ue 2007. 03. 30.

2007. ápr. 16 ZH. 8:00-8:55

május 5. pót ZH ?! még kérdéses

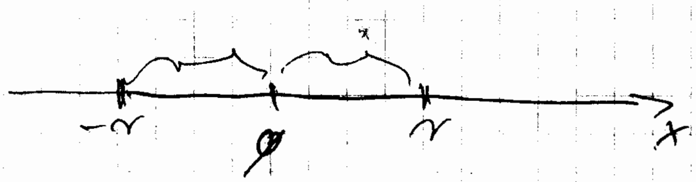
Az előadás pótlás időpontja egyeztetésben a szigorlattal

Hatványsorok

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

c_i : együtthatók $(i = 0, 1, 2, \dots)$

Azoknak a x-eknek az összessége, ahol a felírt hatványsor konvergens konvergencia tartománynak nevezzük.



Konvergencia tartomány lehetnek

- valós számok halmaza
- origóra szimm. intervallum (a végpontjaiban a zártság ill. nyitottság eltérhet.)
- $x=0$ helyen
- nincs pontja, üres

Konv. tart.

1, r konvergencia sugár meghatározása

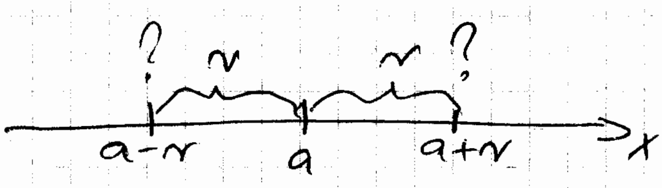
konv. int. $|x| < r$

2., megvizsgálom a konv-t az $x = r$ és $x = -r$ tartományban

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad \text{v.} \quad r = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n}}$$

Általánosítása:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2 (x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$



konv. int.:

$$\boxed{|x-a| < r}$$

megvizsgáljuk a sor konvergenciá- $\quad -r < x-a < r$

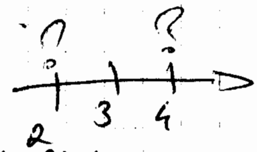
ját. az $x=a-r$ és $x=a+r$ helyen $\quad a-r < x < a+r$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n} = (x-3)+\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(x-3)^3}{3}+\frac{(x-3)^4}{4}+\dots+\frac{(x-3)^n}{n}+\dots$$

$$\frac{1}{n}\cdot(x-3)^n$$

c_n

$a = 3$



r meghat.: $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| =$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \underline{\underline{1}}$$

$|x-3|<1 \Rightarrow 2<x<4$

megvizsgálom a végpontokban:

ha $x=2$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

~~kép~~ Leibnitz kritérium:

a sor konvergens, ha: a, alternáló ✓

b, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

monoton csökkenő módon tart a 0-hoz

$|a_n| > |a_{n+1}|$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| > \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad | \cdot n(n+1)>0$

$n+1>n \quad /-n$

$1>0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konv.

ha $x=4$ akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens

$x=2$ helyen konv.
$x=4$ -||- div. } => konv. tart.

ha $x=2,6$ akkor

a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2,6-3)^n}{n}$ konv.

ha $x=5$, akkor

a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ div

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{n}{n+1} =$$

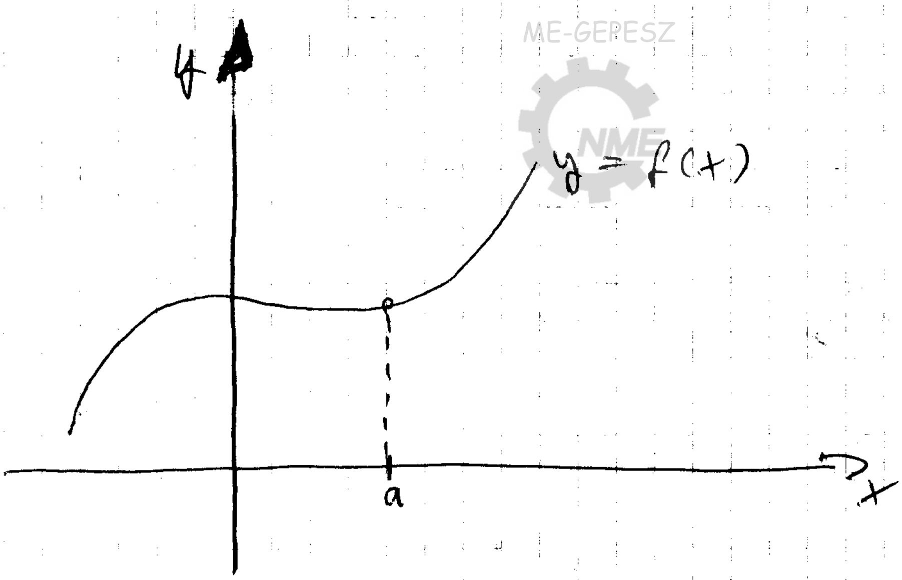
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} = 2 > 1 \Rightarrow \text{div.}$$

Taylor sor

Def: Legyen az $f(x)$ fgv. a $x=a_0$ hely környezetében akárhányszor differenciálható, akkor:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

akkor az $x=a$ hely körüli Taylor sorának nevezzük



$$T_n(x) = f(a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

n-ed fokú Taylor polinom

$$\boxed{R_n(x) := f(x) - T_n(x)}$$

Lagrange-féle maradéktag

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \begin{pmatrix} a < \xi < x \\ x < \xi < a \end{pmatrix}$$

ha $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, akkor $f(x)$ a Taylor sor összegfgv-e.

Speciális eset, ha $a = 0$ akkor <u>Maclaurin-sor:</u>

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Nevezetes sorok: $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

1, $\boxed{f(x)=e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\dots+\underbrace{\frac{1}{n!}}_{c_n}x^n+\dots}$

$f(x)=e^x$; $f^{(n)}(x)=e^x$; $(n=0,1,2,\dots)$

$f(0)=e^0$; $f^{(n)}(0)=e^0=1$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{(n+1)!}^{n!(n+1)}}{n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty \qquad r=\infty$$

pl: $\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\dots$

$x=\frac{1}{2}$ $\qquad +\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\dots$

pl: $f(x)=e^{-x}=1-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3\pm\dots\pm\frac{(-x)^n}{n!}+\dots$

1, deriválással

2, $x\to -x$

$(-x)^n=[(-1)x]^n=(-1)^n x^n$

$\frac{(-1)^n}{n!}x^n$

$f(x)=e^{2x}=1+\frac{1}{1!}2x+\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{3!}(2x)^3+\dots$

$x\to 2x$ $\qquad +\frac{1}{n!}(2x)^n+\dots$

(2) $f(x)=\sin x =$ $f(0)=\sin 0=0$

$f'(x)=\cos x$ $f'(0)=\cos 0=1$

$f''(x)=-\sin x$ $f''(0)=-\sin 0=0$

$f'''(x)=-\cos x$ $f'''(0)=-\cos 0=-1$

$f^{(4)}(x)=\sin x$ $f^{(4)}(0)=\sin 0=0$ $f(x)=\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$

$f^{(5)}(x)=\cos x$ $f^{(5)}(0)=\cos 0=1$

$$f(x)=\sin x = 0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\dots$$

$$f(x)=\sin x = \frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7\pm\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\dots$$

$r=\infty$ alternáló

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}}{\frac{(-1)^{n+1+1}}{(2(n+1)-1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!\,2n(2n+1)}{(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}2n(2n+1)=+\infty$$

---

(3) $f(x)=\cos x = 1+\frac{0}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{0}{5!}x^5+\frac{-1}{6!}x^6+\dots$

$f(x)=\cos x$ $f(0)=\cos 0=1$

$f'(x)=-\sin x$ $f'(0)=-\sin 0=0$

$f''(x)=-\cos x$ $f''(0)=-\cos 0=-1$

$f'''(x)=\sin x$ $f'''(0)=\sin 0=0$

$f^{(4)}(x)=\cos x$ $f^{(4)}(0)=\cos 0=1$

$f^{(5)}(x)=-\sin x$ $f^{(5)}(0)=-\sin 0=0$ $0!=1$

$$f(x)=\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6\pm\dots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$f(x) = \sin 2x = \frac{1}{1!}2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{5!}(2x)^5 - \frac{1}{7!}(2x)^7 \pm \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}(2x)^{2n-1} + \dots$$

a, $x \to 2x$

b, deriválással

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}(2x)^{2n-1}$$

$$f(x) = \cos\frac{x}{3} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{3}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{x}{3}\right)^6 \pm \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n} + \dots$$

a, deriválással

b, $x \to \frac{x}{3}$

$$\dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}$$

④, $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$ $\quad |x|<1$

$a_1 = 1$; $q = x$; ha $\boxed{|x|<1}$

$s(x) = \frac{a_1}{1-q}$; $|q|<1$

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^{n+1} + \dots$$

⑤ $f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots + \underbrace{(-x)^n}_{(-1)^n x^n} +$

$s = \frac{a_1}{1-q}$; $|q|<1$ $\quad a_1 = 1$

$q = -x$

Zárthelyi: HK1

$$f(x) = \frac{1}{1+4x^2} = \frac{1}{1-(-4x^2)} = 1 - 4x^2 + (4x^2)^2 - (4x^2)^3 + \dots + (-1)^n (4x^2)^n + \dots$$

$\frac{1}{1-q}$ $\quad a_1 = 1 \; ; \quad q = -4x^2 \qquad |-4x^2| < 1 \Rightarrow 4x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{4}$

$|x| < \frac{1}{2}$ konv. int.

Binomiális sor

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots$$

Ha $\alpha > 0$, akkor a binomiális tétel

Ha $\alpha = -1$, akkor végtelen mértani sor

A hatványsort lehet a konvergencia tartományban tagonként differenciálni, és a differenciálással kapott sor összegfgv-e megegyezik a differenciált sor összegfgv-ének deriváltjával.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$a_1 = 1; \quad q = x, \quad \boxed{|x| < 1} \Rightarrow r = 1$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{0 \cdot (1-x) - 1 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Hasonló képpen a sort lehet integrálni is tagonként és a kapott sor összegfgv-e egyenlő az adott sor összegfüggvényének integráljával.

A konv. sugár itt is változatlan marad.

$f(x) = \operatorname{arctg} x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \mp \dots + (-x^2)^n$

$|-x^2| < 1 \Rightarrow x^2 < 1$

$|x| < 1\ ;\ r = 1$

$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \mp \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots)\,dx$

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \mp \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots + C$

ha $x = 0$ $\quad \operatorname{arctg} 0 = 0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^5}{5} + \dots + C \Rightarrow \boxed{C = 0}$

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$

$\boxed{r = 1}$

ha $x = -1$, akkor $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \mp \dots + \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1} + \dots$

<u>Leibniz krit.</u>

alternáló sor

ha $x = 1$, akkor $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$

$\boxed{-1 \le x \le 1}$

[Fourier sort megnézni a könyvből]

$$f(x) = e^x \qquad a = 1$$

$$f'(x) = e^x \qquad f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(1) = e; \qquad f^{(n)}(1) = e$$

$$f(x) = e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \dots +$$

$$T_3(x) = e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$$

$$f(x) = e^x \qquad a = 0$$

$$f(x)\, e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

$$M_5(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

Kettős integrál

A határozott integrál általánosítása

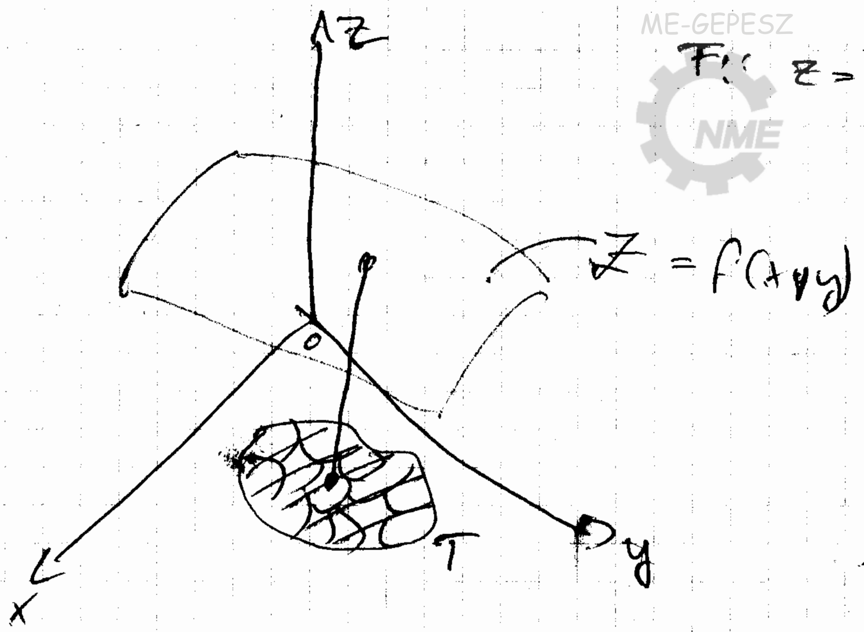
$f(x, y)$: folyt ($\Rightarrow$ korlátos) T tart-on

T tart:

korlátos, zárt és van területe

ez a tartomány az $x\,y$ síkban fog elhelyezkedni.

$F: z = f(x,y)\ (\geq 0)$



osszuk be a tartományt n részre

minden tartomány belsejében vegyünk fel egy pontot

$T_i : P_i(\xi_i ; \eta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

a fgv. értéke $f(\xi_i, \eta_i)$ helyen

jelölje a T_i résztartomány területét: $\mu(T_i)$

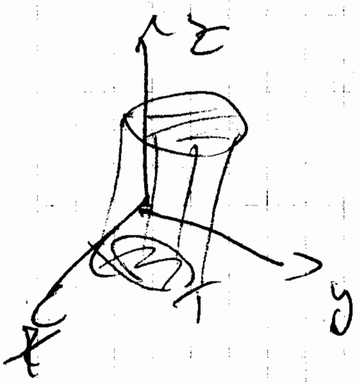
$$t_n := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu(T_i)$$

A t_n integrál közelítő összegek sorozatának határértékét az f fgv T tartomány feletti kettős integráljának nevezzük, hogyha a tart. felosztását minden határon túl finomítjuk.

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \delta_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu(T_i) = \iint_T f(x,y)\,dx\,dy$$

A kettős integrál geometriai jelentése egy térfogat melyet alulról az x,y síkban lévő T tartomány felülről a $z = f(x,y)$ T tart. feletti darabja felület

oldalról pedig egy olyan hengerpalást határol, melynek alkotója párhuzamos a z tengellyel és végig fut a T tartományt határoló görbén.

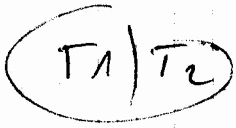


Kettős int. tulajdonságai

① $$\iint_T c f(x,y)\,dx\,dy = c\iint_T f(x,y)\,dx\,dy$$

② $$\iint_T [f(x,y)+g(x,y)]\,dx\,dy = \iint_T f(x,y)\,dx\,dy + \iint_T g(x,y)\,dx\,dy$$

③ $T = T_1 \cup T_2$ és $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, akkor



$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{T_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{T_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

(4) Ha a T tart-on az $m \le f(x,y) \le M$, akkor

$$m\mu(T) \le \iint_T f(x,y)\,dx\,dy \le M\mu(T)$$

ahol $\mu(T)$ a T tart. területe

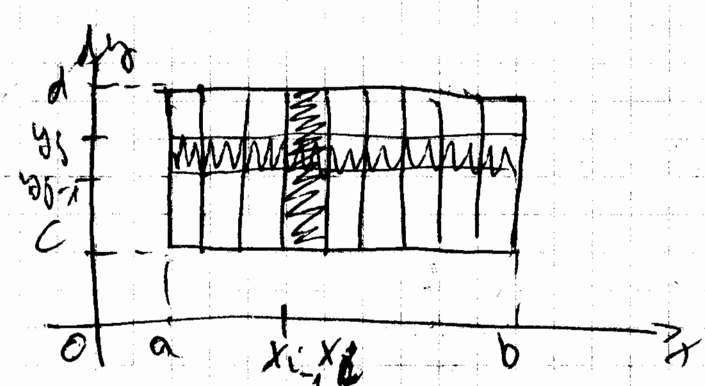
(5) ha az $f(x,y)$ fgv folytonos a T tart-on akkor integrálható és ott és T-nek van olyan $P(\xi,\eta)$ pontja, hogy

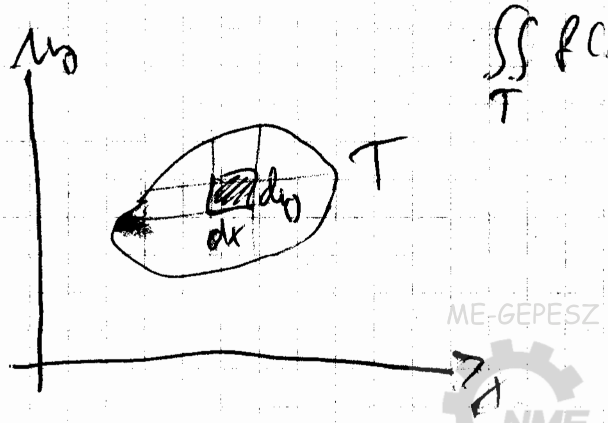
$$\frac{1}{\mu(T)} \iint_T f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)$$ hely

integrál közép

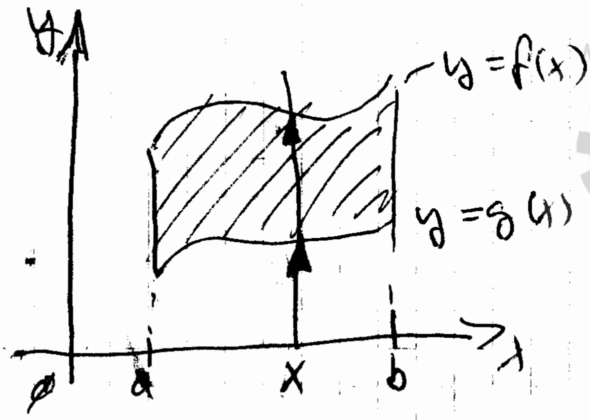
A kettős integrál kiszámítása ún. kétszeres integrál kiszámításával történik

Lásd könyv...

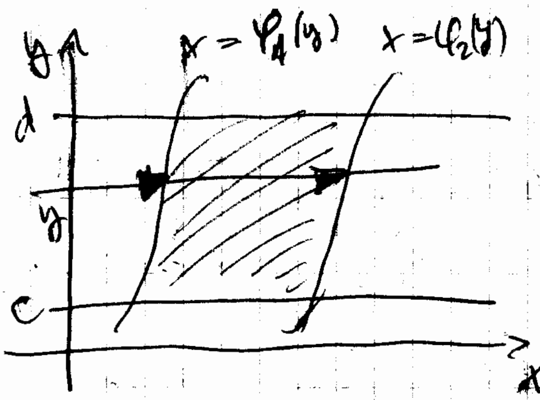




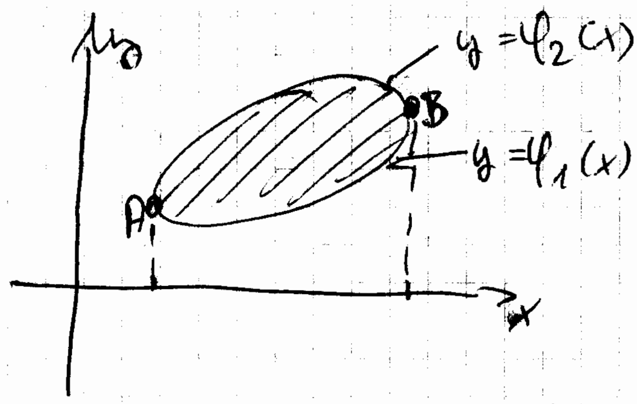
$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy$$



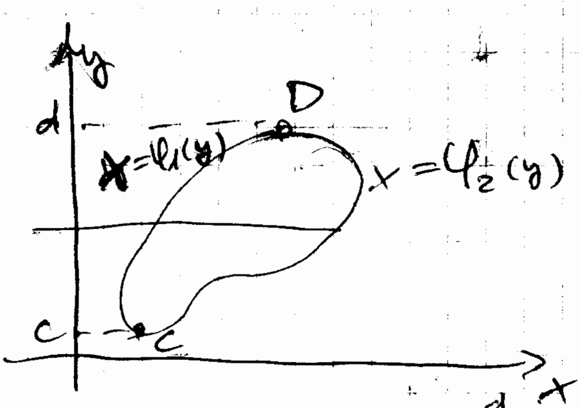
$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=g(x)}^{f(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$



$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d}\left[\int_{x=\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$$

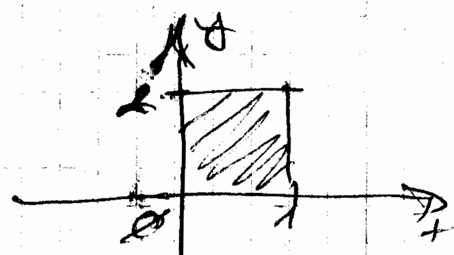


$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$



$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d}\left[\int_{x=\varphi_1(y)}^{x=\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$$

$$\iint_T xy\,dx\,dy \qquad T:\ 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2$$



$$=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2} xy\,dx\,dy=\int_{x=0}^{1}\left[\int_{y=0}^{2} xy\,dy\right]dx=$$

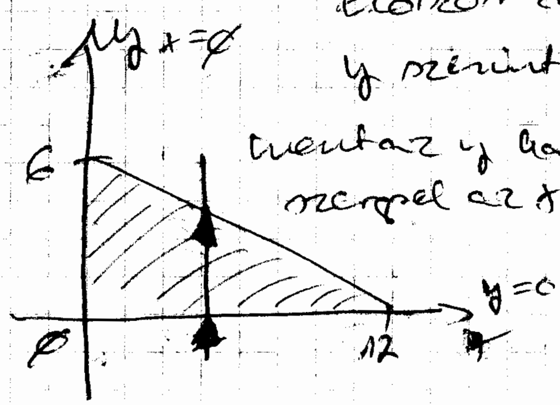
$$=\int_{x=0}^{1}\left[x\,\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{2}dx=$$

ha kettős integrálnál mind a 4 határ konstans akkor az integrációs tart. téglalap (vagy négyzet) melynek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. Ebben az esetben mindegy, hogy melyik változó szerint kezdjük az integrálást

$$=\int_{x=0}^{1}\Big[\underbrace{x\,\frac{2^2}{2}-x\cdot\frac{0^2}{2}}_{2x}\Big]dx=\int_{x=0}^{1}2x\,dx=\left[x^2\right]_0^1=\underline{\underline{1}}$$

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy$$

Először kötelező y szerint integrálni mert az y határokban szerepel az x változó



T: $x=0$

$y=0$

$x+2y=12$

$2y=12-x$

$y=6-\frac{x}{2}$

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy=\int_{x=0}^{12}\left[\int_{y=0}^{6-\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy\right]dx= \Rightarrow$$

$$= \int_{y=0}^{6} \left[\int_{x=0}^{12-2y} f(x,y)\, dx \right] dy$$

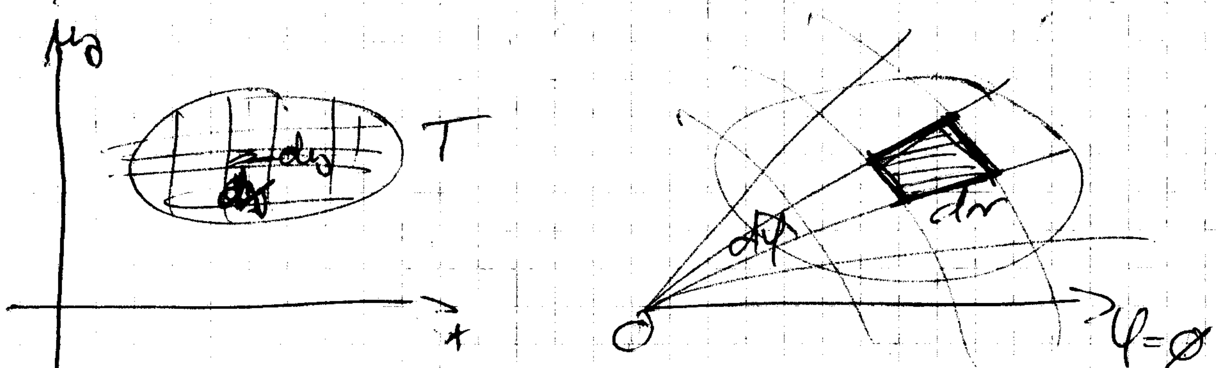
Először szét. x szerint integrálni, mert a határaiban szerepel az y változó

$$x + 2y = 12 \Rightarrow x = 12 - 2y$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{H.f.} \quad f(x,y) = 2 \\ \qquad\quad z = 2 \end{array}}$$

~~Új változó bevezetése~~

Polár koordinátákra való áttérés



$$\left.\begin{array}{l} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{array}\right\} \qquad dx\,dy = |J|\, dr\, d\varphi$$

$$\iint_T f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{T_{r\varphi}} f(r\cdot\cos\varphi,\ r\cdot\sin\varphi)\, |J|\, dr\, d\varphi = \Rightarrow$$

Jacobi determináns

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

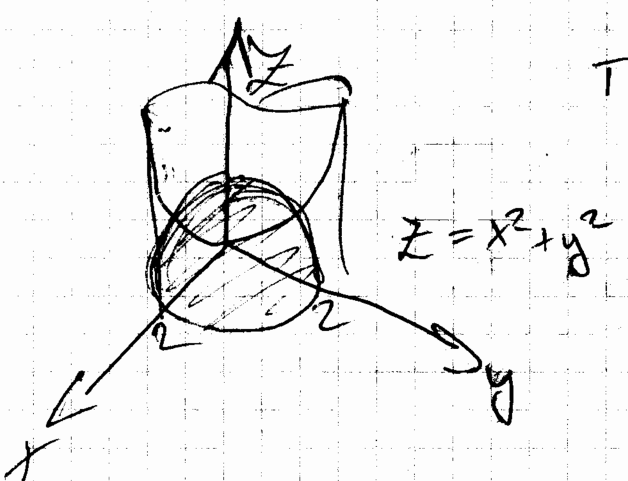
$$= r\cdot\cos^2\varphi + r\cdot\sin^2\varphi = \underline{\underline{r}}$$

$$= \iint_{T_{r\varphi}} f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

$$dx\,dy = r\cdot dr\, d\varphi$$

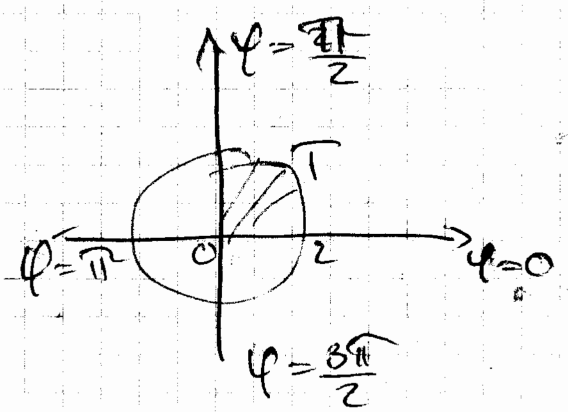
$$\iint_T (\overbrace{x^2+y^2}^{z})\,dx\,dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} \underbrace{r^2\cdot r\,dr}_{r^3}\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\varphi =$$

T: $x^2+y^2 \le 4$ körlap



T-t határoló görbe egyenlete

$x^2+y^2=4 \Rightarrow r^2=4 \Rightarrow r=2$



$$\hookrightarrow = \int_{\varphi=0}^{2\pi} (4-0)\,d\varphi = [4\varphi]_0^{2\pi} = \underline{\underline{8\pi}}$$

geometriai jelentése egy térfogat