Miskolci Egyetem

Matematikai Intézet

Név:...

Tanulókör:..................................

NEPTUN-kód:..........................

Pótzárthelyi dolgozat Matematika II. c. tárgyból

1. Vizsgálja meg az $f(x,y)=\frac{x^3}{3}-x^2+xy^2-\frac{y^3}{3}$ függvényt szélsőérték szempontjából.

$f'_x = x^2-2x+y^2=0$

$f'_y = 2xy-y^2=0 \Rightarrow y(2x-y)=0$

$y_1=0$ $\qquad$ $y_2=+2x$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x_1=0 \quad x_2=2$

$P_1(0;0) \quad P_2(2;0)$

$x^2-2x+4x^2=0$

$5x^2-2x=0$

$x(5x-2)=0$

$x_3=0 \quad x_4=\frac{2}{5}$

$y_3=0 \quad y_4=\frac{4}{5}$

$P_3(0;0) \quad P_4(\frac{2}{5};\frac{4}{5})$

$f''_{xx}=2x-2$

$f''_{yy}=2x-2y$

$f''_{xy}=2y=f''_{yx}$

$$D=\begin{vmatrix} 2x-2 & 2y \\ 2y & 2x-2y \end{vmatrix}=(2x-2)(2x-2y)-4y^2=4x^2-4xy-4x+4y-4y^2=$$

$$=4(x^2-xy-x+y-y^2)$$

$D(P_1)=0 \Rightarrow$ további vizsgálat szükséges

$D(P_2)=4(4-2)=8>0 \Rightarrow$ van szélsőérték $\quad f''_{xx}=2>0 \Rightarrow \min$

$f_{min}=-\frac{4}{3}$

$D(P_3)=4\left(\frac{4}{25}-\frac{8}{25}-\frac{10}{25}+\frac{20}{25}-\frac{16}{25}\right)=\frac{-40}{25}<0 \Rightarrow$ nincs sz.é.

2. **Számítsa ki az alábbi integrálokat:**

a) $\int \sin^5 x \cos x dx = \underline{\underline{\frac{\sin^6 x}{6} + C}}$

b) $\int x \sin 2x dx = \left| \begin{matrix} u = -\frac{\cos 2x}{2} & \boxed{u' = \sin 2x} \\ \boxed{v = x} & v' = 1 \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx =$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

c) $\int \frac{x+2}{x^2-2x-3} dx = \int \left(\frac{\frac{5}{4}}{x-3} - \frac{\frac{1}{4}}{x+1} \right) dx = \frac{5}{4} \ln|x-3| - \frac{1}{4} \ln|x+1| + C$

$$\frac{x+2}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-3)}{(x-3)(x+1)}$$

$x+2 = A(x+1) + B(x-3)$

$x=-1 \quad 1 = -4B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{4}}$

$x=3 \quad 5 = 4A \Rightarrow \boxed{A = \frac{5}{4}}$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+2x^2} = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2} dx = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{2} x}{\sqrt{2}} \right]_0^b =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{b \to \infty} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{2} x - 0 \right]$$

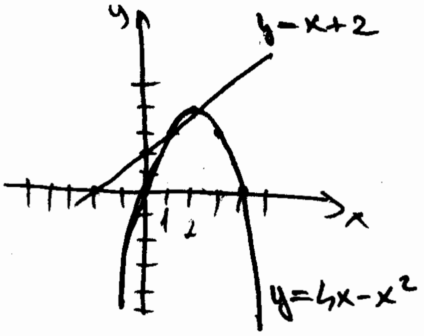
$\Downarrow$

?

3. Számítsa ki integrálszámítás segítségével

a) az $y = 4x - x^2$ és az $y = x + 2$ görbék által közrezárt síkrész területét és készítsen vázlatot;

b) az $\begin{cases} x = 16\cos t, \\ y = 16\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ görbe ívhosszát!



$$T = \int_1^2 (4x - x^2)\,dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(2 - \frac{1}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{3} = 6 - \frac{7}{3} =$$

$$= 3\frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{11}{3}}} \quad ?$$

$\dot{x}(t) = 16 \sin t$

$\dot{y}(t) = 16 \cos t$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{256 \sin^2 t + 256 \cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{256\,(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1})}\,dt =$$

$$\underline{\underline{= 32\pi}}$$

4. Forgassa meg az $y = \cos 2x$ görbe $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ívét az x-tengely körül. Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát!

$$V_x = \pi \int_0^{\pi/4} \cos^2 2x\,dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 4x)\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin \pi}{4}}_{0}\right] = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$$

5. Számítsa ki a $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ félgömb térfogatát integrálszámítással!

6. Számítsa ki az $f(x,y) = 2x^3 \cos(y^2 + y) + \sqrt{y} arctg(3x^4 + e^{-x})$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait!

$$f'_x = 6x^2 \cos(y^2+y) + \sqrt{y}\,\frac{12x^3 - e^{-x}}{1+(3x^4+e^{-x})^2}$$

$$f'_y = -2x^3 \sin(y^2+y)$$