2007.03.24.

Szélsőérték meghatározása $z = f(x,y)$

Szükséges feltétel.

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array}\right\}$$ meghatározzuk azokat a $p_1(x_1,y_1)$ $p_2(x_2,y_2)$ pontokat ahol a fgv-nek szélsőértéke lehet.

Elégséges feltétel

$$D = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

$D(p_1) > 0$ van szélső É. p_1-ben, $f''_{yy}(p_1) > 0$ p_1 min, $f''_{xx}(p_1) < 0$ p_1 max.

$D(p_1) = 0$?

$D(p_1) < 0$ nincs SZ. É. p_1-ben.

jelölés $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}$

$f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$

pl: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

szükséges feltétel: $$\left.\begin{array}{l} f'_x = 0 = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 0 = -3x + 3y^2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ -x + y^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -x + x^4 = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x^2+x+1) = 0$

diszkrimináns $(1^2 - 4) = -3 < 0$

nincs valós gyök

$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 1$
$y_1 = 0 \quad ; \quad y_2 = 1$ $\Big\}$ $P_1(0,0)$ $P_2(1,1)$ pontban lehet
SZ.É.-e a fgv-nek

Elégséges feltétel

$f''_{xx} = 6x \quad , \quad f''_{xy} = -3 = f''_{yx}$

$f''_{yy} = 6y$

$$D = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = \underline{\underline{36xy - 9}} \; ; \quad \begin{array}{l} D(P_1) = -9 < 0 \\ D(P_2) = 36 - 9 = 27 > 0 \end{array}$$

$D(P_1) < 0$ nincs SZ.É.

$D(P_2) > 0$ van -"-

$f''_{xx}(P_2) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$ P_2-ben minimuma van a fgv-nek.

$f_{min}(1,1) = 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1^3 = \underline{\underline{-1}}$

---

p1:

$f(x,y) = 2x^2 - xy - 3y^2 + 2x + y + 27$

Szükséges feltétel:

$f'(x) = 4x - y + 2 = 0$
$f'(y) = -x - 6y + 1 = 0$ $\Big\}$

$y = 4x + 2$
$-x - 6(4x+2) + 1 = 0$
$-x - 24x - 12 + 1 = 0$
$-25x - 11 = 0 \Rightarrow x = -\frac{11}{25}$

$y = 4x + 2 = -\frac{44}{25} + 2 = \frac{6}{25}$ $\Rightarrow$ A fgv-nek szélső É.-e lehet
$P1\left(-\frac{11}{25} ; \frac{6}{25}\right)$ pontban

Elégséges feltétel:

$f''_{xx} = 4$

$f''_{yy} = -6$

$f''_{xy} = -1 = f''_{yx}$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = -24 - 1 = -25 < 0$$ nincs SZ.É. a P1-ben.

Feltételes szélsőérték:

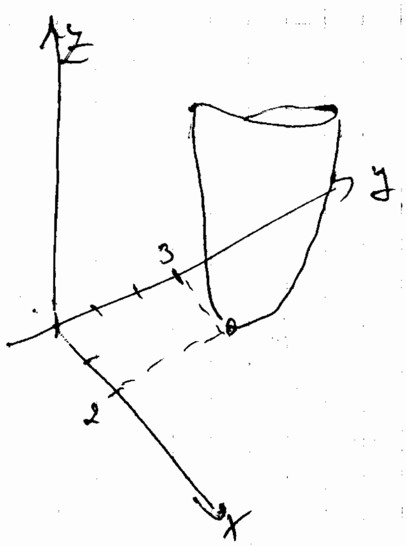
a) Az $f(x,y)$ fgv. SZ.É.-t keressük $g(x,y)=0$ feltétel teljesülése mellett.

Megoldás: a feltételekből kifejezzük az egyik változót és behelyettesítjük a fgv-be. Az így kapott egyváltozós fgv. szélsőértékeit meghatározzuk.

pl.: $(x-2)^2 + (y-3)^2$ $\quad g(x,y) = x+y-1=0$

$z = (x-2)^2 + (y-3)^2$ $\quad P(2,3,0)$

$z = x^2+y^2$



$x+y-1=0$

$x+y=1 \rightarrow$ sík

z - tetszőleges

$\boxed{y = 1-x}$

$f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2$

$f(x) = (x-2)^2 + (1-x-3)^2$

$f(x) = (x-2)^2 + \underbrace{(-x-2)^2}_{(x+2)^2}$ $\Rightarrow$ visszavezettük egyváltozós fgv. SZ.É. vizsgálatára

Szükséges feltétel:

$$f'(x) = 2(x-2) + 2(x+2) = \emptyset$$

$$f(x) = x-2 + (x+2) = \emptyset$$

$$2x = \emptyset$$

$$x = \emptyset$$

$$f''(x) = 2+2=4$$

Elégséges feltétel:

$f''(0) = 4 \neq \emptyset$ -> van szélsőérték

$f''(0) = 4 > 0$ -> minimum

$y = 1-\emptyset = 1$ $P_{min}(\emptyset, 1)$ $(0, 1, 8)$

$z = (x-2)^2 + (y-3)^2 \Rightarrow x=\emptyset \quad y=1$

$z = (0-2)^2 + (1-3)^2 = 8$

$P_{min}\ (0, 1, 8)$

b, Lagrange-féle módszer

Adott $f(x,y)$ fgv. sz.é.-t ~~[illegible]~~ keressük $g(x,y)=\emptyset$ feltétel mellett.

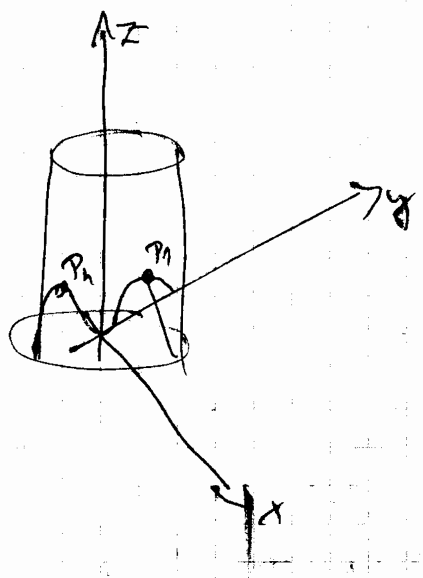
$$\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

Szükséges feltétel:

$$\left.\begin{matrix} \Phi'_x = \emptyset \\ \Phi'_y = \emptyset \\ \Phi_\lambda = \emptyset \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow g(x,y) = \emptyset$$

pl.: $f(x,y) = xy$ $\qquad g(x,y) = x^2+y^2-4 = \emptyset$

$\Downarrow$ nyeregfelület $z = xy$ $\qquad \Downarrow$ z tengelyű $r=2$ sugarú henger



$$\Phi(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2+y^2-4)$$

$$\Phi'_x = y + 2\lambda x = \emptyset \Rightarrow \lambda = \frac{-y}{2x}$$

$$\Phi'_y = x + 2\lambda y = \emptyset \qquad \Phi'_\lambda = x^2+y^2-4 = \emptyset$$

$$\Phi'_y = x - 2y\frac{y}{2x} = \emptyset \Rightarrow x^2 = y^2$$

$$\Phi'_\lambda \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

	x	y	z
P_1	$(\sqrt{2}$;	$\sqrt{2}$;	$2)$
P_2	$(\sqrt{2}$;	$-\sqrt{2}$;	$-2)$
P_3	$(-\sqrt{2}$;	$\sqrt{2}$;	$-2)$
P_4	$(-\sqrt{2}$;	$-\sqrt{2}$;	$+2)$

Érintősík

Érintősík egyenlete

1., A felület egyenlete: $\quad \bar{r} = \bar{r}(u,v)$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} ; \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$ vektoriális szorzat

ocz $(\bar{r}-\bar{r}_0)\cdot n = \emptyset$, ahol $\bar{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\bar{r} = (x, y, z)$

b, A felület egyenlete:

$z = f(x,y)$ alakú

$\bar{n}\ (-f'(x)\ ;\ -f'(y)\ ,\ 1)$

$P_0 \to \bar{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\bar{n}(P_0) = (-f'_x(P_0)\ ;\ -f'_y(P_0)\ ,\ 1)$

$(\bar{r}-\bar{r}_0)\ (-f'_x(P_0), -f'_y(P_0), 1) = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{-f'_x(P_0)\cdot(x-x_0) - f'_y(P_0)\cdot(y-y_0) + (z-z_0) = \emptyset}$

$\bar{r} - \bar{r}_0 = (x-x_0\ ;\ y-y_0\ ;\ z-z_0)$

Pl. $z = x^2+y^2$ $\qquad P_0(\overset{x_0}{-2}, \overset{y_0}{1})$

felület P_0 - pontbeli érintősík egyenlete

$z = x^2+y^2 \to z$ tengelyű felfelé nyíló forgási paraboloid.

$z_0((-2)^2 + 1^2) = 5 \qquad P_0(-2, 1, 5)$

$\bar{n} = (-f'_x, -f'_y, 1)$

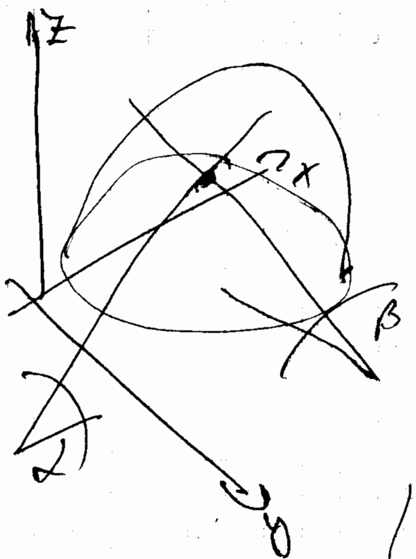
$\bar{n} = (-2x, -2y, 1)$

$\bar{n}(P_0) = (4, -2, 1)$

$r - r_0 = x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0 = (x+2), (y-1), (z-5)$

$4(x+2) - 2(y-1) + z - 5 = \emptyset \Rightarrow 4x - 2y + z + 5 = \emptyset$

Iránymenti derivált



$$\operatorname{tg}\alpha = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}$$

$z = f(x,y)$, adott α szög

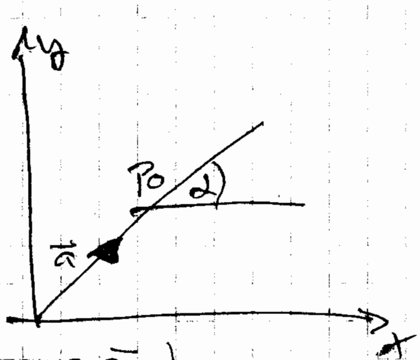
$$\boxed{\frac{df}{ds} = f'_x \cdot \cos\alpha + f'_y \cdot \sin\alpha}$$ iránymenti derivált α iránya

$$\boxed{\left.\frac{df}{ds}\right|_{P_0} = f'_x(P_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(P_0)\cdot\sin\alpha}$$ P_0 pontbeli iránymenti derivált.

$$\frac{df}{ds} = \underbrace{(f'_x, f'_y)}_{\text{gradiens vektor}}\ \underbrace{(\cos\alpha \cdot \sin\alpha)}_{\bar{e}}$$

$|\bar{e}| = 1$

$$f = (f'_x, f'_y)$$



$$\frac{df}{ds} = (\operatorname{grad} f)\cdot\bar{e} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{df}{ds}\right|_{P_0} = (\operatorname{grad} f)\big|_{P_0}\cdot\bar{a}}$$

$z = f(x,y)$ és $\bar{a}$ vektor adott

$$\frac{df}{ds} = (f'_x, f'_y)\cdot\bar{a}^0 \quad \text{ahol } \bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$$

$$\boxed{\left.\frac{df}{ds}\right|_{P_0} = (f'_x(P_0), f'_y(P_0))\cdot\bar{a}^0}$$ eredmény egy szám

pl.:

$$f(x,y) = x^3y^2 + xy + \ln x \qquad P_0(1; -1) \quad \alpha = 60°$$

$$\text{ÉT } x > \emptyset$$

$$f'(x) = 3x^2y^2 + y + \frac{1}{x}$$

$$f'_y = 2x^3y + x$$

$$\text{grad } f = \left(3x^2y^2 + y + \frac{1}{x} ; 2x^3y + y\right)$$

$$\text{grad } f|_{P_0} = (3 - 1 + 1; -2 + 1) = (3, -1)$$

$$\bar{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha) = (\cos 60°, \sin 60°) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{df}{ds}\bigg|_{P_0} = (3, -1) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}}$$

Írjuk fel az iránymenti deriváltat u.a. nál a fgv-nek

$\bar{a} = (-3, 2)$ irányban

$$a^0 = \frac{a}{|a|} = \frac{(-3, 2)}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = \left(\frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\frac{-9}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}} = \underline{\underline{\frac{-11}{\sqrt{13}}}}$$

Végtelen sorok

Ismétlés:

számtani sorozat: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n}$

számtani sor: $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + (n-1)d$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

mértani sorozat:

$a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, \underbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}_{a_n}$

mértani sor: $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^{n-1}$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - 1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Numerikus sorok

numerikus sorozat: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ($a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$)

~~Probléma a vé~~

. numerikus sor

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \qquad a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2 \dots$$

Probléma a végtelen sor összegének a meghatározása

1, A sor részletösszegei:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

részletösszegek sorozata: $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

A részletösszegek sorozatának határértékét értjük a sor összegén. Ha ez a határérték létezik és véges akkor a sor konvergens más esetben divergens.

Végtelen mértani sor

Ált. alak.

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$$

q - quóciens a_1 - elsőtag

Részletösszeg

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_1 \cdot q$

$\vdots$

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$(q \neq 1)$

$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a_1 \frac{\overset{\emptyset}{q^n} - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{-1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

mivel $\lim_{n \to \infty} q^n = \emptyset$ ha $|q| < 1$, ezért a végtelen numerikus sor konvergens ha $|q| < 1$ és $s = \frac{a_1}{1-q}$

Ha $q = 1$, akkor $a_1 + a_1 + a_1 +$

$s_n = n \cdot a_1$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} n \cdot a_1 = \pm\infty \quad \begin{array}{l} + \text{ ha } a_1 > \emptyset \\ - \text{ ha } a_1 < \emptyset \end{array}$$

Ha $q = 1$ akkor a sor divergens

ha $q = -1$

$a_1 - a_1 + a - a_1$

$s = a_1 \quad s_2 = \emptyset \quad s_3 = a_1 \quad s_4 = \emptyset$

A részletösszegek sorozatának két torlódási pontja van.
Tehát a sor divergens.

Ha $q = -1$ akkor a ~~...~~ sor divergens

pl. $2+2^2+2^3+2^4+2^4+ = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$

$a_1 = 2 \quad q = 2$

$s_n = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$

<u>Összefoglalva</u>:

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ végtelen mértani sor konvergenciája

ha $|q| < 1$ konvergens és $s = \frac{a_1}{1-q}$

ha $|q| \geq 1$ divergens

<u>pl.</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ konvergens vagy divergens

$$-\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots + (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{(-1)\cdot 2}{3}\right)^n = (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$a_1 = -\frac{2}{3} \qquad q = -\frac{2}{3}$$

mivel $|q| < 1 \to$ konvergens

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-2/3}{1-\left(-2/3\right)} = \frac{-2/3}{5/3} = -2/5$$

Azt a sort amelynek tagjai váltakozó előjelűek <u>alternáló</u> soroknak nevezzük.

Harmonikus sor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{n} \Rightarrow$

divergens sor

$$s_1, s_2, s_3, s_n = \underbrace{1+\frac{1}{2}}_{3/2} + \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots}_{>\frac{1}{2}} + \frac{1}{n}$$

Konvergencia kritériumok:

Szükséges feltétel: a sor általános tagja tartson nullához, ha ez nem teljesül akkor a sor divergens

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ → $\sum a_n$ sor divergens lásd harmonikus

→ $\sum a_n$ sor konvergens

---

pl.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{4n-1}$

Szükséges feltétel $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{4n-1} = 1 \neq 0$

divergens

Leibnitz-kritérium:

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha

a, alternáló

b, és $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

és $|a_n| > |a_{n+1}|$ monoton csökkenő módon tart a nullához.

pl.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Leibnitz sor

Kritérium

$n \to$ pozitív egész

a, a sor alternáló $+ - + - + -$

b, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$|a_n| > |a_{n+1}|$; $\underbrace{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|}_{a_n} > \left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\right| \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad / \cdot n(n+1)$

$n+1 > n$

$1 > 0$ ✓

A sor konvergens ~~~~ Leibnitz-sor $s = \ln 2$

Pozitív tagú sorokra vonatkozó kritérium

(Nem negatív)

① Majoráló, Minoráló

Adott $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ha $b_n \geq a_n$, $n > 1$ esetén akkor a $\sum b_n$ sor majoráns sora ~~~~ $\sum a_n$ sornak vagy $\sum a_n$ minoráns sora $\sum b_n$ sornak.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ha a $\sum b_n$ majoráns sor konvergens akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens. Ha a $\sum a_n$ minoráns sor divergens akkor a $\sum b_n$ sor is divergens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konv $\Rightarrow$ konv

div $\Leftarrow$ div

pl: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ konv. nagyo sor

$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$ $n=2$, ha $n>1$ $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

div $\Leftarrow$ div

pl: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ $\frac{1}{n \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ végtelen m. sor, $q = \frac{1}{3}$, $|q| < 1 \Rightarrow$ konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

konverg $\Leftarrow$ konvergens

---

② Hányados kritérium (Alembert-féle krit.)

Felt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $a_n > 0$

bizonyítható, ha $\frac{a(n+1)}{a_n} < c < 1$ minden n-re akkor a $\sum a_n$ sor konvergens

Gyakorlatban

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1 \Bigg\}$ akkor a sor $\begin{matrix} \text{konvergens} \\ ?\ \text{ezzel a módszerrel nem dönthető el.} \\ \text{divergens} \end{matrix}$

pl.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$ konv. vagy div.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{\cancel{2^{n+1}}\, 2} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

konvergens

pl.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n!}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{(n+1)!}}{\frac{2}{n!}} = \dfrac{2}{\cancel{n!}\,(n+1)} \cdot \dfrac{\cancel{n!}}{2} =$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n+1} = \emptyset < 1$ konvergens

Cauchy-féle kritérium

bizonyítható ha $\sqrt[n]{a_n}$ kisebb $< c < 1$ minden n-re

a $\sum a_n$ sor konvergens

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1$ $\begin{matrix} \text{konvergens} \\ ? \\ \text{divergens} \end{matrix}$

pl. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Downarrow$

konvergens

Általában igaz, hogy véges számú tag elhagyása vagy hozzávétele a sor konvergenciáját nem változtatja meg.

Nevezetes HÉ.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ha $a>0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ha $|q|<1$

pl: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 3} = \frac{1}{3} < 1$ konv.

---

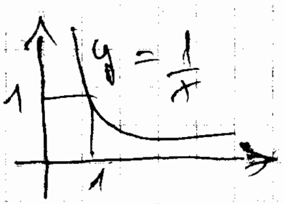
④ Integrál kritérium

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ha találunk olyan monoton csökkenő pozitív $f(x)$ fgv-t, hogy $f(n) = a_n$ akkor a Σa_n sor attól függően lesz konvergens vagy divergens, hogy

$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ improprius integrál konvergens vagy divergens

$f(x)$ monoton csökkenő, pozitív

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} +$ $\qquad$ $f(x) = \frac{1}{x}$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to+\infty} [\underbrace{\ln b}_{+\infty} - \overbrace{\ln 1}^{0}]$$

$\Rightarrow +\infty$ divergens $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens

---

<u>Abszolút konvergencia</u>

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens.

pl.:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$ abszolút konvergens?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{4^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

$a_1 = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{4}$ mivel $|q| = \left|\frac{1}{4}\right| < 1 \Rightarrow$ konv.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$ abszolút konvergens

pl.:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ Leibnitz-sor abszolút konvergens-e?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \text{harmonikus sor} \Rightarrow \text{divergens}$$

Ebből az következik, hogy a Leibnitz-sor nem abszolút konvergens azaz feltételesen konvergens.

Az abszolút konvergens sorok tetszés szerint átrendezhetők és a sor összege nem fog megváltozni.

Műveletek konvergens sorokkal

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens sorokat.

Ezek összegei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$

① $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c \cdot A \quad c \in \mathbb{R}$

② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_n+b_n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

pl:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n}}_{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{4}{5^n}\right)} = 3 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{\substack{a_1 = 1 \\ q = \frac{1}{2}}} + 4 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}}_{\substack{a_1 = \frac{1}{5} \\ q = 1/5}} \Rightarrow$$

$$s = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\Rightarrow 3 \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + 4 \frac{\frac{1}{5}}{1-1/5} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{\frac{1}{5}}{4/5} = 4$$

---

③ Cauchy-féle szorzás

Két abszolút konvergens sor szorzata konvergens sort ad. És összege a két sor összegének szorzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} = A \cdot B$$

Függvénysorok

$f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)$ feltételezzük, hogy ezek a fgv-ek közös pl. (a,b) É.T. tartománnyal rendelkeznek. Szeretnénk megkapni a sor összegét. A sor összegét is a részletösszegek sorozatának határértékeként értelmezzük. Feltételezve, hogy ez a határérték létezik és véges. (konkrét fgv.) a sor összege egy fgv.

Azokat az x értékeket ahol a sor konvergens konvergencia tartomány pontjai. Konvergencia tartomány lehet 1 - valós számok halmaza.

2 - a valós számok halmazának részhalmaza (intervallum)

3 - lehet egy pont

4 - sehol sem konvergens (üres halmaz) a konvergencia tartomány

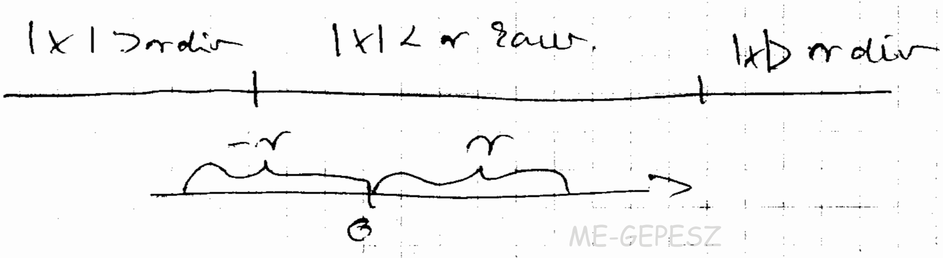
Hatványsorok

Általános alak

$$c_0+c_1\cdot x+c_2\cdot x^2+c_n\cdot x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n$$

Konvergencia tartomány. Azon x pontok összessége ahol a numerikus sor (amelyekhez jutunk) konvergens.

A konv. tart. középpontja az origó azért mert a hatványsorban x hatványai szerepelnek.



Konv. intervallum $|x|<1 \Rightarrow -r<x<r$

r: konvergencia sugár

r lehet $\begin{cases} +\infty, \text{ minden valós } x\text{-re konvergens} \\ a, \text{ ekkor a konvergencia int. } |x|<a \\ 0, \text{ csak a } x=0 \text{ helyen konvergens a sor.} \end{cases}$

Konvergencia tartomány meghatározása:

1, r - kiszámítása

2, külön meg kell vizsgálni a konvergenciát az intervallum végpontjaiban is.

r-meghatározása

- numerikus sorok

$c_1+c_2+c_3+\dots+c_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} < 1$

konvergens

- hatványsorok

$c_0+c_1x+c_2\cdot x^2+c_3x^3$

a, hányados kritériummal

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}\cdot x^{n+1}}{c_n\cdot x^n} \right| < 1 \quad \text{konv.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n}\cdot x \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \cdot |x| < 1$$

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = r$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

b., Gyök kritérium felhasználása

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|\cdot|x^n|} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\cdot|x| < 1 \qquad |x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

pl:

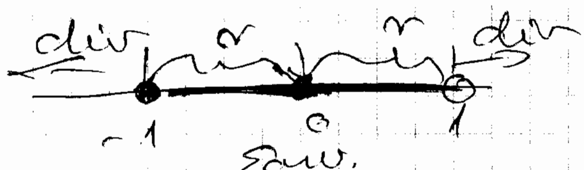
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} +$$

$c_n = \frac{1}{n}$, mert $\frac{x^n}{n} = \frac{1}{n} \cdot x^n$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} = \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{1} = \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow$$

$|x| < 1 \Rightarrow$ konvergens $\Rightarrow -1 < x < 1$ konvergens.

Vizsgálat a végpontokban



$$-1 \leq x < 1$$

ha $x = -1$ akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Leibnitz kritérium

a, alternáló

b, $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \varnothing$

$|a_n| \overset{?}{\geq} |a_{n+1}| \Rightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| > \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right|$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

$n+1 > n \Rightarrow$ konvergens

ha $x = 1$

akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor - divergens

konvergencia tartomány

$\boxed{-1 \leq x < 1}$