FELADATSOR

1. Integrálás (az 1., 2. és 4. zh. feladatai):

$$\int \mathrm{ch}^3 x \cdot \mathrm{sh}\, x\, dx = ?, \qquad \int_0^1 x\, e^x\, dx = ? \qquad \int_0^\infty \frac{8}{1+x^2}\, dx = ?$$

$$\int x \cos 3x\, dx = ?, \qquad \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\, dx = ? \qquad \int_1^{\mathrm{ch}\,1} \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = ?$$

$$\int \frac{1}{x^2 - x}\, dx = ?, \qquad \int_{-1}^2 (x^2 + \mathrm{sgn}\, x)\, dx = ? \qquad \int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = ?$$

2. Szétválasztható (vagy arra vezető) differenciálegyenletek :

$$y' = -\frac{xy}{x+1}, \qquad y' = \frac{y}{1+y^2},$$

$$y' = \frac{2xy^2}{1-x^2} \quad \text{és} \quad y(0) = 1, \qquad y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} \quad \text{és} \quad y(1) = 1.$$

3. A lineáris d.e.-re vonatkozó 2 tétel felhasználásával adja meg számolás nélkül az alábbi d.e.-ek általános megoldását, majd ellenőrizze annak helyességét behelyettesítéssel:

$$y' - y = 1, \qquad x^2 y'' - xy' = x, \qquad y''' - y'' = 2, \qquad y^{(4)} + y'' = x.$$

4. Lineáris elsőrendű (vagy arra vezető) differenciálegyenletek :

$$y' - y = 2x - 3, \qquad y' - 2xy = 2x,$$

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{3}{x^2} \quad \text{és} \quad y(1) = 7, \qquad y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^3} y^3 \quad \text{és} \quad y(1) = 1.$$

5. Lineáris, állandó együtthatós, másodrendű differenciálegyenletek :

$$y'' + y' - 6y = 5e^{2x}, \qquad y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \qquad y'' + 2y' + y = 1 \;\text{ és }\; y(0) = 0,\; y'(0) = 2.$$

6. Az előadáson szereplő $\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega^2 x = g$ feladat esetén teljesüljön, hogy $\alpha < \omega$. Mutassuk meg, hogy a d.e. általános megoldása $x_{\text{i.á.}} = h + Ce^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)$ alakú. Az $x(0) = h$, $\dot{x}(0) = v_0$ kezdeti feltételek segítségével határozzuk meg a C és φ szabad konstansokat, majd vázoljuk a kapott függvényt!

7. A részletösszegek $\{s_k\}$ sorozatának felhasználásával döntse el az alábbi számsorokról, hogy konvergensek-e (ha igen, adja meg az összegüket):

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} .$$

8. Vizsgálja meg az alábbi számsorokat konvergencia szempontjából a hányados-, integrál-, Leibniz-kritériumok valamelyikével:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

9. A számsorokról tanultak felhasználásával döntse el, hogy az x_0 paraméter mely értékeire lesz az

$$1 + x_0 + {x_0}^2 + {x_0}^3 + \ldots + {x_0}^n + \ldots$$

számsor konvergens.

10. Adja meg az

$$1 + \sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{x}\right)^n + \ldots$$

függvénysor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

11. Határozza meg az alábbi függvények adott helyhez tartozó Taylor – sorát! Igazolja $R_n(x)$ vizsgálatával, hogy a megadott intervallumon a Taylor-sor a függvényt állítja elő! Adjon hibabecslést az adott fokszámú polinom esetén $[c, d]$-re nézve:

$$f(x) = e^x, \quad a = 0, \quad [c,d] = [0, 1], \quad n = 2;$$

$$f(x) = \cos x, \quad a = \pi/4, \quad [c,d] = [0, \pi/2], \quad n = 4;$$

$$f(x) = \ln x, \quad a = 1, \quad [c,d] = [1, 2], \quad n = 6.$$

12. Határozza meg az alábbi függvények Fourier-sorát! Használja fel a Fourier-sort egy-egy „nevezetes számsor” összegének kiszámítására:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ ha } x \in [-\pi, \pi) \\ f(x+2\pi) \text{ egyébként} \end{cases}, \qquad\qquad f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

13. Szemléltesse az $f : R^2 \to R,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvényt a metszetvonalak felhasználásával!

14. Ábrázolja az $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\quad x, y, z \geq 0$ nyolcad-gömb felületet, majd adja meg explicit D.k.-ás, hengerk.-ás, gömbk.-ás és paraméteres alakban is!

15. Ábrázolja a $z = 4 - x^2 - y^2$ forgási paraboloidot, majd adja meg hengerk.-ás és paraméteres alakban is!

16. Számítsa ki az összes elsőrendű és másodrendű parciális deriváltat és parciális differenciálhányadost az alábbi 2 esetre:
$f(x, y) = x^2 \operatorname{arctg} y^2, \quad \bar{a} = (2, 1);$ $\qquad g(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^{x_3}, \quad \bar{a} = (2, 3, 2).$

17. Számítsa ki $\overline{\operatorname{grad}} f$, $\overline{\operatorname{grad}} f(\bar{a})$, $\underline{\underline{H}}$, $\underline{\underline{H}}(\bar{a})$ -t az alábbi 2 esetre:
$f(x, y) = e^{x^2} + x \ln y, \quad \bar{a} = (2, 1);$ $\qquad f(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{sh} x_1^2 + x_2 \cos x_3, \quad \bar{a} = (0, 0, 0).$

18. Határozza meg az $f(x, y) = \sin(2x + y)$, $\bar{a} = (\pi/6, \pi/3)$ esetén a $T_1(x, y)$, $T_2(x, y)$ elsőfokú ill. másodfokú Taylor-polinomot! Számítsa ki az $f(0.5, 1)$, $T_1(0.5, 1)$, $T_2(0.5, 1)$ értékeket!

19. Keressen lokális szélsőérték-helyeket az alábbi függvényekhez:
$f(x, y) = \ln x^2 - \frac{1}{2}x - y^2 - 6y + 3;$
$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{3}y^3;$
$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z - 6x.$

20. Illesszünk egyenest a (-2, -2), (0, 1), (1, 2), (2, 2) pontok közé úgy, hogy az eltérések négyzetösszege minimális legyen!

21. Számítsa ki az alábbi kettős integrálokat a tartomány két különböző megadásával:
$\iint_T \cos(x + y)\,dxdy$, ahol $T = \{(x, y) : 0 \le y \le \pi,\ 0 \le x \le y\};$
$\iint_T y\,dxdy$, ahol $T = \{(\varphi, r) : 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le r \le 2\}.$

22. Számítsa ki $\iint_T (x^2 + y^2)\,dxdy$ értékét, ha T az origó középpontú, 2 egység sugarú kör első negyedbe eső része, az x-tengely és az $y = x + 2$ egyenletű egyenes által van közrezárva.

23. Számítsa ki $\iiint_V 1\,dxdydz$ értékét, ha V a koordinátasíkok és az (1,0,0), (0,2,0), (0,0,3) pontokon átmenő sík első nyolcadba eső része által van közrezárva. Ellenőrizze az eredményt középiskolai ismeretei alapján!

24. Számítsa ki $\iiint_V z\,dxdydz$ értékét D.-koord.-ás és hengerkoordinátás alakban is, ha V-t az xy sík és a $z = 4 - x^2 - y^2$ egyenletű felület zárja közre.

25. Adjon lineáris közelítést a Jacobi-mátrix segítségével, ha : $\bar{f}(x,y) = \begin{bmatrix} xe^y \\ \sin(2x+y) \end{bmatrix}$, $\bar{a} = (0,0)$.

26. Vizsgálja meg, hogy az

$$\bar{f}(x,y,z) = (z\cos xz,\ 3y^2,\ x\cos xz); \quad \bar{g}(x,y,z) = (2y-1,\ xy,\ -xz)$$

függvények örvénymentesek-e, forrásmentesek-e. Ha igen, próbáljon meg kitalálni hozzájuk skalárpotenciált, vektorpotenciált.

27. Mutassa meg, hogy az egységnyi ponttöltés $\bar{F} = \frac{1}{|\bar{r}|^3}\bar{r}$ erőtere örvénymentes és forrásmentes!

28. Igazolja a $\operatorname{div}\overline{\operatorname{rot}\bar{f}} = 0$, $\operatorname{div}\overline{\operatorname{grad} f} = \Delta f$ összefüggéseket hagyományos és nablás alakban is!

29. Számítsa ki az $\int_G (z,\ 2y,\ x)d\bar{r}$ és $\int_G (z,\ 2y,\ x+y)d\bar{r}$ integrálokat, ha G az A(0, 3, 0) és B(0, 0, 3) pontokat összekötő egyenesszakasz ill. valamely körív, s az irányítás $\overrightarrow{AB}$-nek megfelelő.

30. Számítsa ki $\int_F (-y,\ x,\ z)\,d\bar{F}$ értékét, ha F: $x+y+z=3$, $x,y,z \geq 0$ és felfelé mutató felületi normálist használunk.

31. Számítsa ki a Stokes-tételben szereplő integrálokat, ha $\bar{w} = (y,\ 3x,\ 4z)$; $F: z = 4 - x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 4$ és a felületi normális felfelé mutat.

32. Számítsa ki a Gauss-Osztrogradszkij-tételben szereplő integrálokat, ha $\bar{w} = (y,\ 3x,\ 4z)$ és a V térrészt a $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$ felületek határolják.