Miskolci Egyetem

Matematikai Intézet

Név:..

Tanulókör:................................

NEPTUN-kód:....................

I. zárthelyi dolgozat Matematika II. c. tárgyból

5

B

1. Vizsgálja meg az $f(x,y)=\frac{x^3}{3}-x^2+xy^2+\frac{y^3}{3}$ függvényt szélsőérték szempontjából.

Szüks. felt.:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= x^2-2x+y^2=0 \\ f'_y &= 2xy+y^2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(2x+y)=0$$

1

$y_1=0 \qquad y_2=-2x$

I. $\boxed{y_1=0} \Rightarrow x^2-2x=0$

$x(x-2)=0 \qquad x_1=0,\ x_2=2$

$P_1(0;0)\,;\ P_2(2;0)$

II. $\boxed{y=-2x} \Rightarrow x^2-2x-4x^2=0$

1

$2x-3x^2=0$

$x(2-3x)=0$

$x_3=0;\quad x_4=\frac{2}{3}$

$y_3=0;\quad y_4=-\frac{4}{3}$

$P_3(0;0)\,;\quad P_4\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$

Elégs. feltétel:

$$\left.\begin{aligned} f''_{xx} &= 2x+2 \\ f''_{yy} &= -2x-2y \\ f''_{xy} &= -2y=f''_{yx} \end{aligned}\right\}$$

$$D=\begin{vmatrix} 2x+2 & -2y \\ -2y & -2x-2y \end{vmatrix}=2(x+1)2(-x-y)-4y^2=-4(x+1)(x+y)-4y^2=$$

$$=-4\left[x^2+x+xy+y+y^2\right]$$

$D(P_1)=0 \quad —$

$D(P_2)=-4[4-2]=-8<0 \quad \phi$

$D(P_4)=-4\left[\frac{4}{9}+\frac{2}{3}+\frac{8}{9}-\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\right]=-4\,\frac{4+6-8-12+16}{9} > 0$

2. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int ctg4xdx = \int \frac{\cos 4x}{\sin 4x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4\cos 4x}{\sin 4x}dx = \frac{1}{4}\ln|\sin 4x| + C$ 1 1

b) $\int xe^{3x}dx = \left| \begin{matrix} u = x & v' = e^{3x} \\ u' = 1 & v = \frac{e^{3x}}{3} \end{matrix} \right| = x\frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}dx =$

$= x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$ 2

c) $\int \frac{2dx}{x^2+3x} = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x} - \frac{\frac{2}{3}}{x+3} \right) dx = \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{2}{3}\ln|x+3| + \ln|C| =$ 1

$\frac{2}{x^2+3x} = \frac{2}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+Bx}{x(x+3)}$ 1

$2 \equiv A(x+3) + Bx$

$x=0 \quad 2 = 3A \Rightarrow \boxed{A = \frac{2}{3}}$

$x=-3 \quad 2 = -3B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{2}{3}}$ 1

$= \ln\left[\frac{|x|}{|x+3|}\right]^{2/3} C$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+9x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+(3x)^2} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{\operatorname{arctg} 3x}{3}\right]_0^b =$ 1

$= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty} [\operatorname{arctg} 3b - 0] = \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ 1

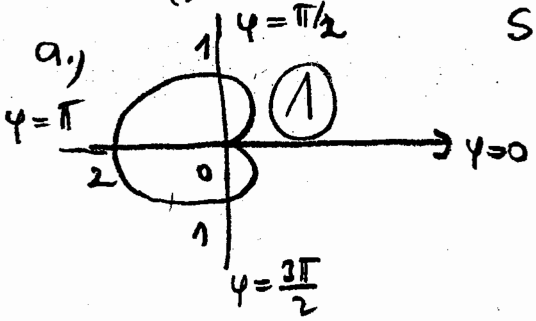
$\operatorname{arctg} 3b \to \frac{\pi}{2}$ 1

3. Számítsa ki integrálszámítás segítségével

a) az $r = 1 - \cos\varphi$ görbe által közrezárt síkrész területét és készítsen vázlatot;

b) az $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$ görbe ívhosszát!

a.)



$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} (1-\cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(1 - 2\cos\varphi + \underbrace{\cos^2\varphi}_{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}\right) d\varphi = \quad 1 \quad 1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \quad ?$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2} \quad 1$$

b.)

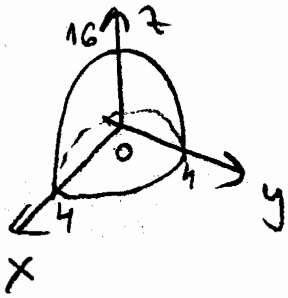
$$s = \int_{t=0}^{\pi} \sqrt{25\sin^2 t + 25\cos^2 t}\, dt = \int_{t=0}^{\pi} 5\, dt = [5t]_0^{\pi} = 5\pi \quad 1 \quad 1$$

4. Forgassa meg az $y = 3\cos 4x$ görbe $0 \le x \le \frac{\pi}{8}$ ívét az x-tengely körül. Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát!

$$V_x = \pi \int_0^{\pi/8} 9\cos^2 4x\, dx = 9\pi \int_0^{\pi/8} \frac{1+\cos 8x}{2}\, dx = \frac{9\pi}{2}\left[x + \frac{\sin 8x}{8}\right]_0^{\pi/8} = \quad 1 \quad 1$$

$$= \frac{9\pi}{2}\left[\frac{\pi}{8} + 0\right] = \frac{9\pi^2}{16} \quad 1$$

5. Számítsa ki a $z = 16 - x^2 - y^2$ és az $z = 0$ sík által közre zárt térrész térfogatát!



$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\le 16} (16 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{4} (16 - r^2)\, r\, dr\, d\varphi = \quad 1 \quad 1$$

$$= 2\pi \left[8r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^4 = 2\pi \left[8 \cdot 16 - 64 \right] = 2\pi \cdot 64 = \underline{\underline{128\pi}} \quad 1$$

6. Legyen $f(x,y) = e^{2x} \sin 4y + 8x^2$. Számítsa ki az $4 f''_{xx}(x,y) + f''_{yy}(x,y)$ összeget!

$$f'_x = 2e^{2x} \sin 4y + 16x \; ; \qquad f'_y = 4e^{2x} \cos 4y$$

$$f''_{xx} = 4e^{2x} \sin 4y + 16 \; ; \qquad f''_{yy} = -16 e^{2x} \sin 4y \qquad 3$$

$$4 f''_{xx} + f''_{yy} = 16 e^{2x} \sin 4y + 64 - 16 e^{2x} \sin 4y = \underline{\underline{64}}$$