Miskolci Egyetem
Matematikai Intézet

Név:..
Tanulókör:....................................
NEPTUN-kód:...................................

I. zárthelyi dolgozat Matematika II. c. tárgyból

A

1. Vizsgálja meg az $f(x,y)=\frac{x^3}{3}-x^2+xy^2-\frac{y^3}{3}$ függvényt szélsőérték szempontjából.

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= x^2-2x+y^2=0 \\ f'_y &= 2xy-y^2=0 \end{aligned}\right\} \to y(2x-y)=0$$

$y=0$

$x(x-2)=0$

$P_1(0,0)$

$P_2(2,0)$

$y=2x$

$x^2-2x+4x^2=0$

$x(5x-2)=0$

$x=0$, $y=0$: $P_1(0,0)$

$x=\frac{2}{5}$, $y=\frac{4}{5}$: $P_3\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$

$f''_{xx}=2x-2$

$f''_{yy}=2x-2y$

$f''_{xy}=2y$

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} 2x-2 & 2y \\ 2y & 2x-y \end{vmatrix}=4x^2-4xy-4x+4y-4y^2$$

$P_1(0,0) \to D(P_1)=0 \to$ tov. vizsgálat

$P_2(2,0) \to D(P_2)=8>0 \to$ van sz.é. $\quad f''_{xx}\big|_{P_1}=2>0 \to$ min

$f_{min}=-\frac{4}{3}$

$P_3\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right) \to D(P_3)=-\frac{40}{25}<0 \to$ nincs sz.é.

W

2. **Számítsa ki az alábbi integrálokat:**

a) $\int tg3xdx = \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\,dx = -\frac{\ln|\cos 3x|}{3} + C$

b) $\int xe^{4x}dx = \left| \begin{matrix} f = x & f' = 1 \\ g' = e^{4x} & g = \frac{e^{4x}}{4} \end{matrix} \right| = \frac{x \cdot e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + C$

c) $\int \frac{3dx}{x^2 - 2x} = \frac{3}{2} \cdot \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} \right) dx = \frac{3}{2} \left[-\ln|x| + \ln|x-2| \right] + C =$

$= \ln \sqrt{\left| \frac{x-2}{x} \right|^3} + C$

$\frac{3}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \rightarrow A = -\frac{3}{2}$

$B = \frac{3}{2}$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{dx}{1+(2x)^2} = \lim_{R \to \infty} \left[\frac{\operatorname{arctg} 2x}{2} \right]_0^R = \frac{\pi}{4}$

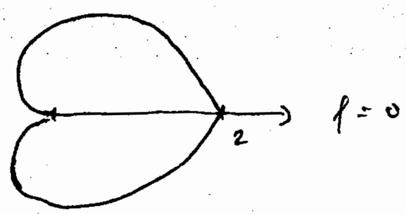
ME-GEPESZ
NME

3. Számítsa ki integrálszámítás segítségével

a) az $r = 1 + \cos\varphi$ görbe által közrezárt síkrész területét és készítsen vázlatot;

b) az $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$ görbe ívhosszát!

a)



$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^2 \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \quad (3)$$

$$= \left[\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

b)

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t} \, dt = 3\pi \quad (2)$$

4. Forgassa meg az $y = 2\sin 3x$ görbe $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ ívét az x-tengely körül. Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát!

$$V_x = \pi \int_0^{\pi/3} 4\sin^2 3x \, dx = \frac{4\pi}{2} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos 6x) \, dx = 2\pi \left[x - \frac{\sin 6x}{6}\right]_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{2\pi^2}{3}$$

5. Számítsa ki a $z = 4 - x^2 - y^2$ és az $z = 0$ sík által közre zárt térrész térfogatát!

$$V = \iint_{T_{kör}} \left[4 - (x^2 + y^2)\right] dx\,dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} (4 - r^2) \cdot r \, dr\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi$$

$T_{kör}$: $x^2 + y^2 = 4$

6. Legyen $f(x,y) = e^{2x}\cos 4y + 3x^2$. Számítsa ki az $4f''_{xx}(x,y) + f''_{yy}(x,y)$ összeget!

$f'_x = 2e^{2x}\cos 4y + 6x$

$f'_y = -4e^{2x}\sin 4y$

$f''_{xx} = 4e^{2x}\cos 4y + 6$

$f''_{yy} = -16e^{2x}\cos 4y$

$4f''_{xx} + f''_{yy} = 16e^{2x}\cos 4y + 24 - 16e^{2x}\cos 4y = 24$