- a hőmérsékletmező határán a hőmérsékleteloszlás adott
- a hőmérsékletmező határán a hőáram adott
- a hőmérsékletmező határán a hőátadási törvényszerüség adott.

A hővezetési feladat megoldása a differenciálegyenlet megoldását jelenti, ehhez további egyszerüsitő feltételek szükségesek. A következőkben néhány alapvető feladattal foglalkozunk.

6.1.2. Hővezetési feladat stacionárius esetben hőforrások nélküli térben

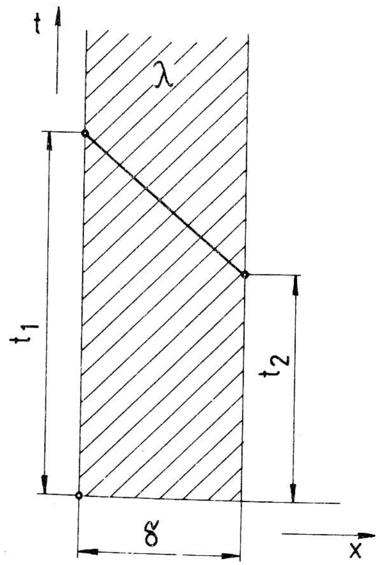
Ebben az esetben $\partial t/\partial \tau = 0$ és $\Phi = 0$. További feltételünk, hogy a=áll. Ebben az esetben a hővezetési egyenletünk:

$$\Delta t = 0$$

alaku lesz, vagy derékszögü koordinátákkal

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0.$$

Ez az un. Laplace-féle differenciálegyenlet, amely a potenciálelméletben nagy szerepet játszik.



105. ábra

<u>Egydimenziós hővezetési feladatok</u>

<u>Hővezetés sik falon keresztül</u>

Tovább egyszerüsödik a hővezetési feladat, ha a hővezetés egydimenziós. Ilyen pl. az y és z irányban végtelen kiterjedésü δ vastagságu sik fal esete (105. ábra). A feladat most a

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$$

egyenlet megoldása. A fal λ hővezetési tényezőjét állandónak véve egyszeri integrálás után a

$$\frac{dt}{dx} + C_1 = 0$$

eredményre jutunk, ahonnan az állandóra

$$C_1 = -\frac{dt}{dx} = \frac{q}{\lambda}$$

adódik, s igy

$$\frac{dt}{dx} + \frac{q}{\lambda} = 0.$$

Másodszori integrálással a hőmérsékletre a

$$t = -\frac{q}{\lambda} x + C_2\text{-}t$$

kapjuk. Az ábra alapján a peremfeltételek a következők:

ha $x = 0$; $t = t_1$ **és**

ha $x = \delta$; $t = t_2$.

Ezekkel a hőmérsékleteloszlás a sik falban a

$$t = t_1 - \frac{q}{\lambda} x$$

szerint lineáris. A hőáramra a

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(t_1 - t_2)$$

kifejezést kapjuk, amiből az időegység alatt A keresztmetszetü sik felületen vezetéssel áthaladó hő

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} A\,(t_1 - t_2).$$

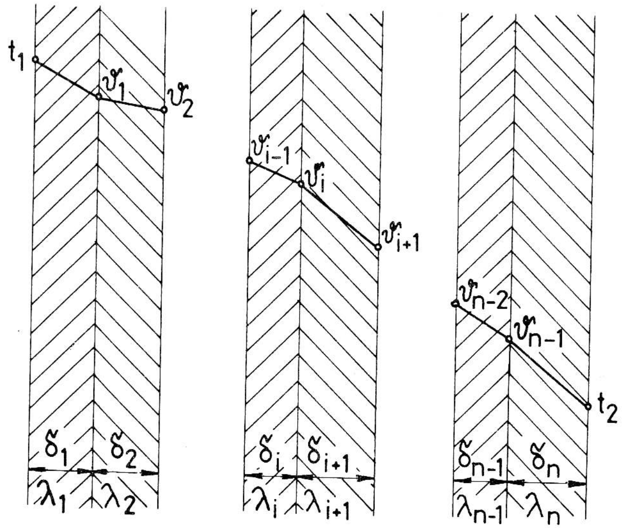
A továbbiakra tekintettel ezt átalakitva a

$$t_1 - t_2 = \frac{\delta}{\lambda A}\,\dot{Q}$$

formát nyerjük, ahonnan látható, hogy a $t_1 - t_2$ hőmérsékletkülönbség hatására $\dot{Q}$ hő halad át a

$$\frac{\delta}{\lambda A}$$

<u>hővezetési ellenállásu</u> falon.



106. ábra

A hővezetési ellenállás többrétegü fal esetében egyszerü összegezéssel nyerhető. A 106. ábra több különböző vastagságu és hővezetési ellenállásu rétegből álló falat ábrázol, amelyen keresztül vezetéssel jut át a hő. A többrétegü fal hővezetési ellenállása:

$$\sum \frac{\delta_i}{\lambda_i A},$$

és a fal két oldalán kialakuló hőmérsékletkülönbség:

$$t_1 - t_2 = \dot{Q} \sum \frac{\delta_i}{\lambda_i A},$$

ahonnan a $\dot{Q}$ hő a t_1 és t_2 hőmérsékletek ismeretében számitható.

Az egymással érintkező rétegekben a hőmérsékletváltozás a 105. ábra jelöléseivel a

$$t_1 - \vartheta_1 = \frac{\delta_1}{\lambda_1 A}\,\dot{Q}$$

$$\vdots$$

$$\vartheta_{i-1} - \vartheta_i = \frac{\delta_i}{\lambda_i A}\,\dot{Q}$$

$$\vdots$$

$$\vartheta_{n-1} - t_2 = \frac{\delta_n}{\lambda_n A}\,\dot{Q}$$

összefüggések alapján lineáris, az iránytangens az egyes rétegekben más és más.

<u>Vastagfalu cső hővezetési problémája</u>

A vastagfalu csőben, feltéve, hogy a cső tengelyirányban végtelen hosszunak vehető, egyirányu (sugárirányu) hővezetés alakul ki. A megoldandó differenciálegyenlet hengerkoordinátákban felirva

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} = 0$$

alaku. A 107. ábra jelöléseit figyelembe véve és a

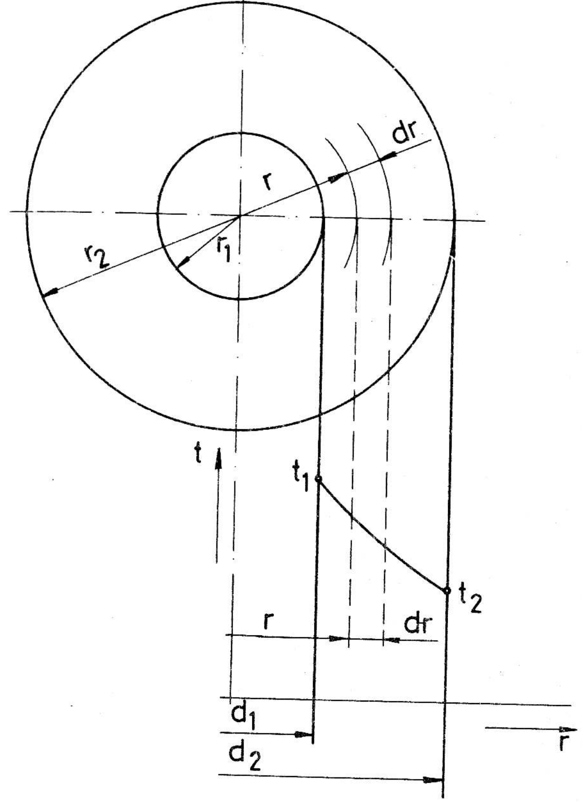
$$\frac{dt}{dr} = \frac{C}{r}$$

helyettesitéssel élve, valamint az

$$r = r_1 ; \quad t = t_1 \quad \text{és}$$

$$r = r_2 ; \quad t = t_2$$

peremfeltételekkel a hőmérséklet-eloszlásra a



107. ábra

$$t - t_1 = \frac{\dot{Q}}{\lambda 2 \pi \ell} \ln \frac{r_1}{r}$$

összefüggést nyerjük. A hőmérséklet eszerint a sugár mentén logaritmus görbe szerint változik. Az időegység alatt ℓ hosszuságu csőszakaszon vezetéssel átadódó hő

$$\dot{Q} = \frac{2 \pi \ell}{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}} (t_1 - t_2).$$

A kifejezésben

$$\frac{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}}{2 \pi \ell}$$

a vastagfalu cső hővezetési ellenállása. Ezzel többrétegü cső esetében a vezetéssel átadódó hő

$$\dot{Q} = \frac{2 \pi \ell}{\sum \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{ki}}{r_{bi}}} (t_1 - t_2)$$

szerint számitható, amelyben r_{ki} és r_{bi} az i-edik réteg külső, ill. belső sugara. A hőmérséklet-eloszlásra az egyes rétegeken belül a

$$t_1 - \vartheta_1 = \frac{\dot{Q}}{\lambda_1 2 \pi \ell} \ln \frac{r_{k1}}{r_{b1}}$$

$$\vdots$$

$$\vartheta_{i-1} - \vartheta_i = \frac{\dot{Q}}{\lambda_i 2 \pi \ell} \ln \frac{r_{ki}}{r_{bi}}$$

összefüggések érvényesek, amelyekből az egyes rétegek egymással érintkező felületének hőmérséklete is meghatározható.

Vastagfalu üreges gömb hővezetése

A vastagfalu gömb falában kialakuló egydimenziós hővezetésre a

$$\frac{d^2 t}{d r^2} + \frac{2}{r} \frac{dt}{dr} = 0$$

differenciál-egyenlet irható fel, amelynek megoldásával a hőmérséklet-eloszlásra a

$$t - t_1 = \frac{\dot{Q}}{4 \pi \lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)$$

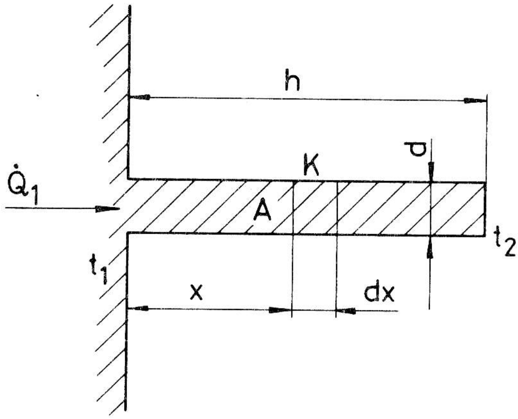
kifejezést kapjuk. A vezetéssel átadódó hő

$$\dot{Q} = \frac{4\pi\lambda}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} (t_1 - t_2) ,$$

amelyben r_1 és r_2 a vastagfalu gömb belső, illl. külső sugara, t_1 és t_2 pedig az ezekhez tartozó felületi hőmérsékletek.

Hengeres rud hővezetési problémája

A 108. ábrán feltüntetett hengeres egyenes rud hővezetése tulajdonképpen összetett hőközlési probléma.



108. ábra

A rudnak a sik falhoz csatlakozó bal oldali vége a környezetnél magasabb hőmérsékletü, s ennélfogva a rudban berajzolt irányban (balról jobbra) hőáramlás megy végbe. A rudban a hő vezetéssel terjed, közben azonban a rud felületén át hőt ad át a környezetnek. A környezet folyadék, vagy gáz, ezért itt hőszállitási folyamatról van szó. A felületi hőleadás következtében a rudban vezetéssel továbbáramló hő folyton csökken. Az ábrán bejelölt elemi kis dx vastagságu tárcsa alaku ruddarab felületén (hengerpaláston) a környezetnek átadódó hő a felülettel, a hőmérsékletkülönbséggel és egy α un. konvektiv hőátadási tényezővel arányos. Eszerint

$$d\dot{Q} = \alpha K \, dx \, (t - t_\ell),$$

ahol K a hengeres rud kerülete, t a rud és t_ℓ a környező levegő hőmérséklete. A hővezetés alapösszefüggése szerint most

A keresztmetszetre vonatkozó közepes hőmérsékletet a

$$t_{kA} = \frac{1}{A} \int_A t dA \ ,$$

a folyadéktérfogatáramra vonatkozó közepes hőmérsékletet a

$$t_{kf} = \frac{\int_A t\ c\ dA}{\int_A c\ dA} = \frac{1}{\dot{V}} \int_A t\ c\ dA$$

és a hőáramra vonatkozót a

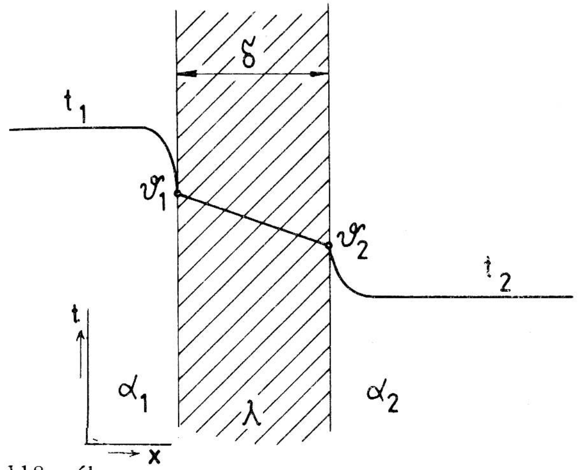
$$t_{kh} = \frac{\int_A t\ \varrho\ c_p c\ dA}{\int_A \varrho c_p\ c\ dA}$$

összefüggésből lehet számitani. A t_{kA} hőmérséklet az áramlási keresztmetszet letapogatásával, vagy ugy mérhető, hogy hőmérő-hálót helyezünk el a keresztmetszetben. A t_{kf} hőmérséklet a sebesség- és hőmérsékleteloszlás ismeretében számitható. A t_{kh} hőmérséklet, amely a hőátadás szempontjából a legcélszerübben használható, az áramlási keresztmetszet után elhelyezett keverőberendezésben határozható meg. Amennyiben az áramló közeg sürüsége és fajhője a teljes keresztmetszetben állandó, a t_{kf} és a t_{kh} hőmérséklet azonos.

További problémát jelent, hogy a hőszállitási folyamatra felirt egyenletekben szereplő anyagjellemzőket milyen hőmérsékleten célszerü figyelembe venni. Erre vonatkozóan a hasonlósági elmélet ad utbaigazitást.

6.2.3. A hőátbocsátási folyamat

A hőszállitási folyamat önmagában meglehetősen ritkán fordul elő. Mint már emlitettük, két áramlásra képes közeg közötti hőcsere a müszaki gyakorlatban majdnem kizárólag hőcserélőben megy végbe, ahol a két közeget szilárd fal választja el egymástól. Ebben az esetben a szilárd fal mindkét oldalán hőszállitási folyamat játszódik le és közben még a falon keresztül hővezetés is megy végbe. Ezt az összetett folyamatot, amelynél tehát a hő magasabb hőmérsékletü közegből a határoló falra konvekcióval, a fal egyik oldaláról hővezetéssel, majd innen az alacsonyabb hőmérsékletü közegbe ismét konvekcióval jut, hőátbocsátásnak (hőátszármaztatásnak) szokás nevezni. A viszonyokat a legegyszerübb esetben, a sik fal esetében a 118. ábra szemlélteti.



118. ábra

A t_1 hőmérsékletü közegből hőátbocsátás révén jut át a hő a $t_2 < t_1$ hőmérsékletü közegbe. Egyensulyi állapotban (és a hőveszteségtől eltekintve) a három részfolyamat során ugyanaz a hő halad át, ezért az ábra jelöléseivel irható:

$$\dot{Q} = \alpha_1 A(t_1 - \vartheta_1) = \frac{\lambda}{\delta} A\ (\vartheta_1 - \vartheta_2) = \alpha_2 A(\vartheta_2 - t_1) \ .$$

Sok esetben a fal hőmérsékletei érdektelenek. Igy a hő számitására a

$$\dot{Q} = kA\ (t_1 - t_2) \qquad 6.10a$$

összevont alakot szokás használni. A kifejezésben k az un. hőátbocsátási (hőátszármaztatási) tényező, amelyet az előző három egyenlet összevonásából a

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

kifejezésből lehet számítani. Többrétegű fal esetében

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_2}} \quad .$$

A 118. ábra egyuttal a hőmérséklet eloszlását is szemlélteti. Megfigyelhető, hogy a két oldalon levő közegek hőmérséklete csak a fal közvetlen közelében változik meg a falhőmérséklet értékére. A falhőmérsékletek a következő módon számithatók:

$$\vartheta_1 = t_1 - \frac{\dot{Q}}{\alpha_1 A} \; ;$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 - \frac{\delta_1 \dot{Q}}{\lambda_1 A} \; ,$$

$$\vdots$$

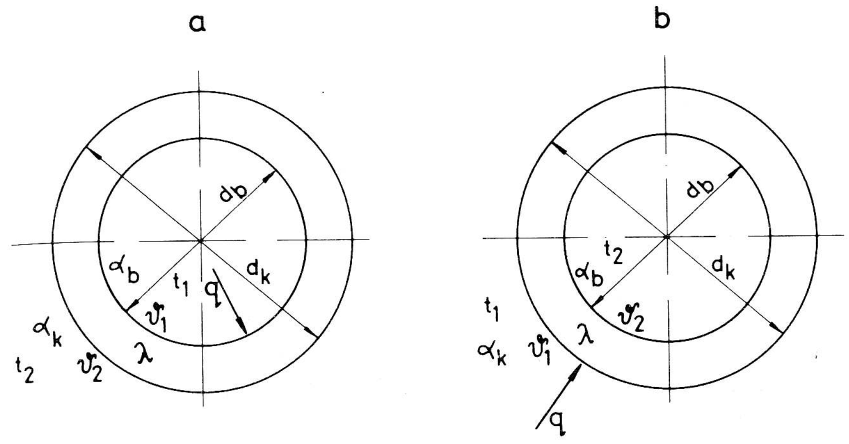
$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n - \frac{\delta_n \dot{Q}}{\lambda_n A} \; .$$

A 6.10a összevont hőátbocsátási összefüggésből kapjuk a k hőátbocsátási (hőátszármaztatási) tényezőre a

$$k = \frac{\dot{Q}}{A(t_1 - t_2)} \qquad 6.10b$$

definiciós összefüggést, amely szerint a k hőátbocsátási tényező a kombinált hőátbocsátási folyamat során egységnyi hőátadó felületen egységnyi hőmérsékletkülönbség mellett átadódó hő. A 6.10b összefüggés alapján mérési eredményekből határozható meg a k tényező.

Vastagfalu csőnél a hő áramlásának irányában a felület változik. Aszerint, hogy melyik felületre vonatkoztatunk, változik a k hőátbocsátási tényező. A 119. ábrának a képén azt az esetet tüntettük fel,



119. ábra

amelynél a hő belülről kifelé áramlik, és a hőszállitást a cső belső felületére vonatkoztatjuk. Az ábra jelöléseivel az ℓ hosszuságu csőszakasz $A_b = d_b \pi \ell$ belső felületére érvényes k_b tényező az

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{\alpha_b} + \sum \frac{d_b}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{ki}}{d_{bi}} + \frac{1}{\frac{d_k}{d_b}\alpha_k}$$

összefüggésből számitható. Az ábra b képén a hő kivülről befelé áramlik és a hőszállitási tényezőt a cső külső felületére vonatkoztatjuk. Ez esetben az

$$\frac{1}{k_k} = \frac{1}{\frac{d_b}{d_k}\alpha_b} + \sum \frac{d_k}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{ki}}{d_{bi}} + \frac{1}{\alpha_k}$$

összefüggés adja a k_k hőátbocsátási tényezőt.

A k hőátbocsátási tényezőnek a részfolyamatok jellemzőivel felirt összefüggése viszont alkalmas arra, hogy az összetett folyamatra mértékadó részfolyamatot megállapitsuk és eldönthessük, hogy hol célszerü a részfolyamat javitásával beavatkozni a hőátbocsátás folyamatába. A hőátbocsátási tényezőre elsősorban a konvekciós folyamat van befolyással. Igy a hővezetési tényező javitása pl. más anyag alkalmazásával, ennek következtében nem sok változást jelent a hőátbocsátásban.

Ha a hőátbocsátásban részt vevő fal elpiszkolódik (pl. korom, vagy kazánkő által), akkor ezeknek a rétegeknek kicsiny hővezetési tényezője miatt megnő a folyamatban a hőátbocsátási ellenállás, kisebb lesz a hőátbocsátási tényező és ez nemcsak a rosszabb hőközlés miatt hátrányos, hanem azért is, mert ugyanakkora átadott hő esetén a fal hőmérséklete megemelkedik, és igy nagyobb igénybevételnek van kitéve. Ez arra hivja fel a figyelmet, hogy a hőátbocsátásban résztvevő felületeknek tisztáknak kell lenniök.

6.2.4. A hőszállítás hasonlósági elmélete

A hőszállitásra felirt differenciálegyenletek egzakt megoldása csak néhány egyszerü esetben ismeretes, általános megoldása jelenlegi matematikai ismeretek mellett nincs. A hőszállitással kapcsolatos adatokat mérés segitségével kell megszereznünk az α , ill. a k tényezők definiciós egyenletei alapján. Az ilyen módon kapott eredmények rendszerezése és használhatóvá tétele azonban csak a hasonlósági elmélet segitségével lehetséges.

A hasonlóság fogalma

A hasonlóság fogalma a geometriából ismert. Két test geometriailag akkor hasonló, ha valamennyi hosszusági méretük azonos arányban áll egymással. A fizikai hasonlóság a geometriai hasonlóságon kivül mindazoknak a tényezőknek az arányosságát is jelenti, amelyek a vizsgált folyamat szempontjából mértékadók; igy pl. erők, sebességek, hőmérsékletek stb. arányosságáról is szó lehet. A fizikai hasonlóság a folyamatok hasonlóságának felel meg, s igy egyuttal azt jelenti, hogy a valóságos kivitelben végbemenő folyamatok egy modellen tanulmányozhatók, sőt, hogy a modellre talált törvényszerüségek számtalan fizikailag hasonló esetre (kivitelre) érvényesek.

Két összehasonlitandó szerkezet, pl. az 1 jelü modell és a 2 jelü kivitel jellemzőinek arányosságát f-fel jelölve, a hőszállitásnál szerepet játszó mennyiségekre ezek az arányossági tényezők a következők:

hosszuság	$f_\ell = \ell_2/\ell_1$
sebesség	$f_c = c_2/c_1$
nyomás	$f_p = p_2/p_1$
sürüség	$f_\varrho = \varrho_2/\varrho_1$
hőmérséklet	$f_t = t_2/t_1$
viszkozitás	$f_\nu = \nu_2/\nu_1$