerül a második lemeztől? Indokolja állítását!

Elektromos mező csak a lemezek között van, ezért az elektron csak a lemezek között gyorsul. Két eset lehetséges:

a) Ha az elektront a negatív lemez felől juttatjuk a lemezek közötti térbe. A munkatétel segítségével:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = eU, \Longrightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

b) Az elektront a pozitív lemez felől belőve:

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2eU}{m}},$$

Ha a négyzetgyökjel alatti kifejezés kisebb, mint nulla, akkor az elektron a lemezek közötti részben visszafordul.

32. Hány elektron halad át 2 óra alatt azon a 0,01 mm^2 keresztmetszetű és 20 m hosszú rézvezetéken, amelyet 1,5 V-os, 2 Ω belső ellenállású telepre kapcsoltunk?

$t = 7200$ s, $l = 20$ m, $A = 0{,}01 \cdot 10^{-6}\ m^2$, $U = 1{,}5$ V, $R_b = 2\,\Omega$,
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $\rho = 1{,}78 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ m.

A vezeték ellenállása $R = \rho \frac{l}{A}$ szerint:
$R = 35{,}6\ \Omega$.

A körben folyó áram erőssége:

$$I = \frac{U}{R + R_b} = 0{,}04 \text{ A},$$ és ez t idő alatt

$Q = It = 287{,}23$ C töltést szállított. Ez

$$n = \frac{Q}{e} = \underline{1{,}8 \cdot 10^{21}}$$ darab elektront jelent.

33. Egy rézvezetékben $0{,}12\ \frac{mm}{s}$ nagyságú sebességgel haladnak az elektronok. Mekkora feszültséget kapcsoltunk a vezeték 120 m hosszú szakaszára, ha a vezetésben részt vevő elektronok száma köbméterenként $2{,}6 \cdot 10^{27}$ darab? Mekkora volt a rézvezeték keresztmetszete, ha az áram erőssége 10 A?

$v = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\ \frac{m}{s}$, $l = 120$ m, $n = 2{,}6 \cdot 10^{27}\ \frac{db}{m^3}$, $I = 10$ A,
$\rho = 1{,}78 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ m.

A vezető A keresztmetszetén t idő alatt az Avt térfogatban lévő elektronok haladnak át. Ha n a térfogategységben lévő elektronok számát jelenti, akkor ebben összesen $nAvt$ elektron van, melyek össztöltése $nAvte$.

Az áramerősség definíciója szerint:

$$I = \frac{Q}{t} = nAve,$$

innen:

$$A = \frac{I}{nve} = 2 \cdot 10^{-4}\ m^2.$$

Ellenállása

$$R = \rho \frac{l}{A} = 0{,}01\ \Omega.$$

A feszültséget pedig az
$U = IR = 0{,}1$ V kifejezés adja meg.

34. Egy 80 m hosszú rézvezeték végeire 0,068 V feszültséget kapcsolunk, amelynek hatására a benne levő vezetési elektronok 0,12 $\frac{\text{mm}}{\text{s}}$ nagyságú sebességgel haladnak. Mekkora a vezetési elektronok köbméterenkénti száma a rézben? Mekkora volt az előbbi vezeték keresztmetszete, ha az áram erőssége 10 A?

$l = 80$ m, $U = 0{,}068$ V, $v = 1{,}2\cdot10^{-4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $I = 10$ A,
$\rho = 1{,}78\cdot10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$.

A **33.** feladat megoldása alapján

$A = 2{,}12\cdot10^{-4}\,\text{m}^2$, és

$n = \frac{I}{Ave} = \underline{2{,}5\cdot10^{28}\,\frac{\text{db}}{\text{m}^3}}$ adódik.

---

35. Mit mutat az áramforrás sarkaira kapcsolt feszültségmérő, ha az 5 A erősségű árammal átjárt 20 Ω ellenállású fogyasztót lekapcsolják az áramforrásról: *a)* a fogyasztó lekapcsolása előtt, *b)* a fogyasztó lekapcsolása után? Az áramforrás belső ellenállása 4 Ω.

$I = 5$ A, $R_k = 20\,\Omega$, $R_b = 4\,\Omega$.

A feszültségmérő mindig a ráeső feszültséget mutatja. Ideális esetben a műszer ellenállása igen nagy, így nem terheli az áramkört.

a) Amíg a fogyasztó rá van kötve az áramforrásra, addig a műszer által mutatott érték a kapocsfeszültséggel egyenlő. Értéke:

$U_k = R_k I = 100$ V.

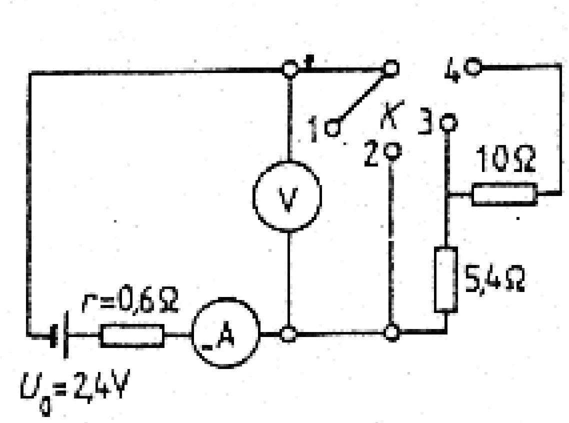
Ekkor a belső ellenálláson

$U_b = R_b I = 20$ V

esik. Az elektromotoros erő e kettő összege: $\underline{120\text{ V}}$.

b) A fogyasztó lekapcsolása után a műszer által mutatott érték a terheletlen feszültségforrás feszültsége, az ún. üresjárási feszültség. Ennek a nagysága megegyezik az elektromotoros erővel.

36.



Igen nagy ellenállású feszültségmérőt és elhanyagolható ellenállású árammérőt kapcsoltunk be az ábra szerint összeállított áramkörbe. Számítsa ki a műszerek által mutatott értékeket a *K* kapcsolónak mind a négy állásában!

$U_0 = 2{,}4$ V, $r = 0{,}6\,\Omega$, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 5{,}4\,\Omega$.

Mivel a műszerek ideálisak, a feszültségmérőn nem folyik áram, az áramerősség-mérőn nem esik feszültség.

1. állás: az áramkör nyitott, áram nem folyik, így r-en nem esik feszültség.

$U = \underline{2{,}4\text{ V}}$, és $I = \underline{0\text{ A}}$.

2. állás : az áramkört egy drót zárja, így eredő ellenállása, $r = 0{,}6\ \Omega$, rajta

$$I = \frac{U_0}{r} = \frac{2{,}4\ \text{V}}{0{,}6\ \Omega} = 4\ \text{A}$$

folyik. Mivel a drót a feszültségmérőt rövidre zárja, így

$U = \underline{0\ \text{V}}$, és $I = \underline{4\ \text{A}}$.

3. állás: az áram most az $5{,}4\ \Omega$ ellenálláson is átfolyik, így az eredő ellenállás $6\ \Omega$, az áramerősség ezért

$$I = \frac{U}{r} = 0{,}4\ \text{A}.$$

A műszer az eredő 5,4 ohmos ellenállásra eső feszültséget jelzi. Mivel sorba kapcsolt ellenállásokon a feszültségek aránya az ellenállások arányával egyezik meg, ezért rá 2,16 V jut. Azaz

$U = \underline{2{,}16\ \text{V}}$, és $I = \underline{0{,}4\ \text{A}}$.

4. állás: az eredő ellenállás most

$0{,}6\ \Omega + 5{,}4\ \Omega + 10\ \Omega = 16\ \Omega$,

az áramerősség:

$$I = \frac{2{,}4\ \text{V}}{1{,}6\ \Omega} = \underline{0{,}15\ \text{A}}.$$

A feszültségmérő a két ellenállásra jutó feszültséget jelzi

$U = I(R_1 + R_2) = 2{,}31\ \text{V}.$

---

37. Egy feszültségmérőt 1,5 V elektromotoros erejű áramforrásra kapcsolunk, s az 1,45 V-ot mutat. Az áramforrás belső ellenállása 0,2 Ω. Mi mindent tud megállapítani ezekből az adatokból?

$E = 1{,}5\ \text{V}$, $R_b = 0{,}2\ \Omega$, $U_k = 1{,}45\ \text{V}$.

A műszer által mutatott érték egyaránt jelenti a terhelt feszültségforrás feszültségét és a külső ellenállásra jutó feszültséget, amit kapocsfeszültségnek nevezünk:

$U_k = 1{,}45\ \text{V}.$

A belső ellenállásra jutó feszültség, az ún. belső feszültségesés az elektromotoros erőnek és a kapocsfeszültségnek a különbsége:

$U_b = E - U_k = 0{,}05\ \text{V}.$

A belső ellenálláson átfolyt áram:

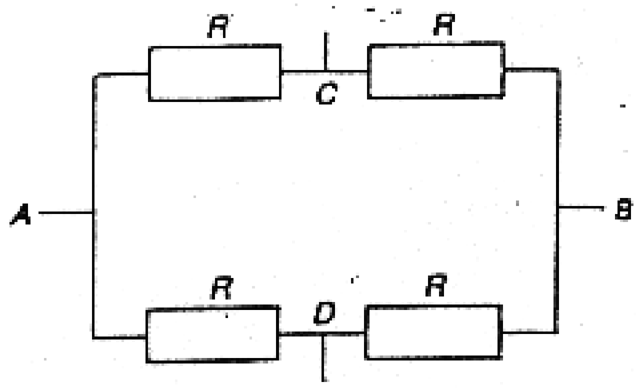
$$I = \frac{U_b}{R_b} = 0{,}25\ \text{A}.$$

A külső ellenállás értéke:

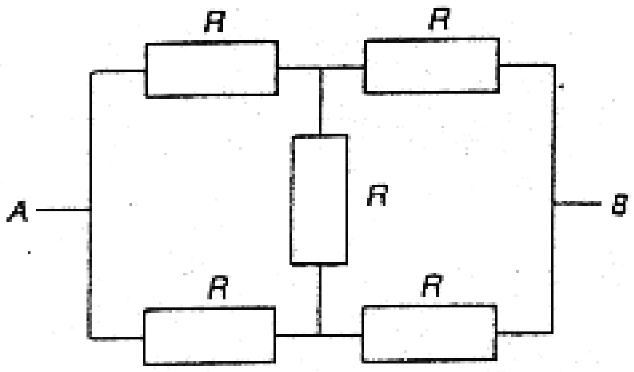
$$R_k = \frac{U_k}{I} = 5{,}8\ \Omega.$$

38. Hogyan kapcsoljunk öt darab 8,7 Ω-os ellenállást, hogy az eredő ellenállás 8,7 Ω legyen?

$R = 8{,}7\ \Omega.$

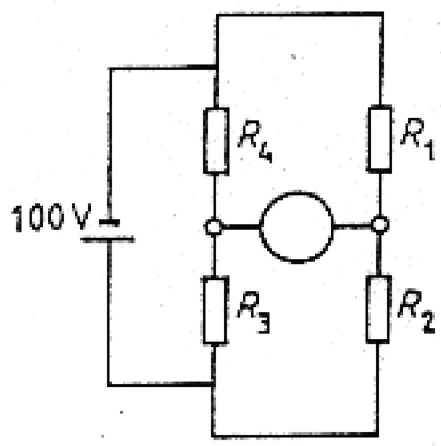


Ha két egyforma ellenállást sorba kapcsolunk, az eredő kétszeresére, ha párhuzamosan kapcsolunk, akkor felére változik. Emiatt az ábra szerinti kapcsolás eredője R.



Mivel a C és a D pontok azonos potenciálon vannak, ha bármivel összekötjük őket, azon áram nem folyik, így az eredő ellenállás ugyanannyi marad. Az ötödik ellenállásunkat tehát ide tehetjük (1. ábra).

39. A mellékelt ábrán a telep feszültsége 100 V, az R_1 és R_3 ellenállások értéke 50 Ω, az R_2 és R_4 ellenállások pedig 200 Ω-osak. Mit mutat a műszer, ha az igen nagy belső ellenállású feszültségmérő? Mit mutat a műszer, ha az igen kis belső ellenállású árammérő?



$R_1 = 50\ \Omega, \quad R_2 = 200\ \Omega, \quad R_3 = 50\ \Omega, \quad R_4 = 200\ \Omega, \quad U = 100\ \text{V}.$

a) Legyen a középső műszer feszültségmérő. Ha középre igen nagy belső ellenállású feszültségmérőt kapcsolunk, az az áramkör elektromos paramétereit nem befolyásolja. Határozzuk meg az R_1 és R_4 ellenállások műszer felőli végeinek feszültségét a másik (közös) végükhöz viszonyítva. Az egyes mellékágak eredő ellenállása egyenlő, hisz

$R_1 + R_2 = R_3 + R_4,$

így a bennük folyó áram:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = 0{,}4\ \text{A}.$$

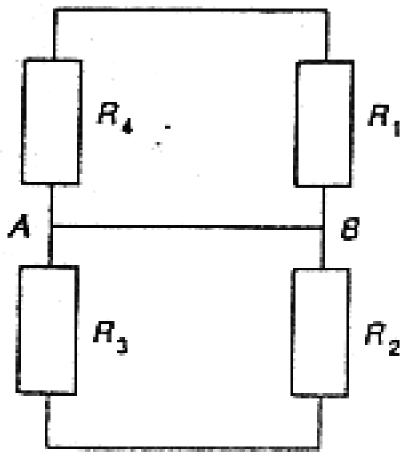
Az áramok hatására az R_1 és R_4 ellenállásokon eső feszültségek:

$U_1 = I R_1 = 20\ \text{V}$ és $U_4 = I R_4 = 80\ \text{V}.$

Ezek a feszültségek az ellenállások közös végére vonatkoznak, így a másik végük között $U_4 - U_1 = 60\ \text{V}$ feszültség van.

b) Legyen a középső műszer árammérő. Az árammérő nagyon kicsi ellenállása miatt két kivezetése azonos potenciálú. Az eredő ellenállás: $R = 80\ \Omega$. A főágban folyó áramerősség

$$I = \frac{U}{R_e} = 1{,}25\ \mathrm{A}.$$



Jelöljük az egyes ellenállásokon átfolyt áramokat a megfelelő indexekkel. Mivel párhuzamos kapcsolásnál a mellékágakban folyó áramok az ellenállások arányának reciprokával egyenlőek,

$$\frac{I_1}{I_4} = 4, \quad \text{és} \quad I_1 + I_4 = 1{,}25\ \mathrm{A},$$

és

$$\frac{I_2}{I_3} = 4, \quad \text{és} \quad I_2 + I_3 = 1{,}25\ \mathrm{A}.$$

Ezekből

$I_1 = 1\ \mathrm{A}$, $\quad I_2 = 0{,}25\ \mathrm{A}$, $\quad I_3 = 1\ \mathrm{A}$, $\quad I_4 = 0{,}25\ \mathrm{A}$.

Írjuk fel a csomóponti törvényt pl. az A pontra!

$$I_4 = I_3 + I_5.$$

Ebből

$I_5 = \underline{0{,}75\ \mathrm{A}}$.

---

40. Hány darab 1,5 V elektromotoros erejű és 0,2 Ω belső ellenállású telepet kell sorba kapcsolnunk, hogy a 15 Ω ellenállású fogyasztón legalább 6 A erősségű áram folyjon?

$E = 1{,}5\ \mathrm{V}$, $\quad R_b = 0{,}2\ \Omega$, $\quad R = 15\ \Omega$, $\quad I = 6\ \mathrm{A}$.

A sorba kapcsolt elemek elektromotoros ereje és belső ellenállása összegződik, így

$$nE = RI + InR_b.$$

Az értékek behelyettesítésével n-re $\underline{300}$ adódik, azaz legalább ennyi elemre van szükség.

---

41. Két db 300 W-os merülőforralónk van. Mennyi ideig tart 5 l víz 22 °C-ról forráspontig való felmelegítése, ha
a) csak egy merülőforralót,
b) kettőt párhuzamosan kapcsolva,
c) kettőt sorba kapcsolva használunk?
(A forralás hatásfoka 75%.)

$P = 300\ \mathrm{W}$, $V = 5\ \mathrm{l}$, $T_1 = 22\ °\mathrm{C}$, $T_2 = 100\ °\mathrm{C}$, $\eta = 75\ \%$,

$c = 4180\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\ °\mathrm{C}}$, $\rho = 1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

A víz melegítéséhez szükséges energia:

$$Q = cm\,(T_2 - T_1) = 1{,}6302 \cdot 10^6\ \mathrm{J}.$$

A hatásfok csak 75 %, ezért összesen:

$$Q' = \frac{Q}{\eta} = 2{,}1736 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$$

energiára van szükség. Az, hogy a merülőforraló teljesítménye 300 W, azt jelenti, hogy egy másodperc alatt 300 J energiát ad le.

a) Egy merülőforraló esetén:

$$t = \frac{Q'}{P} = \underline{7245{,}3\ \mathrm{s}}.$$

b) Két merülőforraló párhuzamosan kapcsolva:
Ekkor mindkettő megkapja a teljes tápfeszültséget, így összteljesítményük a teljesítményeik összege:

$$t = \frac{Q'}{2P} = \underline{3622{,}6\ \mathrm{s}}.$$

c) Kettő sorba kapcsolva:
Mivel azonos a merülőforralók ellenállása, ilyen kapcsolásban csak fél tápfeszültséggel dolgoznak. A teljesítmény a feszültség négyzetével arányos, így feleakkora feszültséghez negyedakkora teljesítmény tartozik. Azaz a két sorba kapcsolt merülőforraló összesen csak feleannyi energiát ad időegység alatt, mint egy darab. Tehát a melegítéshez szükséges idő:

$$t = \frac{Q'}{\frac{P}{2}} = \underline{14\,490{,}7\ \mathrm{s}}.$$

— • —

42. Egy 4 Ω belső ellenállású áramforrásra 8 Ω ellenállású fogyasztót kapcsolunk. Hány Ω ellenállású fogyasztó rákapcsolása esetén keletkezik ugyanannyi idő alatt ugyanannyi hő, mint a 8 Ω-os ellenálláson?

$R_b = 4\ \Omega$, $R_{k1} = 8\ \Omega$.

A 8 ohmos ellenállásra jutó teljesítmény:

$$P_1 = E^2 \frac{R_{k1}}{(R_b + R_k)^2} = E^2 \cdot \frac{1}{18}.$$

Az R ellenállásra jutó teljesítmény:

$$P_2 = E^2 \frac{R_{k2}}{(R_b + R_k)^2}.$$

A feltétel szerint:

$$P_1 = P_2.$$

Ebből:

$$R_{k2} = \underline{2\,\Omega}.$$

A feladatot másképpen is lehet értelmezni, mégpedig úgy, hogy a 8 ohmossal párhuzamosan mekkora ellenállást kell bekötni, hogy a teljesítmény ne változzon. Ekkor az újabb ellenállás bekötésével csökken a külső ellenállás, s így nő az áramerősség. A teljesítmény a két esetben:

$$P_1 = I_1^2 R_{k1},$$

és

$$P_2 = I_2^2 R',$$

ahol

$$R' = \frac{R_{k1} R_{k2}}{R_{k1} + R_{k2}}.$$

Az áramerősségek

$$I_1 = \frac{E}{R_b + R_{k1}},$$

és

$$I_2 = \frac{E}{R_b + R'}.$$

Helyettesítsük ezeket a teljesítményképletekbe, vegyük figyelembe a feladat feltételét, vagyis azt, hogy a két teljesítmény egyenlő, így

$$\frac{E^2}{(R_b + R_{k1})^2} R_{k1} = \frac{E^2}{(R_b + R')^2} R'.$$

Rendezés és egyszerűsítés után:

$$R_b^2 = R_{k1} R'.$$

Ennek segítségével kiszámolhatjuk az eredő ellenállást:

$$R' = 2\,\Omega.$$

A párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője:

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Ebből a keresett ellenállás:

$$R_{k2} = \underline{2{,}67\,\Omega}.$$

— · —

43. Hosszabb használat után az izzó volfrámszála részben elpárolog. Hogyan változik meg az izzó teljesítménye, ha időközben a szál anyagának 30%-a elpárolgott? (Tekintse a szál fogyását egyenletesnek a szál mentén.) A szál hőmérséklet-változásától tekintsen el!

Ha működés közben a volfrámszál anyagának 30 %-a elpárolgott, az azt jelenti, hogy térfogata változott így, s mivel a hossza nem, a keresztmetszete csökkent az eredeti 0,7-szeresére. Ellenállása ezért:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho \dfrac{l}{0{,}7A}}{\rho \dfrac{l}{A}} = \frac{1}{0{,}7},$$

tehát 1,43-szorosára nőtt. A teljesítmény állandó feszültség esetén az ellenállással fordítottan arányos, azaz:

$$\underline{P_2 = 0{,}7P_1}.$$

—— · ——

44\. Mennyi idő szükséges ahhoz, hogy 5 kg ólmot egy elektromos hevítőkemencében megolvasszunk, ha kezdetben 20 °C-os volt a hőmérséklete? A kemence fűtőteste 220 V feszültségen működik, és a fűtőszál ellenállása 5,5 Ω. A melegítés hatásfoka 80%.

$m = 5$ kg, $c = 129{,}8\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg °C}}$, $T_1 = 20$ °C, $T_2 = 327$ °C,

$U = 220$ V, $R = 5{,}5\ \Omega$, $\eta = 80$ %, $L = 23\,900\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg}}$.

Az ólmot először az olvadáspontjára kell felmelegíteni, ehhez:

$Q_1 = cm(T_2 - T_1) = 199\,243$ J hőmennyiség szükséges;

majd meg kell olvasztani:

$Q_2 = Lm = 119\,500$ J,

összesen tehát

$Q = Q_1 + Q_2 = 318\,743$ J

energiával. A hatásfokot is figyelembe véve,

$$Q' = \frac{Q}{\eta} = 398\,429\ \text{J}$$

energiát vesz fel a fűtőtest az elektromos hálózatból.

Teljesítménye:

$$P = \frac{U^2}{R} = 8800\ \text{W}.$$

Az idő

$$t = \frac{Q}{t} = \underline{45\ \text{s}}.$$

—— · ——

Az áram keltette mágneses mező; mágneses fluxus; gerjesztési törvény

45. Két, egyenként 1200 menetes, vékony, hosszú tekercsünk van. Mindkettőben 10 A erősségű áram folyik. Az egyik tekercs keresztmetszete kétszer akkora, mint a másiké. Melyikben nagyobb az indukció értéke, hányszor nagyobb? Indokolja válaszát!

$N_1 = N_2 = 1200, \quad I_1 = I_2 = 10\text{ A}, \quad A_1 = 2A_2.$

$B = \mu_0 \dfrac{IN}{l}$ nem függ a tekercs keresztmetszetétől.

---

46. Két, egyenként N menetszámú, l hosszúságú és I árammal átjárt tekercsünk van. A tekercsek keresztmetszete A. Átmérőjük elhanyagolható a hosszukhoz képest. Ha a két tekercset azonos áramiránnyal szorosan egymás után kapcsolva egyesítjük, a $2 \cdot l$ hosszúságú új tekercs mágneses mezőjének melyik tulajdonsága és hogyan változott egyetlen különálló tekercs mezőjének megfelelő tulajdonságához képest:

a) a mágneses indukció,
b) a mágneses fluxus,
c) a mágneses energia,
d) a mágneses energiasűrűség,
e) az indukciófluxus-sűrűség,
f) a tekercs egy indukcióvonala mentén mért örvényerősség?

Melyik maradt változatlan, melyik és hányszorosára nőtt, melyik hányszorosára csökkent? Indokolja válaszait!

a) $B_2 = \mu_0 \dfrac{I \cdot 2N}{2l} = \mu_0 \dfrac{IN}{l}. \qquad \underline{B_2 = B_1} \ (= B).$

A mágneses indukció nem változik meg.

b) $\underline{\Phi_2} = B_2 A = B_1 A = \underline{\Phi_1} \ (= \Phi).$

c) $\underline{W_2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{B^2}{\mu_0} V_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{B^2}{\mu_0} 2V_1 = \underline{2W_1}.$

A mező térfogata változatlan indukció mellett kétszeresére növekedett, ezért az energiája is kétszeresére nőtt.

d) $w_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{B^2}{\mu_0} = w_1.$

Az indukció nem változott, ezért az energiasűrűség sem változik meg.

e) $B = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta A}.$ Az indukciófluxus-sűrűség azonos az indukcióval, ezért az is változatlan.

f) $\bar{O}_{B2} = \mu_0 \sum I = \mu_0\, 2NI = 2\bar{O}_{B1}$.

A menetek száma kétszeresére nőtt, ezért az örvényerősség egy indukcióvonal mentén szintén kétszeresére nőtt.

— · —

Hogyan változik meg a tekercs mágneses mezőjének
A) a mágneses indukciója,
B) a mágneses fluxusa,
C) a tekercs egy indukcióvonala mentén számított örvényerőssége,
D) a mágneses energiája,
E) a mágneses energiasűrűsége,
F) a mágneses indukciófluxus-sűrűsége,

A tekercs hossza l, keresztmetszete A, menetsűrűsége $n = \frac{N}{l}$. A tekercsben folyó áram erőssége I.

A mágneses indukció: $B = \mu_0 \frac{IN}{l}$.

A mágneses fluxus: $\phi = BA = \mu_0 \frac{IN}{l} A$.

A tekercs egy indukcióvonala mentén számított örvényerősség: $\bar{O}_B = \mu_0 \sum I$.

A mágneses energia: $W = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0} V$.

A mágneses energiasűrűség: $w = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0}$.

A mágneses indukciófluxus-sűrűség azonos az indukcióval: $B = \frac{\Delta\phi}{\Delta A}$.

A változó paraméterek

	$l_2 = 2l_1$	$A_2 = 2A_1$	$n_2 = 2n_1$	$I_2 = 2I_1$
B	$B_2 = \frac{1}{2}B_1$	nem változik	$B_2 = 2B_1$	$B_2 = 2B_1$
ϕ	$\phi_2 = \frac{1}{2}\phi_1$	$\phi_2 = 2\phi_1$	$\phi_2 = 2\phi_1$	$\phi_2 = 2\phi_1$
$\bar{O}_B$	nem változik	nem változik	*	$\bar{O}_{B2} = 2\bar{O}_{B1}$
W	$W_2 = \frac{1}{2}W_1$	$W_2 = 2W_1$	$W_2 = 4W_1$	$W_2 = 4W_1$
w	$w_2 = \frac{1}{4}w_1$	nem változik	$w_2 = 4w_1$	$w_2 = 4w_1$

*: Az örvényerősség változása attól függ, hogy a menetszám hogyan változik a menetsűrűség megváltozásakor. Ha például a menetsűrűséget úgy kétszerezzük meg, hogy a tekercshossz a felére csökken, miközben a menetszám nem változik, akkor az örvényerősség is változatlan marad. Viszont ha a menetszámot a tekercshossz változása nélkül megduplázzuk, akkor az örvényerősség is duplájára nő.

— · —

Mozgó vezeték mágneses mezőben; mozgási indukció; váltakozó feszültség és áram

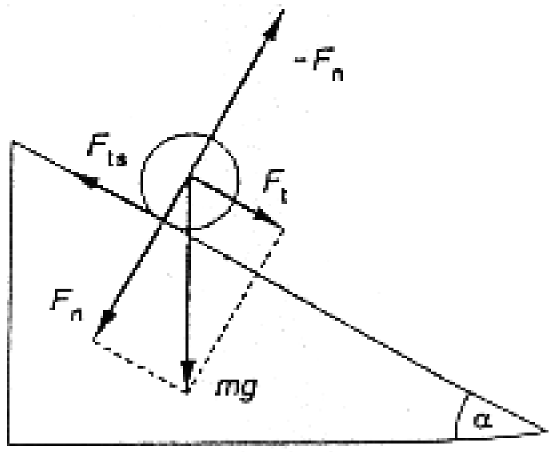
47. 30°-os hajlásszögű lejtőn 0,8 m hosszú, 0,1 m átmérőjű tömör rézhenger gördül le csúszásmentesen. A lejtű homogén mágneses mezőben van, amelynek indukciója függőlegesen lefelé mutat, és $2 \cdot 10^{-4}$ T nagyságú. Írja le a rúd két vége közt indukálódó feszültséget! (Adja meg a feszültség—idő-függvényt. Kezdetben a henger nyugalomban volt.)

$\alpha = 30°$, $L = 0{,}8$ m, $D = 0{,}1$ m, $B = 2 \cdot 10^{-4}$ T.

A lejtőn gördülő hengerre ható erők:

a) a henger mg súlya, amely az érintőleges $F_t = mg \sin\alpha$ és a normális $F_n = mg \cos\alpha$ összetevőkre bontható.

b) a lejtő részéről az F_n nyomóerő és az F_{ts} tapadási súrlódási erő.



Csúszásmentes, ún. tiszta gördülés esetén a henger tömegközéppontjának pillanatnyi sebessége:

$$v = r\omega.$$

A tömegközéppont gyorsulása:

$$a = r\beta. \qquad (1)$$

A dinamika alaptörvénye:

$$mg \sin\alpha - F_{ts} = ma. \qquad (2)$$

A tömegközéppontra vonatkoztatott perdülettétel:

$$F_{ts} r = \theta\beta, \qquad (3)$$

ahol: $$\theta = \frac{1}{2} mR^2.$$

A három egyenletből:

$$a = \frac{2}{3} g \sin\alpha.$$

A tömegközéppont sebessége:

$$v = v_0 + at = \frac{2}{3} g (\sin\alpha)\, t.$$

A sebesség indukcióra merőleges komponense:

$$v_m = v \cos\alpha = \frac{2}{3} g (\sin\alpha \cos\alpha)\, t = \frac{g (\sin 2\alpha)\, t}{3}.$$

A hengerben indukált átlagos feszültség:

$$U = Blv_m = \frac{Blg (\sin 2\alpha)\, t}{3} = \underline{4{,}62 \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}}{\text{s}} t.}$$

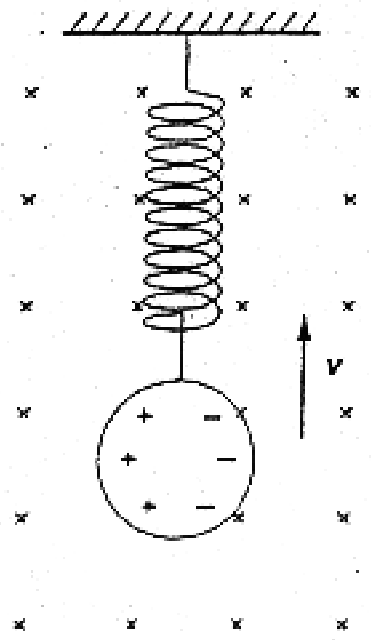
Megjegyzés

Ez a feszültség az alkotókkal párhuzamos szimmetriatengely mentén mérhető a rúd két vége között. Pl. a lejtővel érintkező alkotó két vége között a feszültség nulla, mert az alkotó pillanatnyi sebessége nulla. Ez azt je-

[illegible] is keletkeznek.

48. Egy 10 cm sugarú, 0,5 kg tömegű fémgömb 240 $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ rugóállandójú csavarrugón függ homogén mágneses mezőben, amelynek indukciója vízszintes, és 0,4 T nagyságú. Mekkora az a legnagyobb feszültség, amely két pontja között fellép, ha függőlegesen lefelé 2 cm-rel való kitérítés után magára hagyjuk? Melyik két pontja között, és az elengedésétől számítva mennyi idő múlva mérhető ez a feszültség? Hogyan mérné meg?

$r = 0{,}1\ \text{m}, \quad m = 0{,}5\ \text{kg}, \quad D = 240\ \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad B = 0{,}4\ \text{T}, \quad A = 0{,}02\ \text{m}.$



A gömb elengedés után harmonikus rezgőmozgást végez. A sebesség az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor maximális, ezért ott lesz az indukált feszültségnek a maximuma:

$$U = B\,2rv_{max} = B\,2rA\omega = 2rBA\sqrt{\frac{D}{m}} = \underline{0{,}035\ \text{V}}.$$

Ez a feszültség a gömb, indukcióvektorra merőleges, vízszintes helyzetű átmérőjének két végpontja között mérhető:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}{4} = 0{,}07\ \text{s}\ \text{múlva}.$$

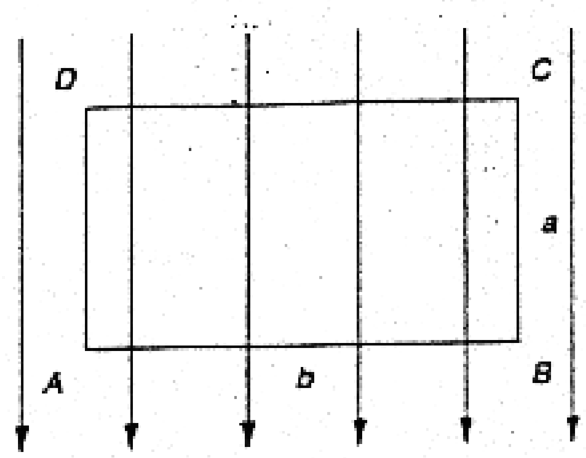
A feszültséget úgy is mérhetjük, hogy a gömböt a mágneses térben $v = A\omega$ állandó nagyságú és irányú, az indukcióra merőleges sebességgel mozgatjuk. Közben végezzük el a mérést, így van rá idő.

49. 200 menetes, téglalap alakú tekercs méretei: $a=2$ cm, $b=4$ cm. A tekercset homogén mágneses mezőbe helyezzük úgy, hogy először a b oldal, másodszor az a oldal merőleges a mágneses indukció irányára, amelynek nagysága $0{,}1\ \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$. (L. az ábrát!)

a) Mekkora lesz a tekercsben indukálódó feszültség, ha a tekercset a saját síkjára merőlegesen mozgatjuk $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebességgel?

b) Mekkora lesz az indukált feszültség maximuma, ha a tekercs a mágneses indukció irányára merőleges, a szemközti oldalak felezőpontján

$N = 200, \quad a = 0{,}02\ \text{m}, \quad b = 0{,}04\ \text{m}, \quad B = 0{,}1\ \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}, \quad v = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$



a) Egy menetet figyelve az AD és CB pontok között nem indukálódik feszültség, mert ezek a vezetékszakaszok párhuzamosan mozognak az indukcióvonalakkal. Az AB és DC pontok között indukálódott feszültség egyenlő. Így egy menetben: $U = 0$ V, vagyis a tekercsben nem indukálódik feszültség.

b) Az indukált feszültséget egy menetre felírva:

$U = BLv\sin\omega t$,

ahol: L a forgástengellyel párhuzamos oldalak összhosszát jelenti. Ha a b oldal párhuzamos a forgástengellyel:

$U = B(2b)v\sin\omega t$,

$U_{max} = 2BLv$.

N menetre:

$U_{max} = 2NBLv = \underline{3{,}2\ \text{V}}$.

A másik esetben:

$U_{max} = 2NBav = \underline{1{,}6\ \text{V}}$.

—— • ——

50. 50 Hz-es, 220 V-os hálózatra kapcsolunk egy 500 W-os főzőlapot. Hogyan változik a hálózatból felvett teljesítménye az idő függvényében? Mekkora a maximális teljesítménye? Vajon a kisugárzott hőteljesítménye is így változik?

$f = 50\ \text{Hz}$, $U_{eff} = 220\ \text{V}$, $P_{eff} = 500\ \text{W}$.

a) $P = UI = U_{max}\sin\omega t\, I_{max}\sin\omega t$.

A főzőlapnak csak ohmikus ellenállása van, vagyis fáziskülönbség nincs:

$P = U_{max} I_{max}\sin^2\omega t = U_{eff}\sqrt{2}\, I_{eff}\sqrt{2}\sin^2\omega t$.

Mivel:

$P_{eff} = U_{eff} I_{eff}$.

$\underline{P = 2P_{eff}\sin^2\omega t}$.

b) $P_{max} = 1000\ \text{W}$,

ekkor $\sin^2 314\frac{1}{s}t = 1$.

c) A főzőlap hőmérséklete állandó, kisugárzott teljesítménye az effektív érték.

—— • ——

51. Egy 300 W-os, 110 V-os fűtőszálat diódával sorba kapcsolva 220 V feszültségű hálózatra kötünk. A dióda ellenállása nyitó irányban 0, záró irányban végtelen.

a) Mekkora maximális feszültség jut a 110 V-os fűtőszálra?

b) Mekkora most a fűtőszál által felvett csúcsteljesítmény és effektív teljesítmény?

$P_{eff} = 300\ \text{W}$, $U'_{eff} = 110\ \text{V}$, $U_{eff} = 220\ \text{V}$.

a) $U_{max} = U_{eff}\sqrt{2} = 311{,}12\ \text{V}$.

b) A fűtőszál által felvett effektív teljesítmény:

$$P_{eff} = \frac{U_{eff}\, I_{eff}}{2},$$

mert a dióda miatt a periódusidő felében nem folyik áram.

$$P_{eff} = \frac{U^2_{eff}}{2R}.$$

Az U kétszeresére változott, ezért:

$$P_{eff} = 2P'_{eff} = 600\ \text{W}.$$

c) $P_{max} = U_{max} I_{max} = \sqrt{2}\, U_{eff} \sqrt{2}\, I_{eff} = 2\, U_{eff} I_{eff} = 2\, P_{eff} = \underline{2400\ \text{W}}.$

---

52. Határozza meg egy 220 V-os, 50 Hz-es váltakozó áramú hálózat áramának, feszültségének, teljesítményének csúcs- és effektív értékét, ha egy 1000 W-os effektív teljesítményű főzőlapot működtetünk!

$U_{eff} = 220$ V, $f = 50$ Hz, $P_{eff} = 1000$ W.

a) $I_{eff} = \frac{P_{eff}}{U_{eff}} \cong 4{,}545$ A,

$I_{max} = I_{eff}\sqrt{2} = \underline{6{,}428\ \text{A}}.$

b) $U_{max} = U_{eff}\sqrt{2} = \underline{311{,}12\ \text{V}}.$

c) A ~~7.~~ 52. feladat c) pontjának megoldása alapján:

$P_{eff} = 1000$ W,

$P_{max} = \underline{1000\ \text{W}}.$

Az impedancia; soros RLC-körök; elektromágneses rezgések

53. Egy 20 Ω-os ellenállást és egy 12 μF kapacitású kondenzátort sorba kapcsolunk 220 V effektív feszültségű váltóáramú hálózatra. A fázisszög 60°.
a) Mekkora az áramerősség maximális értéke?
b) Mekkora a hálózat frekvenciája?
c) Mekkora az effektív teljesítmény?

$R = 20\ \Omega$, $C = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ F, $U_{eff} = 220$ V, $\varphi = 60°$.

a) $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$, $Z = 40\ \Omega$.

$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = 5{,}5$ A.

$I_{max} = I_{eff}\sqrt{2} = \underline{7{,}78\ \text{A}}.$

b) $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ összefüggésből kiszámítjuk az X_C értékét: $X_C = 34{,}64\ \Omega$.

$X_c = \dfrac{1}{2\pi f C}$ felhasználásával:

$$f = \frac{1}{2\pi X_c C} = \underline{383{,}06\ \text{Hz}}.$$

c) $P = I_{eff}^2 R = \underline{605\ \text{W}}$.

—— • ——

54. Valamely kondenzátor kapacitása 2 μF.

a) Mekkora legyen annak az ellenállásnak az értéke, amellyel ezt a kondenzátort 220 V feszültségű, 50 Hz-es hálózatra sorba kapcsolva, a hálózatból felvett teljesítmény 20 W?

b) Mekkora a fáziseltolódás szöge ebben az esetben?

$C = 2\cdot 10^{-6}$ F, $U_{eff} = 220$ V, $f = 50$ Hz, $P = 20$ W.

a) $P = I_{eff}^2 R$ összefüggésébe beírva az $I_{eff} = \dfrac{U_{eff}}{Z}$-t, a következőt kapjuk:

$$P = \frac{U_{eff}^2}{Z^2} R.$$

Ide behelyettesítjük a $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$-t, így a

$$P = \frac{U_{eff}^2 R}{R^2 + X_C^2}$$

kifejezéshez jutunk, amely az ellenállásra nézve egy másodfokú egyenlet.

$X_C = \dfrac{1}{2\pi f C} = 1592{,}35\ \Omega$ beírása után az egyenletnek <u>nem lesz valós megoldása</u>.

b) —

—— • ——

55. Egy 120 Ω-os ellenállást sorba kapcsolunk egy 8 nF-os kondenzátorral A rendszert 50 Hz-es váltakozó áramú hálózatra kötjük. Milyen kapacitású kondenzátorra kell kicserélni a 8 nF-os kondenzátort, ha 400 Hz-es hálózatra kapcsoljuk a rendszert, és azt akarjuk, hogy a felvett teljesítmény ugyanakkora legyen, mint az első esetben? (Mindkét hálózat feszültsége azonos.)

$R = 120\ \Omega$, $C = 8\cdot 10^{-9}$ F, $f_1 = 50$ Hz, $f_2 = 400$ Hz.

A két különböző frekvencián a felvett teljesítmények egyenlőek:

$P_1 = P_2$, azaz $\dfrac{U_{eff}^2 R}{Z_1^2} = \dfrac{U_{eff}^2 R}{Z_2^2}$.

Ebből következik, hogy $X_{C_1} = X_{C_2}$,

$$C_2 = \frac{f_1}{f_2} C_1 = 10^{-9}\ \text{F} = \underline{1\ \text{nF}}.$$

—— • ——

56. Egy 40 Ω-os fogyasztót, C kapacitású kondenzátort és L önindukciójú veszteségmentes tekercset kapcsolunk sorba 50 Hz-es hálózatra. Az ellenálláson 70 V, a tekercsen 50 V, a kondenzátoron 25 V esik. Mekkora az áramkör impedanciája és a fáziseltolódás szöge?

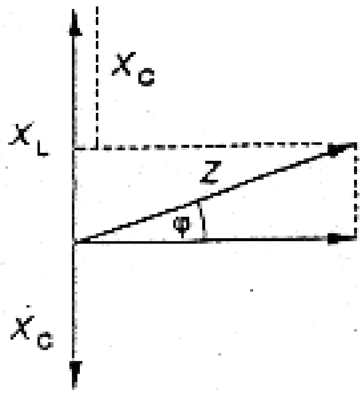
$R = 40\ \Omega$, $f = 50\ \text{Hz}$, $U_R = 70\ \text{V}$, $U_L = 50\ \text{V}$, $U_C = 25\ \text{V}$.

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = 74{,}33\ \text{V}.$$

$$I = \frac{U_R}{R} = 1{,}75\ \text{A},$$

$$Z = \frac{U}{I} = \underline{42{,}47\ \Omega}.$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = 0{,}9418 \Longrightarrow \varphi = \underline{19{,}64^\circ}.$$



Hullámoptika, sugároptika

57. A sárga színű fény hullámhossza levegőben $5{,}9 \cdot 10^{-7}$ m. Mekkora a sárga színű fény hullámhossza vízben? (A víz levegőre vonatkoztatott törésmutatója 1,33.)

$\lambda_l = 5{,}9 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$, $n_{v,l} = 1{,}33$.

A törésmutató értelmezéséből következik az

$$n_{v,l} = \frac{c_l}{c_v}.$$

Figyelembe véve, hogy adott közegben a fény terjedési sebessége egyenlő a hullámhossz és a frekvencia szorzatával ($c = \lambda\nu$), kapjuk:

$$n_{v,l} = \frac{\lambda_l \nu}{\lambda_v \nu}.$$

Ebből:

$$\lambda_v = \frac{\lambda_l}{n_{v,l}} = \underline{4{,}44 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}.$$

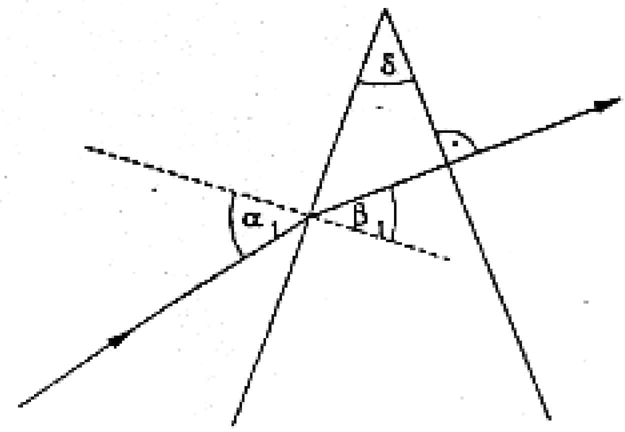
58. Nehéz flintüvegből készült prizmára 760,82 nm hullámhosszú vörös fény esik 60°-os beesési szöggel, majd a másik lapon a felületre merőlegesen lép ki.

a) Mekkora a prizma lapjai által bezárt (törő-) szög?

b) Mekkora szögben lép ki a másik lapon a 396,85 nm hullámhosszú fénysugár?

$\lambda_1 = 760{,}82 \cdot 10^{-9}$ m, $\quad \alpha_1 = 60°$, $\quad \lambda_2 = 396{,}85 \cdot 10^{-9}$ m.

a) A Snellius–Descartes-törvény alkalmazásával:



$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n_1,$$

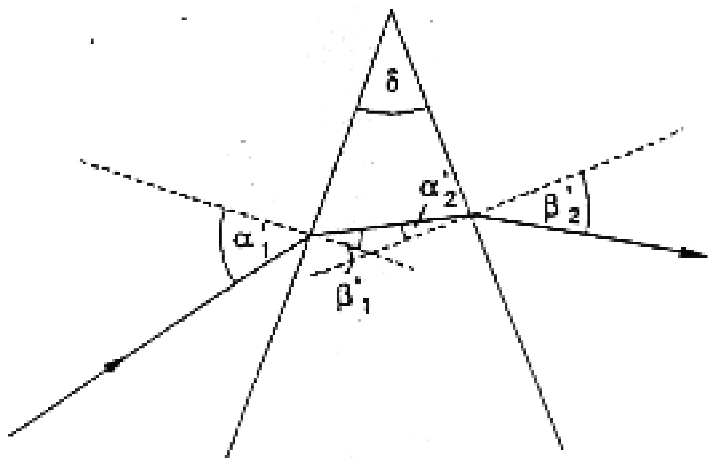
ahol $n_1 = 1{,}74$ a $760{,}82 \cdot 10^{-9}$ m hullámhosszúságú vörös fényre (táblázatból vett adat). A fenti egyenletből meghatározható a törésszög.

Az ábrából:

$\beta_1 = \delta = 29{,}85°$,

mert β_1 és δ merőleges szárú szögek.

b) A $396{,}85 \cdot 10^{-9}$ m hullámhosszúságú fénysugárra:



$n_2 = 1{,}81.$

$$\frac{\sin\alpha_1'}{\sin\beta_1'} = n_2.$$

Az előző egyenletből:

$\beta_1 = 28{,}58°$,

$\alpha_2' = \delta - \beta_1' = 1{,}27°$.

Újra alkalmazzuk a Snellius–Descartes-törvényt:

$$\frac{\sin\alpha_2'}{\sin\beta_2'} = \frac{1}{n_2}.$$

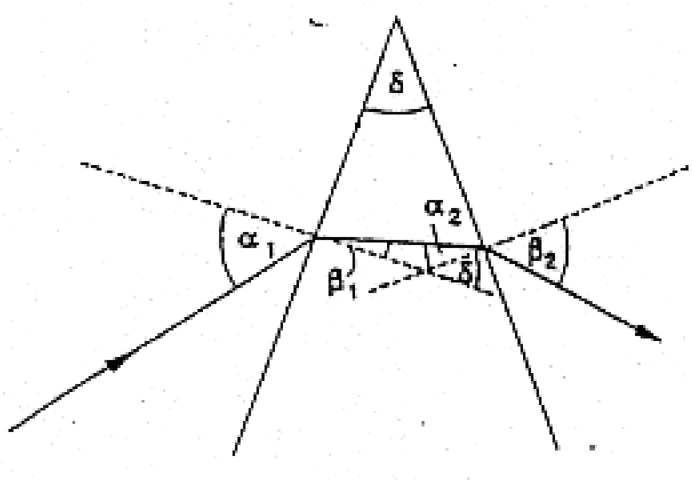
Innen:

$\beta_2' = \underline{2{,}3°}$.

—— • ——

59. Egy prizma egyik lapjára 60°-os beesési szögben érkezik egy fénysugár. A prizma lapjai által bezárt szög 45°. Mekkora a beeső fény sebessége az üvegben, ha a kilépési (törési) szög 10°?

A trigonometrikus azonosság alkalmazásával:



$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2} = n = \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\delta - \alpha_2)}.$$

Ezt az egyenletet α_2-re megoldva kapjuk:

$\alpha_2 = 6{,}94°$,

$\beta_1 = 45° - \alpha_2 = 38{,}05°$.

A fénytörés törvénye alapján:

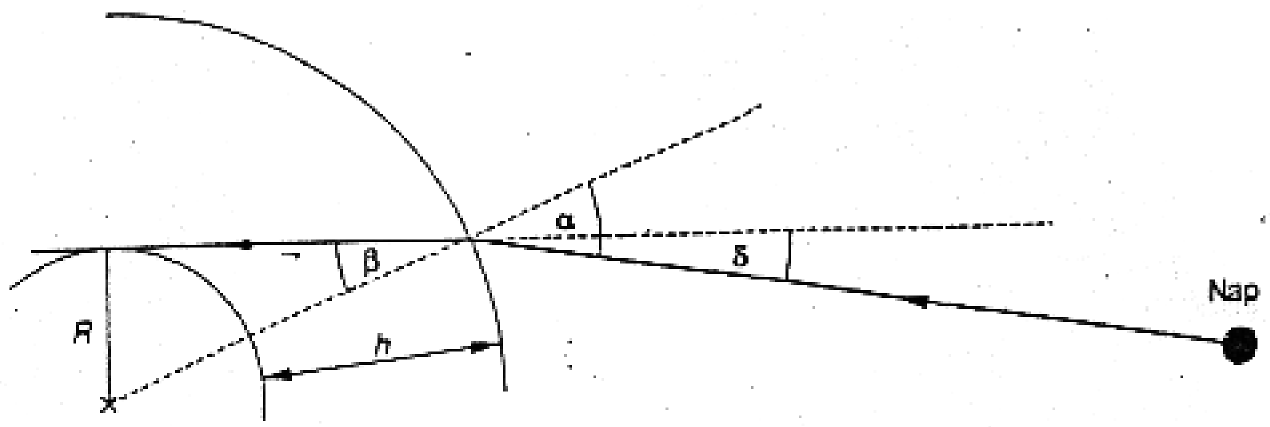
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n = 1{,}405,$$

$$n = \frac{c}{c_{ü}} = 1{,}405 \longrightarrow c_{ü} = \underline{2{,}13 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}.$$

—— • ——

60. A légkörben fellépő törés jelensége miatt a Napot korábban látjuk kelni és később lenyugodni, mintha a Földnek nem lenne légköre. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a légkör törésmutatója egészen 8 km magasságig egyenletesen 1,000 292, efölött pedig vákuum van. Hány fokkal van a horizont alatt a Nap a felkelés vagy a lenyugvás pillanatában? Határozza meg, hogy hány perccel kelne később a Nap, ha nem lenne légkör?

$h = 8000$ m, $n = 1{,}000\,292.$



Érkezzen a Napból α szögben egy sugár a Föld légköréhez! Az ábráról leolvasható, hogy

$$\sin\beta = \frac{R}{R+h}.$$

Innen a törés szöge, $\beta = 87{,}13°$.

A fénytörés törvényéből kiszámítható az α beesési szög:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1{,}000\,292 \implies \alpha = 87{,}486°.$$

Legyen a sugár és a horizont szöge δ. Mivel $\delta = \alpha - \beta$, így

$\delta = 0{,}356°.$

Ha nem lenne a Földnek légköre, a Napot csak akkor látnánk, ha a horizontnál, illetve ha e fölött lenne. Ha nem lenne légkör, a Nap a 0,356° elforduláshoz szükséges idővel kelne később:

$360° \implies$ 24 óra

$0{,}356° \implies t,$

$t = \underline{1{,}424\ \text{min}}.$

ATOMFIZIKA

61\. Határozza meg a vizmolekula átmérőjét.

Megoldás:

Az O atomsulya 16, a H-é 1,008, igy a viz (H_2O) moltömege

$$(16+2.1,008)\,g = 18,016\,g\ .$$

Mivel a viz sürüsége 1 g/cm^3 az ennek megfelelő térfogat

$$V = 18,016\ cm^3.$$

1 mol tömegü mennyiségben L számu molekula van, igy egy vizmolekulára jutó kocka alaku térfogat:

$$d^3 = \frac{V}{L}\ .$$

Tételezzük fel, hogy a molekulák gömb alakuak és egymással érintkeznek, ekkor a kocka éle egyuttal a molekula átmérője is:

$$d = \sqrt[3]{\frac{18,016\ cm^3}{6,023.10^{23}}} = 3,1.10^{-8}\ cm\ .$$

Eredményünk csak nagyságrendben pontos a feltételezett gömb alak miatt!

62\. Határozzuk meg a hidrogénatom körül keringő elektron kerületi sebességét a Rutherford-féle atommodell alapján, ha $r = 0,53.10^{-8}$ cm.

Megoldás:

A Rutherford-féle elgondolás szerint az atom szerkezete egy miniatür naprendszerként fogható fel. A mag töltése Ze, ahol $+e = 1,6.10^{-19}$ C, és tőle nagy (r) távolságban van egy elektron, melynek töltése -e.

A közöttük müködő vonzóerő:

$$F = k\frac{Ze^2}{r^2}\ ,\quad \text{ahol légüres térre}\quad k = 9.10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}\ \text{és Z az elem}$$

rendszáma.

A stabil egyensulyi helyzet kialakitásához az elektronnak a mag körül keringenie kell, igy lép fel egy a vonzóerővel egyenlő nagyságu centrifugális erő. Tehát

$$k\frac{Ze^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}\ ,\ \text{ebből}\ \ Z = 1\ \text{esetén}$$

$$v = \frac{e}{r}\sqrt{\frac{k\,r}{m}}.\ \text{Mivel}\ r = 0,53.10^{-10}\ m,$$

igy

behelyettesitve:

$$v = \frac{1,6.10^{-19}\ C}{0,53.10^{-10}\ m} \cdot \sqrt{\frac{9.10^{9}\frac{Nm^2}{C^2} \cdot 0,53.10^{-10}\ m}{9,1.10^{-31}\ kg}} = 2,2.10^{6}\ \frac{m}{s}\ .$$

—— . ——

63. Számitsa ki a H atomra a legbelső Bohr-pálya sugarát, a pályán keringő elektron sebességét és az elektron kinetikus energiáját.

Megoldás:

A hidrogénatom magtöltése 1 és a magkörül 1 elektron kering. A szükséges centripetális erő a Coulomb törvény szerint adódik. Az n-edik pályán

$$\frac{m.v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{r_n^2}\ ,$$

ahol r_n a pálya sugara és v_n a pályán mozgó elektron sebessége. A Bohr-féle 1. kvantumfeltétel szerint:

$$m.v_n.r_n = n.\frac{h}{2\pi}\ .$$

A két egyenlet összevetéséből egyrészt:

$$r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 me^2}\cdot n^2\ ,$$

másrészt:

$$v_n = e\sqrt{\frac{1}{mr_n}}\ .$$

A kinetikus energiát pedig $E_m = \frac{1}{2}mv_n^2$ alapján

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r_n}\text{ -ből kapjuk.}$$

Behelyettesités után:

$$r = 0,53.10^{-8}\ cm$$

$$v = 2,64.10^{8}\ cm/s$$

$$E_m = 3,17.10^{-11}\ g\frac{cm^2}{s^2}$$

—— . ——

64. Tantál fémre a legnagyobb hullámhossz, amely még fotoelektront képes kiváltani, 2974 Å. Számitsuk ki az E_k kilépési munkát. ($h = 6,625.10^{-34}$ Wattsec^2)

Megoldás:

Az Einstein-féle fényelektromos egyenlet szerint:

$$E_{max} = h\nu - E_k,$$

ahol E_{max} a kilépő elektron lehetséges maximális energiája. A fényelektromos jelenség alsó határfrekvenciája esetén

$E_{max} = 0$, tehát $h\nu_{min} = E_k$.

Behelyettesítve $E_k = 6,8 \cdot 10^{-2}$ erg $= 4,2$ eV eredményre jutunk.

$(1 eV \cong 1,6 \cdot 10^{-19} J)$

—— . ——

65. Határozzuk meg annak a sugárzó anyagnak a bomlási állandóját, amelynek sugárzása 10 %-ot veszít intenzitásából óránként, és bomlásterméke nem sugároz.

Megoldás:

A radioaktív bomlási törvény:

$$N = N_o e^{-\lambda t},$$

ahol N_o a $t = 0$-kor jelenlevő magok száma, λ a bomlási állandó. Az intenzitás a sugárzó magok számával arányos, így:

$$0,9 = \frac{N}{N_o} = e^{-\lambda 3600}$$

Ebből

$$\lambda = 2,9 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{sec}^{-1}.$$

—— . ——

66. 1 g rádium másodpercenként $3,68 \cdot 10^{10}$ α-részt sugároz ki. Határozzuk meg a bomlási állandó és a felezési idő értékét.

Megoldás:

1 g rádiumban

$$\frac{L}{A} = \frac{6,023 \cdot 10^{23}}{226} = 2,67 \cdot 10^{21}\ \mathrm{db}$$

atom van.
1 s alatt kisugárzott α-részek száma $3,68 \cdot 10^{10}$ db, így a bomlási állandó:

$$\lambda = \frac{3,68 \cdot 10^{10}}{2,67 \cdot 10^{21}}\ 1/s = 1,38 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{sec}^{-1}.$$

A felezési idő:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} = \frac{0,693}{1,38 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{sec}^{-1}} \approx 5 \cdot 10^{10}\ s = 1590\ \text{év}.$$

—— . ——